

Exercice 1

L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel (symbole dB). Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$). On appelle u_n (où l'entier n est supérieur ou égal à 1) l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient (par exemple $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0$).



1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Déterminer la relation entre u_{n+1} et u_n puis exprimer u_n en fonction de u_0 et de n .
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
4. Déterminer à partir de quelle valeur de n l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

Exercice 2

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse.

Soit I_0 l'intensité d'un rayon à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à sa sortie.

1. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .
2. On superpose n plaques de verre identiques; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la nième plaque.
 - a. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} . Quelle est la nature de la suite (I_n)?
 - b. Préciser le premier terme et la raison: en déduire l'expression de I_n en fonction de I_0 . Préciser, en le justifiant, le sens de variation de la suite (I_n).
3. Quelle est l'intensité initiale I_0 d'un rayon lumineux dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?
4. Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante.

Exercice 3

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal. Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25% à chaque élévation de 100 m. Pour tout entier naturel n , on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude $100n$, exprimée en mètres.

Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique. On a alors $P_0 = 1013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2 , arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.
2. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n . En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.
 b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $P_n = 1013 \times 0,9875^n$.
3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.
4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

Exercice 4 Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles (k entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.
 - a) Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0 , puis de N_{k-1} en fonction de N_k .
 - b) En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k .
 - c) Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k).
2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.
 Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n - 1$

- 1-a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r .

b) Calculer en fonction de n , la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = e^{u_n}$

- a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme v_0 et la raison b .
- b) Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ en fonction de n

Exercice 6

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$, où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
 - a. Résoudre l'équation (E).
 - b. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
2. a. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 10]$.
b. Déterminer, en fonction de n , la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n; n+1]$.
3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$, pour tout n entier positif ou nul.
 - a. Calculer la valeur exacte de u_0 , u_1 et u_2 .
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - c. Déterminer la valeur exacte de la somme $S = U_0 + U_1 + \dots + U_9$.

EXERCICE 7 : Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2%. On note (u_n) (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon. On a donc $u_0 = 20$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.
2. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.
3. Déterminer u_n en fonction de l'entier n .
4. Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?
5. On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres.
Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?



Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$

1. (a) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 10]$.
(b) Déterminer, en fonction de n , la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n; n+1]$.
2. Soit (u_n) , la suite définie par $u_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.
 - (a) Calculer la valeur exacte de u_0 , u_1 et u_2 .
 - (b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - (c) Déterminer la valeur exacte de la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

Exercice 9

Partie A En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230 000 euros.

Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1991.
2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990+n.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser le premier terme u_0 et la raison a de cette suite.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A.

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 1 150 000 euros.

Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1991.
2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990+n. Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,074.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B.

Partie C

1. Que constate-t-on en 2006 pour les entreprises A et B ?
2. En 2006, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = f(n) = 4e^{-n/2}$

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.
2. Soit n un nombre entier naturel. On pose : $S_n = 4(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ et $T_n = 4(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1})$. Exprimer S_n et T_n en fonction de n .
3. Déterminer les limites S et T de S_n et T_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Exercice 1

1. $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0,9u_0$. Le son perd 10 % de son intensité, cela se traduit

par $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0,9u_0$. $u_2 = u_1 - \frac{10}{100}u_1 = u_1 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_1 = 0,9 \times 0,9u_0 = (0,9)^2 u_0$.

$$u_3 = u_2 - \frac{10}{100}u_2 = u_2 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_2 = (0,9)^3 u_0$$

Fomesoutra.com
ça s'écrit !
Docs à portée de main

2. En raisonnant comme à la première question, sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de

$$\text{l'intensité } u_n \text{ à } u_{n+1} : u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n = u_n \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_n = 0,9u_n ; \quad u_{n+1} = 0,9u_n.$$

La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$. son premier terme est u_0 . Le cours donne la formule générale $u_{n+1} = qu_n = q^{n+1}u_0$, donc on a : $u_n = q^n u_0 = (0,9)^n u_0$ pour tout entier naturel n .

3. c. Déterminons le signe de la différence $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - u_n = -0,1u_n$

Tous les termes $u_n, n \in N$, sont positifs donc la différence est négative : $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout $n \in N$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Remarque : Tous les termes $u_n, n \in N$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0,9u_n}{u_n} = 0,9 < 1 \text{ pour } n > 0. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}$$

L'intensité du son devient inférieure à 1 dB quand $u_n = (0,9)^n u_0 < 1 \Rightarrow (0,9)^n < \frac{1}{100} = 0,01$

$$\Rightarrow \ln(0,9)^n < \ln(0,01) \Rightarrow n \ln(0,9) < \ln(0,01) \Rightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9)} \text{ puisque } \ln(0,9) < 0 ; n \approx 43,709 \text{ soit } n = 44.$$

Exercice 2 :

Le rayon lumineux perd 23 % de son intensité, cela se traduit par : $I_1 = I_0 - \frac{23}{100}I_0 = I_0 \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_0$

2.a En raisonnant comme à la première question, sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de

$$\text{l'intensité } I_{n-1} \text{ à } I_n : I_n = I_{n-1} - \frac{23}{100}I_{n-1} = I_{n-1} \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_{n-1} ; \quad I_n = 0,77I_{n-1}.$$

b. La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique.

La suite (I_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,77$. son premier terme est I_0 .

Le cours donne la formule générale $I_n = qI_{n-1} = q^n I_0$.

c. Déterminons le signe de la différence $I_n - I_{n-1} : I_n - I_{n-1} = 0,77I_{n-1} - I_{n-1} = -0,23I_{n-1}$.

Tous les termes $I_n, n \in N$, sont positifs donc la différence est négative : $I_n - I_{n-1} \leq 0$, pour tout $n \in N$

La suite (I_n) est donc décroissante.

Remarque : Tous les termes $I_n, n \in N$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{0,77I_{n-1}}{I_{n-1}} = 0,77 < 1 \text{ pour } n > 0. \text{ La suite } (I_n) \text{ est donc décroissante.}$$

3. l'intensité obtenue après la traversée de 4 plaques est égale à 15 d'où $I_4 = 15 \Leftrightarrow (0,77)^4 I_0 = 15$

$$I_4 = 15 \Leftrightarrow I_0 = \frac{15}{(0,77)^4} \approx 42,67.$$

4. l'intensité sortante étant inférieure ou égale au quart de son intensité entrante, cela se traduit par

l'inéquation $I_n \leq \frac{1}{4}I_0$, ou n est l'inconnue à déterminer. Cette inéquation peut s'écrire :

$(0,77)^n I_0 \leq 0,25I_0$, après simplification par I_0 , on obtient : $(0,77)^n \leq 0,25$; $\ln(0,77)^n \leq \ln(0,25)$

$n \ln(0,77) \leq \ln(0,25)$; $\ln(0,77) < 0$ d'où : $n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,77)} \approx 5,3$ et $n \in \mathbb{N}$, donc $n = 6$. Il faudra au minimum

6 plaques pour que l'intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de l'intensité entrante.

Exercice 3

1. $P_0 = 1013$. P_1 est la pression atmosphérique à la hauteur 100 m. P_1 a diminué de 1,25% par rapport à P_0 .

$$P_1 = P_0 - \frac{1,25}{100} P_0 = 1013 \times \left(1 - \frac{1,25}{100}\right) = 1000. \text{ De même } P_2 = P_1 - \frac{1,25}{100} P_1 = 1000 \left(1 - \frac{1,25}{100}\right) = 988$$

2. a) La pression P_{n+1} diminue de 1,25% par rapport à P_n donc $P_{n+1} = P_n - \frac{1,25}{100} P_n = P_n \left(1 - \frac{1,25}{100}\right) = 0,9875 P_n$

b) On en déduit que (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9875$ et de premier terme $P_0 = 1013$.

c) On en déduit que $P_n = P_0 q^n$; $P_n = 1013 \times 0,9875^n$.

3. $3200 = 100 \times 32$ donc la pression atmosphérique à l'altitude 3200 m est donnée par $P_{32} = 1013 \times 0,9875^{32}$
 $P_{32} = 677$ La pression est de 677 hectopascal.

4. $P_n \leq 600$; $1013 \times 0,9875^n \leq 600$; $0,9875^n \leq \frac{600}{1013}$; $\ln(0,9875^n) \leq \ln\left(\frac{600}{1013}\right)$;

$$n \ln(0,9875) \leq \ln\left(\frac{600}{1013}\right) ; \quad n \geq \ln\left(\frac{600}{1013}\right) / \ln(0,9875) \quad \text{car } \ln(0,9875) < 0. \quad n \geq 41,6 \text{ soit à partir de}$$

$n = 42$. A partir de $42 \times 100 = 4200 \text{ m}$, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal

Exercice 5

a) le nombre d'atomes de carbone 14 diminue de 1,24 % par siècle donc

$$N_1 = N_0 - \frac{1,24}{100} \times N_0 = \left(\frac{100}{100} - \frac{1,24}{100}\right) N_0 = \frac{98,76}{100} N_0. \quad N_1 = 0,9876 N_0.$$



$$N_{k+1} = N_k - \frac{1,24}{100} \times N_k = \left(\frac{100}{100} - \frac{1,24}{100}\right) N_k = \frac{98,76}{100} N_k \text{ ce qui donne } N_{k+1} = 0,9876 N_k.$$

b) On reconnaît dans la formule précédente, la formule $u_{n+1} = b u_n$, pour tout entier k , formule de récurrence qui définit une suite géométrique de raison le réel b .

(N_k) est la suite géométrique de raison $b = 0,9876$ et de premier terme N_0 . Il en résulte le terme général de la suite $N_k = N_0 \times b^k$ d'où $N_k = (0,9876)^k N_0$.

c) Deux modèles permettent de déterminer le sens de variation de la suite (N_k) :

la première méthode consiste à regarder le signe de la différence $N_{k+1} - N_k$: $N_{k+1} - N_k = 0,9876 N_k - N_k = -0,0124 N_k$
Tous les termes N_k étant positifs, quel que soit l'entier k , la différence est négative, la suite (N_k) est décroissante.

la deuxième méthode est possible dans le cas où tous les termes N_k et alors on étudie le rapport

$$\frac{N_{k+1}}{N_k} = 0,9876 < 1 \text{ et on obtient : } N_{k+1} < N_k \text{ et par conséquent : la suite } (N_k) \text{ est décroissante.}$$

2. La teneur en carbone 14 étant de 40 % de celle actuelle, on peut écrire : $N_{k+1} = 0,4 N_k$ ce qui traduit par

$$\text{l'équation : } (0,9876)^k N_0 = 0,4 N_0 \Leftrightarrow (0,9876)^k = 0,4 \Leftrightarrow \ln(0,9876)^k = \ln 0,4 \Leftrightarrow k \ln(0,9876) = \ln 0,4$$

$$k = (\ln(0,4)) / \ln(0,9876) \approx 73,435. \text{ Les fragments ont un peu plus de 73 siècles.}$$

On utilise la calculatrice pour calculer $(0,9876)^{73} < 0,4$ et $(0,9876)^{74} > 0,4$

Exercice n°6

1. a) $u_0 = 2 \times 0 - 1 = -1$. $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2n+2-1-2n+1 = 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc

$u_{n+1} = u_n + 2$, de plus $u_0 = -1$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -1$.

$$b) S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1 + 2n-1)}{2} = (n+1)(n-1) = n^2 - 1$$

$$2. a) v_0 = e^{u_0} = e^{-1} \quad ; \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = e^{u_{n+1}-u_n} = e^2.$$

Pour tout entier naturel n on a donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^2$ de plus $v_0 = e^{-1}$. donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{-1}$

$$b) P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n} = e^{u_0+u_1+u_2+\dots+u_n} = e^{S_n} \quad ; \quad P_n = e^{n^2-1}$$

Exercice 7

$$1. (E): y' + 2y = 0$$

1.a. $y = ke^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution f de (E) est telle que $f(0) = 1$. On a donc $1 = ke^0 = k$ soit $k = 1$.

D'où f est définie par $f(x) = e^{-2x}$.

$$2.a. \text{ La valeur moyenne de } f \text{ sur } [0; 10] \text{ est : } \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx ; \mu = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} e^{-2x} dx$$

$$\mu = \frac{1}{10} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{10} ; \mu = \frac{1}{20} [1 - e^{-20}]$$

$$2.b \quad \mu = \frac{1}{n+1-n} \int_n^{n+1} e^{-2x} dx \quad ; \quad \mu = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_n^{n+1} \quad \mu = \frac{-1}{2} [e^{-2(n+1)} - e^{-2n}] \quad ; \quad \mu = \frac{1}{2} [e^{-2n} - e^{-2(n+1)}]$$

$$\mu = \frac{1}{2} e^{-2n} (1 - e^{-2})$$

$$3. u_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n},$$

 **Fomesoutra.com**
la soutra !
Docs à portée de main

$$3.a. u_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \quad ; \quad u_1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2} \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-4}$$

3.b. Pour montrer que (u_n) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul que tel que $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$u_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2(n+1)} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n} \times e^{-2} \quad ; \quad u_{n+1} = u_n \times e^{-2}.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2})$ et de raison e^{-2}

$$3.c \quad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \text{ On a donc}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \times \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}.$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{1}{2} \times (1 - e^{-2(n+1)}).$$

Exercice 8

On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon.

On a donc $u_0 = 20$.

1) Quand une valeur diminue de 2 %, elle est multipliée par 0,98.

$$u_1 = u_0 - 0,02 u_0 = 0,98 u_0 = 0,98 \times 20 = 19,60 \text{ mm} ; u_2 = 0,98 u_1 = 0,98 \times 19,60 = 19,21 \text{ mm}$$

$$u_3 = 0,98 u_2 = 0,98 \times 19,21 = 18,83 \text{ mm}$$

2) Chaque terme de cette suite est obtenu en multipliant le terme précédent par 0,98, il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison $q = 0,98$.

$$3) u_n = u_0 q^n = 20 \times (0,98)^n$$

4) Epaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes :

$$u_{10} = u_0 q^{10} = 20 \times (0,98)^{10} = 16,34 \text{ mm}$$

5) On cherche n tel que $u_n \leq 14$

$$20 \times 0,98^n \leq 14 \Leftrightarrow 0,98^n \leq 0,7 \Leftrightarrow \ln(0,98)^n \leq \ln 0,7 \Leftrightarrow n \ln(0,98) \leq \ln 0,7 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,7}{\ln(0,98)} \approx 17,6$$

(on a divisé par $\ln(0,98) < 0$)

donc $n \geq 18$, il faut 18 frappes de marteau pilon pour que l'épaisseur en millimètres de la pièce soit inférieure à 14 mm ce qui donne comme le temps minimal pour que la pièce soit terminée :

$$18 \times 6 = 108 \text{ s} = 1 \text{ minutes et } 48 \text{ secondes.}$$

Exercice 9

Partie A

1. $u_0 = 230\,000$. $u_1 = u_0 + 15\,000 = 245\,000$ €. Le chiffre d'affaires u_1 en 1991 était de 245 000 €

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n . u_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + $n + 1$, on a : $u_{n+1} = u_n + 15000$.

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $a = 15000$ et de premier terme $u_0 = 230\,000$

3. 2006 correspond au 16^{ème} rang donc

$$u_{16} = u_0 + 16a = 230\,000 + 16 \times 15000 = 230\,000 + 240\,000 = 470\,000 \text{ €}$$

le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A est donc de 470 000 €

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. $v_0 = 150\,000$. $v_1 = v_0 \times 1,074 = 161100$ €. Le chiffre d'affaires v_1 en 1991 était de 161100 €

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n . v_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + $n + 1$, on a : $v_{n+1} = v_n \times 1,074$. Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $b = 1,074$ et de premier terme $v_0 = 150\,000$

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B. $v_{16} = v_0 \times b^{16} = 150\,000 \times 1,074^{16} = 470\,067$ €

Partie C

1. On constate que les chiffres d'affaire des deux entreprises A et B en 2006 sont sensiblement les même malgré le chiffre d'affaire plus conséquent de l'entreprise A en 1990.

2. $u_{31} = u_0 + 31a = 230\,000 + 31 \times 15000 = 695\,000$ € . 2 $u_{31} = 1390\,000$ €

$$v_{31} = v_0 \times b^{31} = 150\,000 \times 1,074^{31} = 1371\,589 \text{ €}$$
 on est pas loin du double en effet.

Exercice 10

$$1. \quad u_0 = f(0) = 4e^0 = 4 \quad . \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{4e^{-1/2(n+1)}}{4e^{-n/2}} = e^{-1/2(n+1-n)} = e^{-1/2}$$



Pour tout entier naturel n on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1/2}$ et $u_0 = 4$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = e^{-1/2}$ et de premier terme $u_0 = 4$

2. ses deux sommes ont chacune $n + 1$ termes $u_1 = 4e^{-1/2}$.

$$S_n = 4u_0 \times \frac{1 - (e^{-1/2})^{n+1}}{1 - e^{-1/2}} = 16 \times \frac{1 - (e^{-1/2})^{n+1}}{1 - e^{-1/2}} . \quad T_n = 4u_1 \times \frac{1 - (e^{-1/2})^{n+1}}{1 - e^{-1/2}} = 16e^{-1/2} \times \frac{1 - (e^{-1/2})^{n+1}}{1 - e^{-1/2}}$$

$$3. 0 < e^{-1/2} < e^0 = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1/2})^{n+1} = 0 \quad . \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{16}{1 - e^{-1/2}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{16e^{-1/2}}{1 - e^{-1/2}}$$