Chapitre IV: Représentation graphique d'une fonction de transfert en régime harmonique

I. Rappels

I.1 – Gain et phase d'une fonction de transfert

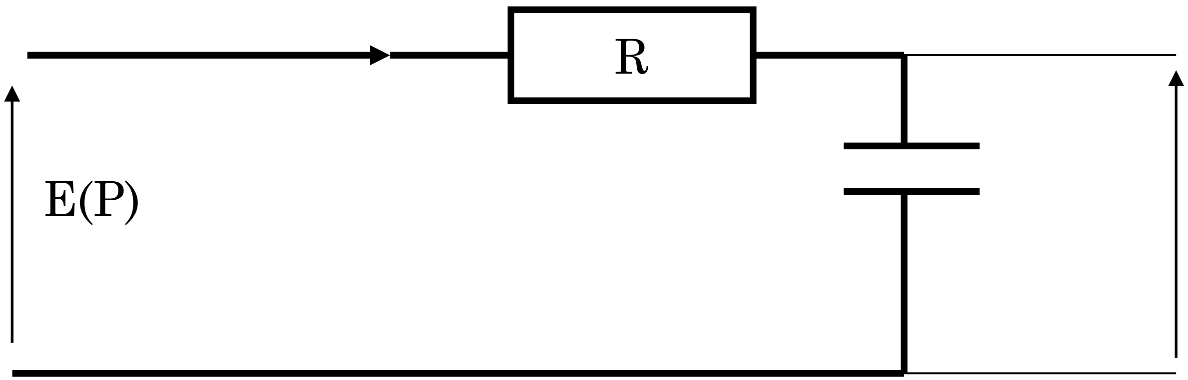
En régime harmonique $P = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

H(ω) est appelé gain du système et on le note H

φ(ω) est appelée phase du système et on le note φ

Exemple



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \qquad \varphi = -\arctan(RC\omega)$$

Le décibel est une unité logarithmique

H en décibel est noté $$H_{dB} = 20\log\left|H\right|$$

si $$H(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} H_i(j\omega)$$

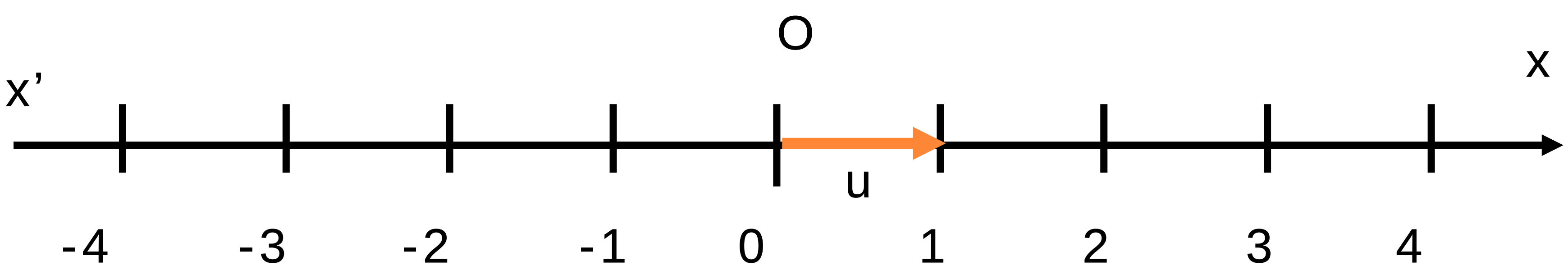
$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} H_i(j\omega)$$

I.3 – ÉCHELLE LINÉAIRE

Il s'agit de représenter sur un axe x'Ox, le point P d'abscisse *n* tel que :

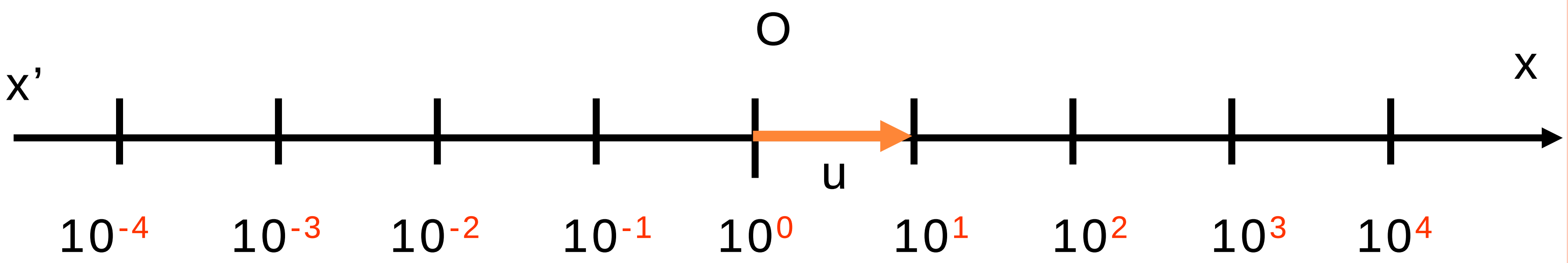
$$\overline{OP} = n$$



I.4 – ÉCHELLE LOGARITHMIQUE

Il s'agit de représenter sur un axe x'Ox, le point P d'abscisse *n* tel que

$$\overline{OP} = \log n$$



L'échelle logarithmique permet de représenter sur un même graphique, les valeurs très faibles et les valeurs très élevées d'une même grandeur. Le point zéro n'apparaît pas sur le graphique car, n'est pas définie.

II. Diagramme de bode

7

Hendrik Wade Bode

Naissance	24 décembre 1905 Madison, Wisconsin (États-Unis)
Décès	21 juin 1982 (à 76 ans) Cambridge, Massachusetts (États-Unis)
Domicile	Cambridge
Nationalité	Américaine
Champs	Régulation Physique Mathématiques Télécommunications
Institutions	Université d'État de l'Ohio Laboratoires Bell Université Harvard
Renommé pour	Diagrammes de Bode
Distinctions	Médaille présidentielle du Mérite Médaille Edison

II.1 - DÉFINITION

Le diagramme de Bode est la représentation, sur papier semi-log, d'une réponse en fréquence dans des plans séparés du gain en décibels et de la phase en fonction de la pulsation.

Le diagramme asymptotique est la représentation de la fonction par ses asymptotes.

Généralement la fonction de transfert est une combinaison des termes suivants :

K $\quad e^{-TP}$ $\quad P$ $\quad 1+TP$ $\quad 1+\frac{2m}{\omega_0}P+\frac{1}{\omega_0^2}P^2$

II.2 - Terme en K

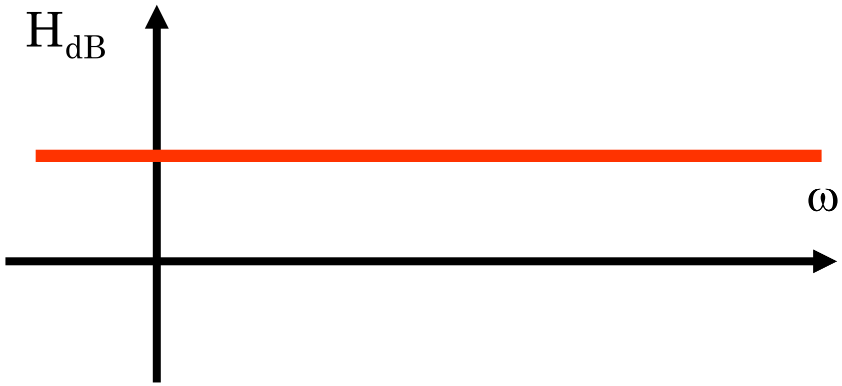
$$H(P) = K$$

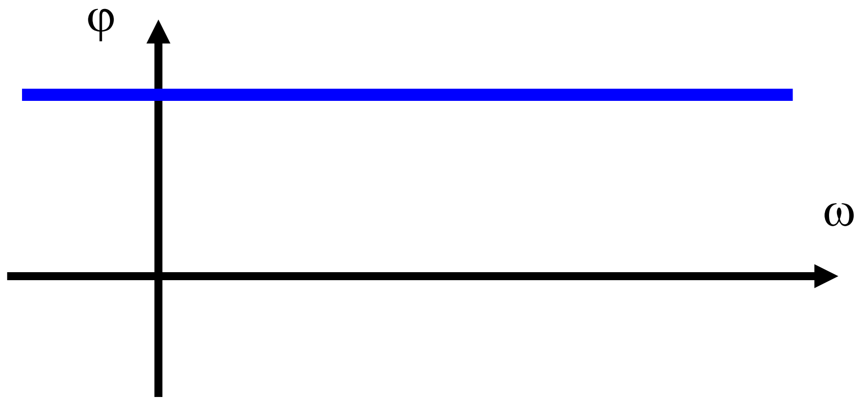
$$H = |K|$$

$$H_{dB} = 20\log|K|$$

$$\varphi = \arg(K) = \begin{cases} 0 \; si \; K > 0 \\ \pm\pi \; si \; K < 0 \end{cases}$$

La courbe du gain et celle de la phase sont des droites horizontales

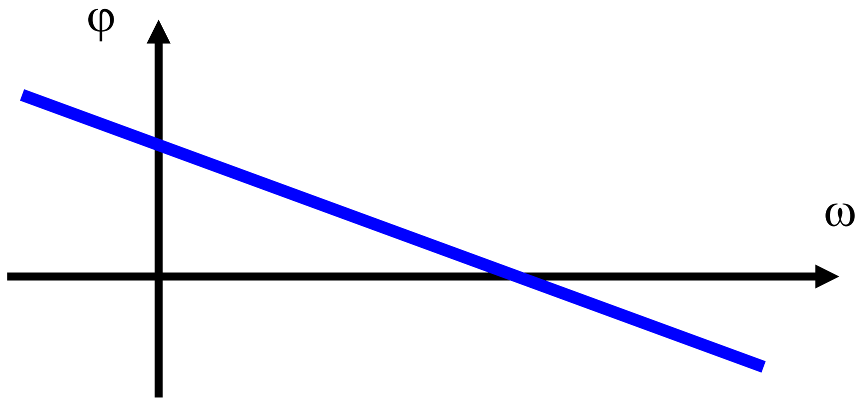




Terme en e^{-TP}

$$H(P) = e^{-TP}$$

$$H = 1$$



$$\varphi = -\omega T\,[2\pi]$$

II.3 - Terme en P

$$H(P) = P$$

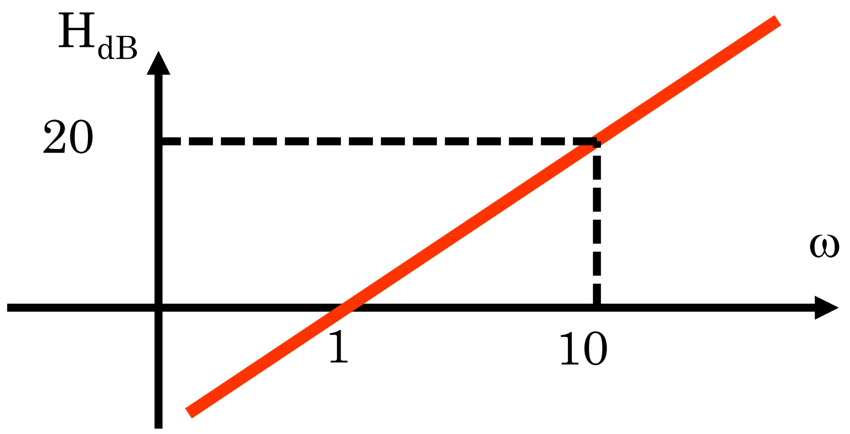
$$H_{dB} = 20\log\omega$$

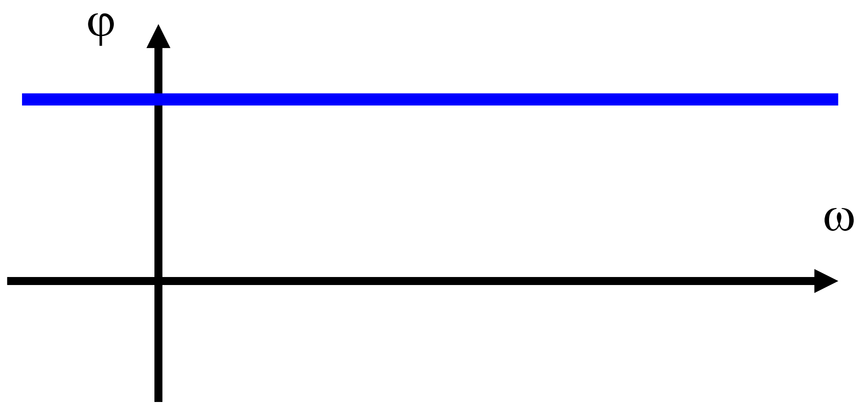
$$\varphi = \arg(P) = \frac{\pi}{2}$$

la courbe est une droite de pente 20

La droite a une pente de 6 a dB par octave.

La droite a une pente de 20 a dB par décade.





Terme du premier ordre

$$H(P) = 1 + TP$$

$$H_{dB} = 20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2}$$

$$\varphi = \arctan \omega T$$

Si ω faible

$$H(P) \approx 1$$

$$H_{dB} = 0$$

$$\varphi = 0$$

Si ω élevée

$$H(P) \approx TP$$

$$H_{dB} = 20\log\omega + 20\log T$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Terme du premier ordre

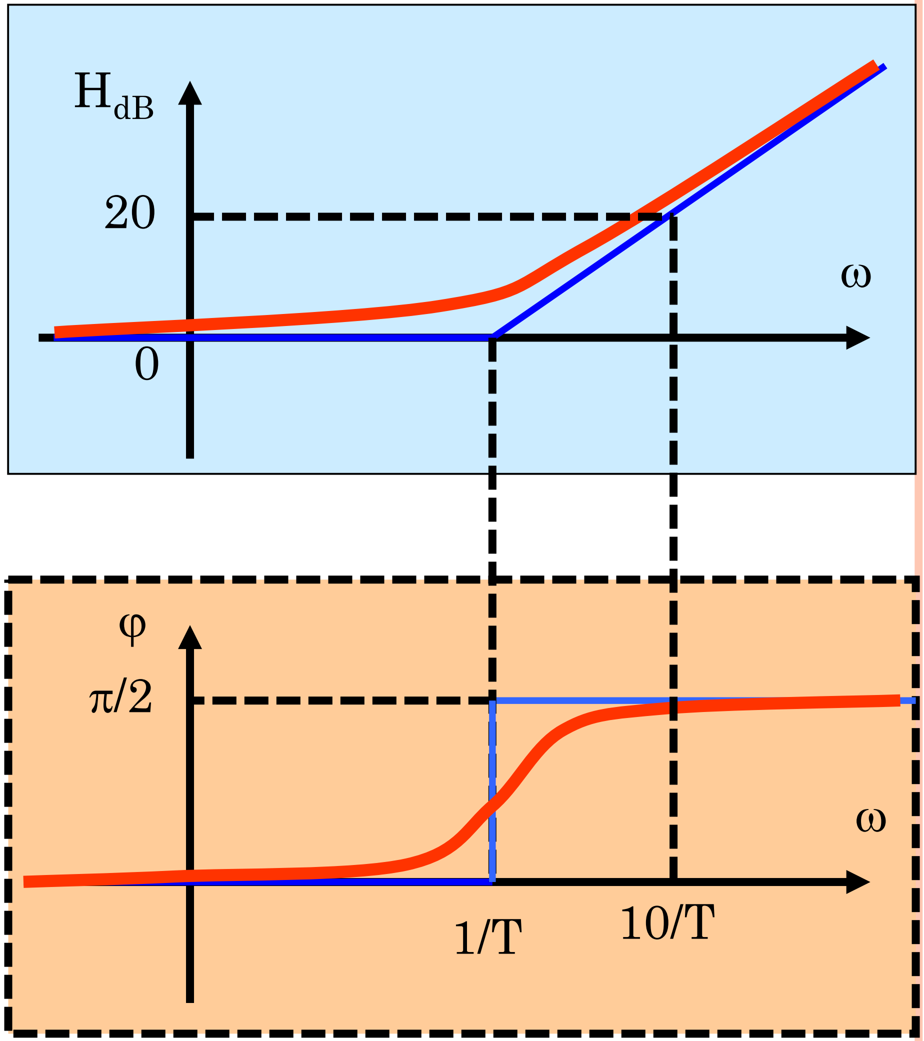
$$H_{dB} = f(\log \omega)$$

est une droite de pente 20 qui

passe par le point ($\frac{1}{T}$, 0dB)

$$\omega_c = \frac{1}{T}$$

est appelée pulsation de coupure



$$H(P)=\left(1+\frac{2m}{\omega_0}P+\frac{1}{\omega_0^2}P^2\right)$$

$$H_{dB}=20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{2m\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\varphi=\arctan 2m\frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Si ω faible

$$H(P)\approx 1$$

$$H_{dB}=0$$

$$\varphi=0$$

Si ω élevée

$$H(P)\approx\frac{P^2}{\omega^2}$$

$$H_{dB}=40\log\omega-40\log\omega_0$$

$$\varphi=\pi$$

Terme du second ordre

$$H_{dB} = f(\log \omega)$$

est une droite de pente 40 qui passe par le point (ω_0 , 0dB)

w_0 est appelée pulsation de coupure

La courbe réelle dépend du paramètre *m*.

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad f(x) = H^2$$

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)^2 + 4m^2x^2$$

$$f'(x) = 4x\left[x^2 - \left(1 - 2m^2\right)\right]$$

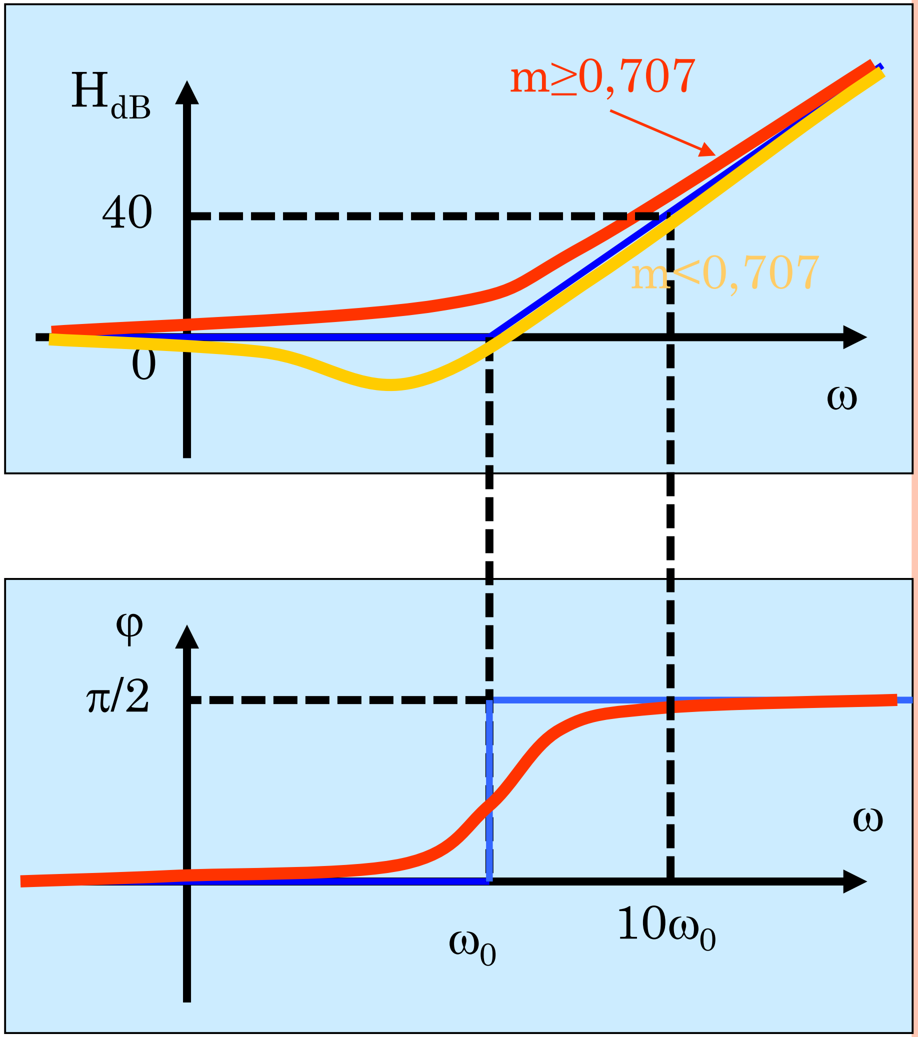
$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2m^2}$$

Facteur de résonance

$$M = 2m\sqrt{1-m^2}$$

Facteur de qualité

$$Q = 2m$$



Trace d'une fonction quelconque : méthodologie

1
- Mettre la fonction de transfert sous la forme de produit des termes précédents.

2
- Rechercher les pulsations de coupure des termes du premier et du second ordre.

3
- Faire un tableau ou apparaissent tous les termes de la fonction de transfert

Trace d'une fonction quelconque : méthodologie

4

- Etudier, séparément, la pente du gain et la phase de chaque terme

5

- Faire la somme des pentes de gain et des phases

6

- Calculer le gain asymptotique pour la plus petite pulsation relevée. Lorsque le gain asymptotique est défini pour zéro ou bien l'infini, on peut les utiliser.

Exemple

BANDE PASSANTE À n dB

définition

La bande passante à *n dB* est l'ensemble des fréquences pour lesquelles le gain en dB est supérieur au gain maximum diminué de *n dB*.

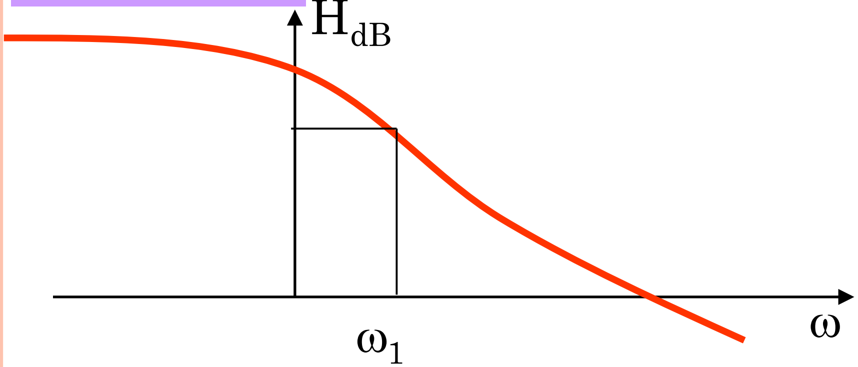
$$B_{ndB} = \left\{ f \; ou \; \omega \, / \, H_{dB} \geq H_{dB\max} - n \, dB \right\}$$

on trace la droite $H_{dB} = f(\omega)$. L'intersection de cette droite avec la courbe donne la solution

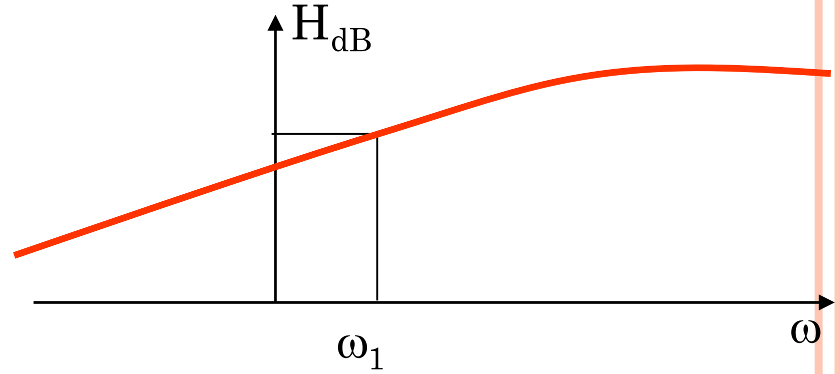
Remarque : on utilise souvent la bande passante à 3 dB

Bande passante à n dB

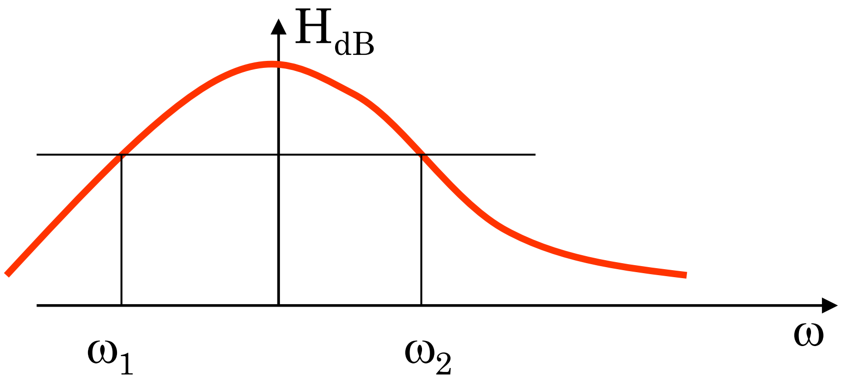
exemples



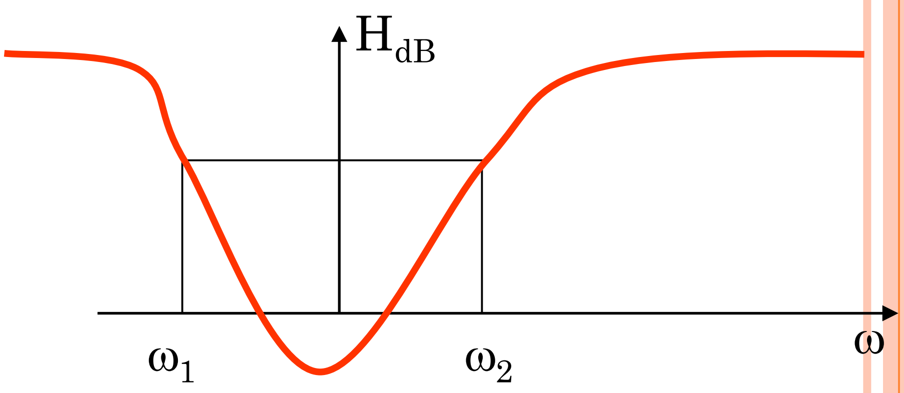
Filtre passe bas



Filtre passe haut



Filtre passe bande



Filtre réjecteur de bande

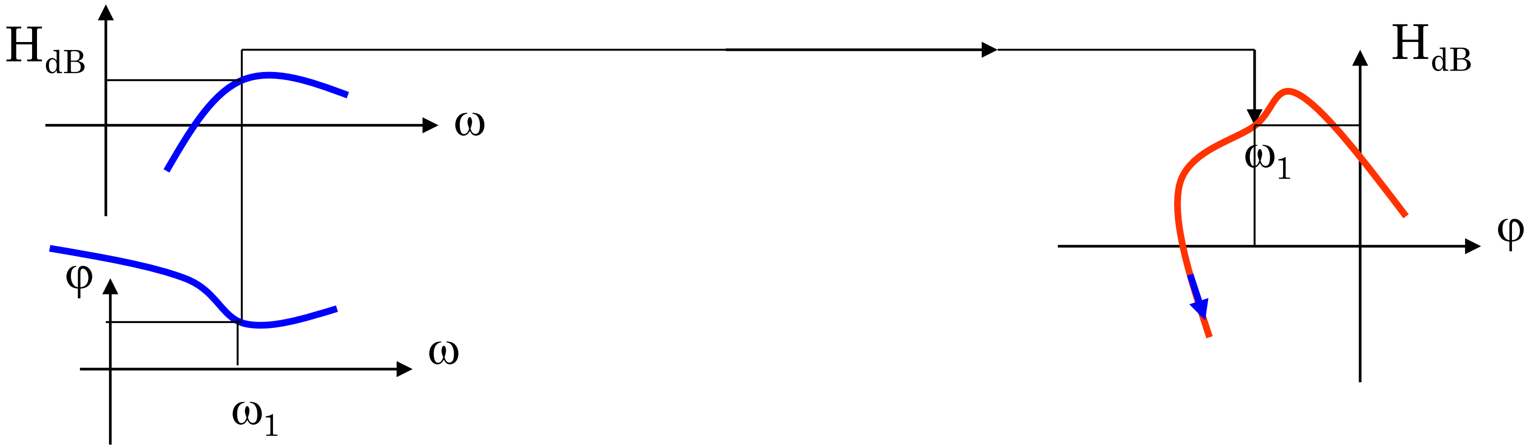
III. Diagramme de black ou Lieu de Black

III.1 - DÉFINITION

Le diagramme de Black ou lieu de Black est la représentation du module de la fonction de transfert, exprimé en décibels, en fonction de son argument, exprimé en degré.

La courbe est graduée avec les valeurs successives de ω. Elle porte une flèche orientée dans le sens des valeurs croissantes de ω .

On peut tracer le lieu de Black si on connaît le diagramme de Bode.



La fonction de transfert d'un système physique donné peut se mettre sous la forme :

$$H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j P^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i} = \frac{K}{P^{\alpha}} \frac{\prod_{j=1}^{m} (P - z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\alpha} (P - p_i)} \qquad n \geq m$$

En basses fréquences

$$H(P) \approx \frac{K_0}{P^{\alpha}} \qquad K_0 = K \frac{\prod_{j=1}^{m}(-z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\alpha}(-p_i)}$$

En basses fréquences, l'allure du lieu dépend de l'ordre de multiplicité α du pôle à l'origine.

α	0	1	2	3	4
H	K_0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
H_{dB}	$20\log K_0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
φ	0	-90	-180	-270	-360

Les droites d'équation $\varphi = -90$, $\varphi = -180$, $\varphi = -270$ et $\varphi = -360$ sont des asymptotes

En hautes fréquences

$$H(P) \approx \frac{K_\infty}{P^{n-m}} \qquad K_\infty = \frac{b_m}{a_n}$$

En hautes fréquences, l'allure du lieu dépend de n-m

n-m	0	1	2	3	4
H	K_∞	0	0	0	0
H_{dB}	$20\log K_\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
φ	0	-90	-180	-270	-360

Les droites d'équation $\varphi=-90$, $\varphi=-180$, $\varphi=-270$ et $\varphi=-360$ sont des asymptotes.

III.3 - Exemples

$$H(P) = \frac{1}{1+TP}$$

En basses fréquences on a

$$H(P) \approx 1$$

$$H_{dB} \to 0$$

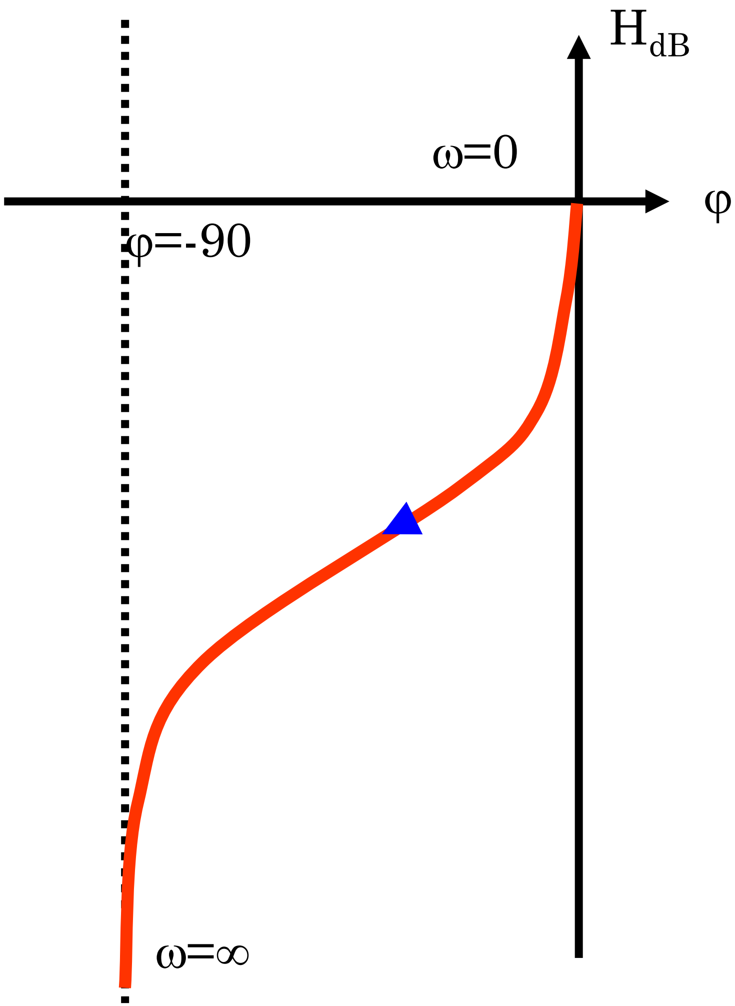
$$\varphi \to 0$$

En hautes fréquences on a :

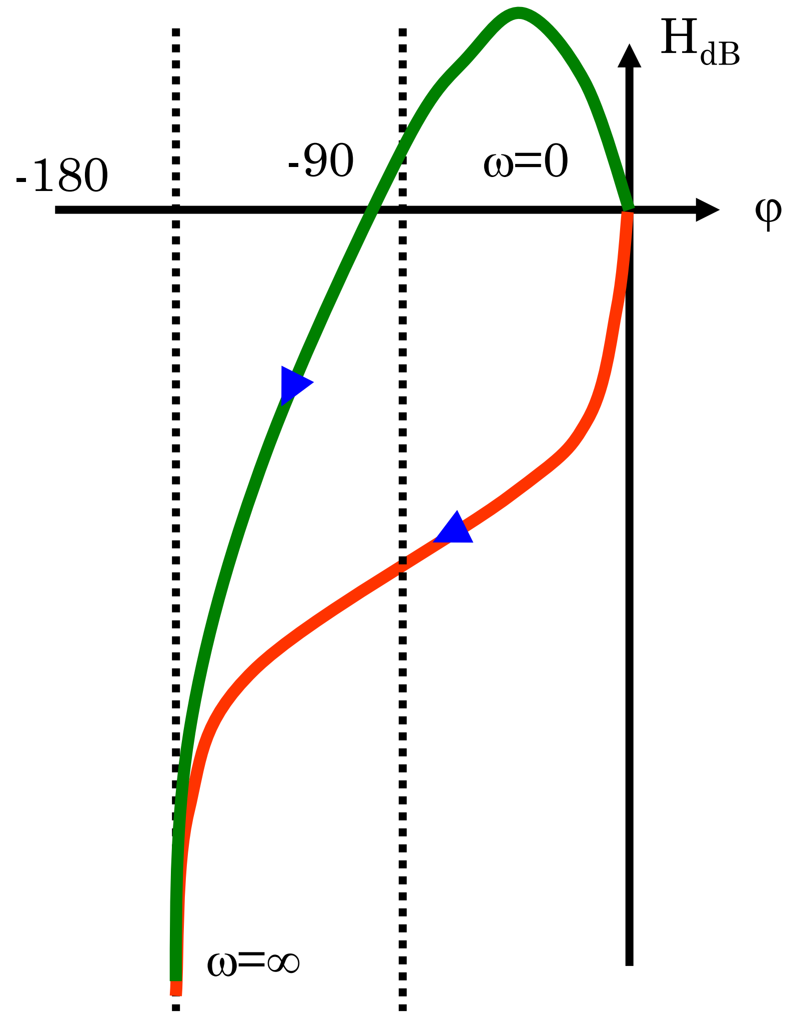
$$H(P) \approx \frac{1}{TP}$$

$$H_{dB} \to -\infty$$

$$\varphi \to -90$$



$$H(P) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2m\omega_0 P + P^2}$$



En basses fréquences on a

$$H(P) \approx 1$$

$$H_{dB} \to 0$$

$$\varphi \to 0$$

En hautes fréquences on a :

$$H(P) \approx \frac{\omega_0^2}{P^2}$$

$$H_{dB} \to -\infty$$

$$\varphi \to -180$$

IV. Diagramme de Nyquist ou Lieu de Nyquist

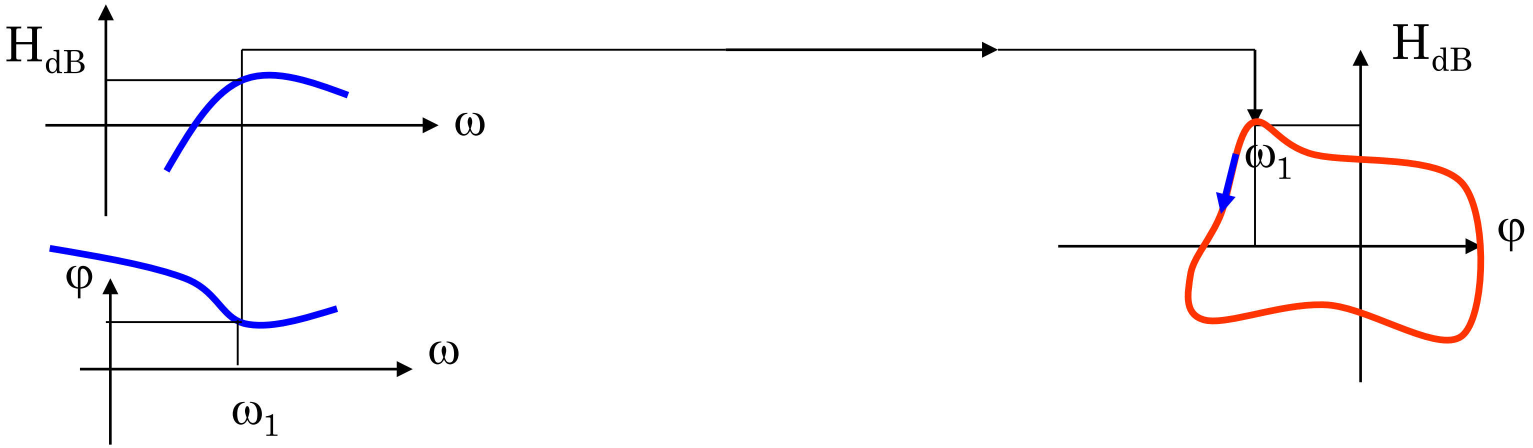
Harry Nyquist

Naissance	**7 février 1889** **Stora Kil, Nilsby, Värmland, Suède**
Décès	4 avril 1976 (à 87 ans) Harlingen, Texas, États-Unis d'Amérique
Nationalité	Américaine
Pays de résidence	États-Unis d'Amérique
Profession	Ingénieur en électronique
Distinctions	Médaille d'honneur de l'IEEE (1960) Médaille Stuart Ballantine (1960) Médaille Rufus Oldenburger (1975)

Le lieu de Nyquist est la représentation de $H(j\omega)$ dans le plan complexe.

Le lieu est gradué avec les valeurs successives de w. il porte une flèche orientée dans le sens des valeurs croissantes de ω .

On peut tracer le lieu de Nyquist si on connaît le diagramme de Bode ou celui de Black.



La fonction de transfert d'un système physique donné peut se mettre sous la forme :

$$H(P)=\frac{Y(P)}{U(P)}=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j P^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i}=\frac{K}{P^\alpha}\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(P-z_j\right)}{\prod_{i=1}^{n-\alpha}\left(P-p_i\right)} \qquad n \geq m$$

En basses fréquences

$$H(P) \approx \frac{K_0}{P^{\alpha}}$$

$$K_0 = K \frac{\prod_{j=1}^{m}(-z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\alpha}(-p_i)}$$

En basses fréquences, l'allure du lieu dépend de l'ordre de multiplicité α du pôle à l'origine.

α	0	1	2	3	4
H	K_0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
φ	0	-90	-180	-270	-360

Les droites d'équation φ =-90, φ =-180, φ =-270 et φ =-360 sont des asymptotes.

IV. 2 – ETUDE ASYMPTOTIQUE

En hautes fréquences

$$H(P) \approx \frac{K_\infty}{P^{n-m}} \qquad K_\infty = \frac{b_m}{a_n}$$

En hautes fréquences, l'allure du lieu dépend de n-m

n-m	0	1	2	3	4
H	$\lvert K_\infty \rvert$	0	0	0	0
φ	0	-90	-180	-270	-360

Les droites d'équation φ =-90, φ =-180, φ =-270 et φ =-360 ne sont plus des asymptotes.

$$H(P) = \frac{1}{1+TP}$$

En basses fréquences on a

$$H(P) \approx 1$$

$$H_{dB} \to 0$$

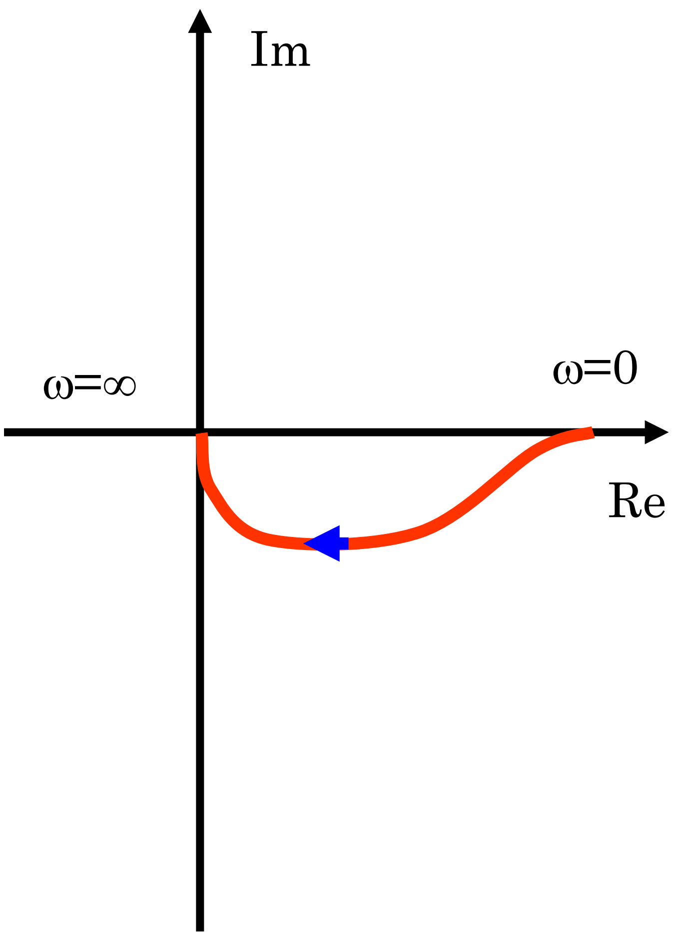
$$\varphi \to 0$$

En hautes fréquences on a :

$$H(P) \approx \frac{1}{TP}$$

$$H_{dB} \to -\infty$$

$$\varphi \to -90$$



$$H(P)=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+2m\omega_0P+P^2}$$

En basses fréquences on a

$$H(P)\approx 1$$

$$H\to 1$$

$$\varphi\to 0$$

En hautes fréquences on a :

$$H(P)\approx\frac{\omega_0^2}{P^2}$$

$$H\to 0$$

$$\varphi\to -180$$