

CHAPITRE V: STABILITÉ D'UN SYSTEME

1

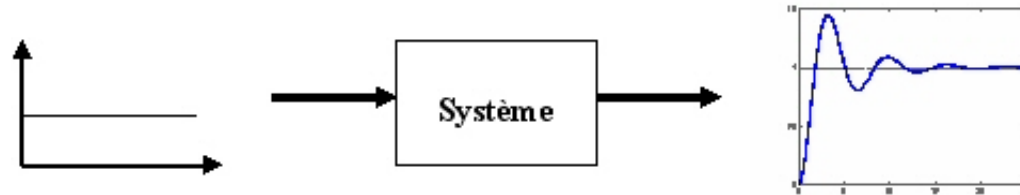


I. INTRODUCTION

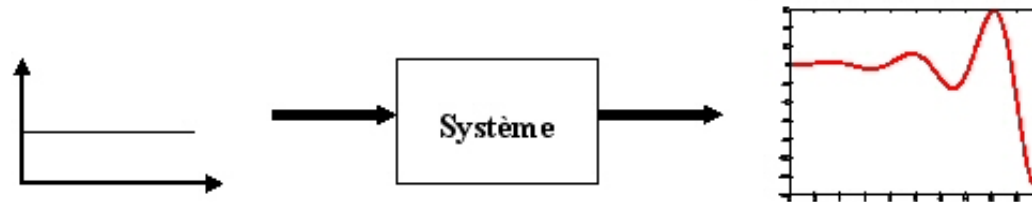
2

I.1 - DÉFINITION

Définition : un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



Exemple d'un système à comportement stable



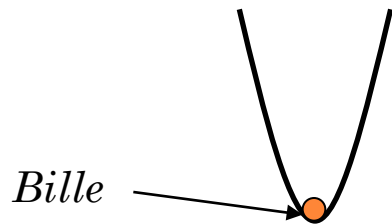
Exemple d'un système à comportement instable

Remarques :

- **Une autre définition** : Un système est stable si sa réponse libre tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.
- Etudier la réponse libre d'un système (sans excitation exogène), revient à écarter le système de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. Un système stable a tendance à revenir à sa position d'équilibre; un système instable a tendance à s'en écarter.

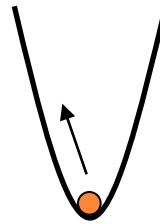
I.2 - ILLUSTRATION

Illustration simple d'un comportement stable :

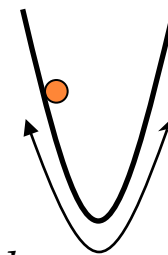


Bille

Système à l'équilibre



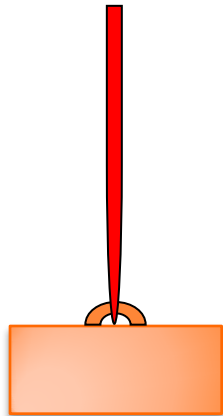
Ecartement de la position d'équilibre



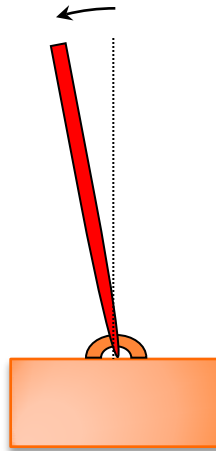
Basculement et retour à la position d'équilibre

Illustration simple d'un comportement instable :

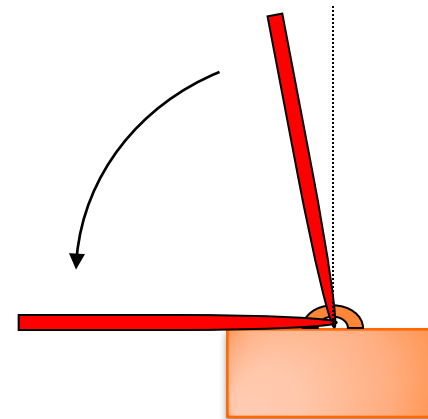
Pendule inversé



Système à l'équilibre



Ecartement de la position d'équilibre



Eloignement de la position d'équilibre

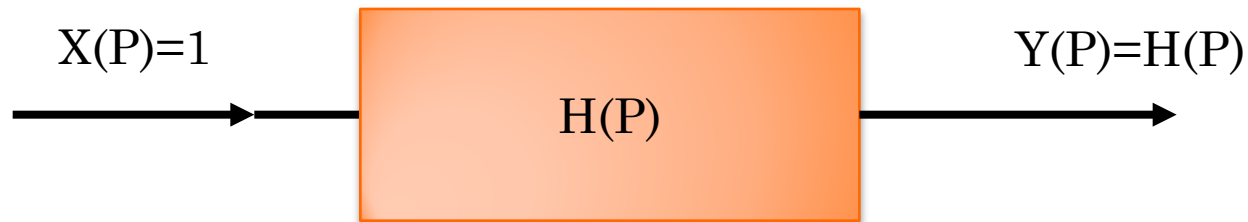


II. CRITÈRE MATHÉMATIQUE

5

II.1 – CONDITION DE STABILITÉ

Un système au repos est excité par une impulsion de Dirac. Si le système revient à sa position de repos, il est stable.



La réponse du système est $Y(P)=H(P)$. On décompose $H(P)$ en élément simple (on suppose qu'il n'y a pas de pôles multiples).

$$Y(P) = \sum \frac{A_i}{P - P_i} \quad y(t) = \sum A_i e^{P_i t} \quad y(t) = \sum A_i e^{\omega_i t} e^{\sigma_i t}$$

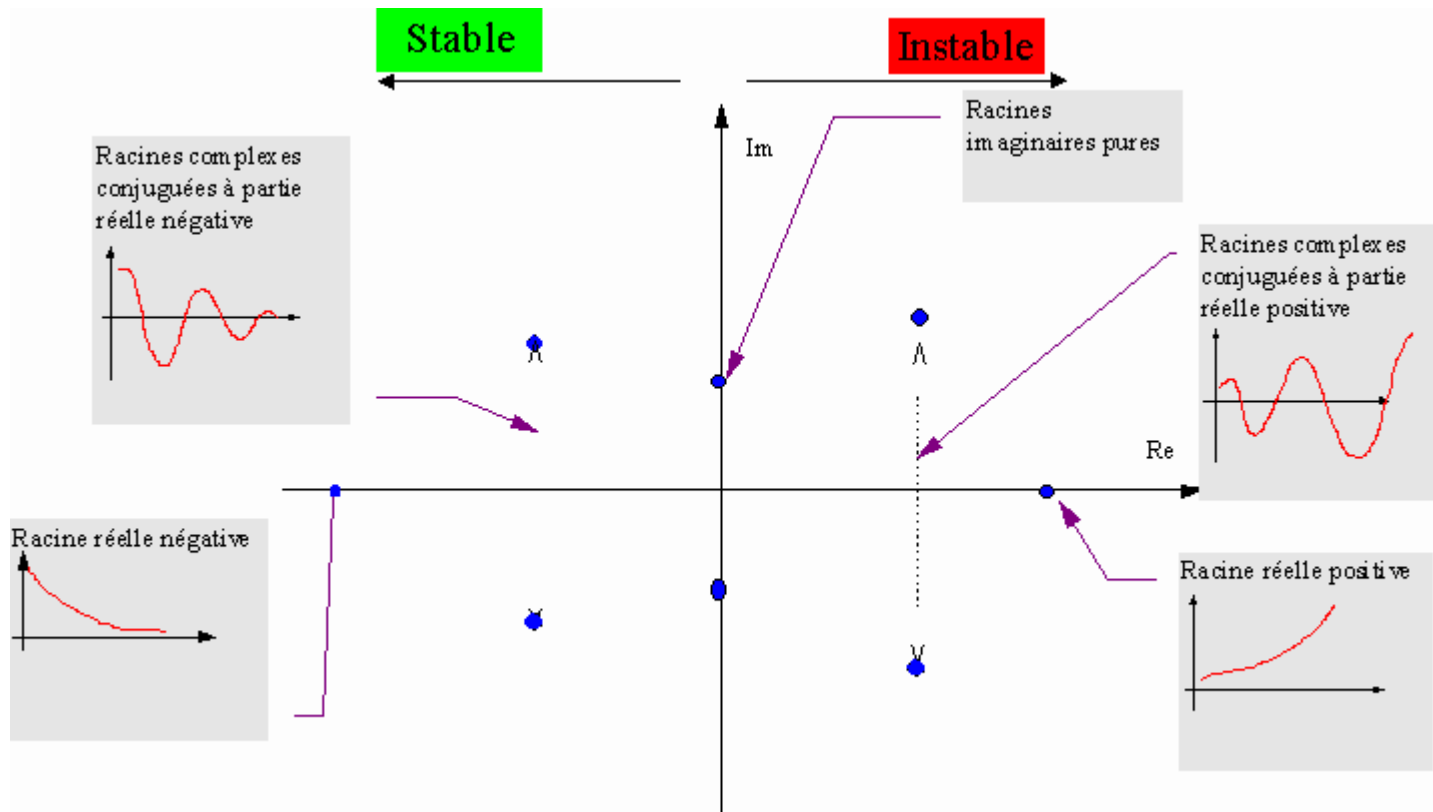
Chaque exponentielle ne revient à zéro que si la partie réelle de P_i est strictement négative.

II.2 - THÉORÈME

Un système n'est stable que si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe.

Si certains pôles sont sur l'axe imaginaires et que les autres sont à gauche, le système est à la limite de la stabilité.

ILLUSTRATION SUR UN SYSTÈME DU SECOND ORDRE





II. CRITÈRE DE ROUTH

9

II.1 - ÉNONCÉ

Soit
$$H(P) = \frac{N(P)}{D(P)}$$

Les pôles de $H(P)$ sont les zéros de $D(P)$

Ecrivons $D(P)$ sous la forme

$$D(P) = \sum_{i=0}^n a_i P^i \quad a_n > 0$$

L'équation $D(P)=0$ est appelée équation caractéristique du système

Si certains a_i sont négatifs ou nuls, $D(P)$ a des racines à droite dans le plan complexe. Le système est alors instable. Si tous les a_i sont positifs, on ne peut connaître la place des pôles qu'après examen de la première colonne d'un tableau appelée colonne de Routh.

II.1 - ÉNONCÉ

P^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	a_{n-8}
P^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	a_{n-9}
P^{n-2}	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
P^{n-3}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
....
P^1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
P^0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5

II.1 - ÉNONCÉ

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - A_2 a_{n-1}}{A_1}$$

$$B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - A_3 a_{n-1}}{A_1}$$

Routh a établi que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que tous les coefficients de la première colonne soient strictement positifs. Le nombre de changement de signe dans la colonne Routh est égal au nombre de racines à droite de l'axe imaginaire.

II.2 - EXEMPLES

Premier exemple

$$H(P) = \frac{1}{P^4 + 3P^3 - 3P^2 + 6P + 1}$$

Le système est instable à cause du (-3).

II.2 - EXEMPLES

Deuxième exemple

$$H(P) = \frac{1}{P^4 + 3P^3 + 3P^2 + 6P + 1}$$

Tous les coefficients étant positifs, on construit le tableau de Routh.

Le système est stable car, tous les coefficients de la première colonne sont positifs.

P ⁴	1	3	1
P ³	3	6	0
P ²	1	1	0
P ¹	3	0	0
P ⁰	1	0	0

II.2 - EXEMPLES

Troisième exemple

$$H(P) = \frac{1}{P^4 + 3P^3 + 2P^2 + 6P + 1}$$

Tous les coefficients étant positifs, on construit le tableau de Routh.

Si on a un zéro dans la première colonne et que certains coefficient de la même ligne sont non nuls, on le remplace par un nombre infiniment petit et positif

P ⁴	1	2	1
P ³	3	6	0
P ²	0	1	0
P ¹	Nan	Nan	Nan
P ⁰	?	?	?

P ⁴	1	3	1
P ³	3	6	0
P ²	ε	1	0
P ¹	A	0	0
P ⁰	1	0	0

Le système est instable car $A = \frac{6\varepsilon - 3}{\varepsilon} < 0$

II.2 - EXEMPLES

Quatrième exemple

$$H(P) = \frac{1}{P^4 + 3P^3 + 4P^2 + 3P + 3}$$

Tous les coefficients étant positifs, on construit le tableau de Routh.

Si on a une ligne nulle :

Le système a des pôles imaginaires pures.

On construit un polynôme auxiliaire à partir de la ligne du dessus

Ses racines sont les pôles imaginaires purs.

On remplace la ligne nulle par la dérivée du polynôme auxiliaire.

P ⁴	1	4	3
P ³	3	3	0
P ²	3	3	0
P ¹	0	0	0
P ⁰	?	?	?

$$3P^2 + 3$$

$$6P + 0$$

II.2 - EXEMPLES

Quatrième exemple

P^4	1	4	3
P^3	3	3	0
P^2	6	0	0
P^1	1	0	0
P^0	1	0	0

Tous les coefficients de la colonne de Routh sont positifs, le système est à la limite de la stabilité.

III.3 - CONCLUSION

Le critère de Routh permet de savoir rapidement si un système a des pôles instables sans pour autant les calculer.

Sa mise en œuvre nécessite la connaissance algébrique de la fonction de transfert.

Il donne une stabilité absolue (stable ou non). Il ne donne pas de marge de stabilité.

Il permet d'étudier la stabilité d'un système en boucle ouverte et en boucle fermée.



III. CRITÈRE DE NYQUIST

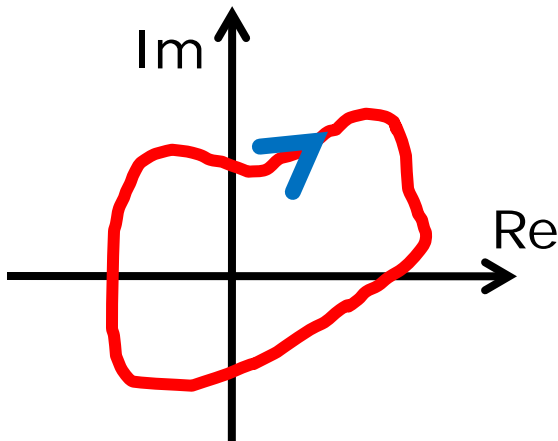
19

III.1 – THÉORÈME DE CAUCHY

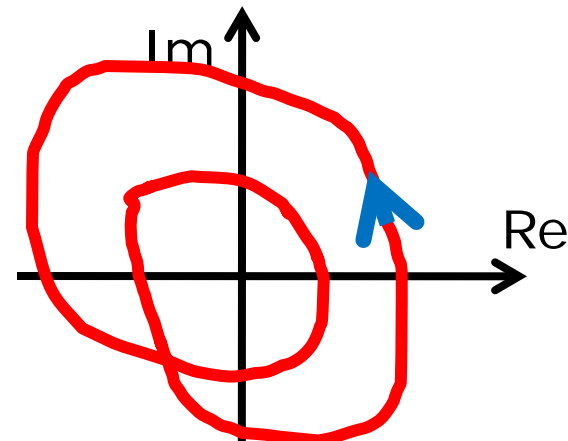
Soit une fonction complexe $F(P)$ de la variable complexe P .

$$F : \quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$P \longmapsto F(P) = R(P)D(P)$$

On considère un point A d'affixe P et un point B d'affixe $F(P)$. Si A décrit une courbe fermée (ξ) dans le plan complexe, alors B décrit une courbe fermée (Γ) dans le plan complexe. Les deux courbes se correspondent point par point.



Plan de P



Plan de $F(P)$

III.1 – THÉORÈME DE CAUCHY

Le théorème de Cauchy permet de déterminer le nombre N de tours qu'effectue le point B autour de l'origine dans le sens trigonométrique lorsque le point A décrit entièrement la courbe (ξ) dans le sens horaire.

$$N = p - z \quad \text{Ou encore} \quad z = p - N$$

N : nombre de tours autour de l'origine

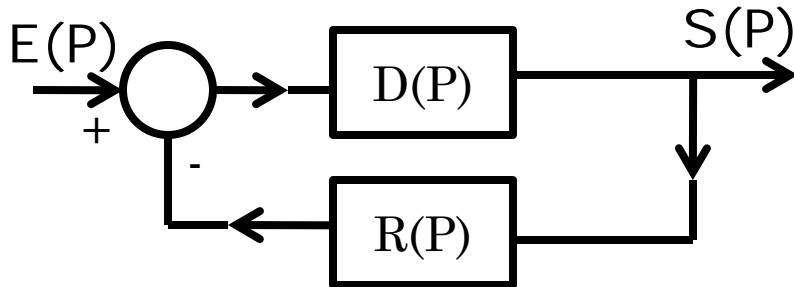
p : nombre de pôles de $F(P)$ à l'intérieur (ξ)

z : nombre de zéros de $F(P)$ à l'intérieur de (ξ)

III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

principe

soit le système suivant :



$$H(P) = \frac{D(P)}{1 + D(P).R(P)}$$

La stabilité du système est déterminée par les pôles de $H(P)$; c'est à dire les zéros de $1 + R(P).D(P)$

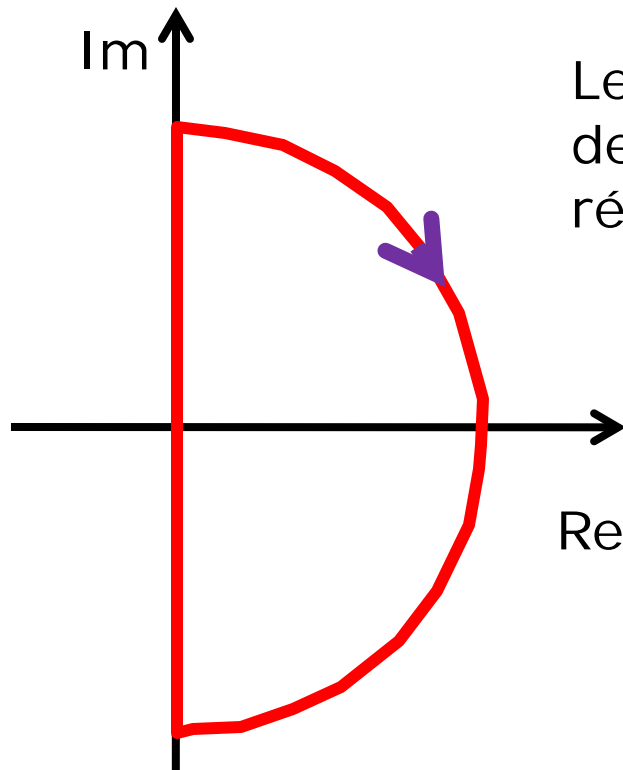
Lorsque A décrit (ξ) , $1 + R(P).D(P)$ décrit une courbe (Γ') et $R(P).D(P)$ décrit une courbe (Γ) .

Le nombre de tours de (Γ') autour de l'origine est égal au nombre de tours de (Γ) autour de (-1) .

III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

Choix du contour (ξ)

Le choix du contour (ξ) dépend de la fonction de transfert. Lorsque celle-ci n'a pas de pôles à l'origine on choisit la courbe suivante :

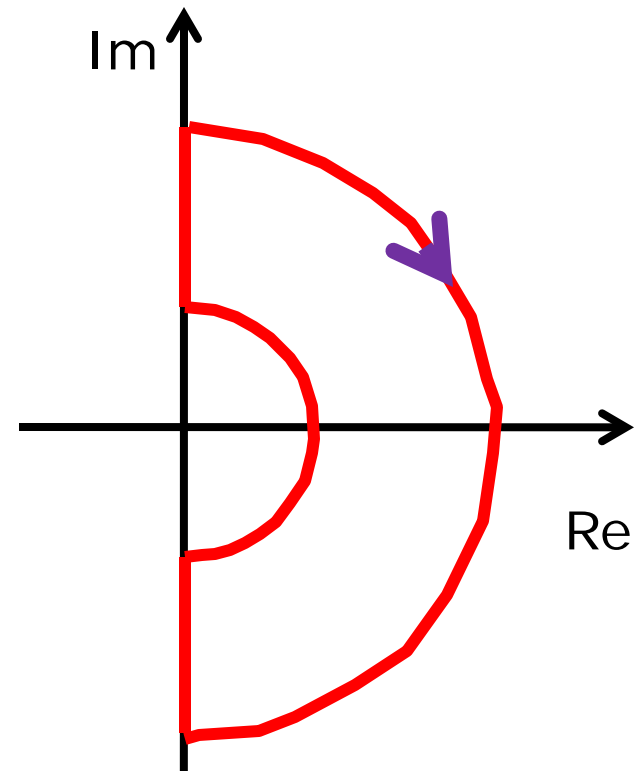
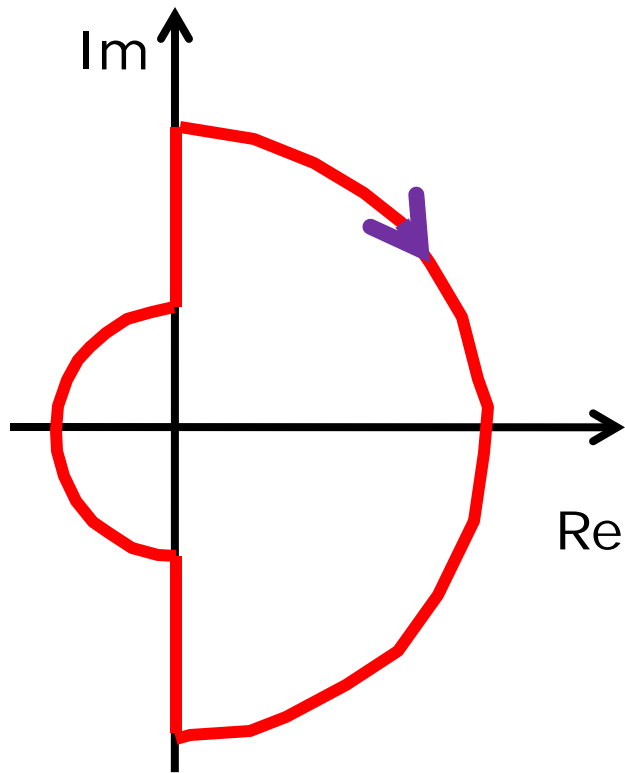


Le contour (ξ) entoure la totalité des nombres complexes à partie réelle positive.

III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

Choix du contour (ξ)

Lorsque la fonction de transfert a au moins un pôle à l'origine on choisit l'une des courbes suivantes :



III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

Remarque

La courbe (ξ) entoure la totalité du demi plan complexe de droite. Elle contient tous les nombres complexes à partie réelle positive.

Pour que le système soit stable en boucle fermée, il faut qu'il n'y ait pas de zéros à l'intérieur de la courbe (ξ). C'est à dire qu'il faut que $z=0$. Ce qui permet d'énoncer le théorème de Nyquist :

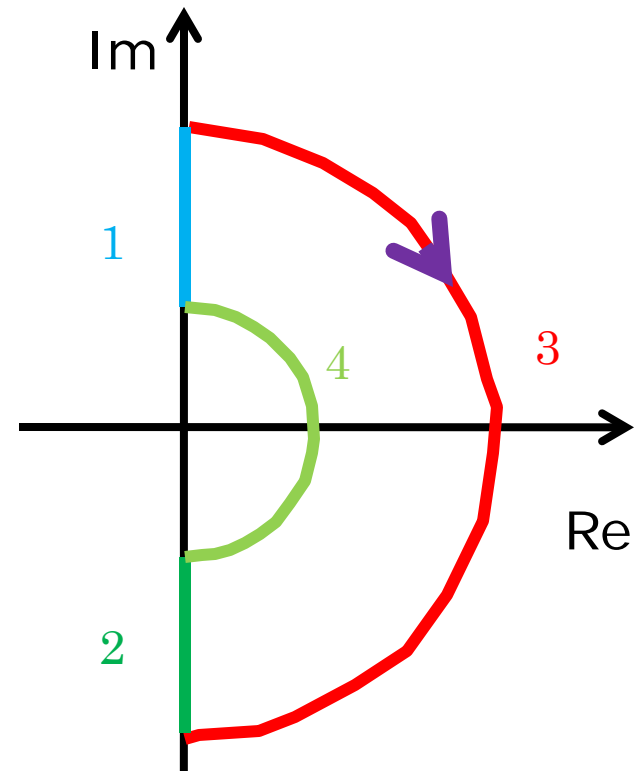
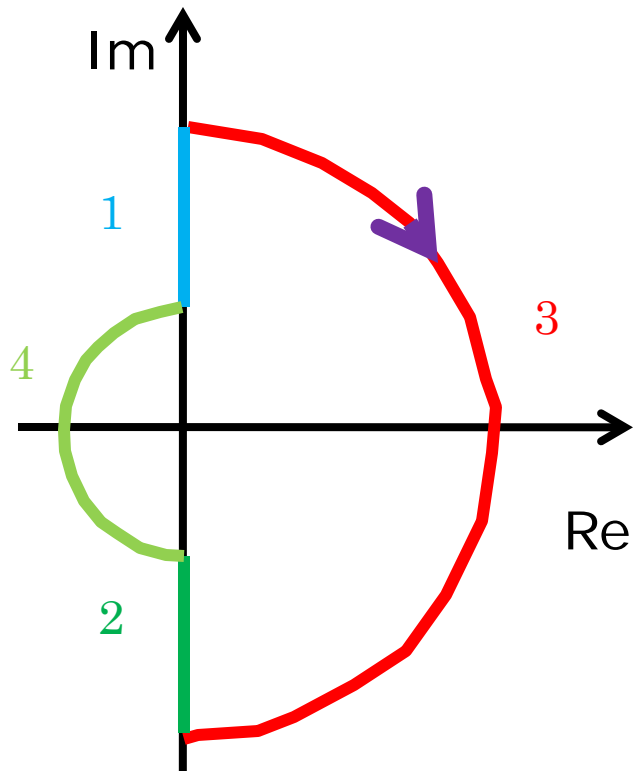
Enoncé

Un système $R(P).D(P)$ sera stable en boucle fermée, si son lieu de Nyquist entoure le point critique (-1) un nombre de fois égal au nombre de pôles à l'intérieur de (ξ).

III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

Construction du contour (Γ)

La courbe (Γ) est l'image de la courbe (ξ) par la transformation $F(P)$. On décompose la courbe (ξ) en plusieurs branches (trois ou quatre) et on détermine l'image de chaque branche.



III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

Construction du contour (Γ)

Branche 1 : $P=j\omega$ L'image de la branche 1 est le lieu de Nyquist tel que décrit dans le chapitre précédant.

Branche 2 : $P=-j\omega$ L'image de la branche 2 est le symétrique de l'image de la branche 1 par rapport à l'axe des réels.

Branche 3 : $H(P) \approx \frac{K_\infty}{P^{n-m}}$
 $|H(P)| \rightarrow 0$ L'image de cette branche se confond avec l'origine du repère.

Branche 4 : $H(P) \approx \frac{K_0}{P^\alpha}$
 $|H(P)| \rightarrow +\infty$ L'image de la branche 4 est un arc de cercle de rayon infini.

III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

P	0 ⁻	0 ⁺	Sens trigo
Arg(P)	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	Sens trigo
Arg($\frac{1}{P^\alpha}$)	$\alpha\frac{\pi}{2}$	$-\alpha\frac{\pi}{2}$	Sens horaire

Ou

P	0 ⁻	0 ⁺	Sens horaire
Arg(P)	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	Sens horaire
Arg($\frac{1}{P^\alpha}$)	$\alpha\frac{\pi}{2}$	$-\alpha\frac{\pi}{2}$	Sens trigo

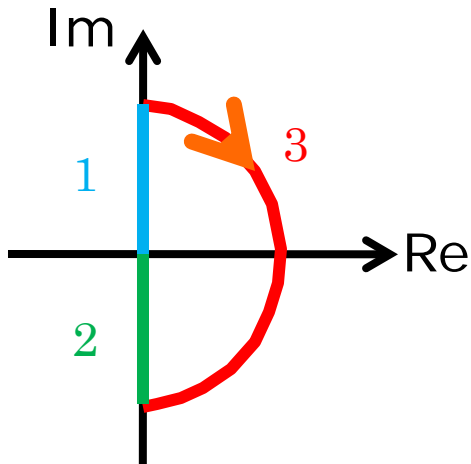
Remarque : Lorsque la courbe de $F(P)$ passe par le point critique, le système est à la limite de la stabilité en boucle fermée. La fonction de transfert possède alors des pôles imaginaires purs et conjugués.

III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

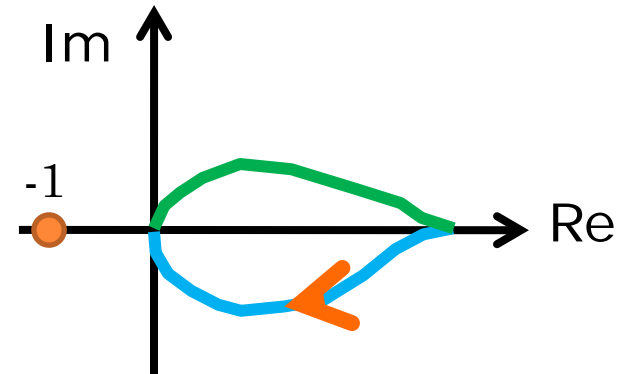
Exemples

$$F(P) = \frac{1}{P+2}$$

Le système n'a pas de pôle à l'origine. On choisit le contour suivant :



Le nombre de pôles à l'intérieur du contour est $p=0$



Le nombre de tours autour du point critique est $n=0$

D'après le théorème de Cauchy, $z=p-n=0$

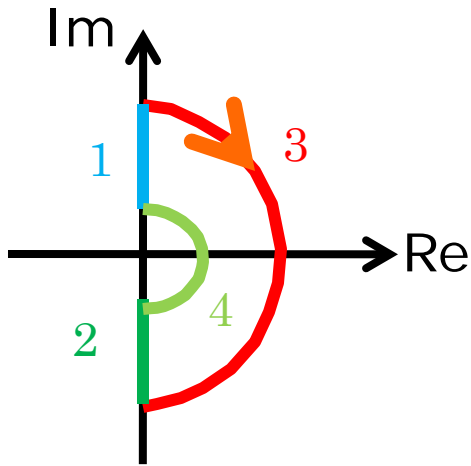
Le système n'aura pas de pôles à l'intérieur du contour (ξ) en boucle fermé. Il sera stable.

III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

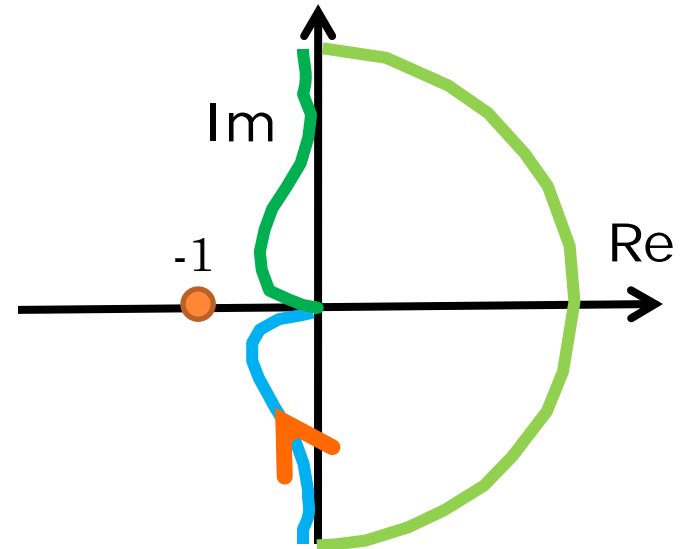
Exemples

$$F(P) = \frac{1}{P(P+2)}$$

Le système a un pôle à l'origine.
On choisit le contour suivant :



Le nombre de pôles à l'intérieur du contour est $p=0$



Le nombre de tours autour du point critique est $n=0$

D'après le théorème de Cauchy, $z=p-n=0$

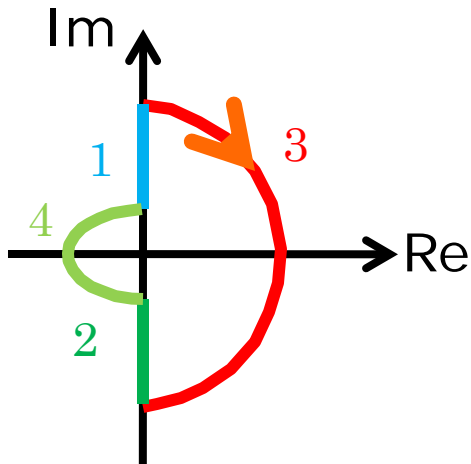
Le système n'aura pas de pôles à l'intérieur du contour (ξ) en boucle fermé. Il sera stable.

III.2 – APPLICATION À LA STABILITÉ

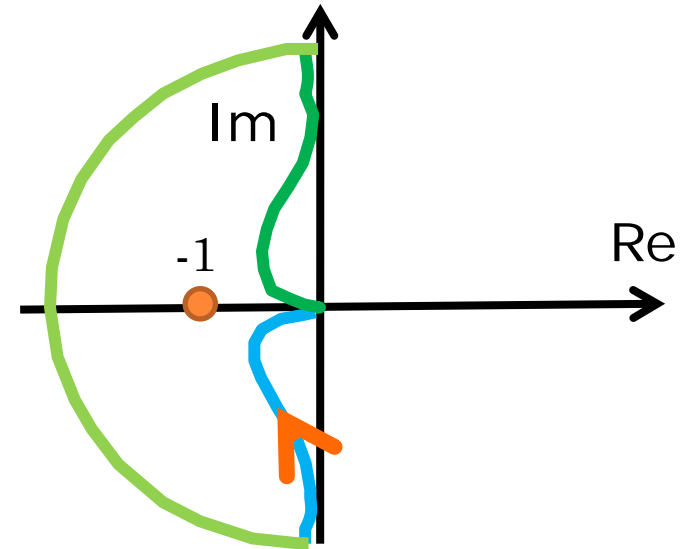
Exemples

$$F(P) = \frac{1}{P(P+2)}$$

Le système a un pôle à l'origine.
On choisit le contour suivant :



Le nombre de pôles à l'intérieur du contour est $p=1$



Le nombre de tours autour du point critique est $n=1$

D'après le théorème de Cauchy, $z=p-n=0$


Le système n'aura pas de pôles à l'intérieur du contour (ξ) en boucle fermé. Il sera stable.

III.3 - CONCLUSION


Le critère de Nyquist permet :



De savoir si un système est suffisamment stable



Sa mise en œuvre nécessite le lieu de Nyquist



D'étudier la stabilité d'un système en boucle fermée à partir de sa fonction de transfert en boucle ouverte.



IV. CRITÈRE DU REVERS

33

IV.1 - ÉNONCÉ

Le critère du revers est un cas particulier du critère de Nyquist.

Il ne s'applique qu'à des systèmes stables en boucle ouverte et à déphasage minimale (en boucle ouverte, le système n'a ni zéros ni pôles à droite de l'axe imaginaire).

IV.1 – DANS LE PLAN DE NYQUIST

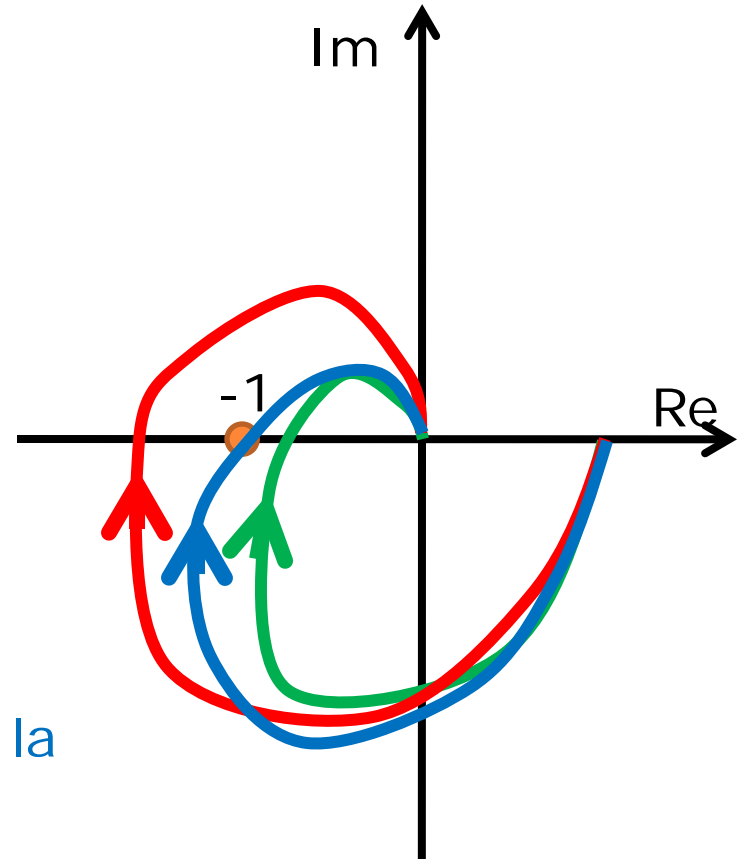
Il suffit de tracer la partie du lieu de Nyquist qui correspond à $\omega \in [0; \infty]$ et de vérifier qu'il laisse le point critique (-1) à gauche.

Pour $\varphi = -180^\circ$

Si $F < 1$ le système est stable en boucle fermée.

Si $F > 1$ le système est instable en boucle fermée

Si $F = 1$ le système est à la limite de la stabilité en boucle fermée.



IV.1 – DANS LE PLAN DE BLACK

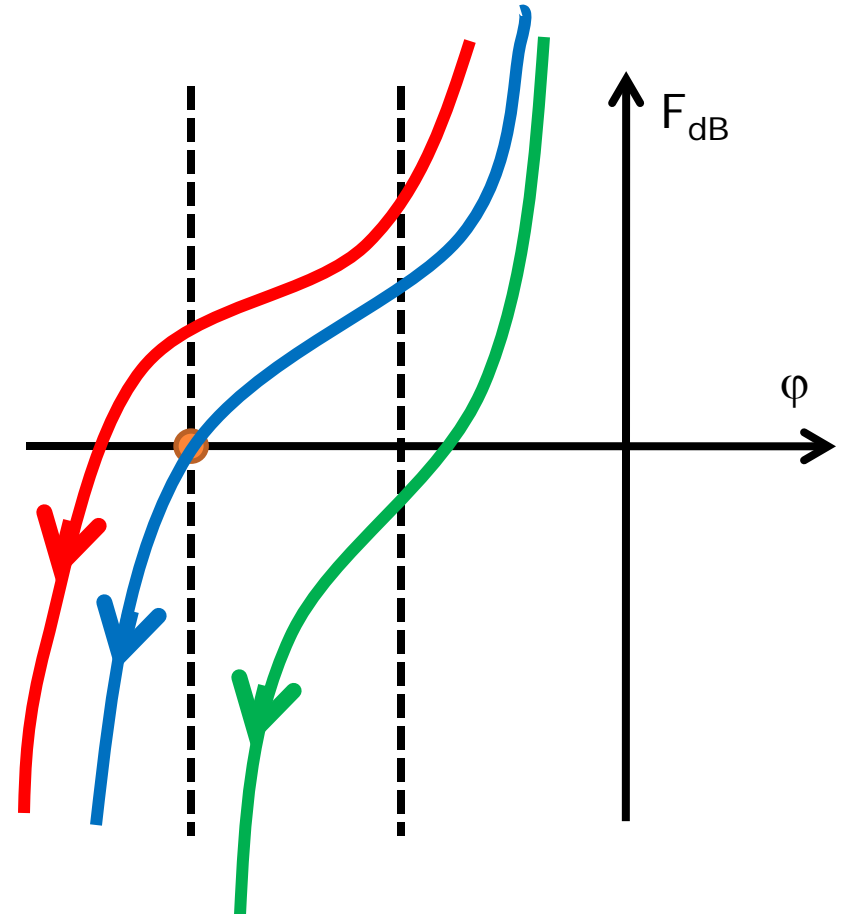
Dans le plan de Black, le point critique a pour coordonnées $(-180^\circ, 0\text{dB})$. Un contour qui laisse le point critique à gauche dans le plan de Nyquist, le laisse à droite dans le plan de Black en descendant.

Pour $\varphi = -180^\circ$

Si $F_{\text{dB}} < 0$ le système est stable en boucle fermée.

Si $F_{\text{dB}} > 0$ le système est instable en boucle fermée

Si $F_{\text{dB}} = 0$ le système est à la limite de la stabilité en boucle fermée.



IV.1 – DANS LE PLAN DE BODE

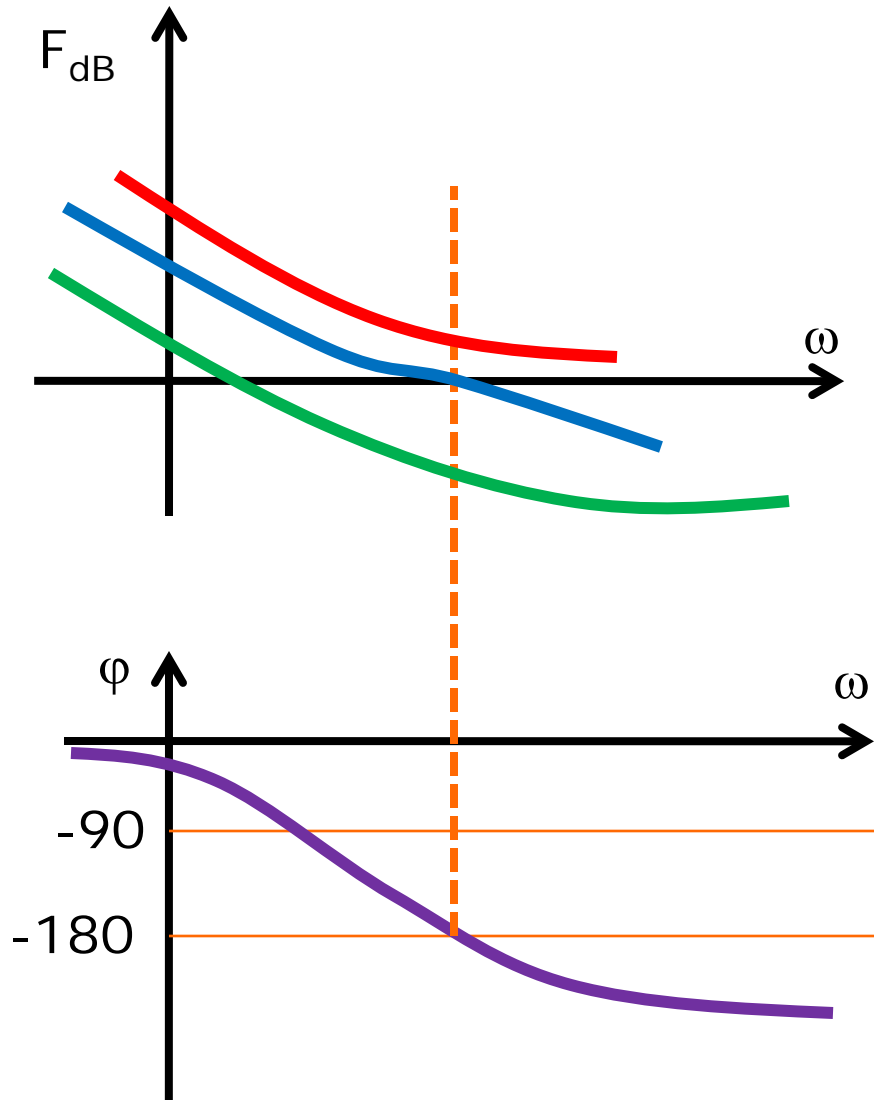
Dans le plan de Bode, le critère du revers devient :

Pour $\varphi = -180^\circ$

Si $F_{dB} < 0$ le système est stable en boucle fermée.

Si $F_{dB} > 0$ le système est instable en boucle fermée

Si $F_{dB} = 0$ le système est à la limite de la stabilité en boucle fermée.



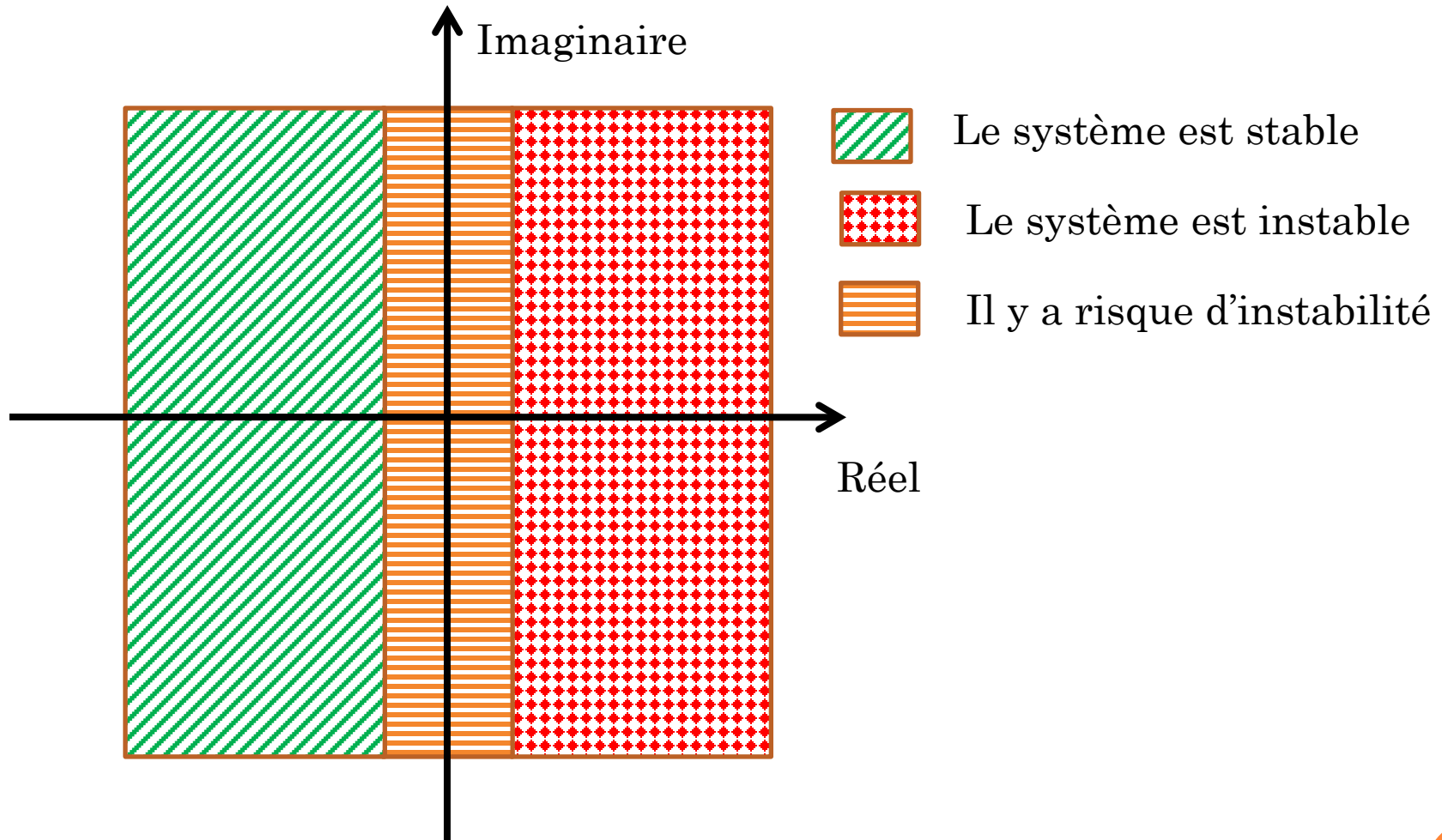


V. MARGE DE STABILITÉ

38

V.1 - DÉFINITION

Il faut que les pôles soient à parties réelles négatives mais en plus il faut que les parties réelles ne soient pas faibles en valeur absolue.



V.1 - DÉFINITION

Pour les systèmes stables en boucle fermée, on définit les marges de stabilité.

Définition : une marge de stabilité est la distance à respecter entre le point critique et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte.

L'avantage des critères géométriques, est qu'ils permettent d'identifier les **marges de stabilité**.

On définit deux marges de stabilité : la **marge de Gain (MG)** et la **marge de Phase (MP)**.

MG correspond à l'augmentation de gain qui amènerait le système à l'instabilité.

MP correspond à la diminution de phase qui amènerait le système à l'instabilité.

V.1 - DÉFINITION

Les expressions pour calculer la marge de gain et de phase sont :

$$MG = -20 \log |F(j\omega_1)| ; \quad \omega_1 \text{ est telle que } \text{Arg}[F(j\omega_1)] = -180^\circ$$

$$MP = 180 + \text{Arg}[F(j\omega_c)] ; \quad \omega_c \text{ est telle que } 20 \log |F(j\omega_c)| = 0$$

Les valeurs usuelles des marges de stabilité permettant le réglage sont :

Marge de Gain : **10dB à 15dB**

Marge de Phase : **40° à 45°**

MARGE DE GAIN ET DE PHASE DANS LE PLAN DE BLACK

Marge de Gain (MG)

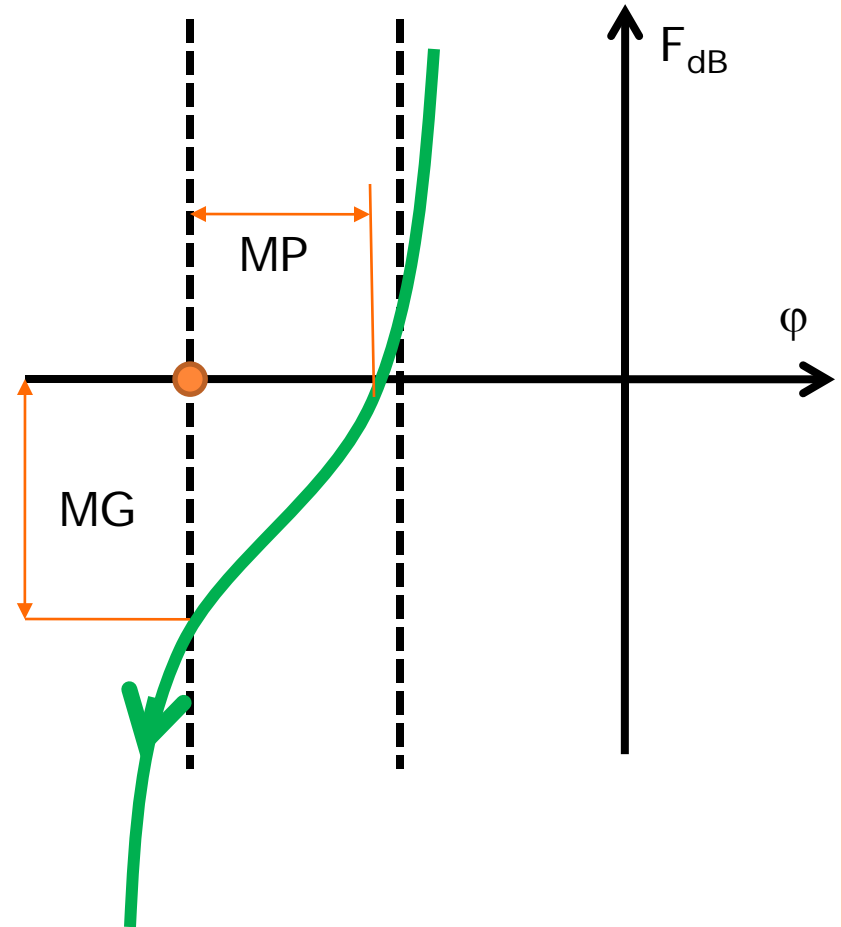
C'est la distance entre l'intersection du lieu de transfert en boucle ouverte avec la droite passant par l'argument -180° et le point critique ($-180^\circ, 0dB$)

Marge de Phase (MP)

C'est la distance entre l'intersection du lieu de transfert en boucle ouverte avec l'axe des abscisses et le point critique.

$$MG = -20 \log |F|_{\varphi=-180^\circ}$$

$$MP = 180 + [\arg F(P)]_{F=1}$$



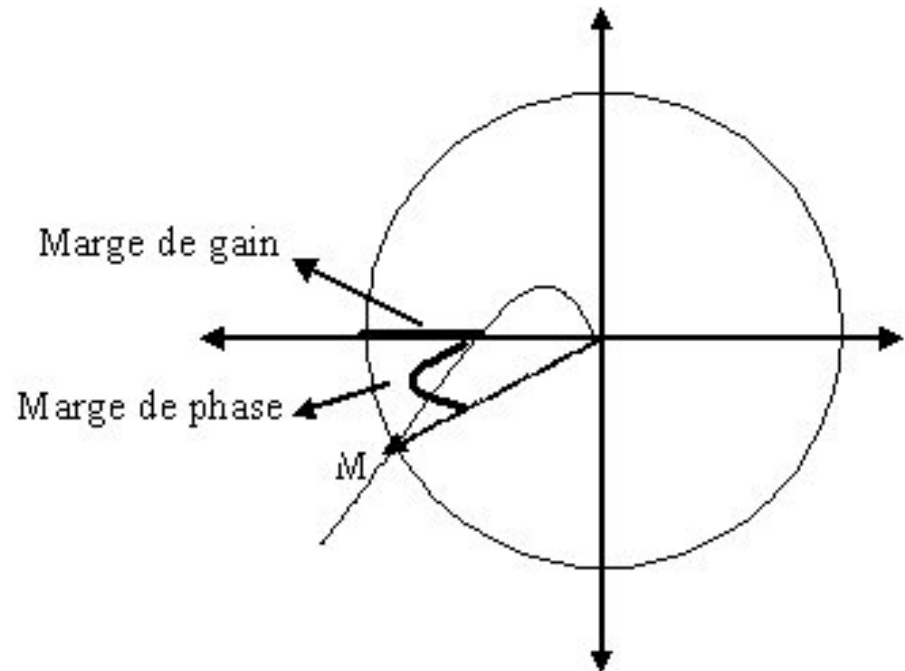
MARGE DE GAIN ET DE PHASE DANS LE PLAN DE NYQUIST

Marge de Gain (MG)

C'est la distance entre le point critique et l'intersection du lieu de Nyquist avec l'axe des réels.

Marge de Phase (MP)

C'est l'angle entre l'axe des réel négatif et le vecteur OM . Le point M correspond à l'intersection du lieu de transfert $FTBO(j\omega)$ avec le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon unité. La pulsation en ce point est ω_1 .



MARGE DE GAIN ET DE PHASE DANS LE PLAN DE BODE

Marge de Gain (MG)

On détermine la pulsation w_c pour laquelle le déphasage est de -180° , la marge de gain est la distance (en dB) entre la courbe et l'axe des abscisses.

Exemple ci-dessous

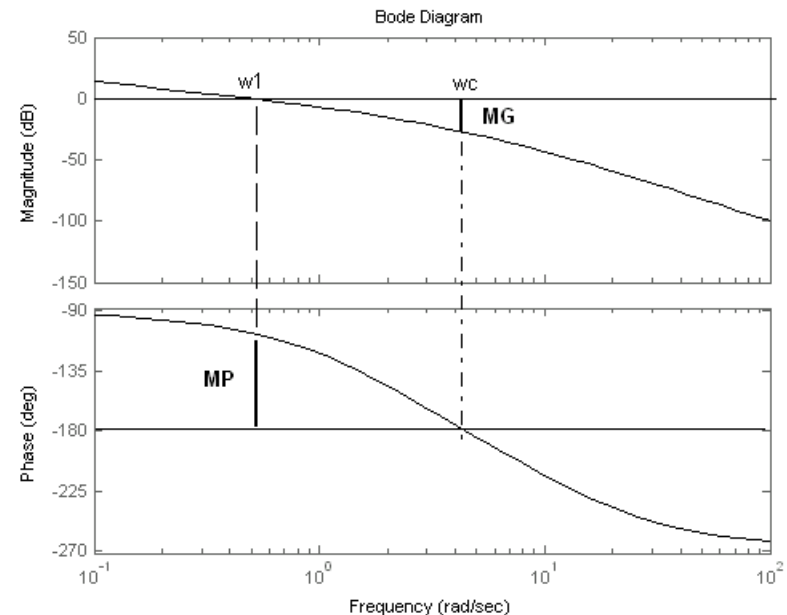
$w_c = 4.5$; $MG = 27$ db.

Marge de Phase (MP)

On détermine la pulsation w_1 pour laquelle le gain est 0 dB, on mesure la distance entre la courbe de phase et -180° .

Exemple ci-dessous :

$w_1 = 0.5$; $MP = 75^\circ$.



CONCLUSION

