

Exercice 7

1. (a) Il faut résoudre l'équation homogène associée : $\frac{1}{200} y'(t) + y(t) = 146$ (1)

La solution générale est donnée par : $\omega_1(t) = ke^{-200t}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Il faut chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une constante, c'est à dire : $\omega(t) = \omega_0$ donc $\omega'(t) = 0$

Remplaçons dans l'équation (1) ; on obtient : $\frac{1}{200} \omega'(t) + \omega(t) = 146 \Rightarrow 0 + \omega_0 = 146 \Leftrightarrow \omega_0 = 146$

Une solution particulière est donc : $\omega_2(t) = 146$

La solution générale de l'équation complète est obtenue en ajoutant la solution générale de l'équation homogène à une solution particulière de l'équation avec second membre, c'est-à-dire :

$\omega(t) = ke^{-200t} + 146$ avec $k \in \mathbb{R}$

(b) On a $\omega(0) = 150$ donc $\omega(0) = ke^0 + 146 = 150$ donc $k = 4$.

On a donc bien : $\omega(t) = 4e^{-200t} + 146$

2. (a) On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-200t} = 0$ donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = 146$

La perte de vitesse est donc : $\omega_0 - \omega_\infty = 150 - 146 = 4$

(b) On a : $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right| = \left| \frac{4e^{-200t}}{146} \right| = \left| \frac{2e^{-200t}}{73} \right|$. Il faut donc résoudre : $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right| \leq \frac{1}{100}$ Donc :

$\left| \frac{2e^{-200t}}{73} \right| \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{2e^{-200t}}{73} \leq \frac{1}{100}$. Il vient : $e^{-200t} \leq \frac{73}{200} \Leftrightarrow -200t \leq \ln 0,365$ donc $-200t < \ln 0,365$

D'où $t \geq \frac{\ln(0,365)}{-200}$ et on obtient : $t \geq 0,00503929$. En conclusion la valeur approchée est $t = 0,005s = 5ms$