Exercice 9 (11 points)

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$f''(t)+\frac{6}{5}f'(t)+f(t)=1$, pour tout nombre réel t $f(0)=0$ *et* $f'(0)=0$.

1. Dans cette question on détermine une expression de $f(t)$.

a. Résoudre l'équation différentielle (E) $y''(t)+\frac{6}{5}y'(t)+y(t)=0$ (E) dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle t.

b. En déduire que la fonction f est définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t)=1-e^{-(3/5)t}\left[\cos\left(\frac{4}{5}t\right)+\frac{3}{4}\sin\left(\frac{4}{5}t\right)\right]$$

2. Dans cette question on détermine la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

a. Justifier que, pour tout nombre réel t, on a : $-e^{-(3/5)t}\leq e^{-(3/5)t}\cos\left(\frac{4}{5}t\right)\leq e^{-(3/5)t}$

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(3/5)t}\cos\left(\frac{4}{5}t\right)=0$

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. a. Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel t.

b. Montrer que : $f'(t)=0$ équivaut à $t_k=\frac{5k\pi}{4}$, où k désigne un nombre entier relatif.

c. On note pour tout nombre entier relatif k, $t_k=\frac{5k\pi}{4}$ et on pose $D_k=\left|f(t_k)-1\right|$

Montrer que : $D_k=e^{-\frac{3k\pi}{4}}$.