Année Académique : 2023/2024

Travaux Dirigés
Probabilités

EXERCICE 1

Dans une assemblée de 250 personne, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 porte la cravate. On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1. Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.
2. Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.
3. Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.
4. Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

EXERCICE 2

Une compagnie d'assurance répartit ses assurés en trois catégories : conducteur à faible risque, conducteur à risque moyen et conducteur à haut risque. Les statistiques de la compagnie indiquent que la probabilité d'accident sur une période de un an est 0.05, 0.15 et 0.30 selon la catégorie. Par ailleurs, la répartition des assurés est la suivante : 20% sont à bas risque, 50% à risque moyen et 30% à haut risque. Un assuré est choisi au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait un accident au cours de l'année ?
2. Sachant que l'assuré n'a pas eu d'accident lors de l'année écoulée, quelle est la probabilité qu'il soit à faible risque ?

EXERCICE 3

Une urne contient 6 boules blanches et 8 boules noires. On extrait une boule qu'on met de coté. Par la suite on extrait une seconde boule.

1. Sachant que la première boule tirée est blanche, trouver la probabilité que la deuxième boule tirée soit également blanche et la probabilité que la deuxième boule tirée soit noire.
2. Sans connaître la couleur de la première boule extraite, trouver la probabilité que la deuxième boule extraite soit blanche et la probabilité que la deuxième boule extraite soit noire.

EXERCICE 4

1. Sachant que $P(A \mid B) = 2/5$; $P(A \mid B^c) = 1/10$ et $P(B \mid A) = 3/5$, trouver $P(A)$ et $P(B)$.
2. Soient A et B deux événements définis sur le même espace échantillonnal et tels que $P(A) = 0,5$ et $P(A \cup B) = 0,7$. Trouver $P(B)$ quand

a) les événements A et B sont incompatibles.

b) Les événements A et B sont indépendants.

c) $P(B \mid A) = 0,5$.

3. Trois canons tirent simultanément sur une cible. Les probabilités d'atteindre la cible sont $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,7$, pour les trois canons respectivement. Trouver la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois

4. D'une urne qui contient 3 boules rouges, 3 boules vertes et 4 boules bleues, on tire sans remise, trois boules. Quelle est la probabilité que la première boule soit bleue, la seconde verte et la troisième bleue ?

5. Un lot de 100 pièces de machines est soumis à un contrôle de la qualité. En testant 5 pièces du lot, on rejette le lot si l'on trouve au moins une pièce défectueuse. Trouver la probabilité que le lot soit rejeté, s'il contient effectivement 5% de pièces défectueuses.

6. Soit deux machines M_1 et M_2 produisant respectivement 100 et 200 objets. La machine M_1 produit 5% d'objets défectueux, la machine M_2 en produit 6%. On tire un objet parmi les 300 objets fabriqués et il est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait été fabriqué par la machine M_1 ?

EXERCICE 5

Un dé est ainsi construit : une face est marquée avec un point, deux faces avec 2 points et trois faces avec 3 points. Si on lance le dé on peut donc obtenir les résultats : 1, 2 ou 3. On lance le dé deux fois et on note les résultats obtenus.

1. Trouver la probabilité que les deux résultats soient égaux.
2. Trouver la probabilité que la somme des deux résultats soit 4.

EXERCICE 6

Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clefs dont une seule est la bonne.

1. Donner la loi de probabilité du nombre X d'essais nécessaires s'il essaie les clefs une à une sans utiliser deux fois la même. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Lorsque le gardien est ivre, il mélange toutes les clefs à chaque tentative. Identifier la loi de X : Rappeler l'espérance et la variance de X.
3. Le gardien est ivre un jour sur trois. Sachant qu'un jour n tentatives ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le gardien ait été ivre ce jour là ? Calculer sa limite.

EXERCICE 7

Un entrepreneur dispose de trois vidéo-projecteurs qu'il met en location. Chacun est utilisable 1 jours sur 3. Un vidéo-projecteur est loué à 3500 Fcfa par jour. On considère Z la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer un vidéo-projecteur. On suppose que $Z(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$ avec
$P(Z = 0) = 0,2$; $P(Z = 1) = 0,1$; $P(Z = 2) = 0,15$; $P(Z = 3) = 0,3$; $P(Z = 4) = 0,25$.
On note Y le nombre de vidéo-projecteurs disponibles par jour.

1. Déterminer la loi de Y.

2. On pourra considérer dans la suite que Z et Y sont indépendantes. On note X la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour".
   a) Déterminer la loi de X.
   b) Calculer la marge brute moyenne par jour.

EXERCICE 8

Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons $1, 2, \ldots, 10cm$, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k, pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

EXERCICE 9

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par : X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne. X_2 (resp. X_3), est le temps, en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première (resp. la deuxième) panne et la panne suivante. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre d'espérance 2.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?
2. Soit E l'événement : "chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures". Calculer P(E).
3. Soit T la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption.
   a) Calculer $P(T \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. (on distinguera les cas $t < 0$ et $t \geq 0$).
   b) Déterminer la densité de T.
   c) Pour $a < 0$, calculer $\int_0^{+\infty} te^{at}\,dt$.
   d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T (en heures et minutes).

EXERCICE 10

D'après une étude récente, la taille des femmes ivoiriennes est distribuée selon une loi normale de moyenne $m = 1,58$ et d'écart-type $\sigma = 0,06$. Pour produire un stock de vêtement, un couturier souhaite utiliser cette loi.

1. Déterminer le réel a tel que l'intervalle $[m-a, m+a]$ contiennent 90% des tailles des femmes ivoiriennes.
2. Il en déduit trois tailles S, M et L, correspondant respectivement aux intervalles $[m-a, m-\frac{a}{3}]$, $[m-\frac{a}{3}, m+\frac{a}{3}]$ et $[m+\frac{a}{3}, m+a]$.
3. Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.

EXERCICE 11

la distance (en mètres) parcourue par un projectile suit une loi normale. Au cours d'un entrainement, on constate que :

★ La probabilité qu'un projectile dépasse 60 m est 0,0869.

★ La probabilité qu'un projectile parcoure une distance inférieure à 45 m est 0,6406.

Calculer la distance moyenne parcourue par un projectile, ainsi que l'écart-type de celui-ci.

EXERCICE 12

1. Soit une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. rappeler la fonction de densité et la fonction de répartition de X.
2. On pose $Y = \ln(e^X - 1)$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   b) Déterminer la fonction de densité de Y.
   c) Calculer $E(Y)$.

EXERCICE 13

Soit la variable aléatoire continue X modélisée par la loi uniforme continue sur l'intervalle $[0,1]$.

1. Rappeler la fonction de densité de la variable étudiée.
2. On pose $Y = -\alpha \ln(X), \ (\alpha > 0)$.
   a) Déterminer la fonction de densité de la v.a. Y. Reconnaître sa loi.
   b) En déduire son espérance et sa variance.
3. Déduire la fonction de répartition de la v.a. réelle Y.
4. Calculer la probabilité suivante : $\mathbb{P}(Y > 2\alpha)$.

EXERCICE 14

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ telle que :

$$\mathbb{P}(X = n) = k\frac{3^{n-1}}{n!}$$

1. Quelle valeur doit-on donner au nombre réel k pour que la loi de probabilité de la v.a. X soit parfaitement déterminée ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE 15 (08 points)

Soit X une variable aléatoire continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq e-1, \\ \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer k pour que f soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la v.a. X.
3. Calculer $P(X \geq 1)$ et $P(0,7 \leq X \leq 1,7)$.
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si elles existent.
5. Déterminer la loi de la v.a. $Y = \ln(1+X)$.