Chapitre II: Approche fréquentielle des systèmes

I. La transformée de Laplace

Pierre Simon De LAPLACE (1749 – 1827)

Cofondateur de l'Ecole Polytechnique

Pierre-Simon de Laplace

Naissance	23 mars 1749 Beaumont-en-Auge (France)
Décès	5 mars 1827 (à 77 ans) Paris (France)
Nationalité	Française
Champs	Mathématicien, astronome, physicien
Institutions	Ecole Militaire
Diplôme	Université de Caen
Renommé pour	Transformation de Laplace Opérateur laplacien Équation de Laplace Travail sur la mécanique céleste
Distinctions	Académie des sciences, Académie française

1. DÉFINITION

Soit D l'ensemble des fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.

$$f \in D \Rightarrow \begin{array}{l} f : \Re \to \Re \\ t \mapsto f(t) \end{array}$$

Soit A l'ensemble des fonctions de la variable complexe à valeurs complexes.

$$F \in A \Rightarrow \begin{array}{l} F : C \to C \\ P \mapsto F(P) \end{array}$$

On posera $P = \sigma + j\omega$

Remarque : *P* est une pulsation complexe dont la partie imaginaire exprime l'aspect fréquentiel du signal.

La transformée de Laplace est une application de D vers A.

$$L : \begin{array}{l} D \to A \\ f(t) \mapsto F(P) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-Pt} dt \end{array}$$

Soit $f(t) = e^{at}$ Déterminez F(P) pour t>0

$$F(P) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-Pt} dt = \frac{1}{P-a} \left[e^{(a-\sigma)t} e^{-j\omega t} \right]_0^{+\infty}$$

si $a - \sigma < 0$ alors $F(P) = \dfrac{1}{P-a}$

Linéarité

Soient *a* et *b* deux réels. Soient deux signaux *f* et *g* tels que :

$$L[f] = F \qquad L[g] = G \quad \Longrightarrow \quad L[af + bg] = aF + bG$$

Théorème du retard temporel

Soit *f(t)* un signal causal et g(t) = f(t-T)

si $L[f] = F \quad \Longrightarrow \quad L[g] = F(P)e^{-TP}$

Un retard de T dans le temps se traduit par une multiplication par e^{-TP} dans l'espace des fréquences.

Théorème du retard temporel

Soit un signal *f* tel que $L[f] = F$

Cherchons la transformée de $e^{at} f(t)$

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{at} e^{-Pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(P-a)t} dt = F(P-a)$$

Un retard de *a* dans l'espace des fréquences est dû à une multiplication par e^{at} dans le temps.

Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Soit un signal *f* tel que $L[f] = F$

$$f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{P \to \infty} P\,F(P)$$

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{P \to 0} P\,F(P)$$

Formule de la dérivée

Soit un signal *f* tel que $L[f]=F$

$$L[f']=PF(P)-f(0^+)$$

Formule de l'intégrale

Soit un signal *f* tel que $L[f]=F$

et un signal g(t) tq: $g(t)=\int_0^t f(x)dx$

g(0) est imposé

$$G(P)=\frac{1}{P}F(P)+\frac{1}{P}g(0)$$

Formule de la convolution

Soient deux signaux *f* et *g* tels que :

$$L[f]=F$$

$$L[g]=G$$

$$L[f*g]=F(P).G(P)$$

$f(t)$	$F(P)$	$f(t)$	$F(P)$
$\delta(t)$	1	$f^{(n)}(t)$	$P^n F(P) - \sum_{k=0}^{n-1} P^{n-k-1} f^{(k)}(0)$
$\Gamma(t)$	$\frac{1}{P}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{P^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{P+a}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{P}{P^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{P^{n+1}}$		

Dans un réseau électrique linéaire, les relations entre entrée et sortie sont des équations intégrales et ou différentielles. La résolution de ces équations est simplifiée grâce à la transformée de Laplace.

Elément	Temporelle	Fréquentielle
Résistance	$v(t) = Ri(t)$	$V(P) = RI(P)$
Inductance	$v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$V(P) = LPI(P) - Li(0)$
Capacité	$v(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(x)dx$	$V(P) = \dfrac{1}{CP}I(P) + \dfrac{1}{CP}v(0)$

II. Fonction de transfert

1. DÉFINITION

La réponse *y* d'un système à une excitation *x* est : $y = h * u$

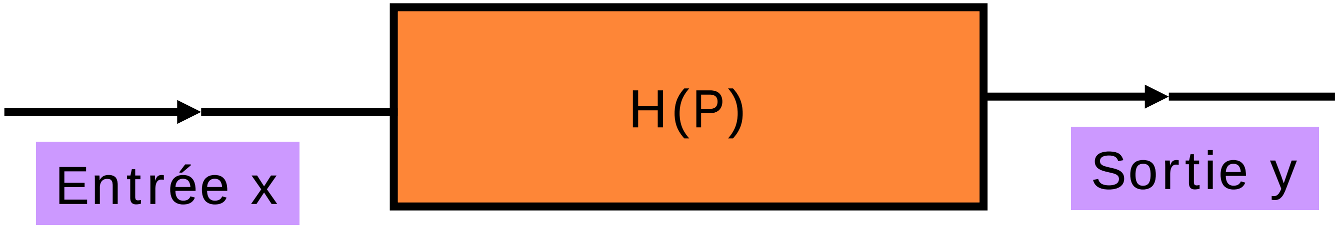
avec *h* la réponse impulsionnelle

Application de la transformée de Laplace

$$Y(P) = H(P)U(P)$$

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)}$$

H(P) est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. On l'appelle fonction de transfert ou transmittance du système. On définit aussi la fonction de transfert comme étant le quotient de la sortie sur l'entrée.



la relation entrée sortie est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t) \qquad \text{avec} \qquad n \geq m$$

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j P^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i} = \frac{K}{P^\alpha} \frac{\prod_{j=1}^{m} (P - z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\alpha} (P - p_i)}$$

Les z_j sont les zéros de la fonction de transfert.

Les p_i sont les pôles de la fonction de transfert.

α est l'ordre de multiplicité du pôle à l'origine. il définit le type du système.

3. Notion de gain

La fonction de transfert d'un système asservi peut se mettre sous la forme :

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)}$$

Pour pouvoir distinguer les qualités de deux systèmes on définit le gain statique, le gain en vitesse et le gain en accélération.

Le gain statique (ou gain de position) $g_p = \lim_{P \to 0} H(P)$

Le gain en vitesse $g_v = \lim_{P \to 0} P\,H(P)$

Le gain en accélération $g_a = \lim_{P \to 0} P^2\,H(P)$

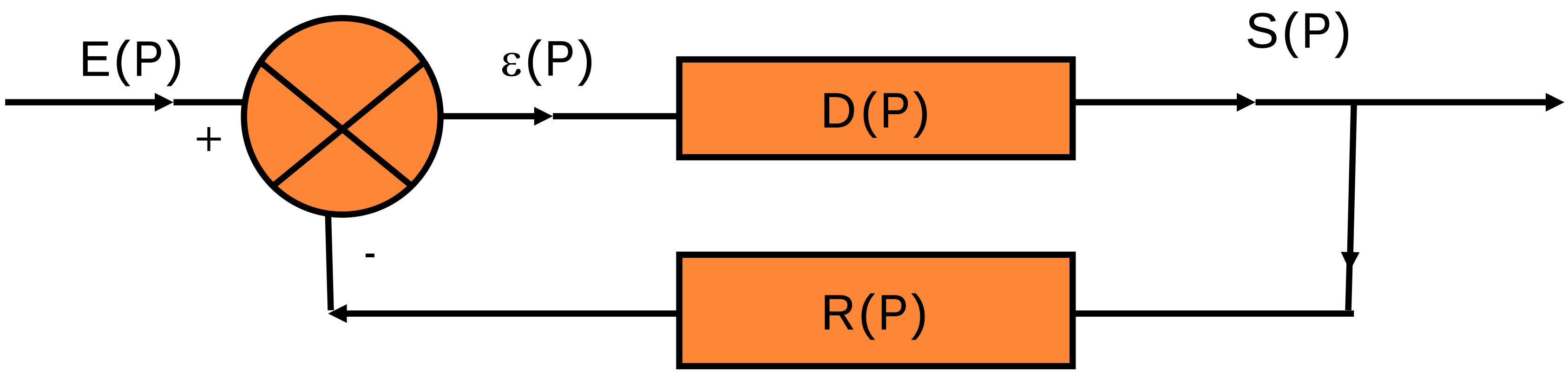
Seuls la stabilité et la précision peuvent être étudié dans le domaine fréquentiel. La rapidité et l'amortissement sont des paramètres liés au temps.

$$E = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{P \to 0} P\varepsilon(P)$$

III. Algèbre des schémas fonctionnels

15

Le système à contrôler, l'organe de réglage et l'élément de la chaine de retour sont remplacés chacun par sa fonction de transfert.



E(P)	: l'entrée ou la consigne
S(P)	: la sortie
ε(P)	: l'erreur
D(P)	: fonction de transfert de la chaîne directe
R(P)	: fonction de transfert de la chaîne de retour
D(P).R(P)	: fonction de transfert en boucle ouverte
S(P)/E(P)	: fonction de transfert en boucle fermée

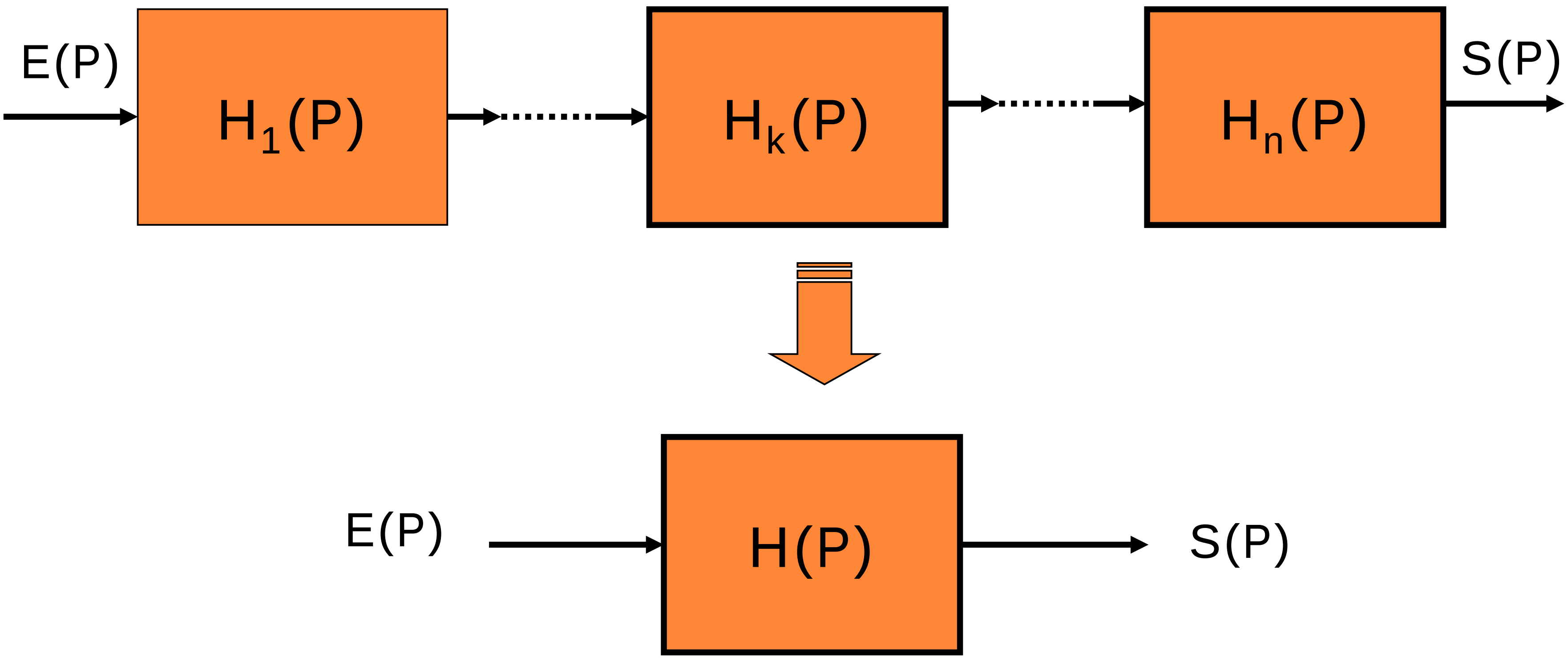
1. Forme canonique d'un système asservi

Si la consigne est constante, on a un **régulateur** : il s'agit d'assurer un niveau ou une valeur

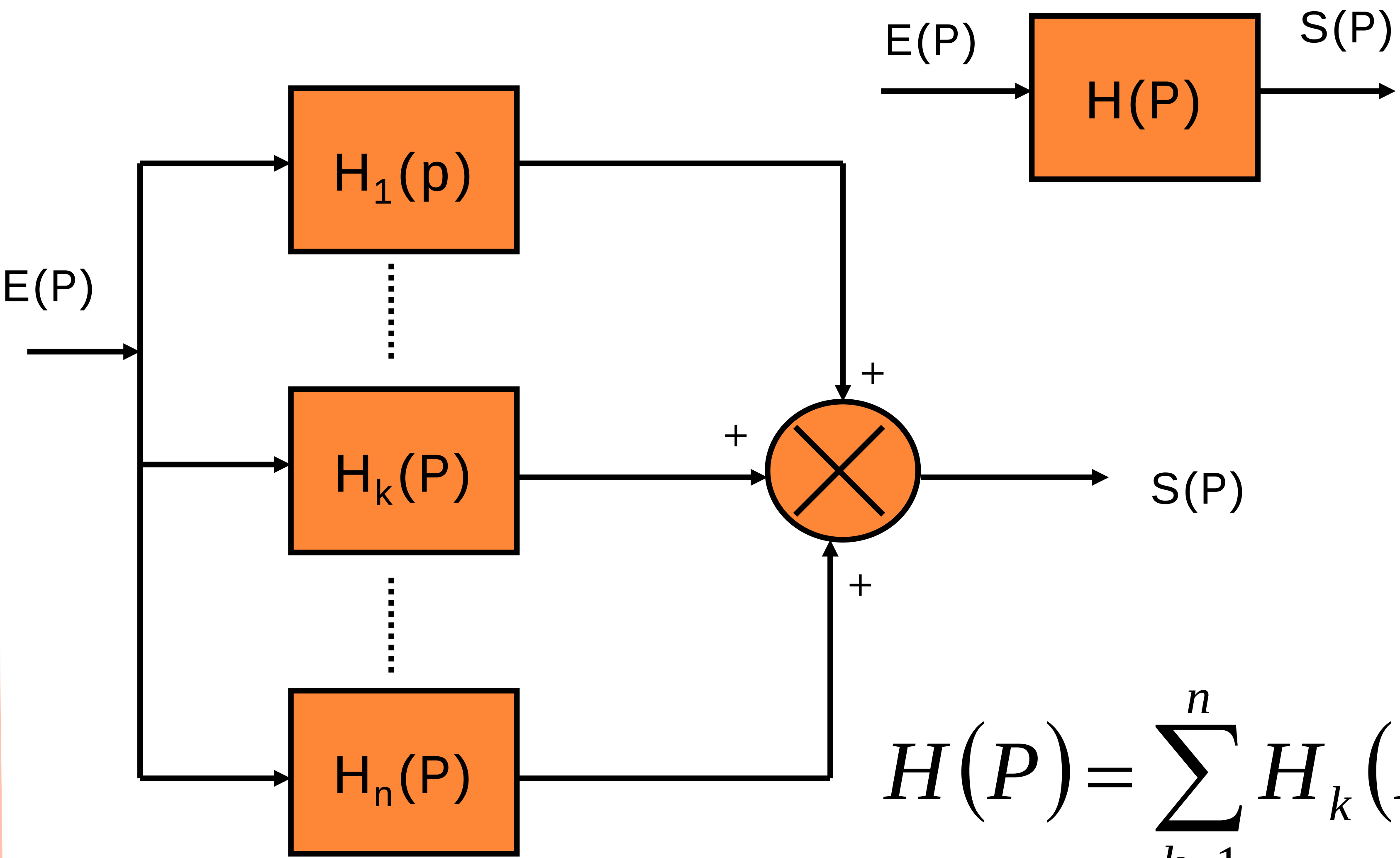
Si la consigne vari, on a un **asservissement** : on assure le suivi d'une trajectoire (problème de poursuite)

Si R(P)=1 : Le système est dit à retour unitaire. On compare la totalité de la grandeur de sortie à la grandeur d'entée.

Si R(P)#1 : le système est à retour non unitaire. L'entrée et la sortie ne sont de même nature.

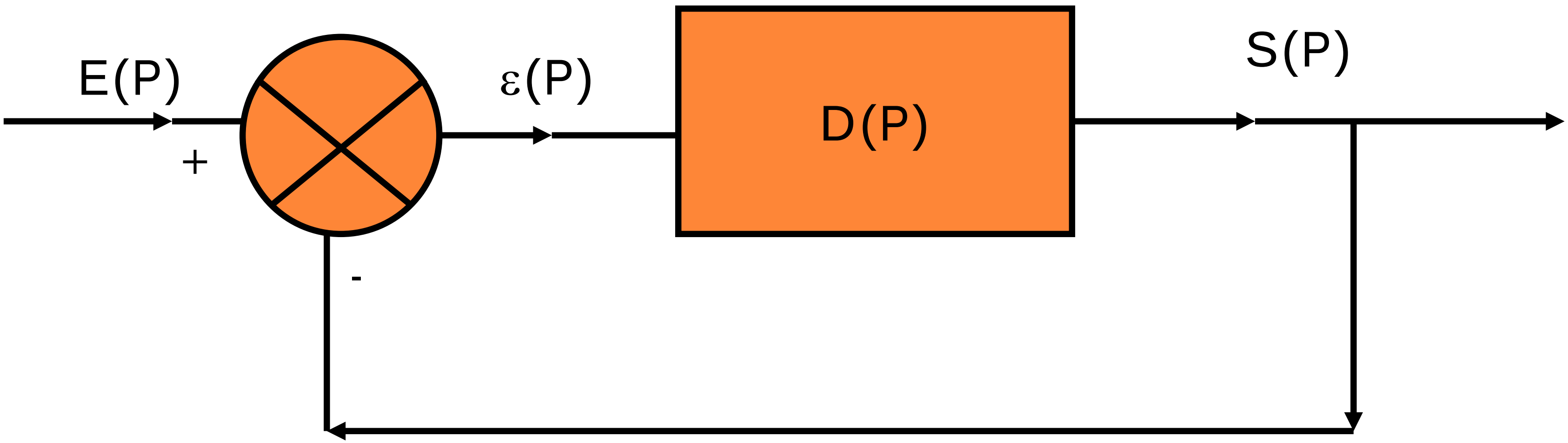


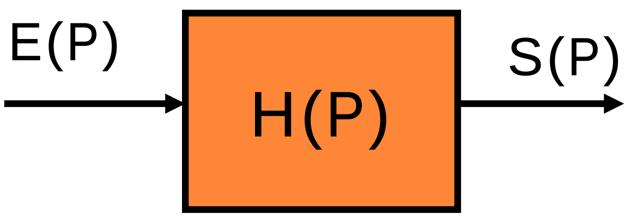
$$H(P) = \prod_{k=1}^{n} H_k(P)$$



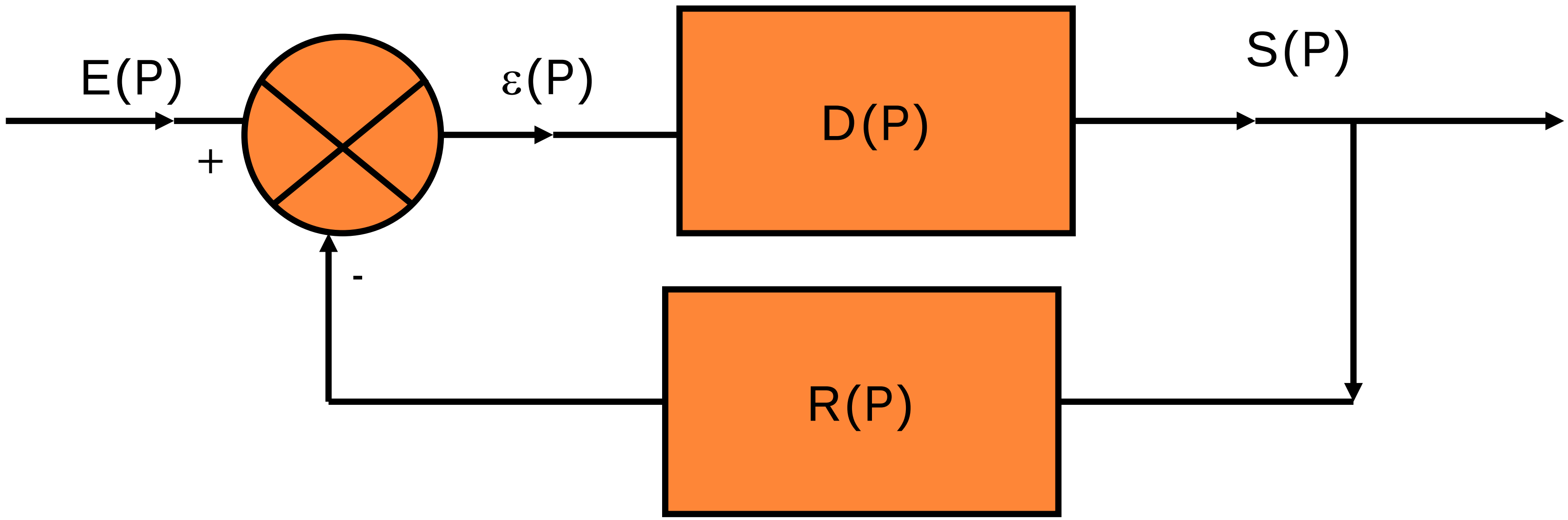
$$H(P) = \sum_{k=1}^{n} H_k(P)$$

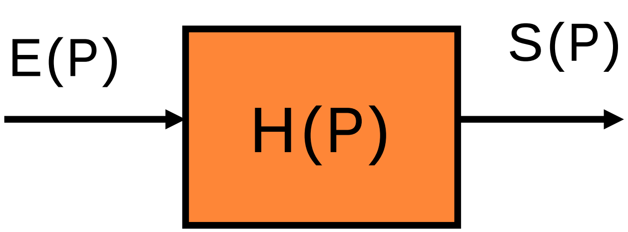
4. Retour unitaire





$$H(P) = \frac{D(P)}{1 + R(P)D(P)}$$





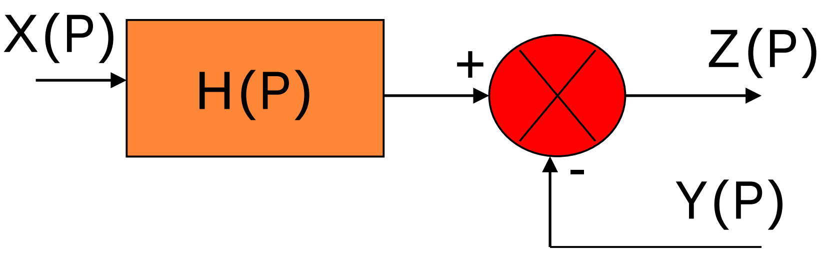
$$H(P)=\frac{D(P)}{1+R(P)D(P)}$$

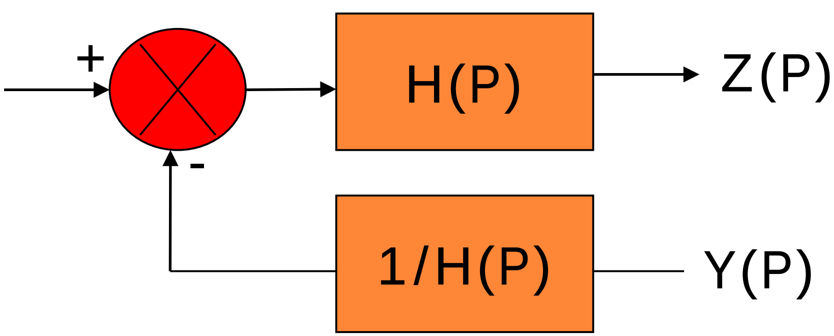
6. Réduction des schémas – cas général

- Associer tous les éléments en série
- Associer tous les éléments en parallèle
- Choisir une boucle principale
- Éliminer toutes les autres boucles

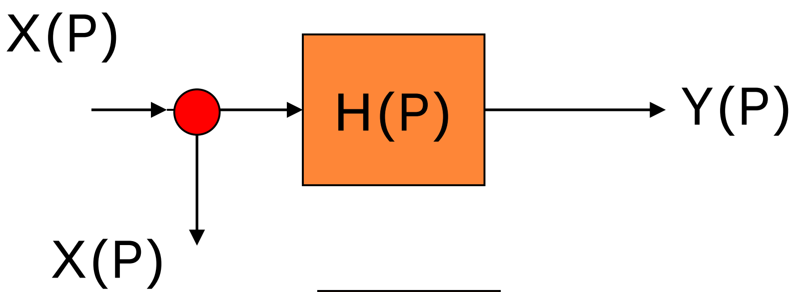
Réduction des schémas – cas général

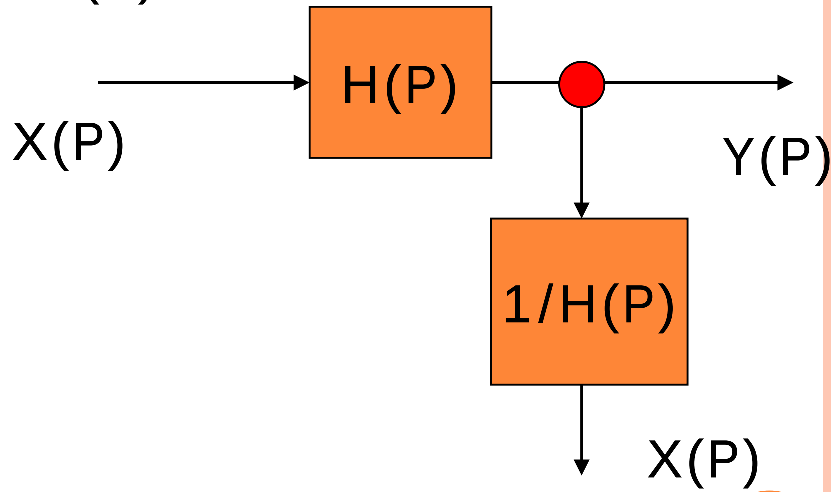
Déplacer les comparateurs à gauche de la boucle principale



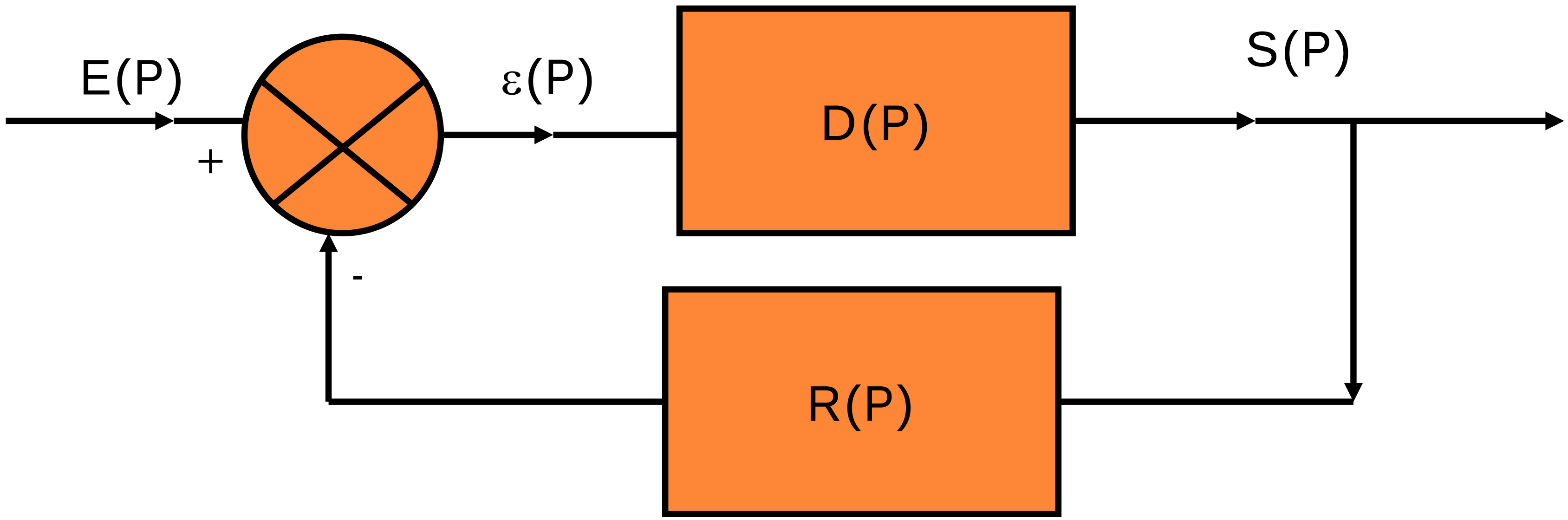


Déplacer les points de dérivation à droite de la boucle principale





IV. Retour sur la précision



$$\varepsilon(P) = \frac{1}{1 + R(P)D(P)} E(P)$$

$$E = \lim_{P \to 0} [P\varepsilon(P)] = \lim_{P \to 0} \left[\frac{P}{1 + R(P)D(P)} E(P)\right]$$

L'erreur en position est obtenue lorsque l'entrée est un échelon de position.

$$e(t) = 1 \qquad E(P) = \frac{1}{P} \qquad E = \frac{1}{1 + \lim_{P \to 0} R(P).D(P)}$$

On pose : $K_p = \lim_{P \to 0} R(P)D(P)$ Constante d'erreur en position

Soit α la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte.

α	K_p	E_p
=0	K	$\frac{1}{1+K}$
≥1	∞	0

L'erreur en vitesse est obtenue lorsque l'entrée est un échelon de vitesse (une rampe).

$e(t) = t \qquad E(P) = \frac{1}{P^2} \qquad E_v = \frac{1}{\lim\limits_{P \to 0} [P.R(P).D(P)]}$

On pose : $K_v = \lim\limits_{P \to 0} P.R(P).D(P)$ Constante d'erreur en vitesse

Soit α la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte.

α	K_v	E_v
=0	0	∞
=1	K	$\frac{1}{K}$
≥2	∞	0

L'erreur en accélération est obtenue lorsque l'entrée est une parabole.

$$e(t) = \frac{1}{2}t^2 \qquad E(P) = \frac{1}{P^3} \qquad E_a = \frac{1}{\lim\limits_{P\to 0} P^2.R(P).D(P)}$$

On pose : $K_a = \lim\limits_{P\to 0} P^2.R(P).D(P)$ Constante d'erreur en accélération

Soit α la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte.

α	K_a	E_a
≤ 1	0	∞
$=2$	K	$\frac{1}{K}$
≥ 3	∞	0