



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
People's Democratic Republic of Algeria  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministry of Higher Education and Scientific  
Research  
المدرسة العليا للاقتصاد وهران  
Higher School of Economics of Oran

---

# Cours et exercices corrigés en probabilités

---

**Réalisé par:**  
**Delhoum Zohra Sabrina**

**Niveau :** Deuxième année « Classes préparatoires »

**Année universitaire:** 2020-2021

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction aux probabilités</b>	<b>4</b>
1.1 Vocabulaire des probabilités . . . . .	4
1.1.1 Univers . . . . .	4
1.1.2 Événements . . . . .	4
1.2 Opérations sur les ensembles . . . . .	5
1.2.1 Intersection et réunion . . . . .	5
1.2.2 Le complémentaire . . . . .	5
1.2.3 La différence . . . . .	6
1.2.4 La différence symétrique . . . . .	6
1.2.5 L'ensemble des parties . . . . .	6
1.3 Algèbre des événements . . . . .	6
1.4 Espace Probabilisé . . . . .	7
1.5 Probabilités conditionnelles . . . . .	8
1.6 Événements indépendants . . . . .	10
<b>2 Variable aléatoire discrète</b>	<b>12</b>
2.1 Variable aléatoire . . . . .	12
2.2 Loi de probabilité d'une v.a. discrète . . . . .	13
2.3 Fonction de répartition d'une v.a. discrète . . . . .	13
2.4 Moments d'une v.a. discrète . . . . .	13
2.4.1 Espérance mathématique . . . . .	13
2.4.2 Variance . . . . .	14
2.4.3 Moments non centrés et centrés d'une v.a. discrète . . . . .	14
2.5 Fonction génératrice des moments . . . . .	14
2.6 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .	15
2.7 Transformation d'une v.a. discrète . . . . .	15
2.8 Exercices corrigés . . . . .	16
2.9 Lois usuelles discrètes . . . . .	22
2.9.1 Loi uniforme . . . . .	22
2.9.2 Loi de Bernoulli . . . . .	22
2.9.3 Loi binomiale . . . . .	23
2.9.4 Loi géométrique . . . . .	23

2.9.5	Loi de Poisson . . . . .	24
2.10	Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson . . . . .	24
2.11	Fonction génératrice des moments d'une v.a. discrète . . . . .	25
2.12	Exercices corrigés . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Variable aléatoire continue</b>	<b>33</b>
3.1	Variable aléatoire continue . . . . .	33
3.2	Loi de probabilité d'une v.a. continue . . . . .	33
3.3	Moments d'une v.a. continue . . . . .	34
3.3.1	Espérance mathématique . . . . .	34
3.3.2	Variance . . . . .	34
3.3.3	Moments non centrés et centrés d'une v.a. continue . . . . .	34
3.4	Lois usuelles continues . . . . .	35
3.4.1	Loi uniforme . . . . .	35
3.4.2	Loi exponentielle . . . . .	35
3.4.3	Loi normale ou de Laplace-Gauss . . . . .	35
3.4.4	Loi gamma . . . . .	38
3.4.5	Loi du khi-deux . . . . .	38
3.5	Approximation de la loi binomiale par la loi normale . . . . .	39
3.6	Transformation d'une v.a. continue . . . . .	39
3.7	Fonction génératrice des moments d'une v.a. continue . . . . .	40
3.8	Exercices corrigés . . . . .	41
	<b>Bibliographie</b>	<b>60</b>

La théorie des probabilités est une branche bien établie des mathématiques qui trouve des applications dans tous les domaines de l'activité scientifique, de la musique à la physique, et dans l'expérience quotidienne, de la prévision météorologique à la prédiction des risques des nouveaux traitements médicaux.

Ce polycopié est une introduction au calcul des probabilités, il est destiné aux étudiants de la deuxième année des classes préparatoires.

Il est constitué de trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel sur le calcul des probabilités. Dans ce chapitre, nous avons introduit la définition mathématique d'un espace de probabilité, la notion de probabilité conditionnelle ainsi que la notion d'indépendance pour les événements qui reste une notion propre à la théorie de la probabilité.

Le deuxième chapitre est consacré aux variables aléatoires discrètes, après la définition de cette notion, nous étudions les principales lois de probabilité discrètes, le problème de transformation d'une variable aléatoire discrète ainsi que l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Enfin, le troisième et dernier chapitre est consacré aux variables aléatoires continues. Dans ce chapitre, nous avons donné la définition de cette notion en étudiant en détail les principales lois de probabilité continues, le problème de transformation d'une variable aléatoire continue ainsi qu'une première approche concernant l'approximation d'une loi binomiale par une loi Normale.

Dans le deuxième et le troisième chapitre, nous avons proposé des séries d'exercices corrigés à difficulté variable pour que l'étudiant puisse assimiler le contenu de chaque chapitre.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

### 1.1 Vocabulaire des probabilités

#### 1.1.1 Univers

On donne les définitions suivantes :

- Une **expérience aléatoire** est toute expérience dont le résultat est régi par le hasard.
- Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** liée à l'expérience aléatoire.
- L'ensemble formé par les éventualités est appelé **univers**, il est très souvent noté  $\Omega$ .

#### Exemple 1.1.1

- L'univers associé à l'expérience aléatoire « Lancer d'une pièce de monnaie » est :

$$\Omega = \{P, F\}.$$

- L'univers associé à l'expérience aléatoire « Lancer d'un dé » est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

#### 1.1.2 Événements

On donne les définitions suivantes :

- Un **événement** d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers  $\Omega$ .
- Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un **événement élémentaire**.
- L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'**événement impossible**, noté  $\emptyset$ .
- L'événement composé de toutes les éventualités est appelé **événement certain**.

#### Exemple 1.1.2

Lancer d'un dé à six faces :

- L'univers :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- Obtenir 2 est une éventualité de cette expérience aléatoire.
- $A$  : « obtenir un 5 » est un événement élémentaire que l'on peut noter  $A = \{5\}$ .
- $B$  : « obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter  $B = \{2, 4, 6\}$ .
- Obtenir 7 est un événement impossible.
- Obtenir un nombre positif est un événement certain.

## 1.2 Opérations sur les ensembles

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $\Omega$  :

### 1.2.1 Intersection et réunion

#### Définition 1.2.1

La réunion des deux ensembles  $A$  et  $B$  noté  $A \cup B$  est l'ensemble constitué par les éléments de  $\Omega$  appartenant à  $A$  ou à  $B$ . Autrement dit :

$$A \cup B = \{w \in \Omega / w \in A \text{ ou } w \in B\}.$$

#### Définition 1.2.2

L'intersection des deux ensembles  $A$  et  $B$  noté  $A \cap B$  est l'ensemble constitué par les éléments de  $\Omega$  appartenant à  $A$  et à  $B$ . Autrement dit :

$$A \cap B = \{w \in \Omega / w \in A \text{ et } w \in B\}.$$

*Remarque 1.2.1.* Si  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que les événements  $A$  et  $B$  sont **disjoints** ou **incompatibles**.

#### Exemple 1.2.1

On considère l'ensemble constitué des chiffres de 1 à 10.

On note  $A$  l'événement « obtenir un chiffre pair » et  $B$  l'événement « obtenir un chiffre strictement inférieur à six ».

- $A \cap B$  : « obtenir un chiffre pair et inférieure strictement à six »

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

- $A \cup B$  : « obtenir un chiffre pair ou inférieure strictement à six »

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}.$$

### 1.2.2 Le complémentaire

#### Définition 1.2.3

Le complémentaire de l'ensemble  $A$  noté  $\bar{A}$  (ou  $A^c$ ) est l'ensemble constitué des éléments de  $\Omega$  qui n'appartiennent pas à  $A$ . Autrement dit :

$$\bar{A} = \{w \in \Omega / w \notin A\}.$$

| On a en particulier  $A \cup \bar{A} = \Omega$  et  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

### 1.2.3 La différence

#### Définition 1.2.4

| La différence des ensembles  $A$  et  $B$  noté  $A - B$  est l'ensemble constitué par les éléments de  $\Omega$  appartenant à  $A$  et n'appartenant pas à  $B$ . Autrement dit :

$$A - B = \{w \in \Omega / w \in A \text{ et } w \notin B\} = A \cap \bar{B}.$$

### 1.2.4 La différence symétrique

#### Définition 1.2.5

| La différence symétrique des ensembles  $A$  et  $B$  noté  $A \Delta B$  est l'ensemble constitué par les éléments de  $\Omega$  appartenant à  $A \cup B$  et n'appartenant pas à  $A \cap B$ . Autrement dit :

$$A \Delta B = \{w \in \Omega / w \in A \cup B \text{ et } w \notin A \cap B\} = (A \cup B) - (A \cap B).$$

### 1.2.5 L'ensemble des parties

#### Définition 1.2.6

| L'ensemble des parties de  $\Omega$  noté  $\mathcal{P}(\Omega)$  est l'ensemble des sous-ensembles de  $\Omega$ .

#### Exemple 1.2.2

| Sur l'univers  $\Omega = \{a, b, c\}$ , on a :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}.$$

Remarque 1.2.2.

- $\mathcal{P}(\Omega)$  contient toujours  $\emptyset$  et  $\Omega$ .
- Les éléments de  $\mathcal{P}(\Omega)$  sont les sous-ensembles de  $\Omega$  et non pas les éléments de  $\Omega$ . En effet :

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \iff A \subset \Omega.$$

## 1.3 Algèbre des événements

#### Définition 1.3.1 (Tribu ou $\sigma$ -algèbre)

| Une famille  $\mathcal{A}$  de parties de l'univers  $\Omega$  est une tribu, si elle satisfait les trois propriétés suivantes :

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$ .
2. Si  $A \in \mathcal{A}$  alors  $\bar{A} \in \mathcal{A}$ .
3. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille dénombrable d'éléments de  $\mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Proposition 1.3.1**

Soit  $\mathcal{A}$  une tribu d'un univers  $\Omega$ . Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition :

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .

2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ , alors  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

3. Si  $(A_i)_{0 \leq i \leq N}$  est une suite finie de  $N$  éléments de  $\mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_{i=0}^N A_i \in \mathcal{A}$ .

4. Si  $(A_i)_{0 \leq i \leq N}$  est une suite finie de  $N$  éléments de  $\mathcal{A}$ , alors  $\bigcap_{i=0}^N A_i \in \mathcal{A}$ .

## 1.4 Espace Probabilisé

**Définition 1.4.1 (Espace probabilisable)**

On appelle espace probabilisable, le couple  $(\Omega, \mathcal{A})$ , où  $\mathcal{A}$  est une tribu de  $\Omega$ .

**Définition 1.4.2**

Une probabilité sur l'univers  $\Omega$  est une application  $\mathbb{P}$  telle que :

1.  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ .

2.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

*Remarques 1.4.1.*

- La probabilité d'un événement de l'univers  $\Omega$  est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.
- On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

- Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité, on a généralement dans l'énoncé une expression du type :
  - On lance un dé **non pipé**.
  - Dans une urne, il y a des boules **indiscernables** au toucher.
  - On rencontre au **hasard** une personne parmi ...

**Définition 1.4.3 (Espace probabilisé)**

On appelle espace probabilisé, le triplé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , où  $\mathcal{A}$  est une tribu de  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  une probabilité.

**Propriétés 1.4.1**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ .
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont des événements incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

### Exemple 1.4.1

On considère l'ensemble  $E$  des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.  $A$  est l'événement « le nombre est multiple de 3 » :

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

$B$  est l'événement « le nombre est multiple de 2 » :

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}.$$

Calcul des probabilités :

- $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$ .
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0,7$ .
- $\mathbb{P}(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0,5$ .
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{20} = 0,15$ .
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{6}{20} + \frac{10}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0,65$ .

## 1.5 Probabilités conditionnelles

### Définition 1.5.1

Soient  $A$  et  $B$  deux événements telle que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ .

On appelle probabilité conditionnelle de  $A$  relativement à  $B$  ou de  $A$  sachant  $B$ , la probabilité que l'événement  $A$  se réalise sachant que  $B$  est réalisé. Cette probabilité vaut

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque 1.5.1. On trouve aussi la notation  $\mathbb{P}(A/B)$  pour  $\mathbb{P}_B(A)$ .

### Exemple 1.5.1

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :

- $A$  : « la face obtenue porte un numéro multiple de 3 ».
- $B$  : « la face obtenue porte un numéro pair ».

Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair de deux manières différentes.

- L'événement  $(A/B)$  correspond à l'événement « obtenir un numéro multiple de 3 parmi les éventualités de  $B$  », autrement dit parmi  $\{2, 4, 6\}$ . Il n'y a donc que l'issue « obtenir 6 » qui correspond. Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{3}.$$

- Par le calcul, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Donc, d'après la formule :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

### Proposition 1.5.1

Pour tous événements  $A$  et  $B$  de probabilité non nulle, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B).$$

### Proposition 1.5.2

Soit  $S$  un événement de probabilité non nulle, on a :

- $0 \leq \mathbb{P}_S(A) \leq 1$ .
- $\mathbb{P}_S(\Omega) = 1$ .
- $\mathbb{P}_S(\emptyset) = 0$ .
- $\mathbb{P}_S(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}_S(A)$ .
- $\mathbb{P}_S(A \cup B) = \mathbb{P}_S(A) + \mathbb{P}_S(B) - \mathbb{P}_S(A \cap B)$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont des événements incompatibles, alors

$$\mathbb{P}_S(A \cup B) = \mathbb{P}_S(A) + \mathbb{P}_S(B).$$

- $\mathbb{P}_S(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}_S(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}_S(A \cup B)$ .

### Proposition 1.5.3 (Formule des probabilités totales)

Pour tous  $A$  et  $B$  deux événements de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) \times \mathbb{P}(\bar{B}).$$

### Théorème 1.5.1 (Théorème de Bayes)

Pour tous  $A$  et  $B$  deux événements de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

En fait, cette formule permet de calculer directement  $\mathbb{P}_A(B)$  sans passer par des étapes intermédiaires.

### Exemple 1.5.2

Dans un atelier, deux machines  $M_1$  et  $M_2$  découpent des pièces métalliques identiques.  $M_1$  fournit 60% de la production (parmi lesquelles 6,3% sont défectueuses), le reste étant fourni

par  $M_2$  (dont 4% de la production est défectueuse).

La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

1. La probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par  $M_1$  est :

$$\mathbb{P}_{M_1}(D) = 0,063.$$

2. La probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par  $M_2$  est :

$$\mathbb{P}_{M_2}(D) = 0,04.$$

3. La probabilité de prélever une pièce défectueuse :  
En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(M_1 \cap D) + \mathbb{P}(M_2 \cap D) \\ &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}_{M_1}(D) + \mathbb{P}(M_2) \times \mathbb{P}_{M_2}(D) \\ &= 0,6 \times 0,063 + 0,4 \times 0,04 \\ &= 0,0538. \end{aligned}$$

4. Si on prélève une pièce défectueuse, calculons la probabilité qu'elle soit produite par la machine  $M_1$  :

En utilisant le théorème de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_D(M_1) = \frac{\mathbb{P}_{M_1}(D) \times \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0,063 \times 0,6}{0,0538} = 0,703.$$

## 1.6 Événements indépendants

### Définition 1.6.1

On dit que  $A$  et  $B$  sont des événements indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

*Remarque 1.6.1.* Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être mutuellement indépendants.

### Exemple 1.6.1

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée.

Soient les événements :

$A$  : « Obtenir pile au premier lancé ».

$B$  : « Obtenir pile au deuxième lancé ».

$C$  : « Obtenir pile-face ou face-pile ».

Nous allons montrer que les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

On a

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{PP, PF\}) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{PP, FP\}) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{PF, FP\}) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{PP\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{PF\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) \Rightarrow A \text{ et } C \text{ sont indépendants.}$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{FP\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \Rightarrow B \text{ et } C \text{ sont indépendants.}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \\ &\Rightarrow A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas mutuellement indépendants.} \end{aligned}$$

Ainsi, les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

### Proposition 1.6.1

Si  $A$  et  $B$  sont des événements indépendants, alors :  $A$  et  $\bar{B}$  ;  $\bar{A}$  et  $B$  ;  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont également des événements indépendants.

## CHAPITRE 2

# VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

## 2.1 Variable aléatoire

### Définition 2.1.1 (*Variable aléatoire*)

Une variable aléatoire est une fonction  $X$ , allant d'un univers  $\Omega$  dans un ensemble  $E$ .

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow E \\ \omega &\longmapsto X(\omega) = x \end{aligned}$$

### Définition 2.1.2 (*Variable aléatoire réelle*)

Une variable aléatoire réelle est une fonction  $X$ , allant d'un univers  $\Omega$  dans un ensemble  $E \subset \mathbb{R}$ .

### Définition 2.1.3 (*Variable aléatoire réelle discrète*)

Une variable aléatoire réelle discrète est une fonction  $X$ , allant d'un univers  $\Omega$  dans un ensemble discret  $E \subset \mathbb{R}$ .

Dans ce chapitre on s'intéresse qu'aux variables aléatoires discrètes. Pour simplifier, on écrit v.a. au lieu d'écrire variable aléatoire.

*Remarque 2.1.1.* Soient  $A$  une sous partie de  $\Omega$  et  $x$  un réel.

L'ensemble  $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$  est un événement. De même, l'ensemble  $\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$  est aussi un événement.

Pour simplifier les écritures, on notera :  $\mathbb{P}(X \in A)$  au lieu de  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\})$  et  $\mathbb{P}(X = x)$  au lieu de  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\})$

### Exemple 2.1.1

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. L'ensemble des résultats possibles est

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

Chacun des événements élémentaires de  $\Omega$  a une probabilité égale à  $\frac{1}{4}$  de se produire. Considérons la v.a.  $X$  représentant le nombre de "faces" obtenues. Donc  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ .

## 2.2 Loi de probabilité d'une v.a. discrète

### Définition 2.2.1

On appelle *distribution ou loi de probabilité* de la v.a.  $X$  l'ensemble des couples  $(x_i, p_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  telle que :

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

La loi de probabilité d'une v.a. discrète est souvent présentée sous forme d'un tableau.

## 2.3 Fonction de répartition d'une v.a. discrète

### Définition 2.3.1

On appelle *fonction de répartition* de la v.a. (variable aléatoire)  $X$ , la fonction  $F$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i).$$

## 2.4 Moments d'une v.a. discrète

### 2.4.1 Espérance mathématique

#### Définition 2.4.1

On appelle *espérance mathématique* de la v.a.  $X$  la quantité, si elle existe :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

#### Propriétés 2.4.1

Si on ajoute une constante à une v.a., il en est de même pour son espérance :

$$E(X + a) = E(X) + a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Si on multiplie une v.a. par une constante, il en est de même pour son espérance :

$$E(aX) = aE(X), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

L'espérance d'une somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

On résume ces trois propriétés en disant que l'opérateur espérance est linéaire :

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

### 2.4.2 Variance

Il s'agit d'un indicateur mesurant la dispersion des valeurs  $x_i$  autour de  $E(X)$  :

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i).$$

Lorsque cette quantité existe, elle s'écrit aussi :

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

On note encore cette quantité  $V(X) = \sigma_X^2$ ,  $\sigma_X$  désignant alors l'écart type de la v.a.  $X$ .

#### Propriétés 2.4.2

Par définition :

$$V(X) \geq 0.$$

Pour tout réel  $a$  :

$$V(X + a) = V(X) \quad \text{et} \quad V(aX) = a^2 V(X).$$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

### 2.4.3 Moments non centrés et centrés d'une v.a. discrète

#### Définition 2.4.2 (Moments non centrés)

Le moment non centré (ou simple) d'ordre  $r \in \mathbb{N}^*$  d'une v.a.  $X$  est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum_{i=1}^n x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

#### Définition 2.4.3 (Moments centrés)

Le moment centré d'ordre  $r \in \mathbb{N}^*$  d'une v.a.  $X$  est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$\mu_r(X) = E([X - E(X)]^r) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

## 2.5 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments d'une v.a.  $X$  est la fonction  $G_X(t)$  définie par :

$$G_X(t) = E(e^{tX}).$$

#### Propriétés 2.5.1

- $G_X(0) = E(1) = 1.$

- Le moment non centré d'ordre  $r \in \mathbb{N}^*$  d'une v.a.  $X$  est

$$m_r(X) = E(X^r) = G_X^{(r)}(0).$$

- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = G_X''(0) - [G_X'(0)]^2$ .
- Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = G_Y(t),$$

alors les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont la même loi de probabilité.

## 2.6 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

### Théorème 2.6.1

Pour tout réel strictement positif  $\alpha$ ,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}.$$

**Démonstration :** La démonstration est une simple application de l'inégalité de Markov

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha},$$

à la variable  $(X - E(X))^2$  et au réel  $\alpha^2$  strictement positif compte tenu du fait que

$$\{|X - E(X)| \geq \alpha\} = \{(X - E(X))^2 \geq \alpha^2\}.$$

■

## 2.7 Transformation d'une v.a. discrète

Un problème qui se pose souvent est de déterminer la loi de probabilité d'une v.a. discrète  $Y$  lorsque celle-ci est liée à une v.a. discrète  $X(\Omega)$  par la relation  $Y = g(X)$ , où  $g$  est une fonction continue sur  $X(\Omega)$  et la loi de probabilité de  $X$  étant connue.

Pour déterminer la loi de probabilité de  $Y$ , il suffit de :

1. Déterminer  $Y(\Omega)$ .
2. Déterminer  $\mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{P}(g(X) = y_j)$ ,  $\forall y_j \in Y(\Omega)$ .

## 2.8 Exercices corrigés

### Exercice 2.1

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule, si la boule est rouge, il gagne 10 points, si elle est jaune, il perd 5 points, si elle est verte, il tire sans remise une deuxième boule de l'urne, si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 points, sinon il perd 4 points.

Soit  $X$  la v.a. associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $X$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de la v.a.  $X$ .
3. Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de la v.a.  $X$  soit nulle.

### Corrigé exercice 2.1.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$$X(\Omega) = \{-5, -4, 8, 10\}.$$

La loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$x_i$	-5	-4	8	10
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

2. Calculer l'espérance et la variance de la v.a.  $X$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= (-5) \times \frac{2}{7} + (-4) \times \frac{10}{21} + 8 \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} \\ &= -1,14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= (-5)^2 \times \frac{2}{7} + (-4)^2 \times \frac{10}{21} + 8^2 \times \frac{2}{21} + 10^2 \times \frac{1}{7} \\ &= 35,14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 35,14 - (-1,14)^2 \\ &= 33,84. \end{aligned}$$

3. Notons  $\alpha$  le gain correspondant à l'événement  $V_1 \cap R_2$  :

On a donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i P(X = x_i) \\ &= (-5) \times \frac{2}{7} + (-4) \times \frac{10}{21} + \alpha \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{2\alpha - 40}{21}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de résoudre l'équation :

$$E(X) = 0 \iff 2\alpha - 40 = 0 \iff \alpha = 20 \text{ points.}$$

### Exercice 2.2

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note  $X$  la v.a. représentant le nombre de faces obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $X$ .
2. Soit la v.a.  $Y = X^2 - 1$ . Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $Y$  et donner sa fonction de répartition.

### Corrigé exercice 2.2.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$$\Omega = \{\text{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}\}.$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}.$$

La loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$x_i$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $Y = X^2 - 1$  et donner sa fonction de répartition :

$$Y(\Omega) = \{-1, 0, 3, 8\}.$$

$y_i$	-1	0	3	8
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

### Exercice 2.3

Soit une v.a.  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que :

$$\mathbb{P}(X = n) = k \frac{3^{n-1}}{n!}.$$

1. Quelle valeur doit-on donner au nombre réel  $k$  pour que la loi de probabilité de la v.a.  $X$  soit parfaitement déterminée ?
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

## Corrigé exercice 2.3.

1. Pour que la loi de probabilité de la v.a.  $X$  soit parfaitement déterminée, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} k \frac{3^{n-1}}{n!} = 1 \\ &\implies \frac{k}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} = 1 \\ &\implies \frac{k}{3} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - 1 \right) = 1 \\ &\implies \frac{k}{3} (e^3 - 1) = 1 \\ &\implies k = \frac{3}{e^3 - 1}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$P(X = n) = \left( \frac{1}{e^3 - 1} \right) \frac{3^n}{n!}.$$

2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \frac{1}{e^3 - 1} \right) \frac{3^n}{n!} \\ &= \left( \frac{3}{e^3 - 1} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \left( \frac{3}{e^3 - 1} \right) e^3 \\ &= \frac{3e^3}{e^3 - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left( \frac{1}{e^3 - 1} \right) \frac{3^n}{n!} \\ &= \left( \frac{3}{e^3 - 1} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \left( \frac{3}{e^3 - 1} \right) 4e^3 \\ &= \frac{12e^3}{e^3 - 1}. \end{aligned}$$

En effet,

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = (xe^x)' = (x+1)e^x.$$

Donc,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{12e^3}{e^3 - 1} - \left( \frac{3e^3}{e^3 - 1} \right)^2 \\ &= \frac{3e^3(e^3 - 4)}{(e^3 - 1)^2}. \end{aligned}$$

### Exercice 2.4

Dans un jeu, un joueur doit choisir entre deux questions, une question facile et une question difficile. S'il répond juste à la première question, il peut tenter de répondre à l'autre question. La question facile rapporte au joueur 1000 DA et la question difficile lui rapporte 3000 DA. Les questions sont indépendantes, et on estime avoir 30 % de chances de bien répondre à la question difficile, et 60 % de chances de répondre à la question facile.

Soit  $X$  la v.a. égale au gain du jeu.

1. Dans le cas où il choisit de répondre à la question facile en premier, quelle est la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ? Que vaut le gain moyen dans ce cas ?
2. Même question, si le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier.
3. Que peut-on déduire ?

### Corrigé exercice 2.4.

1. La loi de la v.a.  $X$  dans le cas où le joueur choisit de répondre à la question facile en premier :

$$X(\Omega) = \{0, 1000, 4000\}.$$

$x_i$	0	1000	4000
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,4	0,42	0,18

Le gain moyen du joueur est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= 0 \times (0,4) + 1000 \times (0,42) + 4000 \times (0,18) \\ &= 1140 \text{ DA.} \end{aligned}$$

2. La loi de la v.a.  $X$  dans le cas où le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier :

$$X(\Omega) = \{0, 3000, 4000\}.$$

$x_i$	0	3000	4000
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,7	0,12	0,18

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= 0 \times (0,7) + 3000 \times (0,12) + 4000 \times (0,18) \\ &= 1080 \text{ DA.} \end{aligned}$$

3. **La déduction** : On déduit qu'il est plus avantageux au joueur de choisir de répondre à la question la plus facile en premier.

### Exercice 2.5

Pour ses besoins en gestion, un fabricant de montres électroniques a fourni les données suivantes à un cabinet de conseils :

- À la sortie d'usine, le quart des montres fabriquées sont défectueuses, elles sont par conséquent renvoyées à l'atelier pour réparation. Le reste est mis en vente.
- La moitié des montres renvoyées à l'atelier sont réparées et mises en vente, le reste est détruit.
- Le prix de revient de la production d'une montre est de 5000 da.
- Le coût de réparation d'une montre est de 300 da.

À la sortie d'usine, nous avons choisi une montre au hasard.

1. Calculer la probabilité que la montre soit vendue.

Soit  $X$  la v.a. qui représente le prix de vente d'une montre électronique, et soit  $Y$  la v.a. qui représente le bénéfice réalisé à la vente d'une montre.

2. À partir de quel prix de vente unitaire le fabricant espère-t-il réaliser des bénéfices ?
3. Si le fabricant vend la montre à 5300 da, quel sera son bénéfice (ou perte) par montre vendue ?

### Corrigé exercice 2.5.

1. Calculer la probabilité que la montre soit vendue :

On note :

- $D$  : « La montre est défectueuse ».
- $R$  : « La montre est réparée ».
- $V$  : « La montre est vendue ».

Donc, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}(D \cap R) + \mathbb{P}(\overline{D}) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

2. Calculer le prix de vente unitaire pour lequel le fabricant espère réaliser des bénéfices :

On note :

- $X$  : la v.a. représentant le prix de vente d'une montre.
- $Y$  : la v.a. représentant le bénéfice réalisé à la vente d'une montre.

On distingue trois cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si la montre n'est pas défectueuse alors } Y = X - 5000. \\ \text{Si la montre est défectueuse et réparable alors } Y = X - 5300. \\ \text{Si la montre est défectueuse et irréparable (détruite) alors } Y = -5300. \end{array} \right.$$

Donc,

$$\begin{aligned} E(Y) &= (x - 5000)\mathbb{P}(Y = x - 5000) + (x - 5300)\mathbb{P}(Y = x - 5300) + (-5300)\mathbb{P}(Y = -5300) \\ &= (x - 5000)\mathbb{P}(\overline{D}) + (x - 5300)\mathbb{P}(D \cap R) + (-5300)\mathbb{P}(D \cap \overline{R}) \\ &= (x - 5000) \times \frac{3}{4} + (x - 5300) \times \frac{1}{8} + (-5300) \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8}x - 5075. \end{aligned}$$

Le fabricant espère réaliser des bénéfices si

$$\begin{aligned} E(Y) > 0 &\implies \frac{7}{8}x - 5075 > 0 \\ &\implies x > 5800. \end{aligned}$$

Donc, le fabricant espère réaliser des bénéfices en fixant le prix de vente d'une montre à partir de 5800 DA.

3. Si le fabricant vend la montre à 5300 DA, on trouve :

$$E(Y) = \frac{7}{8} \times 5300 - 5075 = -437,5.$$

Ainsi, le fabricant aura une perte de 437,5 DA par montre.

## 2.9 Lois usuelles discrètes

### 2.9.1 Loi uniforme

On dit qu'une v.a.  $X$  suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  si

1.  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .
2.  $\forall k \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ .

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{x_1, \dots, x_n\}}.$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - [E(X)]^2.$$

**Situation caractéristique :** Cette loi modélise une expérience aléatoire dont les résultats sont équiprobables.

*Remarque 2.9.1.* Dans le cas particulier d'une v.a.  $X$  suivant une loi uniforme discrète sur l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , on écrit :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1, 2, \dots, n\}}.$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

#### Exemple 2.9.1

*Prenons l'exemple d'un lancé de dé équilibré.*

*Soit  $X$  la v.a. égale au résultat du dé, on a :*

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

*Ainsi, on peut écrire :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1, 2, \dots, 6\}}$ .*

### 2.9.2 Loi de Bernoulli

On dit qu'une v.a.  $X$  suit une loi de Bernoulli si

1.  $X(\Omega) = \{0, 1\}$ .
2.  $\forall k \in \{0, 1\}, \mathbb{P}(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$ .

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

**Situation caractéristique :** Cette loi modélise une expérience aléatoire qui a uniquement deux issues appelées « succès » ou « échec ». En effet, le chiffre 1 représente le « succès » alors que le chiffre 0 représente « l'échec ».

**Exemple 2.9.2**

On lance une pièce de monnaie équilibrée.

Soit la v.a.  $X$  « avoir pile », il s'agit ici d'une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'avoir pile est  $p = \frac{1}{2}$ .

On dit dans ce cas que la v.a.  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ , et on écrit :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).$$

**2.9.3 Loi binomiale**

On dit qu'une v.a.  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  si

1.  $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ .
2.  $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ .

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

**Situation caractéristique :** Cette loi modélise une expérience aléatoire où on répète  $n$  fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ ,  $p$  étant la probabilité d'avoir le succès.

**Proposition 2.9.1**

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ , les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p).$$

*Remarques 2.9.1.*

1. La loi de Bernoulli est une loi binomiale particulière où  $n = 1$ .
2. Le coefficient binomial  $k$  parmi  $n$ , noté  $C_n^k$ , permet de déterminer les possibilités d'avoir  $k$  succès parmi  $n$  épreuves.  
On peut calculer les coefficients binomiaux grâce à la formule suivante :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**2.9.4 Loi géométrique**

On dit qu'une v.a.  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$  si

1.  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .
2.  $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ .

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Situation caractéristique :** La loi géométrique modélise le rang du premier succès en répétant une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante à l'infini (théoriquement).

### Exemple 2.9.3

*On lance continuellement un dé non truqué jusqu'à obtenir un six. Désignons par  $X$  la v.a. représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un six. Dans ce cas, la v.a.  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{6}$ , et on écrit :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right).$$

### 2.9.5 Loi de Poisson

On dit qu'une v.a.  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  si

1.  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ .
2.  $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = V(X) = \lambda.$$

**Situation caractéristique :** La loi de Poisson modélise des phénomènes rares, elle peut être aussi utilisée pour approximer la loi binomiale comme nous allons le voir dans la section 2.10.

### Proposition 2.9.2

*Si  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ , les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, alors*

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

## 2.10 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi binomiale dépend de deux paramètres  $n$  et  $p$ , alors que la loi de Poisson ne dépend que d'un seul paramètre  $\lambda$ . Pour qu'une loi binomiale soit au plus proche d'une loi de Poisson, on doit au moins souhaiter que ces deux lois aient la même espérance. L'espérance de la loi binomiale étant  $np$  et celle de la loi de Poisson étant  $\lambda$ , il faut que  $\lambda = np$ . Cette condition nécessaire

n'est pas suffisante pour réaliser une telle approximation, théoriquement l'approximation est parfaite lorsque :

$$\begin{cases} n & \rightarrow +\infty \\ p & \rightarrow 0 \\ np & = \text{constante.} \end{cases}$$

En pratique, la condition :

$$\begin{cases} n & > 30 \\ np & < 5. \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} n & > 50 \\ p & < 0,1. \end{cases}$$

est suffisante pour envisager l'approximation.

### Exemple 2.10.1

On considère une loi binomiale de paramètres  $n = 35$  et  $p = 0,1$ .

On est dans les conditions d'approximation de cette loi par une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 0,1 \times 35 = 3,5$ .

## 2.11 Fonction génératrice des moments d'une v.a. discrète

La fonction génératrice des moments d'une v.a. discrète  $X$  est donné par :

$$G_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk} \mathbb{P}(X = k).$$

### Exemple 2.11.1

La fonction génératrice des moments d'une v.a.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^1 e^{tk} \mathbb{P}(X = k) \\ &= e^{t \times 0} (1-p) + e^{t \times 1} p \\ &= (1-p) + pe^t. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments d'une v.a.  $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  :

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= E(e^{tY}) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk} \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk} p (1-p)^{k-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)e^t)^k \\ &= \frac{p}{(1-p)} \frac{1}{(1-(1-p)e^t)}. \end{aligned}$$

## 2.12 Exercices corrigés

### Exercice 2.6

On place une souris dans une cage. Elle se trouve face à 4 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, la souris reçoit une décharge électrique et on la replace à l'endroit initial. On suppose que la souris mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'elle n'a pas encore essayé.

Soit  $X$  la v.a. représentant le nombre d'essais pour sortir de la cage.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $X$ . Reconnaître la loi.
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Corrigé exercice 2.6.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

On a

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

La loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$x_i$	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Puisque  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4)$ , on déduit que la v.a.  $X$  suit une loi uniforme, on écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1,2,3,4\}}$ .

2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$  :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{5}{4}.$$

### Exercice 2.7

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note  $X$  la v.a. qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut ?

**Corrigé exercice 2.7.**

1. La loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$$X = \sum_{i=1}^8 X_i \text{ tel que } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0, 1), i = 1, \dots, 8.$$

Donc, la v.a.  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 8$  et  $p = 0, 1$ , on écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8; 0, 1)$ , et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_8^k (0, 1)^k (0, 9)^{8-k}.$$

2. La probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut :

$$\mathbb{P}(X = 0) = C_8^0 (0, 1)^0 (0, 9)^{8-0} = (0, 9)^8 = 0, 43.$$

3. La probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut :

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0, 43 = 0, 57.$$

4. La probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \\ &= \sum_{i=0}^1 C_8^i (0, 1)^i (0, 9)^{8-i} \\ &= 0, 813. \end{aligned}$$

**Exercice 2.8**

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25% sont avariées. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

Soit  $X$  la v.a. représentant le nombre de pommes avariées dans un emballage.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $X$ .
2. Quelle est la probabilité d'avoir une seule pomme avariée dans l'emballage ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier ?
4. Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aura-t-il de plaintes ?

**Corrigé exercice 2.8.**

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$$X = \sum_{i=1}^5 X_i \text{ tel que } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0, 25), i = 1, \dots, 5.$$

Donc, la v.a.  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 5$  et  $p = 0, 25$ , on écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0, 25)$ , et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_5^k (0, 25)^k (0, 75)^{5-k}.$$

2. La probabilité d'avoir une seule pomme avariée dans l'emballage :

$$\mathbb{P}(X = 1) = C_5^1 (0, 25)^1 (0, 75)^{5-1} = 0, 396.$$

3. La probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X < 2) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= 1 - \left( C_5^0(0,25)^0(0,75)^{5-0} + C_5^1(0,25)^1(0,75)^{5-1} \right) \\ &= 0,367.\end{aligned}$$

4. Soit la v.a.  $Y$  : « le nombre de clients qui se plaignent à l'épicier », si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, alors  $Y \leftrightarrow \mathcal{B}(100; 0,37)$ , et on a :

$$E(Y) = np = 100 \times 0,367 = 36,7 \approx 37.$$

Ainsi, si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, il y aura en moyenne 37 plaintes.

### Exercice 2.9

Un certain matériel a une probabilité  $p = 0,02$  de défaillance à chaque mise en service. On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mis en marche, arrêté, remis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne.

Soit  $X$  la v.a. représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ?
2. Quelle est la probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai ?

### Corrigé exercice 2.9.

1. La loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

La v.a.  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p = 0,02$ , on écrit  $X \leftrightarrow \mathcal{G}(0,02)$ , et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = (0,02)(0,98)^{k-1}.$$

2. La probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai :

$$\mathbb{P}(X = 10) = (0,02)(0,98)^{10-1} = 0,016.$$

### Exercice 2.10

On suppose que le pourcentage de gauchers est de 1%. Soit  $X$  la v.a. prenant comme valeurs le nombre de gauchers dans un échantillon de 200 personnes choisies au hasard.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ?
2. Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait plus de 4 gauchers dans l'échantillon ?

### Corrigé exercice 2.10.

1. La loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$$X = \sum_{i=1}^{200} X_i \text{ tel que } X_i \leftrightarrow \mathcal{B}(0,01), i = 1, \dots, 200.$$

Donc, la v.a.  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 200$  et  $p = 0,01$ , on écrit  $X \leftrightarrow \mathcal{B}(200; 0,01)$ , et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{200}^k (0,01)^k (0,99)^{200-k}.$$

2. On a

$$\begin{cases} n = 200 > 50 \\ p = 0,01 < 0,1. \end{cases}$$

Alors, on peut approximer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  par la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np = 200 \times 0,01 = 2$ .

3. La probabilité pour qu'il y ait plus de 4 gauchers dans l'échantillon :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 4) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) \\ &= 1 - e^{-2} \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) \\ &= 0,633. \end{aligned}$$

### Exercice 2.11

On suppose que sur 1000 personnes voyageant par train à un instant donné, il y a en moyenne 1 médecin. Soit  $X$  la v.a. représentant le nombre de médecins dans le train.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ?
2. Quelle est la probabilité de trouver :
  - (a) Aucun médecin.
  - (b) Entre 2 et 4 médecins (au sens large).
  - (c) Au moins deux médecins.

### Corrigé exercice 2.11.

1. La loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

La v.a.  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 1$ , on écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ , et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1} \frac{1}{k!}.$$

2. La probabilité de trouver :

(a) Aucun médecin est :

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-1} \frac{1}{0!} = e^{-1} = 0,368.$$

(b) Entre 2 et 4 médecins (au sens large) est :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= e^{-1} \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) \\ &= 0,261. \end{aligned}$$

(c) Au moins deux médecins est :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X < 2) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= 1 - \left( 0,368 + e^{-1} \frac{1}{1!} \right) \\ &= 0,262. \end{aligned}$$

**Exercice 2.12**

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. On examine  $n$  pièces choisies au hasard et on note  $X$  la v.a. représentant le nombre de pièces défectueuses.

I. Après un premier réglage, on constate une proportion de 30% de pièces défectueuses.

Pour  $n = 5$  :

- 1) Quelle est la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ? Calculer son espérance et son écart-type.
- 2) Quelle est la probabilité que deux pièces soient défectueuses ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?
- 4) Déterminer la valeur de  $X$  la plus probable. Calculer la probabilité associée.

II. Après un second réglage, la proportion des pièces défectueuses devient 5%.

Pour  $n = 100$  :

- 1) Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ? Justifiez votre réponse.
- 2) Calculer la probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses.
- 3) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses.
- 4) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuse soit compris entre 2 et 4 (au sens large).

**Corrigé exercice 2.12.**

I. Pour  $n = 5$  :

1) La loi de probabilité de la v.a.  $X$  :

$$X = \sum_{i=1}^5 X_i \text{ tel que } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0, 3), i = 1, \dots, 5.$$

Donc, on déduit que la v.a.  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 5$  et  $p = 0,3$ , on écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,3)$ , et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_5^k(0,3)^k(0,7)^{5-k}.$$

Calculer son espérance et son écart-type :

$$E(X) = np = 5 \times 0,3 = 1,5.$$

$$V(X) = np(1-p) = 5 \times 0,3 \times 0,7 = 1,05.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,05} = 1,025.$$

2) La probabilité que deux pièces soient défectueuses :

$$\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2(0,3)^2(0,7)^3 = 0,309.$$

3) La probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 1) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \\ &= C_5^0(0,3)^0(0,7)^5 + C_5^1(0,3)^1(0,7)^4 \\ &= 0,528. \end{aligned}$$

4) Déterminons la valeur de  $X$  la plus probable :

On peut résumer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  dans le tableau suivant :

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,168	0,36	0,309	0,132	0,029	0,0024

Ainsi, la valeur de  $X$  la plus probable est  $X = 1$  avec  $\mathbb{P}(X = 1) = 0,36$ .

II. Pour  $n = 100$  :

1) On a

$$\begin{cases} n = 100 > 50 \\ p = 0,05 < 0,1. \end{cases}$$

Alors, on peut approximer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  par la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np = 100 \times 0,05 = 5$

2) La probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses :

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-5} \frac{5^0}{0!} = 0,0067.$$

3) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses :

$$\mathbb{P}(X = 2) = e^{-5} \frac{5^2}{2!} = 0,0842.$$

4) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuse soit compris entre 2 et 4 (au sens large) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= e^{-5} \left( \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} \right) \\ &= 0,4. \end{aligned}$$

### Exercice 2.13

Une usine produit et commercialise 40 téléviseurs par mois. Le coût de fabrication d'un téléviseur est de 5000 DA. L'usine fait réaliser un test de conformité sur chacun de ses téléviseurs. Le test est positif dans 95% des cas et un téléviseur reconnu conforme peut être vendu  $k$  DA. Si le test est en revanche négatif, le téléviseur est bradé au prix de 2500 DA. Soit  $X$  la v.a. qui indique le nombre de téléviseurs conformes parmi les 40 téléviseurs produits par l'usine.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ? Donner son expression et calculer son espérance.
2. Quelle est la probabilité que tous les téléviseurs soient conformes ?
3. Quelle est la probabilité qu'au maximum 38 téléviseurs soient conformes ?
4. On note  $Y$  la v.a. qui indique le bénéfice mensuel en Dinars.
  - (a) Donner l'expression de  $Y$  (en fonction de  $X$  et  $k$ ).
  - (b) Calculer l'espérance de  $Y$  (en fonction de  $k$ ).
  - (c) Quelle doit être la valeur minimale de  $k$  pour que l'usine ne fasse pas faillite ?

**Corrigé exercice 2.13.**

1. La loi de probabilité de la v.a.
- $X$
- :

$$X = \sum_{i=1}^{40} X_i \text{ tel que } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,95), i = 1, \dots, 40.$$

Donc, la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 40$  et  $p = 0,95$ , on écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(40; 0,95)$ , et on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{40}^k (0,95)^k (0,05)^{40-k}.$$

$$E(X) = np = 40 \times 0,95 = 38.$$

2. La probabilité que tous les téléviseurs soient conformes :

$$\mathbb{P}(X = 40) = C_{40}^{40} (0,95)^{40} (0,05)^{40-40} = (0,95)^{40} = 0,129.$$

3. La probabilité qu'au maximum 38 téléviseurs soient conformes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 38) &= 1 - \mathbb{P}(X > 38) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X = 39) + \mathbb{P}(X = 40)) \\ &= C_{40}^{39} (0,95)^{39} (0,05)^{40-39} + C_{40}^{40} (0,95)^{40} (0,05)^{40-40} \\ &= 0,271 + 0,129 \\ &= 0,4. \end{aligned}$$

4. On note
- $Y$
- la v.a. qui indique le bénéfice mensuel en Dinars.

- (a) Donner l'expression de
- $Y$
- (en fonction de
- $X$
- et
- $k$
- ) :

$$\begin{aligned} Y &= kX + 2500(40 - X) - 40 \times 5000 \\ &= (k - 2500)X - 100000. \end{aligned}$$

- (b) Calculer l'espérance de
- $Y$
- (en fonction de
- $k$
- ) :

$$\begin{aligned} E(Y) &= E((k - 2500)X - 100000) \\ &= (k - 2500)E(X) - 100000 \\ &= (k - 2500) \times 38 - 100000 \\ &= 38k - 195000. \end{aligned}$$

- (c) Déterminer la valeur minimale de
- $k$
- pour que l'usine ne fasse pas faillite :

$$\begin{aligned} E(Y) \geq 0 &\iff 38k - 195000 \geq 0 \\ &\implies k \geq \frac{195000}{38} \\ &\implies k \geq 5131,579. \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur minimale de  $k$  pour que l'usine ne fasse pas faillite est :

$$k = 5131,579 \text{ DA.}$$

### 3.1 Variable aléatoire continue

#### Définition 3.1.1 (*Variable aléatoire continue*)

Une v.a. continue est une fonction  $X$ , allant d'un univers  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Définition 3.1.2 (*Densité de probabilité*)

Soit  $X$  une v.a. continue. On appelle densité de probabilité de  $X$ , une application positive et intégrable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

### 3.2 Loi de probabilité d'une v.a. continue

La loi de probabilité d'une v.a. continue est déterminée par la fonction de répartition  $F$ , définie pour tout réel  $x$  par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

La probabilité d'un intervalle s'obtient en intégrant la densité de  $X$ , ou bien en utilisant la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in [x_1, x_2]) &= \mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \\ &= F(x_2) - F(x_1). \end{aligned}$$

#### Propriétés 3.2.1 (*Propriétés de la fonction de répartition*)

1. Elle est croissante au sens large et prend ses valeurs entre 0 et 1 :

$$0 \leq F(x) \leq 1 \text{ avec } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

2. Elle est continue à gauche :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x - h) = F(x).$$

*Remarque 3.2.1.* Si  $X$  est une v.a. continue, alors, pour tout réel  $x$ ,  $\mathbb{P}(X = x) = 0$ , et on dit que la loi est diffuse.

### 3.3 Moments d'une v.a. continue

#### 3.3.1 Espérance mathématique

Elle est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

lorsque cette intégrale existe. Pour tout réel  $a$  :

$$E(X + a) = E(X) + a \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X).$$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires qui admettent une espérance, alors :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

#### 3.3.2 Variance

Elle est définie par :

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

lorsque la variance existe. Pour tout réel  $a$  :

$$V(X + a) = V(X) \quad \text{et} \quad V(aX) = a^2 V(X).$$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une variance, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

#### 3.3.3 Moments non centrés et centrés d'une v.a. continue

##### Définition 3.3.1 (*Moments non centrés*)

Le moment non centré d'ordre  $r \in \mathbb{N}^*$  d'une v.a. continue  $X$  est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx.$$

##### Définition 3.3.2 (*Moments centrés*)

Le moment centré d'ordre  $r \in \mathbb{N}^*$  d'une v.a. continue  $X$  est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$\mu_r(X) = E([X - E(X)]^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^r f(x) dx.$$

## 3.4 Lois usuelles continues

### 3.4.1 Loi uniforme

Une v.a.  $X$  suit une loi uniforme si sa densité est constante sur un intervalle  $[a, b]$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

On écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ . Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

### 3.4.2 Loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  est celle d'une variable positive de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

On écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ . Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

### 3.4.3 Loi normale ou de Laplace-Gauss

C'est la loi d'une v.a.  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$  avec  $E(X) = m$  et  $V(X) = \sigma^2$ .

Ainsi les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

*Remarque 3.4.1.* Une v.a. suivant la loi normale est dite variable gaussienne.

#### **Proposition 3.4.1**

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m', \sigma')$ . Alors, pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  :

- La v.a.  $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, |a|\sigma)$ .
- La v.a.  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m + m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$ .
- La v.a.  $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m - m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$ .

**Exemple 3.4.1**

Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, \sqrt{3})$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 1)$ , alors :

- La v.a.  $-2X + 5 \hookrightarrow \mathcal{N}(3, 2\sqrt{3})$ .
- La v.a.  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2)$ .
- La v.a.  $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 2)$ .

**Définition 3.4.1 (Loi normale centrée réduite)**

La loi normale centrée réduite est une loi normale de paramètre  $m = 0$  et  $\sigma = 1$ . On la note par  $\mathcal{N}(0, 1)$  et sa densité de probabilité est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

**Proposition 3.4.2**

Si une v.a.  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ , alors la v.a.  $Z = \frac{X - m}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ . En particulier, on a :

$$E(Z) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(Z) = 1.$$

Ce résultat est très importante, puisqu'il nous suffit d'étudier la loi normale centrée réduite puis de procéder à un changement de variable pour obtenir n'importe quelle loi normale.

**Calcul des probabilités avec la loi normale centrée réduite**

Théoriquement, si  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , sa fonction de répartition est donnée par la formule :

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Or, le calcul de cette intégrale est trop long pour être une méthode efficace d'utilisation de la loi normale.

Pour éviter les calculs, on dispose de la table 3.1 de la loi normale centrée réduite pour calculer les probabilités.

**Utilisation de la table de la loi normale centrée réduite**

Cette table indique les valeurs de  $\mathbb{P}(Z < t)$  pour  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  et  $0 \leq t \leq 4$ . La première colonne indique le premier chiffre après la virgule de  $t$  et la première ligne indique le second chiffre après la virgule.

Par exemple pour calculer  $\mathbb{P}(Z < 1,64)$ , on cherche dans la première colonne 1,6 puis dans la première ligne 0,04, à l'intersection de cette ligne et de cette colonne, on trouve :

$$\mathbb{P}(Z < 1,64) = 0,9495.$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

TABLE 3.1 – Table de la loi normale centrée réduite

**Proposition 3.4.3**

Soit  $Z$  une v.a. suivant une loi normale centrée réduite et  $F_Z$  sa fonction de répartition, on a :

1.  $\mathbb{P}(Z \geq t) = 1 - F_Z(t)$ .
2. Si  $t$  est positif :  $F_Z(-t) = 1 - F_Z(t)$ .
3. Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a \leq b$  :

$$\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = F_Z(b) - F_Z(a).$$

4. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(-t \leq Z \leq t) = 2F_Z(t) - 1$ .

### 3.4.4 Loi gamma

Une v.a.  $X$  de loi gamma de paramètres  $n > 0$  et  $\lambda > 0$  est positive, de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

La fonction gamma est définie pour tout  $n > 0$  par :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!.$$

On écrit  $X \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$ . Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{n}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

#### Proposition 3.4.4

Si  $X \hookrightarrow \Gamma(n_1, \lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \Gamma(n_2, \lambda)$  sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \Gamma(n_1 + n_2, \lambda).$$

*Remarque 3.4.2.* La loi gamma  $\Gamma(1, \lambda)$  n'est autre que la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

### 3.4.5 Loi du khi-deux

La loi du khi-deux à  $n$  degrés de liberté, notée  $\chi^2(n)$ , est la loi  $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$  où  $n$  est un entier positif. Ses moments se déduisent de ceux de la loi gamma :

$$E(X) = \frac{n/2}{1/2} = n \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n/2}{(1/2)^2} = 2n.$$

#### Proposition 3.4.5

Si  $X \hookrightarrow \chi^2(n_1)$  et  $Y \hookrightarrow \chi^2(n_2)$  sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \chi^2(n_1 + n_2).$$

#### Propriétés 3.4.1

Notons une propriété importante qui peut servir de définition de cette loi :

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite, alors la v.a.  $X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  suit une loi du khi-deux à  $n$  degrés de liberté.

## 3.5 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

La loi binomiale n'est pas toujours simple d'utilisation. Par exemple, le calcul des combinaisons dans la loi binomiale de paramètre  $n = 150$  et  $p = 0,05$  est très long. En effet, si on cherche à calculer  $\mathbb{P}(X < 58)$ , on va devoir calculer  $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \dots + \mathbb{P}(X = 57)$ , ce qui représente 58 calculs en tout. Calculer  $\mathbb{P}(X < 58)$  est bien plus simple par lecture de la table de la loi normale centrée réduite. Il est donc légitime de chercher à faire des approximations de lois.

On considère que la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  peut être approximée par une loi normale de moyenne  $m = np$  et d'écart-type  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$  lorsque

$$\begin{cases} n \geq 30, \\ np \geq 5, \\ n(1-p) \geq 5. \end{cases}$$

Autrement dit,  $n$  doit être assez grand, et  $p$  ne pas être trop proche de 0 ou 1.

### Correction de continuité

La correction de continuité s'applique lorsqu'on approche une loi de probabilité discrète par une loi de probabilité continue, comme c'est le cas pour l'approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Ainsi,

- La probabilité  $\mathbb{P}(X = k)$  doit se réécrire  $\mathbb{P}(k - 0,5 < X < k + 0,5)$ .
- La probabilité  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$  doit se réécrire  $\mathbb{P}(a - 0,5 < X < b + 0,5)$ .
- La probabilité  $\mathbb{P}(a < X < b)$  doit se réécrire  $\mathbb{P}(a + 0,5 < X < b - 0,5)$ .

## 3.6 Transformation d'une v.a. continue

Pour déterminer la loi de probabilité d'une v.a.  $Y$ , lorsque celle-ci est liée à une v.a.  $X$  par la relation

$$Y = g(X),$$

où  $g$  est une fonction continue sur  $X(\Omega)$  et la fonction de densité de probabilité de  $X$  étant connue, il suffit de :

1. Déterminer  $Y(\Omega)$ .
2. Calculer sa fonction de répartition :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y).$$

3. En déduire sa densité de probabilité  $f_Y(y)$  :

$$f_Y(y) = F'_Y(y).$$

### 3.7 Fonction génératrice des moments d'une v.a. continue

La fonction génératrice des moments d'une v.a. continue  $X$  de densité  $f(x)$  est donné par :

$$G_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

#### Exemple 3.7.1

La fonction génératrice des moments d'une v.a.  $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$  est :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{t} e^{tx} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments d'une v.a.  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$  est :

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= E(e^{tY}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{ty} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)y} dy \\ &= \frac{\lambda}{t-\lambda} \left[ e^{(t-\lambda)y} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \quad \text{pour } t < \lambda. \end{aligned}$$

## 3.8 Exercices corrigés

### Exercice 3.1

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition associée à cette densité.

$$1. f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$2. g(x) = \begin{cases} \frac{4\ln(x)}{x^3}, & \text{si } x \geq 1, \\ 0, & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

### Corrigé exercice 3.1.

1. Déterminer si la fonction  $f$  est une densité de probabilité :

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_{\text{est égale à 0}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} 4xe^{-2x} dx}_{\text{intégration par parties}} \\ &= \underbrace{\left[-2xe^{-2x}\right]_0^{+\infty}}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx \\ &= \left[-e^{-2x}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc,  $f$  est bien une densité de probabilité.

Déterminer la fonction de répartition  $F$  associée à  $f$  :

- Si  $x < 0$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- Si  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} F(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^x 4te^{-2t} dt \\ &= 0 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1 \\ &= 1 - (2x + 1)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - (2x + 1)e^{-2x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

2. Déterminer si la fonction  $g$  est une densité de probabilité :

- $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- On a :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^1 0 dx}_{\text{est égale à 0}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{4 \ln(x)}{x^3} dx}_{\text{intégration par parties}} \\
 &= \underbrace{\left[ \frac{-2 \ln(x)}{x^2} \right]_1^{+\infty}}_{\text{est égale à 0}} + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{x^2} \right]_1^{+\infty} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Donc,  $g$  est bien une densité de probabilité.

Déterminer la fonction de répartition  $G$  associée à  $g$  :

- Si  $x < 1$ ,

$$G(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- Si  $x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^1 0 dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_1^x \frac{4 \ln(t)}{t^3} dt \\
 &= \left[ \frac{-2 \ln(t)}{t^2} \right]_1^x + \int_1^x \frac{2}{t^3} dt \\
 &= 1 - \frac{1}{x^2} (2 \ln(x) + 1).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^2} (2 \ln(x) + 1), & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

### Exercice 3.2

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer sa fonction de répartition  $F$ .
3. Calculer  $\mathbb{P}(0,488 < X \leq 1,2)$ .

### Corrigé exercice 3.2.

1. Déterminer si la fonction  $f$  est une densité de probabilité :
  - $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .
  - $f$  est continue sur  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

- On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} dx + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0 dx}_{\text{est égale à 0}} \\ &= \left[ -\frac{4}{3} \frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc,  $f$  est bien une densité de probabilité.

- Déterminer sa fonction de répartition  $F$  :

- si  $x < 0$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- si  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} F(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^x (1-t)^{\frac{1}{3}} dt \\ &= \left[ -(1-t)^{\frac{4}{3}} \right]_0^x \\ &= 1 - (1-x)^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

- si  $x > 1$ ,

$$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{\text{est égale à 0}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{4}{3}(1-t)^{\frac{1}{3}} dt}_{\text{est égale à 1}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0 dt}_{\text{est égale à 0}} = 1.$$

Ainsi,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1-x)^{\frac{4}{3}}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- Calculer  $\mathbb{P}(0,488 < X \leq 1,2)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0,488 < X \leq 1,2) &= F(1,2) - F(0,488) \\ &= 1 - \left(1 - (1 - 0,488)^{\frac{4}{3}}\right) \\ &= 0,410. \end{aligned}$$

### Exercice 3.3

Soit  $X$  une v.a. continue de densité de probabilité  $f(x)$  donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2\alpha x} (1 - e^{-\alpha x}), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\alpha$  est une constante connue strictement positive et  $c$  une constante réelle à déterminer.

- Montrer que la constante  $c$  est égale à  $6\alpha$ .
- Calculer la fonction de répartition de la v.a.  $X$ .

3. Pour  $\alpha = 1$ , calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2, 5), \mathbb{P}(1, 5 < X \leq 3, 75), \mathbb{P}(X > 6).$$

4. Soit la v.a.  $Y = e^{-\alpha X}$ .

(a) Trouver la densité de probabilité de la v.a.  $Y$ .

(b) Déterminer la fonction de répartition de la v.a.  $Y$ .

(c) Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(Y \leq 0, 5), \mathbb{P}(0, 25 < Y \leq 1), \mathbb{P}(|Y - 0, 5| \geq 0, 1).$$

### Corrigé exercice 3.3.

1. Déterminons la valeur de la constante  $c$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} ce^{-2\alpha x} (1 - e^{-\alpha x}) dx = 1 \\ &\Rightarrow c \int_0^{+\infty} (e^{-2\alpha x} - e^{-3\alpha x}) dx = 1 \\ &\Rightarrow c \left[ -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha x} + \frac{1}{3\alpha} e^{-3\alpha x} \right]_0^{+\infty} = 1 \\ &\Rightarrow c \left( 0 + \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{3\alpha} \right) = 1 \\ &\Rightarrow c \left( \frac{3\alpha - 2\alpha}{6\alpha^2} \right) = 1 \\ &\Rightarrow \frac{c}{6\alpha} = 1 \\ &\Rightarrow c = 6\alpha. \end{aligned}$$

2. Déterminons la fonction de répartition  $F_X$  de la v.a.  $X$  :

- si  $x < 0$ ,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- si  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^x (6\alpha e^{-2\alpha t} (1 - e^{-\alpha t})) dt \\ &= 6\alpha \int_0^{+\infty} (e^{-2\alpha t} - e^{-3\alpha t}) dt \\ &= 6\alpha \left[ -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} + \frac{1}{3\alpha} e^{-3\alpha t} \right]_0^x \\ &= 1 - 3e^{-2\alpha x} + 2e^{-3\alpha x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - 3e^{-2\alpha x} + 2e^{-3\alpha x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3. Pour  $\alpha = 1$ , on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - 3e^{-2x} + 2e^{-3x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2,5) &= F_X(2,5) - F_X(-1) \\ &= (1 - 3e^{-2(2,5)} + 2e^{-3(2,5)}) - 0 \\ &= 0,980. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1,5 < X \leq 3,75) &= F_X(3,75) - F_X(1,5) \\ &= (1 - 3e^{-2(3,75)} + 2e^{-3(3,75)}) - (1 - 3e^{-2(1,5)} + 2e^{-3(1,5)}) \\ &= 0,125. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 6) &= 1 - \mathbb{P}(x \leq 6) \\ &= 1 - F_X(6) \\ &= 1 - (1 - 3e^{-2(6)} + 2e^{-3(6)}) \\ &= 0,0000184. \end{aligned}$$

4. Pour  $Y = e^{-\alpha X}$  :

(a) Trouvons la densité de probabilité de la v.a.  $Y$  :

$$X(\Omega) = [0, +\infty[ \Rightarrow Y(\Omega) = [0, 1].$$

Pour  $y \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(e^{-\alpha X} \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-\alpha X \leq \ln(y)) \\ &= \mathbb{P}(X \geq -\frac{\ln(y)}{\alpha}) \\ &= 1 - 8\mathbb{P}\left(X < -\frac{\ln(y)}{\alpha}\right) \\ &= 1 - F_X\left(-\frac{\ln(y)}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Donc, pour  $y \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) \\ &= \frac{1}{\alpha y} f_X\left(-\frac{\ln(y)}{\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha y} \left( 6\alpha e^{2\alpha \frac{\ln(y)}{\alpha}} \left(1 - e^{\alpha \frac{\ln(y)}{\alpha}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{y} \left( 6e^{2\ln(y)} \left(1 - e^{\ln(y)}\right) \right) \\ &= \frac{1}{y} \left( 6y^2 (1 - y) \right) \\ &= 6y - 6y^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6y - 6y^2, & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Déterminons la fonction de répartition de la v.a.  $Y$  :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 3y^2 - 2y^3, & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq 0,5) &= F_Y(0,5) \\ &= 3(0,5)^2 - 2(0,5)^3 \\ &= 0,5. \\ \mathbb{P}(0,25 < Y \leq 1) &= F_Y(1) - F_Y(0,25) \\ &= 1 - (3(0,25)^2 - 2(0,25)^3) \\ &= 0,843. \\ \mathbb{P}(|Y - 0,5| \geq 0,1) &= 1 - \mathbb{P}(|Y - 1| < 0,1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(-0,1 < Y - 0,5 < 0,1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(-0,1 + 0,5 < Y < 0,1 + 0,5) \\ &= 1 - \mathbb{P}(0,4 < Y < 0,6) \\ &= 1 - (F_Y(0,6) - F_Y(0,4)) \\ &= 1 - ((3(0,6)^2 - 2(0,6)^3) - (3(0,4)^2 - 2(0,4)^3)) \\ &= 0,704. \end{aligned}$$

### Exercice 3.4

1. Soit une v.a.  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. Rappeler la fonction de densité et la fonction de répartition de la variable étudiée.
2. On pose  $Y = \ln(e^X - 1)$ 
  - (a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de la v.a.  $Y$ .
  - (b) Déterminer la fonction de densité  $f$  de la v.a.  $Y$ .
  - (c) Montrer que la fonction  $f$  est paire.
  - (d) Dédurre  $E(Y)$ .

### Corrigé exercice 3.4.

1. La fonction de densité de la v.a.  $X$  :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & , & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition de la v.a.  $X$  :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad \text{si } x \geq 0, \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On pose  $Y = \ln(e^X - 1)$

(a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de la v.a.  $Y$  :

$$X(\Omega) = [0, +\infty[ \Rightarrow Y(\Omega) = ] - \infty, +\infty[ = \mathbb{R}.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\ln(e^X - 1) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(e^X - 1 \leq e^y) \\ &= \mathbb{P}(e^X \leq e^y + 1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \ln(e^y + 1)) \\ &= F_X(\ln(e^y + 1)) \\ &= 1 - e^{-\ln(e^y + 1)} \\ &= 1 - \frac{1}{e^y + 1}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Déterminer la fonction de densité  $f$  de la v.a.  $Y$  :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e^y + 1}\right)' \\ &= \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Montrer que la fonction  $f$  est paire :

On a

$$\begin{aligned} f_Y(-y) &= \frac{e^{-y}}{(e^{-y} + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2y} e^{-y}}{e^{2y} (e^{-y} + 1)^2} \\ &= \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} \\ &= f_Y(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la fonction  $f_Y$  est paire.

(d) Déduire  $E(Y)$  :

$$E(Y) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} dy}_{\text{Intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique}}$$

= 0.

*Remarque 3.8.1.* L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

### Exercice 3.5

La durée de vie en années d'un ordinateur est une v.a. notée  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

1. Sachant que  $\mathbb{P}(X > 10) = 0,286$ , déterminer la valeur de  $\lambda$ .
2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

**Corrigé exercice 3.5.** Rappelons que si  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$  alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad \text{si } x \geq 0, \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Sachant que  $\mathbb{P}(X > 10) = 0,286$ , déterminer la valeur de  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 10) = 0,286 &\Rightarrow 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 0,286 \\ &\Rightarrow 1 - (1 - e^{-10\lambda}) = 0,286 \\ &\Rightarrow e^{-10\lambda} = 0,286 \\ &\Rightarrow -10\lambda = \ln(0,286) \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{\ln(0,286)}{-10} \\ &\Rightarrow \lambda = 0,125. \end{aligned}$$

2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois :  
Sachant que 6 mois=0,5 année, alors on cherche :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 0,5) &= F_X(0,5) \\ &= 1 - e^{-0,5 \times 0,125} \\ &= 0,061. \end{aligned}$$

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, calculer la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 10/X > 8) &= \frac{\mathbb{P}(X > 10 \cap X > 8)}{\mathbb{P}(X > 8)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > 10)}{\mathbb{P}(X > 8)} \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq 10)}{1 - \mathbb{P}(X \leq 8)} \\ &= \frac{1 - F_X(10)}{1 - F_X(8)} \\ &= \frac{e^{-0,125 \times 10}}{e^{-0,125 \times 8}} \\ &= 0,779. \end{aligned}$$

**Exercice 3.6**

Soit la v.a. continue  $X$  modélisée par la loi uniforme continue sur l'intervalle  $[0, 1] : X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ .

1. Rappeler la fonction de densité de la variable étudiée.
2. On pose  $Y = -\alpha \ln(X)$ , ( $\alpha > 0$ )
  - (a) Déterminer la fonction de densité de la v.a.  $Y$ . Reconnaître sa loi.
  - (b) En déduire son espérance et sa variance.
3. Déduire la fonction de répartition de la v.a. réelle  $Y$ .
4. Calculer la probabilité suivante :  $\mathbb{P}(Y > 2\alpha)$ .

**Corrigé exercice 3.6.**

1. Rappeler la fonction de densité de la variable étudiée :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On pose  $Y = -\alpha \ln(X)$ , ( $\alpha > 0$ )
  - (a) Déterminer la fonction de densité de la variable  $Y$  :

$$X(\Omega) = [0, 1] \Rightarrow Y(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-\alpha \ln(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(\ln(X) > -\frac{y}{\alpha}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X > e^{-\frac{y}{\alpha}}\right) \\ &= 1 - F_X\left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Donc, pour  $y \in [0, +\infty[$ , on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) \\ &= 0 - \left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right)' f_X\left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{y}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{y}{\alpha}}, & \text{si } y \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par identification, on déduit que la v.a.  $Y$  suit une loi exponentielle  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ .

(b) En déduire son espérance et sa variance :

Puisque  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ , alors

$$E(Y) = \frac{1}{1/\alpha} = \alpha.$$

$$V(Y) = \frac{1}{(1/\alpha)^2} = \alpha^2.$$

3. Déduire la fonction de répartition de la v.a.  $Y$  :

Puisque  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ , alors

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{y}{\alpha}}, & \text{si } y \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Calculer  $\mathbb{P}(Y > 2\alpha)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > 2\alpha) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2\alpha) \\ &= 1 - F_Y(2\alpha) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{\alpha}}\right) \\ &= e^{-2} \\ &= 0,135. \end{aligned}$$

### Exercice 3.7

La distance (en mètres) parcourue par un projectile suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- La probabilité qu'un projectile dépasse 60 mètres est 0,0869.
- La probabilité qu'un projectile parcoure une distance inférieure à 45 mètres est 0,6406.

Calculer la distance moyenne parcourue par un projectile, ainsi que l'écart-type de celle-ci.

### Corrigé exercice 3.7.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma).$$

On cherche à calculer la moyenne  $m$  et l'écart-type  $\sigma$  :

On pose  $Z = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbb{P}(X > 60) = 0,0869 \\ \mathbb{P}(X < 45) = 0,6406 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}\left(Z > \frac{60 - m}{\sigma}\right) = 0,0869 \\ \mathbb{P}\left(Z < \frac{45 - m}{\sigma}\right) = 0,6406 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{60 - m}{\sigma}\right) = 0,0869 \\ F_Z\left(\frac{45 - m}{\sigma}\right) = 0,6406 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} F_Z\left(\frac{60 - m}{\sigma}\right) = 0,9131. \\ F_Z\left(\frac{45 - m}{\sigma}\right) = 0,6406. \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant la table de la loi normale centrée réduite, on a

$$\begin{cases} \frac{60 - m}{\sigma} = 1,36 \\ \frac{45 - m}{\sigma} = 0,36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 15. \\ m = 39,6. \end{cases}$$

### Exercice 3.8

Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes en vue de connaître leur consommation de lait sur 1 mois. On suppose que sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation a une distribution de type "Normale" avec une moyenne de 20 litres et un écart-type de 5 litres. Dans le cadre d'une campagne publicitaire, on souhaite connaître :

1. Le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois)
2. Le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois).
3. La consommation maximale de 50% des consommateurs.
4. Au dessus de quelle consommation se trouvent 33% des consommateurs.

**Annexe :** Si  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , on donne :

$$F_Z(2) = 0,9772.$$

$$F_Z(0.44) = 0,67.$$

### Corrigé exercice 3.8.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(20, 5).$$

On pose  $Z = \frac{X - 20}{5} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

1. Calculer le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 10) &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{10 - 20}{5}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z < -2) \\ &= F_Z(-2) \\ &= 1 - F_Z(2) \\ &= 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

2. Calculer le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 30) &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{30 - 20}{5}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z > 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2) \\ &= 1 - F_Z(2) \\ &= 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

3. Calculer la consommation maximale de 50% des consommateurs :  
On cherche  $c$  telle que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq c) = 0,5 &\Rightarrow \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{c-20}{5}\right) = 0,5 \\ &\Rightarrow F_Z\left(\frac{c-20}{5}\right) = 0,5 \\ &\Rightarrow \frac{c-20}{5} = 0 \\ &\Rightarrow c = 20.\end{aligned}$$

Ainsi, la consommation maximale de 50% des consommateurs est de 20 litres.

4. On cherche à calculer  $c$  telle que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > c) = 0,33 &\Rightarrow \mathbb{P}\left(Z > \frac{c-20}{5}\right) = 0,33 \\ &\Rightarrow 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{c-20}{5}\right) = 0,33 \\ &\Rightarrow F_Z\left(\frac{c-20}{5}\right) = 0,67 \\ &\Rightarrow \frac{c-20}{5} = 0,44 \\ &\Rightarrow c = 22,5.\end{aligned}$$

Ainsi, 33% des consommateurs se trouvent au dessus de 22,5 litres.

### Exercice 3.9

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. la proportion des pièces défectueuses est de 3%. On examine 1000 pièces choisies au hasard et on note  $X$  la v.a. représentant le nombre de pièces défectueuses.

1. Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  ? Justifiez votre réponse.
2. Calculer la probabilité d'avoir plus de 50 pièces défectueuses.
3. Calculer la probabilité d'avoir entre 20 et 40 pièces défectueuses.
4. Calculer la probabilité pour que la différence absolue entre le nombre de pièces défectueuses et la moyenne soit inférieur ou égale à 15.

### Corrigé exercice 3.9.

1. La v.a.  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 1000$  et  $p = 0,03$ .  
On peut approximer la loi de probabilité de la v.a.  $X$  par une loi normale de paramètre  $m = np = 30$  et  $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{29,1} \approx 5,4$ .
2. Calculer la probabilité d'avoir plus de 50 pièces défectueuses :

On pose :  $Z = \frac{X-30}{5,4} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 50) &\xrightarrow[\text{de continuité}]{\text{Correction}} \mathbb{P}(X > 50, 5) = \mathbb{P}(X > 50, 5) \\ &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{50,5 - 30}{5,4}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z > 3,79) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 3,79) \\ &= 1 - F_Z(3,79) \\ &= 1 - 0,99992 \\ &= 0,00008. \end{aligned}$$

3. Calculer la probabilité d'avoir entre 20 et 40 pièces défectueuses :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(20 \leq X \leq 40) &\xrightarrow[\text{de continuité}]{\text{Correction}} \mathbb{P}(19,5 < X < 40,5) = \mathbb{P}\left(\frac{19,5 - 30}{5,4} < Z < \frac{40,5 - 30}{5,4}\right) \\ &= \mathbb{P}(-1,94 < Z < 1,94) \\ &= 2F_Z(1,94) - 1 \\ &= 2(0,9738) - 1 \\ &= 0,9476. \end{aligned}$$

4. Calculer la probabilité pour que la différence absolue entre le nombre de pièces défectueuses et la moyenne soit inférieur ou égale à 15 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - 30| \leq 15) &= \mathbb{P}(-15 \leq X - 30 \leq 15) \\ &= \mathbb{P}(15 \leq X \leq 45) \\ &\xrightarrow[\text{de continuité}]{\text{Correction}} \mathbb{P}(14,5 \leq X \leq 45,5) \\ &= \mathbb{P}(-2,78 < Z < 2,78) \\ &= 2F_Z(2,78) - 1 \\ &= 2(0,9937) - 1 \\ &= 0,9874. \end{aligned}$$

### Exercice 3.10

Tous les jours, un étudiant parcourt le même trajet de 40 Km pour se rendre à son université. Sa vitesse est une v.a.  $V$  qui dépend des conditions météorologiques et de la circulation. Sa densité est de la forme :

$$f_V(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $\lambda > 0$ .

1. Reconnaître la loi de probabilité de la v.a.  $V$ . Déterminer la valeur de  $\lambda$  sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h.
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a.  $V$ .

3. Sur la route empruntée par l'étudiant, la vitesse est limitée à 120 Km/h, un radar mesure la vitesse de toutes les automobiles. Quelle est la probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse ?
4. La durée du trajet est décrite par la v.a.  $T = \frac{40}{V}$ . Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a.  $T$ .
5. On pose  $U = 2\lambda V$ .  
Déterminer la densité de la v.a.  $U$ . De quelle loi usuelle s'agit-il ?

**Corrigé exercice 3.10.**

1. Reconnaître la loi de  $V$  :  
Par identification :  $V \hookrightarrow \Gamma(2, \lambda)$ .  
Déterminer la valeur de  $\lambda$  sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h :

$$E(V) = 80 \implies \frac{2}{\lambda} = 80 \implies \lambda = \frac{1}{40}.$$

2. Calculer la fonction de répartition de la v.a.  $V$  :
  - Si  $x < 0$  alors  $F_V(x) = 0$ .
  - Si  $x \geq 0$  alors

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \int_{-\infty}^x f_V(x) dx \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{40}\right)^2 x e^{-\frac{1}{40}x} dx \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{40}x} \left(\frac{1}{40}x + 1\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{40}x} \left(\frac{1}{40}x + 1\right), & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. La probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \geq 120) &= 1 - \mathbb{P}(V < 120) \\ &= e^{-\frac{1}{40}120} \left(\frac{1}{40}120 + 1\right) \\ &= 4e^{-3} \\ &= 0,199. \end{aligned}$$

4. Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a.  $T = \frac{40}{V}$  :

$$V(\Omega) = [0, +\infty[ \implies T(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 F_T(t) &= \mathbb{P}(T \leq t) \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{40}{V} \leq t\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(V \geq \frac{40}{t}\right) \\
 &= 1 - \mathbb{P}\left(V < \frac{40}{t}\right) \\
 &= 1 - F_V\left(\frac{40}{t}\right).
 \end{aligned}$$

Donc, pour  $t \in [0, +\infty[$ , on a

$$f_T(t) = F'_T(t) = \frac{40}{t^2} f_V\left(\frac{40}{t}\right).$$

Ainsi,

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance de la v.a.  $T$  est :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \left[ e^{-\frac{1}{t}} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

5. Déterminer la densité de la v.a.  $U = \frac{1}{20}V$  et reconnaître sa loi :

$$V(\Omega) = [0, +\infty[ \Rightarrow U(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 F_U(u) &= \mathbb{P}(U \leq u) \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{20}V \leq u\right) \\
 &= \mathbb{P}(V \leq 20u) \\
 &= F_V(20u).
 \end{aligned}$$

Donc, pour  $u \in [0, +\infty[$ , on a

$$f_U(u) = F'_U(u) = 20f_V(20u).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 f_U(u) &= \begin{cases} \frac{1}{4} u e^{-\frac{1}{2}u}, & \text{si } u \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2 u e^{-\frac{1}{2}u}, & \text{si } u \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par identification :  $U \leftrightarrow \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$ , c'est-à-dire,  $U \leftrightarrow \chi^2(4)$ .

**Exercice 3.11**

Soit  $X$  une v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{x+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq e-1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.
2. Calculer  $\mathbb{P}(X \geq 1)$  et  $\mathbb{P}(0,7 \leq X \leq 1,7)$ .
3. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$  si elles existent.
4. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de la v.a.  $X$ .
5. Déterminer la loi de la v.a.  $Y = \ln(1 + X)$ .
6. Monter que la v.a.  $Z = -2 \ln Y$  suit une loi du khi-deux, préciser son degré de liberté.

**Corrigé exercice 3.11.**

1. Calculons  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 &\Rightarrow \int_0^{e-1} \frac{k}{x+1} dx = 1 \\ &\Rightarrow k [\ln(x+1)]_0^{e-1} = 1 \\ &\Rightarrow k (\ln(e) - \ln(1)) = 1 \\ &\Rightarrow k = 1. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 1) &= \int_1^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_1^{e-1} \frac{1}{x+1} dx + \int_{e-1}^{+\infty} 0 dx \\ &= [\ln(x+1)]_1^{e-1} \\ &= 1 - \ln 2 \\ &= 0,306. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0,7 \leq X \leq 1,7) &= \int_{0,7}^{1,7} f(x) dx \\ &= \int_{0,7}^{1,7} \frac{1}{x+1} dx \\ &= [\ln(x+1)]_{0,7}^{1,7} \\ &= \ln(2,7) - \ln(1,7) \\ &= 0,462. \end{aligned}$$

3. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$  :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx \\
 &= \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
 &= [x - \ln(x+1)]_0^{e-1} \\
 &= e - 2 \\
 &= 0,718.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{x^2}{x+1} dx \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx \\
 &= \int_0^{e-1} \left(\frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right) dx \\
 &= \int_0^{e-1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right) dx \\
 &= \int_0^{e-1} \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^{e-1} \\
 &= \frac{(e-1)^2}{2} - e + 2 \\
 &= 0,758.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on peut déduire que

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= 0,758 - 0,758^2 \\
 &= 0,242.
 \end{aligned}$$

4. La fonction de répartition de la v.a.  $X$  :

- si  $x < 0$ ,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- si  $0 \leq x \leq e - 1$ ,

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{\text{est égale à } 0} + \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_0^x = \ln(x+1).$$

- si  $x > e - 1$ ,

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{\text{est égale à 0}} + \int_0^{e-1} \frac{1}{t+1} dt + \underbrace{\int_{e-1}^x 0 dt}_{\text{est égale à 0}} = 1.$$

Ainsi,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \ln(x+1), & \text{si } 0 \leq x \leq e-1, \\ 1, & \text{si } x > e-1. \end{cases}$$

5. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.  $Y = \ln(1+X)$  :

$$X(\Omega) = [0, e-1] \Rightarrow Y(\Omega) = [0, 1].$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\ln(1+X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(1+X \leq e^y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq e^y - 1) \\ &= F_X(e^y - 1). \end{aligned}$$

Donc, pour  $y \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) \\ &= e^y f_X(e^y - 1) \\ &= e^y \frac{1}{e^y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par identification, on déduit que la v.a.  $Y$  suit une loi uniforme  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ .

6. Montrer que la v.a.  $Z = -2 \ln Y$  suit une loi du khi-deux et déterminer son degré de liberté :

$$Y(\Omega) = [0, 1] \Rightarrow Z(\Omega) = [0, +\infty[.$$

On a :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) \\ &= \mathbb{P}(-2 \ln(Y) \leq z) \\ &= \mathbb{P}(\ln(Y) \geq -\frac{1}{2}z) \\ &= \mathbb{P}(Y \geq e^{-\frac{1}{2}z}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y < e^{-\frac{1}{2}z}) \\ &= 1 - F_Y(e^{-\frac{1}{2}z}). \end{aligned}$$

Donc, pour  $z \in [0, +\infty[$ , on a

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= F'_Z(z) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} \underbrace{f_Y(e^{-z})}_{\text{est égale à 1}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-z}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} & , \quad \text{si } z \geq 0, \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Par identification, la v.a.  $Z$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

$$Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2).$$

On déduit que la v.a.  $Z$  suit une loi du khi-deux à 2 degrés de liberté.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Eva Cantoni, Philippe Huber, and Elvezio Ronchetti. *Maîtriser l'aléatoire Exercices résolus de probabilités et statistique*. Springer, 2009.
- [2] Jean-Pierre Lecoutre. *Statistique et probabilités*. Dunod, 2002.
- [3] Benjamin Legros. *Mini-manuel de mathématiques pour la gestion*, 2011.
- [4] Mikael Beatriz-Alkéos Michaïl. *Probabilités et statistiques élémentaires*.
- [5] Thérèse Phan and Jean-Pierre Rowencyk. *Exercices et problèmes de Statistique et probabilités-2e éd.* Dunod, 2012.