

TP MATHÉMATIQUES SÉRIES NUMÉRIQUES BTSG20 2008-2009

Exercice n°1

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\begin{cases} u_1 = 1/3 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{n}$

- 1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
- 2) Exprimer v_n en fonction de n .
- 3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 4) Soit la série $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$. Calculer S_n en fonction de n et montrer que la suite S_n est convergente.

Exercice 2 : On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ où a une constante réelle quelconque.

Etudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 3 : Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on considère la série de terme général $u_n = \frac{4}{n^2 - 1}$

- 1) Montrer que cette série est convergente.
- 2) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{4}{n^2 - 1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$
- 3) En déduire que : $\sum_{k=2}^n u_k = 3 - \frac{4n+2}{n(n+1)}$
- 4) En déduire la somme S de la série (u_n) .



Exercice 4 Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on considère la série de terme général $u_n = \frac{2}{n^2 - 1}$

- 1) Montrer que cette série est convergente.
- 2) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$
- 3) En déduire que : $\sum_{k=2}^n u_k = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$. En déduire la somme S de la série (u_n) .

Exercice 5 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1. Déterminer les réels a et b tels que : $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$
2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$. Calculer S_n et la limite S de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$.

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

Exercice 7

1. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$;
2. Etudier la convergence de la série $\sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p}$

3. Etudier la convergence des séries de terme général : a) $u_n = \frac{3}{n^2 + 1}$
4. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ de terme général $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
5. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
6. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
8. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n + n}$ de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n + n}$.



Exercice 8

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
8. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{\arctan n}{n^2}$.
4. Etudier la convergence de la série de terme général : $u_n = \frac{n+1}{n!}$; $v_n = \frac{1}{n!}$

Correction

Exercice n°1

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n} u_n}{n+1} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n} = \frac{1}{3} v_n$

2) (v_n) est donc une suite géométrique de raison $1/3$ et de premier terme $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{3}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{3} v_{n-1} = v_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{n}$, on aura $u_n = n v_n = n \left(\frac{1}{3}\right)^n$



Exercice 2

$u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$. posons $v_n = \ln u_n$, $v_n = \ln \left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right) = \ln a^n - \ln n^\alpha = n \ln a - \alpha \ln n = n \left(\ln a - \alpha \frac{\ln n}{n}\right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln a - \alpha \frac{\ln n}{n}\right) = \ln a$

Donc : 2 cas :

Si $a > 1$, $\ln a > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = +\infty$

Si $a < 1$, $\ln a < 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = 0$.

On conclut que lorsque n tend vers l'infini, le comportement de $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ est celui de a^n pour $a \neq 1$.

Exercice 3

$n=2$ $\frac{2}{2-1} - \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3}$

$n=3$ $\frac{2}{3-1} - \frac{2}{3+1} = 1 - \frac{1}{2}$

$n=4$ $\frac{2}{4-1} - \frac{2}{4+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$

$n=5$ $\frac{2}{5-1} - \frac{2}{5+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$n=6$ $\frac{2}{6-1} - \frac{2}{6+1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{7}$

$n=7$ $\frac{2}{7-1} - \frac{2}{7+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$n=8$ $\frac{2}{8-1} - \frac{2}{8+1} = \frac{2}{7} - \frac{2}{9}$

.....

$n=p-3$ $\frac{2}{p-3-1} - \frac{2}{p-3+1} = \frac{2}{p-4} - \frac{2}{p-2}$

$n=p-2$ $\frac{2}{p-2-1} - \frac{2}{p-2+1} = \frac{2}{p-3} - \frac{2}{p-1}$

$n=p-1$ $\frac{2}{p-1-1} - \frac{2}{p-1+1} = \frac{2}{p-2} - \frac{2}{p}$

$n=p$ $\frac{2}{p-1} - \frac{2}{p+1} = \frac{2}{p-1} - \frac{2}{p+1}$

$\frac{4}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+b(n-1)}{n^2-1} = \frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}$, d'où

$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=4 \end{cases}$ et $a=2$; $b=-2$

$\frac{4}{n^2-1} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+1}$

$\sum_{k=2}^n u_k = 2 + 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = 3 - \left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n}\right) = 3 - \frac{4n+2}{n(n+1)}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{4n+2}{n(n+1)}\right) = 3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n+2}{n(n+1)}\right) =$

$3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n}{n^2}\right) = 3 - 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Donc la série converge vers $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n u_k\right) = 3$

Exercice 4

$$n = 2 \quad \frac{1}{2-1} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$n = 3 \quad \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$n = 4 \quad \frac{1}{4-1} - \frac{1}{4+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$n = 5 \quad \frac{1}{5-1} - \frac{1}{5+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

$$n = 6 \quad \frac{1}{6-1} - \frac{1}{6+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$n = 7 \quad \frac{1}{7-1} - \frac{1}{7+1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$$

$$n = 8 \quad \frac{1}{8-1} - \frac{1}{8+1} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$$

.....

$$n = p-3 \quad \frac{1}{p-3-1} - \frac{1}{p-3+1} = \frac{1}{p-4} - \frac{1}{p-2}$$

$$n = p-2 \quad \frac{1}{p-2-1} - \frac{1}{p-2+1} = \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-1}$$

$$n = p-1 \quad \frac{1}{p-1-1} - \frac{1}{p-1+1} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p}$$

$$n = p \quad \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}$$

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=2}^n u_k = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)} \right) = \frac{3}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{n(n+1)} \right) =$$

$$\frac{3}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{n^2} \right) = \frac{3}{2} - 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\text{Donc la série converge vers } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n u_k \right) = \frac{3}{2}$$



Exercice 5

$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. on a : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$ et $\frac{1}{n^2+n} \underset{+}{\square} \frac{1}{n^2}$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente en vertu

du théorème de Riemann. Il est immédiat de vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

On obtient successivement : $S_1 = u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et de même en observant les groupements de termes qui s'annulent, on obtient :

$$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Par définition de la somme d'une série, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Exercice 6

$$u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$1. \quad u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \text{ d'où}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. La suite (u_n) est décroissante puisque $-3n-2 < 0$.

3. La suite est positive puisque somme de termes positifs ; elle est décroissante et minorée, elle converge bien.

Exercice 7

1. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$ diverge car $\sum_{n=0}^p 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^p = \frac{1-2^{p+1}}{1-2} = 2^{p+1} - 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = \lim_{p \rightarrow +\infty} (2^{p+1} - 1) = +\infty.$$

2. la série $\sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p}$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de 1^{er} terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$

et on a : $\sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right)$, la série converge puisque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 2 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \quad (q = \frac{1}{2} < 1)$$



La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, on écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} = 2.$

3. On considère la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$; on a : $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ pour tout n ; or la série de terme général

$\frac{1}{n^2}$ converge (comme série de Riemann avec $\alpha = 2$), donc la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ converge.

En admettant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, on peut dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1}$ est une série convergente.

On peut aussi utiliser le théorème d'équivalence : On directement :

$\frac{3}{n^2+1} \sim \frac{3}{n^2}$, la série de terme général $\frac{3}{n^2}$ est convergente donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1}$ est une série convergente.

4. On considère la série positive $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ de terme général $U_n = \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2 \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^2}$

On a : $n^2 U_n = \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \frac{n^2}{4n^2 + 4n + 1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 U_n = \frac{1}{4}$, par conséquent, la règle de Riemann

s'appliquant aux séries à terme positifs permet d'affirmer que la série converge.

Quand n tend vers l'infini, u_n est un équivalent de $\frac{1}{4n^2}$, on reconnaît le terme général d'une série de

Riemann qui avec $\alpha = 2 > 1$ est une série qui converge, donc la série de terme général u_n converge aussi d'après le théorème d'équivalence des séries positives.

5. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ répond au critère d'une série alternée :

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (on a pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $v_{n+1} \leq v_n$ ou $(|u_{n+1}| \leq |u_n|)$ ($x \mapsto \frac{1}{x}$))

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Cette série est appelée la **série harmonique alternée**

6. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème

spécial de convergence des séries alternées s'applique. En effet, pour tout n entier naturel on a :

$|u_{n+1}| = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = |u_n|$. Ainsi, la suite définie par $|u_n| = \frac{1}{2n+1}$ est décroissante

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente



7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique.

En effet, pour tout n entier naturel on a : $|u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ $|u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{n^2} = |u_n|$.

Ainsi, la suite définie par $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ est convergente.

8. $0 < \frac{n^2}{2^n + n} < \frac{n^2}{2^n} = v_n$

Etudions la convergence de la série de terme général v_n en utilisant la règle d'Alembert

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \text{ donc la série de terme général } v_n \text{ est convergente. D'après le théorème de}$$

comparaison sur les séries à termes positifs, la série de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n + n}$ est convergente également.

Exercice 8

1. soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$; pour tout $n > 0$ $|u_n| = \left| \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right| \leq \frac{1}{n^2}$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

(théorème de Riemann), donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ converge (critère de comparaison)

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ est convergente.

2. Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$. Pour tout $n > 0$, on a : $0 \leq \frac{\arctan n}{n^2} < \frac{\pi}{2n^2}$, donc $0 \leq u_n < \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2}$. La série

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (théorème de Riemann) donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ est convergente.

3. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{(n+1)!} \right) / \left(\frac{n+1}{n!} \right) = \frac{n+2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$

Donc d'après la règle d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ est convergente

4. On a : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-2}$, $u_n - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n-2} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{n\sqrt{n} - n\sqrt{n} + 2\sqrt{n}}{n(n+1)} = \frac{2\sqrt{n}}{n(n+1)}$, cette expression est positive pour

tout $n > 2$. On a donc $u_n > \frac{\sqrt{n}}{n}$ ou $u_n > \frac{1}{n^{1/2}}$. La série de terme général $\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (comme série de Riemann

avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), on déduit donc que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente. On peut aussi la règle d'équivalence :

$\frac{\sqrt{n}}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n}$ donc $\frac{\sqrt{n}}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ la conclusion vient de manière immédiate : la série de terme général $\frac{\sqrt{n}}{n-2}$

est divergente.

Quelques séries numériques de référence : Série harmonique : c'est la série : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

Bien que son terme général tend vers 0 en $+\infty$, cette série est divergente en effet :

$$\sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2 \text{ termes}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4 \text{ termes}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1} \text{ termes}}$$

$$\sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2 \text{ termes}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4 \text{ termes}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1} \text{ termes}}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 2 \times \frac{1}{4} ; \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 4 \times \frac{1}{8} ; \quad \dots ; \quad \frac{1}{2^{p-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^p} \geq 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p}$$

$$\sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + \dots + 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2} \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_p ; \text{ donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{p}{2}$$

soit n un entier naturel non nul, soit p la **partie entière** du nombre $\frac{\ln n}{\ln 2}$, on a : $n \geq 2^p$ et : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{p}{2}$

quand n tend vers $+\infty$, p tend également vers $+\infty$ d'où la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente.

III. Raisonnement par Récurrence.

Propriété : Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Etape 1 : Vérification (initialisation)

On vérifie que la propriété est vraie pour le premier terme : $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.

Etape 2 : Hérité

On suppose que la propriété est vraie pour le terme de rang n et on démontre que si elle est vraie pour le rang n elle est vraie pour le rang $n + 1$.

Si pour tout entier $n \geq n_0$ on a $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie.

Exercice 3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$1. \quad \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. \quad \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 3.

Soit à démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$. $P_{n=1} : 1^3 = 1^2$

On suppose que $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$$



Somme des n premiers cubes (non nuls) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration :

Le principe est le même que pour la [somme des n premiers carrés](#),
posons :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$



la formule du [binôme de Newton](#) permet d'écrire : $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

on obtient en faisant varier k de 1 à n, n équations que l'on peut ajouter membre à membre :

$$2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$$

...

$$(n+1)^4 - n^4 = 4 \times n^3 + 6 \times n^2 + 4 \times n + 1$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$$

en isolant S_3 on obtient la formule de la somme des cubes.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somme des n premiers carrés (non nuls)

démonstration :

posons :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

on sait que : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

on peut donc écrire et ajouter membre à membre les n égalités suivantes :

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

...

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) - n$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \times S_2 + 3 \times S_1 + n$$

$$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3S_1 - n$$

$$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$3S_2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$3S_2 = \frac{(n+1)}{2} [2(n+1)^2 - 2 - 3n]$$

$$S_2 = \frac{(n+1)}{6} [2n^2 + 4n + 2 - 3n]$$

$$S_2 = \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + n)$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

 **Fomesoutra**.Com
ça soutra !
Docs à portée de main