



Année Scolaire : 2021-2022

Niveau RT&L2

Cours d'Automatique

SORO Kadiolotien

PROGRESSION

Chapitre1 : **INTRODUCTION A L'AUTOMATIQUE**

Chapitre2 : **MODELISATION DES SYSTEMES LINEAIRES
NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT**

Chapitre3 : **ÉTUDE SYSTEMATIQUE DES SYSTEMES
DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE**

Chapitre4 : **MODELISATION FREQUENTIELLE DES
SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS**

Chapitre5 : **STABILITE DES SYSTEMES
LINEAIRES ASSERVIS**

INTRODUCTION A L'AUTOMATIQUE

1 - GENERALITES

1.1. Définitions

Système : un système est un ensemble d'éléments liés entre eux dans le but de réaliser une tâche donnée. Ce dispositif, soumis aux lois physiques, est caractérisé par des grandeurs de deux types :

Les entrées (signaux = informations de l'extérieur \equiv causes).

les sorties (effets).

On parle également, pour cet ensemble de lois d'évolution de différentes grandeurs physiques, de processus, terme également utilisé pour l'installation matérielle dont le fonctionnement est régi par ces lois.

Système automatique : c'est un système fonctionnant correctement quelque soit les circonstances, sans intervention de l'opérateur humain (exécution automatique de tâches industrielles, administratives, scientifiques...).

Commande d'un système : consiste à exercer, via les entrées, une influence sur le système (flux d'énergie,...) de manière à obtenir en sortie un comportement déterminé.

Automatisation : elle consiste à remplacer un système de commande manuelle par un système à commande automatique.

Automatique : science et technique de l'automatisation, qui étudient les méthodes scientifiques et les moyens technologiques utilisés pour la conception et la construction de systèmes automatiques.

Remarque : Les systèmes automatiques copient le plus souvent le comportement de l'homme.

Exemples :

- pilotage d'un navire : pilote automatique
- pilotage d'une voiture :
 - organes de commande : cerveau et membres,
 - décisions (entrées) : direction, freinage, accélération,
 - effets (sorties) : position véhicule/route, vitesse du véhicule,

- observations (mesures) : œil (bord de route, compteur),
- critères de performance : durée trajet, confort, consommation règlementation, ...

Cet exemple révèle les trois opérations fondamentales accomplies :

- observation
- réflexion
- action

Cette structure à trois phases met en évidence une opération de bouclage ; ce retour constitue l'une des notions fondamentales de l'automatique.

2.2. Les buts et les différentes branches de l'automatique

Les systèmes automatiques permettent :

- de réaliser les opérations trop complexes, pénibles ou délicates et ne pouvant être confiées à l'homme,
- de substituer la machine à l'homme dans des opérations trop répétitives ou sans intérêt,
- d'accroître les performances d'un système telles que la précision (ex : différence de précision entre un obus tiré par un canon et un missile), la rapidité, ou rendre stable un système naturellement instable.

Il existe deux grands types de systèmes automatiques :

- **les systèmes logiques combinatoires et séquentiels**, câblés ou programmés qui n'ont pas nécessairement une structure bouclée, c'est-à-dire qui ne prennent pas en considération une mesure de l'état courant du système. De plus l'automatisation porte sur un nombre fini d'opérations prédéterminées dans leur déroulement (exemple: programmeur de machine à laver). De tels systèmes sont appelés systèmes à "événements discrets" ou encore "automatismes séquentiels".
- **les systèmes asservis**, fonctionnant en régulation de maintien ou en poursuite d'une loi de référence. Dans ces cas, toutes les situations possibles n'étant pas prévisibles (ex : arrivée d'une perturbation), le déroulement des opérations ne peut être prédéterminé à l'avance. Les systèmes asservis sont nécessairement bouclés, c'est-à-dire qu'une mesure de la situation est en permanence prise en considération dans la détermination de la commande.

MODELISATION DES SYSTEMES LINEAIRES

NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT

1. INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des réponses R à des sollicitations S (figure 1). Ainsi, un système électrique pourra être étudié et caractérisé en exprimant une tension de sortie (réponse) en fonction d'une tension d'entrée (sollicitation). Ou encore, la position d'un amortisseur de véhicule (réponse) pourra être étudiée en fonction de l'excitation produite par les irrégularités de la route. Un faisceau de lumière (sollicitation) dirigé vers une face d'un matériau et qui ressort au travers d'une autre face (réponse) peut par exemple renseigner sur l'état du dit matériau.

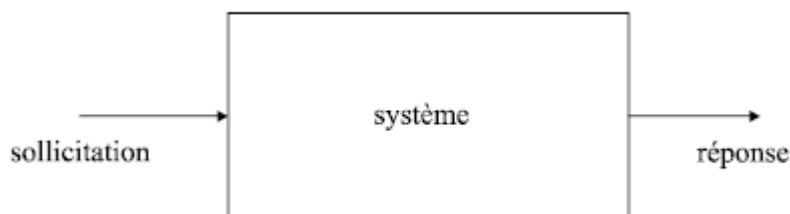


Figure 1 Modèle général d'un système.

Les exemples peuvent être multipliés à l'infini, car finalement, cette modélisation peut s'appliquer à la quasi totalité des objets physiques, et ce, que ce soit en électricité, en mécanique, en chimie, en optique, etc. Tout système peut donc s'apparenter au modèle proposé sur le schéma de la figure 1.

2. NOTION DE SIGNAL

Nous pouvons donc avoir une première approche des systèmes en considérant le couple (sollicitation -réponse).

Imaginons un système optique réfléchissant vers lequel on dirige un faisceau de lumière. Le faisceau réfléchi constitue en quelque sorte une information, au sens où il est porteur d'une certaine signification.

Nous le qualifierons de *signal*, tout comme le faisceau incident, puisqu'on ne saurait admettre que la réponse d'un système soit porteuse d'information si la sollicitation ne l'était pas.

D'une manière générale, toute sollicitation ou réponse d'un système sera considérée comme un *signal*.

Les sollicitations ou excitations sont des signaux d'entrée et les réponses sont des signaux de sortie.

Pour le moment, nous ne considérerons que des systèmes mono-entrée, mono-sortie. Par convention, l'entrée sera notée e et la sortie sera notée s .

2.1. Signaux temporels

Le moyen qui *a priori* semble le plus naturel pour décrire un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps. Ainsi les formes $e(t)$ et $s(t)$ sont-elles des représentations temporelles des signaux e et s .

Ainsi, un système quelconque est capable de prendre un signal $e(t)$ et de la transformer en un signal $s(t)$.

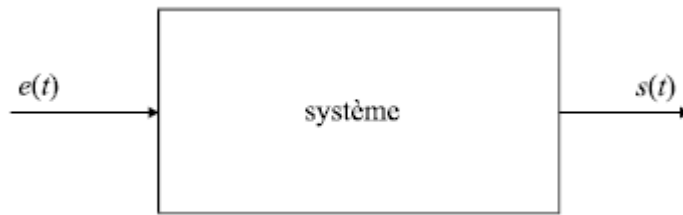


Figure 2 Modèle général d'un système.

2.2. Principe de causalité

Un effet ne pouvant survenir qu'après la cause qui lui a donné naissance, la réponse temporelle d'un système ne peut en aucun cas précéder la sollicitation qui en est la cause.

2.3. Signaux non temporels

La théorie des signaux ne traite pas que des signaux temporels. Si par exemple on considère une image en noir et blanc, statique sur un écran, le signal que constitue cette image peut être considéré comme une luminosité dépendant de deux variables spatiales (x, y) .

Dans ce cas, la variable temps n'a rien à voir avec le problème. D'autres cas pourraient être cités en exemple. Dans ces cas où t n'intervient pas, on peut s'attendre à ce que le principe de causalité ne soit pas respecté.

Nous utiliserons dans la suite de ce chapitre, l'exemple de signaux temporels appliqués à des systèmes simples : les systèmes linéaires.

3. LE CAS DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Considérons un système et un signal d'entrée $e(t)$ qui est une combinaison linéaire de n signaux :

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \dots + \lambda_n e_n(t)$$

On définira comme système linéaire tout système qui conserve au niveau de sa sortie la combinaison linéaire d'entrée, chaque $s_i(t)$ étant la sortie correspondant à $e_i(t)$.

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \dots + \lambda_n s_n(t)$$

La plupart du temps, ces systèmes sont régis par des équations différentielles à coefficients constants.

Soit $e(t)$ le signal d'entrée, $s(t)$ le signal de sortie. L'équation générale d'un système linéaire s'écrit de la manière suivante :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

Ces systèmes conservent toutes les opérations linéaires (dérivation, intégration, ...). Le plus grand des deux indices n et m est appelé ordre du système.

Lorsque le système est effectivement excité par un signal $e(t)$, cette équation différentielle possède effectivement un second membre. Si le système est libre et isolé, le second membre est nul.

4. LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

4.1. Définition

Considérant une fonction réelle d'une variable réelle $s(t)$ telle que $s(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformée de Laplace $L(s)$ comme la fonction S de la variable complexe p telle que :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt$$

La fonction $s(t)$ s'appelle l'original de $S(p)$, ou encore sa transformée inverse.

4.2. Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace

a) Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration. Il s'agit là, malgré des apparences de simplicité, d'une des propriétés les plus importantes :

$$L[\alpha f + \beta g] = \alpha L[f] + \beta L[g]$$

$$L[f + g] = L[f] + L[g]$$

$$L[kf] = kL[f]$$

b) Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction du temps. Soit $F(p)$ sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de $F(p)$:

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) - f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée n -ième est :

$$\frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} \left(p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} f}{dt^{k-n-1}}(0) \right) \quad \text{Par exemple :}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

Remarque : Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) \quad ; \quad \frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p)$$

c) Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$P(t) = \int f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p}$$

Remarque : Dans le cas où la condition initiale $P(0)$ est nulle, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement la relation suivante :

$$P(t) = \int f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p}$$

d) Propriétés de changement d'échelle

$$f(kt) \rightarrow \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

Remarque : On veillera à ne pas confondre ces deux propriétés avec la linéarité de la transformation de Laplace.

e) Théorème du retard

Considérons la fonction $f(t - \tau)$, autrement dit la fonction $f(t)$ à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 1.3), autrement dit un retard d'un temps τ .

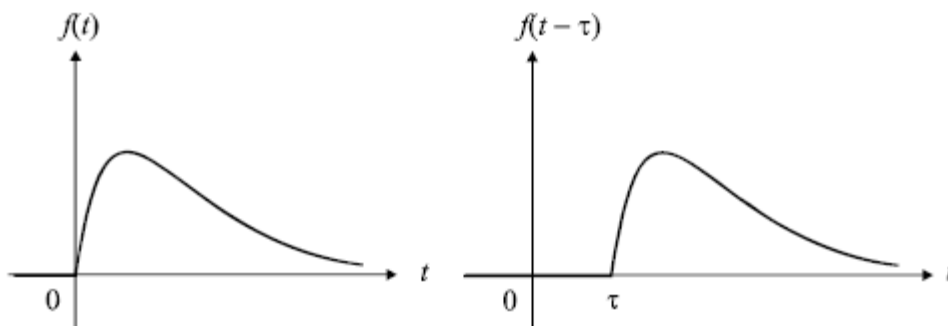


Figure 1.3 Représentation temporelle d'un signal retardé.

Calculons la transformée de Laplace de cette fonction.

On a :

$$f(t) \rightarrow F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable $u = t + \tau$:

$$F(p) = \int_{\tau}^{+\infty} f(u - \tau) e^{-p(u-\tau)} du$$

En remarquant que la fonction $f(u - \tau)$ est nulle pour $t < \tau$, on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, lui choisir une borne d'intégration inférieure plus faible que τ :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(u - \tau) e^{-p(u-\tau)} du$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{p\tau} f(u - \tau) e^{-pu} du$$

$$F(p) = e^{p\tau} \int_0^{+\infty} f(u - \tau) e^{-pu} du$$

Par définition, $\int_0^{+\infty} f(u - \tau) e^{-pu} du$ est la transformée de Laplace de $f(t - \tau)$.

$$f(t - \tau) \rightarrow F(p) e^{-p\tau}$$

Cette relation constitue le théorème du retard qui permet de calculer la transformée de Laplace d'une fonction retardée d'un temps τ si l'on connaît la transformée de Laplace de la fonction non retardée.

f) Théorème de la valeur initiale

Considérons la transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

La transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$ est :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

Lorsque $p \rightarrow +\infty$, on a $e^{-pt} \rightarrow 0$, donc : $pF(p) - f(0) \rightarrow 0$

Nous retiendrons : $f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} [pF(p)]$

g) Théorème de la valeur finale

Encore plus utile que le théorème précédent, le théorème de la valeur finale permet de calculer la limite quand t tend vers l'infini d'une fonction temporelle $f(t)$ en connaissant uniquement sa transformée de Laplace

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)]$$

h) Propriétés diverses

Sans être fondamentales, les trois propriétés suivantes peuvent s'avérer utiles lors du calcul de certaines transformées de Laplace :

$$e^{-at} f(t) \rightarrow F(p+a)$$

$$t f(t) \rightarrow -\frac{dF}{dp}$$

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_0^{+\infty} F(p) dp$$

4.3. Transformée de Laplace inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(p)$ de retrouver son original, autrement dit la fonction $f(t)$ dont elle est la transformée de Laplace.

Il s'agit ici de calculer une intégrale dans le plan complexe :

$$f(t) \rightarrow F(p)$$

$$f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

Remarque : Les cas où il faudra effectivement calculer une transformée de Laplace inverse à l'aide de cette expression sont extrêmement rares : nous verrons plus loin, qu'en général, il suffit de connaître une dizaine de transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales pour retrouver l'original d'une fonction $F(p)$.

5. TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE QUELQUES SIGNAUX USUELS

5.1. Échelon unité

L'échelon unité (fig 1.4) est la fonction $u(t)$ telle que $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

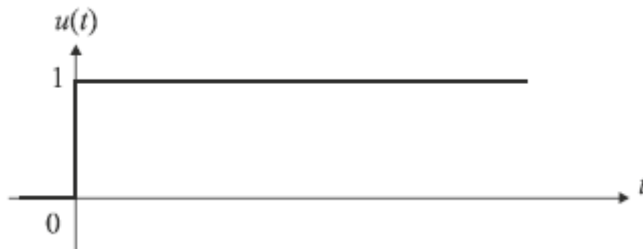


Figure 1.4 Échelon unité.

$$u(t) \rightarrow U(p) = \frac{1}{p}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire), l'amplitude A , aura pour transformée de Laplace :

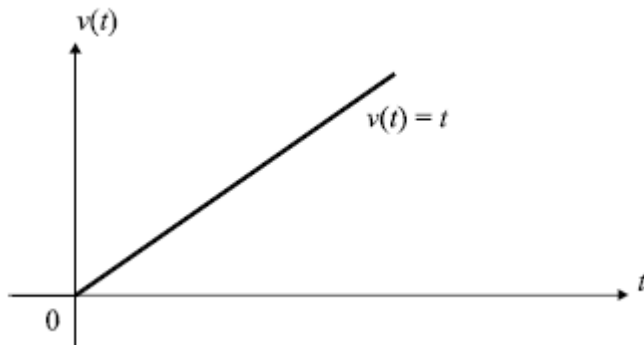
$$f(t) = Au(t) \rightarrow F(p) = \frac{A}{p}$$

5.2. Rampe ou échelon de vitesse

On la note en général $v(t)$. Elle est nulle pour t négatif et est égale à t pour t positif ou nul (figure 1.5).

$$v(t) = t \cdot u(t)$$

$$V(p) = \frac{U(p)}{p} = \frac{1}{p^2}$$



5.3. Impulsion unitaire

En dérivant cette fois la fonction $u(t)$, on obtient une fonction habituellement notée $\delta(t)$ et appelée impulsion unitaire ou impulsion de Dirac.

Il s'agit en théorie d'une fonction nulle pour tout t sauf pour $t = 0$ où elle a une valeur infinie. L'aire comprise entre la courbe représentative de cette fonction $\delta(t)$ et l'axe des t vaut 1. Le schéma de la figure 1.6 donne une idée de cette impulsion en faisant tendre le paramètre θ vers 0.



Figure 1.6 Modèle de l'impulsion de Dirac.

$$\delta(t) \rightarrow \Delta(p) = 1$$

5.4. Signal sinusoïdal

On considère un signal $s(t)$ nul pour $t < 0$ et valant $s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ pour $t \geq 0$.

On a alors :

$$S(p) = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$$

On retiendra essentiellement les deux résultats suivants :

pour $s(t) = \sin \omega t$,

$$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

et pour $s(t) = \cos \omega t$,

$$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

6. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

6.1. Définition

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$. On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré n :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant nulles les différentes conditions initiales, il vient :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$[a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0] S(p) = [b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0] E(p)$$

$$\frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe p est appelée fonction de transfert du système et communément notée :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes.

On obtient :

$$G(p) = \frac{b_m (p - z_m)(p - z_{m-1}) \dots (p - z_1)}{a_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_1)}$$

Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelés les zéros de la fonction de transfert. Les racines p_i qui annulent son dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels. Nous verrons plus loin que l'étude, le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de ces pôles ou zéros, jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes

7. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME À L'AIDE DE LA FONCTION DE TRANSFERT

7.1. Principe

La première utilisation intéressante du modèle Laplacien réside dans la résolution systématique de problèmes physiques dans lesquels on possède un système linéaire quelconque régi par une équation différentielle clairement identifiée. On injecte à l'entrée de ce système un signal donné et on souhaite déterminer quel est le signal de sortie.

La connaissance de la fonction de transfert du système (qui s'écrit immédiatement à partir de l'équation différentielle) fournit évidemment la relation entre $S(p)$ et $E(p)$ c'est-à-dire entre les transformées de Laplace respectives de la sortie et de l'entrée du système :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

Il suffit donc de calculer ou de déterminer à partir des tables, la transformée de Laplace de $e(t)$, puis d'effectuer le calcul de $S(p)$ puis, enfin, toujours à partir des tables, de déterminer l'original de $S(p)$.

7.2. Exemples

a) *Système du second ordre excité par un échelon unitaire*

Considérons un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 3s(t) = 2e(t)$$

$$p^2S(p) + 4pS(p) + 3S(p) = 2E(p)$$

$$S(p) [p^2 + 4p + 3] = 2E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p^2 + 4p + 3}$$

Nous savons par ailleurs que $E(p) = \frac{1}{p}$ (échelon unitaire).

On en déduit donc :

$$S(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4p + 3)}$$

Résolution classique manuelle

En remarquant que $S(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4p + 3)} = \frac{2}{p(p+3)(p+1)}$;

on peut envisager la décomposition de $S(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = \frac{2}{p(p+3)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+1}$$

$$S(p) = \frac{A(p+3)(p+1) + Bp(p+1) + Cp(p+3)}{p(p+3)(p+1)}$$

$$S(p) = \frac{(A+B+C)p^2 + (4A+B+3C)p + 3A}{p(p+3)(p+1)}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+B+3C=0 \\ 3A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=\frac{1}{3} \\ C=-1 \end{cases}$$

$$S(p) = \frac{2}{3p} + \frac{1}{3(p+3)} - \frac{1}{p+1} = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p)$$

La table de transformées de Laplace nous donne, sans calcul :

$$\frac{2}{3p} \rightarrow \frac{2}{3}u(t)$$

$$\frac{1}{3(p+3)} \rightarrow \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$-\frac{1}{p+1} \rightarrow -e^{-t}u(t)$$

$$s(t) = \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} - e^{-t} \right] \cdot u(t)$$

ÉTUDE SYSTEMATIQUE DES SYSTEMES DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE

1. INTRODUCTION

D'une manière générale, les principaux problèmes posés par la mise en œuvre des systèmes physiques ou industriels concernent leur commande, à savoir la détermination optimale des signaux d'entrée qu'il faut leur appliquer pour qu'ils se comportent de la manière souhaitée. Les méthodes d'étude et d'analyse étudiées dans les chapitres précédents nous ont fourni l'approche méthodologique générale d'analyse des systèmes. Nous abordons à présent le cœur de la problématique de l'automatique, à savoir l'étude des systèmes bouclés.

2. INCONVÉNIENTS DE LA COMMANDE EN BOUCLE OUVERTE

La commande en boucle ouverte d'un système consiste à introduire, à l'entrée de ce système, le signal $e(t)$ permettant d'obtenir à sa sortie, le signal $s(t)$ correspondant à la réponse voulue. Cela nécessite, bien sûr, la connaissance d'un modèle de fonctionnement du système, par exemple, de sa fonction de transfert $G(p)$. Ainsi, la connaissance d'un modèle de fonctionnement d'un moteur à courant continu permettra de connaître la tension d'entrée qu'il faudra lui appliquer pour obtenir telle ou telle vitesse de rotation.

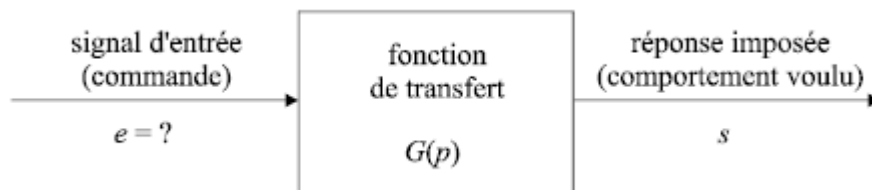


Figure 5.1 Problématique générale de la commande des systèmes.

Dans le formalisme de Laplace, on peut donc écrire :

$$S(p) = G(p)E(p) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{S(p)}{G(p)}$$

3. PRINCIPE DE LA COMMANDE EN BOUCLE FERMÉE

Le principe de la commande en boucle fermée résulte d'une simple question de logique et de bon sens : pour mieux maîtriser le fonctionnement d'un système, mesurons en permanence son comportement, vérifions que ce comportement correspond bien à ce que l'on attend et utilisons cette information pour adapter le signal de commande.

Ainsi, dans l'exemple du radiateur électrique, mesurons la température et décidons, soit de chauffer si la température de la pièce est inférieure à la température voulue, soit d'arrêter de chauffer si cette température de *consigne* est atteinte (c'est le principe du thermostat).

On peut même pousser encore plus loin cette réflexion : chauffons beaucoup plus si la température mesurée est très éloignée de la température voulue et ralentissons la puissance de chauffe lorsque l'on s'approche de la consigne.

On pourrait même imaginer d'adjoindre au radiateur un système de refroidissement au cas où la température de consigne soit largement dépassée (c'est le principe des dispositifs de climatisation).

En conclusion, pour mieux commander un système quelconque, il faut :

- mesurer l'évolution de son comportement, à l'aide d'un capteur adéquat ;
- comparer l'information délivrée par ce capteur à une valeur de consigne ;
- utiliser la différence entre consigne et mesure comme information permettant de construire le signal de commande.

C'est ainsi que le schéma général de la figure 5.3 fait apparaître :

- la mesure du comportement réel du système, suivie éventuellement d'un dispositif (B) servant à adapter le signal mesuré ;
- un soustracteur qui calcul l'écart entre la consigne et la mesure ; ce soustracteur justifie la présence du dispositif (B), lorsque, par exemple, la grandeur mesurée n'est pas de même nature physique que la consigne : souvent, cette consigne est fournie à l'aide d'un signal électrique ; une température, une vitesse, etc. doivent être retransformées en tension avant de pouvoir être soustraites de la consigne, ce que font en général les capteurs utilisés. (B) représente donc le capteur qui transforme grandeur physique en signal électrique ;
- un dispositif (C) qui, éventuellement, adapte l'écart avant qu'il ne devienne le signal de commande: souvent, les signaux de consigne ou de mesure sont des signaux de faible puissance et de faible amplitude tandis que les signaux de commande sont plutôt des signaux de forte amplitude. À cet égard, rien n'empêche de considérer que ce dispositif fait partie du système et qu'il en constitue en quelque sorte l'étage d'entrée.

Ainsi, on peut considérer que l'écart constitue bien le signal de commande de notre système.

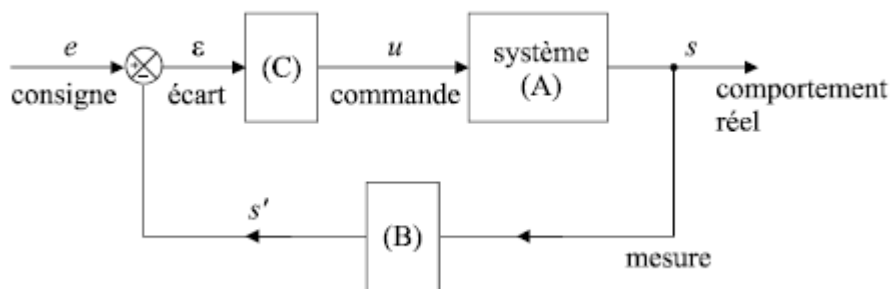


Figure 5.3 Schéma général d'une boucle de régulation.

L'ensemble constitué du système (A) et éventuellement du dispositif (C) est appelé chaîne directe ou chaîne de commande. L'ensemble constitué de la mesure et du dispositif (B) est appelée chaîne de retour ou boucle de retour. Le schéma de la figure 5.3 correspond au principe général de ce qu'on appelle communément la boucle de régulation. Le signal de consigne devient la véritable entrée du système bouclé tandis qu'on laisse le signal de commande évoluer seul.

4. MODÉLISATION D'UNE BOUCLE DE RÉGULATION

En formulant l'hypothèse que tous les systèmes et dispositifs impliqués dans la boucle soient linéaires, il nous est possible d'utiliser le formalisme Laplacien pour établir un modèle de fonctionnement liant l'entrée du système bouclé (le signal de consigne) à sa sortie (la grandeur physique à réguler).

La figure 5.5 propose le schéma général d'une boucle de régulation dans ce formalisme : il nous faut considérer, pour chaque signal, sa transformée de Laplace, et pour chaque élément du système, sa fonction de transfert.

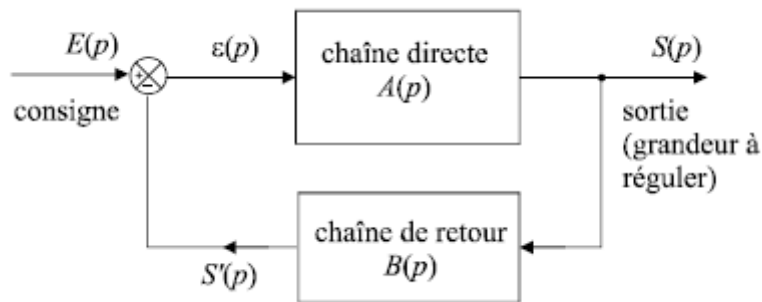


Figure 5.5 Modèle d'une boucle de régulation.

On peut écrire : $S(p) = A(p)\varepsilon(p)$

Or : $\varepsilon(p) = E(p) - S'(p) = E(p) - B(p)S(p)$

d'où : $S(p) = A(p)[E(p) - B(p)S(p)]$

$S(p)[1 + A(p)B(p)] = A(p)E(p)$

soit : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$

Cette expression apparaît bien comme la fonction de transfert liant la sortie et l'entrée de notre boucle de régulation.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

définissant ainsi la *fonction de transfert en boucle fermée* de la boucle de régulation.

On définit également, pour une boucle de régulation, sa *fonction de transfert en boucle ouverte* par :

$$G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)B(p)$$

Dans le cas d'une boucle à retour unitaire, on a $B(p) = 1$.

Soit : $G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)$

d'où : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$

5. MÉTHODES D'ÉTUDE ET DÉFINITIONS

L'étude complète d'un système est composée de deux parties : son étude temporelle et son étude fréquentielle.

En ce qui concerne l'étude temporelle, nous nous intéresserons ici à identifier les réponses $s(t)$ des systèmes étudiés à des signaux d'entrée $e(t)$ relativement simples, appelés entrées canoniques, qui sont l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, l'échelon unitaire $u(t)$ et la rampe unitaire $v(t)$.

La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle ; la réponse d'un système à un échelon unitaire est appelé réponse indicielle.

Remarque : Rappelons que l'impulsion de Dirac reste un signal à la réalité toute théorique puisqu'il est censé correspondre à une impulsion infiniment courte, infiniment haute et dont le produit de la durée par la hauteur vaut 1. Toutefois, malgré l'impossibilité de créer de véritables impulsions de Dirac dans la pratique, nous montrerons, dans les pages qui suivent, que l'étude impulsionnelle présente un intérêt certain.

L'étude fréquentielle sera menée en construisant systématiquement les diagrammes de Bode et de Nyquist des systèmes étudiés.

6. ÉTUDE DES SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE

6.1. Mise en équation

Les systèmes du premier ordre sont régis par des équations différentielles du premier degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum un zéro et un pôle. En physique, de tels systèmes sont très nombreux et, en général, ils ne possèdent pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

Les deux constantes T et K sont des nombres réels en général positifs. T est appelée constante de temps du système. K est appelée le gain statique. Ces deux appellations trouveront leur justification dans les résultats de l'étude que nous allons mener.

$$TpS(p) + S(p) = KE(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

6.2. Réponse à une impulsion de Dirac

On étudie la réponse du système à une entrée $e(t) = \delta(t)$. On a donc :

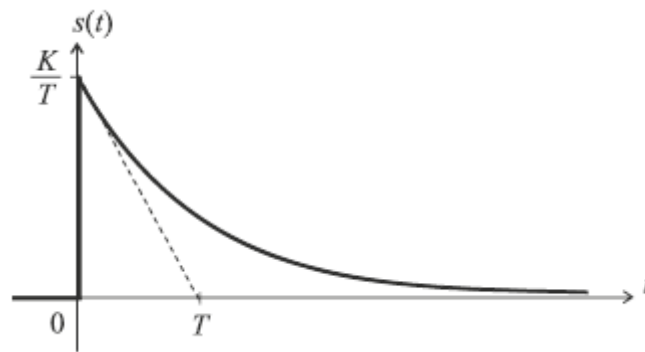
$$E(p) = 1$$

$$S(p) = G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

La transformée de Laplace correspond très exactement à la fonction de transfert du système ce qui est la particularité essentielle de la réponse impulsionnelle. On calcule facilement $s(t)$ à partir de la table des transformées de Laplace

$$s(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

La constante de temps du système, T (qui porte bien son nom) peut être mise en évidence très facilement sur le graphique (figure 4.1). Comme dans toute fonction exponentielle décroissante, la tangente à l'origine coupe l'asymptote (ici, l'axe des abscisses) au point d'abscisse T .



6.3. Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à un échelon unitaire $e(t) = u(t)$. On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = G(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p(1 + Tp)}$$

$$s(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

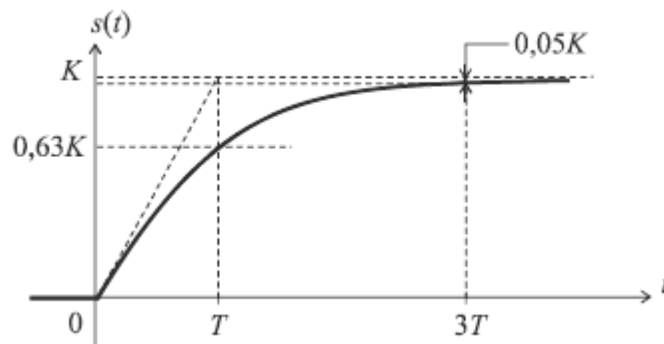


Figure 4.2 Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

On peut définir, à partir de ce graphe, le temps de réponse t_r du système, par le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur asymptotique (on dit aussi de sa valeur à l'infini) à 5 % près. Il est facile de vérifier que ce temps de réponse est de l'ordre de $3T$.

On a :

$$s(t_r) = K \left(1 - e^{-\frac{t_r}{T}} \right) = 0,95K$$

d'où :

$$\left(1 - e^{-\frac{t_r}{T}} \right) = 0,95$$

Soit :

$$e^{-\frac{t_r}{T}} = 0,05$$

et finalement :

$$t_r = -T \ln 0,05 \approx 3T$$

Par ailleurs :

$$s(T) = K (1 - e^{-1}) \approx 0,63K$$

6.4. Réponse à une entrée en rampe

On étudie maintenant la réponse du système à une rampe unitaire $e(t) = v(t) = t$. On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$S(p) = G(p) \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{K}{p^2(1+Tp)}$$

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[\frac{K}{p(1+Tp)} \right]$$

$$s(t) = \int K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) dt = \int K dt - \int K e^{-\frac{t}{T}} dt$$

$$s(t) = Kt + KT e^{-\frac{t}{T}} + C^{tc}$$

$$s(0) = KT + C^{tc} = 0 \Rightarrow C^{tc} = -KT$$

$$s(t) = K(t - T) + KT e^{-\frac{t}{T}}$$

La forme de cette expression nous permet de mettre en évidence une asymptote oblique à la courbe de $s(t)$.

En effet, le terme $s(t) = KT e^{-\frac{t}{T}}$ tendant vers 0 lorsque t tend vers l'infini, on a : $s(t) \approx K(t - T)$.

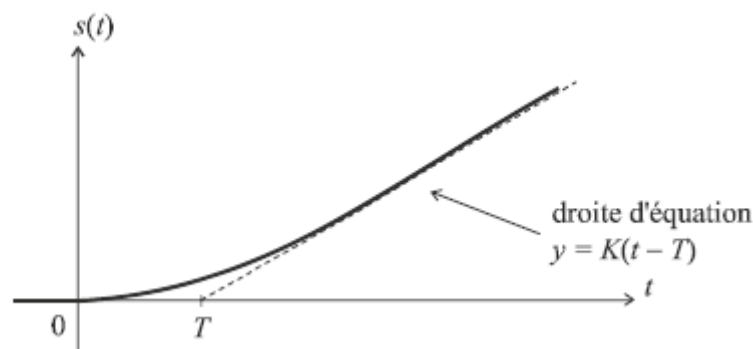


Figure 4.3 Réponse d'un système du premier ordre à une entrée en rampe.

7. ÉTUDE DES SYSTÈMES DU SECOND ORDRE

7.1 Mise en équation

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles du second degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum deux zéros et deux pôles. En physique, de tels systèmes sont très nombreux et, en général, ils ne possèdent pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$\frac{p^2}{\omega_n^2} S(p) + \frac{2\xi p}{\omega_n} S(p) + S(p) = KE(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

7.2. Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à un échelon unitaire $e(t) = u(t)$.

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{G(p)}{p} = \frac{K}{p \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 \right)}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} (\xi^2 - 1)$$

$$S(p) = \frac{K}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}, \quad \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = p_1 p_2, \quad p_1 = -\frac{1}{\tau_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

p_1 et p_2 sont les pôles de $G(p)$

a) *Discriminant positif*

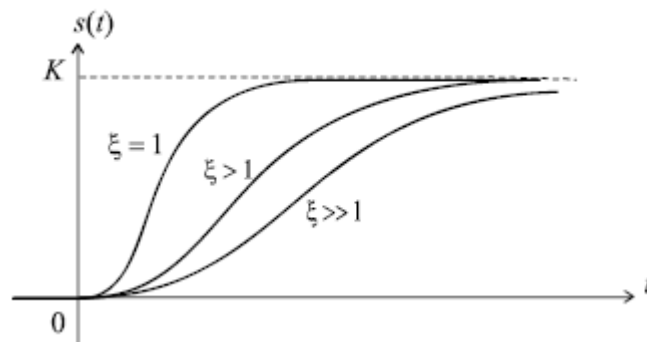
$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$$

Les pôles réels de $G(p)$ sont $p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ et $p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$S(p) = \frac{K}{\tau_1 \tau_2 p(p - p_1)(p - p_2)}, \quad S(p) = \frac{K p_1 p_2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$s(t) = K \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right]$$

$$s(t) = K \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \right]$$



Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement supérieur à 1

Remarque : la réponse la plus rapide est observée pour un facteur d'amortissement très proche de 1

b) **Discriminant nul**

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$$

$$S(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)^2}, \quad \tau = \frac{1}{\omega_n}, \quad \omega_n = \frac{1}{\tau}$$

$$S(p) = K \frac{\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2}$$

La réponse a pour expression :

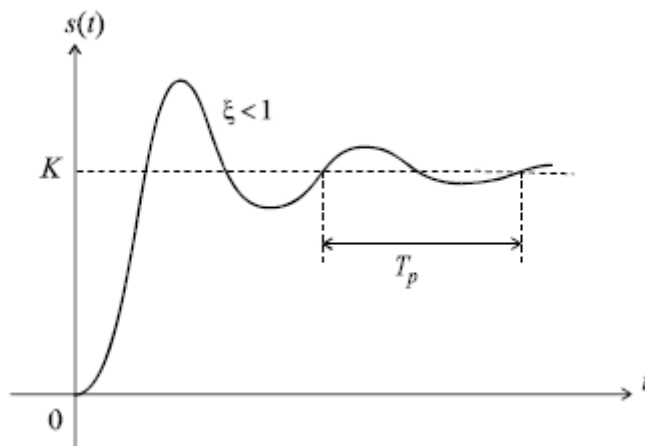
$$s(t) = K \left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \right)$$

c) **Discriminant négatif**

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$$

Les pôles de H(p) sont complexes conjugués $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$s(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] \sin(\omega_p t + \varphi), \quad \varphi = \arccos(\xi) \text{ et } \omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement inférieur à 1

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

d) **Synthèse**

De la valeur de ξ qui porte finalement bien son nom de facteur d'amortissement, dépend le type de réponse du système.

– Régime *amorti* : $\xi > 1$. Dans le cas du régime amorti, la sortie du système tend d'autant plus lentement vers sa valeur finale K que ξ est grand.

– Régime *critique* : $\xi = 1$. Le régime critique est caractérisé par la réponse la plus rapide possible : le signal $s(t)$ tend très vite vers sa valeur finale et ce, sans oscillations.

– Régime *oscillatoire amorti* : $\xi < 1$. Dans le cas du régime oscillatoire amorti, la pulsation du signal sinusoïdal enveloppé par l'exponentielle décroissante a pour expression :

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Elle est appelée pseudo-pulsation du régime oscillatoire amorti. Elle est toujours inférieure à la pulsation ω_n .

On définit également la pseudo-période de ces oscillations par :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Cette pseudo-période est égale à l'intervalle de temps correspondant à une alternance complète de la sinusoïde amortie. Elle est d'autant plus grande que ξ est proche de 1.

MODELISATION FREQUENTIELLE DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS

1. INTRODUCTION

Une fonction de transfert d'un système étant défini par $H(p)$, les représentations fréquentielles ont pour but de caractériser le nombre complexe $H(j\omega)$ en posant $p=j\omega$.

A partir de ce nombre complexe, on détermine le gain G de $H(j\omega)$ exprimé de dB et la phase φ de $H(j\omega)$ exprimé en degré ou en radian.

$$\text{Gain : } G = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

$$\text{Phase : } \varphi = \arg(H(j\omega))$$

Trois types de représentations sont couramment utilisés

➤ Lieu de Bode

Il s'agit de tracer les deux courbes de Gain et de Phase en fonction de ω dans le plan logarithmique.

➤ Lieu de Nyquist

Il s'agit de tracer dans le plan complexe la courbe de $\text{Im}(H(j\omega))$ (partie imaginaire de $H(j\omega)$) en fonction de $\text{Re}(H(j\omega))$ (partie réelle de $H(j\omega)$).

➤ Lieu de Black

Il s'agit de tracer dans le plan cartésien la courbe du gain en fonction de la phase.

2. DIAGRAMME DE BODE D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Considérons un système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

K et T sont deux constantes positives. K est le gain statique du système, T sa constante de temps. Nous justifierons plus loin ces dénominations.

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega}$$

$$\begin{cases} G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan T\omega \end{cases}$$

Pour $\omega \rightarrow 0$, on a : $G(\omega) \rightarrow K \Rightarrow 20 \log G(\omega) \rightarrow 20 \log K$
Ceci correspond à une asymptote horizontale.

Pour $\omega \rightarrow +\infty$, on a :

$$G(\omega) \approx K/T\omega \Rightarrow 20 \log G(\omega) \approx 20 \log K - 20 \log T - 20 \log \omega$$

Cet équivalent de la fonction $G(\omega)$ pour $\omega \rightarrow +\infty$ correspond à une droite puisque l'échelle des abscisses est logarithmique. Cette droite coupe l'autre asymptote au point d'abscisse $\omega=1/T$, coupe l'axe des abscisses au point $\omega=K/T$ et possède une pente de - 20 dB/décade, ce qui signifie que le gain chute de 20 dB lorsque la pulsation est multipliée par 10.

Nous allons vite nous rendre compte que dans un diagramme de Bode, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade. Ce « 20 dB/décade » est donc en quelque sorte l'unité élémentaire de pente. Nous appellerons pente d'ordre n , une pente égale à $20n$ dB/décade.

Compte tenu de l'effet « lissant » du logarithme, la courbe réelle reste longtemps proche de ses asymptotes (qui par conséquent constituent une approximation suffisante du graphe). Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la vraie valeur du gain pour la pulsation $\omega=1/T$.

La pulsation $\omega=1/T$ est appelée pulsation de coupure.

En ce qui concerne la courbe de déphasage, remarquons qu'il s'agit d'une fonction arctangente et que

- pour $\omega \rightarrow 0$, on a :

$$\varphi(\omega) \rightarrow 0$$

- pour $\omega \rightarrow +\infty$, on a :

$$\varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

On a, par ailleurs :

$$\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

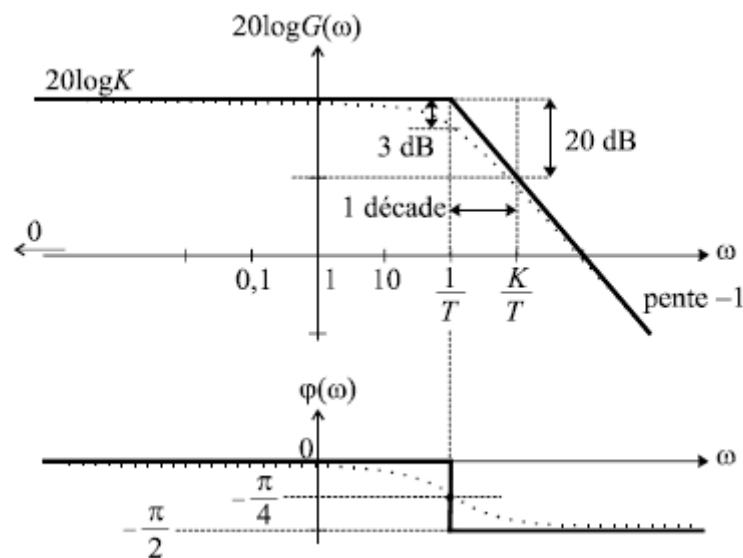


Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

3. DIAGRAMME DE NYQUIST

le diagramme de Nyquist consiste à tracer, dans le plan complexe, le lieu des points d'affixe $G(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$.

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega} = \frac{K(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)} = \frac{K(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2} + j\frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2} = X + jY$$

Les parties réelle et imaginaire sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de chaque point de la courbe.

Nous pouvons remarquer que :

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K}{1+T^2\omega^2} - \frac{K}{2}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{2K - K(1+T^2\omega^2)}{2(1+T^2\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K(1-T^2\omega^2)}{2(1+T^2\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2(1-T^2\omega^2)^2 + 4K^2T\omega^2}{4(1+T^2\omega^2)^2}$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2(1+T^4\omega^4 - 2T\omega^2) + 4K^2T\omega^2}{4(1+T^2\omega^2)^2}$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2(1+T^4\omega^4 + 2T\omega^2)}{4(1+T^2\omega^2)^2} = \frac{K^2(1+T^2\omega^2)^2}{4(1+T^2\omega^2)^2} = \frac{K^2}{4}$$

L'équation $\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2}{4}$ correspond à un cercle de centre $\left(\frac{K}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{K}{2}$. Toutefois, le diagramme de Nyquist ne correspond pas au cercle entier.

$$Y = \frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2} < 0$$

Le diagramme est donc le demi-cercle de centre $\left(\frac{K}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{K}{2}$ correspondant au demi-plan $Y < 0$

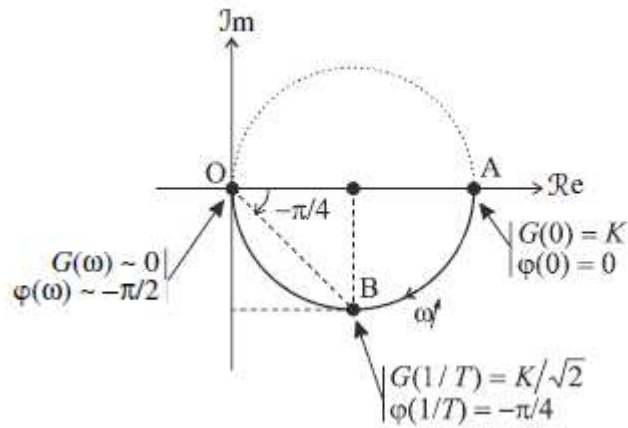


Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

4. DIAGRAMME DE BODE D'UN SYSTEME DU SECOND DEGRE

Nous cherchons à étudier le comportement fréquentiel du système de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

$G(p) \approx K$ lorsque $p \rightarrow 0$; donc $G(\omega) \approx K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$.

$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) \approx 20 \log K$$

$$G(p) \approx \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2 K}{p^2}$$

De même, lorsque $p \rightarrow +\infty$, on a :

$$\text{Pour } \omega \rightarrow +\infty \quad G_{dB} \approx 20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega$$

En effet, le point de concours des deux asymptotes est tel que

$$20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 20 \log K$$

$$40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 0$$

$$\omega = \omega_n$$

4.1. Cas où ξ est supérieur à 1

Alors, le dénominateur de $G(p)$ possède deux racines réelles négatives :

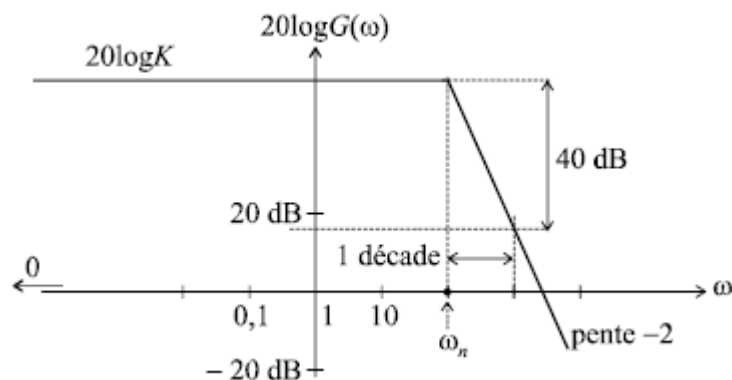
$$p_1 = -\omega_n \left[\xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[\sqrt{(\xi^2 - 1)} + \xi \right]$$

$$S(p) = \frac{K \omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

Nous sommes alors en présence de deux pulsations de coupure, respectivement $\omega_1 = -p_1$ et $\omega_2 = -p_2$.

$$\text{Soit :} \quad \omega_1 = \omega_n \left[\xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right] \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_n \left[\sqrt{(\xi^2 - 1)} + \xi \right]$$

$$\omega_1 < \omega_n \quad \text{et} \quad \omega_2 > \omega_n$$



Asymptotes au diagramme de Bode

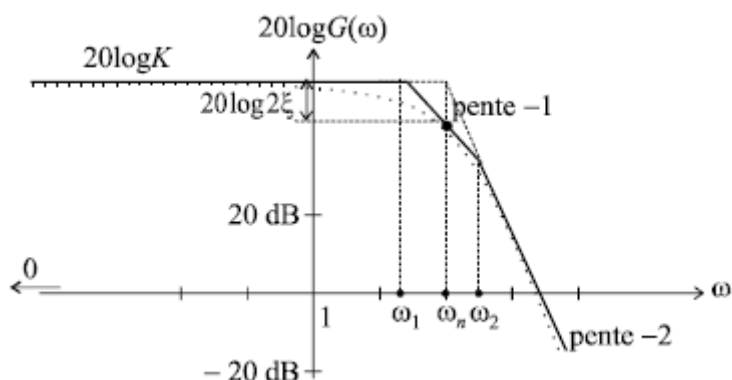


Diagramme de Bode d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement supérieur à 1

La courbe de gain réelle peut être esquissée à partir de ce diagramme asymptotique. On remarquera, notamment que :

$$G_{dB}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n}}$$

$$G(j\omega_n) = \frac{K}{2\xi j} \Rightarrow 20 \log G(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

Remarque : Cette expression reste valable quelque soit la valeur du coefficient d'amortissement.

Le diagramme de phase asymptotique se déduit immédiatement du diagramme de gain en déterminant chaque direction asymptotique de phase à partir de la pente du segment correspondant dans le diagramme de gain.

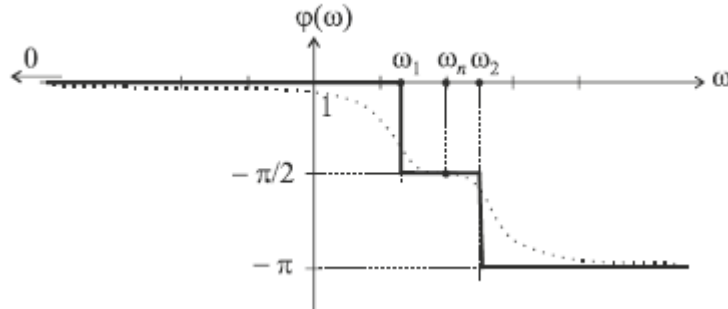


Diagramme de phase d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement supérieur à 1.

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}])(j\omega + \omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}])}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{\omega}{\omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

$$\varphi(\omega_n) = -\arctan \frac{\omega_n}{\omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{\omega_n}{\omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

$$\varphi(\omega_n) = -\arctan \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

$$\begin{aligned} \tan \left(\arctan \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} + \arctan \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]} \right) &= \frac{\frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} + \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}}{1 - \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} \cdot \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}} \\ &= \frac{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}] + [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}][\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}] - 1} \\ &= \frac{2\xi}{\xi^2 - \xi^2 + 1 - 1} \end{aligned}$$

Cette expression tend manifestement vers l'infini. On a donc :

$$\varphi(\omega_n) = -\pi/2$$

4.2) Cas où ξ est égal à 1

$$S(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}$$

Nous sommes en présence d'une pulsation de coupure double en $\omega = \omega_n$. Le diagramme de Bode asymptotique de gain n'est donc constitué que des deux asymptotes déjà identifiées. En ce qui concerne le diagramme de phase, il se déduit immédiatement du diagramme de gain.

$$G_{dB}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2 = 20 \log K - 6 \text{ dB}$$

$$\varphi(\omega_n) = -\pi/2$$

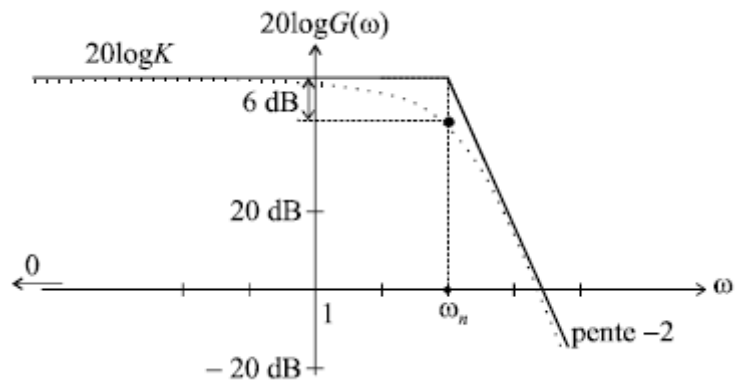


Diagramme de Bode d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement égal à 1.

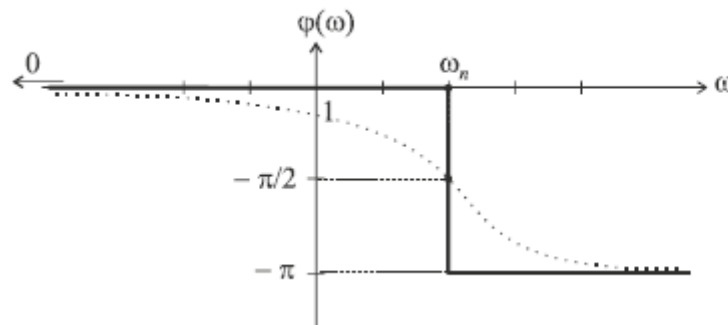


Diagramme de phase d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement égal à 1.

$$\varphi(\omega) = \arg S(j\omega) = \arg \frac{K\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}$$

$$\varphi(\omega) = -2 \arctan \frac{\omega}{\omega_n}$$

4.3 Cas où ξ est inférieur à 1

La fonction de transfert possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués :

$$p_1 = -\omega_n \left[\xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[\xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right]$$

$$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$G_{dB}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

Nous allons donc étudier ce phénomène, appelé phénomène de résonance, en déterminant la condition d'apparition de ce phénomène, la pulsation ω_r pour laquelle le gain est maximal (rien ne prouve que le maximum de la courbe de gain se produise pour $\omega = \omega_n$), ainsi que la valeur G_{max} de ce gain maximum.

$$p_1 = -\omega_n \left[\xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[\xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right]$$

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\left(j\omega + \omega_n \left[\xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right] \right) \left(j\omega + \omega_n \left[\xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right] \right)}$$

$$G(\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{\left[\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega - \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right] \left[\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega + \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right]}}$$

Cette expression est maximale lorsque son dénominateur est minimal, autrement dit lorsque :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(\left[\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega - \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right] \left[\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega + \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right] \right) &= 0 \\ 2 \left(\omega + \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right) \left[\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega - \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right] & \\ + 2 \left(\omega - \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right) \left[\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega + \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right] &= 0 \\ \omega \left[2\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega - \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 + \left(\omega + \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 - 4\omega_n^2(1 - \xi^2) \right] &= 0 \\ \omega_n^2\xi^2 + \omega^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2) - 2\omega_n^2(1 - \xi^2) &= 0 \\ \omega^2 &= \omega_n^2(1 - 2\xi^2) \end{aligned}$$

Cette égalité n'est possible que si $1 - 2\xi^2 > 0$, autrement dit lorsque :

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dans ce cas, il existe bien une pulsation ω telle que le dénominateur de $S(p) = \frac{K\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$ soit minimum (il est aisé de se rendre compte que cela ne peut correspondre à un maximum).

$G(\omega)$ est donc maximal pour :

$$\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Remplaçons ω par ω_r dans l'expression de $G(\omega)$:

$$G_{\max} = \frac{K}{\sqrt{\left[\xi^2 + \left(\sqrt{1 - 2\xi^2} - \sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right] \left[\xi^2 + \left(\sqrt{1 - 2\xi^2} + \sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right]}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{\left[1 - \xi^2 - \sqrt{(1 - 2\xi^2)(1 - \xi^2)} \right] \left[1 - \xi^2 + \sqrt{(1 - 2\xi^2)(1 - \xi^2)} \right]}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{(1 - \xi^2)^2 - (1 - 2\xi^2)(1 - \xi^2)}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \xi^2 - 1 + 2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

En résumé, si $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, il existe une pulsation de résonance $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ pour laquelle le gain présente un maximum $G_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$.

On définit alors le coefficient ou facteur de résonance Q (ou de surtension) par le rapport du gain maximal sur le gain à l'origine :

$$Q = \frac{G_{\max}}{K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Plus la valeur du coefficient d'amortissement ξ est proche de 0, plus la pulsation de résonance se rapproche de ω_n et plus le gain maximal est élevé.

$$\xi = 0$$

$$\omega_r = \omega_n \text{ et } G_{\max} \rightarrow +\infty$$

Le paramètre ω_n porte donc bien son nom de pulsation propre du système puisqu'elle est la pulsation à la quelle peut se produire le phénomène de résonance le plus intense.

$$\text{Si } \frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$$

le phénomène de résonance n'existe pas ; la courbe de gain est strictement décroissante et reste constamment sous ses asymptotes.

Pour la courbe de phase, toujours dans le cas où $\xi < 1$, une étude approfondie nous montre que celle-ci présente une inflexion en $\omega = \omega_n$, plus ou moins prononcée en fonction de ξ .

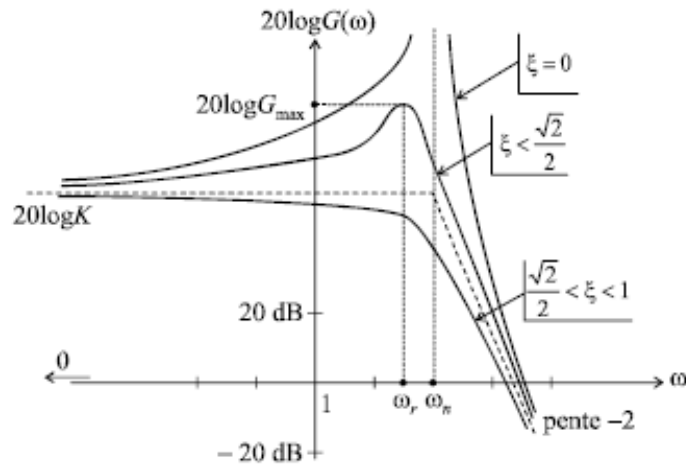


Diagramme de Bode d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement inférieur à 1.

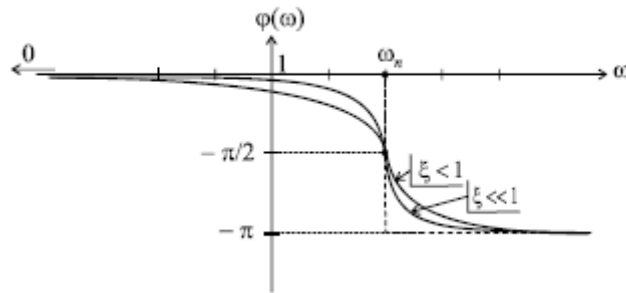


Diagramme de phase d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement inférieur à 1.

STABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES ASSERVIS

1. CRITÈRE MATHÉMATIQUE DE STABILITÉ

1.1. Énoncé du critère de stabilité

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

Remarque : Dans certains cas, notamment celui des systèmes non linéaires, on peut tolérer la présence d'oscillations dans les signaux, du moment qu'elles restent d'amplitudes limitées. La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en général synonyme de destruction du système.

La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

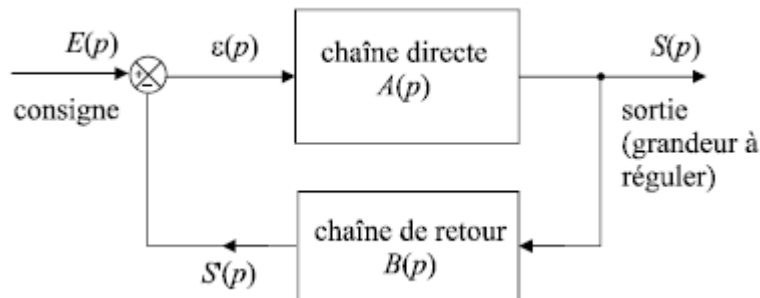


Schéma général d'une boucle de régulation

2. CRITÈRE ALGÈBRIQUE DE ROUTH

2.1 Principe

Le critère algébrique de Routh ne permet pas de définir une telle notion de marge de sécurité, mais il autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît, un ou plusieurs paramètres :

Soit $H(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée et soit $D(p)$ le dénominateur de $H(p)$.

$D(p)$ est un polynôme de degré n :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0$$

On applique le critère de Routh en plaçant la suite de coefficients a_i dans un tableau, sur deux lignes, dans l'ordre des n décroissants, alternativement une ligne sur deux. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \dots & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \dots & a_0 \\
 \hline
 \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & & \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & \dots & \frac{a_{n-1}a_1 - a_n a_0}{a_{n-1}} & \dots &
 \end{array}$$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes, la troisième ligne possédant moins de termes que les précédentes.

On complète alors cette troisième ligne, à droite, par des zéros.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_1 & \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_0 & \\
 b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_0 & 0 &
 \end{array}$$

On recommence le même calcul sur les deux dernières lignes pour créer une quatrième ligne.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \dots & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \dots & a_0 \\
 b_m & & b_{m-1} & & b_{m-2} & b_0 & 0 \\
 \hline
 \frac{b_m a_{n-3} - a_{n-1} b_{m-1}}{b_m} & & \frac{b_m a_{n-5} - a_{n-1} b_{m-2}}{b_m} & \dots & & &
 \end{array}$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 sur la ligne.

Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert $H(p)$ est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.

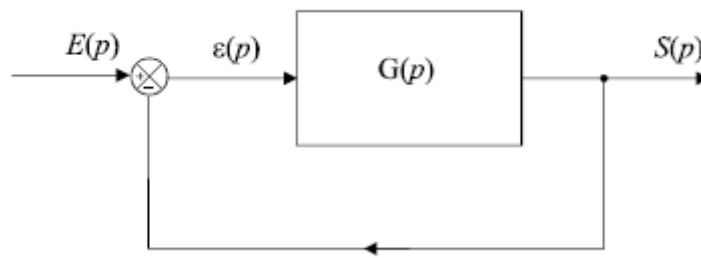
En conséquence, le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

Remarque : Le nombre maximal de lignes est égal au nombre de termes dans le polynôme $D(p)$, autrement dit à l'ordre du système, plus 1.

Exemple

Soit $G(p)$ un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire

$$G(p) = \frac{K}{p(p^2 + p + 3)}$$



Boucle de régulation étudiée.

Calculons sa fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{\frac{K}{p(p^2 + p + 3)}}{1 + \frac{K}{p(p^2 + p + 3)}} = \frac{K}{p(p^2 + p + 3) + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p) = p(p^2 + p + 3) + K = p^3 + p^2 + 3p + K$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

| | |
|-------|---|
| 1 | 3 |
| 1 | K |
| 3 - K | 0 |
| K | 0 |

Remarque : Une cinquième ligne ne serait composée que de 0.

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne, donc que $3 - K > 0$.

Le système est donc stable si $K < 3$.

3. CRITÈRE DU REVERS

Le critère du revers constitue, en quelque sorte, une vision simplifiée du critère de Nyquist dans le cas, fort répandu, où la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ du système étudié ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Dans ces conditions, le critère de stabilité peut s'exprimer comme suit :

Si la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ d'un système asservi ne possède aucun pôle à partie réelle positive, alors ce système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des ω croissants, on laisse toujours le point critique C à gauche de la courbe.

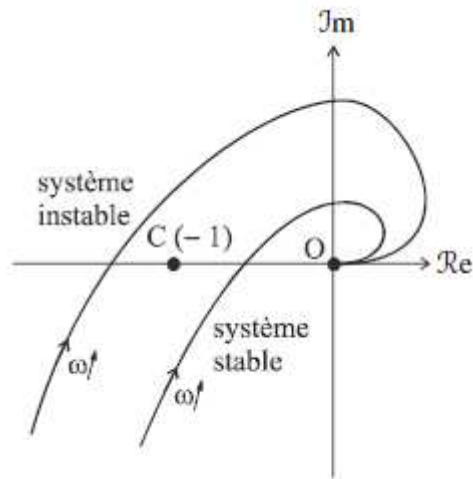


Illustration du critère du revers.

4. MARGES DE STABILITÉ

4.1. Marge de Gain

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$

ΔG est la marge de gain

$$\Delta G = -20 \log |G(j\omega_\pi)| \text{ telle que } \varphi(\omega_\pi) = -\pi$$

Exemple

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Le calcul de la marge de gain consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_π , puis à calculer $\Delta G = -20 \log |G(j\omega_\pi)|$

ω_π est telle que : $\varphi(\omega_\pi) = -\pi$

$$G(j\omega) = \frac{5}{\left(j\frac{\omega}{100} + 1\right)^3}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0 - 3 \arctan \frac{\omega}{100}$$

$$\varphi(\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow -3 \arctan \frac{\omega_\pi}{100} = -\pi \Rightarrow \omega_\pi = 100 \tan \frac{\pi}{3} = 100\sqrt{3}$$

$$\Delta G = -20 \log G(100\sqrt{3})$$

$$\Delta G = -20 \log \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{10^4} + 1}\right)^3} = -20 \log \frac{5}{(\sqrt{3+1})^3} = -20 \log \frac{5}{8}$$

$$\Delta G = 4 \text{ dB}$$

4.2. Marge de phase

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ et $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$

$\Delta\varphi$ est la marge de phase

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{co}) \text{ tel que } |G(j\omega_{co})| = 1$$

Exemple

Considérons à nouveau le système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Le calcul de la marge de phase consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_{co} , puis à calculer $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{co})$

$$\omega_{co} \text{ est tel que : } |G(j\omega_{co})| = 1$$

$$G(j\omega) = \frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100} + 1\right)^3}$$

$$G(\omega_{co}) = \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_{co}^2}{10^4} + 1}\right)^3} = 1$$

$$\text{NB } |G(j\omega_{co})| = G(\omega_{co})$$

$$\sqrt{\frac{\omega_{co}^2}{10^4} + 1} = \sqrt[3]{5}$$

$$\omega_{co}^2 = 10^4 \left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - 1 \right]$$

$$\omega_{co} \approx 139 \text{ rad/s}$$

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0 - 3 \arctan \frac{\omega}{100}$$

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \frac{139}{100} = 0,3 \text{ rad} = 17^\circ$$