Exercice 6

1. $Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = e(t) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin t-\frac{2}{3\pi}\cos 2t$ (2)

Pour tout $t\in[0\,;+\infty[$; $R=5000\,\Omega$ et $C=10^{-4}$ F. En dérivant (2), on obtient :

$5000i'(t)+10^4 i(t)=\frac{1}{2}\cos t+\left(\frac{4}{3\pi}\right)\sin 2t$; d'où $\begin{cases} i'(t)+2i(t)=10^{-4}\cos t+\left(\frac{4}{15\pi}\times 10^{-3}\right)\sin 2t & (3) \\ t\in[0;+\infty[\end{cases}$.

2. $i_1(t)=\left(4\times10^{-5}\right)\cos t+\left(2\times10^{-5}\right)\sin t$; $i'_1(t)=-\left(4\times10^{-5}\right)\sin t+\left(2\times10^{-5}\right)\cos t$, on reporte dans l'équation Différentielle : $i'(t)+2i(t)=-\left(4\times10^{-5}\right)\sin t+\left(2\times10^{-5}\right)\cos t+2\left(4\times10^{-5}\right)\cos t+2\left(2\times10^{-5}\right)\sin t=10^{-4}\cos t$

$i_1(t)$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle $i'(t)+2i(t)=10^{-4}\cos t$.

3. $\begin{cases} i'(t)+2i(t)=\left(\frac{4}{15\pi}\times10^{-3}\right)\sin 2t \\ t\in[0;+\infty[\end{cases}$ .Elle est de la forme $i_2(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$;

$i'_2(t)=-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)$. on reporte dans l'équation Différentielle : $i'(t)+2i(t)=\left(\frac{4}{15\pi}\times10^{-3}\right)\sin 2t$

et on a : $i'(t)+2i(t)=-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)+2A\cos(2t)+2B\sin(2t)=\left(\frac{4}{15\pi}\times10^{-3}\right)\sin 2t$

en identifiant le coefficients on obtient le système :

$\begin{cases} 2B+2A=0 \\ 2B-2A=\frac{4}{15\pi}\times10^{-3} \end{cases}$ soit $B=\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}=-A$ et $i_2(t)=\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\cos(2t)+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\sin(2t)$

4. solution générale de l'équation différentielle (3) sans second membre est de la forme $i_0(t)=Ce^{-2t}$

Solution générale avec second membre est : $i(t)=i_0(t)+i_1(t)+i_2(t)$ et on obtient :

$i(t)=Ce^{-2t}+\left(4\times10^{-5}\right)\cos t+\left(2\times10^{-5}\right)\sin t+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\cos(2t)+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\sin(2t)$

Solution particulière vérifiant la condition initiale $i(0)=0$

$i(0)=C+4\times10^{-4}-\frac{1}{5\pi}10^{-3}=0$, donc $C=-4\times10^{-4}+\frac{1}{5\pi}10^{-3}$

$i(t)=\left(-4\times10^{-4}+\frac{1}{5\pi}10^{-3}\right)e^{-2t}+\left(4\times10^{-5}\right)\cos t+\left(2\times10^{-5}\right)\sin t+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\cos(2t)+\frac{1}{15\pi}\times10^{-3}\sin(2t)$