BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2021

FILIERE INDUSTRIELLE : INFORMATIQUE – DEVELOPPEUR D'APPLICATION

EPREUVE : MATHEMATIQUES GENERALES ET STATISTIQUES

Durée de l'épreuve : 2 Heures **Coefficient de l'épreuve : 3**

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique B= (e_1, e_2, e_3).
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ et les vecteurs.
$u_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, $u_2 = e_2$ et $u_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + 2e_3)$ tels que $f(u_1) = -u_1 + u_3$;
$f(u_2) = 2u_1 - u_2$ et $f(u_3) = u_1 - u_2 + u_3$.

On donne également les matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la famille B' = (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.
3. a/ Calculer le produit P.Q

   b/ En déduire que P est inversible et donner son inverse.

   c/ Préciser alors la matrice de passage de B' à B.
4. Déterminer la matrice A de f dans la base B.
5. Montrer que Kerf $\neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ où Kerf est le noyau de f.
6. Déterminer alors le noyau Kerf et l'image Imf de l'endomorphisme f.

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près. Une usine fabrique des smartphone dont 5% sont défectueux. Chaque smartphone est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 97% des smartphones défectueux et 4% des smartphones fonctionnant correctement. On note.
D l'évènement « le smartphone est défectueux »
R l'évènement « l'unité de contrôle rejette le smartphone ».

1)

a) Calculer la probabilité que le smartphone soit défectueux et ne soit pas rejeté.

b) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le smartphone est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

2) Monter que la probabilité qu'un smartphone ne soit pas rejeté est égale à 0,9135.

3) On réalise maintenant n contrôles successifs et indépendants pour savoir si un smartphone peut-être commercialisé.
On désigne par X la variable aléatoire qui comptabilise au cours des n contrôles, le nombre de smartphone n'étant pas rejeté.

a) Quelle est la loi suivie par X.
b) Donner les paramètres de cette loi.
c) Donner la loi de probabilité de X en fonction de n.
d) Calculer l'espérance mathématique E(x) de la variable aléatoire X en fonction de n.

4) On donne $n = 4$
Calculer la probabilité que le smartphone ait subi avec succès au moins trois contrôles positifs.

5) Deux cent contrôles successifs et indépendants sont réalisés pour savoir si un smartphone peut être commercialisé. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de smartphone pouvant subir avec succès des contrôles positifs.

a) Quelle est la loi suivie par Y ?
Donner ses paramètres.
b) Montrer que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi normale dont on précisera ses paramètres.
c) En utilisant cette approximation, calculer:
$P(180 \leq Y \leq 190)$.

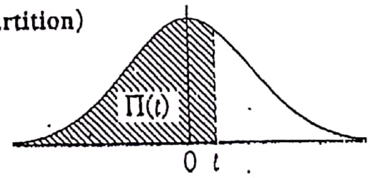
(On pourra utiliser la méthode de l'interpolation linéaire)

****

n <

Loi normale centrée réduite (répartition)

Probabilité cumulée $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du = P(T \leqslant t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	09236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Cas des grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t \geqslant 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.