TP MATHEMATIQUES FONCTIONS REELLES BTS1GO 2009-2010

Exercice 1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie comme suit : $\begin{cases} f \text{ est paire} \\ f(t) = 1 - \sin t \quad pour\ 0 \le t \le \pi \\ f \text{ est périodique de période } \pi \end{cases}$

1- Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi\ ]$.
Le plan sera muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 5 cm en ordonnée).

2-Etudier les variations de la fonction f.

Exercice 2

Un signal est modélisé par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f \text{ est paire et periodique de période } \pi \\ f(t) = t \sin t \text{ pour } t \in [0 ; \pi/2] \end{cases}$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\pi\ /2]$.
2. Soit C_1 la partie de la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0\ ;\pi\ /2]$, relativement à un repère orthonormal du plan (unité graphique 2 cm).
   Tracer les tangentes à C_1 aux points d'abscisses 0 et $\pi / 2$. Tracer C_1.
3. Dans le même repère tracer la représentation graphique C de f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi\ ]$

Exercice 3

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \left(1 + \cos^2 t\right)\sin^2 t$

1. a . Montrer que f est paire et périodique de période 2π
   b .Démontrer que la droite d'équation: $t = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
2. Montrer que $f\,'(t) = 4 \sin t \cos^3 t$. Rappels : ($(u \times v)' = u'v + v'u$ et $\left(w^2\right)' = 2w'w$
3. Etudier le signe de $f\,'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ et donner le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$
4. Montrer que $f(t) = \dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 2t - \dfrac{1}{8}\cos 4t$, puis calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(t)dt$

Exercice 4

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{12}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{1}{3}\sin 3t\right)$

1. Montrer que f est impaire et périodique de période 2π
2. Démontrer que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie
3. Montrer que $f\,'(t) = \dfrac{24}{\pi}\cos 2t \cos t$. Rappels : ($\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$)
4. Etudier le signe de $f\,'(t)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$ et donner le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
5. Représenter graphiquement la courbe de la fonction f dans un repère orthonormal (unité 2 cm) sur l'intervalle $[-\pi ; \pi\ ]$
6. Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(t)dt$.

Exercice 5

1. Etudier la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-t/4}$
   On montrera en particulier que la dérivée de g s'annule pour un nombre a et un seul dont on donnera une valeur exacte ; puis on déterminera une valeur approchée à 10-2 près de a et de g(a).
2. Déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près de g(1), g(2), g(4), g(8) et g(16). (Présenter les résultats dans un petit tableau)
3. Construire la courbe représentative (C) de g dans un repère orthonormé (unité 1cm). On précisera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 6

3) Soit la fonction g définie sur R par : $g(t)=1-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{3}+\frac{1}{15}\cos 4t\right)$

a- Démontrer que g est paire. Démontrer que g est périodique et admet pour période π .

b- On étudie g sur l'intervalle [0 ; π /2].

Calculer $g'(t)$ et démontrer que l'on a : $g'(t)=-\frac{8}{3\pi}(\sin 2t)\left(1+\frac{4}{5}\cos 2t\right)$

En déduire le sens de variation de g sur [0 ; π /2].

c- Sur le graphique de la question 1), dessiner la courbe représentative de g sur [0 ; π /2].
On placera les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses 0 et π /2.

Exercice 7

On considère la fonction φ définie sur R par : $\varphi(t)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)$

1° Montrer que φ est paire et périodique de période 4.

2° a) Calculer $\varphi'(t)$ pour tout réel *t* et vérifier que : $\varphi'(t)=\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$

b) En déduire le sens de variation de φ sur [0 ; 2].

3° Construire dans un plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives de *f* et de φ pour t appartenant à [–2 ; 2]. (Unité graphique : 4 cm).

Exercice 8

1. On considère le signal défini par la fonction f 2 π–périodique , impaire définie sur [0; π] par : $f(t)=t(\pi-t)$.

a) Étudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; π].
Construire la courbe représentative de la fonction *f* , restreinte à l'intervalle [0 ;π].
Démontrer que f est une fonction paire

b) Construire la courbe représentative de la fonction *f* , restreinte à l'intervalle [– 3π ; 3π].

2 - On considère un signal modélisé par la fonction *u* définie sur R par $u(t)=|\sin t|$.

a) Montrer que la fonction u est π -périodique et paire.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique de la fonction u , pour t∈ [– π , 2π] (unité graphique : 2 cm).

3. Soit la fonction f de R dans R , de la variable *t*, telle que : $\begin{cases} f(t)=1+\cos t \ \ pour\ t\in]0;\pi[\\ f \ est\ périodique\ de\ période\ 2\pi \end{cases}$

Représenter graphiquement f sur [– π; 2π].

4. Soit *f* la fonction 2π -périodique définie par $f(t)=t^2$ sur [–π;π].

Tracer dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ une ébauche du graphe de *f* sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$

5. On considère la fonction définie sur R , paire, π -périodique telle que $f(t)=\frac{\pi}{2}t$ si $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Tracer la représentation graphique de *f* sur $[-\pi\ ;\pi]$

6. Soit la fonction numérique *f* définie sur R , paire, périodique de période 1 telle que :

$\begin{cases} f(t)=1/2-\tau & si\ 0\le t\le \tau \\ f(t)=-\tau & si\ \tau\le t\le 1/2 \end{cases}$ où τ est un nombre réel tel que $0<\tau<2$. *Uniquement dans cette question*, on prendra $\tau=\frac{1}{6}$. Représenter la fonction *f* sur l'intervalle [-1; 1] dans un repère orthonormal.

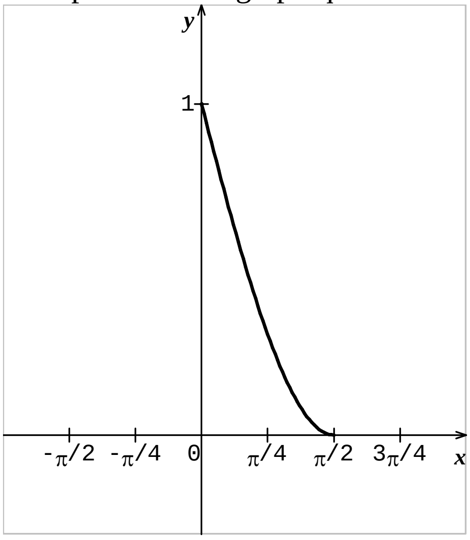
7-Soit la fonction numérique *f* de la variable réelle t telle que : $\begin{cases} f\ est\, impaire\, et\, de\ période\ 2\pi \\ f(t)=1-\cos 2t \quad si\ 0\le t\le \pi \end{cases}$

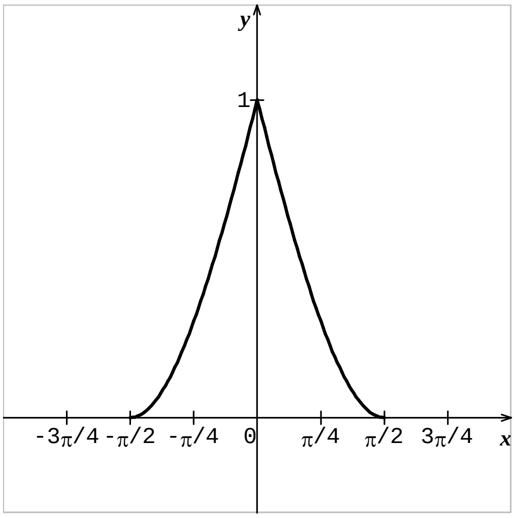
Etudier les variations de *f* sur [0 ; *π*]. Tracer, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité graphique1 cm), la courbe représentative de *f* sur [–2*π* ; 2*π*].

Correction

Exercice 1

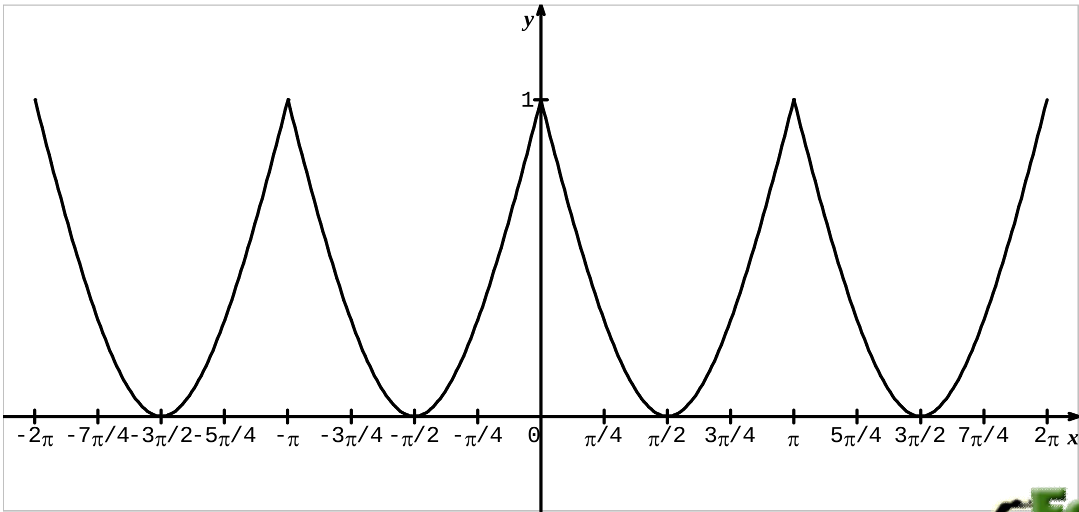
1 . Représentation graphique de fonction





On dessine la courbe sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

La fonction est paire donc son graphe est Symétrique par rapport à l'axe $[Oy)$



f est périodique de période π donc $f(t+\pi)=f(t)$ et $f(-t+\pi)=f(-t)$

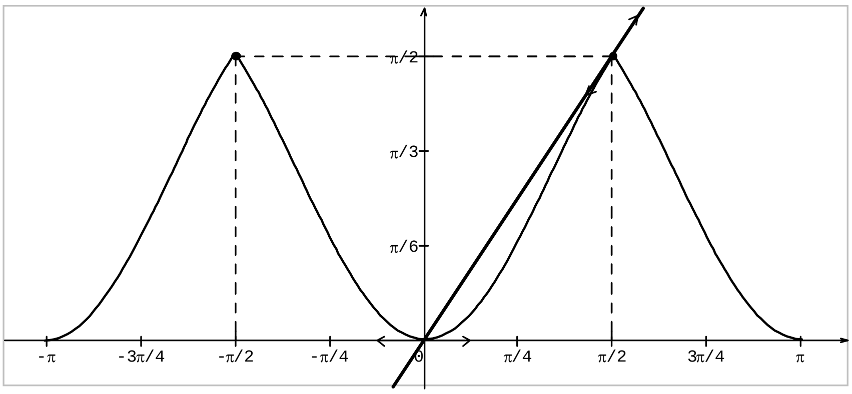
Or $t\in[0;\pi]$, donc $-t\in[-\pi;0]$ et $-t+\pi\in[0;\pi]$

$f(-t+\pi)=1-\sin(-t+\pi)=1+\sin(-t)=1-\sin t=f(t)$ comme $f(-t+\pi)=f(-t)$ on déduit que

$f(-t)=f(t)$ et par conséquent f est paire

La fonction f est $\pi-$périodique donc le graphique est obtenu par translation de vecteur $k\pi\vec{i}$.

Exercice 2



1. $f'(t)=\sin t+t\cos t$. $pour\, t\in\left[0;\pi/2\right]$

$\sin t\geq 0$ et $t\cos t\geq 0$, donc $f'(t)\geq 0$ et par conséquent f est croissante $pour\, t\in\left[0;\pi/2\right]$.

2. La tangente en 0 est horizontale :

$f'(0)=0$ .la tangente en $\frac{\pi}{2}$:

$f'(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2})=1+0=1$

et $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$, puis $y=f'(\frac{\pi}{2})(t-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=1\times(t-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=t$.

Exercice 3

- $f(-t)=\left(1+\cos^2(-t)\right)\sin^2(-t)=\left(1+\cos^2 t\right)\sin^2 t=f(t)$ donc f est paire.
- Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

$f(t+\pi)=\left(1+\cos^2(t+\pi)\right)\sin^2(t+\pi)=\left(1+(-\cos t)^2\right)(-\sin t)^2=\left(1+\cos^2 t\right)\sin^2 t=f(t)$, donc f est Périodique de période π .

- $f(t+\frac{\pi}{2})=\left(1+\cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\sin^2 t\right)\left(\cos^2 t\right)$ $\quad \begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t\end{cases}$

$f(t-\frac{\pi}{2})=\left(1+\cos^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\sin^2 t\right)\left(\cos^2 t\right)$

2. $f'(t)=-2\sin t\cos t\sin^2 t+\left(1+\cos^2 t\right)2\sin t\cos t=-2\sin t\cos t\sin^2 t+2\sin t\cos t+2\sin t\cos^3 t$

$f'(t)=-2\sin t\cos t+2\sin t\cos^3 t)+2\sin t\cos t+2\sin t\cos^3 t$; $\quad f'(t)=4\sin t\cos^3 t)$

3. pour tout $t\in[0;\pi]$: $\sin t\geq 0$ et $\cos^2 t\geq 0$, car c'est un carré et $\cos^2 t$ s'annule en même temps que $\cos t$.

on en déduit le tableau de signes pour $g'(t)$ et le tableau de variation pour g .

t	0		$\pi/2$		π
$\sin t$		$+$		$+$	
$\cos t$		$+$	0	$-$	
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(t)dt=\left[\frac{5t}{8}-\frac{1}{4}\sin(2t)-\frac{1}{32}\sin(4t)\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(t)dt=\frac{5\pi}{48}-\frac{\sqrt{3}}{32}$

Exercice 4

- pour tout t réel : $g(-t)=\frac{12}{\pi}\left(\sin(-t)+\frac{1}{3}\sin(-3t)\right)=\frac{12}{\pi}\left(-\sin(t)-\frac{1}{3}\sin(3t)\right)=-g(t)$, donc g est impaire
- On vérifie que g est 2π – périodique (c'est-à-dire que 2π est une période)

Pour tout t réel on a : $g(t+2\pi)=\frac{12}{\pi}\left(\sin(t+2\pi)+\frac{1}{3}\sin(3(t+2\pi))\right)=\frac{12}{\pi}\left(\sin(t)-\frac{1}{3}\sin(3t)\right)=g(t)$.

Pour tout t réel on a : $g'(t)=\frac{12}{\pi}\left(\cos(t)+\cos(3t)\right)$ .Or on sait que : $\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc $g'(t)=\frac{12}{\pi}\left(\cos(t)+\cos(3t)\right)=\frac{24}{\pi}\cos(2t)\cos t$. Etudions le signe de $g'(t)$:

Sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{4}]$, on a : $t\in[0;\frac{\pi}{4}]$ donc $2t\in[0;\frac{\pi}{2}]$ et $\cos(2t)\geq 0$ pour $t\in[0;\frac{\pi}{4}]$.

Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$, on a : $t\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$ donc $2t\in[\frac{\pi}{2};\pi]$ et $\cos(2t)\leq 0$ pour $t\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$.

Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}]$, on a : $t\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}]$ donc $2t\in[\pi;\frac{3\pi}{2}]$ et $\cos(2t)\leq 0$ pour $t\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}]$.

Sur l'intervalle $[\frac{3\pi}{4};\pi]$, on a : $t\in[\frac{3\pi}{4};\pi]$ donc $2t\in[\frac{3\pi}{2};2\pi]$ et $\cos(2t)\geq 0$ pour $t\in[\frac{3\pi}{2};2\pi]$.

Sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$, on a : $\cos(t)\geq 0$ et sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$ $\cos(t)\leq 0$,

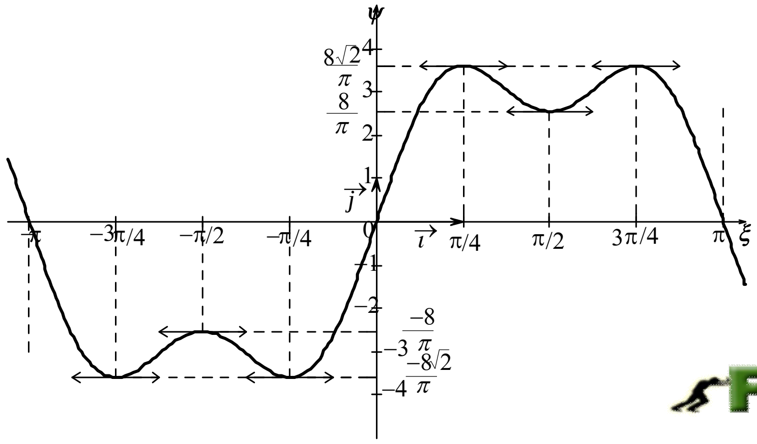
d'où le tableau de variation de g .

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos t$	1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	-1
$\cos(2t)$	1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$M=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}$	$\searrow$	$m=\frac{8}{\pi}$	$\nearrow$	$M=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}$	$\searrow$	0

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{12}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}\sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{12}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{12}{\pi}\left(\frac{3\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{12}{\pi}\left(\frac{4\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{12}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin 3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{12}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)==\frac{8}{\pi}\ ;\ g(0)=g(\pi)=0$$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{12}{\pi}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)=\frac{12}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{12}{\pi}\left(\frac{3\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{12}{\pi}\left(\frac{4\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$



Exercice 6

□ est symétrique par rapport à 0 et pour tout t réel :

$$g(-t)=1-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(-2t)}{3}+\frac{1}{15}\cos(-4t)\right)=1-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(2t)}{3}+\frac{1}{15}\cos(4t)\right)=g(t)$$, donc g est paire .

- On vérifie que g est π – périodique : Pour tout t réel on a :

$$g(t+\pi)=1-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(2(t+\pi))}{3}+\frac{1}{15}\cos(4(t+\pi))\right)=1-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(2t+2\pi)}{3}+\frac{1}{15}\cos(4t+4\pi)\right)=g(t).$$

Donc g est bien π – périodique.

b. g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et et $g'(t)=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{2\sin 2t}{3}-\frac{4\sin 4t}{15}\right)$.or $\sin 2a=2\sin a\cos a$,

donc $\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t$ et on a : $g'(t)=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{2\sin(2t)}{3}-\frac{8\sin(2t)\cos(2t)}{15}\right)=-\frac{8}{3\pi}\sin(2t)\left(1+\frac{4\cos(2t)}{5}\right)$

on a obtenu que : $g'(t)=-\frac{8}{3\pi}\sin(2t)\left(1+\frac{4\cos(2t)}{5}\right)$.

Etude de variation :

Lorsque $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ on a : $0\le 2t\le\pi$, donc $\sin(2t)\ge 0$ et $-1\le\cos 2t\le 1$ et $-\frac{4}{5}\le\frac{4}{5}\cos 2t\le\frac{4}{5}$ donc

$1-\frac{4}{5}\le 1+\frac{4}{5}\cos 2t\le 1+\frac{4}{5}$, c'est-à-dire $\frac{1}{5}\le 1+\frac{4}{5}\cos 2t\le\frac{9}{5}$ donc $1+\frac{4}{5}\cos 2t\ge 0$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et par conséquent : $g'(t)<0$ sur $\mathbb{R}$. g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

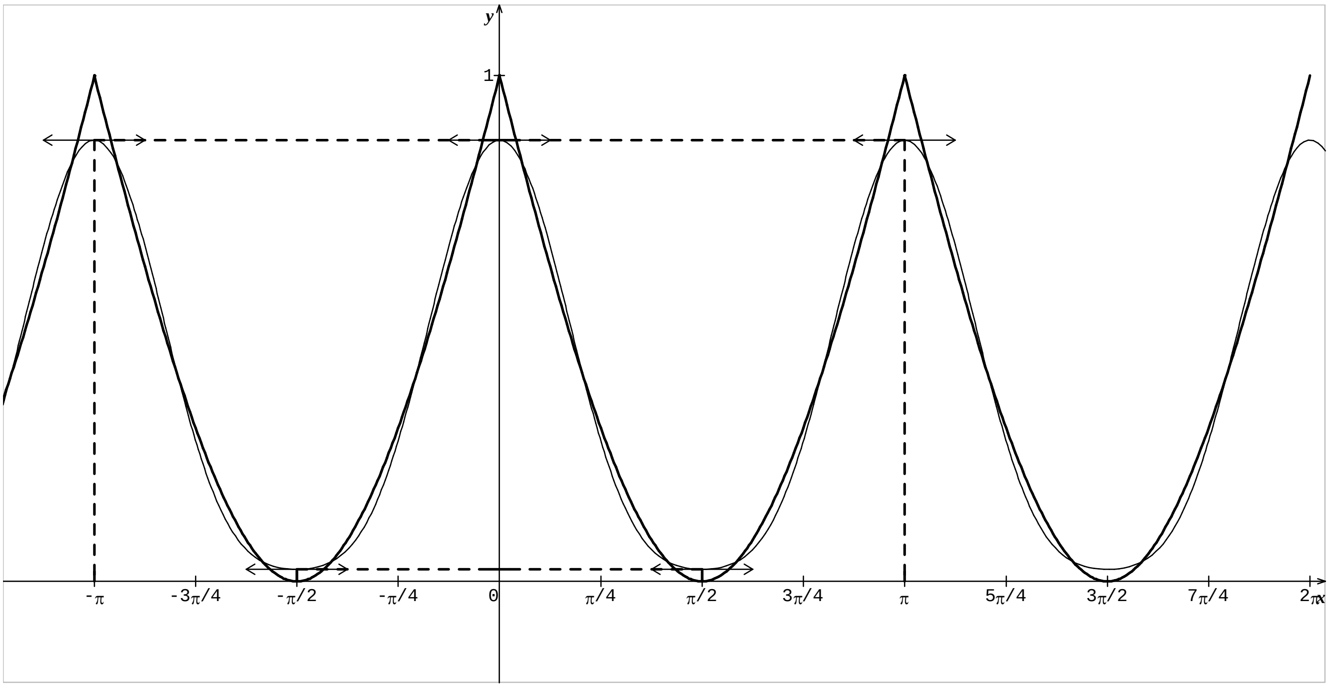
c. graphique

La tangente à la courbe représentant g au point d'abscisse 0 a pour équation : $y=g'(0)(x-0)+g(0)$

or $g(0)=1-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{3\pi}+\frac{4}{15\pi}=1-\frac{2}{5\pi}$ et $g'(0)=0$ donc $y=1-\frac{2}{5\pi}\approx 0{,}873$.

La tangente à la courbe représentant g au point d'abscisse $x=\frac{\pi}{2}$ a pour équation : $y=g'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2})+g(\frac{\pi}{2})$

or $g(\frac{\pi}{2})=1-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{3\pi}+\frac{4}{15\pi}=1-\frac{30+20-4}{15\pi}=1-\frac{46}{15\pi}$ et $g'(\frac{\pi}{2})=0$ donc $y=1-\frac{46}{15\pi}\approx 0{,}024$.



Exercice 7.

1. - $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout t réel :

$\varphi(-t)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{\pi^2}\cos(-\pi t)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)=\varphi(t)$. donc φ est paire

On vérifie que φ est $4-$périodique : Pour tout t réel on a

$$\varphi(t+4)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(t+4)\right)-\frac{2}{\pi^2}\cos\left(\pi(t+4)\right)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+2\pi\right)-\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t+4\pi)=\varphi(t)$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)=\varphi(t)$$

2. $\varphi'(t)=\frac{4}{\pi^2}\times\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\frac{2}{\pi^2}\times\pi\times\sin(\pi t)=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)=\frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi t)+\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)=\frac{2}{\pi}\left(2\sin(\frac{\pi}{4}t)\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)\right)$

Donc $\varphi'(t)=\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$; ($\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\varphi'(t)=0$ équivaut à $\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)=0$ ou $\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)=0$ donc $\left\{\frac{\pi}{4}t=k\pi \; ou \; \frac{\pi}{4}t=\pi+k\pi \; donc \quad t=4k\right.$ ou

$\left\{\frac{3\pi}{4}t=\frac{\pi}{2}+k\pi \; ou \; \frac{3\pi}{4}t=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \; donc \quad t=\pm\frac{2}{3}\pm\frac{4k}{3}\right.$ où $k\in\mathbb{Z}$.

$0\le t\le\frac{2}{3}$; $0\le\frac{\pi}{4}t\le\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$ et $0\le\frac{3\pi}{4}t\le\frac{3\pi}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ge 0$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)\ge 0$ sur $[0;\frac{2}{3}]$.

$\frac{2}{3}\le t\le 2$; $\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{4}t\le 2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}\times\frac{2}{3}\le\frac{3\pi}{4}t\le\frac{3\pi}{4}\times 2=\frac{3\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ge 0$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)\le 0$

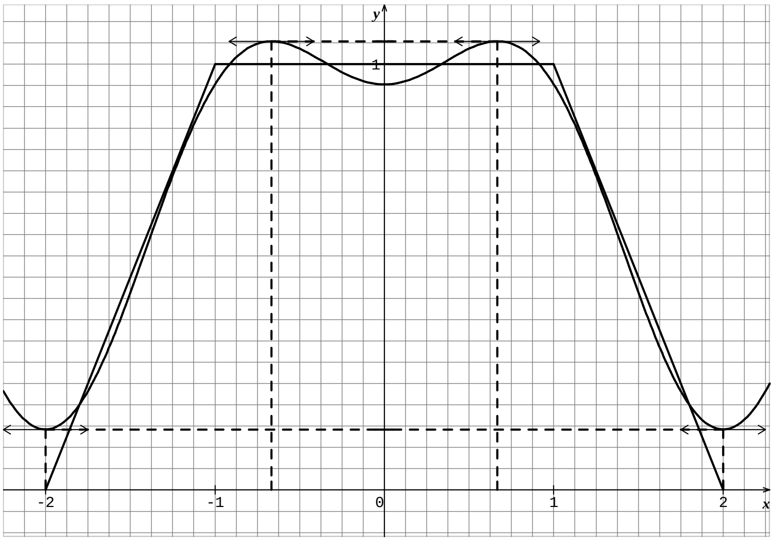
sur $[\frac{2}{3};2]$.

D'où le tableau de variation sur l'intervalle $[0;2]$

t	0		$\frac{2}{3}$		2
$\varphi'(t)$	0	+	0	−	0
$\varphi(t)$	A	↗	M	↘	B

$M=\frac{3}{4}+\frac{3}{\pi^2}\approx 1{,}05$; $A=\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi^2}\approx 0{,}95264$

et $B=\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\approx 0{,}14$.

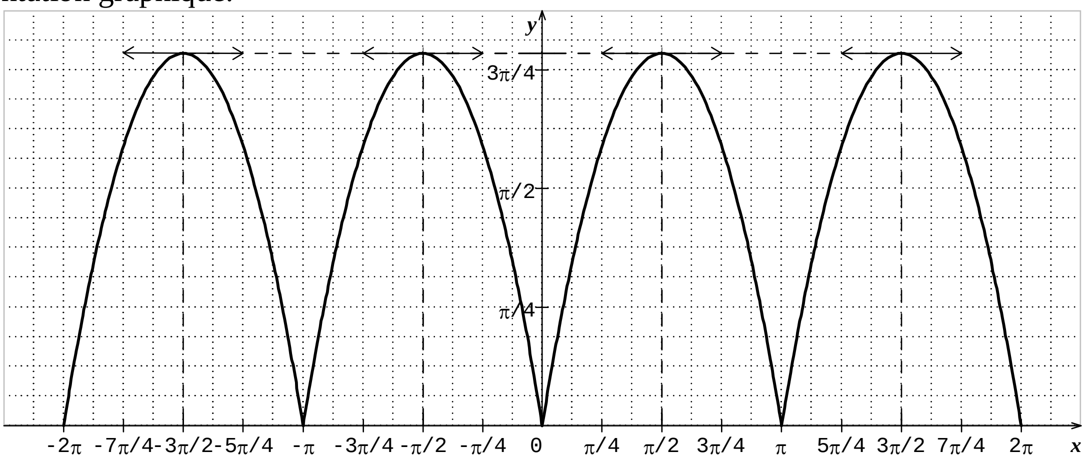


Exercice 8

1. 2.a $f(t)=t\left(\pi-t\right)$ si $t\in[0;\pi[$ et $f'(t)=\left(\pi-2t\right)$ donc $f'(t)=0$ pour $t=\pi/2$.

t	0		$\pi/2$		π
$f'(t)$	π	$+$	0	$-$	$-\pi$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\pi^2/4$	$\searrow$	0

Représentation graphique.



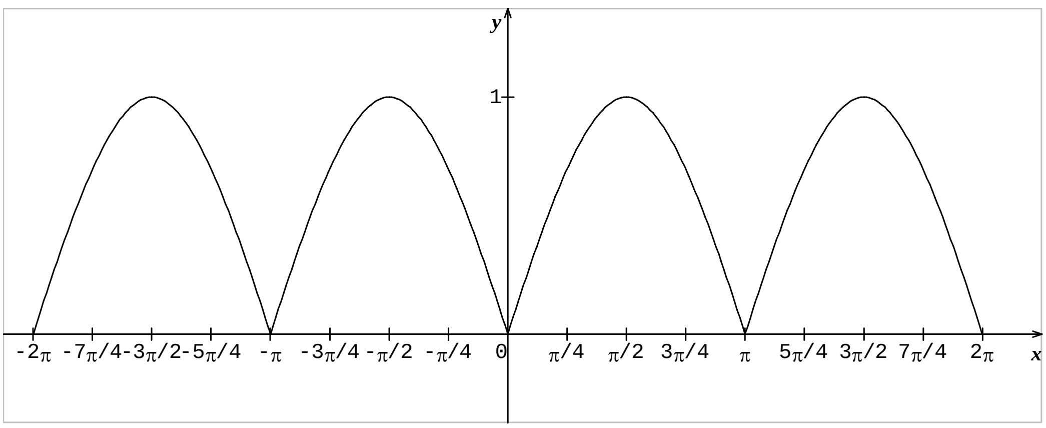
b. f est périodique de période π donc $f(t+\pi)=f(t)$ et $f(-t+\pi)=f(-t)$

Or $t\in[0;\pi]$, donc $-t\in[-\pi;0]$ et $-t+\pi\in[0;\pi]$

$f(-t+\pi)=(-t+\pi)(\pi-(-t+\pi))=(-t+\pi)(\pi+t-\pi)=t(\pi-t)=f(t)$ comme $f(-t+\pi)=f(-t)$ on déduit que $f(-t)=f(t)$ et par conséquent f est paire.

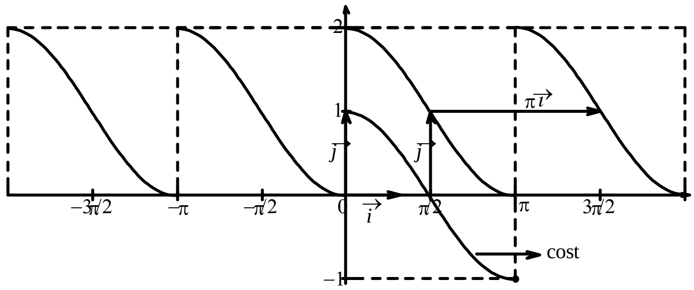
2.a. $u(t+\pi)=\left|\sin(t+\pi)\right|=\left|-\sin t\right|=\left|\sin t\right|=u(t)$ et $u(-t)=\left|\sin(-t)\right|=\left|-\sin t\right|=\left|\sin t\right|=u(t)$; Donc u est bien $\pi-$périodique et paire.

b. lorsque $t\in[0;\pi]$: $u(t)=\left|\sin t\right|=\sin t$ puisque $\sin t>0$ sur $[0;\pi]$.sur cet intervalle la courbe C associée à u est la courbe représentative de la fonction sinus .comme u est $\pi-$périodique, la courbe représentative sur $[-\pi;2\pi]$ est obtenue par translation de $\pi\vec{i}$ puis de $-\pi\vec{i}$ de l'élément C.

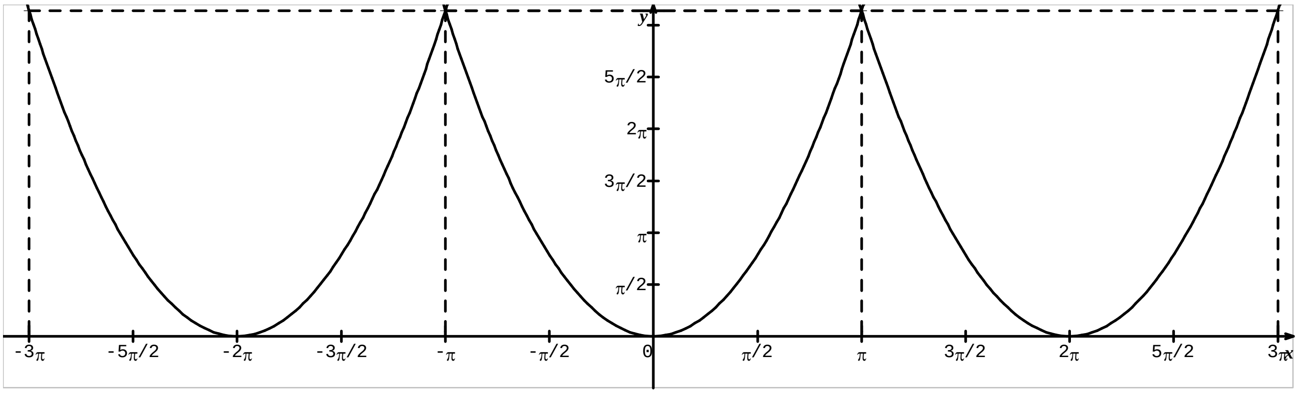


_3._

1.a) la fonction $t \mapsto \cos t$ est une fonction de référence dont le graphique est connu .le graphique de la fonction f sur $[0;\pi]$s'obtient à partir de celui de la fonction $t \mapsto \cos t$ sur$[0;\pi]$, noté C par translation de vecteur $\vec{j}$, on obtient le graphique de la fonction f sur $[0;\pi]$, noté Cf. Puisque f est périodique de périodeπ , on effectue une translation de vecteur $-\pi\vec{i}$ puis une translation de $\pi\vec{i}$ pour obtenir le graphique de f sur $[-\pi;2\pi[$.

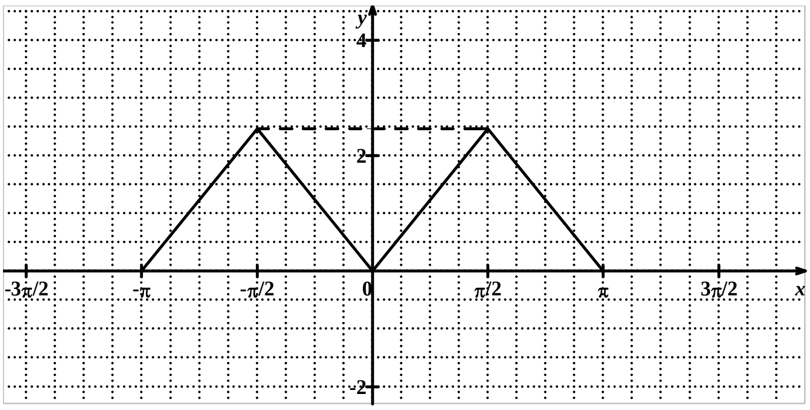


4.dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la représentation graphique de fonction f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ est une parabole . par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ et de vecteur $-2\pi\vec{i}$, on peut obtenir la courbe demandée .



5. f est définie sur R , paire et périodique , de période $T = \pi$; de plus $f(t) = \frac{\pi}{2}t$ si $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,

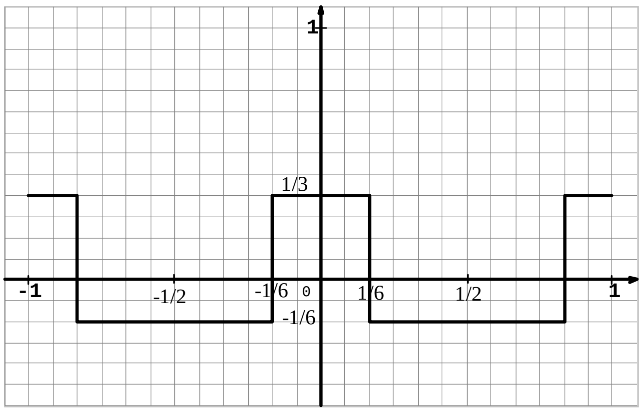
On trace le segment de droite définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, puis son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées . par translation de vecteur $\pi\vec{i}$ ou $-\pi\vec{i}$ on obtient la courbe demandée sur $[-\pi;\pi]$:



6. Dans cette question, on a : $f(t) = \frac{1}{3}$ sur $\left[0;\frac{1}{6}\right[$ et

$f(t) = -\frac{1}{6}$ sur $\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right]$

Avec la parité de la fonction f, on peut tracer la courbe sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. De plus, la fonction f est périodique de période 1, donc on obtient la représentation ci-contre :



7-

1. f est dérivable sur $[0;\pi]$ et $f'(t)=2\sin(2t)$

$f'(t)=0$ équivaut à $\sin 2t=0$ $\quad \sin 2t=\sin 0$ $\quad t=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ donc $t=\dfrac{\pi}{2}$ sur $[0;\pi]$.

Si $t\in[0;\pi/2]$ $2t\in[0;\pi]$ et $\sin(2t)\geq 0$ sur $[0;\pi]$ donc $\sin(2t)\geq 0$ sur $[0;\pi/2]$.

Si $t\in[\pi/2;\pi]$ $2t\in[\pi;2\pi]$ et $\sin(2t)\leq 0$ sur $[\pi;2\pi]$ donc $\sin(2t)\leq 0$ sur $[\pi/2;\pi]$

t	0		$\pi/2$		π
$f'(t)$	0	$+$		$-$	0
$f(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Courbe représentative sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.