

TP MATHEMATIQUES TRANSFORMEE DE LAPLACE BTS2-2008-2009

Exercice 1

U est la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

La réponse $y(t)$ d'un système soumis à une excitation $x(t)$ est telle que :
$$Y(p) = \frac{e^{-\tau p}}{p} \left(1 - \frac{e^{-\tau p}}{1 + 2\tau p} \right) X(p)$$

Le signal de sortie y est tel que : $Y(p) = X(p) \times H(p)$ où X et Y sont les transformées de Laplace de x et de y . On admet que la fonction $u \mapsto e^u$ ait une approximation affine au voisinage de 0 à l'ordre 1.

$$e^u \approx 1 + u + u\varepsilon(u) \text{ avec } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$$

Déterminer, en fonction de τ , la limite, quand t tend vers $+\infty$, de la réponse $y(t)$, lorsque le système est soumis à l'excitation $x(t) = U(t)$ (échelon unité). On pourra appliquer le théorème de la valeur finale

Exercice 2

U est la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

La réponse $y(t)$ d'un système soumis à une excitation $x(t)$ est telle que : $Y(p) = X(p) \times H(p)$
 X et Y sont les transformées de Laplace de x et de y et H la fonction de transfert du système.

Dans cet exercice, $H(p) = \frac{p+1}{p^2 + p + 1}$ et le signal d'entrée est la fonction rampe définie par : $x(t) = tU(t)$.

1°. Calculer $Y(p)$. En déduire $y(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} y(t)$. On pourra appliquer le théorème de la valeur initiale.

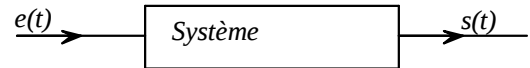
2°. Déterminer la transformée de Laplace $Y_1(p)$ de la dérivée y' de y .

En déduire $y'(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} y'(t)$. Puis calculer $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} y''(t)$ en utilisant la méthode que précédemment.

Fomesoutra.com
ça soutra !
 Docs à portée de main

Exercice 3

On considère le système «entrée-sortie» représenté ci-contre :



On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e . Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est à dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E .

La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

Dans cet exercice, le filtre considéré a une fonction de transfert H définie sur $]0; +\infty[$ par $H(p) = \frac{p}{p^2 + p + 1}$.

Première partie : recherche du lieu de transfert

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1°. Soit ω un nombre réel strictement positif. Montrer que $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)}$.

2°. b. Le « lieu de transfert » du filtre est la courbe décrite, dans un plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par le point M d'affixe $Z = H(j\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0; +\infty[$. Soit A le point d'affixe $\frac{1}{2}$.

Calculer $\left| H(j\omega) - \frac{1}{2} \right|$. En déduire que le « lieu de transfert » du filtre est inclus dans un cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Représenter graphiquement les ensembles C_1 et C .

Deuxième partie : réponse du filtre à une excitation particulière

La fonction échelon unité U est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Le signal d'entrée est un créneau défini par :
$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; 0[\\ 1 & \text{si } t \in [0; 1[\\ 0 & \text{si } t \in [1; +\infty[\end{cases}$$

- 1°. Donner la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthogonal. Vérifier à l'aide d'un tableau que $e(t) = U(t) - U(t-1)$. Donner la transformée de Laplace de la fonction e
- 2°. Déterminer la transformée de Laplace $S(p)$ du signal de sortie puis l'expression de $s(t)$ en remarquant que $p^2 + p + 1 = (p + 1/2)^2 + 3/4$

Exercice 4

t désigne la variable réelle positive, on se propose de chercher la solution $(x; y)$ du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \text{ vérifiant : } x(0^+) = 2 \text{ et } y(0^+) = 4$$

Fomesoutra.com
ça s'écrit
 Docs à portée de main

1°. Première méthode : utilisation de la transformation de Laplace

- a. Déterminer les réels a, b, c et d tels que : $\frac{2(p+3)}{(p-3)(p+1)} = \frac{a}{p-3} + \frac{b}{p+1}$ et $\frac{4p}{(p-3)(p+1)} = \frac{c}{p-3} + \frac{d}{p+1}$.
- b. On suppose que les fonctions x et y admettent des transformées de Laplace notées respectivement $X(p)$ et $Y(p)$. Grâce à la transformation de Laplace, trouver la solution du système vérifiant les conditions initiales imposées

2°. Résolution d'une équation différentielle du second ordre

- a. Montrer que la solution $t \mapsto x(t)$ cherchée satisfait à l'équation différentielle :
 $(E) : x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 0$
- b. Résoudre l'équation différentielle (E) . En déduire la solution du système vérifiant les conditions initiales imposées

Exercice 5

On considère le circuit ci-dessus et on se propose d'étudier en fonction du temps t (exprimé en secondes), l'intensité du courant $i(t)$ (exprimée en Ampères) suivant la force électromotrice $f(t)$ (exprimée en Volts) appliquée aux bornes.

On sait que l'équation différentielle régissant le circuit est : $(E) : \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = f(t)$

1. Première partie : on suppose que $f(t) = 5$

- a. Déterminer la solution $i_1(t)$ de l'équation (E) : vérifiant $i_1(0) = 0$
- b. Etudier le sens de variation de la fonction i_1 sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Représenter graphiquement i_1 dans un repère orthonormal pour $0 \leq t \leq 0,5$ (on prendra pour unité graphique 20 cm)

2. deuxième partie

On suppose maintenant que la force électromotrice $f(t)$ est définie par
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; 0[\\ 5 & \text{si } t \in [0; 0,5[\\ 0 & \text{si } t \in [0,5; +\infty[\end{cases}$$

- a. Montrer que, pour tout t , on a : $f(t) = 5[U(t) - U(t-1/2)]$, où U représente la fonction échelon unité. En déduire la transformée de Laplace de f

- b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel $p > 0$, on ait : $\frac{10}{p(p+20)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+20}$

En déduire les originaux de Laplace des fonctions définies par : $F_1(p) = \frac{10}{p(p+20)}$ et $F_2(p) = \frac{10e^{-p/2}}{p(p+20)}$

- c. Déterminer la solution $i_2(t)$ de l'équation différentielle (E) : vérifiant $i_2(0) = 0$ en utilisant la transformation de Laplace

- d. Montrer que cette solution peut s'écrire :
$$i_2(t) = \begin{cases} i_1(t) & \text{si } t \in [0; 0,5[\\ \frac{1}{2}(e^{10} - 1)e^{-20t} & \text{si } t \in [0,5; +\infty[\end{cases}$$

EXERCICE

On se propose de déterminer la fonction f de la variable réelle t , définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie :

- a. $f(t) = 0$ pour $t < 0$;
- b. f est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$;
- c. $f''(t) + 2f'(t) + 5f(t) = e^{-t} \sin(3t)$ pour tout $t \in [0; +\infty[$;
- d. $f(0^+) = 0$ et $f'(0^+) = 0$.

1. première partie

- a. Résoudre, sur $[0; +\infty[$, l'équation différentielle : $(E_0) : y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$
- b. Déterminer le réel k tel que la fonction h définie par : $h(t) = ke^{-t} \sin(3t)$ soit solution sur $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle $(E) : y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \sin(3t)$.
- c. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E) .
- d. Dédire des questions précédentes la fonction f cherchée.



2. Deuxième partie

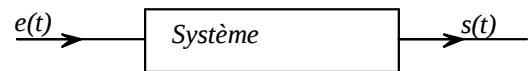
On admet que la fonction f et ses dérivées ont des transformées de Laplace, et l'on note $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$

- a. Préciser les transformées de Laplace de :
 - ☞ la fonction f'
 - ☞ la fonction f''
 - ☞ la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-t} \sin(3t) \mathcal{U}(t)$, où $\mathcal{U}$ représente la fonction échelon unité
- b. Déterminer la transformée F de f
- c. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel $p > 0$, on ait :

$$\frac{3}{[(p+1)^2 + 4][(p+1)^2 + 9]} = \frac{a}{(p+1)^2 + 4} + \frac{b}{(p+1)^2 + 9} . \text{ Déterminer alors la fonction } f .$$

Exercice 2006

On considère le système «entrée-sortie» représenté ci-contre :



On note $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie. Un système du 1^{er} ordre est un système régi par une équation différentielle du type : $(E) : T s'(t) + s(t) = K e(t)$, où T et K sont des constantes réelles positives

On note $p \mapsto E(p) = \mathcal{L}(e(t))$ et $p \mapsto S(p) = \mathcal{L}(s(t))$ où $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace.

La fonction de transfert H d'un système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

Partie A

1°. Recherche de la fonction de transfert

En appliquant la transformation de Laplace $\mathcal{L}$ aux deux membres de l'équation différentielle (E) et en

supposant que $s(0^+) = 0$ (le système est initialement au repos, montrer que $H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$

Dans le reste de l'exercice, on prendra $K = T = 1$

2°. Recherche du signal de sortie dans un cas particulier

On suppose que le signal d'entrée est $e(t) = 2\mathcal{U}(t - 3)$

- a) Représenter sur la feuille de copie la fonction e dans un repère orthogonal pour $t \in [-1; 6]$
- b) Calculer $E(p)$

c) Montrer que $S(p) = 2 \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-3p}}{p+1} \right)$

d) En déduire l'expression du signal de sortie $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p))$

Partie B

On se propose dans cette question de déterminer le « lieu de transfert » associé à la fonction de transfert H . On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ et on pose $p = j\omega$ avec $\omega \in]0; +\infty[$

On a alors : $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

Dans ce qui suit , les représentations graphiques demandées sont à réaliser sur une feuille de papier millimétré avec un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique cinq centimètres

On appelle M_ω le point d'affixe $z = 1 + j\omega$ et N_ω le point d'affixe $H(j\omega)$ pour tout $\omega \in]0; +\infty[$

On lit sur l'écran d'une calculatrice que les valeurs de $H(j\omega)$ pour $\omega = \frac{3}{4}$, $\omega = 1$ et $\omega = \sqrt{3}$

$$H\left(\frac{3}{4}j\right) = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}j ; H(j) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j ; H(\sqrt{3}j) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j .$$

Placer sur une figure les points M_ω et N_ω pour $\omega = \frac{3}{4}$, $\omega = 1$ puis $\omega = \sqrt{3}$

b) Tracer sur la figure du 3^a , l'ensemble C_1 des points M_ω du plan $\mathcal{P}$, d'affixe $z = 1 + j\omega$ quand ω décrit l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) Soit A le point d'affixe $\frac{1}{2}$.

Calculer $\left|H(j\omega) - \frac{1}{2}\right|$. En déduire que le « lieu de transfert » du filtre est inclus dans un demi- cercle

C dont on précisera le centre et le rayon .

Représenter graphiquement sur la figure du 3^a l'ensembles C décrit par le point N_ω lorsque ω décrit l'intervalle $]0; +\infty[$.

