

TP MATHÉMATIQUES TRANSFORMÉE DE FOURIER BTSGO 2008-2009

Exercice 1 9 points- Nvelle- Calédonie

On considère la fonction numérique paire, 2π -périodique, définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \cos t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2 \\ f(t) = 0 & \text{si } \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

On a tracé en pointillé sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$

1. Représenter, sur le document réponse à rendre avec la copie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.
2. On admet que la fonction f satisfait aux conditions d'application du théorème de Dirichlet et, par conséquent qu'elle est décomposable en série de Fourier.

On note : $S(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$ la série de Fourier associée à la fonction f .

- a. Donner la valeur de b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
- b. Calculer a_0 .
- c. Calculer a_1 .



- d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \left[(n-1) \frac{\pi}{2} \right]}{n-1} + \frac{\sin \left[(n+1) \frac{\pi}{2} \right]}{n+1} \right)$

3. On note $S_1(t)$ la série de Fourier associée à la fonction f , tronquée au rang 1.

$$\text{On a donc : } S_1(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t$$

À partir de la courbe représentative de la fonction cosinus tracer sur le document réponse la courbe représentant la fonction S_1 sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$. On laissera figurer les tracés intermédiaires.

Exercice 2 : 10 points- Nvelle -calédonie-2007

On désigne par α un nombre réel positif tel que $0 < \alpha < \pi/2$

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , paire, périodique de période 2π , telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \alpha \\ f(t) = 0 & \text{si } \alpha < t < \pi - \alpha \\ f(t) = -1 & \text{si } \pi - \alpha \leq t \leq \pi \end{cases}$$

1. Dans cette question, le nombre réel α vaut $\pi/3$.
Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$
2. On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f .

$$\text{On note } S(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

Le but de cette question est de calculer les coefficients de la série de Fourier S pour une valeur t quelconque du nombre réel α tel que $0 < \alpha < \pi/2$

- a. Calculer a_0 , valeur moyenne de la fonction f sur une période.
 - b. Déterminer b_n , n désignant un nombre entier naturel strictement positif.
 - c. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(n\alpha)$
3. Déterminer la valeur α_0 de α pour laquelle on $a_3 = 0$.
 4. Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Rappels :

Si h désigne une fonction périodique de période T , le carré de la valeur efficace H de la fonction h sur

une période est : $H^2 = \frac{1}{T} \int_r^{r+T} [h(t)]^2 dt$. r désignant un nombre réel quelconque. Si les coefficients de

Fourier de la fonction h sont a_0, a_n et b_n alors : $H^2 = \frac{1}{T} \int_r^{r+T} [h(t)]^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ formule de Parseval .

- a. Calculer F^2 , carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
 b. On définit sur \mathbb{R} la fonction g par : $g(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t)$

Montrer que $g(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cos(t)$ pour tout nombre réel t .

- c. Calculer G^2 , carré de la valeur efficace de la fonction g sur une période.
 d. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient $\frac{G^2}{F^2}$

Ce dernier résultat montre que la fonction g constitue une assez bonne approximation de la fonction f .

Exercice 3 : 8 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique, et telle que : $\begin{cases} \varphi(t) = t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \varphi(t) = 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$

On note $S(t)$ le développement de Fourier associé à la fonction φ , les coefficients de Fourier associés à la fonction φ sont notés a_0, a_n et b_n où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Représenter graphiquement la fonction φ sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.
 a. Calculer a_0 , la valeur moyenne de la fonction φ sur une période.
 b. On rappelle que pour une fonction f , périodique de période T le carré de la valeur efficace sur une

période est donné par : $\mu_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt$

Montrer que μ_{eff}^2 le carré de la valeur efficace de la fonction sur une période est égal à $\frac{\pi^2}{6}$

2. Montrer que pour tout nombre entier $n > 1$, on a : $a_n = \frac{1}{\pi n^2} [\cos(n\pi) - 1]$.

On admet que, pour tout nombre entier $n > 1$, on a : $b_n = -\frac{\cos(n\pi)}{n}$.

3. On considère la fonction S_3 définie sur \mathbb{R} par : $S_3(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$ où les nombres a_0, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier associés à la fonction φ définie précédemment.

- a. Recopier et compléter le tableau avec les valeurs exactes des coefficients demandés.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
					$-\frac{2}{9\pi}$	$\frac{1}{3}$

- b. Calculer la valeur exacte de $S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ puis donner la valeur approchée de $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ arrondie à 10^{-2} .

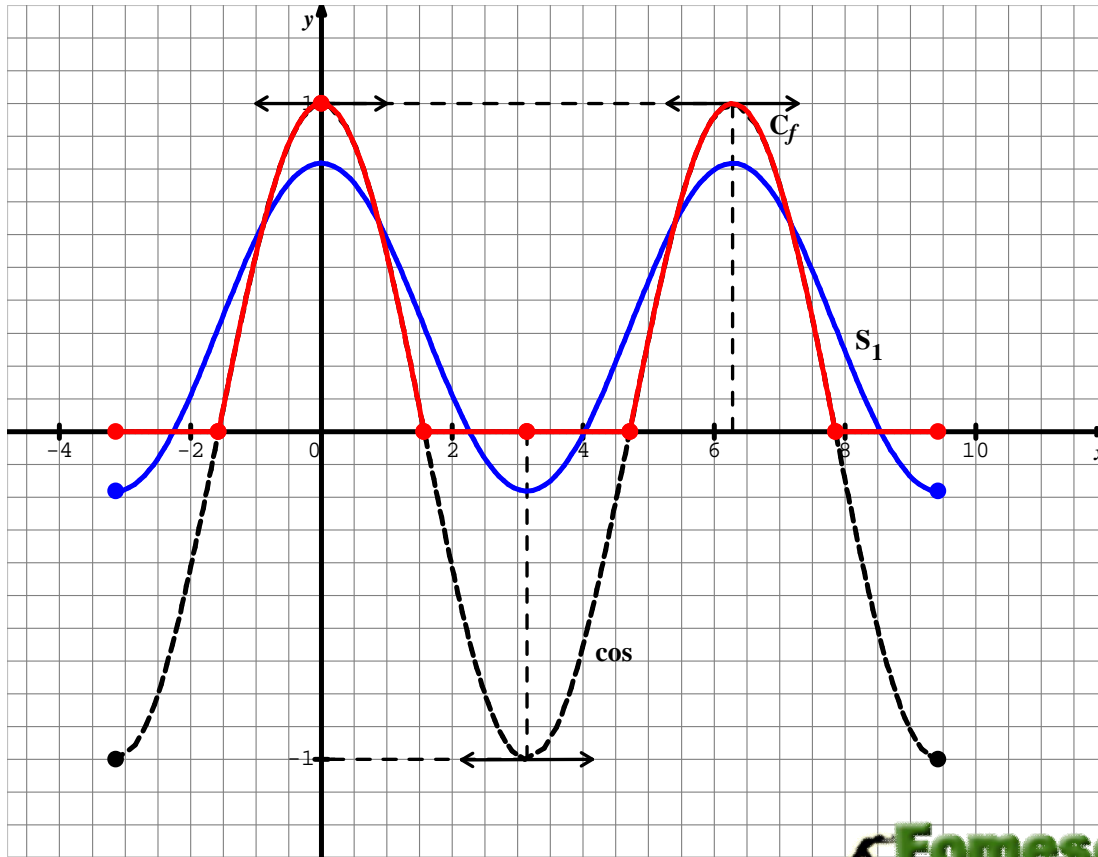
4. On rappelle que la formule de Parseval permettant de calculer le carré de la valeur efficace μ_3^2 de la fonction S_3 est : $\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2)$.

- 3.a. Calculer la valeur exacte de μ_3^2 .

- b. Calculer la valeur approchée de $\frac{\mu_3^2}{\mu_{eff}^2}$ arrondie à 10^{-2} .

Correction

Exercice 1



Fomesoutra.com
ça soutra !

Docs à portée de main

La fonction f est paire donc les coefficients $b_n = 0$ sont tous nuls .

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \frac{1}{\pi} [\sin t]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{\pi} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

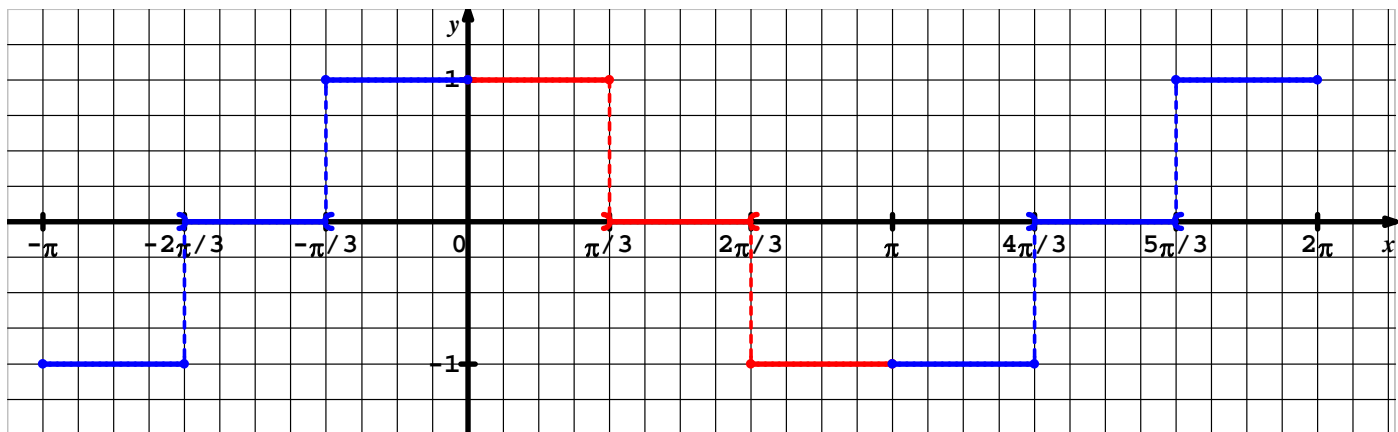
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos t \cos(nt) dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos t \cos(nt) dt \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) dt \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((n+1)t}{n+1} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((n-1)t}{n-1} \right]_0^{\pi/2}$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n-1} + \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{n+1} \right)$$

Exercice 2

1. représentation graphique



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} 1 dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} 0 dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi} -1 dt = \frac{1}{\pi} [t]_0^{\alpha} - \frac{1}{\pi} [t]_{\pi-\alpha}^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} (\alpha - \pi + \pi - \alpha) = 0$$

La fonction f est paire donc les coefficients $b_n = 0$ sont tous nuls .

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} \cos(nt) dt \right) + \frac{2}{\pi} \left(\int_{\pi-\alpha}^{\pi} (-1) \cos(nt) dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\alpha} - \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_{\pi-\alpha}^{\pi} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(n\alpha)}{n} + \frac{\sin n(\pi - \alpha)}{n} \right) = \frac{2}{n\pi} (\sin(n\alpha) + (\sin n\pi \cos n\alpha - \cos(n\pi) \sin(n\alpha))) = \frac{2}{n\pi} (\sin(n\alpha) - (-1)^n \sin(n\alpha))$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(n\alpha) ; a_3 = \frac{2}{3\pi} [1 + 1] \sin(3\alpha) = \frac{4}{3\pi} \sin(3\alpha) = 0$$

$$\sin(3\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 + 2k\pi \\ 3\alpha = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 + \frac{2k\pi}{3} \\ \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}, \text{ or } 0 < \alpha < \pi/2, \text{ donc } \alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{3}.$$

$$F^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \left([t]_0^{\pi/3} + [t]_{2\pi/3}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) \quad a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$$

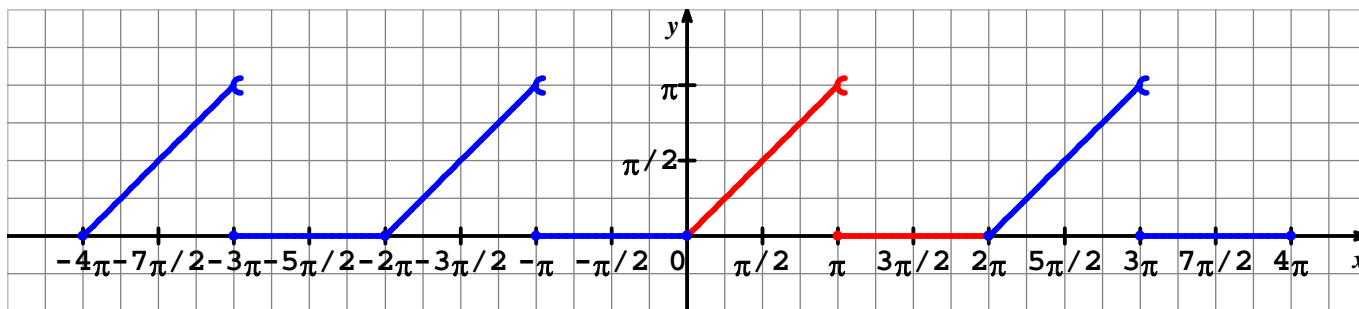
$$a_1 = \frac{2}{\pi} [1 + 1] \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} ; a_2 = \frac{2}{2\pi} [1 - 1] \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0, \text{ donc on obtient } g(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cos(t).$$

$$G^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [g(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cos t \right)^2 dt = \frac{12}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{6}{\pi^3} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{6}{\pi^3} \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right)_0^{2\pi} = \frac{6}{\pi^3} \times \frac{2\pi}{2} = \frac{6}{\pi^2}$$

$$\frac{G^2}{F^2} = \frac{6/\pi^2}{2/3} = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{\pi^2} \approx 0,91189$$

Exercice 3

La représentation graphique de f a été obtenue en représentant la fonction $t \mapsto t$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et en dupliquant le segment obtenu par translations de vecteurs $\pm 2\pi \vec{i}$.



2. La série de Fourier associée à f est : $a_0 + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ avec :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \cdot dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \cdot dt .$$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\mu_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [\varphi(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right) = 0 - \frac{1}{n\pi} \left[-\frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2 \pi} [\cos(n\pi) - 1]$$

Une intégration par partie donne $u(t) = t$ et $u'(t) = 1$; $v'(t) = \cos nt$ et $v(t) = \frac{1}{n} \sin(t)$.

$$\cos n\pi = (-1)^n .$$

si n est pair $\cos 2n\pi = (-1)^{2n} = 1$ et $a_n = \frac{1}{n^2 \pi} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{1}{n^2 \pi} [1 - 1] = 0$ donc $a_{2n} = 0$;

si n est impair $\cos[(2n+1)\pi] = -1$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2 \pi} [-1 - 1] = \frac{-2}{(2n+1)^2 \pi}$, donc $a_{2n+1} = \frac{-2}{(2n+1)^2 \pi}$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt .$$
 Une intégration par partie donne

$$u(t) = t \text{ et } u'(t) = 1 \quad ; \quad v'(t) = \sin nt \text{ et } v(t) = -\frac{1}{n} \cos nt .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-t \cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt = \frac{(-\pi \cos n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n^2 \pi} [\sin nt]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{-\cos(n\pi)}{n} + 0$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Si n est pair $\cos n\pi = 1$ et $b_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = \frac{-1}{2n}$;

Si n est impair $\cos(n\pi) = -1$, donc $b_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$.

$$S_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^3 [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] = \frac{\pi}{4} + a_1 \cos t + a_2 \cos(2t) + a_3 \cos(3t) + b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t)$$

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{2}{\pi}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9\pi}$	$\frac{1}{3}$

$$S_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + a_3 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + b_3 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$S_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2}{9\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$S_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left[-\frac{2}{\pi} + \frac{2}{9\pi} + 1 + \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left[-\frac{16}{9\pi} + \frac{3+1}{3}\right] - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left[-\frac{16}{9\pi} + \frac{4}{3}\right] - \frac{1}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left[-\frac{16}{9\pi} + \frac{4}{3}\right] - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left[\frac{16}{9\pi} - \frac{4}{3}\right] \approx -0,043.$$

$$\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi^2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{4}{81\pi^2} + \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{49}{36} + \frac{328}{81\pi^2}\right)$$

$$\mu_{eff}^2 = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\mu_3^2}{\mu_{eff}^2} = \frac{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{49}{36} + \frac{328}{81\pi^2}\right)}{\frac{\pi^2}{6}} = \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{49}{36} + \frac{328}{81\pi^2}\right)\right) \times \frac{6}{\pi^2} \approx 0,91344.$$

Annexe exercice 1


sa soutra !
Docs à portée de main

