

CHAPITRE II: APPROCHE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES



1



I. LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Pierre Simon De LAPLACE (1749 – 1827)
Cofondateur de l'Ecole Polytechnique

2

PIERRE-SIMON DE LAPLACE



Naissance	<u>23 mars 1749</u> <u>Beaumont-en-Auge</u> <u>(France)</u>
Décès	<u>5 mars 1827</u> (à 77 ans) <u>Paris (France)</u>
Nationalité	<u>Française</u>
Champs	<u>Mathématicien,</u> <u>astronome, physicien</u>
Institutions	<u>Ecole Militaire</u>
Diplôme	<u>Université de Caen</u>
Renommé pour	<u>Transformation de</u> <u>Laplace</u> <u>Opérateur laplacien</u> <u>Équation de Laplace</u> Travail sur la <u>mécanique</u> <u>céleste</u>
Distinctions	<u>Académie des sciences,</u> <u>Académie française</u>



1. DÉFINITION

Soit D l'ensemble des fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.

$$f \in D \Rightarrow \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) \end{array}$$

Soit A l'ensemble des fonctions de la variable complexe à valeurs complexes.

$$F \in A \Rightarrow \begin{array}{l} F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ P \mapsto F(P) \end{array} \quad \text{On posera} \quad P = \sigma + j\omega$$

Remarque : P est une pulsation complexe dont la partie imaginaire exprime l'aspect fréquentiel du signal.

La transformée de Laplace est une application de D vers A .

$$L: \begin{array}{l} D \rightarrow A \\ f(t) \mapsto F(P) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-Pt} dt \end{array}$$



1. DÉFINITION : EXEMPLE

Soit $f(t) = e^{at}$ Déterminez $F(P)$ pour $t > 0$

$$F(P) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-Pt} dt = \frac{1}{P-a} \left[e^{(a-\sigma)t} e^{-j\omega t} \right]_0^{+\infty}$$

si $a - \sigma < 0$ alors $F(P) = \frac{1}{P-a}$

2. PROPRIÉTÉS

Linéarité

Soient a et b deux réels. Soient deux signaux f et g tels que :

$$L[f] = F \quad L[g] = G \quad \longrightarrow \quad L[af + bg] = aF + bG$$

Théorème du retard temporel

Soit $f(t)$ un signal causal et $g(t) = f(t-T)$

$$\text{si } L[f] = F \quad \longrightarrow \quad L[g] = F(P)e^{-TP}$$

Un retard de T dans le temps se traduit par une multiplication par e^{-TP} dans l'espace des fréquences.

2. PROPRIÉTÉS

Théorème du retard tempore

Soit un signal f tel que $L[f] = F$ Cherchons la transformée de $e^{at} f(t)$

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{at} e^{-Pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(P-a)t} dt = F(P-a)$$

Un retard de a dans l'espace des fréquences est dû à une multiplication par e^{at} dans le temps.

Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Soit un signal f tel que $L[f] = F$

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow \infty} P F(P) \qquad f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P F(P)$$



2. PROPRIÉTÉS

Formule de la dérivée

Soit un signal f tel que $L[f] = F$

$$L[f'] = PF(P) - f(0^+)$$

Formule de l'intégrale

Soit un signal f tel que $L[f] = F$

et un signal $g(t)$ tq: $g(t) = \int_0^t f(x) dx$

$g(0)$ est imposé

$$G(P) = \frac{1}{P} F(P) + \frac{1}{P} g(0)$$

Formule de la convolution

Soient deux signaux f et g
tels que :

$$\begin{aligned} L[f] &= F \\ L[g] &= G \end{aligned}$$

$$L[f * g] = F(P).G(P)$$

3. TRANSFORMÉES DES SIGNAUX USUELS

$f(t)$	$F(P)$	$f(t)$	$F(P)$
$\delta(t)$	1	$f^{(n)}(t)$	$P^n F(P) - \sum_{k=0}^{n-1} P^{n-k-1} f^{(k)}(0)$
$\Gamma(t)$	$\frac{1}{P}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{P^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{P + a}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{P}{P^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{P^{n+1}}$		

4. APPLICATIONS

Dans un réseau électrique linéaire, les relations entre entrée et sortie sont des équations intégrales et ou différentielles. La résolution de ces équations est simplifiée grâce à la transformée de Laplace.


Élément	Temporelle	Fréquentielle
Résistance	$v(t) = Ri(t)$	$V(P) = RI(P)$
Inductance	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$V(P) = LPI(P) - Li(0)$
Capacité	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx$	$V(P) = \frac{1}{CP} I(P) + \frac{1}{CP} v(0)$



II. FONCTION DE TRANSFERT

11

1. DÉFINITION

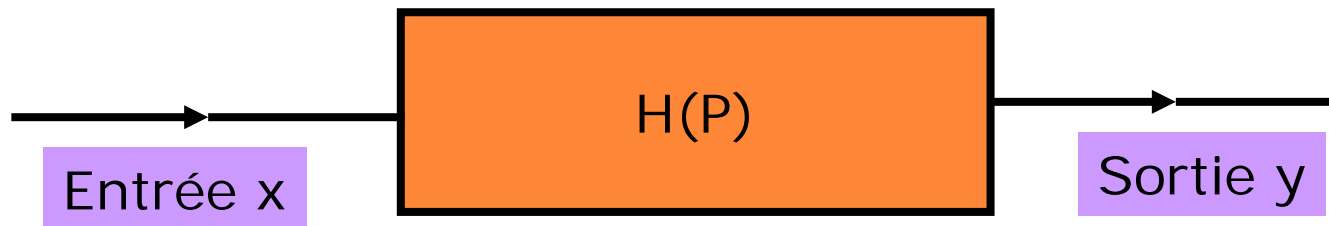
La réponse y d'un système à une excitation x est : $y = h * u$ 
avec h la réponse impulsionnelle

Application de la transformée de Laplace

$$Y(P) = H(P)U(P)$$

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)}$$

$H(P)$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. On l'appelle fonction de transfert ou transmittance du système. On définit aussi la fonction de transfert comme étant le quotient de la sortie sur l'entrée.



2. PÔLES ET ZÉROS D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

la relation entrée sortie est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t) \quad \text{avec} \quad n \geq m$$

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j P^j}{\sum_{i=0}^n a_i P^i} = \frac{K \prod_{j=1}^m (P - z_j)}{P^\alpha \prod_{i=1}^{n-\alpha} (P - p_i)}$$

Les z_j sont les zéros de la fonction de transfert.

Les p_i sont les pôles de la fonction de transfert.

α est l'ordre de multiplicité du pôle à l'origine. il définit le type du système.

3. NOTION DE GAIN

La fonction de transfert d'un système asservi peut se mettre sous la forme :

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)}$$

Pour pouvoir distinguer les qualités de deux systèmes on définit le gain statique, le gain en vitesse et le gain en accélération.

Le gain statique (ou gain de position) $g_p = \lim_{P \rightarrow 0} H(P)$

Le gain en vitesse $g_v = \lim_{P \rightarrow 0} P H(P)$

Le gain en accélération $g_a = \lim_{P \rightarrow 0} P^2 H(P)$

Seuls la stabilité et la précision peuvent être étudiés dans le domaine fréquentiel. La rapidité et l'amortissement sont des paramètres liés au temps.

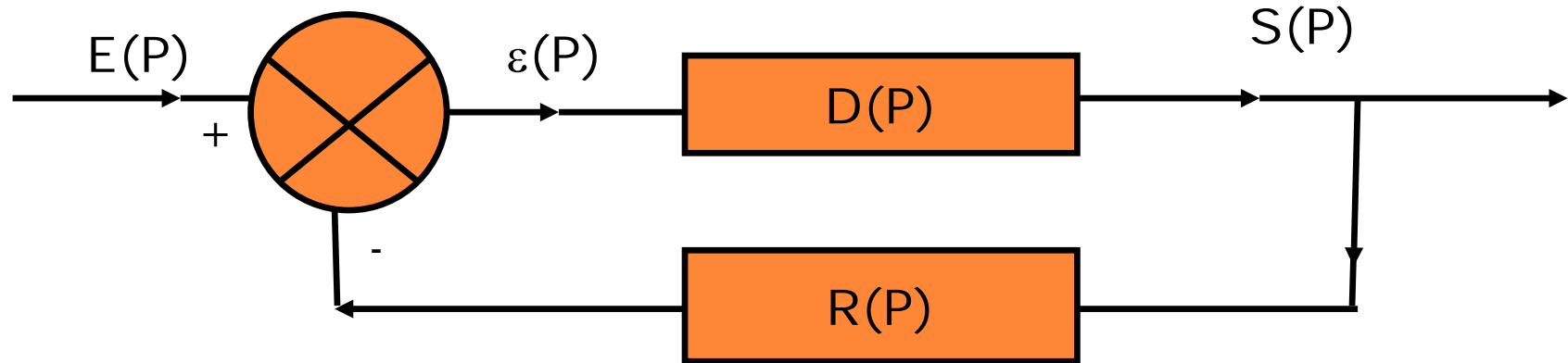
$$E = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P \varepsilon(P)$$

III. ALGÈBRE DES SCHÉMAS FONCTIONNELS

15

1. FORME CANONIQUE D'UN SYSTÈME ASSERVI

Le système à contrôler, l'organe de réglage et l'élément de la chaîne de retour sont remplacés chacun par sa fonction de transfert.



$E(P)$: l'entrée ou la consigne
$S(P)$: la sortie
$\varepsilon(P)$: l'erreur
$D(P)$: fonction de transfert de la chaîne directe
$R(P)$: fonction de transfert de la chaîne de retour
$D(P) \cdot R(P)$: fonction de transfert en boucle ouverte
$S(P)/E(P)$: fonction de transfert en boucle fermée



1. FORME CANONIQUE D'UN SYSTÈME ASSERVI

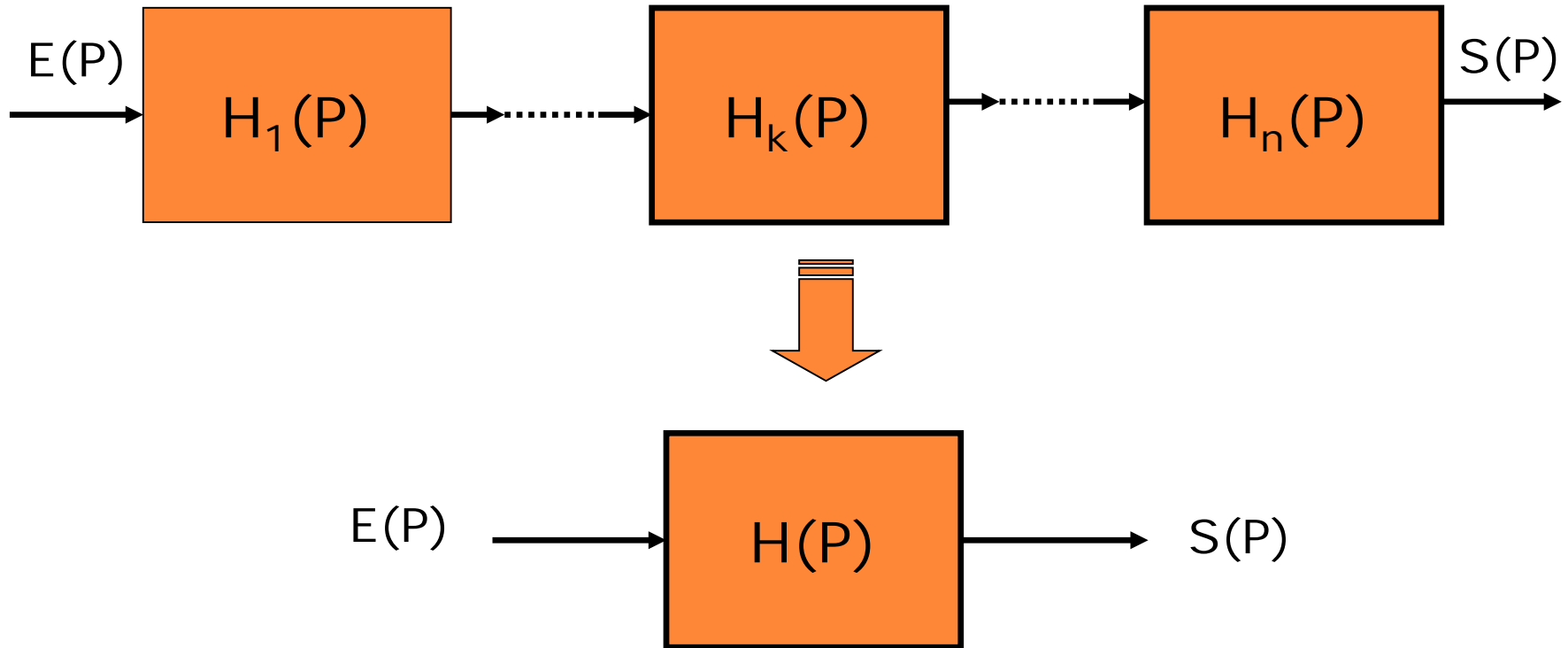
Si la consigne est constante, on a un **régulateur** : il s'agit d'assurer un niveau ou une valeur

Si la consigne vari, on a un **asservissement** : on assure le suivi d'une trajectoire (problème de poursuite)

Si $R(P)=1$: Le système est dit à retour unitaire. On compare la totalité de la grandeur de sortie à la grandeur d'entrée.

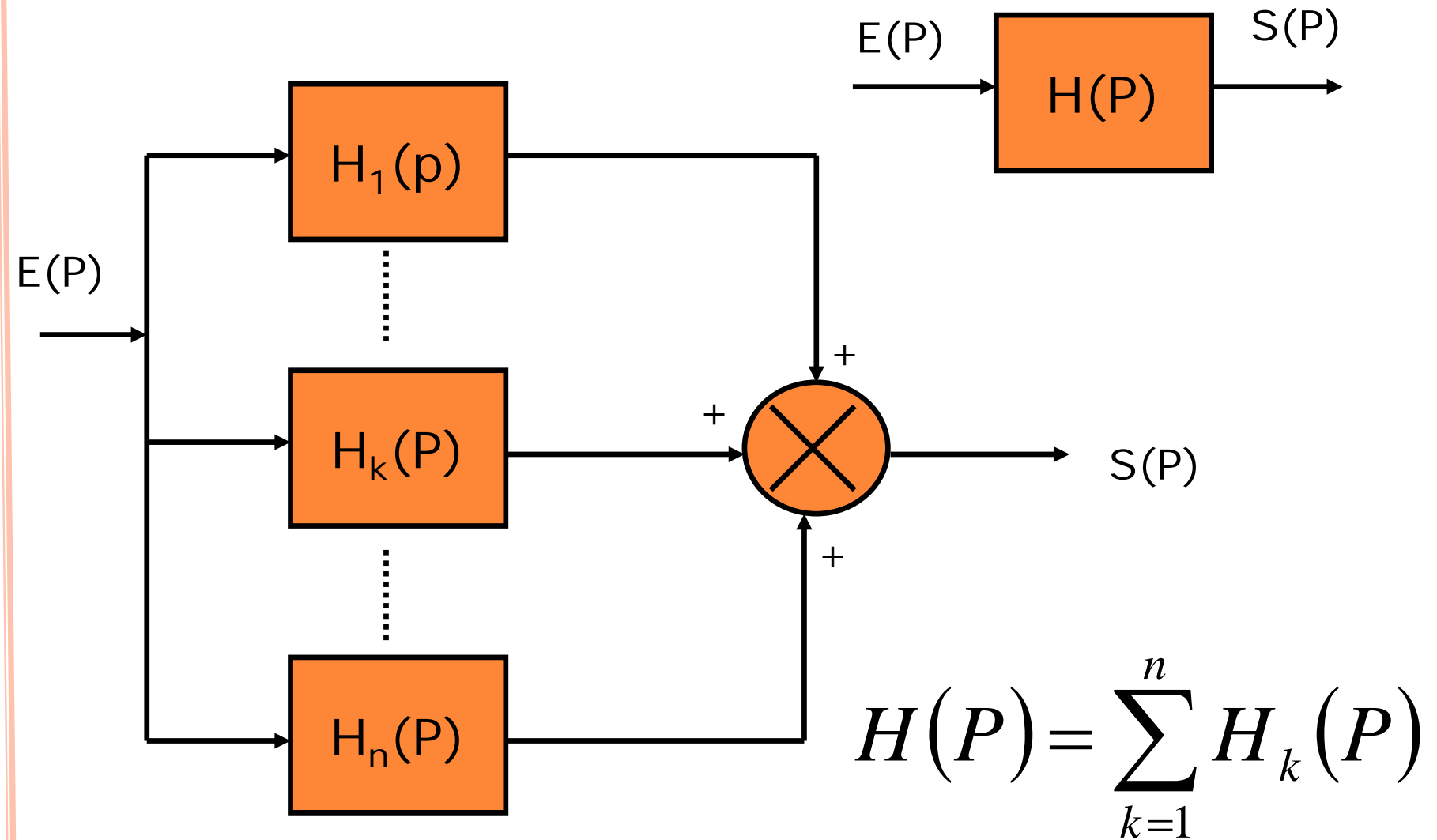
Si $R(P)\neq 1$: le système est à retour non unitaire. L'entrée et la sortie ne sont de même nature.

2. ELÉMENTS EN CASCADES (EN SÉRIE)

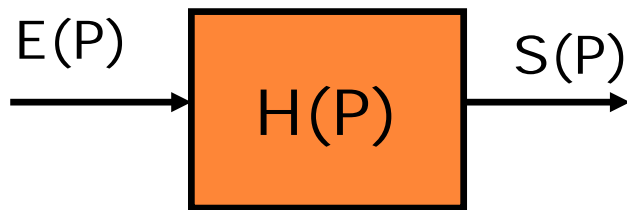
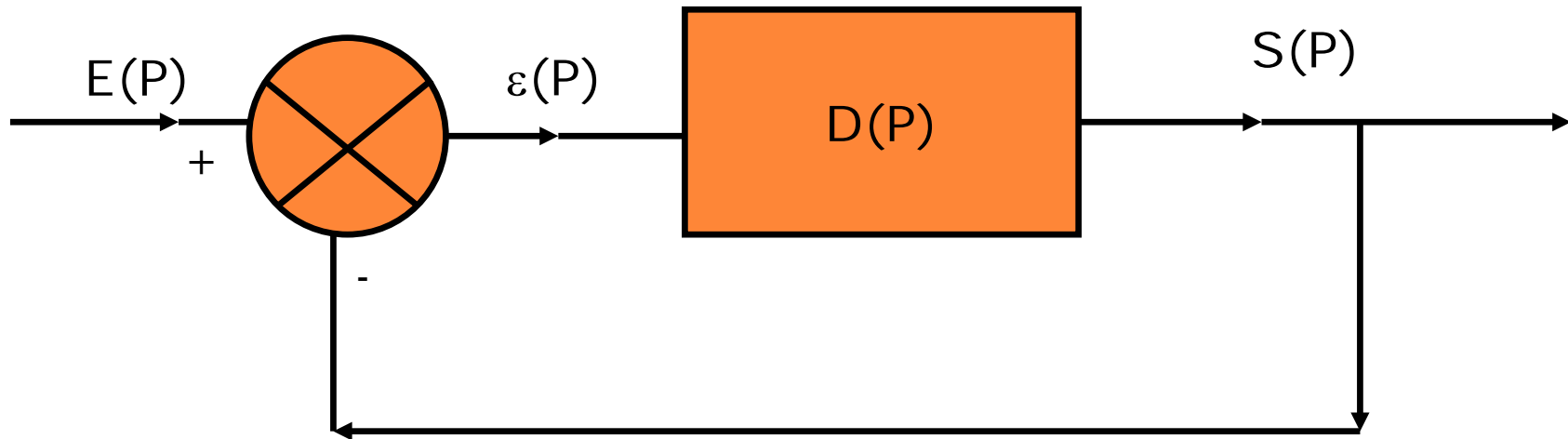


$$H(P) = \prod_{k=1}^n H_k(P)$$

3. ELÉMENTS EN PARALLÈLES

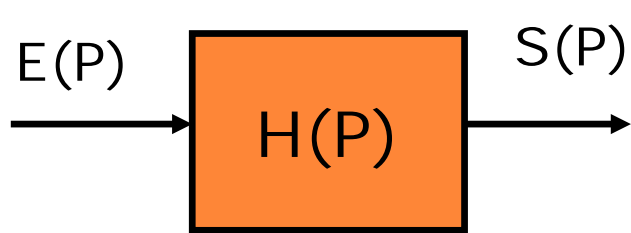
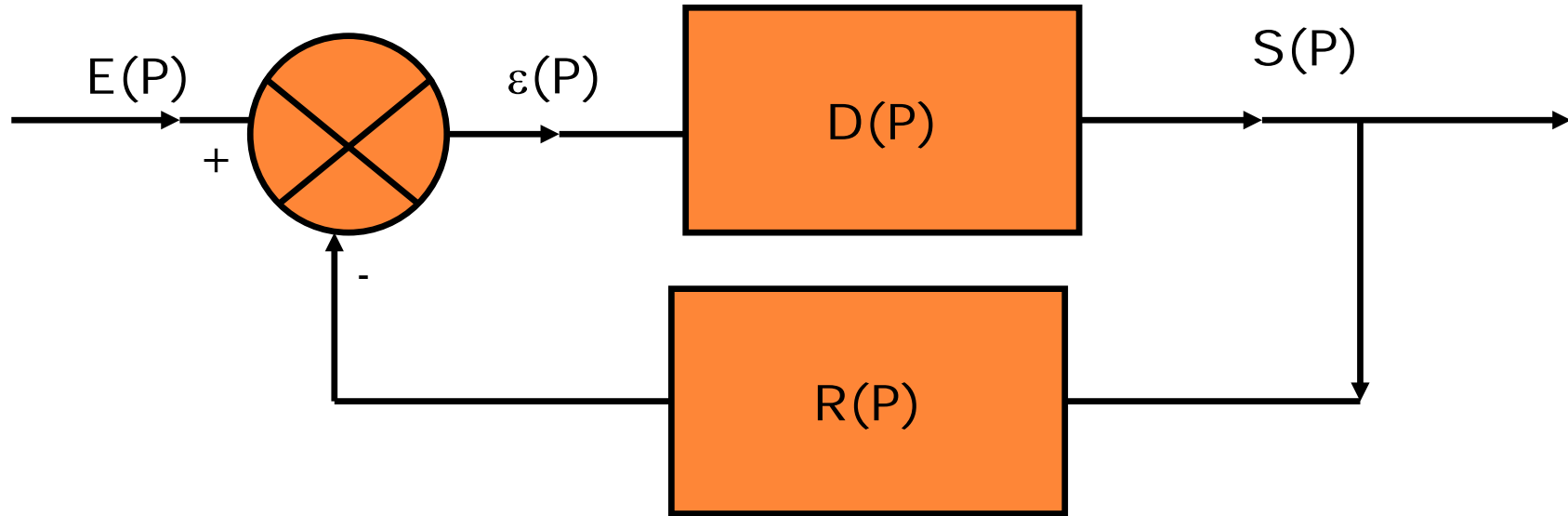


4. RETOUR UNITAIRE



$$H(P) = \frac{D(P)}{1 + R(P)D(P)}$$

5. RETOUR NON UNITAIRE



$$H(P) = \frac{D(P)}{1 + R(P)D(P)}$$

6. RÉDUCTION DES SCHÉMAS – CAS GÉNÉRAL

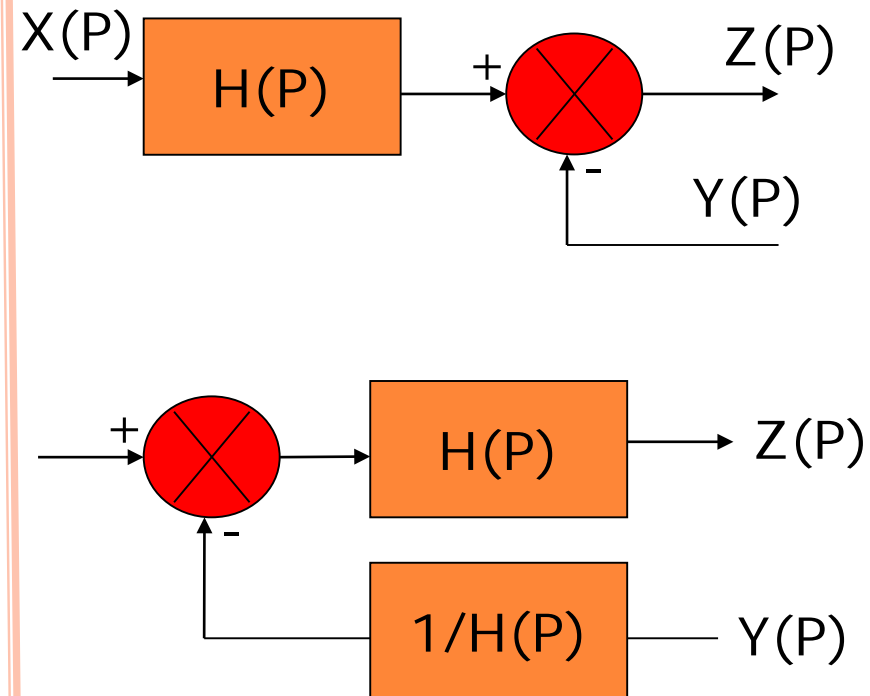
Associer tous les éléments en série

Associer tous les éléments en parallèle

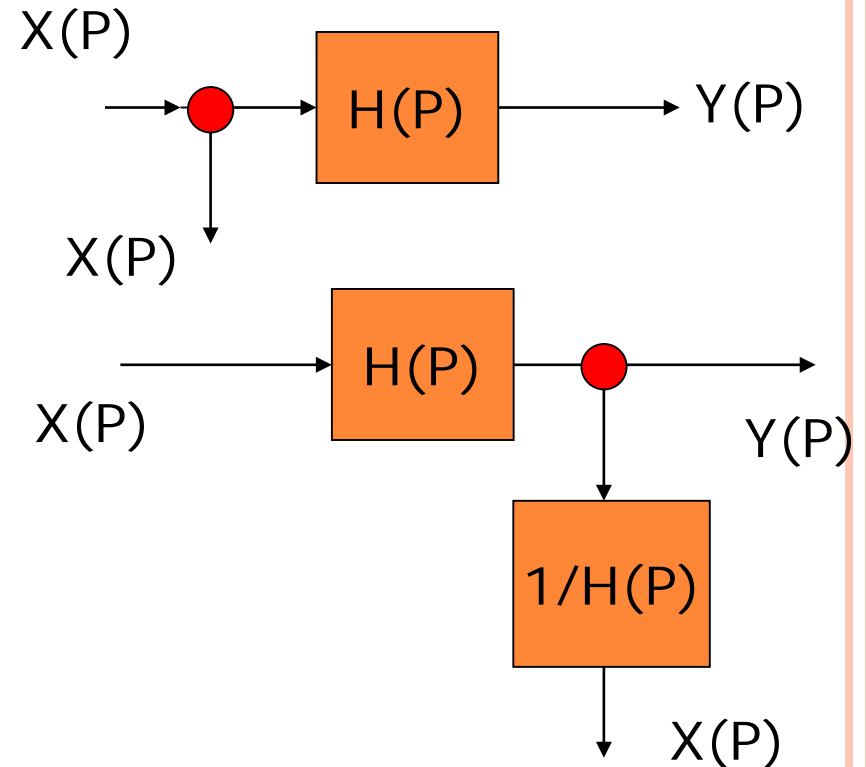
Choisir une boucle principale

Éliminer toutes les autres boucles

Déplacer les comparateurs à gauche de la boucle principale



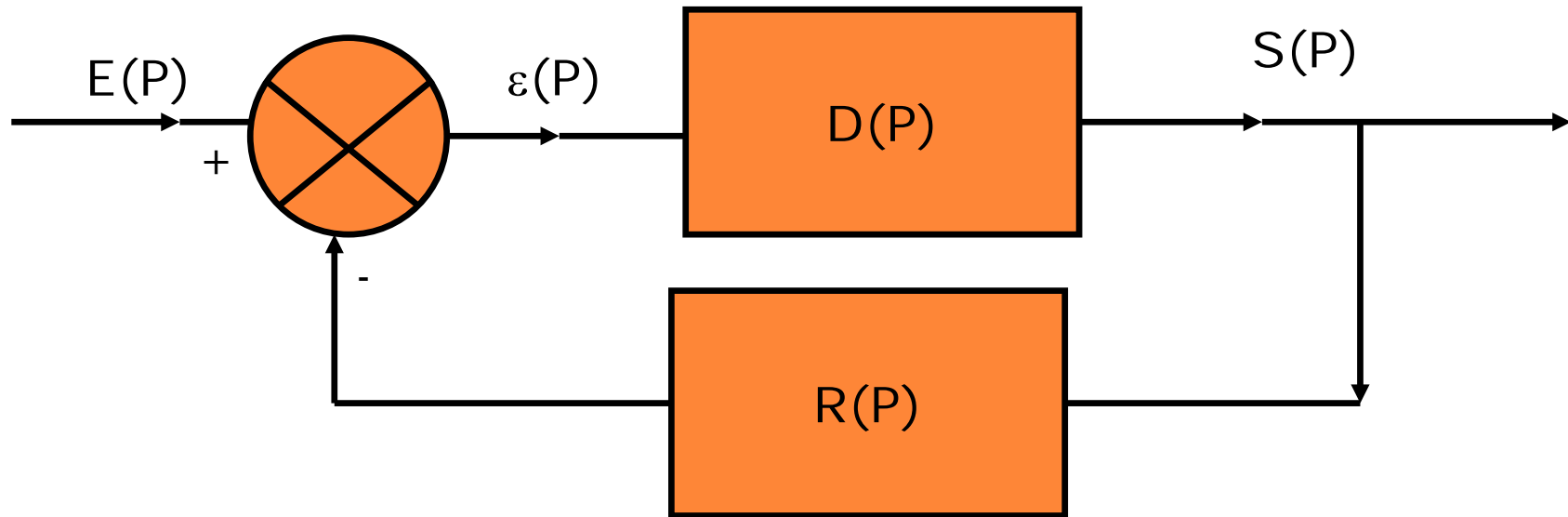
Déplacer les points de dérivation à droite de la boucle principale





IV. RETOUR SUR LA PRÉCISION

24



$$\varepsilon(P) = \frac{1}{1 + R(P)D(P)} E(P)$$

$$E = \lim_{P \rightarrow 0} [P\varepsilon(P)] = \lim_{P \rightarrow 0} \left[\frac{P}{1 + R(P)D(P)} E(P) \right]$$

IV.2 – ERREUR EN POSITION

L'erreur en position est obtenue lorsque l'entrée est un échelon de position.

$$e(t) = 1 \quad E(P) = \frac{1}{P} \quad E = \frac{1}{1 + \lim_{P \rightarrow 0} R(P) \cdot D(P)}$$

On pose : $K_p = \lim_{P \rightarrow 0} R(P)D(P)$ Constante d'erreur en position

Soit α la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte.

α	K_p	E_p
$=0$	K	$\frac{1}{1+K}$
≥ 1	∞	0



IV.2 – ERREUR EN VITESSE

L'erreur en vitesse est obtenue lorsque l'entrée est un échelon de vitesse (une rampe).

$$e(t) = t \quad E(P) = \frac{1}{P^2} \quad E_v = \frac{1}{\lim_{P \rightarrow 0} [P \cdot R(P) \cdot D(P)]}$$

On pose : $K_v = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot R(P) \cdot D(P)$ Constante d'erreur en vitesse

Soit α la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte.

α	K_v	E_v
$=0$	0	∞
$=1$	K	$\frac{1}{K}$
≥ 2	∞	0

IV.2 – ERREUR EN ACCÉLÉRATION

L'erreur en accélération est obtenue lorsque l'entrée est une parabole.

$$e(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad E(P) = \frac{1}{P^3} \quad E_a = \frac{1}{\lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot R(P) \cdot D(P)}$$

On pose : $K_a = \lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot R(P) \cdot D(P)$ Constante d'erreur en accélération

Soit α la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte.

α	K_a	E_a
≤ 1	0	∞
$= 2$	K	$\frac{1}{K}$
≥ 3	∞	0