TP MATHEMATIQUES **TRANSFORMEE DE LAPLACE**

Exercice 1

$\cup$ est la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \cup(t)=0 & si\ t<0 \\ \cup(t)=1 & si\ t\geq 0 \end{cases}$.

La réponse $y(t)$ d'un système soumis à une excitation $x(t)$ est telle que : $Y(p)=\dfrac{e^{-\tau p}}{p}\left(1-\dfrac{e^{-\tau p}}{1+2\tau p}\right)X(p)$

Le signal de sortie y est tel que : $Y(p)=X(p)\times H(p)$ où X et Y sont les transformées de Laplace de x et de y. On admet que la fonction $u\mapsto e^{u}$ ait une approximation affine au voisinage de 0 à l'ordre 1.

$e^{u}\simeq 1+u+u\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$

Déterminer ,en fonction de τ , la limite , quand t tend vers $+\infty$, de la réponse $y(t)$, lorsque le système est Soumis à l'excitation $x(t)=U(t)$ (échelon unité). On pourra appliquer le théorème de la valeur finale

Exercice 2

$\cup$ est la fonction échelon unité définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \cup(t)=0 & si\ t<0 \\ \cup(t)=1 & si\ t\geq 0 \end{cases}$.

La réponse $y(t)$ d'un système soumis à une excitation $x(t)$ est telle que : $Y(p)=X(p)\times H(p)$
X et Y sont les transformées de Laplace de x et de y et H la fonction de transfert du système .

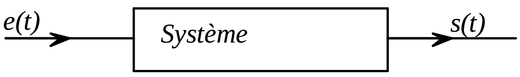
Dans cet exercice , $H(p)=\dfrac{p+1}{p^{2}+p+1}$ et le signal d'entrée est la fonction rampe définie par : $x(t)=tU(t)$.

1°. Calculer $Y(p)$ .En déduire $y(0^{+})=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}y(t)$. On pourra appliquer le théorème de la valeur initiale .

2°. Déterminer la transformée de Laplace $Y_1(p)$ de la dérivée y' de y.

En déduire $y'(0^{+})=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}y'(t)$. Puis calculer $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}y''(t)$ en utilisant la méthode que précédemment.

Exercice 3



On considère le système «entrée-sortie» représenté ci-contre :
On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est à dire qu'elles sont nulles pour $t<0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E.
La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p)=H(p)\times E(p)$.

Dans cet exercice, le filtre considéré a une fonction de transfert H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(p)=\dfrac{p}{p^{2}+p+1}$.

Première partie : recherche du lieu de transfert
On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1°. Soit ω un nombre réel strictement positif .Montrer que $H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\left(\omega-\dfrac{1}{\omega}\right)}$.

2°. b. Le « lieu de transfert » du filtre est la courbe décrite, dans un plan rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, par le point M d'affixe $Z=H(j\omega)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$. Soit A le point d'affixe $\dfrac{1}{2}$.

Calculer $\left|H(j\omega)-\dfrac{1}{2}\right|$.En déduire que le « lieu de transfert » du filtre est inclus dans un cercle C dont on précisera le centre et le rayon .Représenter graphiquement les ensembles C_1 et C .

Deuxième partie : réponse du filtre à une excitation particulière

La fonction échelon unité U est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} U\ (t) = 0 & si\ t < 0 \\ U\ (t) = 1 & si\ t \geq 0 \end{cases}$.

Le signal d'entrée est un créneau défini par : $e(t) = \begin{cases} 0\ si\ t \in]-\infty; 0[\\ 1\ si\ t \in [0;1[\\ 0\ si\ t \in [1;+\infty[\end{cases}$

1°. Donner la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthogonal .Vérifier à l'aide d'un tableau que $e(t) = U\ (t) - U\ (t-1)$. Donner la transformée de Laplace de la fonction e

2°. Déterminer la transformée de Laplace $S(p)$ du signal de sortie puis l'expression de $s(t)$ en remarquant que $p^2 + p + 1 = \left(p + 1/2\right)^2 + 3/4$

Exercice 4

t désigne la variable réelle positive , on se propose de chercher la solution $(x; y)$ du système différentiel $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$ vérifiant : $x(0^+) = 2$ et $y(0^+) = 4$

1°.Première méthode : utilisation de la transformation de Laplace

a. Déterminer les réels $a, b, c\ et\ d$ tels que : $\dfrac{2(p+3)}{(p-3)(p+1)} = \dfrac{a}{p-3} + \dfrac{b}{p+1}$ et $\dfrac{4p}{(p-3)(p+1)} = \dfrac{c}{p-3} + \dfrac{d}{p+1}$.

b. On suppose que les fonctions x et y admettent des transformées de Laplace notées respectivement $X(p)$ et $Y(p)$ .Grâce à la transformation de Laplace , trouver la solution du système vérifiant le conditions initiales imposées

2°. Résolution d'une équation différentielle du second ordre

a. Montrer que la solution $t \mapsto x(t)$ cherchée satisfait à l'équation différentielle :
$(E): x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 0$

b. Résoudre l'équation différentielle (E). En déduire la solution du système vérifiant le conditions initiales imposées

Exercice 5

On considère le circuit ci-dessus et on se propose d'étudier en fonction du temps t (exprimé en secondes), l'intensité du courant $i(t)$ (exprimée en Ampères) suivant la force électromotrice $f(t)$ (exprimée en Volts) appliquée aux bornes.

On sait que l'équation différentielle régissant le circuit est : $(E): \dfrac{1}{2} i'(t) + 10i(t) = f(t)$

1.Première partie : on suppose que $f(t) = 5$

a. Déterminer la solution $i_1(t)$ de l'équation (E): vérifiant $i_1(0) = 0$

b. Etudier le sens de variation de la fonction i_1 sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Représenter graphiquement i_1 dans un repère orthonormal pour $0 \leq t \leq 0,5$ (on prendra pour unité graphique 20 cm)

2. deuxième partie

On suppose maintenant que la force électromotrice $f(t)$ est définie par $f(t) = \begin{cases} 0\ si\ t \in]-\infty; 0[\\ 5\ si\ t \in [0; 0,5[\\ 0\ si\ t \in [0,5; +\infty[\end{cases}$

a. Montrer que, pour tout t, on a : $f(t) = 5\left[U\ (t) - U\ (t - 1/2)\right]$, où U représente la fonction échelon unité
En déduire la transformée de Laplace de f

b. Déterminer les réels $a\ et\ b$ tels que pour tout réel $p > 0$, on ait : $\dfrac{10}{p(p+20)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p+20}$

En déduire les originaux de Laplace des fonctions définies par : $F_1(p) = \dfrac{10}{p(p+20)}$ et $F_2(p) = \dfrac{10e^{-p/2}}{p(p+20)}$

c. Déterminer la solution $i_2(t)$ de l'équation différentielle (E): vérifiant $i_2(0) = 0$ en utilisant la transformation de Laplace

d. Montrer que cette solution peut s'écrire : $i_2(t)=\begin{cases} i_1(t) \ si \ t\in[0;0,5[\\ \frac{1}{2}\left(e^{10}-1\right)e^{-20t} \ si \ t\in[0,5;+\infty[\end{cases}$

EXERCICE

On se propose de déterminer la fonction f de la variable réelle t, définie sur $\mathbb{R}$,qui vérifie :

a. $f(t)=0$ pour $t<0$;

b. f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$;

c. $f''(t)+2f'(t)+5f(t)=e^{-t}\sin(3t)$ pour tout $t\in[0;+\infty[$;

d. $f(0^+)=0$ et $f'(0^+)=0$.

1. première partie

a. Résoudre , sur $[0;+\infty[$, l'équation différentielle : $(E_0): y''(t)+2y'(t)+5y(t)=0$

b. Déterminer le réel k tel que la fonction h définie par : $h(t)=ke^{-t}\sin(3t)$ soit solution sur $[0;+\infty[$,
de l'équation différentielle $(E): y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}\sin(3t)$.

c. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

d. Déduire des questions précédentes la fonction f cherchée .

2. Deuxième partie

On admet que la fonction f et ses dérivées ont des transformées de Laplace , et l'on note $F(p)=\mathcal{L}\ (f(t))$

a. Préciser les transformées de Laplace de :

- ☞ la fonction f'
- ☞ la fonction f''
- ☞ la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=e^{-t}\sin(3t)\mathcal{U}\ (t)$, où $\mathcal{U}$ représente la fonction échelon unité

b. Déterminer la transformée F de f

c. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel $p>0$, on ait :

$$\frac{3}{[(p+1)^2+4][(p+1)^2+9]}=\frac{a}{(p+1)^2+4}+\frac{b}{(p+1)^2+9}$$ .Déterminer alors la fonction f .

Exercice 2006

$e(t) \longrightarrow$ Système $\longrightarrow s(t)$

On considère le système «entrée-sortie» représenté ci-contre :

On note $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie . Un système du 1er ordre est un système régi par une équation différentielle du type : $(E): T\,s'(t)+s(t)=K\,e(t)$, où T et K sont des constantes réelles positives

On note $p\mapsto E(p)=\mathcal{L}\ (e(t))$ et $p\mapsto S(p)=\mathcal{L}\ (s(t))$ où $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace .

La fonction de transfert H d'un système est définie par : $S(p)=H(p)\times E(p)$.

Partie A

1°. Recherche de la fonction de transfert

En appliquant la transformation de Laplace $\mathcal{L}$ aux deux membres de l'équation différentielle (E) et en supposant que $s(0^+)=0$ (le système est initialement au repos , montrer que $H(p)=\dfrac{K}{1+Tp}$

Dans le reste de l'exercice , on prendra $K=T=1$

2°. Recherche du signal de sortie dans un cas particulier

On suppose que le signal d'entrée est $e(t)=2\mathcal{U}\ (t-3)$

a) Représenter sur la feuille de copie la fonction e dans un repère orthogonal pour $t\in[-1;6]$

b) Calculer $E(p)$

c) Montrer que $S(p)=2\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{e^{-3p}}{p+1}\right)$

d) En déduire l'expression du signal de sortie $s(t) = L^{-1}(S(p))$

Partie B

On se propose dans cette question de déterminer le « lieu de transfert » associé à la fonction de transfert H .On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ et on pose $p = j\omega$ avec $\omega \in]0;+\infty[$

On a alors : $H(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$

Dans ce qui suit , les représentations graphiques demandées sont à réaliser sur une feuille de papier millimétré avec un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique cinq centimètres

On appelle M_ω le point d'affixe $z = 1+j\omega$ et N_ω le point d'affixe $H(j\omega)$ pour tout $\omega \in]0;+\infty[$

On lit sur l'écran d'une calculatrice que les valeurs de $H(j\omega)$ pour $\omega = \dfrac{3}{4}$. $\omega = 1$ et $\omega = \sqrt{3}$

$$H\left(\frac{3}{4}j\right) = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}j \ ; \ H(j) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j \ ; \ H\left(\sqrt{3}j\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j .$$

Placer sur une figure les points M_ω et N_ω pour $\omega = \dfrac{3}{4}, \omega = 1$ puis $\omega = \sqrt{3}$

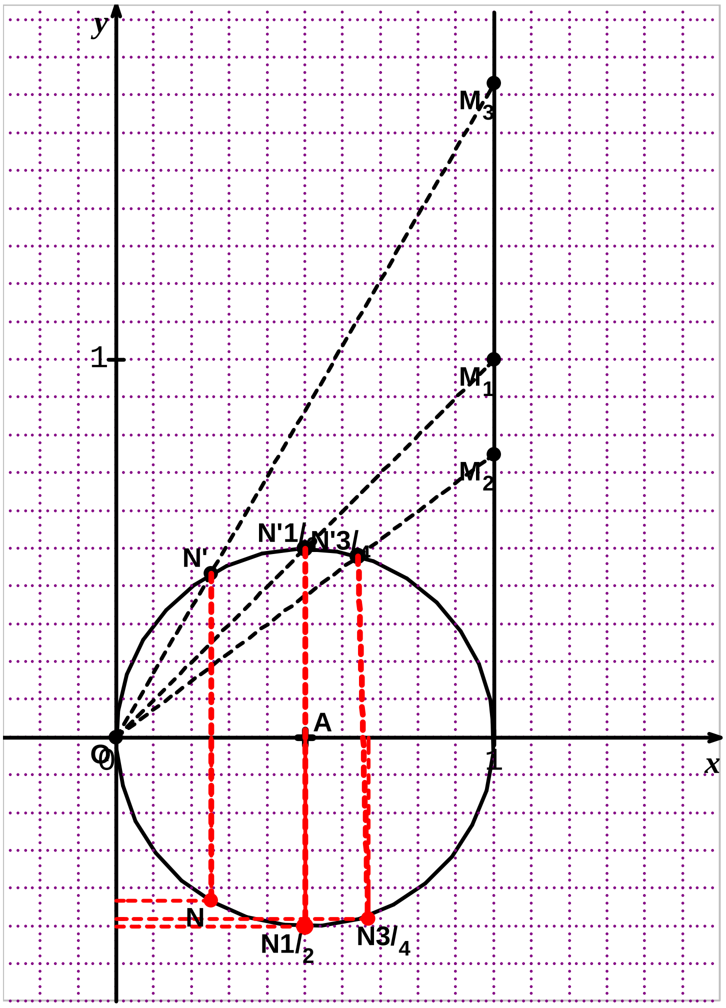
b) Tracer sur la figure du 3°a ,l'ensemble C_1 des points M_ω du plan P , d'affixe $z = 1+j\omega$ quand ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) Soit A le point d'affixe $\dfrac{1}{2}$.

Calculer $\left|H(j\omega) - \dfrac{1}{2}\right|$.En déduire que le « lieu de transfert » du filtre est inclus dans un demi- cercle C dont on précisera le centre et le rayon .

Représenter graphiquement sur la figure du 3°a l'ensembles C décrit par le point N_ω lorsque ω décrit l'intervalle $[0;+\infty[$.

.


y
M3
1
M1
M2
N'1/
N'3/
N'
A
O
1
x
N
N1/2
N3/4