CHAPITRE I : APPROCHE TEMPORELLE DES SYSTÈMES

I. Les signaux

I-1. DÉFINITION

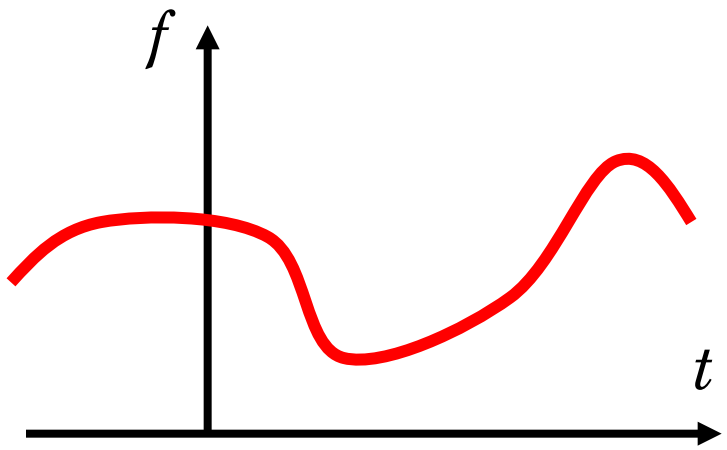
Le signal est une fonction f(t) de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

$$f: \quad \begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R \text{ (ou C)} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$$

Le signal est souvent la traduction d'une grandeur physique (pression, vitesse, débit, température, concentration), par un capteur, sous la forme d'un courant ou d'une tension (proportionnelle à la grandeur physique).

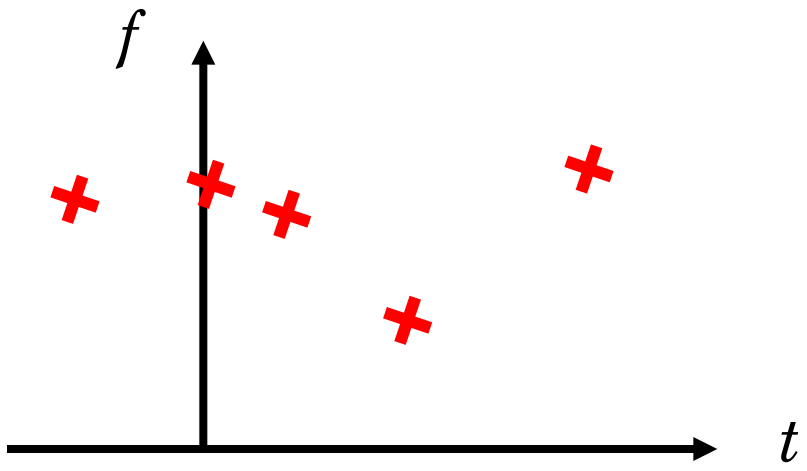
Le signal analogique

Si f(t) est continu, le signal est dit analogique.



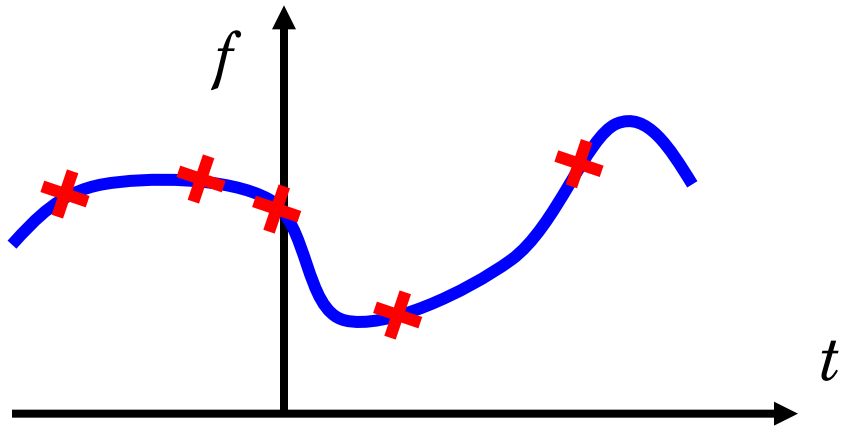
Le signal numérique

Si f(t) est discret, le signal est dit numérique.



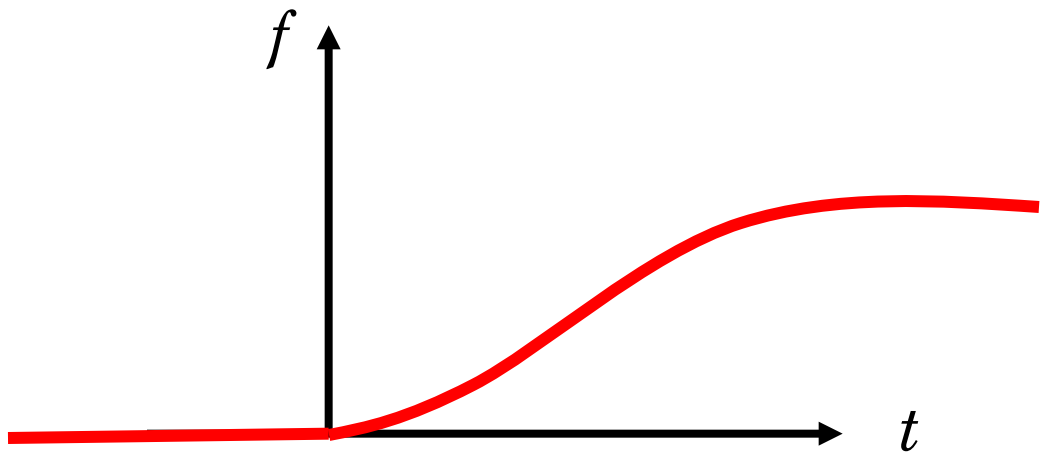
Le signal échantillonné

Si f(t) est continu, mais connu à des temps discrets, le signal est dit échantillonné.



Le signal causal

Si f(t) est nul pour *t* négatif, le signal est dit causal

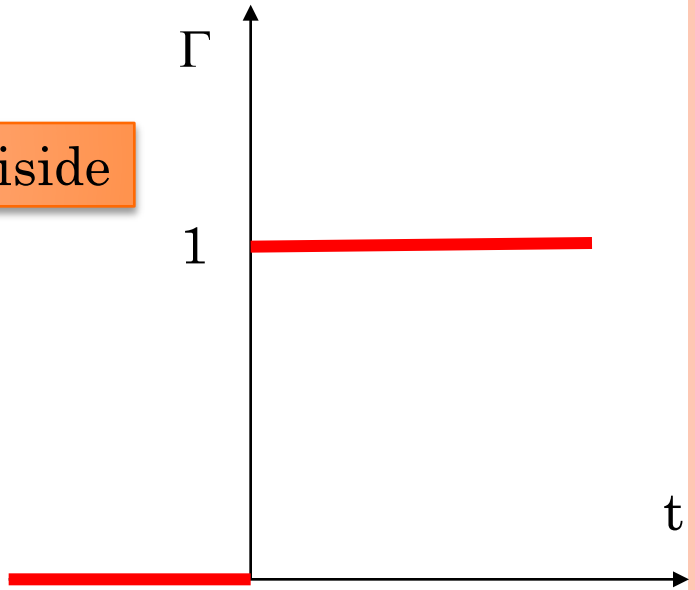


II. Les signaux de base

II-1 - L'ÉCHELON DE POSITION UNITAIRE

Ce signal est encore appelé fonction d'Heaviside

$$u(t)=\Gamma(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<0\\ 1 \text{ si } t>0\end{cases}$$



La fonction d'Heaviside n'est pas définie pour t=0 . On sait seulement que:

$$\begin{cases}\Gamma(0^-)=0\\ \Gamma(0^+)=1\end{cases}$$

Cette fonction n'est pas physiquement réalisable. Les systèmes physiques ont un temps de réponse.

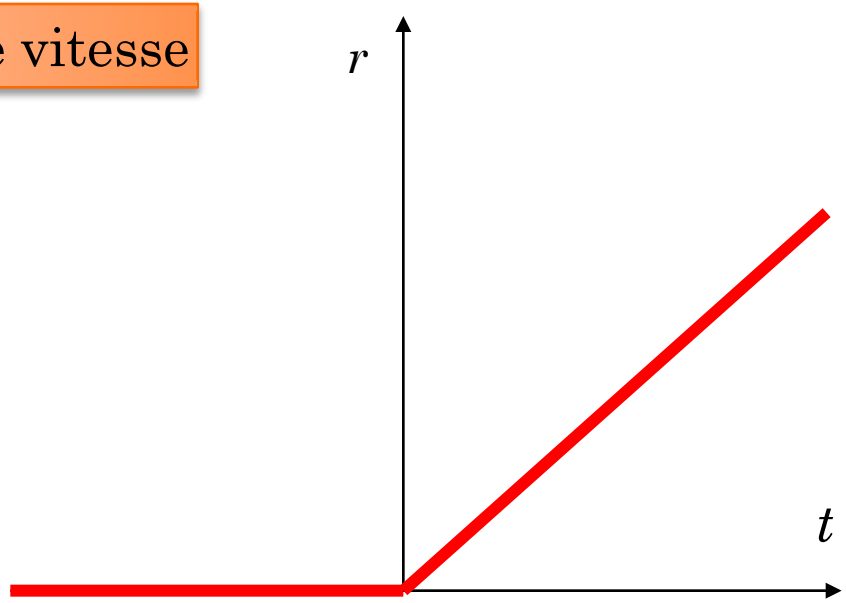
De façon générale, un échelon de position est défini par

$$f(t)=k\Gamma(t)$$

II.2 - L'ÉCHELON DE VITESSE UNITAIRE

Ce signal est aussi appelé échelon de vitesse

$$r(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t\le 0\\ t \text{ si } t\ge 0\end{cases}$$



De façon générale on aura

$$r(t)=at$$

Remarque *: on peut aussi définir un échelon d'accélération par :*

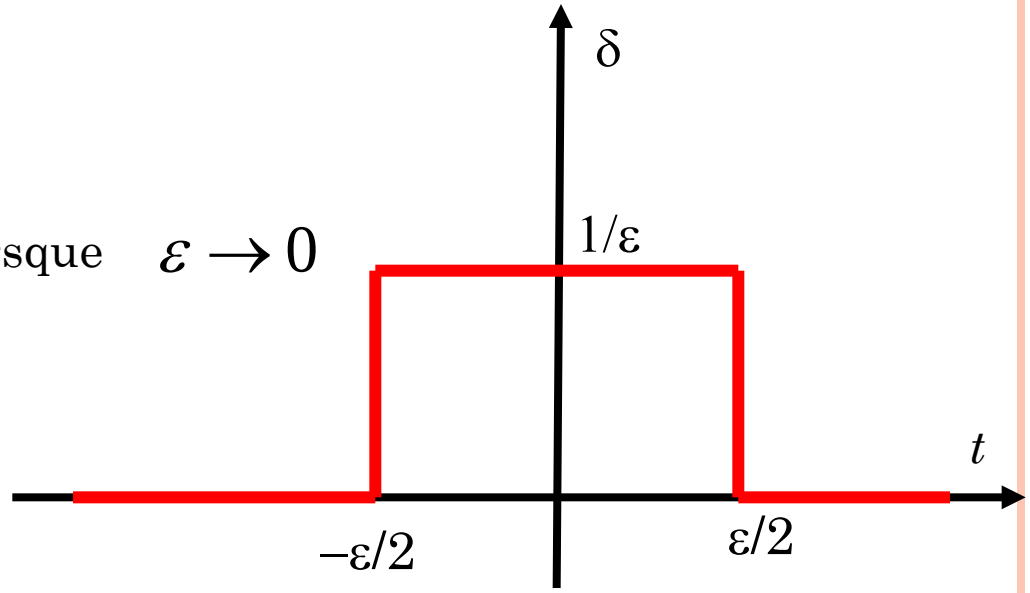
$$\gamma(t)=at^2$$

II.3 - L'IMPULSION UNITAIRE

Ce signal est aussi appelé impulsion de Dirac (Paul Adrien Maurice Dirac ;1902 – 1984; Physicien et Mathématicien anglais.)

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & pour \quad t\le -\dfrac{\varepsilon}{2}\\ \dfrac{1}{\varepsilon} & pour \quad -\dfrac{\varepsilon}{2}\le t\le \dfrac{\varepsilon}{2}\\ 0 & pour \quad t\ge \dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$

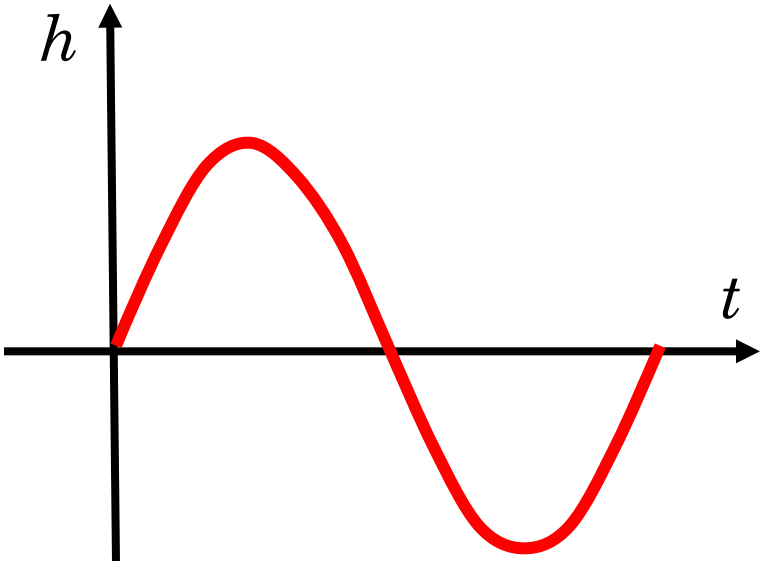


$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

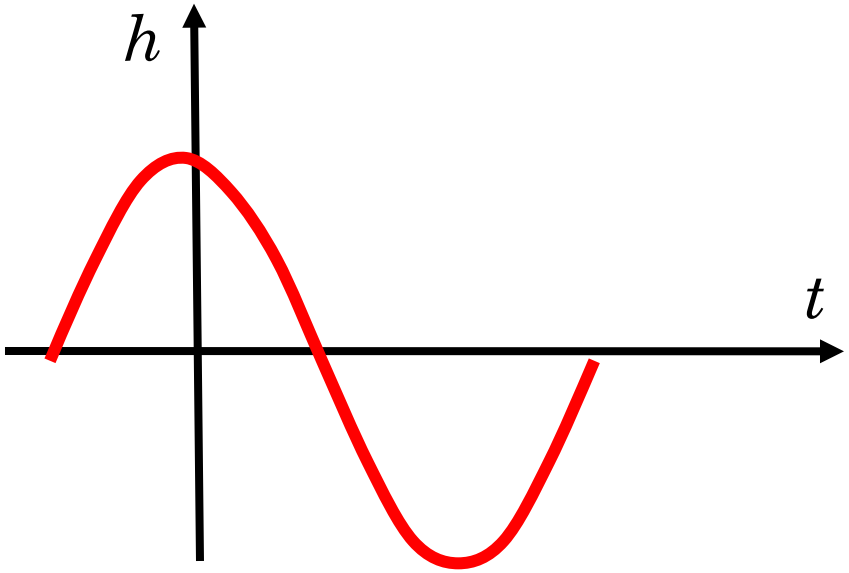
L'impulsion de Dirac est dite unitaire car, son intégral (appelée poids ou mesure) est égal à un.

II.4 - Le signal harmonique

Le signal harmonique est la fonction sinusoïdale qui peut être représentée par un sinus ou par un cosinus



$$h(t) = H_m \sin \omega t$$



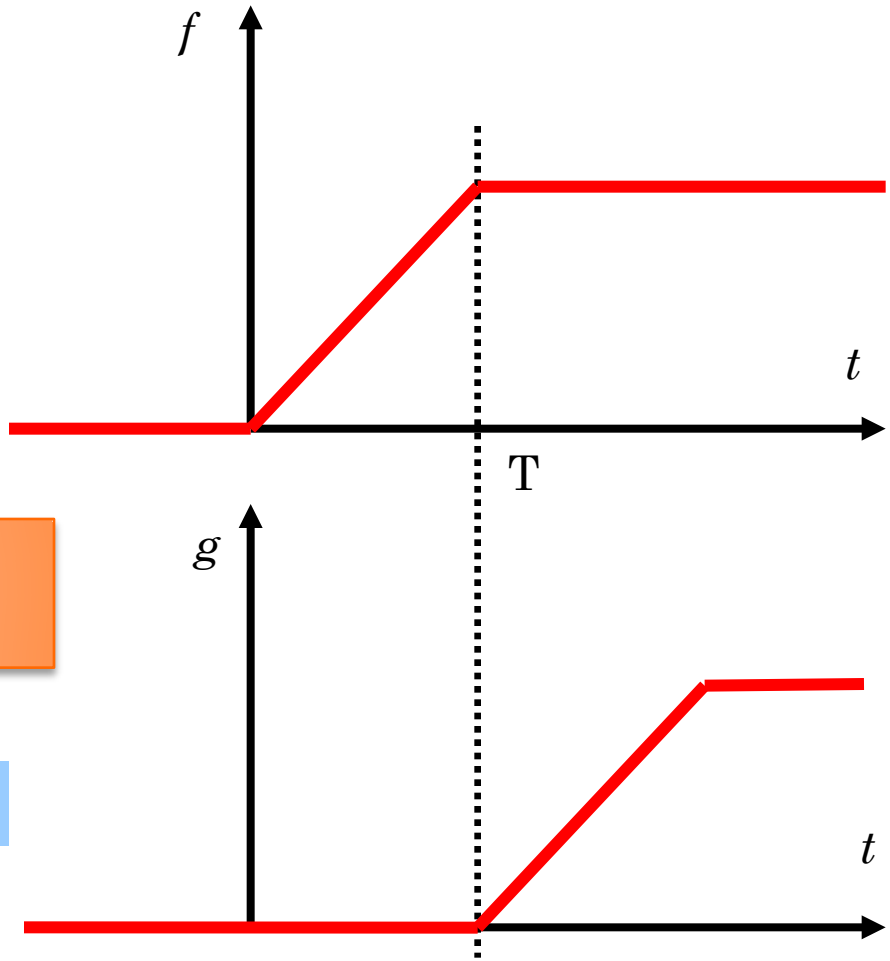
$$h(t) = H_m \cos \omega t$$

II.5 - Le signal causal retardé

Soit f(t) un signal causal

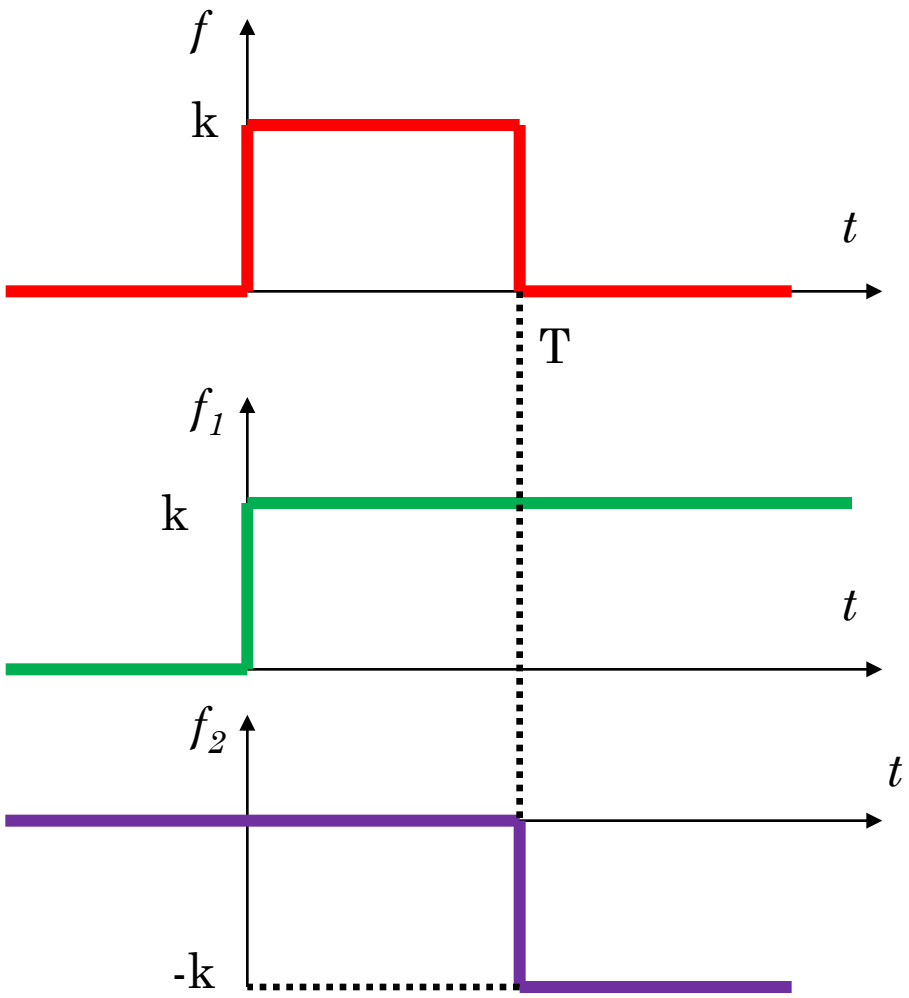
Soit g(t) = f(t-T) avec T un réel positif

g(t) est un signal causal retardé



II.5 - Le signal causal retardé : exemple

Les signaux causals et les signaux retardés permettent de créer des signaux de forme quelconque.



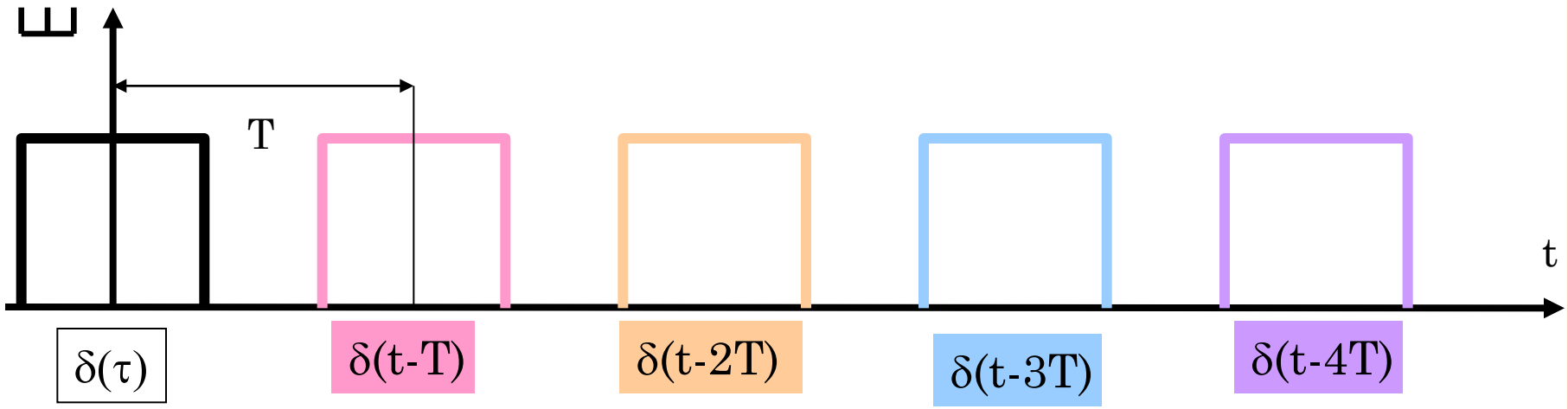
$$f_1(t) = k\Gamma(t)$$

$$f_2(t) = -k\Gamma(t-T)$$

$$f(t) = k[\Gamma(t) - \Gamma(t-T)]$$

II.6 - Le peigne de Dirac

Le peigne de Dirac est une succession d'impulsion retardées les unes par rapport aux autres d'une durée T



$$\amalg(t) = \sum_n \delta(t - nT)$$

II.7 - Le produit de convolution

Soient f et g deux signaux. Le produit de convolution est défini par :

$$f*g : \quad t \longrightarrow \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

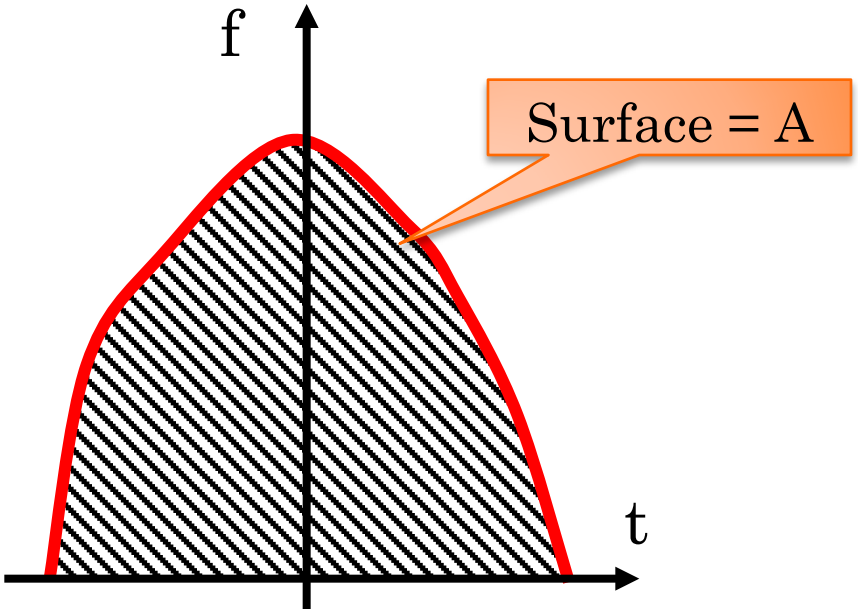
Le produit de convolution est commutatif

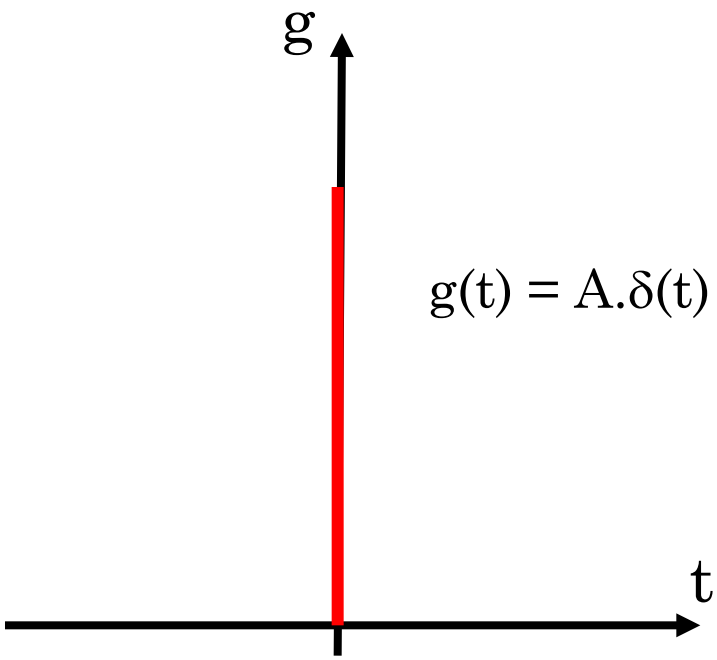
δ(t) est l'élément neutre pour le produit de convolution

La convolution d'un signal avec un Dirac retardé retarde le signal.

II.8 - L'IMPULSION QUELCONQUE

Une impulsion brève de forme quelconque et de surface A peut être approchée par une impulsion de Dirac de mesure A, du point de vue de ses effets.





III. Les systèmes

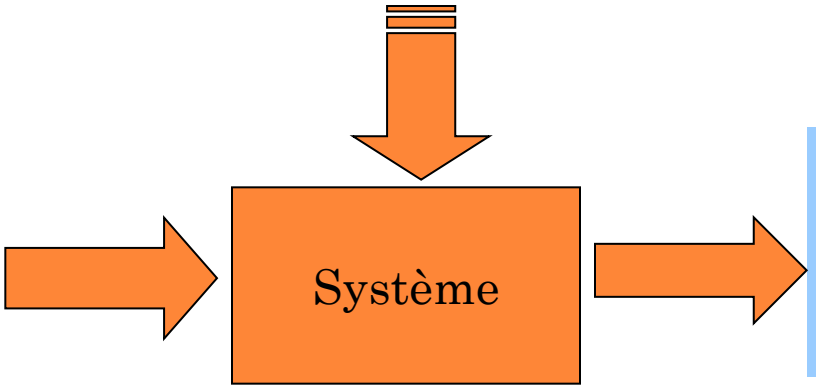
III.1-Définition

Un système est un ensemble fonctionnel, circonscrit dans une enveloppe (boite noire). Il est constitué d'un groupement d'éléments organisés de façon à exécuter, sur ordre, une fonction déterminée.

Le système communique avec l'extérieur à l'aide de signaux.

Les entrées de perturbation qui sont subies sans qu'on puisse agir sur

Les entrées de commande qui permettent d'agir sur le système et de le piloter vers un but spécifié.



Les signaux de sortie permettent d'observer son comportement.

III.2 - Classification des systèmes

Système asservi :Un système asservi est un système qui est doué d'une capacité de décision. C'est un système automatique.

Système causal : Un système causal est un système qui ne répond pas avant d'être excité. la cause précède toujours l'effet. On parle de système non anticipatif. Si l'entrée est nul pour , la sortie l'est aussi.

Système stable :La sortie d'un système stable est bornée si l'entrée l'est. Excité par une impulsion de Dirac, un système stable, partant du repos, voit sa sortie revenir à zéro après un certain temps.

Système à temps invariant : Un décalage temporel sur l'entrée d'un système à temps invariant décale la sortie d'autant.

Système linéaire : Un système linéaire satisfait au principe de superposition : La réponse à la somme pondérée de deux excitations est la somme pondérée des réponses à chaque excitation prise séparément.

la stabilité. Un système est stable si la sortie tend vers une valeur finie. Si elle oscille, l'asservissement est instable.

IV. La boucle d'asservissement

IV.1 - Problématique

Pourquoi asservir un système ?

Améliorer la précision statique et dynamique

Améliorer la stabilité

Diminuer l'influence des perturbations

Diminuer l'influence des variations des paramètres du système

IV.2 - DÉFINITION

Une boucle d'asservissement est élaborée pour contrôler, surveiller ou maintenir une grandeur physique (pression, niveau, vitesse, concentration, température, débit). Cette grandeur sera toujours comparée à une valeur de consigne.

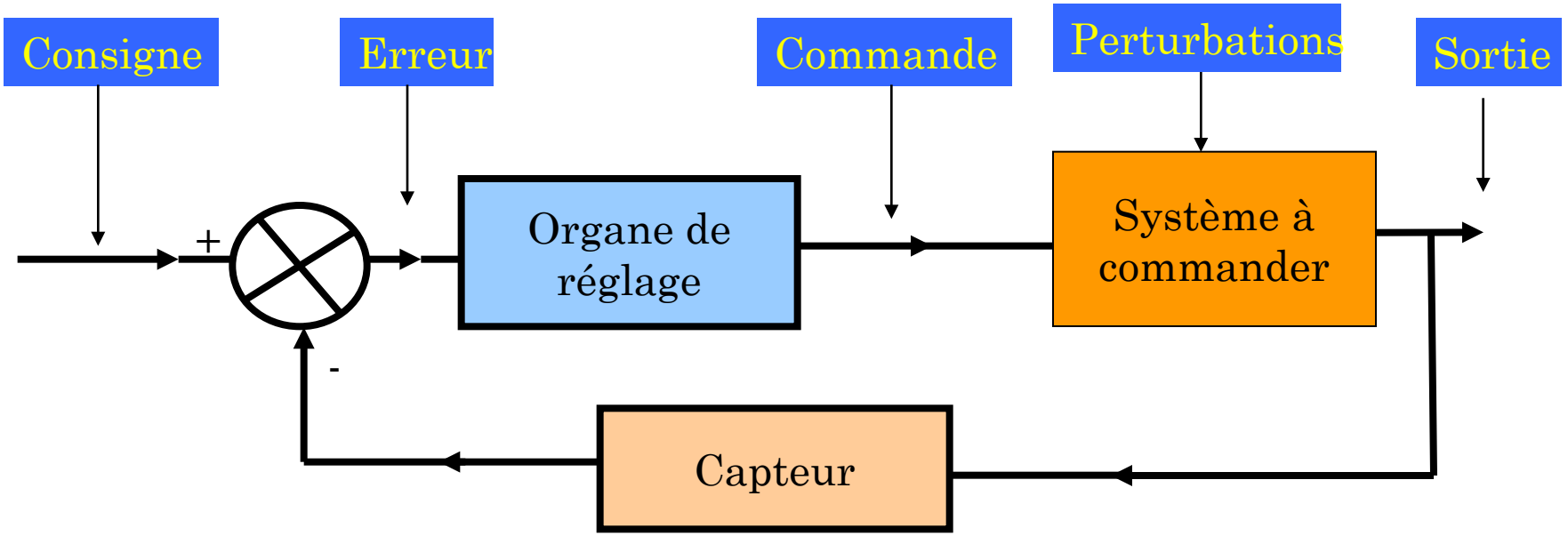
Une boucle d'asservissement est composée des éléments suivants :

Le capteur : Il mesure la grandeur à contrôler et la convertit en un signal électrique qu'il transmet à un organe de comparaison (thermomètre, tachymètre, manomètre, voltmètre, ampèremètre, etc.).

Le comparateur : Il compare le signal reçu au signal de consigne. Le résultat de la comparaison (erreur) est transmit à un organe de réglage (comparateur à amplificateur opérationnel).

Organe de réglage Il élabore le signal de commande (robinet, thermostat).

IV.2 - DÉFINITION



Lorsque la commande est élaborée après observation de la grandeur à contrôler, la commande est dite en boucle fermée, en rétroaction ou en feed-back.

Lorsque la commande est élaborée sans observation de la grandeur à contrôler la commande est élaborée à priori ou en boucle ouverte.

IV.3 - EXEMPLES

V. Réponses d'un système

V.1 - Relation entrée-sortie

Pour un système linéaire, la relation entrée sortie est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t)$$

Plus des conditions initiales

Avec n supérieur ou égal m pour un système physique.

Lorsque le système part du repos, toutes les conditions initiales sont nulles.

V.2 - Définitions

La solution de cette équation constitue la réponse du système.

La réponse libre (solution de l'équation sans second membre). Cette réponse caractérise le régime transitoire.

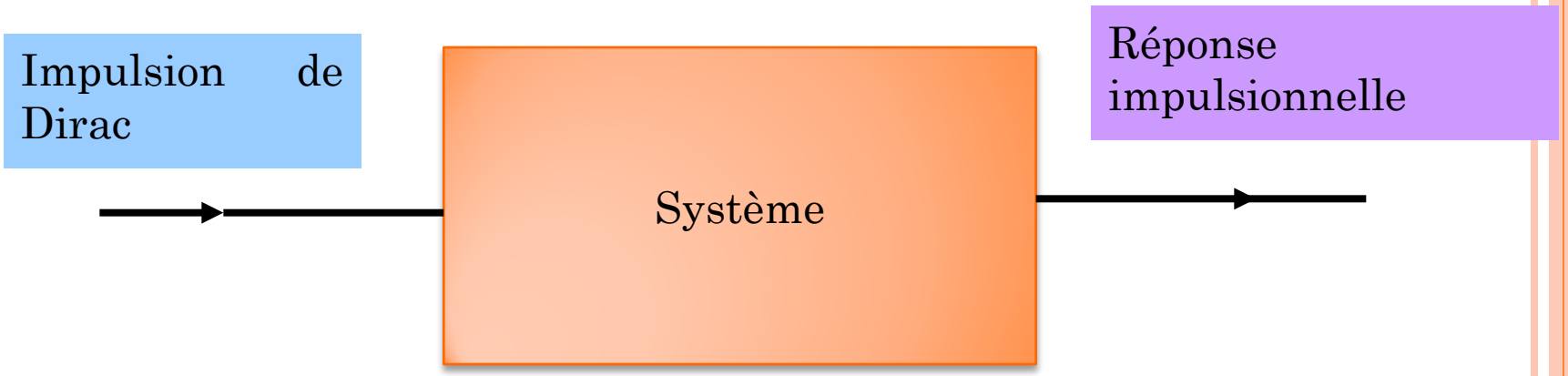
La réponse forcée (solution particulière de l'équation) qui est de même nature que l'entrée. Cette réponse caractérise le régime permanent.

si le système est stable, la réponse libre s'évanouit au bout d'un temps plus ou moins long.

V.2 - DÉFINITIONS

Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle h(t) est la réponse du système à l'impulsion de Dirac.

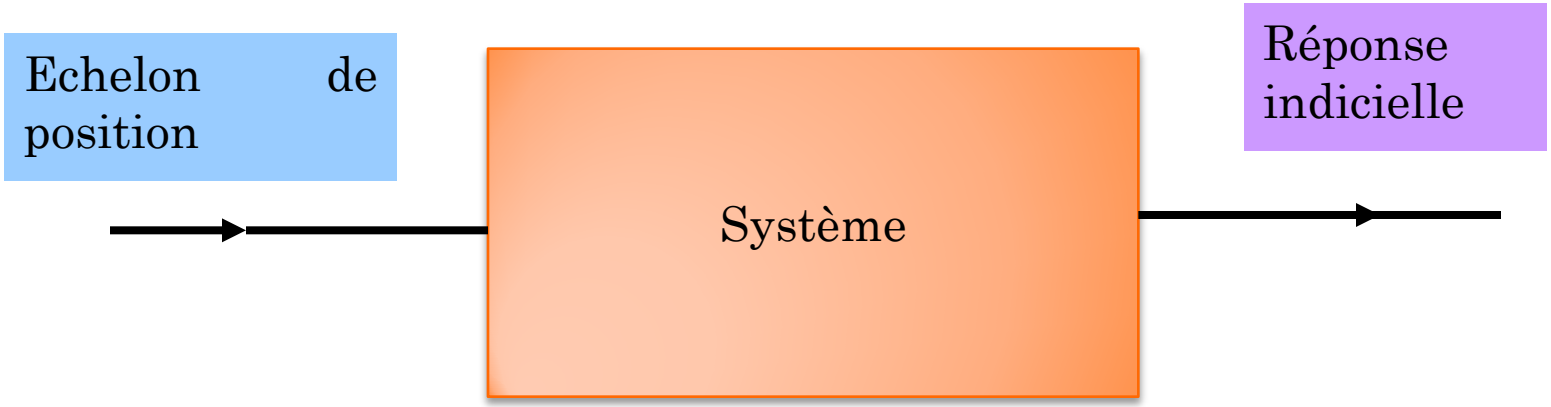


h(t) est la solution de l'équation différentielle qui caractérise le système

V.2 - Définitions

Réponse indicielle

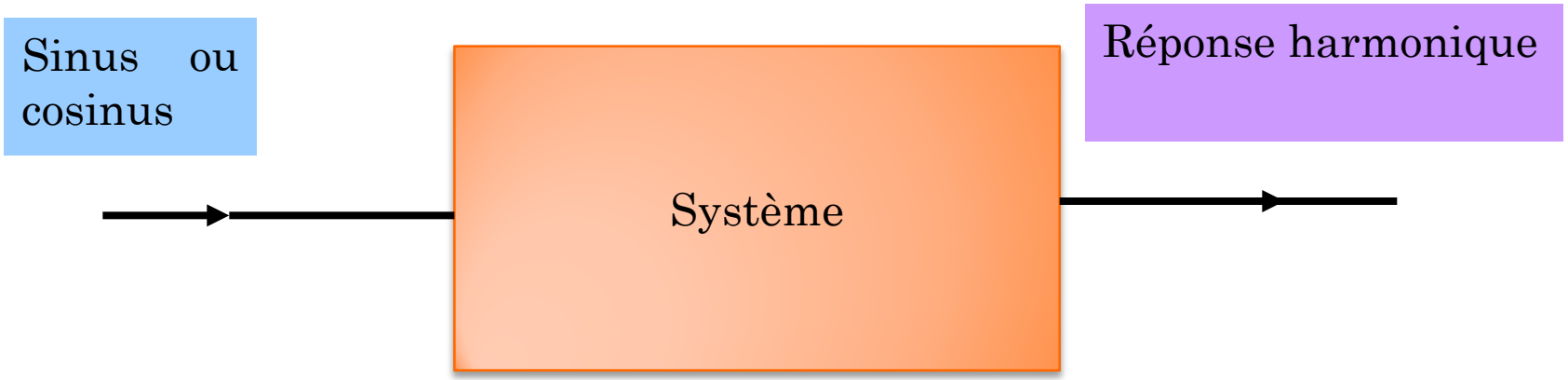
La réponse indicielle d'un système est la réponse du système à un échelon de position.



V.2 - DÉFINITIONS

Réponse harmonique

La réponse harmonique d'un système est la réponse forcée du système à une entrée sinusoïdale. On attend suffisamment longtemps pour le régime transitoire soit éteint.



V.2 - DÉFINITIONS

Réponse à une entrée quelconque

La réponse [y(t)] à une entrée [u(t)] est le produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle du système.

$$y = u * h$$

$$y(t) = \int_0^{+\infty} u(x)h(t-x)dx$$

La réponse impulsionnelle est une caractéristique du système.

VI. Performances d'un système

VI.1 - DÉFINITION

Pour étudier un système asservis, on le soumet à deux types de signaux.

Les signaux non périodiques permettent d'étudier le régime transitoire.

Les signaux périodiques permettent d'étudier le régime permanent.

VI.2 - En régime transitoire

La rapidité

Pour apprécier la rapidité, on définit le temps de monté *tm* et le temps de réponse *tr*. On les détermine en exploitant la réponse indicielle.

Le temps de réponse à n % exprime le temps mis par le processus pour atteindre sa valeur finale à n % près et y rester. On admet qu'au moment ou le signal entre dans cette fourchette, le régime transitoire est terminé. Habituellement, on utilise le temps de réponse à 5%.

Le temps de monté est le temps nécessaire pour passer de 10 à 90% de la valeur finale.

VI.2 - En régime transitoire

L'amortissement

On caractérise le degré d'amortissement d'un régime transitoire par les dépassements successifs. Le premier dépassement est appelé rebondissement. Il est définit par :

$$D\% = 100\frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$$

On définit également le temps de pic tp qui correspond au temps du premier maximum de la réponse indicielle.

VI.3 – EN RÉGIME PERMANANT

La stabilité

Un système stable annule l'effet des perturbations. En effet, si l'entrée est nulle, la sortie doit l'être quelque soient les perturbations.

La stabilité des systèmes fera l'objet d'un développement.

VI.3 – EN RÉGIME PERMANANT

La précision

L'erreur est la principale caractéristique de la précision d'un système. On soumet le système à une entrée et on attend suffisamment longtemps pour voir s'il suit la consigne.

$$E = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$$

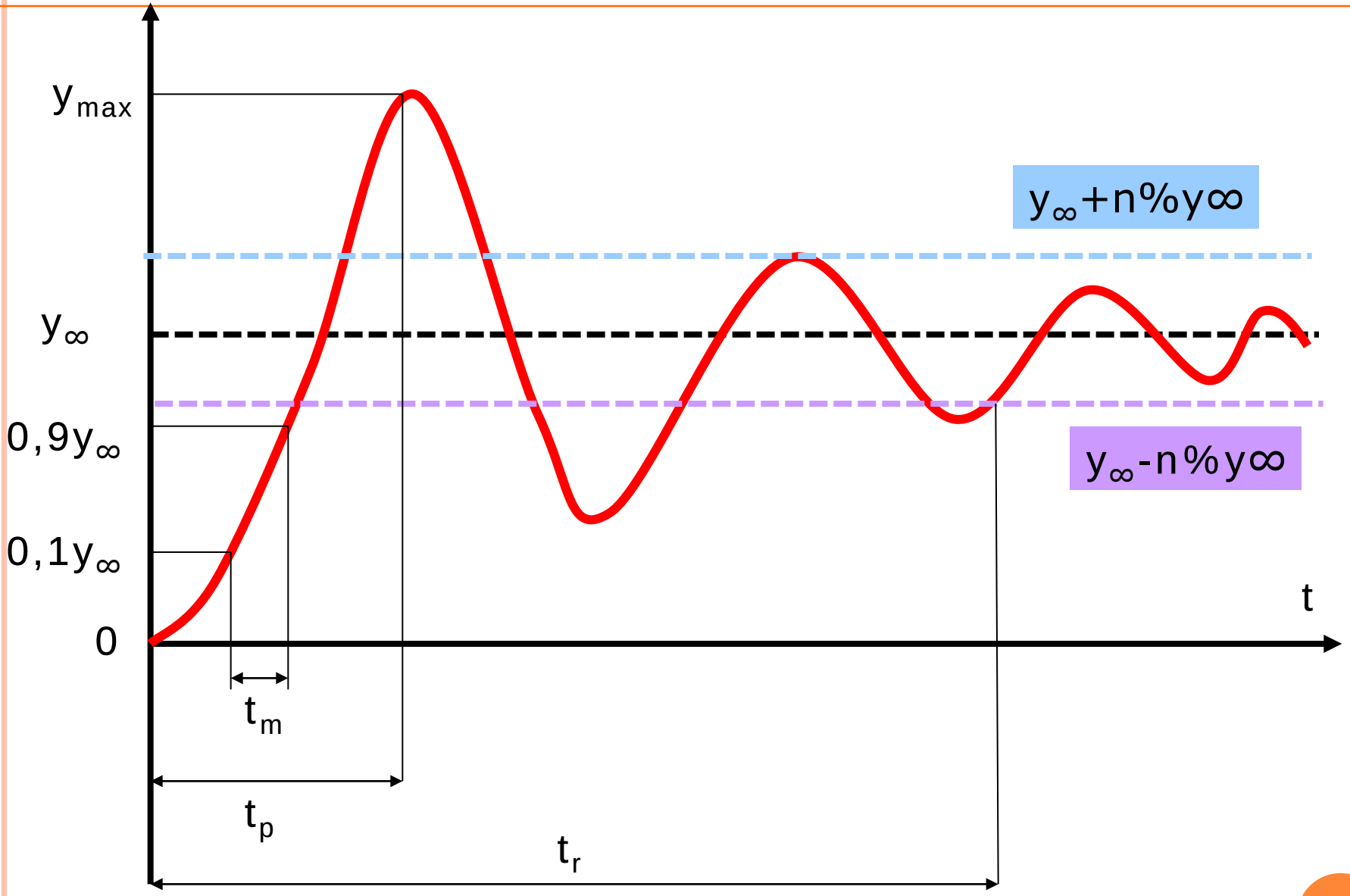
Erreur de position : erreur à une entrée en échelon.

Erreur de traînage : erreur à une entrée en rampe.

Erreur statique :

Erreur dynamique :

VI. 4 - RESUMÉ


y_{max}
y_∞
$0,9y_\infty$
$0,1y_\infty$
0
$y_\infty+n\%y\infty$
$y_\infty-n\%y\infty$
t
t_m
t_p
t_r

VII. Rappels de maths