

CHAPITRE III : MODÈLE D'UN PROCESSUS



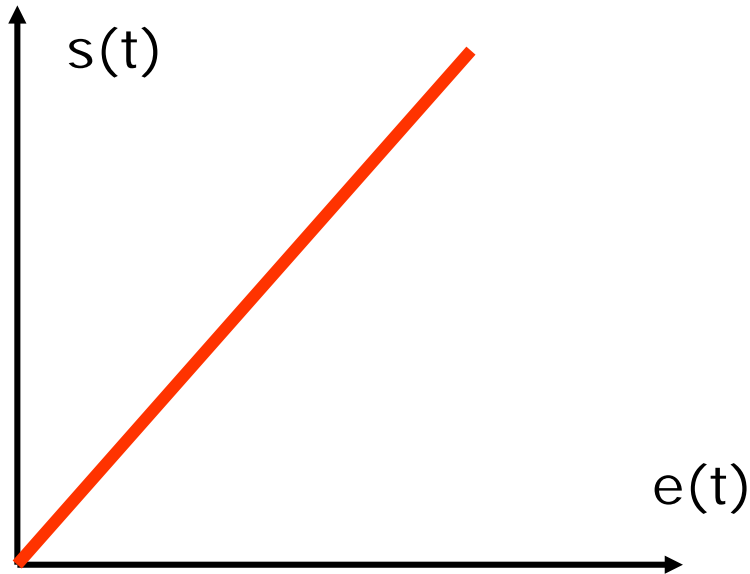
1

I. LINÉARISATION D'UN SYSTÈME



2

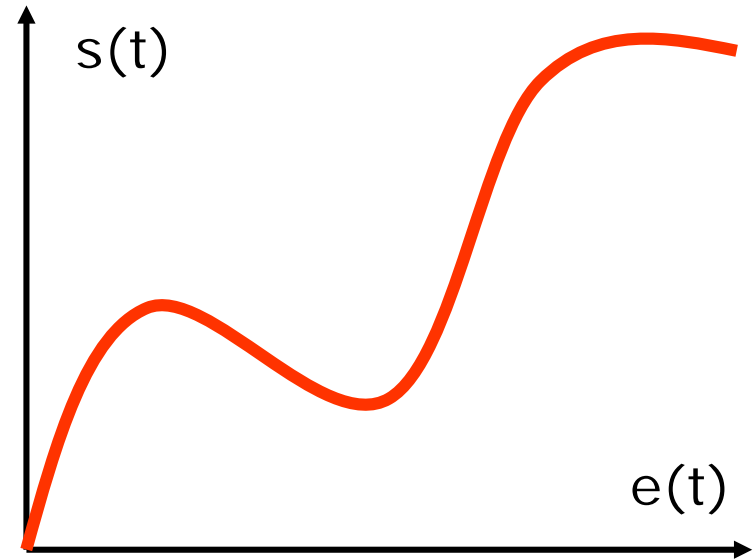
I.1 – SYSTÈME LINÉAIRE ET SYSTÈME NON LINÉAIRE



Systeme linéaire

Équation différentielle linéaire

Résolution simple

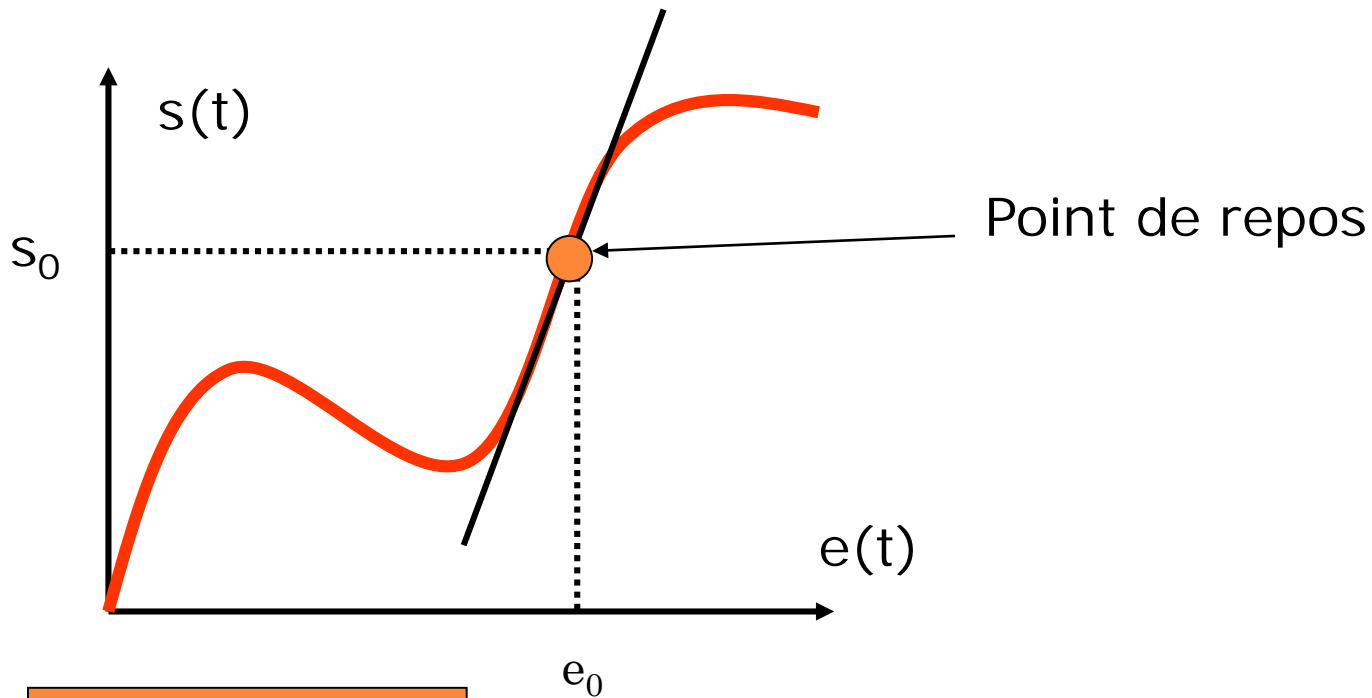


Systeme non linéaire

Équation différentielle non linéaire

Résolution difficile

I.2 – LINÉARISATION AUTOUR D'UN POINT



$$x = e - e_0$$

$$y = s - s_0$$



Systeme linéaire

II. MODÈLE DU PREMIER ORDRE

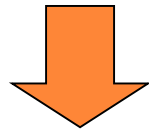
5

II.1 – FONCTION DE TRANSFERT

La relation entre l'entrée et la sortie d'un système du premier ordre de la forme :

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K u(t)$$

T est la constante de temps du système



$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{K}{1 + T P}$$

K est le gain statique

II.2 - RÉPONSE IMPULSIONNELLE

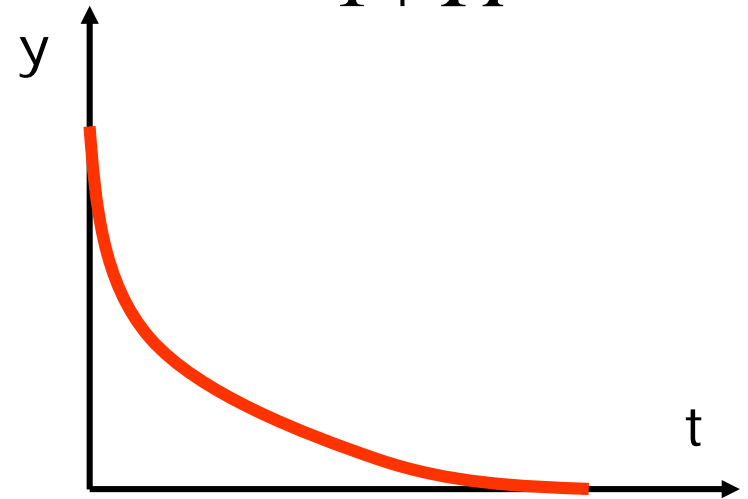
$$u(t) = \delta(t)$$

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



$$U(P) = 1$$

$$Y(P) = \frac{K}{1+TP}$$

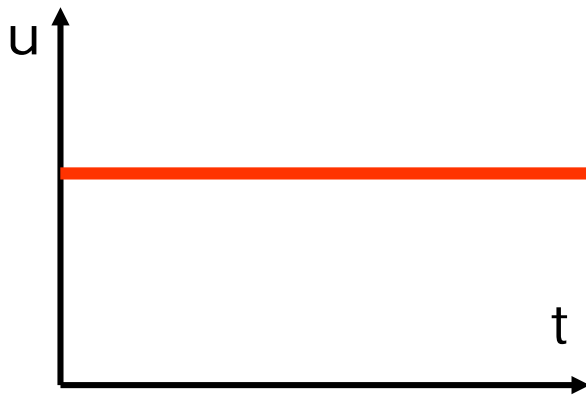


La réponse impulsionnelle est également une impulsion

II.3 - RÉPONSE INDICIELLE

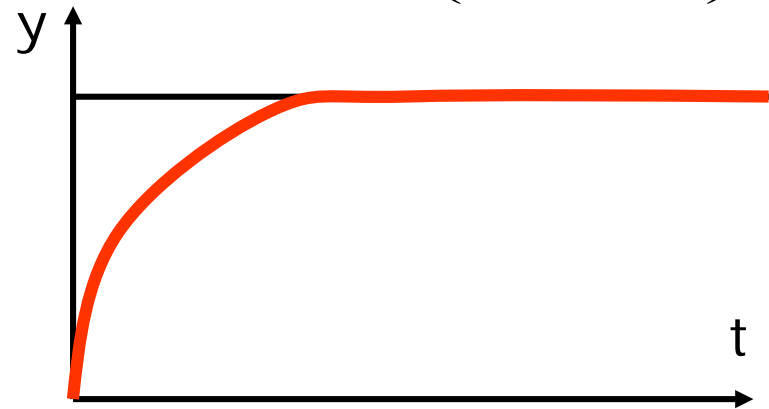
$$u(t) = \Gamma(t)$$

$$U(P) = \frac{1}{P}$$



$$Y(P) = \frac{K}{P(1+TP)}$$

$$y(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$



La réponse à un échelon est également un échelon

$$t_m = T \ln 9$$

$$t_{rn\%} = T \ln \frac{100}{n}$$

II.2 - RÉPONSE À UNE RAMPE

$$u(t) = t$$

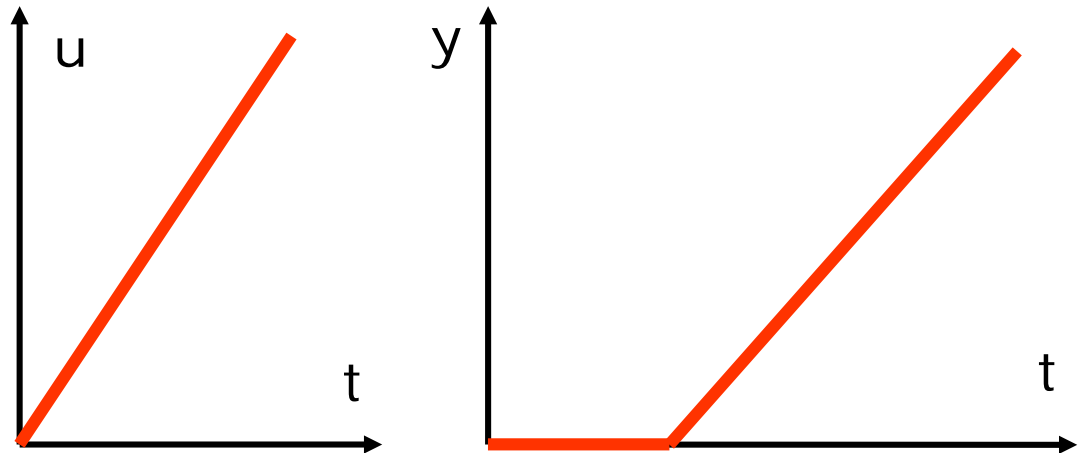
$$U(P) = \frac{1}{P^2}$$

$$Y(P) = \frac{K}{P^2(1+TP)}$$

$$y(t) = K \left(t - T + T e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Au bout de trois constantes de temps la réponse s'écrit

$$y(t) = K(t - T)$$



La réponse à une rampe est aussi une rampe

II.2 - RÉPONSE HARMONIQUE

$$u(t) = U_m \sin(\omega t)$$

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = \arctan(T\omega) \quad Y_m = \frac{K U_m}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

La réponse à une fonction sinusoïdale est aussi une fonction sinusoïdale.

III. MODÈLE DU SECOND ORDRE

11

III.1 – FONCTION DE TRANSFERT

La relation entre l'entrée et la sortie d'un système du second ordre est de la forme :

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

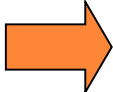
$$K = \frac{b_0}{a_0} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{a_2}{a_0} \quad \frac{2m}{\omega_0} = \frac{a_1}{a_0}$$

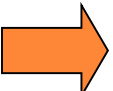
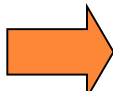
$$\frac{1}{\omega_0^2} y''(t) + \frac{2m}{\omega_0} y'(t) + y(t) = Ku(t)$$

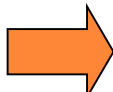
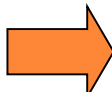
$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} P^2 + \frac{2m}{\omega_0} P + 1} = \frac{K\omega_0^2}{P^2 + 2m\omega_0 P + \omega_0^2}$$

III.1 – FONCTION DE TRANSFERT

$$r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad \Delta' = \omega_0^2 (m^2 - 1)$$

Si $\Delta > 0$  $m > 1$  Second ordre apériodique

Si $\Delta = 0$  $m = 1$  Second ordre apériodique critique

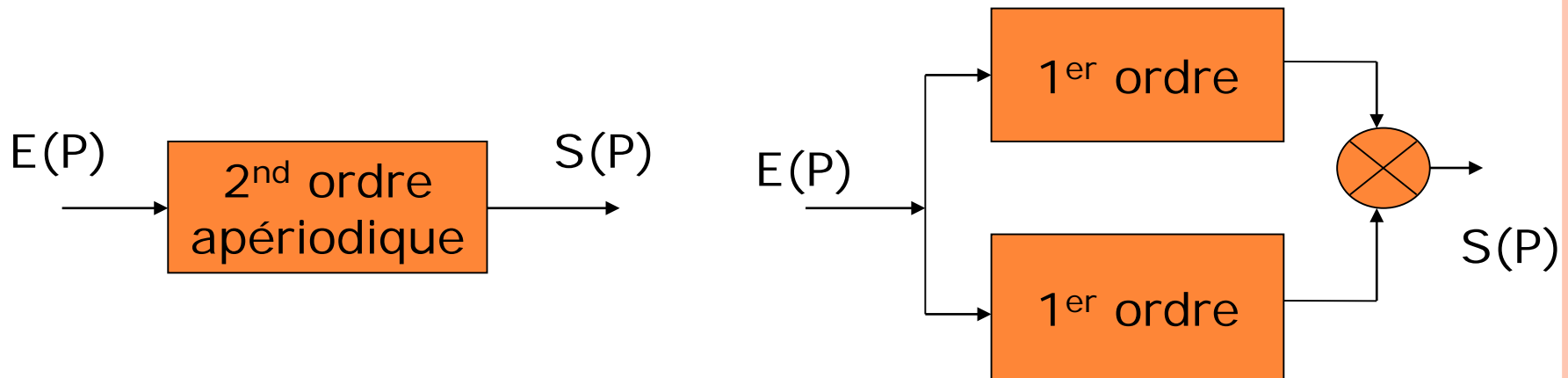
Si $\Delta < 0$  $m < 1$  Second ordre pseudo périodique ou résonnant

III.1 - SECOND ORDRE APÉRIODIQUE

$$H(P) = \frac{K}{(P - p_1)(P - p_2)} = \frac{A}{P - p_1} + \frac{B}{P - p_2}$$

La fonction de transfert admet deux pôles réels et distincts

$$p_1 = -m\omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \quad p_2 = -m\omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$$



SECOND ORDRE APÉRIODIQUE CRITIQUE

$$m=1 \quad \longrightarrow \quad H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{\omega_0^2 K}{(P + \omega_0)^2}$$

La fonction de transfert admet deux pôles réels confondus.

$$p_{1,2} = -m\omega_0$$

Réponse impulsionnelle

$$U(P) = 1$$

$$Y(P) = \frac{\omega_0^2 K}{(P + \omega_0)^2}$$

$$y(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

Réponse indicielle

$$U(P) = \frac{1}{P} \quad Y(P) = \frac{\omega_0^2 K}{P(P + \omega_0)^2} = K \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(P + \omega_0)^2} \right)$$

$$y(t) = K \left[1 - e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t) \right]$$

Réponse à une rampe

SECOND ORDRE PSEUDO PÉRIODIQUE OU RÉSONNANT

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{K\omega_0^2}{P^2 + 2m\omega_0 P + \omega_0^2} \quad \text{Avec } m < 1$$

La fonction de transfert admet deux pôles complexes et conjugués. Soient

$$p_1 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2} \quad p_2 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

Il n'est plus possible de faire apparaître deux systèmes du premier ordre. Il faut étudier le système globalement.

SECOND ORDRE PSEUDO PÉRIODIQUE OU RÉSONNANT

Réponse impulsionnelle

$$U(P) = 1 \quad Y(P) = K \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \frac{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}{(P+m\omega_0)^2 + \left(\omega_0 \sqrt{1-m^2}\right)^2}$$

$$y(t) = K \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t\right)$$



SECOND ORDRE PSEUDO PÉRIODIQUE OU RÉSONNANT

Réponse indicielle

$$U(P) = \frac{1}{P}$$

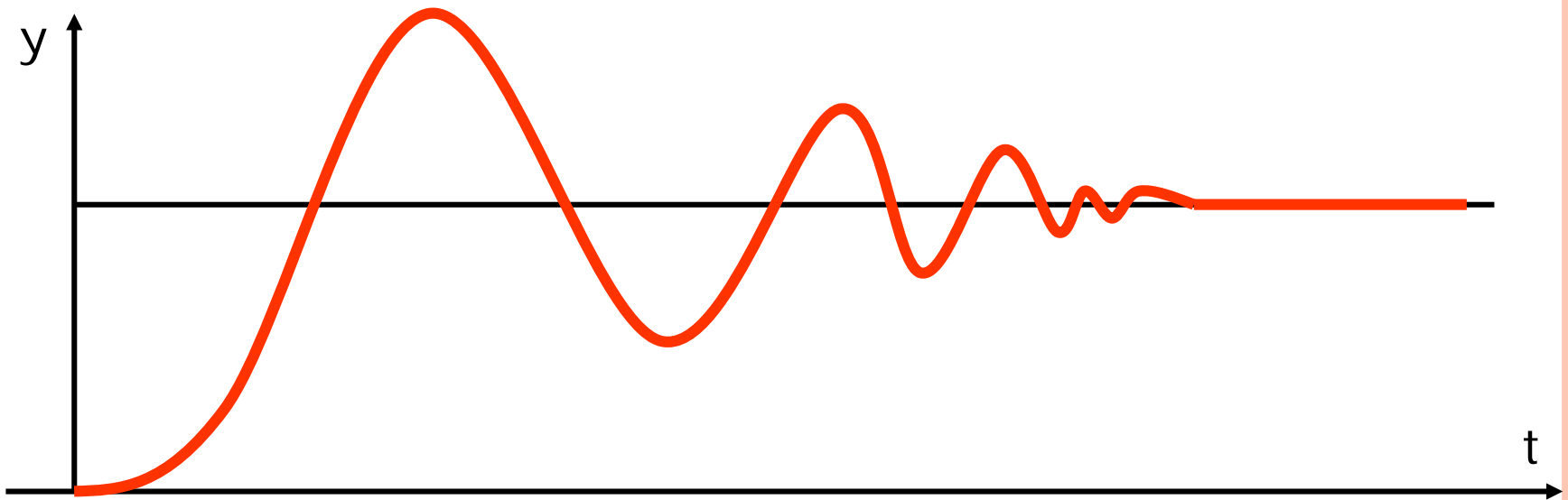
$$Y(P) = \frac{K}{P} - \frac{K}{\sqrt{1-m^2}} \left[\sqrt{1-m^2} \frac{P+m\omega_0}{(P+m\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-m^2})^2} + m \frac{\omega_0\sqrt{1-m^2}}{(P+m\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-m^2})^2} \right]$$

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t + \varphi\right) \right]$$

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$

SECOND ORDRE PSEUDO PÉRIODIQUE OU RÉSONNANT

Réponse indicielle



$$t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} (\pi - \arccos m)$$

$$t_{rn\%} = \frac{1}{m\omega_0} \ln \frac{100}{n}$$

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

$$D\% = 100e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

SECOND ORDRE PSEUDO PÉRIODIQUE OU RÉSONNANT

Réponse à une rampe

SECOND ORDRE PSEUDO PÉRIODIQUE OU RÉSONNANT

Réponse harmonique

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

La réponse harmonique est aussi une fonction sinusoidale

III. MODÈLE D'ORDRE N

26

Réponse harmonique

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$Y_m = \frac{K \omega_0^2 U_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4m^2 \omega^2 \omega_0^2}} \quad \tan \varphi = -\frac{2m\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La réponse harmonique est aussi une fonction sinusoidale