PARTIEL N°4 TRANSFORMATION DE LAPLACE & LOIS DE PROBABILITE BTS2

<u>Exercice –BTS-2002 : 7 points</u>

La fonction échelon unité U est définie par est définie par : $\begin{cases} U(t)=0 & si\ t<0 \\ U(t)=1 & si\ t\geq 0 \end{cases}$.

On considère le système «entrée-sortie» représenté ci-dessous :
On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est à dire qu'elles sont nulles pour $t<0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E.
La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p)=H(p)\times E(p)$.
On considère le signal d'entrée e défini par : $e(t)=tU(t)-2U(t-1)-(t-2)U(t-2)$ et la fonction de transfert H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(p)=\dfrac{1}{p+1}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

2. Pour $p>0$, déterminer $E(p)$.

3. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que, pour tout $p>0$, on ait : $\dfrac{1}{p^2(p+1)}=\dfrac{a}{p^2}+\dfrac{b}{p}+\dfrac{c}{p+1}$

   On admet que $\dfrac{2}{p(p+1)}=\dfrac{2}{p}-\dfrac{2}{p+1}$

4. a. Déterminer $S(p)$ puis $s(t)$.

   b. En déduire que la fonction s est définie par : $\begin{cases} s(t)=0 \quad si\ t<0\ ; \\ s(t)=t-1+e^{-t} \quad si\ \ 0\leq t<1; \\ s(t)=t-3+e^{-t}(1+2e) \quad si\ \ 1\leq t<2\ ; \\ s(t)=e^{-t}(1+2e-e^2) \quad si\ t\geq 2 \end{cases}$

5. On rappelle que la notation $f(a^+)$ représente la limite de la fonction f lorsque la variable t tend vers a par valeurs supérieures : $f(a^+)=\lim\limits_{t\to a^+} f(t)$. De même, $f(a^-)=\lim\limits_{t\to a^-} f(t)$.

a. Calculer $s(1^+)$, $s(1^-)$, $s(2^+)$, $s(2^-)$. Que peut-on en conclure pour la fonction s lorsque t = 1 et t = 2?
b. Calculer $s'(t)$ sur chacun des intervalles $]0;1[$, $]1;2[$ et $]2;+\infty[$.
   On admet que s' est strictement positive sur $]0;1[$ et $]2;+\infty[$.
   Déterminer le signe de $s'(t)$ sur l'intervalle $]1;2[$.
c. Calculer la valeur exacte de $s(\ln(1+2e))$. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)$ et dresser le tableau de variation de la fonction s sur $]0;1[$.

<u>Exercice 2 - Génie optique : 2006 : 9 points</u>
<u>Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.</u>
Partie A
Une entreprise produit, en grande quantité, des appareils. Chaque appareil fabrique peut présenter deux défauts que l'on appellera défaut a et défaut b .
On prélève un appareil au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'événement : « l'appareil présente le défaut a » et B l'événement : « l'appareil présente le défaut b » . Les probabilités des événements A et B sont $p(A)=0{,}03$ et $p(B)=0{,}02$;
on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement E_1: « l'appareil présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'événement E_2:
   « l'appareil est défectueux, c'est- à- dire qu'il présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'événement E_3: « l'appareil ne présente aucun défaut ».
4. Sachant que l'appareil est défectueux, quelle est la probabilité qu'il présente les deux défauts ?
   Le résultat sera arrondi au millième.
   Dans les parties B et C, les résultats seront à arrondir au centième.

Partie B

Les appareils sont conditionnes par lots de 100 pour l'expédition aux distributeurs de pièces détachées.
On prélève au hasard un échantillon de 100 appareils dans la production d'une journée.
La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 appareils. Pour cette partie, on considère que, à chaque prélèvement, la probabilité que l'appareil soit défectueux est 0,05.
On considère la variable aléatoire X_1 qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux.

1. a. Justifier que la variable aléatoire X_1 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_1.
2. On suppose que l'on peut approcher la loi de X_1 par une loi de Poisson de paramètre λ.
   a. On choisit $\lambda = 5$; justifier ce choix.
   b. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux appareils défectueux dans un lot.

Partie C

Les appareils sont aussi conditionnes par lots de 800 pour l'expédition aux usines de montage.
On Prélève au hasard un lot de 800 appareils. On considère la variable aléatoire X_2 qui, à tout prélèvement de 800 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X_2 par la loi normale de moyenne 40 et d'écart –type $6,2$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot.
2. Déterminer le réel a tel que $p(X_2 > a) = 0,01$.
   En déduire, sans justification, le plus petit entier k tel que la probabilité que le lot comporte plus de k appareils défectueux soit inférieure a $0,01$.

<u>Exercice 3 : 4 points</u>

Une entreprise produit des batteries de téléphones portables. Au cours de la production peuvent apparaître deux défauts indépendants que l'on appellera défaut A et défaut B.
La probabilité que le défaut A apparaisse vaut $0,02$ et celle que le défaut B apparaisse vaut $0,01$.

1. Calculer la probabilité qu'une batterie soit défectueuse c'est-à-dire qu'elle comporte au moins un des deux défauts.
2. On prélève au hasard dans la production un échantillon de 100 batteries. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille 100, associe le nombre de batteries défectueuses.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner son espérance mathématique et sa variance.
   b. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson.
   Quel est la paramètre de cette loi de Poisson ?
   En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que l'échantillon comporte plus de deux batteries défectueuses.
3. On s'intéresse dans cette question à la durée de décharge des batteries. On note y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 batteries, associe la moyenne des durées de décharge.
   On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètre $m = 80$ et $\sigma = 0,4$.
   Calculer la probabilité: $P(79 \leq Y \leq 81)$.

Questions supplémentaires

b) Déterminer le réel a tel que $P(Y \geq a) = 0{,}95$.

On donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de a.

c) Calculer la probabilité de l'événement « $(Y \geq 80)$ sachant que ($(Y \geq 79{,}34)$) ».

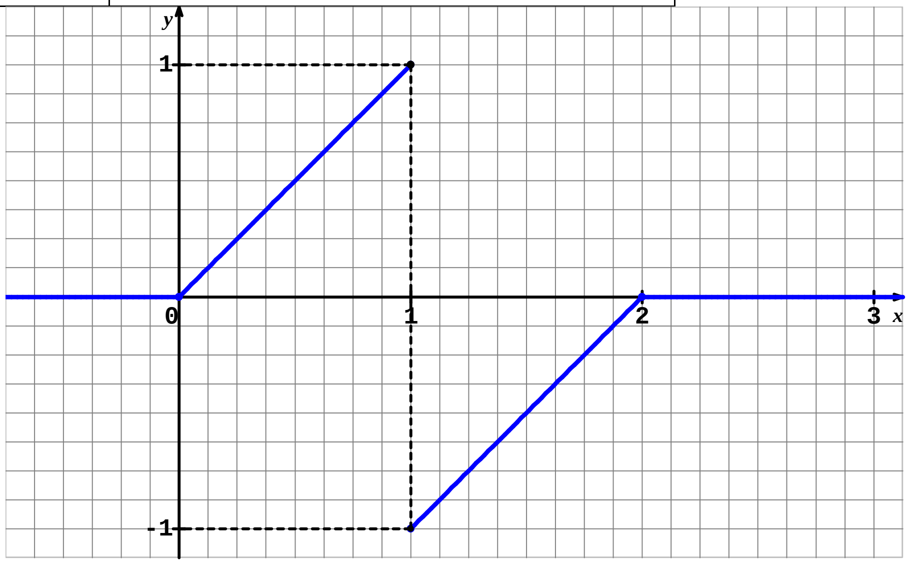
CORRIGE

Exercice 1

1.

t	0	1	2	
$t\mathcal{U}(t)$	0	t	t	t
$-2\mathcal{U}(t-1)$	0	0	-2	-2
$-(t-2)\mathcal{U}(t-2)$	0	0	0	$-(t-2)$
$e(t)$	0	t	$t-2$	0

$$e(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ t & si\ 0 \leq t \leq 1 \\ t-2 & si\ 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & si\ t \geq 2 \end{cases}$$



2. Si $p > 0$: $\mathcal{L}(e(t)) = \mathcal{L}(t\mathcal{U}(t)) - 2\mathcal{L}(\mathcal{U}(t-1)) - \mathcal{L}((t-2)\mathcal{U}(t-2))$. $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t-a)) = \dfrac{1}{p}e^{-pa}$ et

$\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t)) = \dfrac{1}{p^2}$. $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t-1)) = \dfrac{1}{p}e^{-p}$ et $\mathcal{L}((t-2)\mathcal{U}(t-2)) = \dfrac{1}{p^2}e^{-2p}$. $\mathcal{L}((t-2)\mathcal{U}(t-2)) = \dfrac{1}{p^2}e^{-2p}$.

D'où $E(p) = \dfrac{1}{p^2} - 2\dfrac{1}{p}e^{-p} - \dfrac{1}{p^2}e^{-2p}$,

3. $\dfrac{1}{p^2(p+1)} = \dfrac{a}{p^2} + \dfrac{b}{p} + \dfrac{c}{p+1} = \dfrac{a(p+1) + bp(p+1) + cp^2}{p^2(p+1)} = \dfrac{(c+b)p^2 + (a+b)p + a}{p^2(p+1)} =$

Donc $a = 1$; $b = -a = -1$ et $c = -b = 1$.Il s'ensuit que $\dfrac{1}{p^2(p+1)} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+1}$

4. $S(p) = H(p) \times E(p) = \dfrac{1}{p+1}\left(\dfrac{1}{p^2} - 2\dfrac{1}{p}e^{-p} - \dfrac{1}{p^2}e^{-2p}\right) = \dfrac{1}{p^2(p+1)} - 2\dfrac{1}{p(p+1)}e^{-p} - \dfrac{1}{p^2(p+1)}e^{-2p}$

$S(p) = H(p) \times E(p) = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+1} - \left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{2}{p+1}\right)e^{-p} - \left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+1}\right)e^{-2p}$

$L^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2}\right) = t\mathcal{U}(t)$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right) = \mathcal{U}(t)$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\right) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}e^{-p}\right) = \mathcal{U}(t-1)$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}e^{-p}\right) = e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2}e^{-2p}\right) = (t-2)\mathcal{U}(t-2)$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}e^{-2p}\right) = \mathcal{U}(t-2)$

$\mathsf{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}e^{-2p}\right)=e^{-(t-2)}U\ (t-2)$. On a donc:

$s(t)=\left(t-1+e^{-t}\right)U\ (t)-\left(2-2e^{-(t-1)}\right)U\ (t-1)-\left(t-2-1+e^{-(t-2)}\right)U\ (t-2)$.

$s(t)=\left(t-1+e^{-t}\right)U\ (t)-\left(2-2e^{-t+1}\right)U\ (t-1)-\left(t-3+e^{-t+2)}\right)U\ (t-2)$.

Si $t<0$, on a : $s(t)=0$.

Si $0\le t<1$, on a $s(t)=t-1+e^{-t}$

Si $1\le t<2$ $s(t)=t-1+e^{-t}-2+2e^{-t+1}+0=t-3+e^{-t}(1+2e)$

Si $t\ge 2$ $s(t)=t-3+e^{-t}(1+2e)-t+3-e^{-t+2}=e^{-t}(1+2e-e^2)$ d'où

$$s(t)=\begin{cases}0+0+0 & si\ t<0\\ t-1+e^{-t} & si\ 0\le t<1\\ t-3+e^{-t}(1+2e) & si\ 1\le t<2\\ e^{-t}(1+2e-e^2) & si\ t\ge 2\end{cases}$$

5. a. on a : $s(1^+)=-2+e^{-1}(1+2e)=-2+e^{-1}+2e^{-1+1}=-2+e^{-1}+2e^0=-2+e^{-1}+2=e^{-1}$

$s(1^-)=1-1+e^{-1}=e^{-1}$

On déduit que $s(1^+)=s(1^-)=e^{-1}$ et que s est continue en $t=1$.

De la même façon : $s(2^+)=e^{-2}(1+2e-e^2)=e^2+2e^{-1}-1$ et $s(2^-)=-1+e^{-2}(1+2e)=-1+e^{-2}+2e^{-1}$

Donc $s(2^+)=s(2^-)=-1+e^{-2}+2e^{-1}$et la fonction s est continue en $t=2$.

5.b calculons la dérivée $s'(t)$ $s'(t)=\begin{cases}0 & si\ t<0\\ 1-e^{-t} & si\ 0<t<1\\ 1-e^{-t}(1+2e) & si\ 1<t<2\\ -e^{-t}(1+2e-e^2) & si\ t>2\end{cases}$

Etudions le signe de la dérivée $s'(t)$ si $0<t<1$. Supposons que $s'(t)\ge 0$;

On a alors $1-e^{-t}(1+2e)\ge 0 \iff 1\ge e^{-t}(1+2e) \iff e^{-t}\le\dfrac{1}{1+2e}\iff -t\le\ln\left(\dfrac{1}{1+2e}\right)\iff t\ge\ln\left(1+2e\right)$

On obtient de manière analogue $s'(t)\ge 0$ si $t\le\ln\left(1+2e\right)$.

t	1		$\ln\left(1+2e\right)$		2
$s'(t)$		$-$	0	$+$	

5.c. Calculons $s\left(\ln\left(1+2e\right)\right)$:

$$s\left(\ln\left(1+2e\right)\right)=\ln(1+2e)-3+e^{-\ln(1+2e)}(1+2e)=\ln(1+2e)-3+\frac{1}{1+2e}(1+2e)=\ln(1+2e)-2$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}s(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}(1+2e-e^2)=0$

On déduit le tableau de variations de s

t	0		1		$\ln\left(1+2e\right)$		2		$+\infty$
$s'(t)$		$+$	▮	$-$	0	$+$		$+$	
$s(t)$	0	↗	e^{-1}	↘	$\ln(1+2e)-2$	↗		↗	0

Questions supplémentaires

d. Calculer $s'(1^+)$, $s'(1^-)$, $s'(2^+)$, $s'(2^-)$ .On admet que ces nombres sont respectivement les coefficients directeurs des demi-tangentes à droite et à gauche aux points d'abscisse1 et d'abscisse 2 de la courbe Γ représentative de la fonction s.

6. On se place dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 50 cm sur l'axe des ordonnées.

a. Recopier et compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs numériques seront données à 10^{-2} près.

t	1	1,2	1,4	1,6	2	2,5	3	3,5
$s(t)$								

b. tracer alors les tangentes ou demi-tangentes à la courbe Γ représentative de la fonction s au points : 0 ; 1 et 2 . tracer alors la courbe Γ .

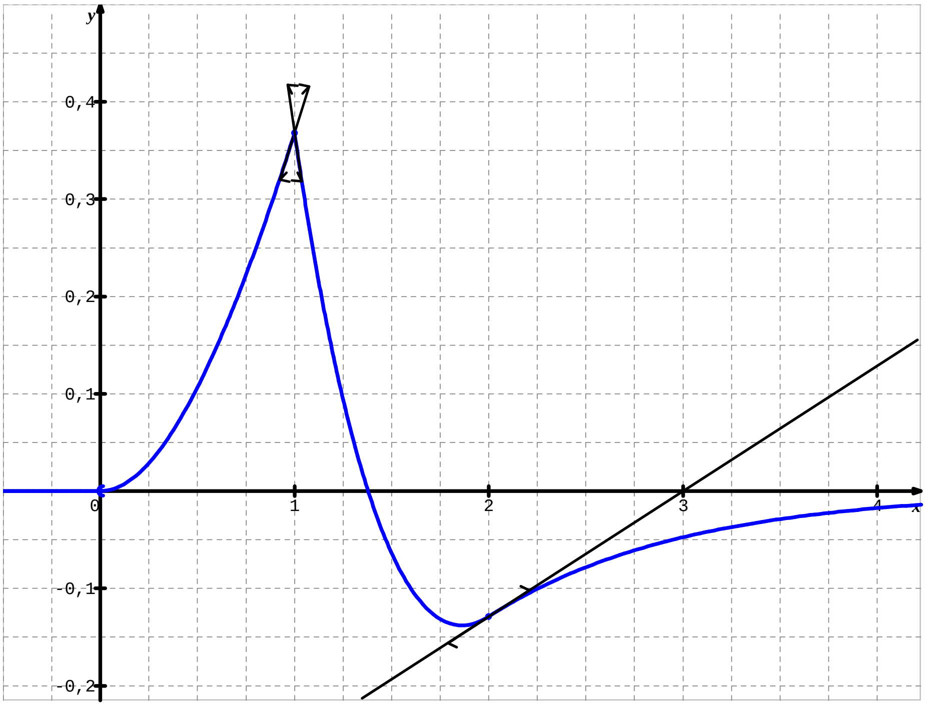
5.d on a : $\begin{cases} s'(1^+) = 1 - e^{-1}(1+2e) = 1 - e^{-1} - 2 = -1 - e^{-1} \\ s'(1^{-1}) = 1 - e^{-1} \end{cases}$. Donc $s'(1^+) \neq s'(1^{-1})$ par conséquent les deux demi- tangentes à droite et à gauche en $t = 1$ ne sont pas alignées (n'ont pas le même coefficient directeur) la courbe admet un point anguleux ; la fonction s n'est pas dérivable en $t = 1$.

En revanche : $\begin{cases} s'(2^+) = -2e^{-1}(1+2e-e^2) = -e^{-2} - 2e^{-1} + 1 = -e^{-2} - 2e^{-1} + 1 \\ s'(2^{-1}) = 1 - e^{-2}(1+2e) = 1 - e^{-2}(1+2e) = -e^{-2} - 2e^{-1} + 1 \end{cases}$. Donc $s'(2^+) = s'(2^{-1})$

par conséquent les deux demi-tangentes à droite et à gauche en $t = 1$ sont alignées (même coefficient directeur) la fonction s est dérivable en $t = 2$.

5.5.

t	1	1,2	1,4	1,6	2	2,5	3	3,5	4
$s(t)$	0,37	0,14	-0,01	-0,10	-0,13	-0,08	-0,05	-0,03	



Exercice 2

A.1. L'événement E_1 se note $A \cap B$ alors : $p(E_1) = p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

les événements A et B sont indépendants donc , $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,03 \times 0,02 = 0,0006$

2. L'événement $E_2 = (A \cup B)$ alors :

$p(E_2) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,03 + 0,02 - 0,0006 = 0,0494$.

3. L'événement E_3 est l'événement contraire de E_2 alors : $p(E_3) = p(\overline{E_2}) = 1 - p(E_2) = 1 - 0,0494 = 0,9506$.

On peut aussi écrire que $E_3 = \overline{A} \cap \overline{B}$ et en admettant que , puisque les événement A et B sont indépendants , les événement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants , $p(E_3) = p(\overline{A}) \times p(\overline{B}) = (1-0,03)(1-0,02) = 0,9506$

4. On cherche à calculer $p_{E_2}(E_1)$ alors : $p_{E_2}(E_1) = \dfrac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \dfrac{p(E_1)}{p(E_2)} = \dfrac{0,0006}{0,0494} = 0,012$.

(on a : $E_1 \cap E_2 = \left(A \cap B\right) \cap \left(A \cup B\right) = \left(A \cap B\right) = E_1$)

B1. (a) Extraire un lot de 100 appareils revient à répéter 100 fois le prélèvement d'un appareil. Cet appareil est défectueux avec une probabilité p = 0, 05 ou non défectueux avec une probabilité q = 1 − p = 0, 95. L'assimilation du tirage à un tirage avec remise assure l'indépendance de ces épreuves. En conclusion, la variable X_1 suit une loi binomiale de paramètres n = 100 et p = 0, 05.

(b) L'espérance est $E(X_1) = m = np = 100 \times 0,05 = 5$.

2. On suppose que l'on peut approcher la loi de X_1 par une loi de Poisson de paramètre λ.
 (a) On conserve l'espérance mathématique. Par conséquent, le paramètre de la loi de Poisson est $\lambda = m = np = 5$.
 (b) On note X_p la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux suivant la loi de Poisson de paramètre 5. On cherche alors $p(X_p \leq 2)$
 $p(X_p \leq 2) = p(X_p = 0) + p(X_p = 1) + p(X_p = 2) = 0,007 + 0,034 + 0,084 = 0,13$.

C1. On cherche la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot, c'est-à-dire $p(X_2 \leq 50)$.
 X_2 suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type 6,2, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X_2 - 50}{6,2}$ suit la loi normale centrée réduite. $p(X_2 \leq 50) = p\left(T \leq \dfrac{50-40}{6,2}\right) = p(T \leq 1,61) \approx 0,95$.

2. On cherche le réel x tel que $p(X_2 > a) = 0,01$. $p(X_2 > a) = p\left(T > \dfrac{a-40}{6,2}\right)$ alors il faut résoudre
 $p(X_2 > a) = p\left(T > \dfrac{a-40}{6,2}\right) = 0,01$.Or $p(X_2 > a) = p\left(T > \dfrac{a-40}{6,2}\right) = 1 - p\left(T \leq \dfrac{a-40}{6,2}\right)$
 d'où $p\left(T \leq \dfrac{a-40}{6,2}\right) = 0,99$. Or $\Pi(2,33) = 0,99 \Leftrightarrow \dfrac{a-40}{6,2} = 2,33$, a = 40 + 2, 33 × 6, 2 , a= 54, 45.
 Le plus petit entier k tel que la probabilité que le lot comporte plus de k appareils défectueux soit inférieure à 0, 01 est k = 55.

Exercice 3

Une batterie n'est pas défectueuse si aucun des défauts n'apparaît. On sait, d'après le texte que les défaut sont indépendants l'un de l'autre .
On note A l'événement « La batterie présente le défaut A » ;
 B l'événement « La batterie présente le défaut B »
 L'événement cherché est $A \cup B$ .Pour tout événement A et B $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Les événements A et B sont indépendants d'où $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002$.
Donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,02 + 0,01 - 0,0002 = 0,0298$
Autres méthodes
 1) La probabilité que la batterie ne soit pas défectueuse est :
 $p = p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p(\overline{B}) = \big(1 - p(A)\big)\big(1 - p(B)\big) = 0,98 \times 0,99 = 0,9702$
 Etre défectueuse est l'événement contraire à « ne pas être défectueuse ».donc la probabilité qu'une batterie soit défectueuse est égale $p' = 1 - p = 1 - 0,9702 = 0,0298$.
2) On aurait pu calculer directement cette probabilité en étudiant 3cas :
 A n'est pas défectueuse mais B l'est : $p_1 = p(\overline{A}) \times p(B) = 0,98 \times 0,01$
 A défectueuse mais pas B $p_2 = p(A) \times p(\overline{B}) = 0,02 \times 0,99$
 A et B sont défectueuses $p_1 = p(A) \times p(B) = 0,02 \times 0,01$ .donc
 $p' = p(\overline{A}) \times p(B) + p(A) \times p(\overline{B}) + p(A) \times p(B) = 0,98 \times 0,01 + 0,02 \times 0,99 + 0,02 \times 0,01 = 0,0298$

2. une batterie est soit défectueuse ,soit ne l'est pas . Chaque épreuve ne comporte que deux éventualités , La batterie est défectueuse , événement de probabilité $p = 0,0298$ et la batterie n'est pas défectueuse , événement de probabilité $q = 1 - p = 1 - 0,0298 = 0,9702$. On réalise 100 fois cette épreuve aléatoire . Les 100 épreuves sont indépendantes . donc la variable aléatoire X suit la loi de binomiale
 $\mathcal{B}$ $(100; 0,0298)$ de paramètre $n = 100$ et $p = 0,0298$.
 L'espérance mathématique est donnée par la formule $E(X) = m = np = 100 \times 0,0298 = 2,98$
 et la variance $V(X) = npq = np(1-p) = 100 \times 0,0298 \times 0,9702 = 2,9812$.

b) X est approchée par la loi de Poisson donc : la loi de Poisson a pour paramètre $\lambda = m = np = 2,98$.

En appelant T la variable aléatoire qui suit la loi de poisson : $p(T=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}=e^{-2,98}\dfrac{(2,98)^k}{k!}$.

Or $p(T>2)=1-p(T\leq 2)=1-[p(T=0)+p(T=1)+p(T=2)]$

Donc $p(T>2)=1-[e^{-2,98}+e^{-2,98}\times 2,98+e^{-2,98}\times\dfrac{2,98^2}{2!}]=0,5723$.

3. pour pouvoir utiliser la table concernant la loi normale centrée réduite, on pose $T=\dfrac{y-m}{\sigma}=\dfrac{y-80}{0,4}$.

$79\leq Y\leq 81\Leftrightarrow \dfrac{79-80}{0,4}\leq T\leq\dfrac{81-80}{0,4}\Leftrightarrow -2,5\leq L\leq 2,5$.

$p(79\leq Y\leq 81)=p(-2,5\leq L\leq 2,5)=2\pi(2,5)-1=2\times 0,9938-1=0,9876$.

<u>Questions supplémentaires</u>

b) Déterminer le réel a tel que $P(Y\geq a)=0,95$.

On donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de a.

c) Calculer la probabilité de l'événement « $(Y\geq 80)$ sachant que ($(Y\geq 79,34)$) ».

b) $p(Y\geq a)=0,95\Leftrightarrow p\left(\dfrac{Y-80}{0,4}\geq\dfrac{a-80}{0,4}\right)=0,95\Leftrightarrow p\left(T\geq\dfrac{a-80}{0,4}\right)=0,95$,

Donc $p\left(T\geq\dfrac{a-80}{0,4}\right)=1-p\left(T\leq\dfrac{a-80}{0,4}\right)=0,95$ et $p\left(T\leq\dfrac{a-80}{0,4}\right)=0,05$, c'est-à-dire $\pi\left(\dfrac{a-80}{0,4}\right)=0,05$

on applique l'égalité due à la symétrie de la courbe de Gauss : $p(Y\geq a)=p(Y\leq -a)$, ce qui donne

$\pi\left(\dfrac{a-80}{0,4}\right)=1-\pi\left(\dfrac{80-a}{0,4}\right)=0,05$ la table donne $\pi(1,654)=0,95$ soit $\pi\left(\dfrac{80-a}{0,4}\right)=\pi(1,654)\Leftrightarrow\dfrac{80-a}{0,4}=1,654$,

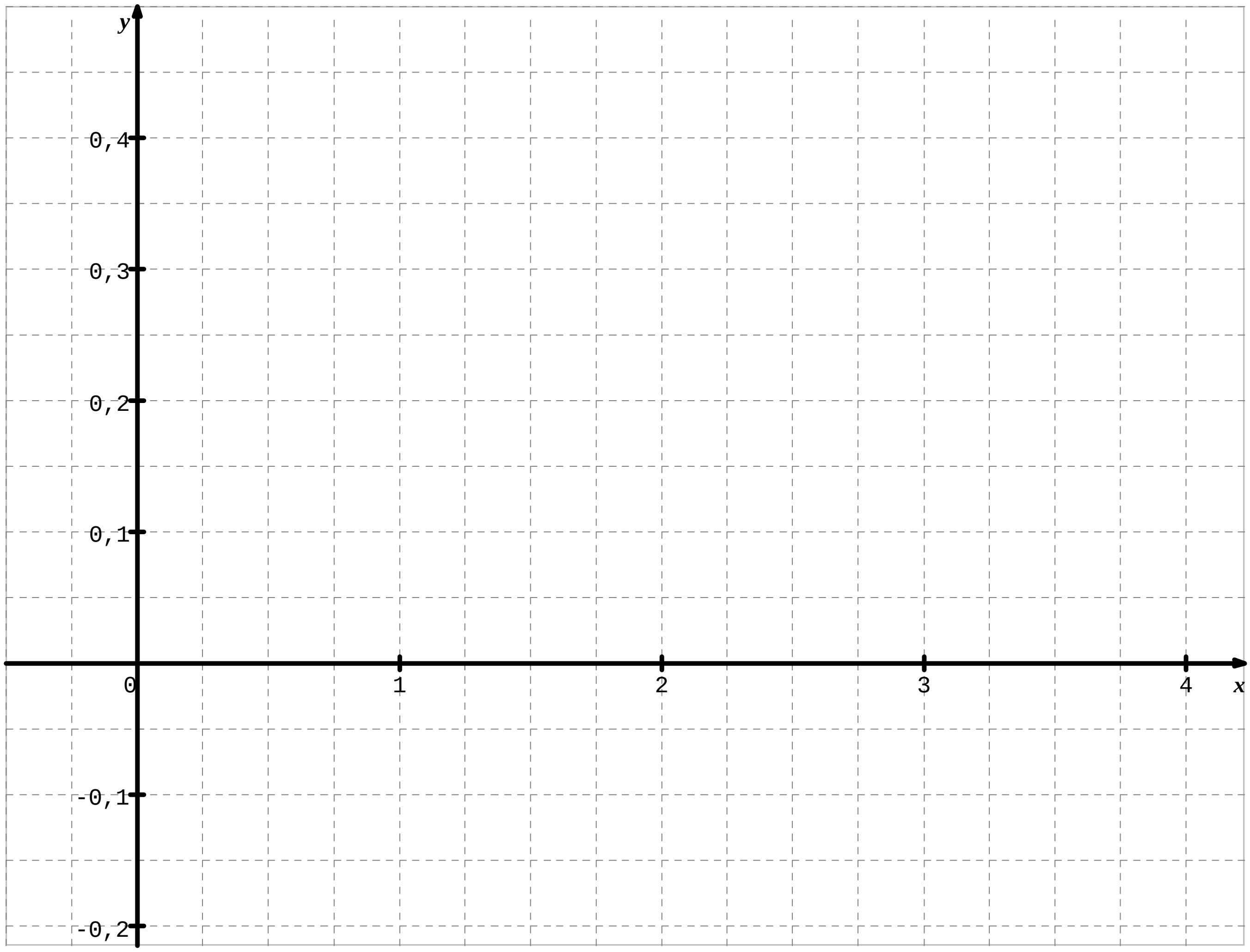
On en déduit $a=80-0,4\times 1,65=79,34$.

c) On applique la formule $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$. Appelons les événement $A="Y\geq 80"$ et $B="Y\geq 79,34"$.

Donc $A\cap B=A$: $A="Y\geq 80"\cap B="Y\geq 79,34"=A="Y\geq 80"$ et la probabilité est égale à $\dfrac{p(A)}{p(B)}$.

$p(Y\geq 80)=p\left(\dfrac{Y-80}{0,4}\geq 0\right)$ c'est-à-dire $p(Y\geq 80)=p\left(T\geq 0\right)=0,5$ .et $p(Y\geq 79,34)=0,95$

$79,34$ est la valeur trouvée à la question précédente ,donc $p_2=\dfrac{p(A)}{p(B)}=\dfrac{0,5}{0,95}\approx 0,5263$


y
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
x
-0,1
-0,2