<u>Session 2008 –groupement A BTS2GO MATHEMATIQUES 2008-2009</u>

<u>Exercice 1 : (11 points)</u> Spécialités Électrotechnique et Génie optique

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}(t) = 0 & si\, t < 0 \\ \boldsymbol{U}(t) = 1 & si\, t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par : $e(t) = 4\left[\boldsymbol{U}(t) - \boldsymbol{U}(t-2)\right]$

(a) Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.
(b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e. Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que $4s'(t) + s(t) = e(t)$ et $s(0) = 0$.

On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S.

Démontrer que : $S(p) = \dfrac{1}{p\left(p+1/4\right)}\left(1-e^{-2p}\right)$

3. Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{1}{p\left(p+1/4\right)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{\left(p+1/4\right)}$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f représente la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p}e^{-2p}$	$\dfrac{1}{p+1/4}$	$\dfrac{1}{p+1/4}e^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. (a) Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

(b) Vérifier que : $\begin{cases} s(t) = 0 & si\ \ t < 0 \\ s(t) = 4 - 4e^{-t/4} & si\ \ 0 \leq t \leq 2 \\ s(t) = 4e^{-t/4}\left(e^{1/2} - 1\right) & si\ \ t \geq 2 \end{cases}$

6. (a) Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $]0;2[$.

(b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ t < 2}} s(t)$

7. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

(b) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

<u>Exercice 2</u>

On considère un système analogique « entrée-sortie » dans lequel le signal d'entrée est représenté par une fonction e et celui de sortie par une fonction s.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

Les fonctions e et s sont des fonctions causales et on suppose qu'elles admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.

On rappelle que la fonction échelon unité $\boldsymbol{U}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \boldsymbol{U}(t) = 0 & si\, t < 0 \\ \boldsymbol{U}(t) = 1 & si\, t \geq 0 \end{cases}$

La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On suppose , dans le cadre de cette étude, que $H(p) = \dfrac{1}{1+2p}$ .et $e(t) = \boldsymbol{U}(t)$

(a) Déterminer $S(p)$.

(b) Déterminer les réels α et β tels que $S(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{\left(p+1/2\right)}$.

(c). En déduire $s(t)$.

Exercice 2 : *(9 points)*
Toutes spécialités
Dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.
On désigne par E un nombre réel de l'intervalle]0 ; 3[.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t)=\begin{cases} E\times t & si\ 0\le t\le 1 \\ (3-E)t+2E-3 & si\ 1\le t\le 2 \\ 3 & si\ 2\le t\le 5/2 \end{cases}$$

Partie A :
Dans cette **partie, et uniquement dans cette partie,** on se place dans le cas où E = 2.
1. Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0;1[$, $[1;2[$ et $[2;5/2]$.
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5;10]$.

Partie B :
Dans cette **partie,** on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de E n'est pas spécifiée.
On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f.

On note $S(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right)$

1. Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0=2\frac{E+3}{5}$..
2. Déterminer b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. (a) Montrer que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt=\frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+\frac{25}{4n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-1\right)$$

(b) On a calculé les intégrales $\int_1^2 f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt$ et $\int_2^{5/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt$

On a ainsi obtenu pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{5/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt=\frac{25}{4n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right)$$

En déduire que pour tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 :

4. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on appelle *un* l'harmonique de rang n.

On a alors $u_n(t)=a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel t.

(a) Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel t.

(b) On appelle E0 la valeur de E pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de E telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel t.

Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de E_0.

Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.
Un tel signal avec $u3(t) = u5(t) = 0$ *permettra :*
→ *s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple*
→ *s'il est associé à un transformateur, d'éviter les pertes*
→ *s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.*

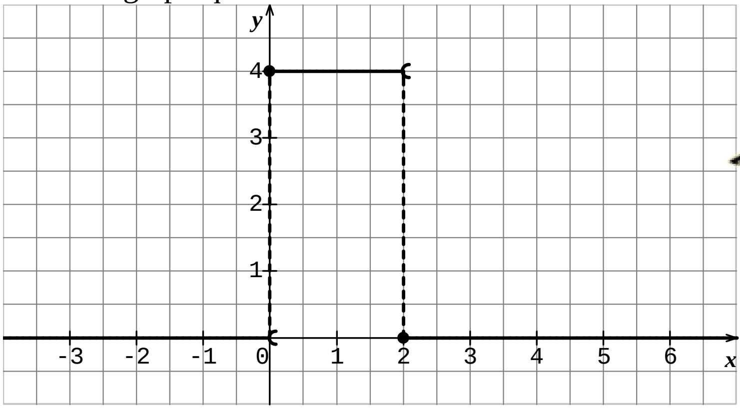
Corrigé

Exercice 1

1.a. $e(t)=4\left[\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-2)\right]$

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\mathcal{U}(t)$		0		1		1	
$\mathcal{U}(t-2)$		0		0		1	
$e(t)=4\left[\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-2)\right]$		0		4		0	

Représentation graphique de la fonction e :



b) on a : $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))=\dfrac{1}{p}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t\text{-}a))=\dfrac{1}{p}e^{-ap}$, donc $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t-2))=\dfrac{1}{p}e^{-2p}$, d'où

$$\mathcal{L}(e(t))=E(p)=\mathcal{L}\left[4(\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-2))\right]=\frac{4}{p}-\frac{4}{p}e^{-2p}=\frac{4}{p}(1-e^{-2p}).$$

2. Dans le formulaire on lit $\mathcal{L}(f'(t))=pF(p)-f(0^+)$ *et ici* $f(0^+)=0$;

On a donc $\mathcal{L}(s'(t))=pS(p)-s(0^+)=pS(p)$ .donc $\mathcal{L}(4s'(t)+s(t))=\mathcal{L}(e(t))=E(p)$ et en utilisant la linéarité , on obtient : $4\mathcal{L}(s'(t))+\mathcal{L}(s(t))=E(p)$. Ce qui donne $4pS(p)+S(p)=\dfrac{4}{p}(1-e^{-2p})$ et enfin : $S(p)=\dfrac{4}{p(4p+1)}(1-e^{-2p})=\dfrac{1}{p(p+1/4)}(1-e^{-2p})$. $S(p)=\dfrac{1}{p(p+1/4)}(1-e^{-2p})$.

3. On a , par réduction au même dénominateur , $\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{p+1/4}=\dfrac{a(p+1/4)+bp}{p(p+1/4)}=\dfrac{(a+b)p+a/4}{p(p+1/4)}$.

Par identification avec la relation demandée : $\dfrac{1}{p(p+1/4)}$, on obtient : $\begin{cases}a+b=0\\ a/4=1\end{cases}$ d'où $a=4$ et $b=-4$.

C'est-à-dire $S(p)=\left(\dfrac{4}{p}-\dfrac{4}{p+1/4}\right)(1-e^{-2p})$.

4. par lecture de la table des transformées de Laplace et que la transformée de Laplace est linéaire, donc on a : $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))=\dfrac{1}{p}\Leftrightarrow\mathcal{U}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$. $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t-\tau))=\dfrac{1}{p}e^{-\tau p}\Leftrightarrow\mathcal{U}(t-\tau)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}e^{-\tau p}\right)$.

$$\mathcal{L}(e^{-at}\mathcal{U}(t))=\frac{1}{p+a}\Leftrightarrow e^{-at}\mathcal{U}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right).$$

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau))=F(p)e^{-\tau p}\Leftrightarrow f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)e^{-\tau p}\right).$$

$$S(p)=\frac{4}{p}(1-e^{-2p})-\frac{4}{p+1/4}(1-e^{-2p})=\frac{4}{p}-\frac{4}{p}e^{-2p}-\frac{4}{p+1/4}+\frac{4}{p+1/4}e^{-2p}$$

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}e^{-2p}$	$\frac{1}{p+1/4}$	$\frac{1}{p+1/4}e^{-2p}$
$f(t)$	$\boldsymbol{U}(t)$	$\boldsymbol{U}(t-2)$	$e^{-t/4}\boldsymbol{U}(t)$	$e^{-(t-2)/4}\boldsymbol{U}(t-2)$

5. a. à l'aide du tableau ci-dessus , on obtient alors pour tout réel t :

$$s(t)=4\times\boldsymbol{U}(t)-4\boldsymbol{U}(t-2)-4e^{-t/4}\boldsymbol{U}(t)+4e^{-(t-2)/4}\boldsymbol{U}(t-2)$$

Et enfin : $s(t)=4\left(1-e^{-t/4}\right)\boldsymbol{U}(t)-4\left(1-e^{-(t-2)/4}\right)\boldsymbol{U}(t-2)$.

b.

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$4(1-e^{-t/4})\boldsymbol{U}(t)$	0	$4(1-e^{-t/4})$	$4(1-e^{-t/4})$	
$4(1-e^{-(t-2)/4})\boldsymbol{U}(t-2)$	0	0	$4(1-e^{-(t-2)/4})$	
$s(t)=$	0	$4(1-e^{-t/4})$	$4e^{-t/4}(e^{1/2}-1)$	

Par conséquent ,

Comme $\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{U}(t-2)=0$ pour tout $t\in]-\infty;0[$, donc $s(t)=0$;

$\boldsymbol{U}(t)=1$ pour tout $t\geq 0$ et $\boldsymbol{U}(t-2)=0$, pour tout $t<2$, alors $4(1-e^{-t/4})$ pour tout $t\in[0;2[$.

Pour tout $t\in[2;+\infty[$, $\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{U}(t-2)=1$, alors on a :

$$s(t)=4(1-e^{-t/4})-4(1-e^{-(t-2)/4})=-4e^{-t/4}+4e^{-(t-2)/4}$$
$$s(t)=-4e^{-t/4}+4e^{-t/4}\times e^{1/2}=4e^{-t/4}(e^{1/2}-1)$$

6. a. La fonction s est dérivable sur l'intervalle $]0;2[$ et $s'(t)=e^{-t/4}$.Or on sait que $t\mapsto e^{at}$ est strictement positive pour tous réels a et t sur l'intervalle $]0;2[$, par conséquent la fonction s est strictement croissante sur l'intervalle $]0;2[$.

b. On a $\lim\limits_{x\to 2^-} e^{-t/4}=e^{1/2}$, alors $\lim\limits_{x\to 2^-} s(t)=4(1-e^{-1/2})\approx 1,574$.

7. a. La fonction s est dérivable sur l'intervalle $]2;+\infty[$ et $s'(t)=-e^{-t/4}(e^{1/2}-1)$.

Or on sait que $t\mapsto e^{at}$ est strictement positive pour tous réels a et t sur l'intervalle $]2;+\infty[$,

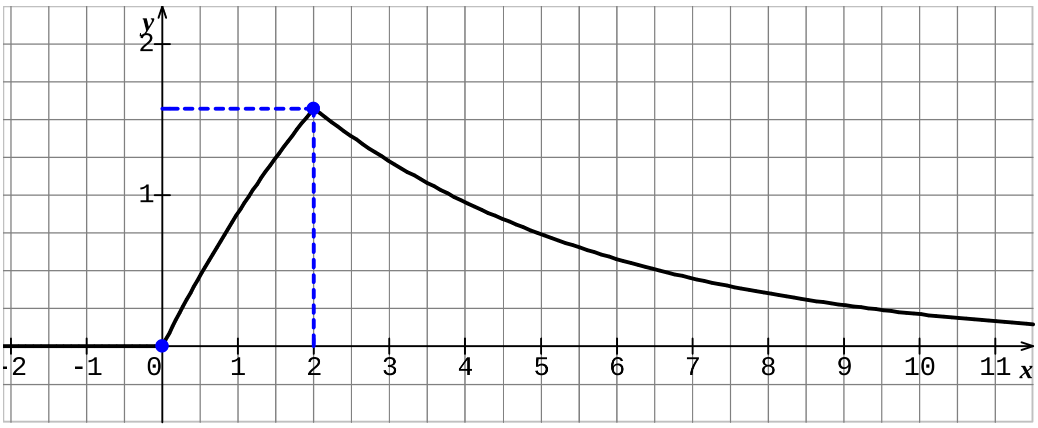
De plus $e^{1/2}-1>0$, on en déduit que $s'(t)<0$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

Par conséquent la fonction s est strictement décroissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

b . On a , à l'aide du formulaire et du théorème sur la limite des fonctions composées , $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-t/4}=0$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} s(t)=0$.

8.



Exercice 2

1. a) La fonction de transfert H du système est définie par $S(p)=H(p)\times E(p)$,et $H(p)=\frac{1}{1+2p}$

et $e(t)=\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$. Or $E(p)=\frac{1}{p}$ d'où $S(p)=\frac{1}{p(1+2p)}=\frac{1}{2}\frac{1}{p(p+1/2)}$

b) Trouver les réels α et β tels que $S(p)=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{p+1/2}\right]$, revient à trouver α et β tels que, par exemple, pour tout p, $\frac{1}{p(p+1/2)}=\frac{\alpha(p+1/2)}{p}+\frac{\beta p}{1+2p}$, soit encore, pour tout p,

$\frac{1}{p(1+2p)}=\frac{(\alpha+\beta)p+\alpha/2}{p(p+1/2)}$, soit par identification avec la relation de la question précédente,

on obtient le système $\alpha+\beta=0$ et $\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ soit encore $\alpha=1$ et $\beta=-1$. on en déduit que, pour tout p,

$S(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1/2}$

(c) L'originale de $\frac{1}{p}$ est la fonction échelon unité $\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$ et l'originale de $\frac{1}{p+1/2}=e^{-t/2}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$

D'où : $s(t)=(1-e^{-t/2})\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$.