

Problème bts2002

On considère le système différentiel (S) suivant : $(S) \begin{cases} x'(t) + 2y(t) = -2\sin t & (E_1) \\ 2x(t) - y'(t) = -2\cos t & (E_2) \end{cases}$, où les fonctions x et y sont nulles si $t < 0$ et vérifient $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$.

I- On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution particulière. Les fonctions x et y sont des fonctions de la variable réelle t , deux fois dérivables sur \mathbb{R} .

1. En dérivant l'équation (E_1) et en utilisant l'équation (E_2), montrer que la fonction x vérifie, pour tout t dans \mathbb{R} , l'équation différentielle : $x''(t) + 4x(t) = -6\cos t$ (E)

2. a. Déterminer les constantes réelles a et b pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(t) = a\cos t + b\sin t$ soit une solution particulière de l'équation (E) .

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E_0) : $x''(t) + 4x(t) = 0$ (E_0)

c. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E). En déduire les solutions $x(t)$ et $y(t)$ du système (S).

3. Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$.

II-

1. Ecrire le système vérifié par les transformées de Laplace $X(p)$ et $Y(p)$ des fonctions x et y .

2. Montrer que pour tout réel p , $\frac{6p}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{2p}{p^2+4}$

3. Utiliser le résultat de la question précédente pour déterminer $X(p)$, en déduire $x(t)$, l'original de $X(p)$.

4. Déterminer $Y(p)$ puis la fonction y original de $Y(p)$.

III- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère la courbe (C) définie par la représentation graphique : $\begin{cases} f(t) = \cos(2t) - 2\cos t \\ g(t) = \sin(2t) - 2\sin t \end{cases} . t \in \mathbb{R}$

On limitera l'étude à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

1°. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g . En déduire un axe de symétrie de la courbe (C) .

2°. a. Montrer que $f'(t) = -4\sin(t/2)\cos(3t/2)$. Etablir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$

b. On admettra que $g'(t) = -4\sin(t/2)\sin(3t/2)$. Déterminer le signe de $g'(t)$.

c. En déduire les variations de f et g sur l'intervalle $[0; \pi]$.

d. Dresser le tableau des variations jointes des fonctions f et g .



3°. On admet que la tangente à la courbe (C) au point A de paramètre $t_A = 0$ a pour vecteur directeur \vec{i} .

Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (C) aux points B, C et D de paramètres

respectifs $t_B = \frac{\pi}{3}$; $t_C = \frac{2\pi}{3}$ et $t_D = \pi$. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (C) .

Correction

Problème 2002

I

$$1. (S) \begin{cases} x'(t) + 2y(t) = -2\sin t & (E_1) \\ 2x(t) - y'(t) = -2\cos t & (E_2) \end{cases} \quad \text{On dérive dans } (E_1) \quad x''(t) + 2y'(t) = -2\cos t ;$$

de $(E_2) \quad y'(t) = 2x(t) + 2\cos t$ et on reporte dans (E_1) on obtient :

$$x''(t) + 4x(t) + 4\cos t = -2\cos t \Leftrightarrow x''(t) + 4x(t) = -6\cos t \quad (E)$$

2. La solution générale de (E) avec second membre nul est $x_0(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$.

On recherche une solution particulière de (E) avec second membre sous la forme

$$x_1(t) = a\cos t + b\sin t$$

$$x_1'(t) = -a\sin t + b\cos t \quad \text{et} \quad x_1''(t) = -a\cos t - b\sin t ; \quad \text{on reporte dans } (E) :$$

$$-a\cos t - b\sin t + 4a\cos t + 4b\sin t = 3a\cos t + 3b\sin t = -6\cos t ; \quad \text{on identifie les coefficients :}$$

$$3a = -6 \quad \text{et} \quad 3b = 0. \quad \text{La solution particulière est donc } x_1(t) = -2\cos t$$

La solution générale de (E) est $x(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) - 2\cos t$.

On cherche $x'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t + 2\sin t$, on reporte dans $x'(t) + 2y(t) = -2\sin t \quad (E_1)$ et on a

$$2y(t) = -2\sin t - x'(t) = -2\sin t + 2A\sin 2t - 2B\cos 2t - 2\sin t. \quad y(t) = A\sin 2t - B\cos 2t - 2\sin t.$$

3. solution particulière de (S) vérifiant les conditions initiales $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$.

$$x(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) - 2\cos t \quad \text{on pose } t = 0, \text{ on obtient : } x(0) = A\cos(0) + B\sin(0) - 2\cos 0$$

$$x(0) = -1 \Rightarrow A - 2 = -1 \Rightarrow A = 1;$$

$$y(t) = A\sin 2t - B\cos 2t - 2\sin t \quad \text{on pose } t = 0, \text{ on obtient : } y(0) = A\sin 0 - B\cos 0 - 2\sin 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow -2B = 0 \text{ donc } B = 0. \quad \text{D'où :}$$

$$\text{La solution du système est } \begin{cases} x(t) = \cos 2t - 2\cos t \\ y(t) = \sin 2t - 2\sin t \end{cases}$$

$$\text{II- } \begin{cases} x'(t) + 2y(t) = -2\sin t \\ 2x(t) - y'(t) = -2\cos t \end{cases}, \quad L(\sin t \cup (t)) = \frac{1}{p^2 + 1} \quad \text{et} \quad L(\cos t \cup (t)) = \frac{p}{p^2 + 1};$$

$$L(x'(t)) = pX(p) - x(0^+) \quad L(y'(t)) = pY(p) - y(0^+).$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux équations

$$\text{différentielle. On obtient : } \begin{cases} pX(p) - x(0^+) + 2Y(p) = -2 \times \frac{1}{p^2 + 1} \\ 2X(p) - pY(p) - y(0^+) = -2 \times \frac{p}{p^2 + 1} \end{cases}, \quad x(0) = -1 \text{ et } y(0) = 0.$$

$$\text{Donc on obtient : } \begin{cases} pX(p) + 2Y(p) = \frac{-2}{p^2 + 1} - 1 \\ 2X(p) - pY(p) = \frac{-2p}{p^2 + 1} \end{cases}.$$


ça soutra !
Docs à portée de main

$$2. \text{ Pour tout réel } p, \quad \frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{2p}{p^2 + 4} = \frac{2p(p^2 + 4 - p^2 - 1)}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = \frac{6p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

3. Dans le système trouvé dans la question 1, on élimine $Y(p)$ en additionnant membre à membre

La première équation multipliée par p et la seconde multipliée par 2.

$$\begin{cases} p^2 X(p) + 2pY(p) = \frac{-2p}{p^2 + 1} - p \\ 4X(p) - 2pY(p) = \frac{-4p}{p^2 + 1} \end{cases} \times p, \quad \text{on obtient : } (p^2 + 4)X(p) = \frac{-2p}{p^2 + 1} - p + \frac{-4p}{p^2 + 1} = -p - \frac{6p}{p^2 + 1}$$

et enfin $X(p) = -\frac{p}{(p^2+4)} - \frac{6p}{(p^2+1)(p^2+4)} = -\frac{p}{(p^2+4)} - \left(2 \times \frac{p}{p^2+1} - 2 \times \frac{p}{p^2+4} \right)$;

$$X(p) = -\frac{p}{(p^2+4)} - 2 \times \frac{p}{p^2+1} + 2 \times \frac{p}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - 2 \times \frac{p}{p^2+1}$$

On applique la formule $\mathcal{L}(\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ du formulaire avec $\omega = 1$ et $\omega = 2$

Donc $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right) = \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, de $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4} - 2 \times \frac{p}{p^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4}\right) - 2 \times \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)$

On obtient : $x(t) = \cos(2t)\mathcal{U}(t) - 2 \cos t\mathcal{U}(t) = (\cos(2t) - 2 \cos t)\mathcal{U}(t)$.

$$\begin{cases} pX(p) + 2Y(p) = \frac{-2}{p^2+1} - 1 & \times \{2\} \\ 2X(p) - pY(p) = \frac{-2p}{p^2+1} & \times \{p\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2pX(p) + 4Y(p) = \frac{-4}{p^2+1} - 2 \\ 2pX(p) - p^2Y(p) = \frac{-2p^2}{p^2+1} \end{cases} ; \text{ par soustraction, on obtient :}$$

$$(p^2+4)Y(p) = \frac{-4}{p^2+1} - 2 + \frac{2p^2}{p^2+1} = -2 + \frac{2p^2-4}{p^2+1} \text{ et enfin : } Y(p) = -\frac{2}{p^2+4} + \frac{2p^2-4}{(p^2+4)(p^2+1)}$$

On transforme l'écriture de $Y(p)$, pour faire apparaître les dénominateurs :

$$\begin{aligned} 2 \frac{p^2-2}{(p^2+4)(p^2+1)} &= 2 \frac{2p^2+2-p^2-4}{(p^2+4)(p^2+1)} = 2 \frac{2(p^2+1)-(p^2+4)}{(p^2+4)(p^2+1)} \\ &= 2 \frac{2(p^2+1)}{(p^2+4)(p^2+1)} - 2 \frac{(p^2+4)}{(p^2+4)(p^2+1)} \\ &= \frac{4}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+1} \end{aligned}$$



On obtient donc $Y(p) = -\frac{2}{p^2+4} + \frac{4}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+1} = \frac{2}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+1}$.

On applique la formule $\mathcal{L}(\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ du formulaire avec $\omega = 1$ et $\omega = 2$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) - 2 \times \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right), \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) = \sin(\omega t)\mathcal{U}(t),$$

on obtient : $y(t) = \sin(2t)\mathcal{U}(t) - 2 \sin t\mathcal{U}(t) = (\sin(2t) - 2 \sin t)\mathcal{U}(t)$.

II

1. $\begin{cases} f(-t) = \cos(-2t) - 2 \cos(-t) = \cos(2t) - 2 \cos(t) = f(t) \\ g(-t) = \sin(-2t) - 2 \sin(-t) = -\sin(2t) + 2 \sin t = -g(t) \end{cases}$,

on constate que les points les point $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses pour tout $t \in [-\pi; \pi]$. la courbe (C) admet l'axes des abscisses pour axe de symétrie .

on pourra donc étudier les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; \pi]$ et compléter le graphique par symétrie .

2. f est dérivable sur $[0; \pi]$ et sa dérivée est définie par :

$$f'(t) = -2(\sin(2t) - \sin t) = -4 \sin t \cos t + 2 \sin t = 2 \sin t(1 - 2 \cos t) ;$$

b. sur $[0; \pi]$, $\sin t \geq 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1 - 2 \cos t$. dans l'intervalle $[0; \pi]$, la fonction cosinus est

$$\text{décroissante } 1 - 2 \cos t \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t \leq \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq t \leq \pi$$

$$\text{sur } \left[0; \frac{\pi}{3}\right] f'(t) \leq 0 ; f \text{ décroît et sur } \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right], \text{ et sur } f'(t) \geq 0 f \text{ croît .}$$

second méthode :

Rappels : $\sin p - \sin q = 2 \left(\sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \right)$. $\sin(2t) - \sin t = 2 \sin \left(\frac{2t-t}{2} \right) \cos \left(\frac{2t+t}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{3t}{2} \right)$

$$f'(t) = -2(\sin(2t) - \sin t) = -2 \times 2 \sin \left(\frac{2t-t}{2} \right) \cos \left(\frac{2t+t}{2} \right) = -4 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{3t}{2} \right)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -4 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{3t}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{t}{2} \right) = 0 \text{ ou } \cos \left(\frac{3t}{2} \right) = 0$$



$$\sin \left(\frac{t}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{t}{2} \right) = \sin 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2} = 0 + 2k\pi \\ \frac{t}{2} = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 + 4k\pi \\ t = 2\pi + 4k\pi \end{cases}, \text{ or } t \in [0; \pi], \text{ donc } t = 0$$

$$\cos \left(\frac{3t}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{3t}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3t}{2} = \left(\frac{\pi}{2} \right) + 2k\pi \\ \frac{3t}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} \right) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} \\ t = -\frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} \end{cases}, \text{ or } t \in [0; \pi],$$

donc $t = \pi$ et $t = \frac{\pi}{3}$ ($k=0$ et $k=1$).

$t \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{t}{2} \in [0; \pi/2]$, donc $\sin \left(\frac{t}{2} \right) > 0$ pour

$t \in [0; \pi]$.

$t \in [0; \pi/3] \Rightarrow \frac{3t}{2} \in [0; \pi/2]$, donc $\cos \left(\frac{3t}{2} \right) > 0$ pour

$t \in [0; \pi/3]$.

$t \in [\pi/3; \pi] \Rightarrow \frac{3t}{2} \in [\pi/2; 3\pi/2]$, donc $\cos \left(\frac{3t}{2} \right) < 0$ pour

$t \in [\pi/3; \pi]$.

t	0	$\pi/3$	π		
$\sin \left(\frac{t}{2} \right)$	0	+	1/2	+	0
$\cos \left(\frac{3t}{2} \right)$	1	+	0	-	0
-4		-		-	
$f'(t)$	0	-	0	+	0
$f(t)$	-1		-3/2		3

3. g est dérivable sur $[0; \pi]$ et sa dérivée vérifie : $g'(t) = 2 \cos 2t - 2 \cos t$, on applique la formule

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1. \quad g'(t) = 2(2 \cos^2 t - 1) - 2 \cos t = 2(2 \cos^2 t - 2 \cos t - 1)$$

La dérivée s'annule si $\cos t = 1$, On peut factoriser $g'(t)$ par $\cos t - 1$ $g'(t) = 2(\cos t - 1)(2 \cos t + 1)$

b. Sachant que $-1 \leq \cos t \leq 1$, on déduit $\cos t - 1 \leq 0$, donc $g'(t)$ est du signe contraire de $2 \cos t + 1$.

$g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq -\frac{1}{2}$. Dans l'intervalle $[0; \pi]$ la fonction cosinus est décroissante,

l'inéquation se traduit par $t \geq \frac{2\pi}{3}$. Donc sur $[0; \pi]$: si $t \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right]$, $g'(t) \geq 0$; g croît et si $t \in \left[0; \frac{2\pi}{3} \right]$,

$g'(t) \leq 0$, g décroît.

2^{ème} méthode :

$$\cos p - \cos q = -2 \left(\sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \right). \quad 2 \cos 2t - 2 \cos t = 2(\cos 2t - \cos t)$$

$$\cos 2t - \cos t = -2 \left(\sin \left(\frac{2t-t}{2} \right) \sin \left(\frac{2t+t}{2} \right) \right) = -2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \sin \left(\frac{3t}{2} \right) \text{ et enfin } g'(t) = -4 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \sin \left(\frac{3t}{2} \right)$$

$t \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{t}{2} \in [0; \pi/2]$, donc $\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ pour

$t \in [0; \pi]$.

$t \in [0; 2\pi/3] \Rightarrow \frac{3t}{2} \in [0; \pi]$, donc $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) > 0$ pour

$t \in [0; 2\pi/3]$.

$t \in [2\pi/3; \pi] \Rightarrow \frac{3t}{2} \in [\pi; 3\pi/2]$, donc $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) < 0$ pour

$t \in [2\pi/3; \pi]$.

t	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π			
$f'(t)$	0	-	0	+	$2\sqrt{3}$	+	0
$f(t)$	-1		$-3/2$		$1/2$		3
$g'(t)$	0	-	-2	-	0	+	4
$g(t)$	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$		0
Points	A	B	C	D			

4. tableau de variation :

5. Aux points B et D correspondants respectivement à $t_B = \frac{\pi}{3}$; et $t_D = \pi$:

si $t = \pi/3$, alors $f'(\pi/3) = 0$ et $g'(\pi/3) = -4\sin(\pi/6)\sin(\pi/2) = -2 \neq 0$

si $t = \pi$, alors $f'(\pi) = 0$ et $g'(\pi) = -4\sin(\pi/2)\sin(3\pi/2) = 4 \neq 0$

la dérivée de f s'annule mais pas la dérivée de g , en chacun de ces points la tangente admet pour vecteur directeur colinéaire au vecteur \vec{j} .

En B et D la tangente à (C) est parallèle à l'axe des ordonnées.

si $t = 2\pi/3$, alors $f'(2\pi/3) = -4\sin(\pi/3)\cos(\pi) = 2\sqrt{3} \neq 0$ et $g'(2\pi/3) = 0$. Au point C correspondant à $t_C = \frac{2\pi}{3}$,

la dérivée de g s'annule mais pas celle de f .

la tangente en C à la courbe (C) admet pour vecteur directeur colinéaire à \vec{i} .

En C la tangente à (C) est parallèle à l'axe des abscisses.

6. l'étude précédente permet de tracer l'arc de courbe correspondant à l'intervalle $[0; \pi]$. la symétrie par

rapport à l'axe des abscisses permettra de tracer la courbe (C) en entier.

on a admis, dans le texte, que la tangente en A est confondue avec l'axe de abscisses.

