

H Repa

**NOUVEAU
PROGRAMME**

Collection dirigée par Jean-Marie Brébéc

Électronique Électrocinétique

1^{re} année
MPSI-PCSI-PTSI



- ▶ Le cours
- ▶ De nombreux exercices
- ▶ Tous les corrigés

H HACHETTE
Supérieur

Électronique

Électrocinétique

1^{re} année MPSI-PCSI-PTSI

Jean-Marie BRÉBEC

Professeur en classes préparatoires au lycée Saint-Louis à Paris

Thierry DESMARAIS

Professeur en classes préparatoires au lycée Vaugelas à Chambéry

Marc MÉNÉTRIER

Professeur en classes préparatoires au lycée Thiers à Marseille

Bruno NOËL

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

Régine NOËL

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

Claude ORSINI

Professeur honoraire en classes préparatoires au lycée Dumont-d'Urville à Toulon

70. doc. 1 : Photo Metrix.

73. doc. 11 : Photo Metrix.

Composition, mise en page et schémas : *Alpha-Edit*
Maquette intérieure : *SG Création et Pascal Plottier*
Maquette de couverture : *Alain Vambacas*

© HACHETTE Livre 2003, 43 quai de Grenelle / F 75905 Paris Cedex 15.

I.S.B.N. 978-2-0118-1753-2

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Préface

Cette collection concerne les nouveaux programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles mis en application à la rentrée de septembre 2003 pour les classes de première année MPSI, PCSI et PTSI.

Les auteurs ont fait en sorte de placer les mathématiques à leur juste place, en privilégiant la réflexion et le raisonnement physique et en mettant l'accent sur les paramètres significatifs et les relations qui les unissent.

- La physique est une science expérimentale et doit être enseignée en tant que telle. Les auteurs ont particulièrement soigné la description des dispositifs expérimentaux sans négliger la dimension pratique. Souhaitons que leurs efforts incitent professeurs et élèves à améliorer ou à susciter les activités expérimentales toujours très formatrices.
- La physique n'est pas une science désincarnée, uniquement préoccupée de spéculations fermées aux réalités technologiques. Chaque fois que le sujet s'y prête, les auteurs ont donné une large place aux applications scientifiques ou industrielles propres à motiver nos futurs chercheurs et ingénieurs.
- La physique n'est pas une science aseptisée et intemporelle, elle est le produit d'une époque et ne s'exclut pas du champ des activités humaines. Les auteurs n'ont pas dédaigné les références à l'histoire des sciences, aussi bien pour décrire l'évolution des modèles théoriques que pour replacer les expériences dans leur contexte.

L'équipe d'auteurs, coordonnée par Jean-Marie BRÉBEC, est composée de professeurs de classes préparatoires très expérimentés qui possèdent une longue pratique des concours des Grandes Écoles, et dont la compétence scientifique est unanimement reconnue. Cette équipe a travaillé en relation étroite avec les auteurs des collections DURANDEAU et DURUPHY du second cycle des classes de lycée; les ouvrages de classes préparatoires s'inscrivent donc dans une parfaite continuité avec ceux du secondaire, tant dans la forme que dans l'esprit.

Gageons que ces ouvrages constitueront de précieux outils pour les étudiants, tant pour une préparation efficace des concours que pour l'acquisition d'une solide culture scientifique.

J.-P. DURANDEAU et M.-B. MAUHOURET

Sommaire

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

<u>1</u>	ÉLECTRODYNAMIQUE : CADRE ET CONCEPTS DE BASE (P1)	5
<u>2</u>	MODÉLISATION LINÉAIRE DES COMPOSANTS USUELS (P1)	23
<u>3</u>	THÉORÈMES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX RÉSEAUX LINÉAIRES (P1)	47
<u>4</u>	PRINCIPE DES APPAREILS DE MESURE (TP COURS MPSI/PCSI/PTSI)	69
<u>5</u>	RÉPONSE D'UN RÉSEAU LINÉAIRE. EXEMPLE DU CIRCUIT (R, L, C) SÉRIE	94
<u>6</u>	RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ (MPSI/PCSI/PTSI)	122
<u>7</u>	L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL : LE MODÈLE IDÉAL (MPSI/PCSI/PTSI)	161
<u>8</u>	FONCTIONS DE TRANSFERT DES RÉSEAUX LINÉAIRES (MPSI/PCSI/PTSI)	188
<u>9</u>	FILTRES DU DEUXIÈME ORDRE (PCSI/PTSI/MP)	224
<u>10</u>	AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL : BANDE PASSANTE, STABILITÉ DES MONTAGES BOUCLÉS ET COMPAREURS (PCSI/PTSI)	249
<u>11</u>	REDRESSEMENT ET LISSAGE (TP COURS PCSI)	268
<u>12</u>	ANALYSE HARMONIQUE (MP)	287
	INDEX	317

Électrocinétique : cadre et concepts de base

1

Introduction

Les courants électriques sont partout présents dans la vie courante : maisons individuelles, installations industrielles, appareils vidéo, ordinateurs, téléphone, aéronautique...

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de mettre en place les bases de l'électrocinétique, c'est-à-dire l'ensemble des équations permettant l'étude de tout circuit électrique, aussi bien dans le domaine industriel que dans celui de la microélectronique, tout en restant dans des domaines de fréquences usuelles de 0 Hz à plusieurs GHz.

O B J E C T I F S

- Introduire le vocabulaire et les concepts de base de l'électrocinétique.
- Définir le cadre dans lequel les lois de l'électrocinétique sont valables.
- Énoncer les lois de Kirchhoff.

P R É R E Q U I S

- Énergie potentielle
- Charge électrique
- Courant et tension
- Notions vues au lycée

Un peu d'histoire

Les phénomènes d'origine électrique et magnétique sont connus depuis l'Antiquité. Thalès De Milet avait, dès le VI^e siècle avant J.-C., observé et décrit quelques phénomènes d'électrisation et quelques phénomènes magnétiques : des morceaux d'ambre jaune frottés attirent de petits objets légers et la pierre de magnésie (oxyde de fer Fe_3O_4) attire des anneaux de fer.

Le mot *électricité* vient du mot grec *ambre*. Pendant vingt et un siècles, ces expériences n'ont eu qu'un caractère anecdotique. Ce n'est qu'au XVII^e siècle que les phénomènes électriques ont été scientifiquement étudiés. Stephen Gray (1666-1736) découvre la conduction de l'électricité. Charles-François De Cisternay Du Fay (1698-1739) distingue *électricité positive* et *électricité négative*. Benjamin Franklin (1706-1790) donne une théorie des condensateurs et réalise des paratonnerres.

En 1800, Alexandre Volta (1745-1827) réalise la première pile. Cette découverte révolutionne la physique : l'électricité jusque-là statique devient dynamique. L'étude des courants électriques permet d'établir le lien entre l'électricité et le magnétisme. S'illustrent dans ces travaux André-Marie Ampère (1775-1836), François Arago (1786-1853), Michael Faraday (1791-1862), Georg Simon Ohm (1787-1854) et Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

En 1864, James Clarke Maxwell (1831-1879) propose une théorie reliant les champs magnétique et électrique, et prédit la propagation des ondes électromagnétiques.

2 Notions sur les phénomènes de conduction

2.1. Sens conventionnel du courant électrique

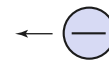
Nous savons que le courant électrique résulte du déplacement de particules chargées (par exemple, les électrons) **porteurs de charge**. Il existe des particules de charge positive et des particules de charge négative. Mais l'effet thermique (échauffement des conducteurs), l'effet chimique (électrolyse) et l'effet magnétique (création d'un champ magnétique), seuls effets connus au XIX^e siècle, ne permettaient pas de déterminer le type des porteurs de charges dans les milieux conducteurs métalliques. Dans l'ignorance du signe de leurs charges, un *sens conventionnel* a été attribué au courant électrique : celui du déplacement des porteurs de charges positives.

Le sens conventionnel du courant est celui des porteurs de charges positives.

2.2. Conduction dans les solides

Les conducteurs solides sont les plus usuels. Nous distinguerons les métaux et les semi-conducteurs.

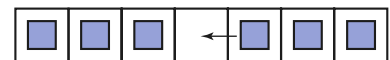
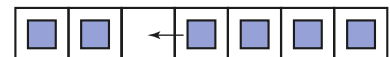
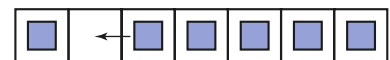
sens de déplacement des électrons



sens conventionnel du courant

Doc. 1. *Sens conventionnel du courant dans les métaux dont les porteurs sont des électrons libres.*

sens de déplacement des voitures



sens de déplacement du trou

Doc. 2. *Principe de la conduction par trous.*

2.2.1. Les métaux

Lors de la formation d'un cristal métallique, certains électrons ne restent pas confinés au voisinage d'un atome « propriétaire », mais peuvent au contraire se déplacer dans tout le volume du métal. Ces électrons, dits « libres », sont les porteurs de charge dont le déplacement permet la conduction électrique par le métal. Ainsi, dans le cuivre ou l'or, un électron par atome, en moyenne, participe à la conduction (*doc. 1*).

2.2.2. Les semi-conducteurs

Leur conduction est due à deux types de porteurs :

- les **électrons libres**, porteurs de charge négative ;
- les **trous**, porteurs de charge positive.

Ces derniers correspondent à un manque local d'électrons autour de certains atomes de semi-conducteur qui ont fourni des électrons libres et dont la charge nucléaire positive n'est plus compensée. Un trou peut être comblé par un électron d'un atome voisin.

Lorsque cela se réalise, le trou se déplace de l'atome accepteur vers l'atome donneur, c'est-à-dire en sens inverse de l'électron qui a provoqué le déplacement du trou. Ce mécanisme peut se répéter permettant la migration du trou dans le semi-conducteur. Les trous se comportent donc comme de véritables porteurs de charge positive.

Une image de la conduction par trous est fournie par le déplacement d'une place libre dans une file de voitures identiques. Lorsqu'une voiture avance pour occuper la place vide qui se trouve devant elle, elle en crée une, derrière elle (*doc. 2 et 3*). Cette nouvelle place libre peut être occupée par la voiture suivante. Si le mécanisme est réitéré, la place libre se déplace tout le long de la file de voitures, dans le sens inverse de ces dernières qui n'ont avancé chacune que d'une place.

2.3. Conduction dans les liquides

Par absence de porteurs, de nombreux liquides, les hydrocarbures par exemple, ne sont pas conducteurs du courant électrique. Ceux qui conduisent le courant sont appelés **électrolytes**. Ils contiennent des ions dont la migration assure la conduction électrique (*doc. 4*).

2.4. Conduction dans les gaz

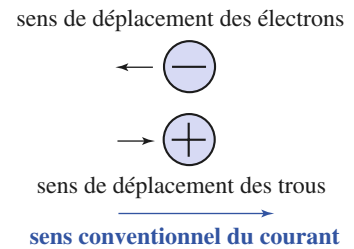
Les gaz ne sont pas conducteurs dans les conditions usuelles.

Lorsqu'ils sont portés à très haute température ou soumis à des champs électriques très intenses, ils s'ionisent sous forme de cations et d'électrons, et deviennent alors conducteurs. C'est ce qui se produit dans les lampes à vapeur de sodium ou de mercure utilisées pour l'éclairage.

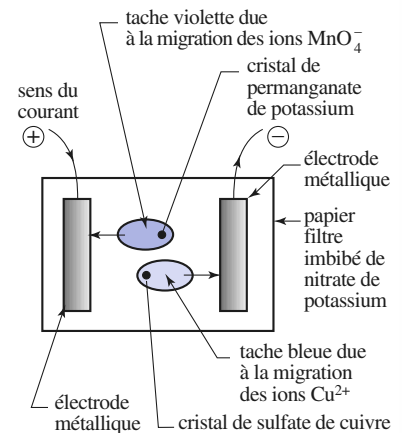
3 Courant électrique

3.1. Intensité du courant

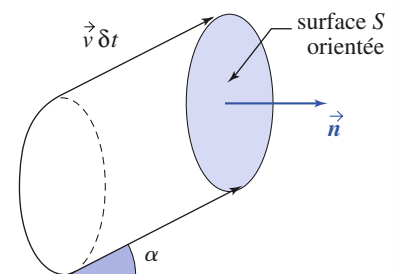
L'intensité d'un courant à travers une surface S est égale à la quantité de charge électrique qui traverse S par unité de temps.



Doc. 3. Sens de déplacement des deux types de porteurs dans un semi-conducteur.



Doc. 4. Mise en évidence du déplacement des ions positifs dans le sens conventionnel du courant et des ions négatifs en sens contraire dans un électrolyte.



Doc. 5. Les porteurs de vitesse \vec{v} contenus dans le cylindre traversent la surface S pendant l'unité δt .

Une charge électrique δq qui traverse une surface S pendant un intervalle de temps δt crée un courant d'intensité i telle que $\delta q = i\delta t$, soit :

$$i = \frac{\delta q}{\delta t}.$$

L'intensité i est exprimée en ampère (symbole : A), la charge q en coulomb (symbole : C) et le temps t en seconde (symbole : s).

Exemple

Une intensité $i = 1 \text{ mA}$ dans un conducteur métallique correspond au passage de $n = \frac{it}{e} = \frac{10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 6 \cdot 10^{15}$ électrons (de charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) par seconde à travers sa section.

3.2. Conservation de la charge

La charge électrique ne peut être ni créée, ni détruite : la conservation de la charge électrique est une loi fondamentale de la physique.

Un générateur ne crée aucune charge électrique, mais communique à ces dernières de l'énergie ; il met les charges en mouvement.

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.

3.3. Courant dans un circuit

3.3.1. Sens du courant

Le sens de déplacement des porteurs de charge mobiles dans un circuit est lié aux caractéristiques des éléments qui le constituent.

Dans le montage du document 6a, la pile joue le rôle d'une pompe à charge : en dehors de celle-ci, les électrons de conduction se déplacent du pôle \ominus de la pile vers le pôle \oplus . Le courant électrique I engendré par ce déplacement est orienté dans le sens opposé.

3.3.2. Choix d'une orientation du circuit

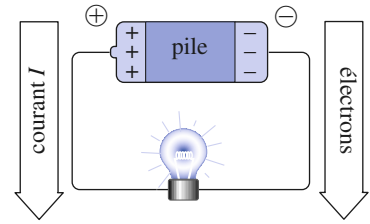
En général, nous ne savons pas, *a priori*, quel est le sens réel de déplacement des porteurs de charge (circuit complexe, régime sinusoïdal, etc.). Pour fixer les idées et définir un signe pour les calculs à effectuer, nous choisirons alors, *arbitrairement*, une orientation pour le circuit : orientation ① du document 6b ou ② du document 6c.

3.3.3. Mesure du courant électrique

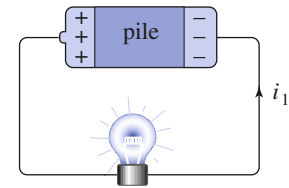
Le courant électrique peut être mesuré à l'aide d'un ampèremètre. Cet appareil est polarisé, et possède une borne \oplus et une borne \ominus (souvent désignée par « COM »). Orienté dans le sens ① comme sur le document 6d, il indiquera la valeur de i_1 . Orienté en sens inverse (doc. 6e), il indiquera la valeur de i_2 .

Si, par exemple, la valeur lue dans le premier cas est $i_1 = +0,5 \text{ A}$, celle lue dans le second cas sera $i_2 = -0,5 \text{ A}$. Le signe du résultat dépend de l'orientation choisie pour le circuit par l'expérimentateur, qui observe toujours le même phénomène physique puisque :

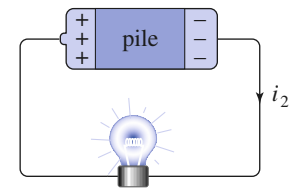
$$I = i_1 = -i_2 = 0,5 \text{ A} \text{ est bien identique à chaque fois.}$$



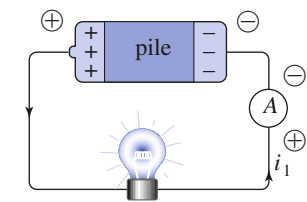
Doc. 6a. Déplacement des charges de conduction et courant physique I résultant.



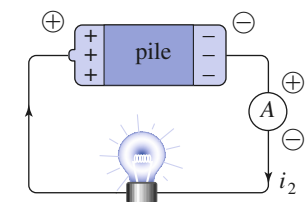
Doc. 6b. Choix d'orientation ① : $i_1 = +0,5 \text{ A}$.



Doc. 6c. Choix d'orientation ② : $i_2 = -0,5 \text{ A}$.



Doc. 6d. Valeur lue à l'ampèremètre $i_1 = I$.



Doc. 6e. Valeur lue à l'ampèremètre $i_2 = -I$.

Application 1

Ordre de grandeur de la vitesse des porteurs de charge

Pour un fil de cuivre de section $S = 1 \text{ mm}^2$, traversé par un courant constant $I = 1 \text{ A}$, trouver l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne des porteurs.

Pour ce calcul, on adoptera un modèle très simplifié :

- tous les électrons de conduction ont la même vitesse \vec{v} ;
- chaque atome de cuivre libère un électron participant à la conduction.

Données

- Constante d'Avogadro : $N_A \approx 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Masse volumique du cuivre : $\rho = 9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Masse atomique du cuivre : $M = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

Calculons le nombre n d'électrons mobiles par unité de volume.

La quantité de cuivre par mètre cube de métal :

$$N_{\text{Cu}} = \frac{\rho}{M} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

et le nombre d'atomes de cuivre par mètre cube de métal :

$$n_{\text{Cu}} = N_{\text{Cu}} N_A \approx 8,5 \cdot 10^{28} \text{ atomes} \cdot \text{m}^{-3}$$

Il faut connaître cet ordre de grandeur :

$$n \approx 10^{29} \text{ atomes} \cdot \text{m}^{-3}$$

Chaque atome libère en moyenne un électron mobile qui participera au transport du courant,

$$\text{donc } n \approx 8 \cdot 10^{28} \text{ électrons} \cdot \text{m}^{-3}$$

Considérons un tronçon de fil de longueur $v\Delta t$ (doc. 7). Son volume est : $\mathcal{V} = Sv\Delta t$.

Il contient donc $nSv\Delta t$ électrons de conduction.

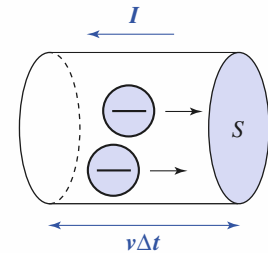
Ces électrons portent une charge totale : $Q = nSve\Delta t$ et traversent la surface S pendant Δt .

Nous en déduisons :

$$I = \frac{nSve\Delta t}{\Delta t} \quad \text{soit} \quad v = \frac{I}{nSe}$$

D'où : $v \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,07 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Doc. 7. Électrons traversant S pendant Δt .



Remarque

Cette vitesse est très faible comparée à la vitesse individuelle moyenne d'agitation thermique u des électrons. Ainsi à T ($293 \text{ K} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$), l'énergie cinétique des électrons est $\frac{1}{2}m_e u^2 \approx \frac{3}{2}k_B T$, avec k_B constante de Boltzmann d'où :

$$u \approx \left(\frac{3k_B T}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le courant électrique correspond à un mouvement de dérive ou d'ensemble des électrons.

4 Potentiel et tension

4.1. Énergie potentielle d'un porteur de charge et potentiel

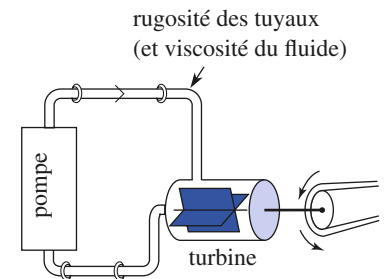
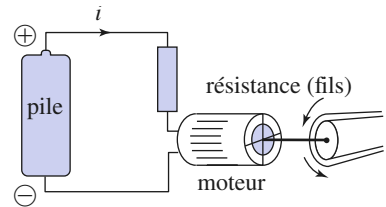
Un générateur (par exemple, une pile) met les porteurs de charge en mouvement. Par un mécanisme physique ou chimique que nous n'étudions pas ici, il communique aux porteurs de l'énergie qu'ils véhiculent dans le reste du circuit. Nous pouvons comparer un circuit électrique à un circuit hydraulique : le générateur est l'équivalent de la pompe qui fournit de l'énergie au liquide ; cette énergie est absorbée par (et dans) les tuyaux (analogues aux fils) et la turbine (analogue au moteur électrique) (doc. 8).

En d'autres termes, l'énergie potentielle d'un porteur est maximale en sortant du générateur ; elle décroît progressivement et elle est convertie en énergie thermique ou mécanique le long du circuit.

Le potentiel v_P en un point P d'un circuit électrique est défini par :

$$\mathcal{E}_P = qv_P$$

\mathcal{E}_P étant l'énergie potentielle d'un porteur de charge q qui se trouve au point M .



Doc. 8. Analogie entre un circuit électrique et un circuit hydraulique.

4.2. Tension entre deux points d'un circuit

Seuls sont mesurables les échanges d'énergie, et non la valeur de l'énergie. Il en est de même pour le potentiel électrique. Seule la différence de potentiel (ddp) entre deux points est mesurable.

La tension u_{AB} est égale à la différence de potentiel entre les points A et B :

$$u_{AB} = v_A - v_B.$$

De par sa définition, la tension est une grandeur qui change de signe si on échange A et B :

$$u_{AB} = -u_{BA}.$$

Lorsqu'on ne spécifie pas l'ordre des points A et B , on repère le signe de la tension par une flèche.

Dans un schéma, le signe de la tension est indiqué par une flèche. Si la pointe de la flèche indique le point A , alors :

$$u = u_{AB} = v_A - v_B.$$

Un voltmètre indique la valeur de la tension orientée de la borne \ominus (souvent repérée par COM) à la borne \oplus . Si on inverse les bornes du voltmètre, celui-ci indique une valeur opposée, bien que la tension physique soit inchangée.

4.3. Potentiel en un point

Nous pouvons décréter arbitrairement que le potentiel en un point est nul. Ce point détermine la masse du circuit. Sur le document 9, il s'agit du point M .

Le potentiel en un point A est alors défini sans ambiguïté :

$$v_A = v_M + u_{AM}, \text{ soit : } v_A = u_{AM}.$$

4.4. Additivité des tensions

Les tensions dans un circuit suivent une loi d'additivité. Reprenons le circuit représenté sur le document 9 :

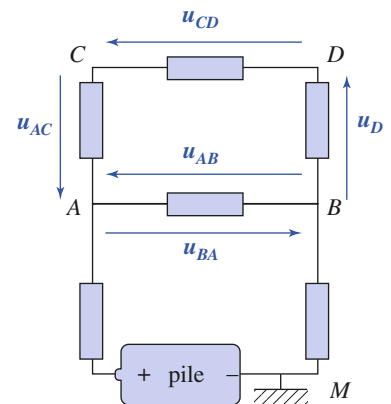
$$u_{AB} = v_A - v_B = (v_A - v_C) + (v_C - v_D) + (v_D - v_B) \text{ d'où :}$$

$$u_{AB} = u_{AC} + u_{CD} + u_{DB}.$$

Remarque

Il existe une similitude entre l'addition des tensions et celles des vecteurs :

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB}.$$



Doc. 9. $u_{BA} = -u_{AB}$
 $u_{AB} = u_{AC} + u_{CD} + u_{DB}$

5 L'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.)

5.1. Régime indépendant du temps

L'électrocinétique est le domaine de l'électromagnétisme, où les manifestations du mouvement des porteurs sont étudiées en termes de courants et de tensions.

Si ces grandeurs sont constantes dans le temps, nous parlerons de **régime constant ou de régime indépendant du temps**, ou encore de **régime stationnaire**. Ces grandeurs sont alors généralement notées avec des lettres majuscules : I pour l'intensité, $U_{AB} = V_A - V_B$ pour la tension ou différence de potentiel entre deux points A et B .

5.2. Régimes variables

Si les tensions $u(t)$ et les intensités $i(t)$ dépendent du temps, on est en **régime variable**. Les intensités et les tensions sont des grandeurs qui se propagent dans les conducteurs avec une vitesse finie (de l'ordre de $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vitesse de la lumière dans le vide). Ainsi, rigoureusement il n'est plus possible de parler d'intensité $i(t)$ à un instant donné t dans un circuit (même lorsque ce dernier ne présente aucune dérivation), car sa valeur dépend du point où nous l'évaluons.

Le temps de propagation de l'intensité dans un circuit de longueur ℓ est $\tau = \frac{\ell}{c}$, où c est sa vitesse de propagation. Si les temps intervenant dans l'étude du circuit (période, temps de montée du signal, temps d'acquisition des mesures, etc.)

Application 2

Quelques ordres de grandeur

1) Devons-nous tenir compte des phénomènes de propagation en T.P. d'électronique, où les dimensions des circuits sont inférieures au mètre et les fréquences utilisées inférieures au mégahertz ?

2) Le circuit de détection d'un téléviseur (tête haute fréquence) fonctionne à une fréquence de 600 MHz et celui d'un récepteur radio grandes ondes à environ 200 kHz. Que pouvez-vous dire de la taille maximale de ces circuits ?

3) Dans les micro-ordinateurs, les circuits électriques sont utilisés pour faire transiter l'information de l'unité centrale (microprocesseur) vers les mémoires. Le temps de réponse des mémoires d'un micro-ordinateur avoisine 10 ns.

Doit-on tenir compte du phénomène de propagation lors de la conception d'un micro-ordinateur ?

1) Pour une fréquence $f = 1 \text{ MHz}$, la longueur caractéristique $L = \frac{c}{f} = 300 \text{ m}$. Les dimensions des circuits lui sont très inférieures. Nous négligerons les phénomènes de propagation en T.P. d'électronique.

2) Pour une fréquence de 600 MHz, la longueur caractéristique est $L = 0,5 \text{ m}$ et pour 200 kHz, $L = 1,5 \text{ km}$. La tête haute fréquence doit être de petites dimensions (quelques centimètres) pour un téléviseur ; en revanche, sa taille est sans importance pour un récepteur radio grandes ondes.

3) En 10 ns, la distance parcourue par le signal est de 3 m. Le phénomène de propagation ne sera pas sensible si les mémoires sont à une dizaine de centimètres du microprocesseur. Ceci ne pose pas de problème technologique pour les micro-ordinateurs. En revanche, les ordinateurs très rapides ont une architecture conçue pour limiter les temps de propagation. Par exemple, le Cray II a une structure cylindrique autour de l'unité centrale.

sont grands devant τ , les phénomènes de propagation ne se manifestent pas et il sera pertinent de les négliger. Un régime variable permettant cette approximation est un **régime quasi permanent** ou un **régime quasi stationnaire**.

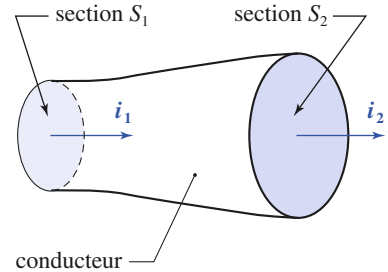
Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.), tous les effets liés à la propagation des signaux sous forme de tensions ou de courants sont négligés.

Toutes les expériences de travaux pratiques d'électricité et d'électronique sont réalisées dans le cadre de l'A.R.Q.S.

5.3. Expression de la conservation de la charge dans l'A.R.Q.S.

En A.R.Q.S., un fil conducteur reste électriquement neutre. Ainsi, dans un métal, la charge négative des électrons de conduction est exactement compensée par celle des charges fixes. Pour conserver cette neutralité il est nécessaire que la charge entrant par la section S_1 soit égale à la charge sortant par la section S_2 (doc. 10). En terme d'intensité cela se traduit par : $i_1 = i_2$.

Dans l'A.R.Q.S., l'intensité est la même en tout point d'un circuit sans dérivation.



Doc. 10. L'intensité i_1 à travers S_1 est égale à i_2 celle à travers S_2 .

6 Vocabulaire de l'électrocinétique

6.1. Fil de connexion

Un fil de connexion est un fil conducteur dont la faible résistance est négligeable devant les autres résistances du montage. En utilisation normale, aux bornes d'un fil de connexion, la ddp est négligeable devant les autres ddp qui se manifestent dans le montage.

6.2. Masse

6.2.1. Masse signal et masse carcasse

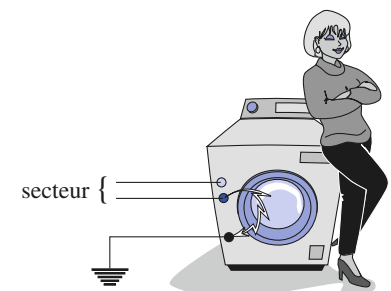
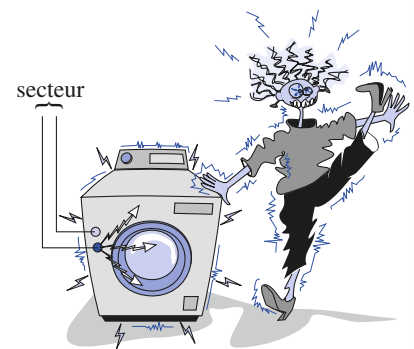
Les électroniciens distinguent en général la **masse signal** de la **masse carcasse**.

- La masse signal symbolisée par /// est une référence des potentiels pour un circuit donné.
- La masse carcasse symbolisée par ---| est reliée à la **terre** : son potentiel est constant et sa valeur est souvent conventionnellement fixée à zéro. Cette distinction est importante lors de la réalisation de montages électriques.

Remarques

Si, par accident un des fils touche la carcasse de l'appareil, celle-ci se trouve à un potentiel différent du sol. Une personne qui la touche établit une liaison électrique entre cette carcasse et le sol : elle est parcourue par un courant qui provoque l'électrocution.

Si la carcasse est reliée à la Terre, une partie du courant est dérivée directement (la personne n'est plus électrocutée) vers la Terre ; le courant n'a plus la même valeur dans les deux fils du secteur ; le **disjoncteur différentiel** placé en amont détecte cette différence et coupe automatiquement le circuit.

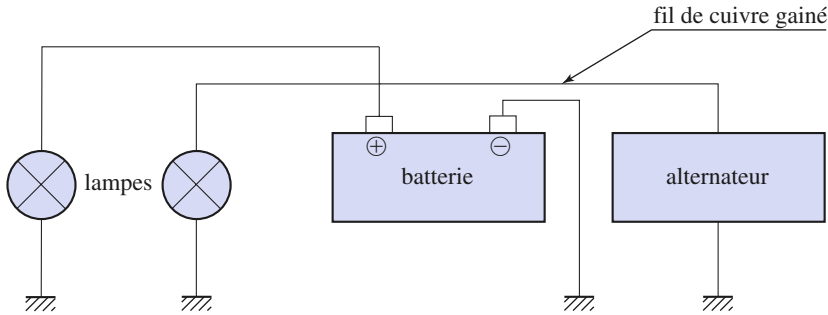


Doc. 11. Une masse carcasse reliée à la Terre est l'un des éléments qui permettent d'éviter l'électrocution.

6.2.2. Exemple d'une automobile

Pour une automobile, la carrosserie sert de masse pour tous ses circuits électriques.

La borne \ominus de la batterie ainsi qu'une des bornes de l'alternateur et de chaque récepteur (ampoule, autoradio, etc.) sont reliées à cette masse. L'autre borne de chacun de ces composants est reliée par un fil de connexion, isolé de la masse, à la borne \oplus de la batterie. On utilise ainsi moitié moins de fil de cuivre gainé (*doc. 12*).



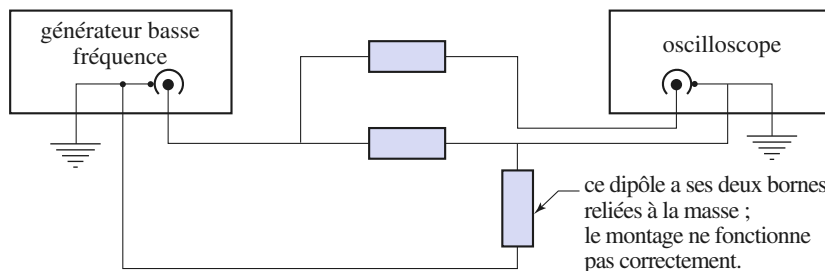
◀ **Doc. 12.** La carrosserie d'une automobile est une masse signal pour son circuit électrique.

Cette masse est une masse signal et son potentiel n'est pas obligatoirement constant dans le temps. Par temps sec, la carrosserie d'une automobile s'électrise par frottements dans l'air. Son potentiel prend alors une valeur différente de celle du potentiel constant de la Terre, puisque les pneumatiques, dans ces conditions, isolent la voiture du sol. Cela explique la secousse électrique ressentie parfois lorsque nous descendons d'une voiture dont le potentiel de la carrosserie est différent de celui du sol.

6.2.3. Appareils utilisés en travaux pratiques

Une des deux bornes d'utilisation des oscilloscopes et des générateurs de signaux est, en général, une masse carcasse.

Dans les montages que nous réalisons en travaux pratiques, la masse (carcasse) du générateur et celle de l'oscilloscope sont toutes deux reliées au sol par le fil de Terre de leurs cordons d'alimentation. Elles peuvent donc être facultativement reliées entre elles par un fil (*doc. 13*). Si le circuit est utilisé à haute fréquence, il faut éviter de relier ces masses entre elles.

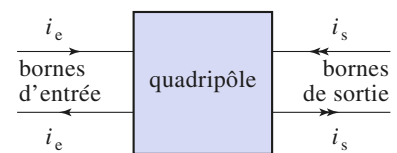


◀ **Doc. 13.** Les masses des deux appareils sont reliées entre elles par la Terre.

6.3. Composant

En électrocinétique, la connaissance du fonctionnement interne des composants n'est pas nécessaire. Chacun d'eux est considéré comme une *boîte noire* dont l'accès se fait par des bornes.

Nous distinguerons essentiellement deux familles de composants.



Doc. 14. Représentation d'un quadripôle.

6.3.1. Les dipôles

L'accès se fait par une paire de bornes ou de pôles. Leur représentation générale est le rectangle :



Si le fonctionnement du dipôle ne dépend pas du sens du courant, il est symétrique ; dans le cas contraire, il est dissymétrique.

6.3.2. Les multipôles

L'accès se fait par plus d'une paire de bornes. En particulier de nombreux composants peuvent être représentés par des quadripôles avec une paire de bornes d'entrée et une paire de bornes de sortie (doc. 14). Dans un quadripôle, le courant qui entre par une des bornes d'un accès est égal au courant qui sort par l'autre borne de cet accès.

6.4. Nœud

Un nœud est un point de jonction entre au moins trois fils de connexion. Attention, un nœud électrique peut être graphiquement éclaté, il en est souvent ainsi pour la masse signal de nombreux montages (doc. 15).

6.5. Branche

Une branche est constituée par un ensemble de dipôles montés en série entre deux nœuds (doc. 16). Deux dipôles sont montés en série lorsqu'ils ont une borne commune et lorsqu'ils sont traversés par le même courant. Ainsi aucun des dipôles représenté dans le document 17 n'est monté en série.

6.6. Maille

Une maille est un ensemble de branches formant un contour fermé que l'on peut parcourir en ne passant qu'une fois par chaque nœud intermédiaire (doc. 18). Une maille peut être orientée (arbitrairement).

6.7. Réseau

Un réseau, ou circuit, est un ensemble de composants reliés par des fils de connexion qui peut être analysé en termes de nœuds, branches et mailles.

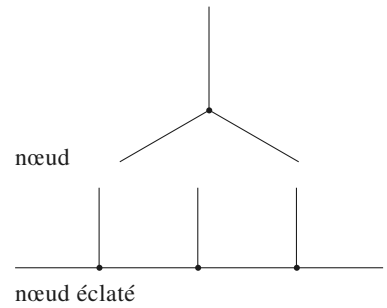
7 Lois de Kirchhoff

Le physicien allemand Gustav Robert Kirchhoff a établi en 1845 deux lois qui fondent tous les calculs de réseaux électriques :

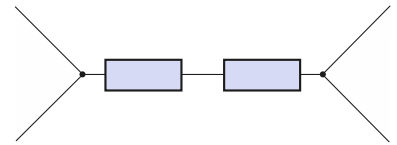
- la loi des nœuds ;
- la loi des mailles.

7.1. Loi des nœuds

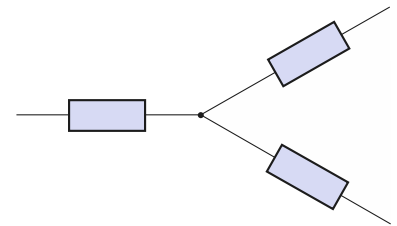
Cette loi est une conséquence de la conservation de la charge électrique dans l'A.R.Q.S. La charge électrique ne peut pas s'accumuler au niveau des conducteurs que sont les nœuds. L'étude faite au § 5.3. conduit à la loi des nœuds.



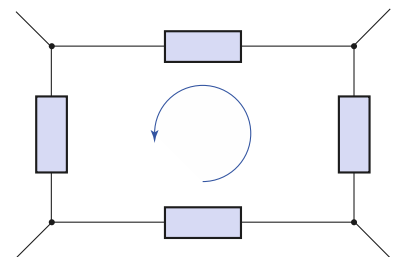
Doc. 15. différentes présentations graphiques des nœuds.



Doc. 16. Exemple de branche : les dipôles sont en série.



Doc. 17. Aucun de ces dipôles n'est monté en série.



Doc. 18. Exemple de maille orientée.

Pour un nœud donné, la somme des courants i_j qui y aboutissent est égale à la somme des courants i_k qui en repartent (doc. 19).

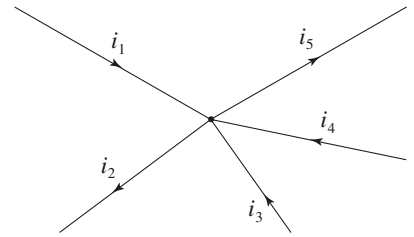
$$\sum_j i_j = \sum_k i_k.$$

De façon plus générale :

Pour un nœud donné :

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0,$$

ε_k vaut 1 si le courant i_k aboutit sur le nœud et -1 s'il en repart.

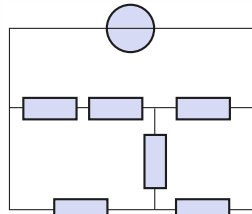


Doc. 19. Illustration de la loi des nœuds : $i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5$
ou : $i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0.$

Application 3

Analyse de la notion de nœud

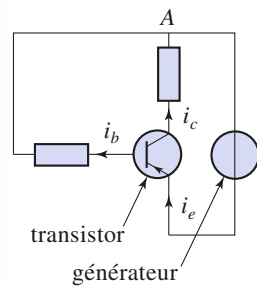
1) Déterminer le nombre de nœuds, de branches et de mailles dans le circuit représenté dans le document 20, ne comprenant que des dipôles.



2) Quel est le nombre de nœuds du circuit représenté dans le document 21 ?

Pourriez-vous donner une autre définition du nœud permettant de considérer le transistor comme un nœud ?

Doc. 20. Circuit ne comprenant que des dipôles.



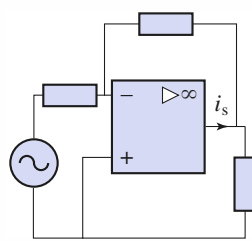
Doc. 21. ►

Circuit comprenant un transistor.

3) L'amplificateur opérationnel du montage donné (doc. 22), constitue-t-il un nœud au sens de la question 2) ?

Doc. 22. ►

Montage comprenant un amplificateur opérationnel.



1) La définition des différents termes conduit à un total de 4 nœuds, 6 branches et 7 mailles.

2) Il n'y a qu'un nœud ponctuel en A.

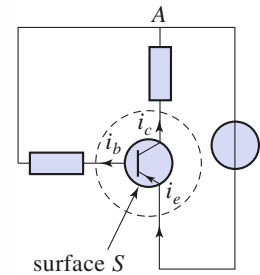
Plus généralement un nœud est un volume limité par une surface fermée S à travers laquelle entrent et sortent des courants, et à l'intérieur de laquelle il ne peut donc pas y avoir accumulation de charges.

La loi des nœuds

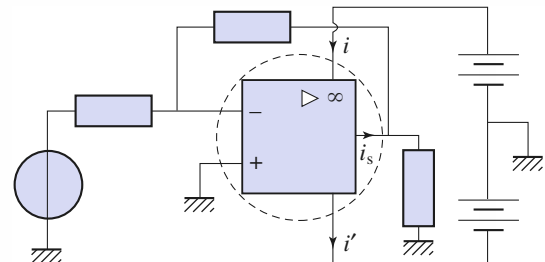
$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$$

est alors applicable. À ce titre, un transistor est un nœud : $i_e = i_b + i_c.$

3) Tel qu'il est représenté, l'amplificateur opérationnel ne constitue pas un nœud, et la loi $\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$ n'est pas vérifiée. En effet, les alimentations de l'amplificateur opérationnel ne sont pas représentées et les courants correspondants ne sont pas pris en compte (doc. 24).



Doc. 23. Un transistor est un nœud.



Doc. 24. Un amplificateur opérationnel représenté avec ses alimentations peut être considéré comme un nœud.

7.2. Loi des mailles

Cette loi est une conséquence de l'additivité des tensions.

Considérons l'exemple représenté dans le *document 25*. Les tensions explicites en termes de différences de potentiels nous permettent d'écrire pour la maille considérée :

$$(v_A - v_B) + (v_B - v_C) + (v_C - v_D) + (v_D - v_A) = 0$$

soit encore :

$$u_{AB} + u_{BC} + u_{CD} + u_{DA} = 0.$$

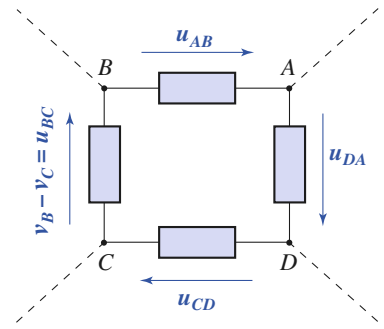
Cette dernière relation ne préjuge en rien de la nature des dipôles constituant la maille.

D'où, plus généralement (*doc. 26*) :

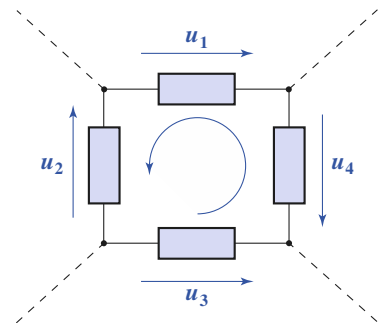
Pour une maille orientée :

$$\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$$

ε_k vaut 1 si la tension u_k est orientée dans le sens de la maille et -1 dans le cas contraire.



Doc. 25. Distribution des tensions le long d'une maille.



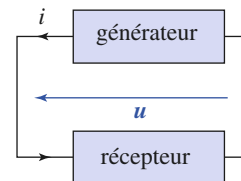
Doc. 26. Illustration de la loi des mailles : $-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ ou encore $u_1 + u_4 = u_2 + u_3$.

8 Étude énergétique d'un dipôle

8.1. Conventions d'orientation

Considérons le circuit élémentaire constitué d'un *générateur* (imaginons une pile) et d'un autre dipôle appelé *récepteur*. Le même courant $i(t)$ parcourt tout le circuit ; il est positif dans le cas représenté (*doc. 27*).

- Du point de vue du générateur, les flèches représentant u et i sont dans le même sens. C'est la **convention générateur** (*doc. 28*).
- Du point de vue du récepteur, les flèches représentant u et i sont dans le sens inverse. C'est la **convention récepteur** (*doc. 29*).



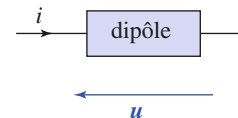
Doc. 27. Les flèches représentant u et i sont dans le même sens du point de vue du générateur, et en sens inverses du point de vue du récepteur.

8.2. Puissance échangée par un dipôle

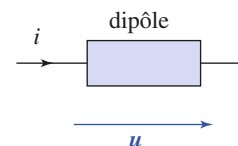
• Pendant la durée élémentaire dt , le générateur transfère une charge $dq = idt$ de la borne \ominus à la borne \oplus , ce qui élève son potentiel de u ; le générateur *cède* aux porteurs de charge l'énergie $d\mathcal{E} = uidt$ à laquelle correspond la puissance $\mathcal{P} = ui$.

• Pendant ce temps, une charge de même valeur $dq = idt$ passe dans le récepteur, ce qui diminue son potentiel de u ; l'énergie électrique perdue par les porteurs dans le récepteur y est convertie en une autre forme d'énergie (thermique par exemple) ; le récepteur *reçoit* l'énergie $d\mathcal{E} = uidt$ à laquelle correspond la puissance $\mathcal{P} = ui$.

La même quantité $\mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$ représente donc la puissance cédée par le générateur ou la puissance reçue par le récepteur.



Doc. 28. Convention récepteur.



Doc. 29. Convention générateur.

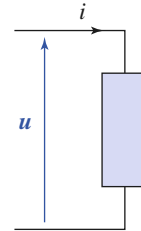
En convention *générateur*, les flèches représentant la tension et le courant sont dans le même sens. La quantité $\mathcal{P} = ui$ représente la puissance électrique cédée par le dipôle au reste du circuit.

En convention *récepteur*, les flèches représentant la tension et le courant sont en sens inverses. La quantité $\mathcal{P} = ui$ représente la puissance électrique reçue par le dipôle.

8.3. Fonctionnement générateur ou récepteur d'un dipôle

Adoptons la convention récepteur (doc. 30).

- Si à l'instant t la quantité $\mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$ est positive, le dipôle absorbe de l'énergie sous forme électrique : il a un comportement **récepteur**.
- Si à l'instant t la quantité $\mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$ est négative, le dipôle fournit de l'énergie sous forme électrique au reste du circuit : il a un comportement **générateur**.



Doc. 30. Dipôle en convention récepteur.

Application 4

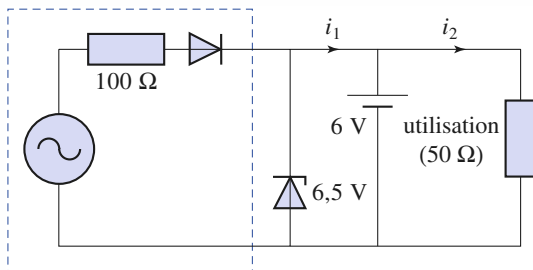
Comportement d'un chargeur et d'une batterie

Considérons le circuit représenté (doc. 31), constitué d'un chargeur de batterie alimenté par le secteur E.D.F., d'une batterie-tampon (servant en cas de coupure du secteur) et d'un réseau d'utilisation modélisé par une résistance.

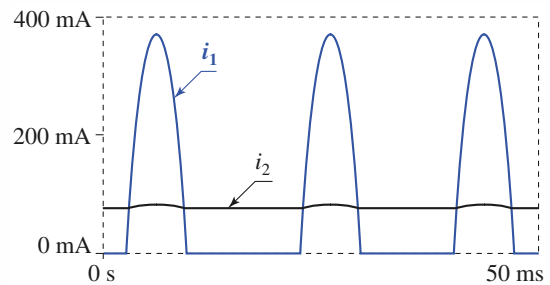
Les courbes du document 32 donnent i_1 et i_2 en fonction du temps.

Préciser le comportement générateur ou récepteur de la batterie. Quelle méthode graphique simple permet de savoir si en moyenne la batterie se charge ou se décharge ?

L'intensité dans la batterie est $(i_1 - i_2)$. Si i_1 est supérieur à i_2 , la batterie a un comportement récepteur. Sinon elle a un comportement générateur.

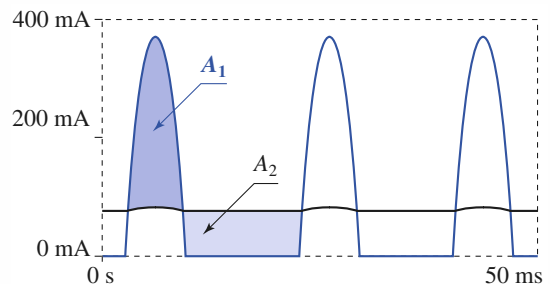


Doc. 31. Principe d'un groupe de sécurité.



Doc. 32. Chronogramme des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

La charge délivrée par la batterie sur une période est représentée par l'aire comprise entre les deux courbes : A_1 correspond au comportement récepteur et A_2 au comportement générateur. Si $A_1 > A_2$, (ce qui est le cas ici) la batterie est chargée en moyenne.



Doc. 33. Charge fournies et reçues par la batterie.

Si on adopte la convention générateur cela revient à changer pour un même système le signe du produit ui . Les conclusions sont donc inversées :

En convention récepteur :

- Si $\mathcal{P} = ui > 0$: le dipôle a un comportement récepteur, il reçoit de l'énergie électrique.
- Si $\mathcal{P} = ui < 0$: le dipôle a un comportement générateur, il fournit de l'énergie électrique.

Un dipôle peut avoir un comportement récepteur à certains moments et un comportement générateur à d'autres moments.

Par exemple, pour une automobile dont les phares sont allumés :

- quand le moteur tourne suffisamment vite, la batterie a un comportement récepteur ;
- quand le moteur est arrêté, la batterie a un comportement générateur.

Dans le cas d'un régime continu, indépendant du temps, la puissance reçue par un dipôle $\mathcal{P} = U_{AB}I$ garde toujours le même signe et le dipôle a un comportement générateur permanent ou un comportement récepteur permanent.

- La **convention récepteur** (ou générateur) concerne l'orientation de la tension et du courant. Elle dépend de la personne qui étudie le circuit.
- Le **caractère récepteur** (ou générateur) d'un dipôle est une donnée physique.
- Il convient de ne pas confondre les deux notions.

CQFR

● NOTIONS DE BASES

- Le sens conventionnel du courant est celui des porteurs de charges positives.
- Une charge électrique δq qui traverse une surface S pendant un intervalle de temps δt crée un courant d'intensité i telle que $\delta q = i\delta t$, soit :

$$i = \frac{\delta q}{\delta t}.$$

Le signe de l'intensité du courant dans un fil dépend de l'orientation arbitrairement fixée et matérialisée par une flèche.

Si le courant conventionnel est dans le sens de la flèche, alors l'intensité i est positive.

Si le courant conventionnel est dans le sens opposé, alors l'intensité i est négative.

- Le potentiel v_P en un point P d'un circuit électrique est défini par :

$$\mathcal{E}_P = qv_P$$

\mathcal{E}_P étant l'énergie potentielle d'un porteur de charge q qui se trouve au point M .

La tension u_{AB} est égale à la différence de potentiel entre les points A et B :

$$u_{AB} = v_A - v_B.$$

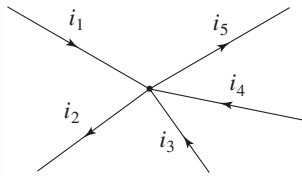
CQFR

Dans un schéma, le signe de la tension est indiqué par une flèche. Si la pointe de la flèche indique le point A, alors : $u = u_{AB} = v_A - v_B$.

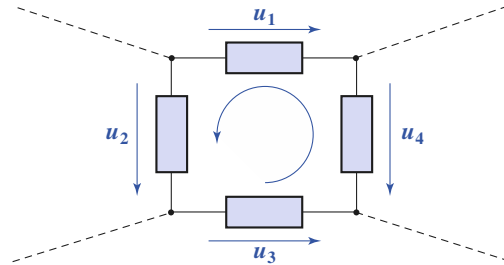
- Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, tous les effets liés à la propagation des signaux sous forme de tensions ou de courants sont négligés.
- Dans l'A.R.Q.S., l'intensité est la même en tout point d'un circuit sans dérivation.

● LOIS DE KIRCHHOFF

- Pour un nœud donné, $\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$, ε_k vaut 1 si le courant i_k aboutit sur le nœud et -1 s'il en repart (doc. 34).
- Pour une maille orientée, $\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$, ε_k vaut 1 si la tension u_k est orientée dans le sens de la maille et -1 dans le sens contraire (doc. 35).



Doc. 34. $i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0$.



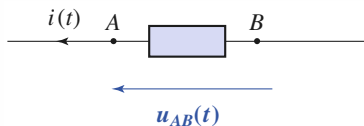
Doc. 35. $-u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0$.

• En **convention générateur** les flèches représentant la tension et le courant sont dans le même sens. La quantité $\mathcal{P} = ui$ représente la puissance électrique cédée par le dipôle au reste du circuit.

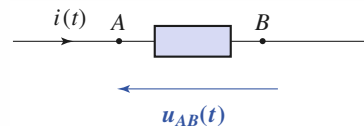
En **convention récepteur** les flèches représentant la tension et le courant sont en sens inverses. La quantité $\mathcal{P} = ui$ représente la puissance électrique reçue par le dipôle.

Si, en **convention récepteur**, $\mathcal{P} = ui > 0$: le dipôle a un comportement récepteur, il reçoit de l'énergie électrique.

Si, en **convention récepteur**, $\mathcal{P} = ui < 0$: le dipôle a un comportement générateur, il fournit de l'énergie électrique.



Doc. 36. Dipôle en convention générateur.



Doc. 37. Dipôle en convention récepteur.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Exprimer l'intensité d'un courant en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge.
- ✓ Manipuler des intensités et des tensions algébriques, en particulier :
 - utiliser la loi des mailles (ou la règle d'additivité des tensions) ;
 - utiliser la loi des nœuds.
- ✓ Déterminer la puissance reçue par un dipôle et distinguer un récepteur d'un générateur.

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Les électrons se déplacent dans un conducteur à une vitesse proche de la vitesse de la lumière.
 Vrai Faux
2. La loi des nœuds est vraie en régime permanent et en régime variable.
 Vrai Faux
3. Le caractère générateur ou récepteur d'un dipôle d'une convention arbitraire.
 Vrai Faux
4. Il n'est pas nécessaire de connaître le sens réel du courant pour orienter une branche dans un circuit.
 Vrai Faux

► Solution, page 22.

Exercices

1 Mouvement de porteurs

Un fil de cuivre de section $s = 2,5 \text{ mm}^2$ est parcouru par un courant de $I = 10 \text{ A}$.

- 1) Combien d'électrons vont traverser une section de ce fil pendant une seconde ?
- 2) Dans quelle longueur ℓ de fil ces électrons mobiles étaient-ils contenus si on admet que chaque atome de cuivre libère un électron ?

Données

- Masse molaire du cuivre : $M_{\text{Cu}} = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Masse volumique du cuivre : $\rho_{\text{Cu}} = 9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Charge de l'électron : $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

2 Intensité de courant d'un faisceau de particules

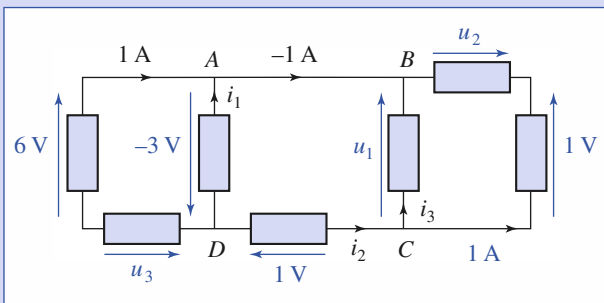
Le L.E.P. collisionneur d'électrons, positons du C.E.R.N. Genève a une circonférence $C = 27 \text{ km}$. Environ $n = 2 \cdot 10^{12}$ électrons et positons sont injectés dans l'anneau et ces derniers, après accélération, ont une vitesse proche de la vitesse c de la lumière.

Quelle est l'intensité I associée à la boucle de courant constituée par ce faisceau de particules ?

Données : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

3 Loi des mailles et lois des nœuds

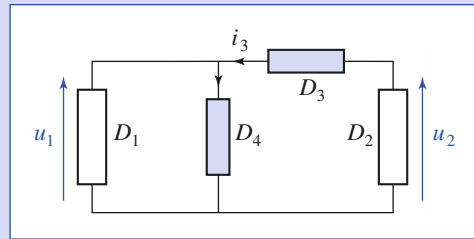
- 1) Déterminer les tensions u_1, u_2, u_3 du réseau représenté sur la figure.
- 2) Déterminer les courants i_1, i_2, i_3 .



4 Comportement récepteur et générateur

On étudie le circuit représenté sur la figure.

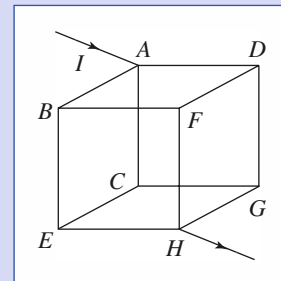
- D_1 est un accumulateur qui impose une tension u_1 positive entre ses bornes.
- D_2 est un autre accumulateur qui impose une tension u_2 que l'expérimentateur peut ajuster, en grandeur et en signe, entre ses bornes.
- D_3 est un résistor de résistance R qui laisse passer un courant $i_2 = \frac{u_2 - u_1}{R}$.
- D_4 est un résistor de résistance R qui laisse passer un courant $i_4 = \frac{u_1}{R}$.



En fonction des valeurs de u_2 déterminer si les quatre dipôles ont un comportement générateur ou un comportement récepteur.

5 Distribution de courants sur les arêtes d'un cube

À l'aide d'un fil homogène de section constante, on réalise les arêtes d'un cube. Le courant d'intensité I arrive en A ressort par le sommet opposé H.



Calculer les intensités dans chaque branche.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 20.

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai.

1

1) En une seconde passe une charge : $q = It = 10 \text{ C}$.

Nombre d'électrons correspondants :

$$n = \frac{I}{e} = \frac{10}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,25 \cdot 10^{19} \text{ électrons.}$$

2) • Quantité de cuivre ayant libéré ces électrons : $\frac{6,25 \cdot 10^{19}}{6 \cdot 10^{23}} \approx 10^{-4} \text{ mol}$;

• masse de cuivre correspondante : $63,5 \cdot 10^{-4} = 6,35 \cdot 10^{-3} \text{ g}$;

• volume de cuivre correspondant : $\frac{6,35 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^3} = 7 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3$;

• longueur de fil correspondant : $\frac{7 \cdot 10^{-10}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 0,28 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,28 \text{ mm}$.

2

Les n électrons traversent une section donnée de l'accélérateur à chaque tour.

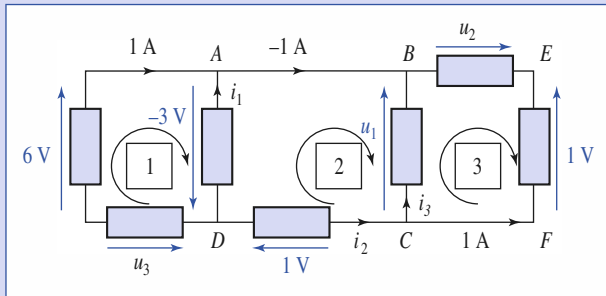
Si T est la période (la durée d'un tour) : $I = \frac{ne}{T}$.

Or $T = \frac{\text{circonférence}}{\text{vitesse}} = \frac{C}{c}$; donc :

$$I = \frac{nec}{C} = 3,5 \text{ mA.}$$

3

1) On oriente arbitrairement les mailles et on applique la loi des mailles.



Maille 1 : $6 \text{ V} + (-3 \text{ V}) - u_3 = 0$ d'où : $u_3 = 3 \text{ V}$

Maille 2 : $(-3 \text{ V}) - u_1 + 1 \text{ V} = 0$ d'où : $u_1 = 4 \text{ V}$

Maille 3 : $u_1 + u_2 - 1 \text{ V} = 0$ d'où : $u_2 = -3 \text{ V}$

Remarque

Il est possible de considérer d'autres mailles ; la maille AEFD donne l'équation :

$$u_2 - 1 \text{ V} + 1 \text{ V} - (-3 \text{ V}) = 0 \text{ d'où } u_2 = -3 \text{ V.}$$

2) Nœud A : $1 \text{ A} + i_1 = -1 \text{ A}$ d'où $i_1 = -2 \text{ A}$

Nœud B : $-1 \text{ A} + 1 \text{ A} + i_3 = 0$ d'où $i_3 = 0$

Nœud C : $i_2 = i_3 + 1 \text{ A}$ d'où $i_2 = 1 \text{ A}$.

Nous aurions obtenu le même résultat avec le nœud D :

$$0 = 1 \text{ A} + i_1 + i_2.$$

4

Le courant qui circule dans D_1 en convention récepteur (flèche vers le bas) est :

$$i_1 = i_3 - i_4 = \frac{u_2 - 2u_1}{R}.$$

• Dipôle D_1 : en convention récepteur $\mathcal{P}_{\text{reçu}} = u_1 i_1 = \frac{(u_2 - 2u_1)u_1}{R}$

$$\mathcal{P} > 0 \text{ si } u_2 > 2u_1$$

D_1 est récepteur si $u_2 > 2u_1$ et générateur si $u_2 < 2u_1$.

• Dipôle D_2 : en convention générateur $\mathcal{P}_{\text{cédée}} = u_2 i_3 = \frac{(u_2 - u_1)u_2}{R}$

$$\mathcal{P} > 0 \text{ si } u_2 > u_1 \text{ ou si } u_2 < 0$$

D_2 est générateur si $u_2 > u_1$ ou si $u_2 < 0$ et récepteur si $0 < u_2 < u_1$.

• Dipôle D_3 : en convention récepteur $\mathcal{P}_{\text{reçu}} = u_3 i_3 = \frac{(u_2 - u_1)^2}{R} > 0$

D_3 est toujours récepteur (sauf si $u_2 = u_1$).

• Dipôle D_4 : en convention récepteur $\mathcal{P}_{\text{reçu}} = u_3 i_3 = \frac{u_1^2}{R} > 0$

D_4 est toujours récepteur.

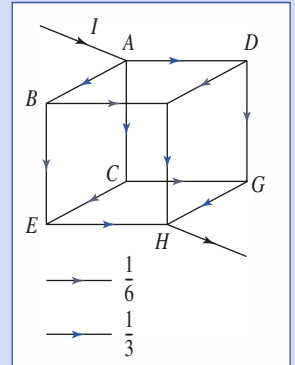
5

Étant donné l'équivalence des trois chemins AB, AC et AD pour rejoindre le point H, la loi des nœuds appliquée en A donne une intensité de $\frac{1}{3}$ dans ces trois branches.

De même, la loi des nœuds appliquée en H donne une intensité de $\frac{1}{3}$ dans les branches EH, FH et GH.

Les chemins BE et BF sont équivalents, donc la loi des nœuds en B donne une intensité de $\frac{1}{6}$ dans BE et BF.

Avec le nœud D, $\frac{1}{6}$ parcourt DF et DG et avec le nœud C, $\frac{1}{6}$ parcourt CE et CG.



Modélisation linéaire des composants usuels

2

Introduction

La théorie des réseaux linéaires repose, dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.), sur les deux lois de Kirchhoff et sur le concept de modèles linéaires.

Modéliser un système consiste à décrire son comportement à l'aide d'éléments dont les propriétés mathématiques sont de nature à simuler son fonctionnement.

Si le modèle mathématique conduit à des résultats non conformes à l'expérience, il doit être amélioré ou abandonné.

Une modélisation linéaire n'utilise que des éléments linéaires régis par des équations différentielles linéaires.

Permettant une résolution plus simple des problèmes, elle est adoptée préférentiellement.

O B J E C T I F

- Définir et modéliser les composants usuels.

P R É R E Q U I S

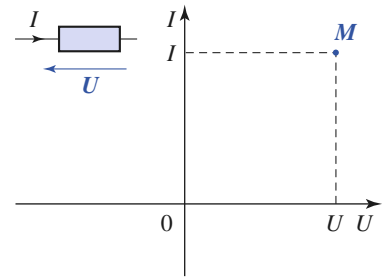
- Conditions de validité de l'A.R.Q.S.
- Lois de Kirchhoff.

Caractéristiques d'un dipôle

1.1. Point de fonctionnement

Le comportement d'un dipôle est décrit par les valeurs de la tension u à ses bornes et du courant i qui le parcourt : le lien entre ces deux valeurs est la conséquence des propriétés physiques du composant (*doc. 1*).

Le point de fonctionnement est le point M de coordonnées (u, i) dans un plan où les tension et courant sont portés sur les axes de repère.



Doc. 1. Caractéristique statique d'un composant dipolaire.

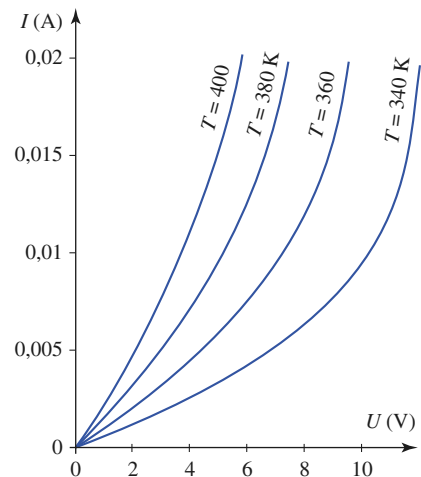
1.2. Comportement en régime statique

1.2.1. Caractéristique statique

La caractéristique statique tension-courant du dipôle s'obtient en relevant l'ensemble de ses points (U, I) de fonctionnement statique.

La relation entre la tension U et le courant I peut dépendre de façon significative de certains *paramètres de fonctionnement* du dipôle. Il en est ainsi de la température ambiante T (pour un conducteur métallique, ou bien pour une thermistance ou une diode et plus généralement pour tous les composants à semi-conducteurs), de l'éclairement E (photopile, photodiode, photorésistance), etc.

En faisant varier l'un des paramètres de fonctionnement, on obtient un *réseau de caractéristiques* (*doc. 2*).



Doc. 2. Réseau des caractéristiques statiques d'une thermistance : la résistance diminue rapidement avec la température.

1.2.2. Dipôles symétriques, dipôles polarisés

Pour un composant dipolaire symétrique, lorsque le point de fonctionnement (U, I) est observé, le point $(-U, -I)$ existe aussi : la caractéristique est symétrique par rapport à l'origine. Le régime de fonctionnement du circuit n'est pas perturbé lorsqu'on permute les deux bornes de ce composant (une résistance, par exemple).

Une pile (bornes \oplus et \ominus), une diode (qui ne laisse passer le courant que dans un sens), sont au contraire des composants non symétriques, ou polarisés.

1.2.3. Dipôles passifs, dipôles actifs

Le dipôle est passif si sa caractéristique statique passe par l'origine. La thermistance, dont le réseau est tracé sur le *document 2* en est un exemple.

Dans le cas contraire, ce composant est actif. Une batterie, pour laquelle la tension mesurée à courant nul est non nulle, est un composant actif.

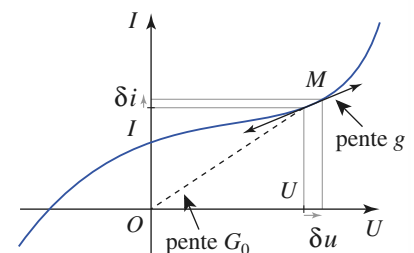
1.2.4. Résistance statique, résistance dynamique

La résistance statique R_0 d'un composant passif au point de fonctionnement $M(U, I)$ est le rapport $R_0 = \frac{U}{I}$.

Son inverse $G_0 = \frac{1}{R_0}$ est la conductance statique du dipôle (*doc. 3*).

La résistance dynamique du dipôle, au point de fonctionnement M , est

$$r = \left(\frac{dU}{dI} \right)_M$$



Doc. 3. Conductances statique G et dynamique g au point de fonctionnement.

C'est l'inverse de la pente $g = \left(\frac{dI}{dU}\right)_M$ de la caractéristique statique $I = f(U)$ du dipôle (doc. 3).

Pour de petites variations de la tension u et du courant i au voisinage du point M , nous pouvons assimiler localement la caractéristique à sa tangente et écrire :

$$\delta u = u - U, \quad \delta i = i - I, \quad \delta u \approx r \cdot \delta i.$$

Au voisinage du point M , les variations de tension et courant sont proportionnelles : la caractéristique a été linéarisée.

1.3. Étude en régime variable

1.3.1. Au voisinage d'un point de fonctionnement

Supposons que le comportement du composant est inchangé lorsqu'on passe d'un régime statique à un régime variable, ou dynamique, c'est-à-dire que l'on a : $i(t) = f(u(t))$, comme on avait précédemment $I = f(U)$.

La linéarisation précédente peut alors être utilisée pour relier de petites variations des tension $u(t)$ et courant $i(t)$ au voisinage du point de fonctionnement :

$$u(t) \approx U + r(i(t) - I).$$

Cette extension est souvent acceptable pour une résistance et quelques autres composants dans des domaines de fréquences restreints. Cette extension n'est cependant pas généralisable et devra être vérifiée expérimentalement pour préciser son domaine de validité.

1.3.2. Caractéristique dynamique

En régime variable, la trace du spot d'un oscilloscope, dont les déplacements horizontal et vertical sont proportionnels à la tension $u(t)$ et au courant $i(t)$ respectivement, donne la caractéristique dynamique du dipôle (doc. 4a et 4b ; cf. Application 1).

Comme nous venons de le signaler, celle-ci peut s'identifier, s'écarter un peu, ou même différer complètement de la caractéristique statique, suivant le composant étudié et le régime de fonctionnement utilisé.

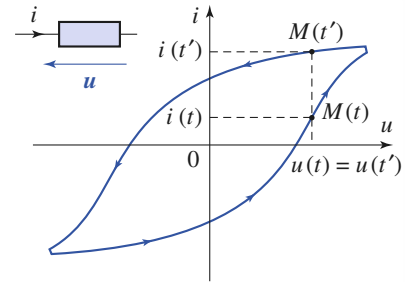
La géométrie de la caractéristique dépend donc de l'excitation utilisée : forme du signal, amplitude, domaine de fréquence. Ces indications doivent alors accompagner la caractéristique dynamique pour pouvoir l'analyser.

1.4. Équation d'évolution

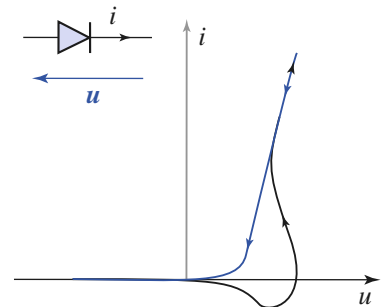
La caractéristique du composant est une donnée expérimentale. Nous pouvons la représenter de façon plus ou moins approchée pour une modélisation qui relie pour des paramètres de fonctionnement donnée (température, éclairnement, etc.), la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$:

Les évolutions de $u(t)$ et $i(t)$ dans un dipôle sont reliées par une équation d'évolution, équation différentielle de la variable temps t . Cette équation fait intervenir les paramètres de fonctionnement (température, etc.). Elle rend compte du comportement physique du dipôle.

La résolution (analytique ou numérique) de cette équation permet de prédire le comportement du dipôle, et plus généralement celui d'un circuit électrique. La conception raisonnée de montages réalisant des fonctions précises est ainsi envisageable.



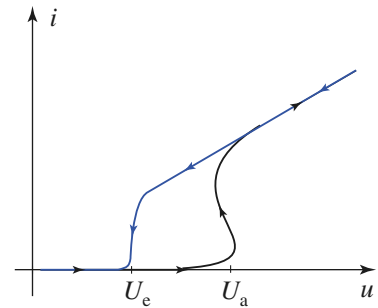
Doc. 4a. Exemple de caractéristique dynamique d'un dipôle linéaires soumis à une excitation sinusoïdale, tracée sur un écran d'oscilloscope.



Doc. 4b. Caractéristique d'une diode (élément non linéaire) à fréquence élevée.

Remarque

Pour certains dipôles, le comportement est délicat à étudier, dans la mesure où il fait intervenir les conditions d'expériences et les valeurs de $u(t)$ et $i(t)$, mais aussi la façon dont l'état (u, i) a été atteint : le point de fonctionnement obtenu fait intervenir les états de fonctionnement antérieurs du circuit. Le composant a ainsi de la mémoire, et garde une trace de son histoire : on parle alors de comportement à hystérésis (doc. 5).



Doc. 5. Un comportement à hystérésis : l'allumage d'une lampe néon (élément non linéaire) a lieu pour une tension U_a . Au retour, l'extinction, a lieu pour une tension $U_e > U_a$.

1.5. Dipôles linéaires

1.5.1. Définition

Un dipôle linéaire est décrit par une équation différentielle d'évolution linéaire à coefficients constants de la forme :

$$a_0 u(t) + a_1 \frac{du(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \dots + b_0 i(t) + b_1 \frac{di(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \dots = F(t).$$

Dans la suite de ce chapitre, nous nous limiterons à des dipôles pour lesquels interviendront au plus des dérivées premières par rapport au temps : a_n et b_n sont nuls pour $n > 1$.

1.5.2. Caractéristique statique

En régime statique :

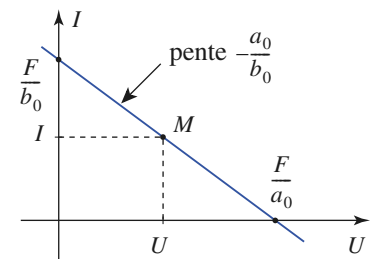
$$u(t) = U, \quad i(t) = I \quad \text{et} \quad F(t) = F$$

sont des constantes : $a_0 U + b_0 I = F$.

Par conséquent (doc. 6) :

La caractéristique statique d'un dipôle linéaire est une droite.

Par exemple, la caractéristique d'une résistance R est donnée par $I = \frac{U}{R}$ en convention récepteur (doc. 7).



Doc. 6. La caractéristique statique d'un dipôle linéaire est une droite.

Remarque

Nous verrons que la caractéristique dynamique d'un dipôle linéaire n'est en général pas une droite (cf. Application 1).

1.5.3. Dipôle linéaire passif

Le dipôle est passif si le second membre de son équation d'évolution est nul : $F(t) = 0$ (c'est le cas pour une résistance).

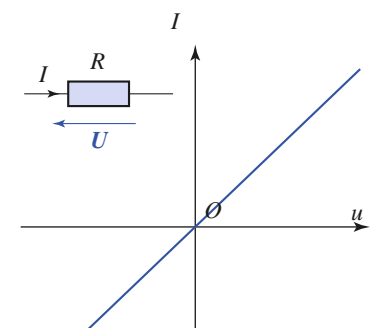
Si $(u(t), i(t))$ est un comportement possible d'un dipôle linéaire passif, alors $(\alpha \cdot u(t), \alpha \cdot i(t))$ aussi (α est un réel quelconque). Le dipôle linéaire passif est donc symétrique.

1.5.4. Source linéaire

Le dipôle est actif si le second membre $F(t)$ est non nul : nous parlerons alors de source.

Si la fonction $F(t)$ est intrinsèque au dipôle, nous parlerons de *source indépendante* (par exemple, l'équation $u(t) = U_0 \cos \omega t$ caractérise un générateur idéal de tension sinusoïdale).

Si ce second membre est contrôlé par des tensions ou courants dans d'autres branches du circuit, nous parlerons de *source liée* (c'est, par exemple, le cas pour un amplificateur opérationnel utilisé dans un montage amplificateur de tension).



Doc. 7. Caractéristique statique d'une résistance R (en convention récepteur).

2 Éléments dipolaires fondamentaux

2.1. Intérêt de la notion d'éléments fondamentaux

Les éléments que nous décrivons ici permettent de réaliser quelques opérations fondamentales : alimenter le circuit (sources), multiplier, intégrer ou dériver le signal électrique (courant, tension). Ce sont tous des dipôles linéaires.

En les associant, nous obtiendrons des circuits linéaires dont les équations d'évolution permettent :

- de réaliser des fonctions particulières ;
- de modéliser (et observer) la réponse d'un système (pas uniquement électronique) régi par la même équation d'évolution.

2.2. Éléments dipolaires passifs

Nous utilisons la convention récepteur : les flèches qui représentent u et i sont en sens inverses. (Rappelons que les dipôles linéaires passifs sont des dipôles symétriques.)

2.2.1. Résistor ou conducteur (ohmique)

■ Équation de fonctionnement

Sa représentation symbolique est donnée par le *document 8*.

Un résistor suit à tout instant la loi d'Ohm :

$$u(t) = Ri(t) \text{ en convention récepteur.}$$

R , grandeur positive et constante, est la *résistance* du résistor, et

$G = \frac{1}{R}$ est sa *conductance*.

La *résistance* s'exprime en ohm (symbole : Ω) et la *conductance* en siemens (symbole : $S = \Omega^{-1}$).

■ Caractéristique courant-tension

La caractéristique statique d'un résistor et ses caractéristiques dynamiques sont confondues en une droite passant par l'origine (*doc. 8*).

■ Puissance reçue

La puissance instantanée reçue par un résistor est toujours positive :

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t).$$

Le résistor absorbe donc de l'énergie, mais n'en restitue jamais au circuit (*doc. 9*) : en recevant de l'énergie, l'élément tend à s'échauffer, et transfère de la puissance thermique au milieu environnant. Cet effet est recherché dans le fonctionnement d'un radiateur électrique.

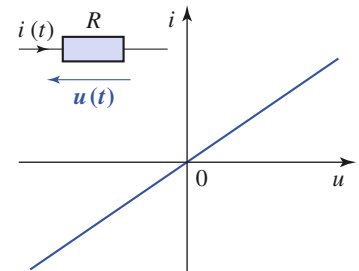
2.2.2. Bobine idéale

■ Équation de fonctionnement

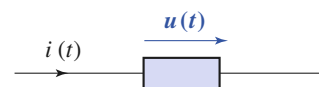
La représentation symbolique figure sur le *document 10*. Le fonctionnement de cet élément est basé sur le phénomène d'induction électromagnétique : les variations du courant dans la bobine créent une tension aux bornes de l'élément :

La tension $u(t)$ aux bornes de la bobine à tout instant, proportionnelle à la dérivée de l'intensité du courant $i(t)$ qui la traverse :

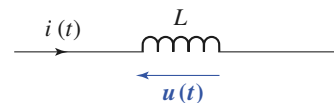
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$



Doc. 8. Représentation et caractéristique d'un résistor en convention récepteur.



Doc. 9. En convention générateur, $u(t) = -Ri(t)$. La puissance reçue $\mathcal{P} = -u(t)i(t) = +Ri^2(t)$ est toujours positive.



Doc. 10. Représentation d'une bobine idéale.

La constante positive L est l'inductance de la bobine. Elle se mesure en henry (symbole : H).

En régime statique $i = I$ et $u = 0$, la caractéristique statique est donc confondue avec l'axe vertical (O, I).

En régime constant ou statique (permanent, indépendant du temps) une bobine idéale se comporte comme un simple fil.

■ *Puissance reçue*

La puissance instantanée reçue par une bobine idéale est :

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2(t)}{2}\right).$$

La bobine accumule donc de l'énergie lorsque le courant i augmente, et peut la restituer si celui-ci diminue : la bobine est un élément de stockage d'énergie.

L'énergie $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$ est emmagasinée dans la bobine.

■ *Continuité du courant*

La puissance $\mathcal{P}(t) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ reçue par un composant étant toujours finie, son énergie \mathcal{E} ne peut pas subir de discontinuité car cela correspondrait à une valeur infinie de $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$. En conséquence :

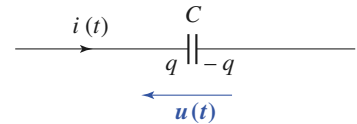
Le courant à travers une bobine idéale, ne peut pas subir de discontinuité.

2.2.3. Condensateur idéal

■ *Équation de fonctionnement*

La représentation symbolique d'un condensateur parfait est donnée sur le document 11. La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est due aux charges $\pm q$ portées par les armatures. $q(t)$ et $u(t)$ sont liés par la relation linéaire $q(t) = Cu(t)$.

En convention récepteur, le courant $i(t)$ arrive sur l'armature portant la charge $+q(t)$.



Doc. 11. Représentation symbolique d'un condensateur idéal.

Le courant $i(t)$ qui traverse un condensateur idéal est, à tout instant, proportionnel à la dérivée de la tension $u(t)$ appliquée à ses bornes :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}.$$

La constante positive C est la capacité du condensateur. Elle se mesure en farad (symbole : F).

En régime statique, $u = U$ et $i = 0$, la caractéristique statique est donc confondue avec l'axe horizontal (O, U).

En régime constant ou statique, un condensateur idéal se comporte comme un interrupteur ouvert.

■ *Puissance reçue*

La puissance instantanée reçue par un condensateur idéal est :

$$\mathcal{P}(t) = u(t) \cdot i(t) = Cu(t)\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Cu^2(t)}{2}\right).$$

Il est toujours prudent de vérifier le signe de la relation $i = \frac{dq}{dt}$. On voit sur le schéma (doc. 11) que si i est positif la charge q augmente.

Une énergie $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$ est *emmagasinée* dans le condensateur et sa valeur instantanée est déterminée par la valeur de la tension $u(t)$ à ses bornes.

■ *Continuité de la charge*

Énergie $\mathcal{E}(t)$ ne pouvant pas subir de discontinuité (cf. § 2.2.2.), il en résulte que :

La tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur idéal, ainsi que sa charge $q(t)$, ne peuvent pas subir de discontinuité.

Application 1

Caractéristiques dynamiques d'une bobine et d'un condensateur

Une bobine est alimentée en régime sinusoïdal permanent, parcourue par le courant $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$.

Quelle est l'allure de la caractéristique dynamique associée à ce fonctionnement ?

Qu'en sera-t-il pour un condensateur ? (Préciser dans quel sens est parcourue la caractéristique.)

Ces deux éléments, bobine et condensateur, sont-ils des éléments linéaires ?

Pour la bobine :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L\omega I_0 \cos(\omega t).$$

La caractéristique dynamique de la bobine décrit donc l'ellipse de centre O , d'équation :

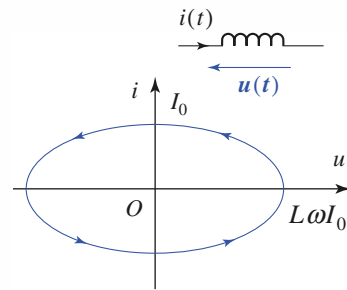
$$\left(\frac{u}{L\omega}\right)^2 + i^2 = I_0^2.$$

L'équation $u(t) = L\omega I_0 \cos(\omega t)$ et l'équation :

$i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ correspondent à une évolution dans le sens trigonométrique direct le long de l'ellipse.

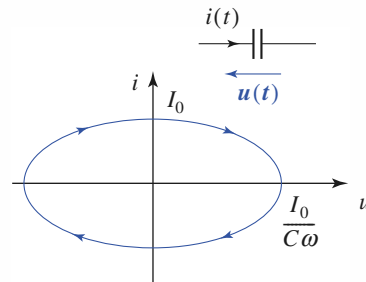
Pour le condensateur :

$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$, donc $u(t) = -\frac{I_0}{C\omega} \cos \omega t$ (en régime sinusoïdal, les valeurs moyennes sont nulles).



Doc. 12

L'ellipse d'équation : $(C\omega u)^2 + i^2 = I_0^2$ est cette fois décrite dans le sens antitrigonométrique (sens des aiguilles d'une montre).



Doc. 13

Ces deux éléments, bobine et condensateur, sont des éléments linéaires, car une équation différentielle à coefficients constants lie les grandeurs $u(t)$ et $i(t)$.

2.3. Éléments dipolaires actifs

2.3.1. Les sources

Les bobines et condensateurs stockent de l'énergie électrique.

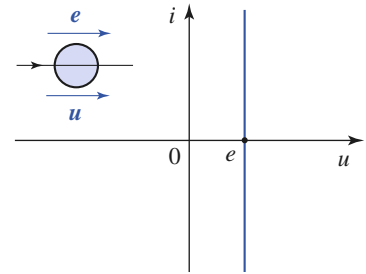
Un condensateur de capacité $C = 1 \mu\text{F}$ (valeur courante) chargé sous une tension $u = 10 \text{ V}$ ne stocke cependant que l'énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

Une plaque chauffante de puissance $\mathcal{P} = 1 \text{ kw}$ absorberait cette énergie en $5 \cdot 10^{-7}$ seconde !

L'énergie ne peut être stockée que peu et momentanément sous forme électrique. En pratique, elle est stockée sous une autre forme (énergie potentielle de pesanteur dans un barrage, énergie chimique dans un accumulateur d'automobile, etc.).

Des éléments tels qu'une turbine, une batterie peuvent restituer cette énergie sous forme électrique : nous les utilisons comme pompes à charges dans les circuits électriques (un générateur basse fréquence utilisé en TP transmet au circuit l'énergie électrique puisée au secteur de la salle, une antenne radio celle des ondes électromagnétiques).

Nous aborderons ici les éléments actifs, sources de tension ou de courant insérés dans les circuits électriques...



Doc. 14. Caractéristique courant-tension d'une source de f.e.m. $e(t)$ en convention générateur. En toutes circonstances $u = e(t)$ pour la source représentée.

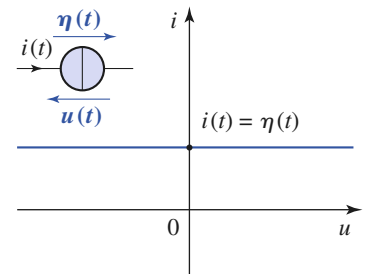
2.3.2. Sources indépendantes

Une source indépendante de tension maintient entre ses bornes une tension $u(t)$ indépendante de l'intensité $i(t)$ du courant qui la traverse. La caractéristique tension-courant d'une source de tension est donnée par document 14.

Une source indépendante de tension est caractérisée par sa force électromotrice (f.e.m.) $e(t)$ telle que $u = e$, quel que soit le courant traversant la source.

Une source indépendante de courant débite un courant d'intensité $i(t)$ indépendant de la tension $u(t)$ appliquée à ses bornes et celle-ci ne dépend que du circuit extérieur. La caractéristique tension-courant d'une source de courant est donnée document 15.

Une source indépendante de courant est caractérisée par son courant électromoteur (c.e.m.) $\eta(t)$ tel que $i = \eta$, quelle que soit la tension aux bornes de la source.

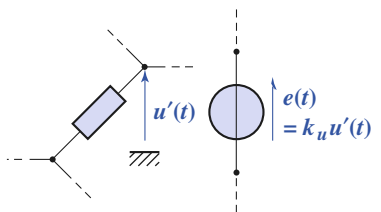


Doc. 15. Caractéristique tension-courant et représentation symbolique d'une source de f.e.m. $\eta(t)$. En toutes circonstances $i(t) = \eta(t)$ pour la source représentée.

2.3.3. Sources commandées

La notion de source commandée ou liée, est utilisée pour modéliser des interactions entre les différents éléments d'un réseau.

Une source commandée est une source de tension (ou de courant) dont la (f.e.m.) (ou le c.e.m.) a une valeur déterminée par une grandeur électrique $u'(t)$ ou $i'(t)$, associée à un autre élément du réseau (doc. 16).



Doc. 16. Source de tension commandée en tension.

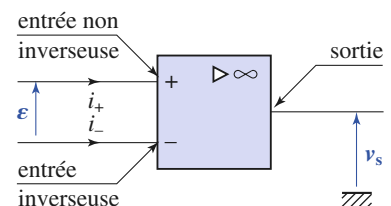
2.4. Amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire

Un A.O. idéal est un composant actif dont la représentation symbolique est donnée par le document 17.

Les intensités i_+ et i_- arrivant sur les entrées + et - sont nulles. En régime linéaire, il est caractérisé par :

$$\mathcal{E} = V_+ - V_- = 0.$$

La tension v_s est fixée par le reste du circuit compte tenu des relations $i_+ = 0$, $i_- = 0$ et $\mathcal{E} = 0$.



Doc. 17. Amplificateur opérationnel idéal.

Application 2

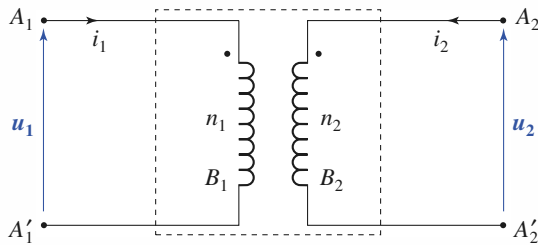
Modélisation d'un transformateur idéal

Un transformateur (toujours utilisé en régime variable) est un quadripôle dont la représentation symbolique est donnée par le document 18. Il est réalisé à l'aide de deux bobines B_1 (primaire) et B_2 (secondaire) couplées électromagnétiquement. Soit n_1 et n_2 les nombres de spires de bobines B_1 et B_2 .

Le rapport $n = \frac{n_1}{n_2}$ est le rapport de transformation du transformateur.

Un transformateur idéal est réalisé à l'aide de bobines idéales parfaitement couplées. Ses équations en régime linéaire basse fréquence sont :

$$u_2 = nu_1 \quad \text{et} \quad i_1 = -ni_2.$$



Doc. 18. Représentation symbolique d'un transformateur.

1) Proposer une modélisation de ce composant en utilisant les éléments fondamentaux.

2) Un résistor de résistance R_u est branché entre les bornes du secondaire A_2 et A_2' .

Montrer que le transformateur se comporte entre les points A et A_1' comme un résistor R_e que l'on déterminera.

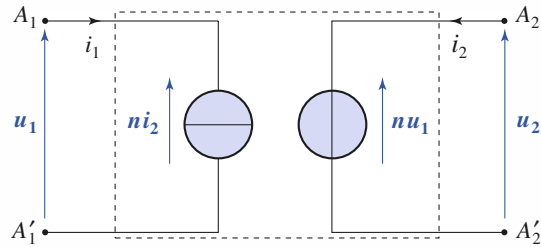
3) Un résistor de résistance R_a est branché entre les bornes du primaire A_1 et A_1' . Montrer que vu de la sortie, entre les points A_2 et A_2' , le transformateur se comporte comme une résistance R_s que l'on déterminera.

4) Comment choisir le rapport de transformation n pour qu'il y ait adaptation d'impédance, c'est-à-dire pour que $R_e = R_a$ et $R_s = R_u$?

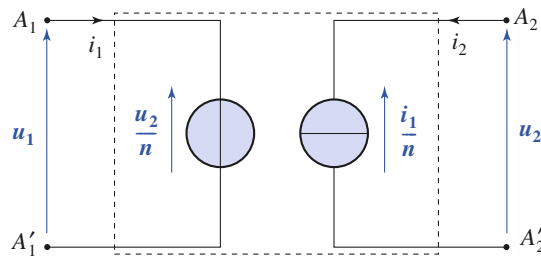
5) Montrer qu'un transformateur idéal est un composant non énergétique, c'est-à-dire qu'il ne consomme pas, ne produit pas et n'emmagasine pas d'énergie.

1) La traduction des relations de définition du transformateur, à l'aide des éléments fondamentaux, con-

duit au réseau représenté document 19. Les deux sources liées modélisent les effets du couplage électromagnétique entre les bobines d'entrée et de sortie. La modélisation précédente n'est pas unique. Une seconde modélisation est présentée document 20. Les deux modélisations peuvent être indifféremment utilisées.



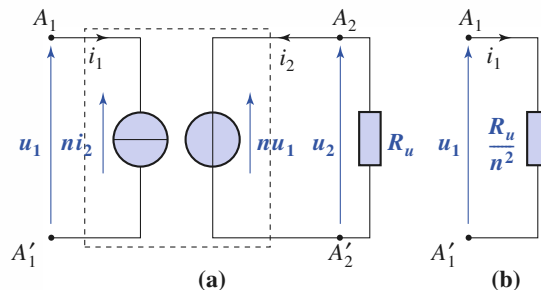
Doc. 19. Modélisation d'un transformateur idéal.



Doc. 20. Seconde modélisation d'un transformateur idéal.

2) Plaçons un résistor de résistance R_u à la sortie du transformateur (doc. 21) et appliquons une tension u_1 aux bornes du primaire. Dans la maille de sortie, nous pouvons écrire :

$$nu_1 = -R_u i_2, \quad \text{d'où} \quad i_2 = -\frac{n}{R_u} u_1.$$



Doc. 21. Dipôle équivalent (b) d'un transformateur idéal avec un résistor connecté à ses bornes de sortie (a).

Dans ces conditions, le courant d'entrée s'écrit :

$$i_1 = -n \left(-\frac{n}{R_u} u_1 \right) = \frac{n^2}{R_u} u_1.$$

Étant en convention récepteur en entrée, la résistance d'entrée R_e du transformateur est :

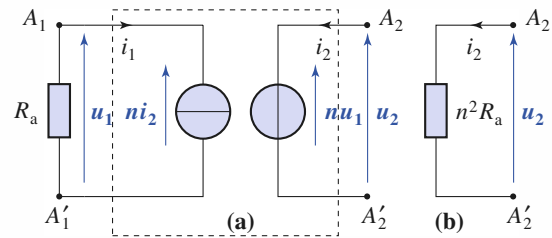
$$R_e = \frac{u_1}{i_1} = \frac{R_u}{n^2}.$$

3) La résistance R_a étant branchée à l'entrée du transformateur (doc. 22), injectons un courant i_2 dans le secondaire. Il vient $u_1 = ni_2 R_a$, donc :

$u_2 = n(ni_2 R_a)$, d'où (nous sommes encore en convention récepteur) : $R_s = \frac{u_2}{i_2} = n^2 R_a$.

4) Pour qu'il y ait adaptation des résistances, il faut

que $\frac{R_u}{n^2} = R_a$ et $n^2 R_a = R_u$, d'où $n = \sqrt{\frac{R_u}{R_a}}$.



Doc. 22. Dipôle équivalent (b) d'un transformateur idéal avec un résistor connecté à ses bornes de sortie (a).

5) Le transformateur reçoit en entrée la puissance :

$$\mathcal{P}_1(t) = u_1(t)i_1(t)$$

et fournit en sortie la puissance :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(t) &= -u_2(t)i_2(t) \\ &= -(nu_1(t)) \left(-\frac{i_1(t)}{n} \right) \\ &= \mathcal{P}_1(t). \end{aligned}$$

Un transformateur idéal transmet de l'énergie sans en consommer, sans en produire et sans en stocker.

3 Les résistances

3.1. Résistance d'un fil de section constante

On constate (et on montre théoriquement) que la résistance d'un fil est proportionnelle à sa longueur L et inversement proportionnelle à sa section S .

$$R = \frac{\rho L}{S} \quad \text{ou} \quad R = \frac{L}{\gamma S}.$$

ρ est *résistivité* du matériau et $\gamma = \frac{1}{\rho}$ est sa *conductivité*.

Ces grandeurs dépendent de la température. Le document 23 donne quelques valeurs de ρ et γ . Ainsi un fil de cuivre de $2,5 \text{ mm}^2$ de section et de longueur 100 mètres a une résistance de $0,67 \Omega$.

	Ag	Cu	Au	Al	Fe	verre
$\rho(\Omega \cdot \text{m})$	$1,59 \cdot 10^{-8}$	$1,67 \cdot 10^{-8}$	$2,35 \cdot 10^{-8}$	$2,65 \cdot 10^{-8}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$	$\approx 10^6$
$\gamma(\text{S} \cdot \text{m}^{-1})$	$6,29 \cdot 10^7$	$5,98 \cdot 10^7$	$4,26 \cdot 10^7$	$3,77 \cdot 10^7$	$1,0 \cdot 10^7$	$\approx 10^{-6}$

◀ **Doc. 23.** Quelques valeurs de conductivité et résistivité à température ambiante (20°C).

3.2. Différents types de résistances

La résistance est le composant le plus utilisé en électronique : il s'en fabrique plusieurs dizaines de milliards par an. Nous classerons les résistances en fonction de la technologie utilisée pour leur fabrication.

3.2.1. Résistances non bobinées

Elles peuvent être soit *agglomérées*, c'est-à-dire constituées par un mélange moulé de carbone conducteur et de résine thermoplastique isolante (*doc. 24*), soit *à couche*, c'est-à-dire formées par un dépôt de carbone ou de métal ou encore d'oxyde métallique autour d'un bâtonnet isolant de céramique (*doc. 25*). Les résistances agglomérées sont très robustes et d'un prix particulièrement avantageux, mais de qualité inférieure à celle des résistances à couche. Ces dernières sont les plus répandues, car elles réalisent le meilleur compromis entre les performances et le coût de revient (de l'ordre de quelques centimes).

3.2.2. Résistances bobinées

Ce sont des résistances de puissance ou de précision. Elles sont constituées par un bobinage de fil conducteur à faible coefficient de température en alliage à base de nickel (Ni-Cr, Ni-Cu, Ni-Al) sur un support cylindrique isolant en stéatite ou en alumine agglomérée.

Pour obtenir des résistances bobinées non inductives deux fils isolés sont bobinés en sens inverse comme indiqué sur le *document 26*.

Les deux enroulements étant symétriques, les tensions à leurs points de contact sont nulles, si bien que les fils peuvent être isolés par une simple couche de vernis.

3.3. Caractéristiques nominales d'une résistance

Une résistance est définie par un ensemble de caractéristiques dont nous ne citerons que les trois suivantes :

■ Valeur nominale

C'est la valeur R_n pour laquelle le composant a été fabriqué. Cette valeur est inscrite soit en clair, soit selon le code des couleurs sur le corps de la résistance.

■ Tolérance

C'est la valeur maximale de l'écart relatif $\left| \frac{R - R_n}{R_n} \right|$ entre la valeur réelle R de la résistance et sa valeur R_n (valeur 5 % ou 10 % pour les résistances non bobinées courantes).

■ Puissance nominale

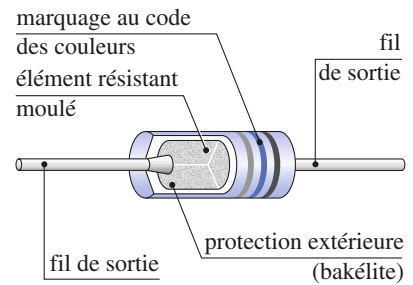
C'est la puissance que le composant peut dissiper en régime continu à la température nominale de service (valeur $\frac{1}{4}$ W ou $\frac{1}{2}$ W pour les résistances non bobinées courantes).

3.4. Caractéristiques tension-courant d'une résistance

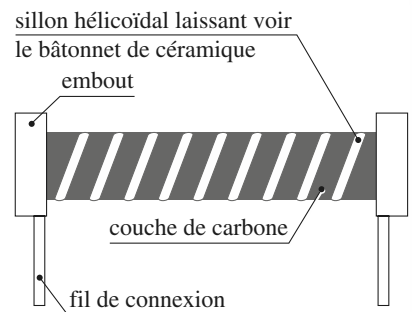
Lorsqu'une résistance est correctement utilisée, sa caractéristique statique est une droite passant par l'origine.

Il en est de même pour les caractéristiques dynamiques si la fréquence d'utilisation n'est pas trop élevée (jusqu'à 500 MHz environ pour les résistances à couche métallique et 1 MHz environ pour les résistances agglomérées et les résistances bobinées ordinaires). Dans ces conditions, ces composants ont une résistance dynamique égale à leur résistance statique.

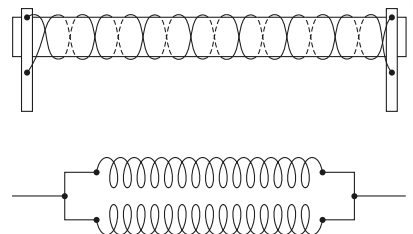
Lorsque la fréquence s'élève, des effets inductifs et capacitifs se manifestent et peuvent modifier de façon sensible la valeur nominale des résistances (*doc. 27*). Ce sont les résistances à forte valeur nominale qui sont les plus sensibles à la fréquence. Pour des valeurs élevées de la fréquence, les caractéristiques dynamiques ne sont plus des droites (*doc. 28*). À haute fréquence, les



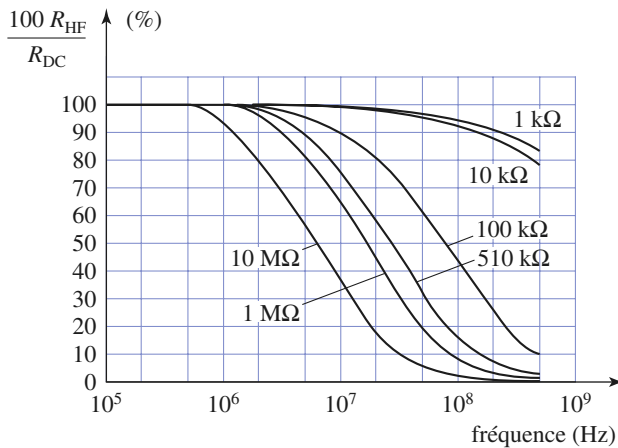
Doc. 24. Structure d'une résistance agglomérée moulée à chaud.



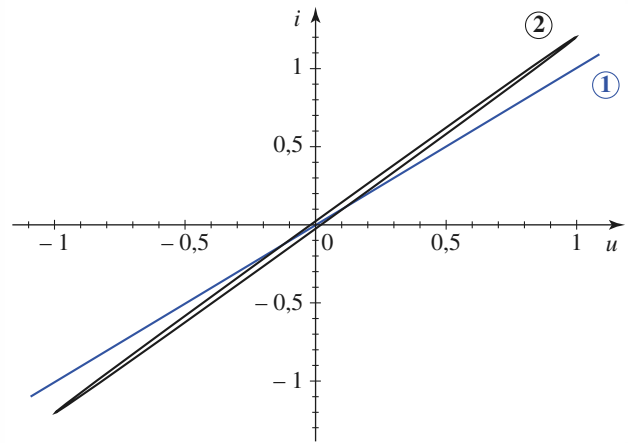
Doc. 25. Principe de réalisation d'une résistance à couche.



Doc. 26. Principe de réalisation d'une résistance bobinée non inductive : les deux fils isolés sont bobinés en sens inverse.



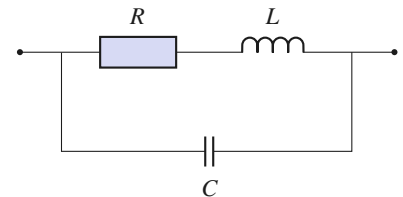
Doc. 27. Tenue en fréquence des résistances à couches de carbone.



Doc. 28. Caractéristiques dynamiques d'une résistance excitée sinusoïdalement en tension ① : dans son domaine d'utilisation ; ② : en haute fréquence, hors de son domaine d'utilisation.

résistances de faibles valeurs (inférieures à 30Ω) sont toujours inductives et les résistances de fortes valeurs (supérieures à $3 \text{ k}\Omega$) sont toujours capacitives.

La modélisation large bande d'une résistance est le réseau représenté par le document 29. Les éléments parasites L et C sont de faibles valeurs, et les résonances qu'elles provoquent se produisent pour des fréquences très élevées, hors du domaine d'utilisation de la résistance.



Doc. 29. Modélisation large bande d'une résistance.

4 Les condensateurs

4.1. Différents types de condensateurs

Après les résistances, les condensateurs sont les composants les plus répandus en électronique. Comme pour les résistances, nous les classerons en fonction de la technologie utilisée.

4.1.1. Les condensateurs enroulés

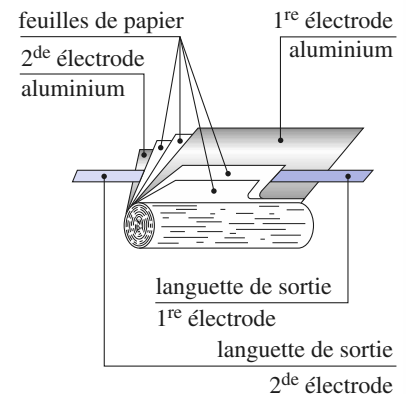
Les armatures de ces condensateurs sont isolées soit par un papier spécial, soit par un film plastique (doc. 30). Les condensateurs au papier, qui datent du début de l'électricité, gardent encore aujourd'hui toute leur importance en électricité industrielle. Cependant, en électronique, ils ont été supplantés par les condensateurs à film plastique.

4.1.2. Les condensateurs multicouches

Ces condensateurs sont réalisés par empilement de couches (doc. 31) avec alternance de couches métalliques et de couches isolantes (diélectriques) en céramique, mica ou verre. Les valeurs courantes de leurs capacités varient de quelques picofarads (pF) quelques microfarads (μF).

4.1.3. Les condensateurs électrolytiques

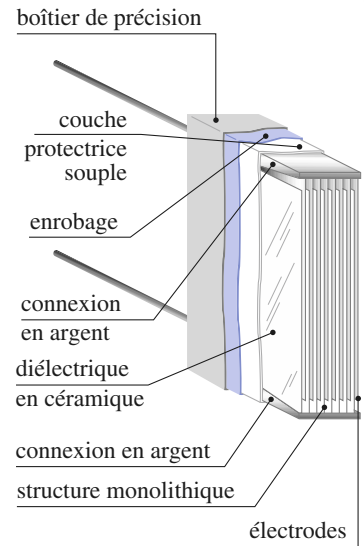
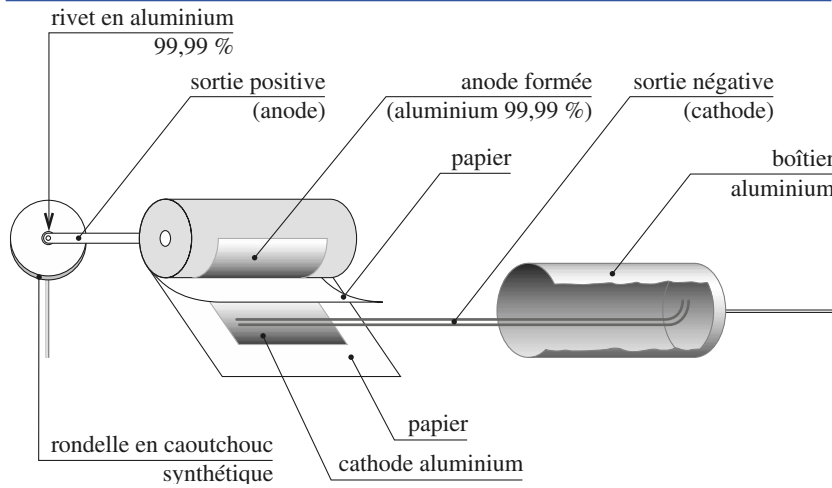
L'armature positive est réalisée avec une feuille d'aluminium couverte, par oxydation anodique, d'une couche d'alumine constituant le diélectrique



Doc. 30. Principe de réalisation d'un condensateur enroulé au papier.

(doc. 32). L'électrolyte, retenu par un papier spécial, est conducteur et réalise, de ce fait, la seconde armature. Les condensateurs électrolytiques sont des condensateurs polarisés dont les capacités peuvent atteindre 10^5 F (valeurs courantes de $1 \mu\text{F}$ à $10^4 \mu\text{F}$). Ils sont essentiellement utilisés en tension continue (réservoir d'énergie, flashes photographiques, etc.) ou en basses fréquences (filtrage, liaison B.F., etc.). Il est possible de réaliser des condensateurs électrolytiques non polarisés avec une technique différente. Ces derniers peuvent alors être utilisés en alternatif et servent souvent au démarrage des moteurs.

Des condensateurs plus performants peuvent être réalisés en remplaçant l'aluminium par du tantale.



Doc. 31. Principe de réalisation d'un condensateur multicouche.

◀ Doc. 32. Structure d'un condensateur électrolytique.

4.2. Caractéristiques nominales d'un condensateur

Nous ne citerons que les plus importantes à connaître.

■ Valeur nominale

C'est la valeur C_n de la capacité pour laquelle le condensateur a été fabriqué.

■ Tolérance

C'est la valeur maximale de l'écart relatif $\left| \frac{C - C_n}{C_n} \right|$ entre la valeur réelle C de la capacité et sa valeur nominale C_n (valeur 5 % ou 10 % pour les condensateurs multicouche courants jusqu'à 50 % pour les condensateurs électrolytiques).

■ Tension maximale d'utilisation

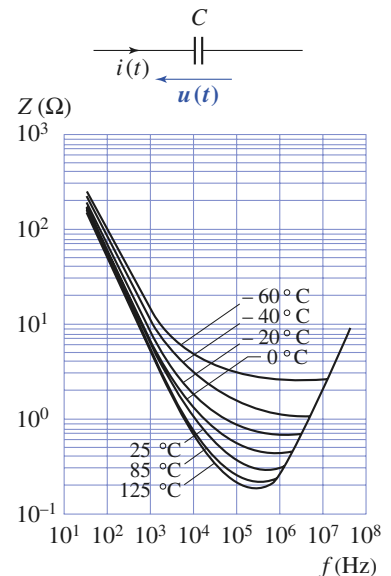
C'est la tension maximale V_m au-dessus de laquelle il y a risque de détérioration du diélectrique (phénomène de « claquage »). Pour des condensateurs étalonnés, cette tension est de l'ordre de 200 V ; en revanche, pour des condensateurs électrochimiques courants, elle avoisine 60 V.

■ Résistance d'isolement ou résistance de fuite

C'est la résistance R_i qu'oppose le diélectrique au passage du courant entre les deux armatures du condensateur. Elle doit être aussi élevée que possible et se chiffre en centaines de mégaohms.

■ Tenue en fréquence

Les pertes d'énergie dans les isolants augmentent avec la fréquence et limitent l'emploi des condensateurs en H.F. La courbe de tenue en fréquence d'un condensateur (doc. 33) fait apparaître un changement de comportement du composant au-delà d'une certaine fréquence f_m qui est la fréquence maximale de son utilisation.



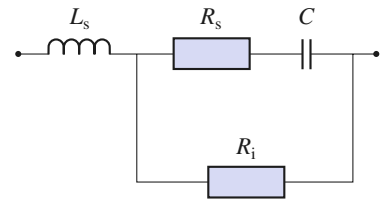
Doc. 33. Réseau de courbes tenue en fréquence ($Z = \frac{U_{\max}}{i_{\max}}$ en fonction de la fréquence f) pour un condensateur électrolytique à différentes températures.

Les condensateurs à film plastique ont la bande de fréquences d'utilisation la plus large, allant du continu jusqu'à 1 GHz environ. Les condensateurs multicouches sont utilisables du continu à 100 MHz environ. En revanche, les condensateurs électrolytiques ont une bande d'utilisation étroite : du continu à 10 kHz environ.

4.3. Modélisation large bande d'un condensateur

La représentation d'un condensateur par un élément idéal n'est donc pas toujours suffisante, à très basse fréquence ou à très haute fréquence. On approche mieux le condensateur réel en associant des dipôles idéaux selon le schéma du document 34.

On met ici en évidence le problème très général de la **modélisation** : il est impossible de décrire de façon rigoureusement exacte un système réel ; on le représente par des modèles plus ou moins simplifiés. En général, un gain en précision se traduit par un accroissement de la complexité du modèle ; il faut choisir le modèle adapté à la précision que l'on attend, donc à l'utilisation.



Doc. 34. Modélisation large bande d'un condensateur.

Application 3

Courant de fuite d'un condensateur

Un condensateur de capacité $C = 1 \mu\text{F}$ est chargé, puis isolé avec une tension entre ses bornes égale à $u_0 = 10 \text{ V}$. Une heure plus tard, cette tension n'est plus que de $u_1 = 1 \text{ V}$.

1) Déterminer la loi de variation de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, en négligeant la résistance série R_s devant la résistance d'isolement R_i .

2) En déduire la valeur de la résistance d'isolement R_i et la loi de variation du courant de fuite $i(t)$.

1) Lorsque le condensateur est isolé, il se décharge lentement à travers son diélectrique. La décharge de la capacité C s'effectuant à travers R_s et R_i (doc. 35) nous pouvons écrire :

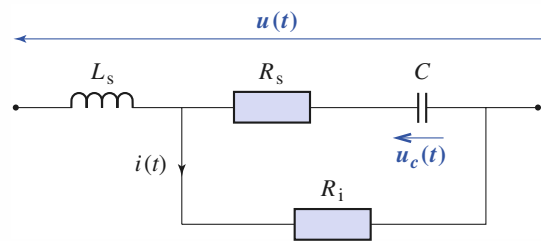
$$i(t) = -C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{u_C(t)}{R_i + R_s} \cong \frac{u_C(t)}{R_i}$$

et
$$u(t) = -\frac{R_i}{R_i + R_s} u_C(t) \cong u_C(t).$$

D'où, en posant $\tau = R_i C$, l'équation différentielle donnant les variations de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur : $\frac{du(t)}{dt} = -\frac{u(t)}{\tau}$.

Cette équation s'intègre par séparation des variables :

$$\int_0^{u(t)} \frac{du'}{u'} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt', \text{ d'où } u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



Doc. 35. Courant de fuite d'un condensateur.

2) Calculons la constante de temps τ de la décharge :

$$u_1 = u_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}, \text{ donc :}$$

$$\tau = \frac{t_1}{\ln\left(\frac{u_0}{u_1}\right)} = \frac{3\,600}{\ln\left(\frac{10}{1}\right)} \approx 1\,600 \text{ s}.$$

Nous en déduisons la valeur de la résistance d'isolement :

$$R_i = \frac{\tau}{C} = 1\,600 \text{ M}\Omega.$$

La loi de variation du courant de fuite :

$$i(t) = \frac{u(t)}{R_i} \text{ s'en déduit : } i(t) = \frac{u_0}{R_i} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

L'intensité initiale est maximale et elle vaut :

$$i(0) = 6,4 \text{ nA}.$$

5 Les bobines

5.1. Structures des bobines

Les bobines linéaires sont réalisées par enroulement d'un fil conducteur en cuivre sans support ou sur un support non magnétique (verre, bakélite moulé, polystyrène etc.).

Ces bobines linéaires sont en général de faible inductance (de l'ordre du millihenry).

Les bobines non linéaires utilisent des noyaux magnétiques généralement en ferrite (oxyde de fer), matériau isolant. À géométrie identique, ces bobines ont des inductances multipliées par des facteurs de l'ordre 10^4 par rapport à leurs homologues linéaires. La valeur de L n'est alors constante que pour des intensités faibles.

5.2. Modélisation d'une bobine

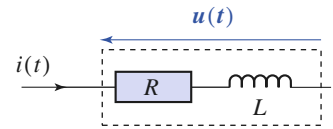
Il faut tenir compte de la résistance non nulle du bobinage. Une première modélisation consiste donc à représenter la bobine par une association (R , L) en série (doc. 36).

Avec ce modèle, nous pouvons écrire en convention récepteur :

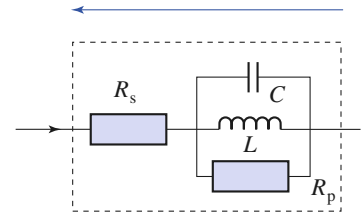
$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$$

À haute fréquence (à partir de quelques dizaines de kilohertz), ce modèle est insuffisant car il ne tient pas compte des effets capacitifs entre les spires du bobinage.

On obtient une meilleure approximation en ajoutant une faible capacité et une grande résistance en parallèle (doc. 37).



Doc. 36. Modélisation d'une bobine réelle en basse fréquence.



Doc. 37. Modélisation d'une bobine réelle en large bande.

6 Les électromoteurs

6.1. Définition

Un *électromoteur* est un composant dipolaire non symétrique dont les bornes sont repérées par les symboles \oplus (borne positive) et \ominus (borne négative).

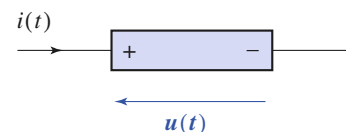
La fonction d'un électromoteur est de réaliser des conversions d'énergie.

6.2. Caractéristiques statiques

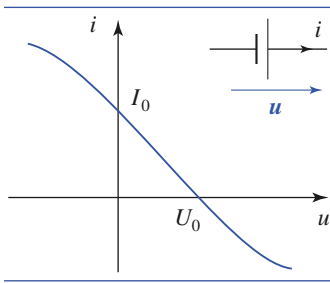
Les caractéristiques statiques des électromoteurs ne passent pas par l'origine.

Cette particularité confère aux électromoteurs la propriété de posséder une tension U_0 en circuit ouvert non nulle et un courant I_0 de court-circuit non nul : un électromoteur est un *dipôle actif*.

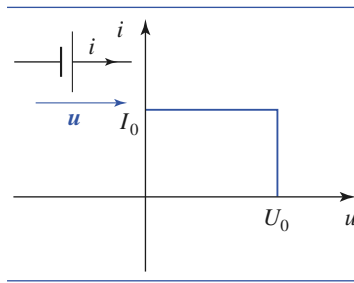
Les caractéristiques statiques de quelques électromoteurs usuels et leurs représentations symboliques sont fournies sur les *documents* 39 à 42. Pour interpréter ces caractéristiques, il faut bien repérer l'orientation des flèches qui représentent u et i par rapport aux bornes \oplus et \ominus (doc. 38).



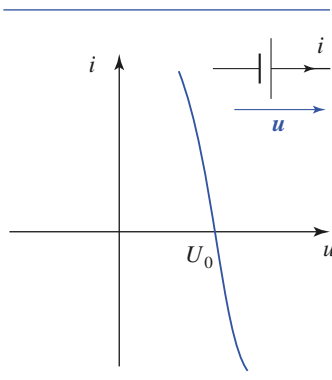
Doc. 38. Représentation symboles d'un électromoteur.



Doc. 39. Représentation symbolique et caractéristique statique d'une pile avec une convention de type « générateur ». La pile fonctionne en générateur dans la zone où u et i sont positifs. Elle fonctionne en récepteur dans les deux autres zones.

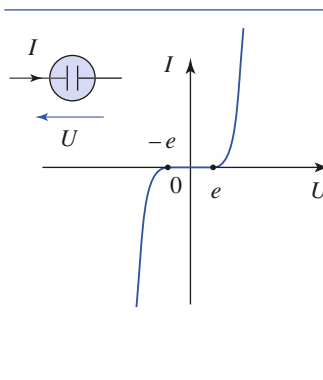


Doc. 40. Représentation symbolique et caractéristique statique d'une alimentation stabilisée. C'est un générateur car, avec une convention générateur $\mathcal{P} = ui$ est positive.



Doc. 41. Représentation symbolique et caractéristique statique d'un accumulateur au plomb. Le courant de court-circuit est très élevé et son obtention aboutirait à la destruction de l'accumulateur.

- $i < 0$ correspond à la charge de l'accumulateur ; il fonctionne en récepteur.
- $i > 0$ correspond à la décharge ; il fonctionne en générateur.



Doc. 42. Représentation symbolique et caractéristique statique d'un électrolyseur non polarisé avec une convention de type « récepteur ». La caractéristique est symétrique, mais elle peut être approchée par des demi-droites qui ne passent pas par l'origine. Ce dipôle fonctionne en récepteur car la puissance reçue $\mathcal{P} = ui$ est positive.

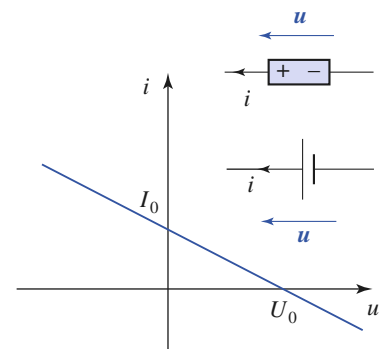
6.3. Modélisation des électromoteurs

La modélisation des électromoteurs s'effectue en linéarisant (éventuellement par morceaux) leurs caractéristiques. La relation entre l'intensité i du courant à travers l'électromoteur et la tension u entre ses bornes (doc. 43) est de la forme :

$$\frac{u}{U_0} + \frac{i}{I_0} = 1.$$

Si la caractéristique est linéarisée par morceaux, une relation du type précédent peut être définie pour chacun des morceaux de la caractéristique.

Il est possible de reproduire une telle caractéristique affine par deux sortes d'associations de dipôles idéaux.



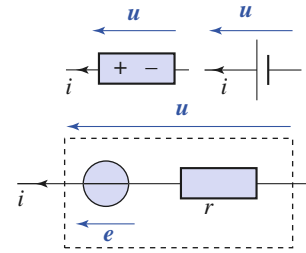
Doc. 43. Caractéristique tension-courant d'un électromoteur linéaire avec une convention générateur.

6.3.1. Modélisation de Thévenin

La caractéristique de l'électromoteur peut s'expliquer en :

$$u = U_0 - \frac{U_0}{I_0} i.$$

Cette caractéristique est identique à celle de l'association d'une source idéale de tension de f.e.m. $e = U_0$ en série avec un résistor de résistance $r = \frac{U_0}{I_0}$ (doc. 44).



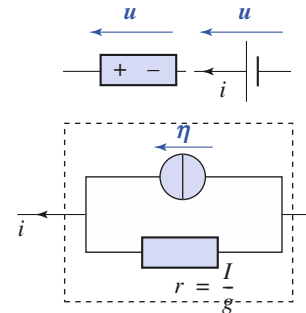
Doc. 44. Modélisation d'un électromoteur linéaire par un électromoteur de Thévenin $u = e - ri$.

6.3.2. Modélisation de Norton

La caractéristique de l'électromoteur peut aussi s'expliquer en :

$$i = I_0 - \frac{I_0}{U_0} u.$$

Cette caractéristique est identique à celle de l'association d'une source idéale de courant de c.e.m. : $\eta = I_0$ en parallèle avec un résistor de conductance $g = \frac{I_0}{U_0}$, ou de résistance $r = \frac{U_0}{I_0}$ (doc. 45).



Doc. 45. Modélisation d'un électromoteur linéaire par un électromoteur de Norton $i = \eta - gu$.

• La représentation d'un électromoteur réel par un modèle de Norton ou de Thévenin permet de prévoir son interaction avec le reste du circuit, mais **elle ne représente pas son fonctionnement interne**.

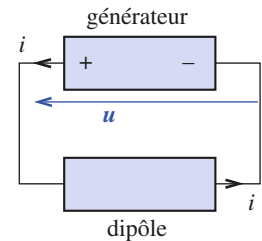
On remarque qu'en circuit ouvert ($i = 0$), un courant non nul circule à l'intérieur du modèle de Norton alors que tous les courants sont nuls dans le modèle de Thévenin ; ces deux représentations sont cependant équivalentes **vues de l'extérieur**.

6.4. Point de fonctionnement d'un circuit élémentaire

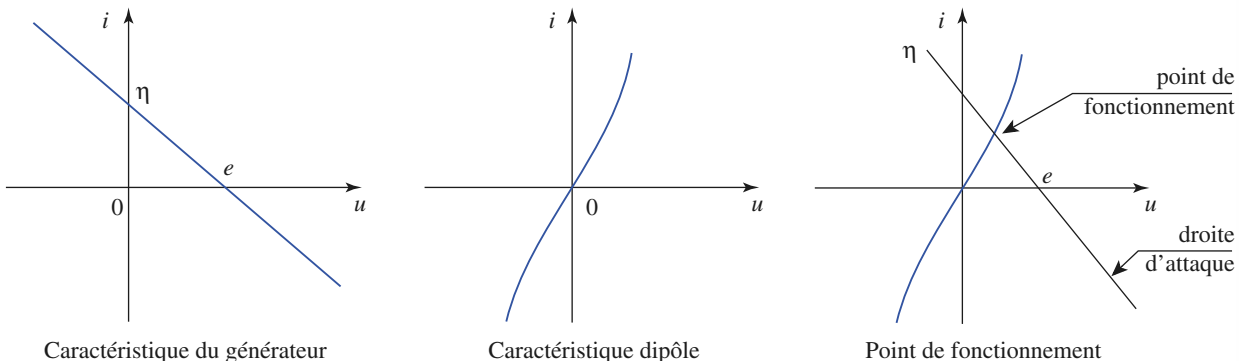
Nous considérons le circuit élémentaire constitué d'un générateur et d'un récepteur (doc. 46). Nous supposons connues les caractéristiques de ces deux éléments. La tension u et le courant i sont communs aux deux dipôles, qui sont vus, l'un en convention générateur et l'autre en convention récepteur.

Si nous superposons les caractéristiques, nous constatons que les caractéristiques se coupent en un point (doc. 47). En ce point, i et u satisfont aux conditions imposées par les deux dipôles : c'est le *point de fonctionnement du circuit*.

Nous disposons donc d'une méthode graphique pour déterminer u et i .



Doc. 46. Circuit élémentaire.



Doc. 47. Branchement d'un dipôle et d'un générateur.

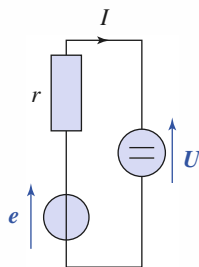
Application 4

Détermination du point de fonctionnement d'un électrolyseur

Un circuit (doc. 48) est réalisé par l'association en série d'un électrolyseur dont la caractéristique statique est donnée document 49 et d'un générateur :

($r = 4 \text{ V}$, $r = 20 \Omega$).

Déterminer le point de fonctionnement M de l'électrolyseur.



Doc. 48. Électrolyseur alimenté par un générateur.

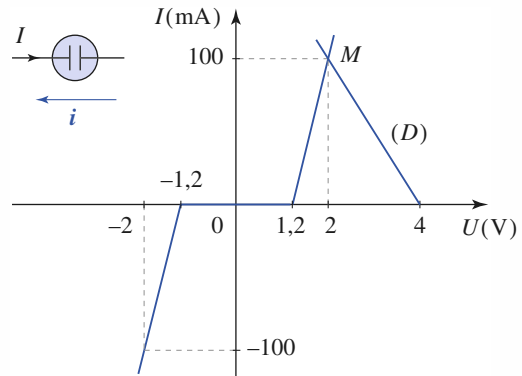
L'équation de la caractéristique du générateur est $U = 4 - 20I$ avec U en volts et I en ampère.

Cette droite coupe la caractéristique de l'électrolyseur en son point de fonctionnement M situé sur sa caractéristique à $U > 0$.

L'équation de cette dernière est :

$$\frac{2 - 1,2}{0,1 - 0} = \frac{U - 1,2}{I}, \text{ d'où } U = 1,2 + 8I.$$

En éliminant U , il vient $1,2 + 8I = 4 - 20I$, d'où $I = 0,1 \text{ A}$ et par suite $U = 2 \text{ V}$.



Doc. 49. Caractéristique statique de l'électrolyseur.

CQFR

● CARACTÉRISTIQUE STATIQUE TENSION-COURANT

Le point de fonctionnement d'un composant dipolaire est le point de coordonnées (U, I) dans les axes tension-courant. La caractéristique statique tension-courant d'un composant dipolaire s'obtient en relevant l'ensemble de ses points de fonctionnement.

● DIPÔLE LINÉAIRE

Un composant dipolaire est linéaire si la relation entre $u(t)$ et $i(t)$ est une relation affine ou une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

● ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX DES CIRCUITS

• Résistor

Ce dipôle établit à tout instant une relation linéaire entre la tension $u(t)$ appliquée à ses bornes et l'intensité $i(t)$ du courant qui le traverse $u(t) = Ri(t)$ (en convention récepteur). Une résistance s'exprime en ohm (symbole : Ω).

C Q F R

• **Bobine idéale**

Le phénomène d'auto-induction crée une tension $u(t)$ à ses bornes à tout instant proportionnelle à la dérivée de l'intensité $i(t)$ qui la traverse :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ (en convention récepteur).}$$

La constante positive L est l'inductance de la bobine.

Le courant d'intensité $i(t)$, à travers une bobine idéale, ne peut pas subir de discontinuité.

En régime constant ou statique, une bobine idéale se comporte comme un simple fil.

• **Condensateur idéal**

Le courant $i(t)$ qui traverse un condensateur parfait est, à tout instant, proportionnel à la dérivée de la tension $u(t)$ appliquée à ses bornes :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \text{ (en convention récepteur).}$$

La constante positive C est la capacité du condensateur. Elle se mesure en farad (symbole : F).

La tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur idéal, ainsi que sa charge $q(t)$, ne peuvent pas subir de discontinuité.

En régime constant ou statique, un condensateur idéal se comporte comme un interrupteur ouvert.

• **Source indépendante de tension**

Une source indépendante de tension est caractérisée par sa force électromotrice (f.e.m.) $e(t)$ telle que $u = e$, quel que soit le courant traversant la source.

• **Source indépendante de courant**

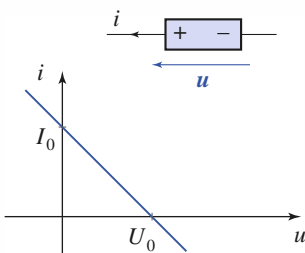
Une source indépendante de courant est caractérisée par son courant électromoteur (c.e.m.) $\eta(t)$ tel que $i = \eta$, quelle que soit la tension aux bornes de la source.

• **Source commandée**

Une source commandée est une source de tension (ou de courant) dont la f.e.m. (ou la c.e.m.) a une valeur déterminée par une grandeur électrique $u'(t)$ ou $i'(t)$ associée à un autre élément du réseau.

• **Modélisation d'un électromoteur**

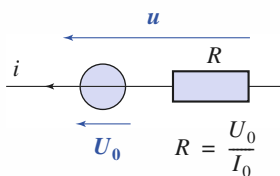
La caractéristique d'un électromoteur $\frac{u}{U_0} + \frac{i}{I_0} = 1$ peut s'expliquer en :



Électromoteur.

$$u = U_0 - \frac{U_0}{I_0} i$$

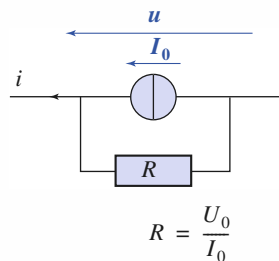
(Modélisation de Thévenin)



Modélisation de Thévenin.

$$u = U_0 - \frac{U_0}{I_0} i$$

(Modélisation de Norton)



Modélisation de Norton.

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Appliquer la loi d'Ohm dans les deux conventions d'orientation pour un résistor.
- ✓ Retrouver la caractéristique $i(u)$ d'un dipôle linéaire représenté par une association des dipôles fondamentaux : source de tension, source de courant, résistor.
- ✓ Inversement, modéliser un dipôle linéaire de caractéristique connue en associant des dipôles fondamentaux.
- ✓ Trouver le point de fonctionnement d'un circuit constitué d'un générateur et d'un récepteur.

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. La caractéristique dynamique correspond au déplacement du point de fonctionnement le long de la caractéristique statique, lorsque les courant et tension sont variables.

- Vrai Faux

2. Tous les composants électriques peuvent être modélisés par des associations plus ou moins compliquées de dipôles linéaires idéaux.

- Vrai Faux

3. Un dipôle passif absorbe de l'énergie.

- Vrai Faux

4. Pour un résistor idéal de résistance R , la loi d'Ohm s'écrit toujours : $u = Ri$.

- Vrai Faux

5. Pour un résistor idéal, la résistance dynamique et la résistance statique sont égales.

- Vrai Faux

6. L'équation d'évolution d'une bobine idéale est : $u = -L \frac{di}{dt}$ (en convention générateur).

- Vrai Faux

7. L'équation d'évolution d'un condensateur idéal est : $u = C \frac{di}{dt}$ (en convention récepteur).

- Vrai Faux

8. Pour un dipôle actif donné, la modélisation de Thévenin et celle de Norton font intervenir la même résistance.

- Vrai Faux

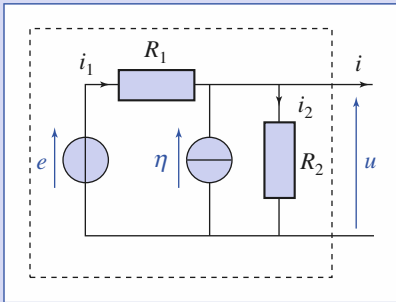
► Solution, page 44.

Exercices

1 Un dipôle linéaire est représenté par l'association de dipôles fondamentaux représentée sur la *figure* ci-dessous.

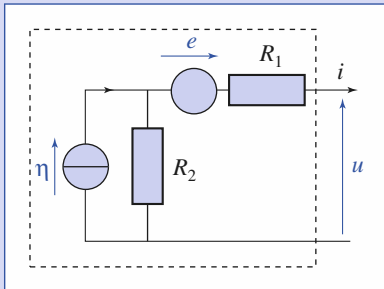
1) Déterminer en fonction de u , e , R_1 et R_2 les intensités des courants i_1 et i_2 et en déduire la caractéristique $i(u)$ du dipôle.

2) Représenter ce dipôle avec la modélisation de Norton puis avec celle de Thévenin.



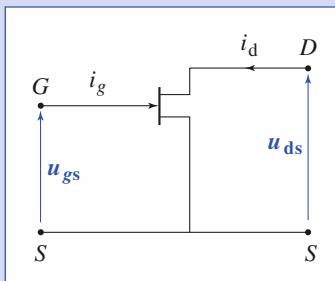
2 Un dipôle linéaire est représenté par l'association de dipôles fondamentaux représentée sur la *figure* ci-dessous.

Déterminer le générateur de Thévenin équivalent à l'association du générateur de courant en parallèle avec R_2 et en déduire la caractéristique $i(u)$ du dipôle.



3 Modélisation d'un transistor à effet de champ

Un transistor à effet de champ (T.E.C.) est toujours utilisé sous la forme d'un quadripôle en rendant une de ses électrodes commune à l'entrée et la sortie. En régime linéaire basse fréquence, les équations d'un transistor à effet de champ, utilisé en source commune S , sont :



$$i_g = 0 \quad \text{et} \quad i_d = g u_{gs} + \frac{u_{ds}}{\rho}$$

1) Modéliser ce composant à l'aide des éléments fondamentaux.

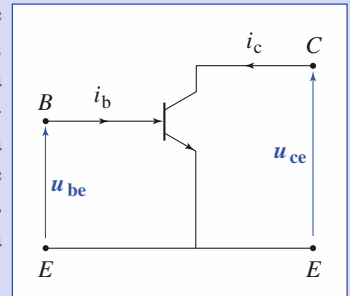
2) Déterminer l'amplification $A_u = \frac{u_{ds}}{u_{gs}}$ de ce transistor

lorsqu'il est chargé par un résistor de résistance R_L . Calculer numériquement A_u .

Données : $g = 8 \text{ mS}$, $\rho = 500 \text{ k}\Omega$ et $R_L = 1 \text{ k}\Omega$.

4 Modélisation d'un transistor bipolaire

Un transistor bipolaire est un tripôle qui, comme le transistor à effet de champ, est toujours utilisé sous la forme d'un quadripôle en rendant une de ses électrodes commune à l'entrée et la sortie.



En régime linéaire basse fréquence, les équations d'un transistor bipolaire, monté en émetteur commun E , sont :

$$u_{be} = r i_b + \mu u_{ce} \quad \text{et} \quad i_c = \beta i_b + \frac{u_{ce}}{\rho}$$

1) Modéliser ce composant à l'aide des éléments fondamentaux.

2) Déterminer l'amplification en courant du transistor :

$$A_i = \frac{i_c}{i_b}$$

Lorsqu'un résistor R_L est connecté entre ses bornes de sortie C et E . Calculer numériquement A_i .

Données : $\beta = 150$, $\rho = 20 \text{ k}\Omega$ et $R_L = 1 \text{ k}\Omega$.

5 Une question de section

Pour faire démarrer un véhicule dont la batterie est déchargée, on utilise deux câbles de longueur totale $\ell = 2 \text{ m}$ et de section $s = 10 \text{ mm}^2$ reliés à la batterie 12 V d'un deuxième véhicule. Calculer la tension disponible pour un démarreur de voiture essence nécessitant 100 A et diesel nécessitant 250 A . Que concluez-vous ?

Données : conductivité du cuivre : $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

6 Étude d'une diode

La caractéristique (idéalisée) d'une diode est représentée sur *document 1*.

U_s est typiquement de l'ordre de 1 V .

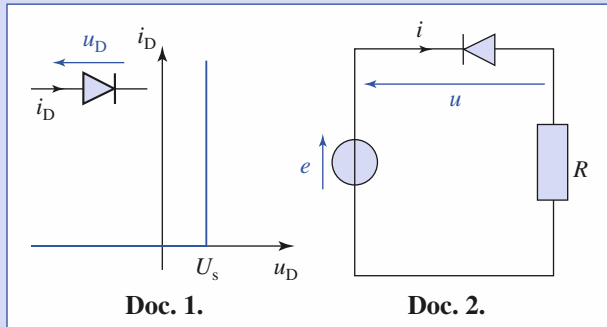
Cette diode est utilisée dans le circuit représenté sur le *document 2*.

Exercices

1) Tracer sur le même schéma la caractéristique $i(u)$ de l'ensemble constitué par le générateur et la résistance, et celle de la diode.

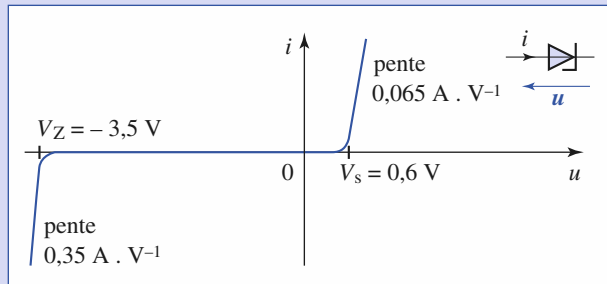
Montrer que lorsque e varie, le point de fonctionnement se déplace sur deux demi-droites.

2) $e = e_m \cos(\omega t)$. Tracer sur un même graphique les courbes représentant $e(t)$ et $u(t)$.



7 Caractéristiques de dipôles en série ou en parallèle

1) Connaissant les caractéristiques statiques $i_1(u_1)$ et $i_2(u_2)$ de deux dipôles D_1 et D_2 , proposer une méthode graphique permettant de déterminer la caractéristique de ces deux dipôles en parallèle ou en série.



2) Écrêteur symétrique

La caractéristique d'une diode Zener est représentée sur le document ci-dessus.

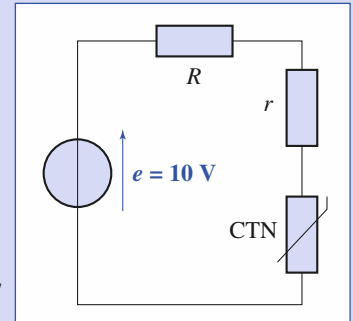
Déterminer graphiquement la caractéristique de l'association série de deux diodes Zener identiques tête-bêche. Justifier le nom de ce montage.

8 Étude d'une thermistance

Une thermistance est une résistance dont la valeur dépend fortement de la température selon la loi :

$$R(T) = R_\infty \exp\left(\frac{a}{T}\right)$$

où R_∞ et a sont des constantes positives et T la température absolue.



1) Sachant que $R(300 \text{ K}) = 160 \Omega$ et $R(420 \text{ K}) = 29 \Omega$, déterminer R_∞ et a .

2) La relation entre la puissance dissipée par la thermistance et sa température est donnée par la loi :

$$P = K(T - T_0)$$

avec $K = 8 \cdot 10^{-3} \text{ WK}^{-1}$ constante de dissipation thermique, T_0 température ambiante.

On désigne par U_0 la tension aux bornes de la thermistance et I_0 l'intensité qui la traverse.

Déterminer U_0 et I_0 en fonction de T . Tracer les caractéristiques pour T_0 égale 293 K, 313 K et 333 K : la température de la thermistance ne devant pas dépasser 200 °C.

3) Stabilisation de tension à l'aide d'une thermistance : la température ambiante est de 20 °C. On associe une résistance r de 3,5 Ω en série avec la thermistance.

Tracer la caractéristique du dipôle ainsi constitué.

Dans quel domaine joue-t-il le rôle de stabilisateur de tension ?

Donner les valeurs de R dans le montage permettant de réaliser cette stabilisation.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 42.

1. Faux ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Faux ;
5. Vrai ; 6. Vrai ; 7. Faux ; 8. Vrai.

D'après la loi d'Ohm : $i_1 = \frac{e-u}{R_1}$. De même : $i_2 = \frac{u}{R_2}$.

La loi des nœuds nous donne la relation : $i_1 + \eta - i_2 = i$.

D'où la caractéristique :

$$i = \frac{e}{R_1} + \eta - \frac{u(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

1) La tension aux bornes R_1 est, en convention récepteur : $u_1 = e - u$.

2) • Soit η_N et R_N le c.e.m. et la résistance du générateur de Norton équivalent.

$$i = \eta_N - \frac{u}{R_N} \text{ (cf. doc. 45).}$$

Par identification, nous trouvons : $\eta_N = \frac{e}{R_1} + \eta$ et $R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

• Soit e_{Th} et R_{Th} la f.e.m. et la résistance du générateur de Thévenin équivalent.

$$u = e_{Th} - R_{Th} i \text{ soit } i = \frac{e_{Th}}{R_{Th}} - \frac{u}{R_{Th}} \text{ (cf. doc 44).}$$

Par identification, nous trouvons :

$$R_{Th} = R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ et } e_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{e}{R_1} + \eta \right).$$

2

Isolons le générateur de courant en parallèle avec R_2 .

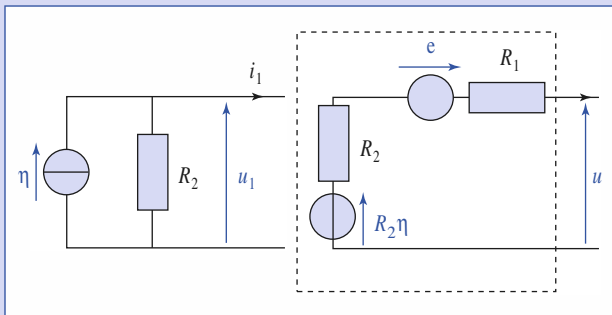
Cet ensemble a pour caractéristique : $i_1 = \eta - \frac{u_1}{R_2}$ soit $u_1 = R_2 \eta - R_2 i_1$.

Le générateur de Thévenin équivalent a pour caractéristique :

$u_1 = e_{Th} - R_{Th} i_1$ d'où par identification :

$$e_{Th} = R_2 \eta \text{ et } R_{Th} = R_2.$$

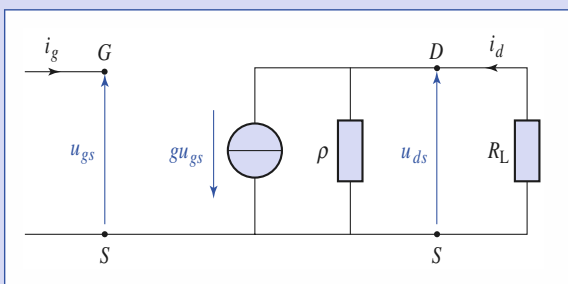
On remplace cet ensemble par son équivalent et on obtient le circuit équivalent représenté ci-dessous.



On en déduit la caractéristique : $u = R_2 \eta + e - (R_1 + R_2) i$.

3

1) L'entrée est équivalente à un interrupteur ouvert. La sortie du transistor résulte de l'association parallèle d'une résistance ρ et d'une source de courant commandée en tension de c.e.m. $g u_{gs}$. Le générateur lié modélise l'effet transistor du transistor à effet de champ.



2) La loi d'Ohm donne : $i_p = -\frac{u_{ds}}{\rho}$ et $i_d = \frac{u_{ds}}{R_L}$.

La loi des nœuds en D donne : $i_p + i_d - g u_{gs} = 0$.

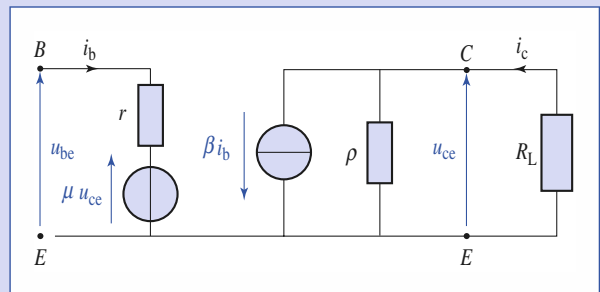
D'où :

$$A_u = -g \frac{\rho R_L}{\rho + R_L}$$

Application numérique : $A_u \approx -8$.

4

1) L'entrée d'un tel transistor peut s'analyser en l'association en série d'une résistance r et d'un générateur de tension commandé en tension, dont la f.e.m. est μu_{ce} . Cette source de tension modélise l'effet de la rétroaction interne de la tension de sortie u_{ce} sur le courant d'entrée i_b . La sortie du transistor est équivalente à l'association parallèle d'une résistance ρ et d'un générateur de courant commandé en courant dont le c.e.m. est βi_b . Ce dernier générateur modélise l'effet transistor du transistor bipolaire.



2) Dans la maille de sortie du transistor, le courant βi_b se divise dans les deux résistors ρ et R_L montés en parallèle. Donc $-u_{CE} = R_L i_c = \rho(\beta i_b - i_c)$,

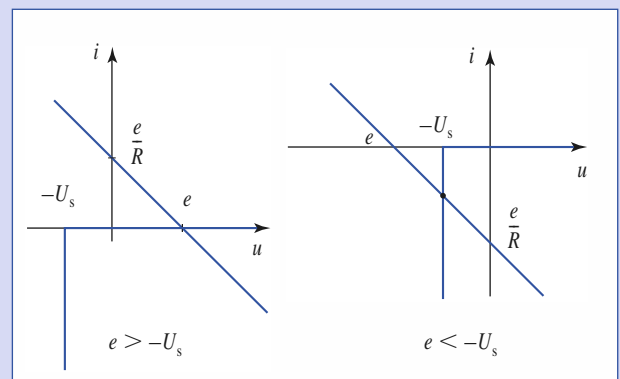
$$d'où : A_i = \frac{i_c}{i_b} = \frac{\beta \rho}{\rho + R_L}$$

Application numérique : $A_i = 143$.

5

La résistance d'un fil est $R = \frac{\ell}{\gamma S} \approx 3,3 \text{ m}\Omega$. La chute de tension dans les deux fils est respectivement de 0,7 V pour un démarreur de voiture essence, d'où une tension disponible de 11,3 V et de 1,7 V pour le diesel et une tension disponible de 10,3 V. La section de ces fils est trop faible dans le deuxième cas : le démarreur ne tournera pas.

6



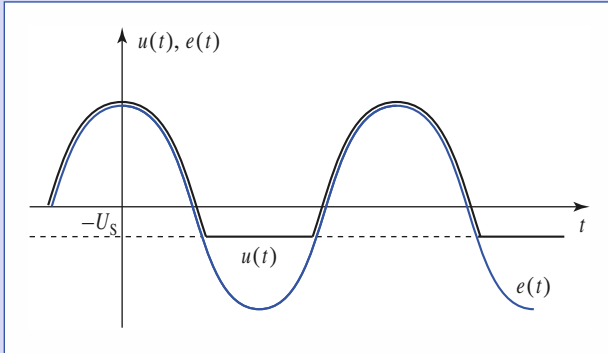
1) Pour l'ensemble source et résistance : $u = e - Ri$.

Pour la diode, u et i sont opposés à u_D et i_D . Il faut donc inverser les deux coordonnées.

Corrigés

Le point de fonctionnement est sur l'axe $i = 0$ si $e > -U_S$ et sur la droite $u = -U_S$ si $e < -U_S$.

2) On en déduit le graphe de $u(t)$:



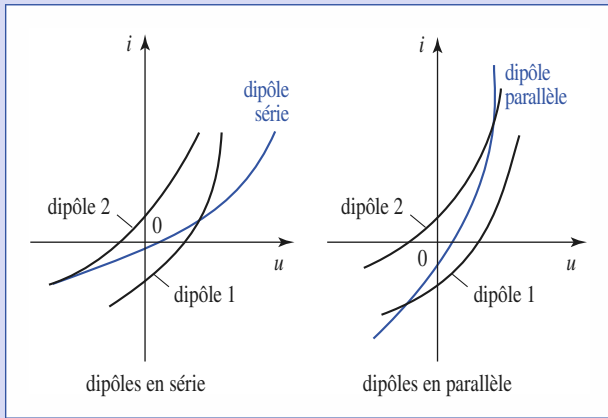
On peut en déduire ensuite facilement l'intensité $i(t)$ car :

$$Ri(t) = e(t) - u(t).$$

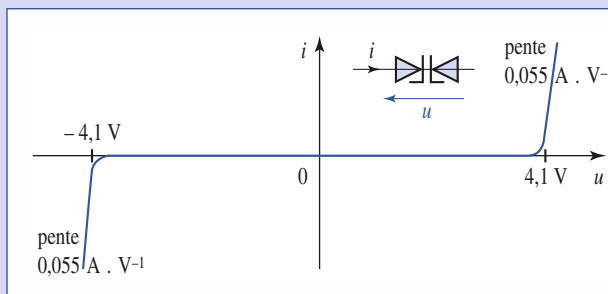
Cette intensité est négative ou nulle.

7

1) Pour deux dipôles en parallèle, il suffit de faire la somme des intensités des deux caractéristiques à tension constante $i = i_1(u) + i_2(u)$. Pour deux dipôles en série, la tension est la somme des deux tensions à intensité constante $u = u_1(i) + u_2(i)$.



2) La caractéristique de l'association des deux diodes Zener est représentée sur la figure.



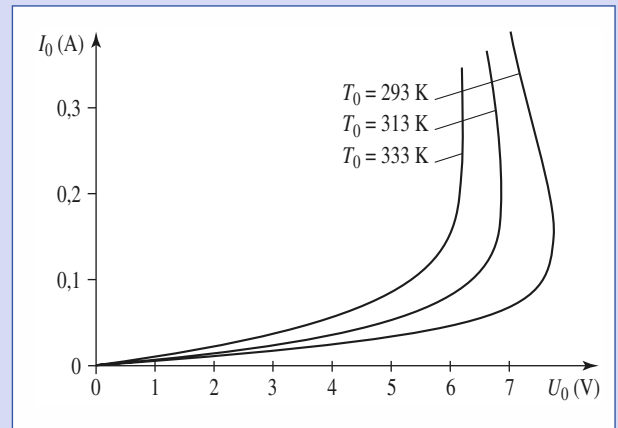
Si un générateur alternatif est branché sur ce dipôle, sa tension est écartée à $\pm(V_Z + V_S)$. D'où le nom donné au dipôle.

8

1) $a \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$, d'où $a = 1790 \text{ K}$ et $R_\infty = 0,41 \Omega$.

2) $P = \frac{U_0^2}{R(T)} = R(T)I_0^2 = K(T - T_0)$, d'où :

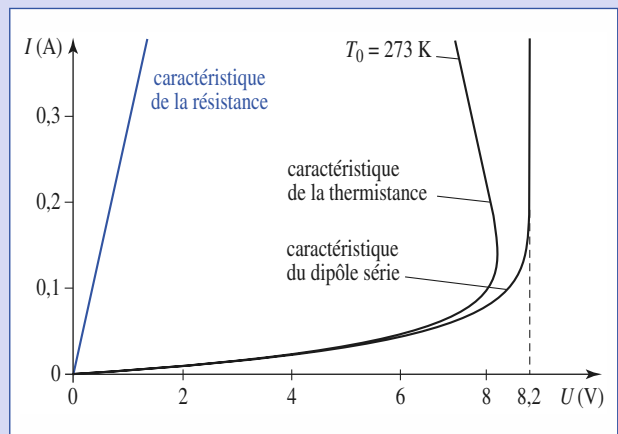
$$U_0 = \sqrt{K(T - T_0)R_\infty} \exp\left(\frac{a}{2T}\right) \text{ et } I_0 = \sqrt{\frac{K(T - T_0)}{R_\infty}} \exp\left(-\frac{a}{2T}\right).$$



3) La caractéristique du dipôle série est obtenue en sommant les valeurs des tensions aux bornes des dipôles à intensité constante.

On remarque que dans le domaine 150 mA, 350 mA, la tension aux bornes du dipôle série est pratiquement constante de valeur 8,2 V. Dans ce domaine, il joue le rôle de stabilisateur de tension. Pour le montage $RI = 1,8 \text{ V}$, d'où :

$$5,1 \Omega < R < 12 \Omega.$$



Théorèmes généraux relatifs aux réseaux linéaires

3

Introduction

L'étude des circuits ne comprenant que des dipôles linéaires constitue la base de l'électrocinétique. Les théorèmes étudiés dans ce chapitre permettent de déterminer totalement le fonctionnement d'un circuit linéaire.

O B J E C T I F S

- Remplacer un réseau de dipôles linéaires par un dipôle équivalent quand cela est possible.
- Étudier de façon systématique un circuit constitué de dipôles linéaires.

P R É R E Q U I S

- Connaissance des dipôles linéaires :
 - résistor ;
 - générateurs de Norton et de Thévenin ;
 - inductance ;
 - condensateur.

Association en série de dipôles linéaires

Deux dipôles sont associés en série si une de leurs bornes est commune et s'ils sont parcourus par le même courant (doc. 1).

1.1. Cas général

Sur le document 2, la différence de potentiel entre A et B est la somme des différences de potentiel aux bornes de chaque dipôle :

$$u = u_1 + u_2.$$

Le même courant i traverse les deux dipôles.

1.2. Association de dipôles de même type

1.2.1. Association de résistors

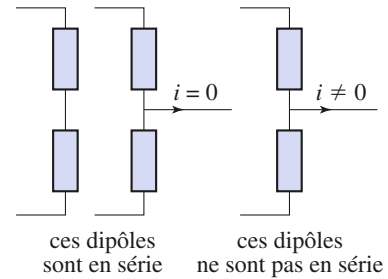
Dans le cas présent (doc. 3), $u_1 = R_1 i$ et $u_2 = R_2 i$, donc :

$$u = (R_1 + R_2) i.$$

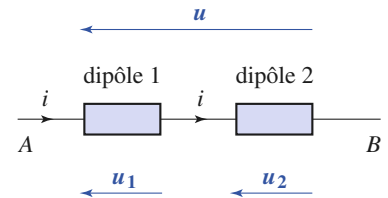
Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de résistors :

$$u = Ri, \text{ avec } R = \sum_j R_j.$$

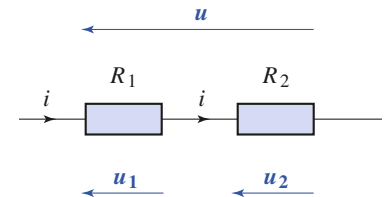
L'association de résistors en série est équivalente à un résistor de résistance égale à la somme des résistances de l'association.



Doc. 1. Association de dipôles.



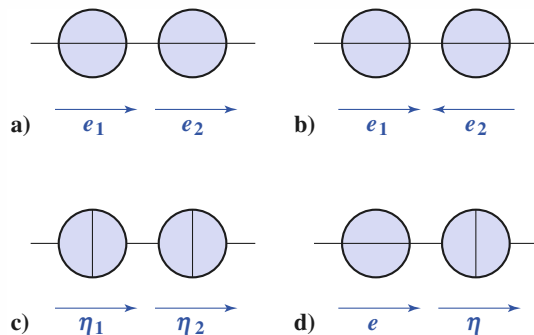
Doc. 2. Association série de deux dipôles.



Doc. 3. Association série de deux résistors.

Application 1

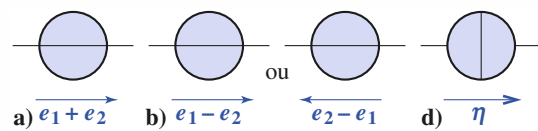
Déterminer les générateurs équivalents aux montages en série suivants, lorsque cela est possible (doc. 4).



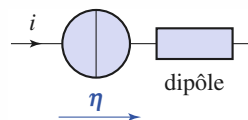
Doc. 4.

Les générateurs équivalents sont représentés dans le document 5. Le cas c) est impossible sauf si $\eta_1 = \eta_2$. Alors l'ensemble est équivalent à un générateur de courant $\eta_1 (= \eta_2)$.

De façon plus générale, dans le document 6, la source de courant impose $i = \eta$ (sauf cas particulier du type c)).



Doc. 5. Générateurs équivalents.



Doc. 6. Association en série d'une source de courant et d'un dipôle.

Si une source de courant idéale est associée en série avec un dipôle (qui n'est pas assimilable à une source de courant), l'ensemble est équivalent à la source de courant seule.

1.2.2. Association de générateurs réels libres

Nous pouvons modéliser un générateur réel libre de deux manières (doc. 7). Comme l'intensité est identique dans les deux dipôles d'une association en série (doc. 5), la représentation en générateur de Thévenin permet des calculs plus simples. Nous vérifions avec les orientations du document 8 :

$$u = (e_1 + e_2) - (R_1 + R_2)i.$$

Généralisons cette formule à un nombre quelconque de générateurs :

$$u = e - Ri, \text{ avec } R = \sum_j R_j \text{ et } e = \sum_j \varepsilon_j e_j.$$

$\varepsilon_j = 1$ si l'orientation de e_j est identique à celle de i et $\varepsilon_j = -1$ dans le cas contraire.

1.2.3. Association de condensateurs idéaux

Cette association est représentée sur le document 9.

Les relations $\frac{i}{C_1} = \frac{du_1}{dt}$ et $\frac{i}{C_2} = \frac{du_2}{dt}$ donnent immédiatement :

$$i \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{du}{dt}.$$

De façon générale :

$$i = C \frac{du}{dt}, \text{ avec } \frac{1}{C} = \sum_j \frac{1}{C_j}.$$

L'association de condensateurs idéaux en série est équivalente à un condensateur idéal de capacité C telle que $\frac{1}{C} = \sum_j \frac{1}{C_j}$ (l'inverse de la capacité équivalente est la somme des inverses des capacités de l'association).

1.2.4. Association de bobines idéales

Cette association est représentée sur le document 10.

Des relations $u_1 = L_1 \frac{di}{dt}$ et $u_2 = L_2 \frac{di}{dt}$, nous déduisons $u = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$.

Donc de façon générale :

$$u = L \frac{di}{dt}, \text{ avec } L = \sum_j L_j.$$

L'association de bobines idéales en série est équivalente à une bobine idéale d'inductance égale à la somme des inductances de l'association.

1.3. Loi de Pouillet pour un circuit à une maille

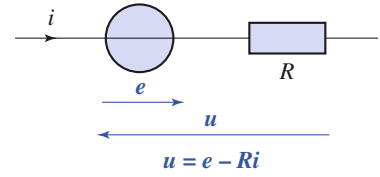
Considérons le circuit du document 11.

Les tensions u_j vérifient la relation $\sum_j u_j = 0$ (loi des mailles).

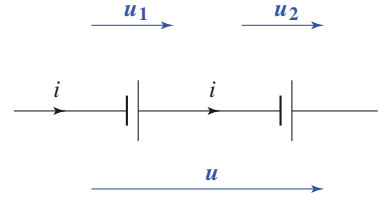
Dans le cas où les dipôles sont des générateurs libres ou des résistors, nous obtenons :

$$\sum_j (\varepsilon_j e_j - R_j i) = 0$$

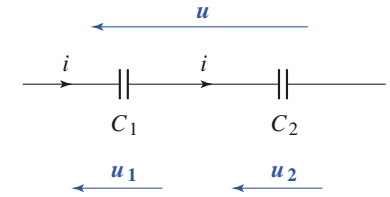
avec $e_j = 0$ pour un résistor ; $\varepsilon_j = 1$ si e_j est orienté dans le sens de i , et $\varepsilon_j = -1$ dans le cas contraire (doc. 12).



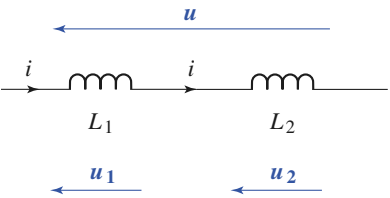
Doc. 7. Modélisation d'un générateur réel.



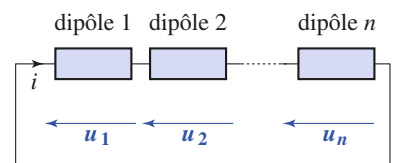
Doc. 8. Association série de deux générateurs.



Doc. 9. Association en série de deux condensateurs idéaux.



Doc. 10. Association en série de deux bobines idéales.

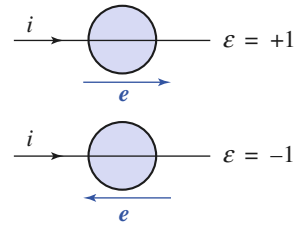


Doc. 11. Maille analysée en une association en série de dipôles.

L'intensité dans le circuit est donnée par :

$$i = \frac{\sum \varepsilon_j e_j}{\sum R_k}$$

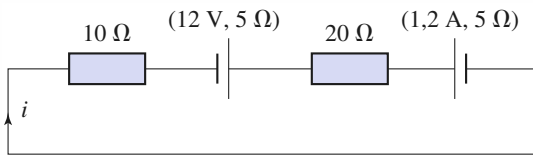
avec $\varepsilon_j = 1$ si e_j est orienté dans le sens de i , et $\varepsilon_j = -1$ sinon. Cette relation est appelée loi de Pouillet.



Doc. 12. Convention pour ε .

Application 2

Calculer l'intensité traversant le circuit du document 13.



Doc. 13. Circuit d'étude.

Orientons le circuit dans le sens des aiguilles d'une montre. La f.e.m. du second générateur est :

$$1,2 \times 5 = 6 \text{ V.}$$

Pour le générateur de f.e.m. 12 V, $\varepsilon = 1$; pour celui de 6 V, $\varepsilon = -1$. La loi de Pouillet donne :

$$i = \frac{12 - 6}{10 + 5 + 20 + 5} = 150 \text{ mA.}$$

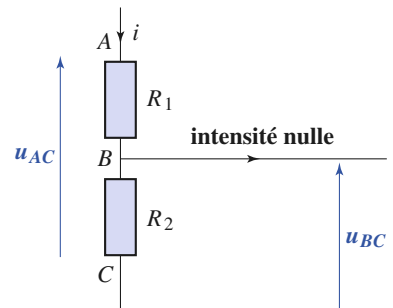
1.4. Pont diviseur de tension

Il est utile de savoir déterminer la différence de potentiel aux bornes d'un dipôle en fonction de celle aux bornes de l'association des dipôles en série (doc. 14).

Dans le cas de deux résistances, cette relation est celle du pont diviseur de tension. En appliquant $u_{AC} = (R_1 + R_2)i$ et $u_{BC} = R_2 i$, nous remarquons que :

$$u_{BC} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{AC}$$

si aucune intensité ne sort du pont diviseur.



Doc. 14. Pont diviseur de tension.

Application 3

Ponts diviseurs de tension particuliers

Quelle relation pouvez-vous écrire si les résistors du document 14 sont remplacés :

- par des bobines idéales ?
- par des condensateurs idéaux ?

1) Nous avons les relations $u_{AC} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$ et $u_{BC} = L_2 \frac{di}{dt}$, donc $u_{BC} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} u_{AC}$.

La relation est semblable à celle obtenue avec des résistors.

2) Nous avons les relations suivantes :

$$\frac{du_{AC}}{dt} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i \text{ et } \frac{du_{BC}}{dt} = \frac{i}{C_2}, \text{ donc :}$$

$$\frac{du_{BC}}{dt} = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) \frac{du_{AC}}{dt}.$$

Nous en déduisons $u_{BC} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_{AC} + u_0$,

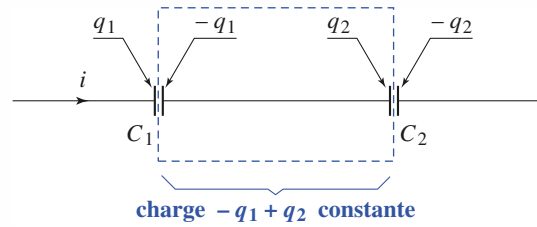
u_0 est une constante d'intégration que nous pouvons interpréter à partir du document 15.

La charge $q_2 - q_1$ est isolée : elle reste constante au cours du temps ($i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt}$). Si elle est nulle, u_0 est nulle.

Dans le cas de condensateurs, la formule :

$$u_{BC} = \frac{C_1}{C_1 - C_2} u_{AC} = \frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} u_{AC}$$

n'est valable que si initialement la charge totale des armatures isolées est nulle.



Doc. 15. La charge $q_2 - q_1$ reste constante dans le temps.

2 Association en parallèle de dipôles linéaires

Des dipôles sont associés en parallèles s'ils sont reliés aux deux mêmes nœuds et donc soumis à la même différence de potentiel (doc. 16).

2.1. Cas général

Le courant total traversant l'association en parallèle de deux dipôles est la somme des courants les traversant : $i = i_1 + i_2$.

Les deux dipôles sont soumis à la même différence de potentiel.

2.2. Association de deux dipôles de même type

2.2.1. Association de résistors

Cette association est représentée sur le document 17.

Ici $i_1 = \frac{u}{R_1}$ et $i_2 = \frac{u}{R_2}$, donc $i = u \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (G_1 + G_2)u$ (G conductance).

Dans le cas de plusieurs résistors :

$$u = Ri, \text{ avec } \frac{1}{R} = \sum_j \frac{1}{R_j}, \text{ ou } i = Gu, \text{ avec } G = \sum_j G_j.$$

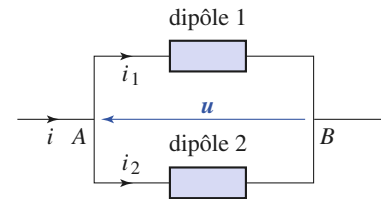
L'association de résistors en parallèle est équivalente à un résistor de conductance égale à la somme des conductances de l'association.

► Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.

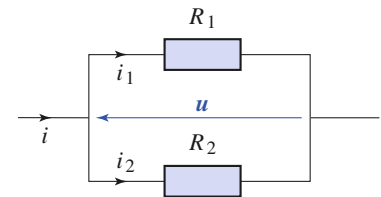
2.2.2. Association de générateurs

Comme nous additionnons les courants, la représentation par un générateur de Norton est préférable. Nous vérifions que $i = \eta_1 - \eta_2 + u \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Dans le cas de plusieurs générateurs, nous obtenons (doc. 18) :

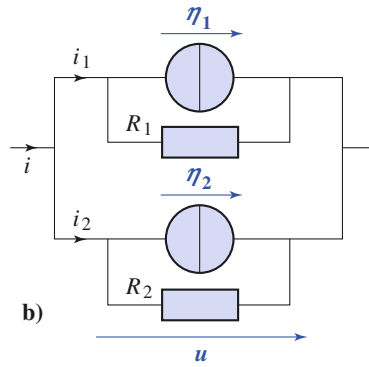
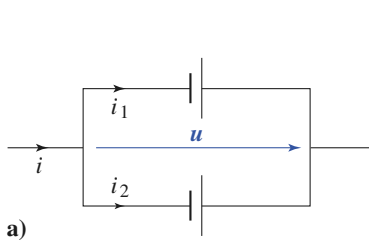
$$i = \eta - \frac{u}{R} = \eta - Gu, \text{ avec } \eta = \sum_j \varepsilon_j \eta_j \text{ et } G = \frac{1}{R} = \sum_j G_j = \sum_j \frac{1}{R_j}$$



Doc. 16. Association en parallèle de deux dipôles.



Doc. 17. Association en parallèle de deux résistors.



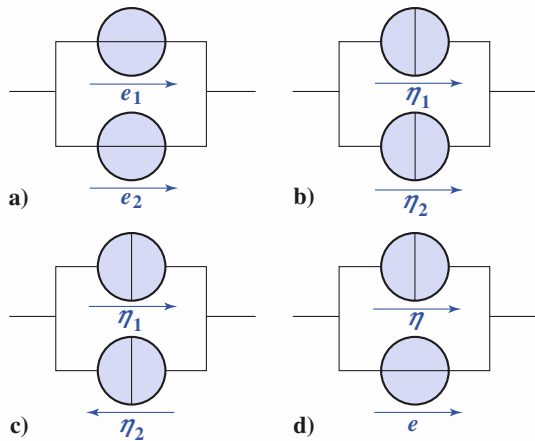
Doc. 18. Association en parallèle de générateurs réels.

Doc. 19. Convention pour ϵ .

$\epsilon_j = 1$ si η_j est de même sens que i , sinon $\epsilon_j = -1$ (doc. 19).

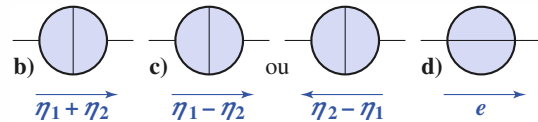
Application 4

Déterminer les générateurs équivalents aux montages en parallèles du document 20, lorsque cela est possible.



Doc. 20.

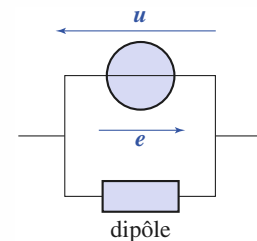
Les générateurs équivalents sont représentés dans le document 21. (Pour c, $\eta_1 - \eta_2$ si $\eta_1 > \eta_2$, sinon $\eta_2 - \eta_1$.)



Doc. 21. Générateurs équivalents.

Le cas a) est impossible sauf si $e_1 = e_2$. Alors l'ensemble est équivalent à un générateur de tension $e_1 = e_2$.

De façon plus générale, dans le document 22, la source de tension impose $u = -e$ (sauf cas particulier du type a).



Doc. 22. Association parallèle d'une source de tension et d'un dipôle.

Si une source de tension idéale est associée en parallèle avec un dipôle (qui n'est pas assimilable à une source de tension), l'ensemble est équivalent à la source de tension seule.

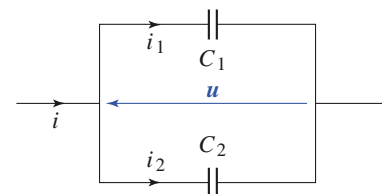
2.2.3. Association de condensateurs idéaux

Cette association est représentée sur le document 23.

Les relations $i_1 = C_1 \frac{du}{dt}$ et $i_2 = C_2 \frac{du}{dt}$ donnent $i = (C_1 + C_2) \frac{du}{dt}$.

De façon générale :

$$i = C \frac{du}{dt}, \text{ avec } C = \sum_j C_j.$$



Doc. 23. Association en parallèle de deux condensateurs idéaux.

L'association de condensateurs idéaux en parallèle est équivalente à un condensateur idéal de capacité C égale à la somme des capacités de l'association.

2.2.4. Association de bobines idéales

Cette association est représentée sur le document 24.

Des relations $\frac{di_1}{dt} = \frac{u}{L_1}$ et $\frac{di_2}{dt} = \frac{u}{L_2}$, nous déduisons $\frac{di}{dt} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u$.

Pour un nombre de bobines quelconque :

$$\frac{di}{dt} = \frac{u}{L}, \text{ avec } \frac{1}{L} = \sum_j \frac{1}{L_j}.$$

L'association de bobines idéales en parallèle est équivalente à une bobine idéale d'inductance L telle que $\frac{1}{L} = \sum_j \frac{1}{L_j}$ (l'inverse de l'inductance équivalente est la somme des inverses des inductances de l'association).

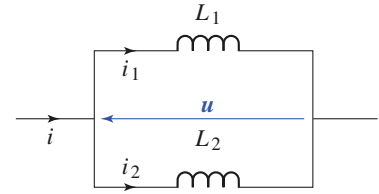
2.3. Pont diviseur de courant

Étudions la relation entre l'intensité traversant un dipôle et l'intensité totale traversant l'association des dipôles en parallèle (doc. 25).

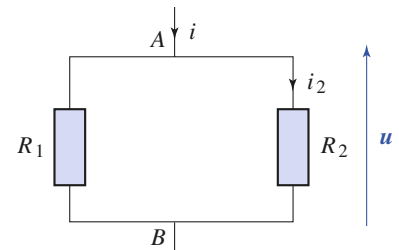
Dans le cas de deux dipôles résistifs, cette relation est celle du pont diviseur de courant.

En appliquant $i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u$ et $i_2 = \frac{1}{R_2}u$, nous remarquons que :

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}i = \frac{G_2}{G_1 + G_2}i, \text{ avec } G_1 = \frac{1}{R_1} \text{ et } G_2 = \frac{1}{R_2}.$$



Doc. 24. Association en parallèle de deux bobines idéales.



Doc. 25. Pont diviseur de courant.

Application J

Ponts diviseurs de courant particuliers

Quelle relation pouvez-vous écrire si les résistors du document 25 sont remplacés :

- a) par des bobines idéales ?
- b) par des condensateurs idéaux ?

1) Nous avons les relations :

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{u}{L_1} \text{ et } \frac{di_2}{dt} = \frac{u}{L_2}$$

donc :

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{di}{dt}.$$

Cette relation s'intègre en $i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2}i + i_0$, où i_0 est une constante d'intégration.

La formule : $i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2}i$

n'est valable que si la constante i_0 est nulle.

2) Nous avons les relations :

$$i = (C_1 + C_2)\frac{du}{dt} \text{ et } i_2 = C_2\frac{du}{dt}$$

donc : $i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}i$.

Cette formule est semblable à celle donnant la conductance de l'association de résistors en parallèle.

3 Loi des nœuds en termes de potentiels

3.1. Expression de la loi des nœuds pour un circuit composé de résistors et de générateurs

Ayant affecté le potentiel 0 à un nœud (la masse du montage, par exemple), les potentiels de tous les nœuds ont alors une valeur définie.

Considérons la portion de circuit du document 26.

Nous pouvons exprimer les courants dans chaque branche :

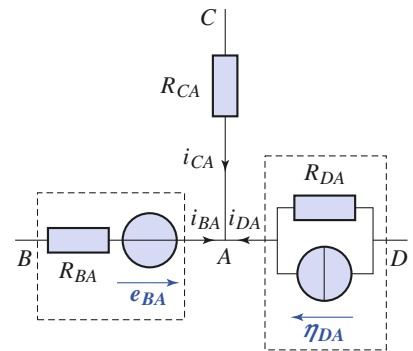
$$i_{BA} = \frac{(u_B - u_A + e_{BA})}{R_{BA}}, \quad i_{CA} = \frac{(u_C - u_A)}{R_{CA}} \quad \text{et} \quad i_{DA} = \eta_{DA} + \frac{(u_D - u_A)}{R_{DA}}.$$

La somme des courants arrivant au nœud A est nulle, donc :

$$\frac{1}{R_{BA}}(u_B - u_A + e_{BA}) + \frac{1}{R_{CA}}(u_C - u_A) + \frac{1}{R_{DA}}(u_D - u_A) + \eta_{DA} = 0.$$

Cette relation ne fait intervenir que les potentiels de nœuds.

De façon générale, dans un circuit comprenant N nœuds, nous pouvons *a priori* écrire N relations de ce type. En fait, seules $N - 1$ relations sont indépendantes, car le potentiel du nœud de référence est déjà connu.

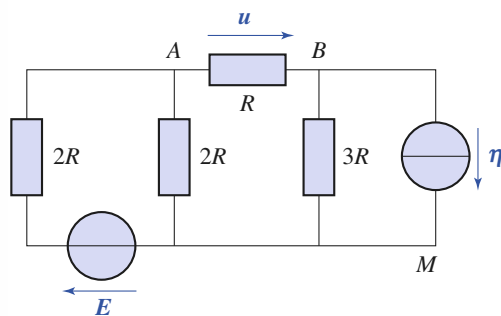


Doc. 26. Portion de circuit autour du nœud A.

Application 6

Calculer la différence de potentiel u dans le montage du document 27.

On prendra $\eta = 0,2 \text{ A}$, $E = 3 \text{ V}$ et $R = 5 \Omega$.



Doc. 27. Montage d'étude.

Posons $u_M = 0$. Il reste deux potentiels inconnus : u_A et u_B . Appliquons la loi des nœuds en termes de potentiels :

- en A : $\frac{E - u_A}{2R} + \frac{0 - u_A}{2R} + \frac{u_B - u_A}{R} = 0$;
- en B : $\frac{u_A - u_B}{R} + \frac{0 - u_B}{3R} - \eta = 0$.

Nous obtenons le système linéaire :

$$4u_A - 2u_B = E; \quad 3u_A - 4u_B = 3R\eta.$$

La solution est :

$$u_B = \frac{3E}{10} - \frac{6R\eta}{5} \quad \text{et} \quad u_A = \frac{2E}{5} - \frac{3R\eta}{5}.$$

$$\text{Donc : } u = u_B - u_A = -\frac{E}{10} - \frac{3R\eta}{5}$$

$$\text{soit : } u = -1,1 \text{ V}.$$

3.2. Relation de Millman

De l'expression obtenue au § 3.1. nous pouvons déduire la relation :

$$\left(\frac{1}{R_{BA}} + \frac{1}{R_{CA}} + \frac{1}{R_{DA}} \right) u_A = \frac{1}{R_{BA}} u_B + \frac{1}{R_{CA}} u_C + \frac{1}{R_{DA}} u_D + \eta_{DA} + \frac{e_{BA}}{R_{BA}}.$$

Sa forme générale est le théorème de Millman :

$$\left(\sum_{k \neq j} \frac{1}{R_{kj}} \right) u_j = \sum_{k \neq j} \left(\frac{u_k + e_{kj}}{R_{kj}} + \eta_{kj} \right)$$

avec les f.e.m. et c.e.m. comptés positivement quand ils sont dirigés vers le nœud d'étude.

En appliquant la loi des nœuds en termes de potentiels, les calculs sont souvent plus simples que ceux entraînés par l'application de la relation de Millman pour laquelle il faut faire attention à l'orientation des f.e.m. et c.e.m.

En revanche, la relation de Millman peut être utilisée simplement et sans risque de erreur dans le cas où les branches qui arrivent au nœud sont des résistors. Elle s'écrit alors :

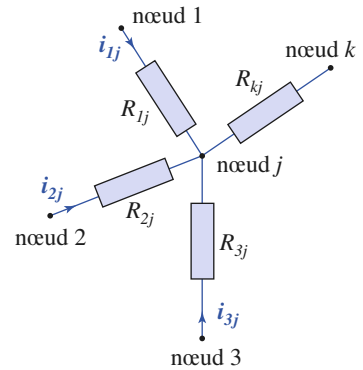
$$u_j = \frac{\sum_{k \neq j} G_{kj} u_k}{\sum_{k \neq j} G_{kj}}$$

avec $G_{kj} = \frac{1}{R_{kj}}$: conductance du dipôle reliant le nœud j au nœud k (doc. 28).

En d'autres termes :

Le potentiel d'un nœud qui n'est relié qu'à des résistors est égal au barycentre des potentiels des nœuds auxquels il est relié, chaque potentiel étant affecté d'un coefficient égal à la conductance de la branche correspondante.

Remarque : À nouveau, en appliquant la loi des nœuds en termes de potentiels, les calculs sont souvent plus simples !



Doc. 28. Définitions des diverses grandeurs pour l'application de la loi des nœuds en termes de potentiels ou du théorème de Millman.

Application 7

Calculer la tension u dans le montage du document 29 ($E = 6 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$).

Prenons la référence des potentiels au nœud D : $u_D = 0$ et $u_A = E$.

• La relation de Millman au nœud B donne :

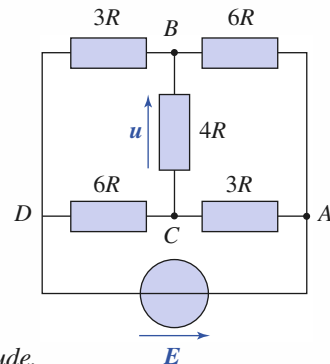
$$u_B = \frac{0 + \frac{E}{6} + \frac{u_C}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}} = \frac{2E + 3u_C}{9}$$

• La relation de Millman au nœud C donne :

$$u_C = \frac{0 + \frac{E}{6} + \frac{u_B}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{4E + 3u_B}{9}$$

En retranchant ces résultats membre à membre, il vient :

$$u = u_B - u_C = -\frac{1}{6}E \text{ soit : } u = -1 \text{ V.}$$



Doc. 29. Montage d'étude.

3.3. Étude complète d'un circuit composé de résistors et de générateurs linéaires

Généralisons les *Applications* 6 et 7 et considérons un circuit comportant N nœuds. Comme l'un des nœuds est au potentiel nul, il n'y a que $N - 1$ potentiels inconnus.

La loi des nœuds appliquée à $N - 1$ nœuds fournit justement les $N - 1$ équations indépendantes qui permettent de déterminer tous les potentiels de nœuds.

Connaissant les potentiels des N nœuds, nous pouvons en déduire les courants dans chaque branche, et donc toutes les grandeurs relatives à ce circuit.

Nous disposons d'une méthode systématique d'étude des réseaux linéaires en régime continu. Cette méthode a l'avantage de toujours s'appliquer, mais elle présente l'inconvénient d'être très lourde à manipuler. Les paragraphes qui suivent vont montrer comment, dans certains cas, il est possible d'échapper à la résolution fastidieuse de systèmes d'équations.

4 Théorème de superposition

4.1. Extinction d'une source libre

• Une source libre de tension est éteinte si sa f.e.m. est nulle. Or, une tension nulle peut être assurée par un fil (ou un court-circuit) (*doc.* 30).

Une source de tension éteinte peut être remplacée par un court-circuit.

• Une source libre de courant est éteinte si son c.e.m. est nul. Or, un courant nul peut être assuré par un circuit ouvert (*doc.* 31).

Une source de courant éteinte peut être remplacée par un circuit ouvert.

4.2. Théorème de superposition pour les régimes continus

Reprenons l'exemple de l'*Application* 6. Nous avons obtenu :

$$4u_A - 2u_B = E \quad 3u_A - 4u_B = 3R\eta.$$

Si nous éteignons la source de tension E , ce qui revient à faire $E = 0$, nous obtenons une solution u_{A_1} et u_{B_1} solution du système :

$$4u_{A_1} - 2u_{B_1} = 0 \quad 3u_{A_1} - 4u_{B_1} = 3R\eta.$$

Si nous éteignons la source de courant η , ce qui revient à faire $\eta = 0$, nous obtenons une solution u_{A_2} et u_{B_2} solution du système :

$$4u_{A_2} - 2u_{B_2} = E \quad 3u_{A_2} - 4u_{B_2} = 0.$$

En additionnant membre à membre ces équations nous obtenons :

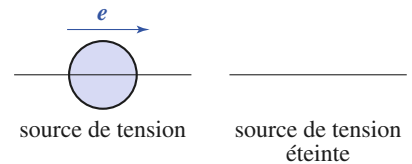
$$4(u_{A_1} + u_{A_2}) - 2(u_{B_1} + u_{B_2}) = E \quad 3(u_{A_1} + u_{A_2}) - 4(u_{B_1} + u_{B_2}) = 3R\eta.$$

En identifiant avec le premier système d'équations nous en concluons que :

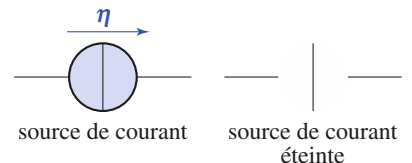
$$u_A = u_{A_1} + u_{A_2} \quad \text{et} \quad u_B = u_{B_1} + u_{B_2}.$$

Nous admettons la généralité de ce résultat.

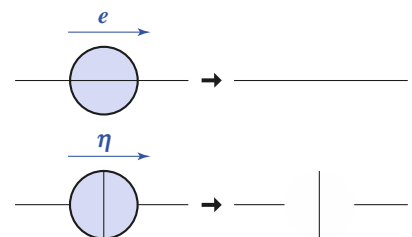
De la linéarité du système d'équations, associé à un réseau linéaire, découle le **théorème de superposition des régimes continus** :



Doc. 30. Une source de tension éteinte est un court-circuit.



Doc. 31. Une source de courant éteinte est un circuit ouvert.



Doc. 32. Pour « éteindre » une source libre, il suffit d'enlever le cercle sur son schéma.

En régime permanent, l'intensité qui parcourt les dipôles constituant un réseau linéaire et la différence de potentiel à leurs bornes sont les sommes de ces grandeurs obtenues dans les différents états du réseau où toutes les sources libres, sauf une, sont éteintes.

L'intérêt de ce théorème est qu'un réseau à source unique peut en général se résoudre plus simplement que par la résolution d'un système d'équations.

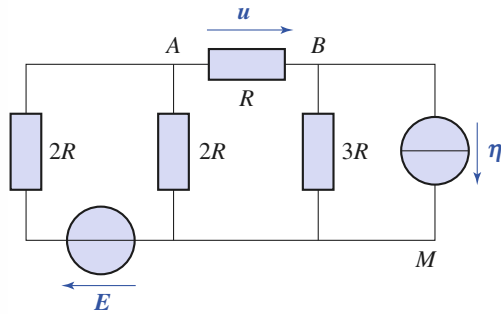
Remarques

- Lors de l'application du théorème de superposition, nous ne pouvons éteindre que des sources libres.

Application 8

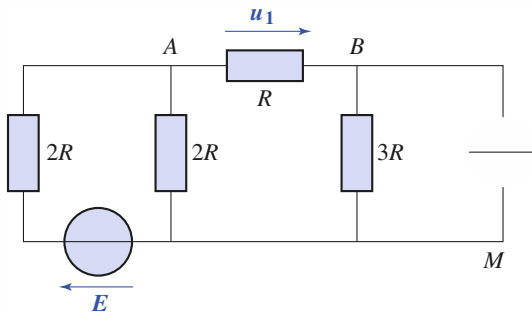
Calculer la différence de potentiel u dans le montage du document 33.

On prendra $\eta = 0,2 \text{ A}$, $E = 5 \text{ V}$ et $R = 5 \Omega$.



Doc. 33. Montage d'étude.

Éteignons la source de courant (doc. 34).



Doc. 34. Montage après extinction de la source de courant.

En utilisant le pont diviseur de tension, nous trouvons :

$$u_1 = -\frac{1}{4}u_{AM}$$

La résistance équivalente R_1 entre A et M est donnée par :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R + 3R} = \frac{3}{4R}, \text{ soit } R_1 = \frac{4R}{3}$$

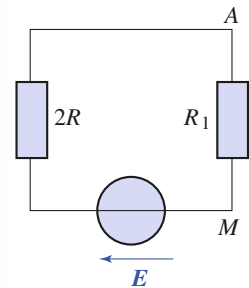
Sur le schéma équivalent (doc. 35), l'application du pont diviseur donne :

$$u_{AM} = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + 2R} = \frac{2E}{5}$$

d'où :

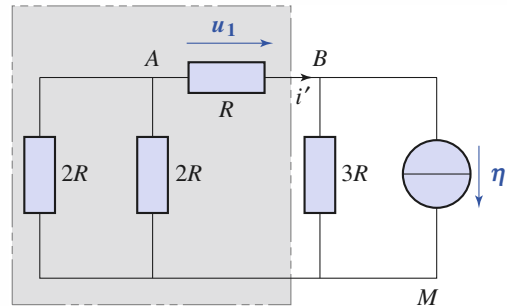
$$u_1 = -\frac{2E}{4 \times 5} = -\frac{E}{10},$$

soit : $u_1 = -0,5 \text{ V}$.



Doc. 35. Pont diviseur.

Éteignons la source de tension (doc. 36).



Doc. 36. Montage après extinction de la source de tension.

La résistance équivalente à la partie grisée du circuit est $R' = 2R$.

L'application de la tension du pont diviseur de courant donne :

$$i' = \frac{3R}{2R + 3R}\eta = \frac{3\eta}{5}, \text{ d'où } u_2 = -\frac{3R\eta}{5},$$

soit :

$$u_2 = -0,6 \text{ V}.$$

La superposition des deux états donne :

$$u = u_1 + u_2 = -1,1 \text{ V}.$$

- L'utilisation du théorème de superposition associé aux formules sur les ponts diviseurs évite souvent la résolution de systèmes d'équations à plusieurs inconnues.
- Dans le cas de sources liées, l'application du théorème de superposition n'est souvent pas plus simple que l'utilisation de la loi des nœuds en termes de potentiels.

4.3. Cas des régimes variables

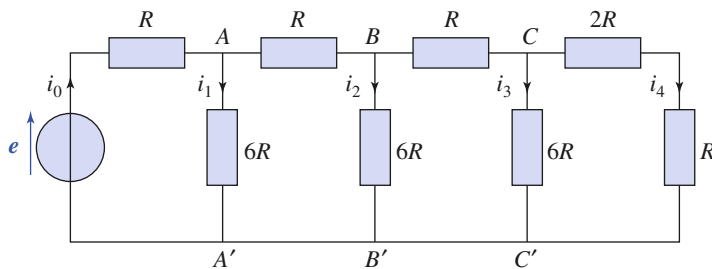
La linéarité des équations est aussi vraie en régime variable. Cependant l'application du théorème de superposition nécessite, dans ce cas, un traitement particulier des conditions initiales (charge des condensateurs, courant dans les bobines...).

5 Résolution d'un réseau par équivalences successives

Pour éviter la résolution des $N-1$ équations de nœuds, il est souvent possible d'utiliser les équivalences, les ponts diviseurs et le théorème de superposition.

5.1. Associations de résistances et ponts diviseurs

Cherchons les intensités des courants dans le circuit représenté sur le document 37.



◀ Doc. 37. Exemple de circuit.

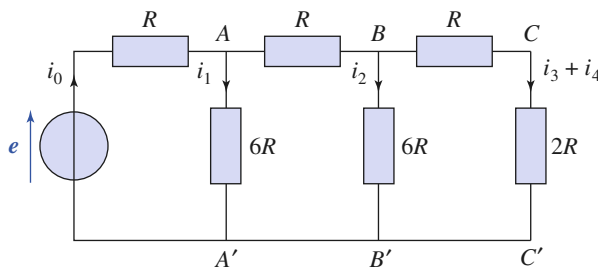
Pour cela, nous allons calculer i_0 puis en déduire les autres par divisions de courant.

5.1.1. Calcul de la résistance équivalente vue par la source

Entre les points C et C' , nous avons une résistance $2R + R$ en parallèle sur $6R$, soit une résistance équivalente :

$$R_{CC'} = 2R.$$

Nous remplaçons ce bloc de trois résistances par une résistance $R_{CC'} = 2R$ (doc. 38).



◀ Doc. 38. Circuit équivalent.

Notons que cette équivalence n'est vraie que pour la partie gauche du circuit car les courants i_3 et i_4 ne sont plus distingués sur le circuit équivalent.

En réitérant deux fois cette opération, nous obtenons successivement les résistances équivalentes :

$$R_{BB'} = 2R \quad \text{et} \quad R_{AA'} = 2R.$$

5.1.2. Calcul du courant débité par la source

i_0 se calcule à partir du circuit équivalent à maille unique (doc. 39) : $i_0 = \frac{e}{3R}$.

5.1.3. Calcul des autres courants

Pour déterminer i_1 , nous raisonnons sur le document 40a où l'on a fait figurer la résistance équivalente $R_{BB'} = 2R$.

La relation du diviseur de courant nous donne :

$$i_1 = i_0 \frac{\frac{1}{6R}}{\frac{1}{6R} + \frac{1}{3R}} = \frac{1}{3}i_0 = \frac{e}{9R} \quad \text{et} \quad i_{AB} = \frac{2}{3}i_0 = \frac{2e}{9R}.$$

Nous déterminons aussi i_2 par division du courant i_{AB} au nœud B (doc. 40b).

Nous obtenons :

$$i_2 = \frac{1}{3}i_{AB} = \frac{2e}{27R} \quad \text{et} \quad i_{BC} = \frac{2}{3}i_{AB} = \frac{4e}{27R}.$$

Un calcul identique au nœud C nous donne enfin :

$$i_3 = \frac{1}{3}i_{BC} = \frac{4e}{81R} \quad \text{et} \quad i_4 = \frac{2}{3}i_{BC} = \frac{8e}{81R}.$$

Remarque : Nous aurions pu aussi calculer les tensions $u_{AA'}$, $u_{BB'}$ et $u_{CC'}$ par divisions successives de tensions.

De cette étude, nous retenons que :

- Pour calculer la résistance vue par la source, il faut commencer par les résistances qui en sont le plus éloignées.
- Une fois connu le courant débité par la source, on détermine les courants (ou les tensions) en appliquant la formule du diviseur de courant (ou du diviseur de tension).

5.2. Utilisation successive des représentations de Norton et de Thévenin

Considérons à nouveau le circuit étudié dans l'Application 6, représenté sur le document 41.

Le document 42, page suivante, montre comment, en transformant successivement des générateurs de Thévenin en générateur de Norton (ou l'inverse), on se ramène à une maille unique.

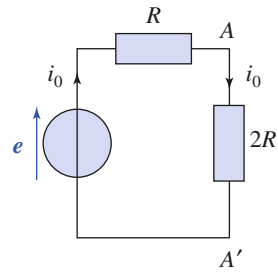
En appliquant la formule du diviseur de tension sur le dernier schéma du document 42, nous obtenons :

$$u = -\left(\frac{E}{2} + 3\eta R\right)\frac{R}{5R} = -\frac{E}{10} - \frac{3\eta R}{5}.$$

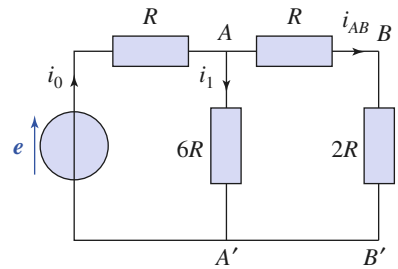
L'application numérique donne :

$$u = -0,5 - \frac{3 \times 0,2 \times 5}{5} = -1,1 \text{ V}.$$

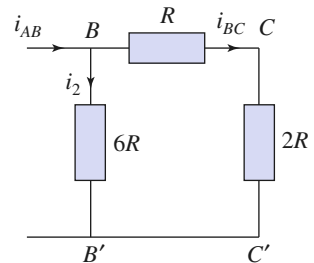
C'est bien le résultat de l'Application 6.



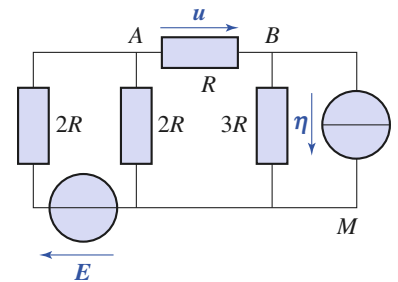
Doc. 39. Circuit équivalent vu de la source.



Doc. 40a. Circuit équivalent pour le calcul de i_1 .

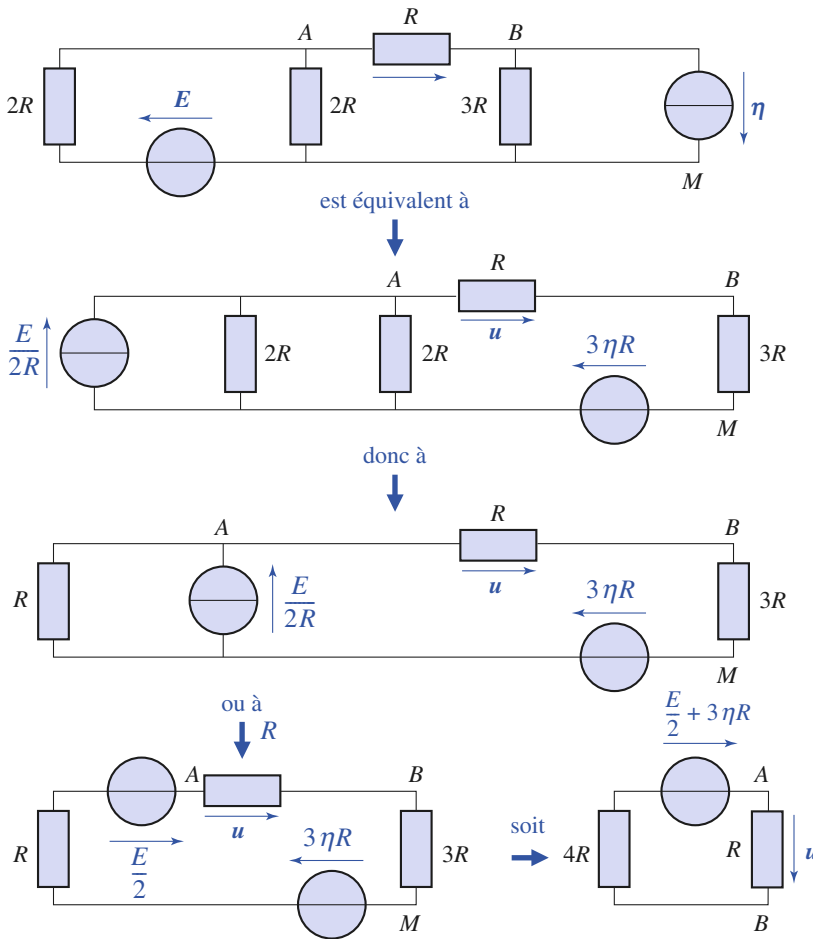


Doc. 40b. Circuit équivalent pour le calcul de i_2 .



Doc. 41. Circuit d'étude avec $R = 5\Omega$, $E = 5\text{V}$ et $\eta = 0,2 \text{ A}$.

3. Théorèmes généraux relatifs aux réseaux linéaires



Doc. 42. Utilisation successive des représentations de Norton et Thévenin.

De cette étude nous retenons que :

- lorsque deux générateurs sont en série, il faut les mettre sous la forme de générateur de Thévenin ;
- lorsque deux générateurs sont en parallèle, il faut les mettre sous la forme de générateurs de Norton ;
- le but est de se ramener à une maille unique avec des générateurs de Thévenin (ou à un circuit à deux nœuds avec des générateurs de Norton et des résistors tous en parallèle).

CQFR

● ASSOCIATION DE DIPÔLES

• En série

Résistors :
$$R = \sum_i R_i.$$

Générateurs réels libres :
$$e = \sum_i e_i \text{ et } R = \sum_i R_i.$$

Condensateurs (sous réserve de l'état initial) :
$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

Inductances :
$$L = \sum_i L_i.$$

• En parallèle

Résistors :
$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \text{ ou } G = \sum_i G_i.$$

Générateurs réels libres :
$$\eta = \sum_i \eta_i \text{ et } \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

Condensateurs :
$$C = \sum_i C_i.$$

Inductances :
$$\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i}.$$

● LOI DE NŒUDS EN TERMES DE POTENTIELS

La somme des courants exprimés en termes de potentiels arrivant sur un nœud est nulle :

$$\sum_{k \neq j} \left(\frac{u_k - u_j + e_{kj}}{R_{kj}} + \eta_{kj} \right) = 0.$$

● RELATION DE MILLMAN

Le potentiel d'un nœud qui n'est relié qu'à des résistors est égal au barycentre des potentiels des nœuds auxquels il est relié, chaque potentiel étant affecté d'un coefficient égal à la conductance de la branche correspondante.

$$u_j = \frac{\sum_{k \neq j} G_{kj} u_k}{\sum_{k \neq j} C_{kj}} \quad G_{kj} = \frac{1}{R_{kj}}.$$

Rappelons que la loi des nœuds exprimée en terme de potentiels est souvent plus simple.

● THÉORÈME DE SUPERPOSITION

En régime permanent, l'intensité qui parcourt les dipôles constituant un réseau linéaire et la différence de potentiel à leurs bornes, sont les sommes de ces grandeurs obtenues dans les différents états du réseau, où toutes les sources libres, sauf une, sont éteintes.

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Savez-vous utiliser les équivalences pour simplifier un réseau et le ramener à une maille unique :
 - résistors en parallèle et en série ?
 - générateurs équivalents de Thévenin et de Norton ?
- ✓ Quelles sont les formules du diviseur de tension et du diviseur de courant ?
- ✓ Pouvez-vous écrire la loi des nœuds en fonction du potentiel du nœud et des potentiels des nœuds voisins ?
- ✓ Le théorème de superposition s'applique-t-il dans le cas d'un réseau avec plusieurs sources ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. **Éteindre (ou annuler) une f.e.m équivaut à la remplacer par un interrupteur ouvert.**

- Vrai Faux

2. **Éteindre (ou annuler) un c.e.m équivaut à le remplacer par un interrupteur ouvert.**

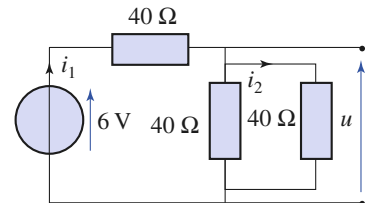
- Vrai Faux

3. **On peut appliquer le théorème de superposition à un circuit comportant des diodes.**

- Vrai Faux

4. **Étudier (presque sans calcul) le circuit représenté sur la figure :**

- a. $i_1 = 0,2 \text{ A}$
 b. $i_1 = 0,1 \text{ A}$
 c. $i_2 = \frac{1}{2}i_1$
 d. $u = 4 \text{ V}$
 e. $u = 3 \text{ V}$
 f. $u = 2 \text{ V}$

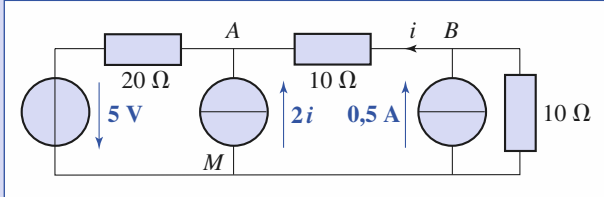


► Solution, page 65.

Exercices

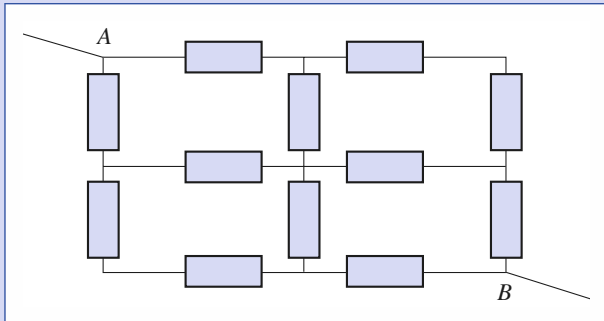
1 Cas de sources liées

Calculer l'intensité i pour le montage suivant par le théorème de superposition et par la loi des nœuds en termes de potentiels.



2 Utilisation des symétries

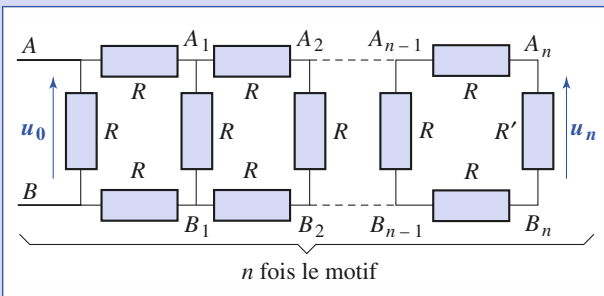
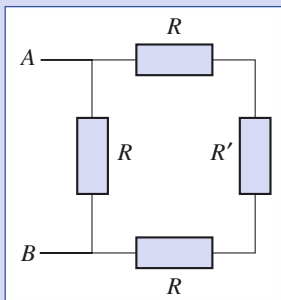
Déterminer la résistance équivalente entre les points A et B du réseau suivant, où tous les résistors sont identiques, de résistance R .



3 Résistance itérative

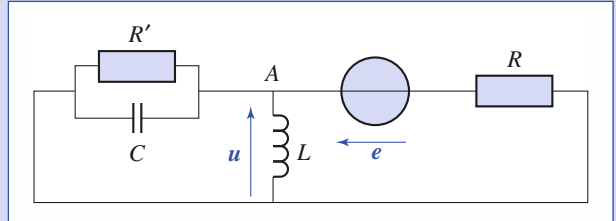
1) Déterminer la valeur du résistor R' telle que la résistance équivalente au réseau ci-contre entre A et B soit R' .

2) En déduire la valeur de différence de potentiel u_n dans le réseau suivant si R' est donnée par le résultat de 1) et si u_0 est appliquée entre A et B .



3) Quelle est la résistance R_{AB} du réseau entre les bornes A et B ?

4 Loi des nœuds en termes de potentiels

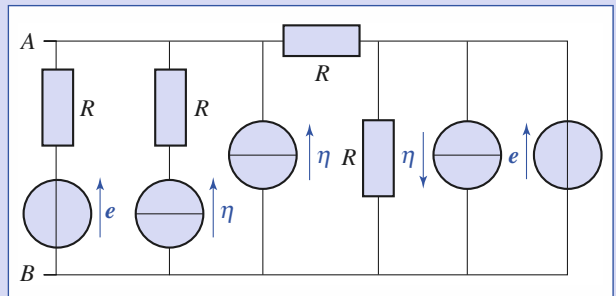


Appliquer la loi des nœuds en A .

À l'instant $t = 0$, la bobine est parcourue par un courant nul et le condensateur est non chargé. En déduire la valeur de $\frac{du}{dt}$ à $t = 0$.

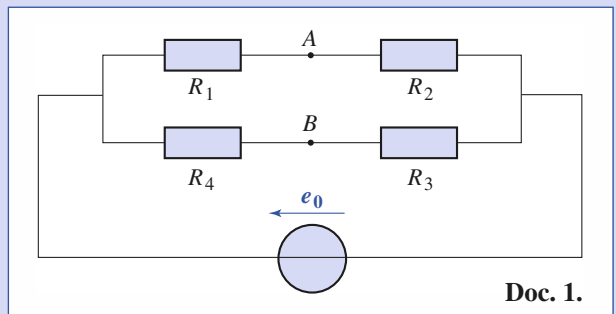
5 Générateur de Thévenin

Donner le générateur de Thévenin équivalent au circuit suivant entre A et B .

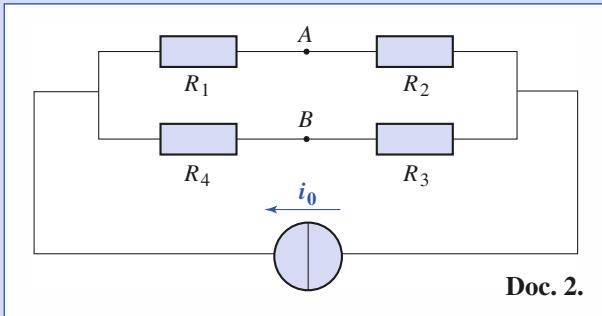


6 Pont de Wheatstone

On considère un pont de Wheatstone purement résistif, alimenté par un générateur idéal selon les montages suivants, avec R_1, R_2, R_3 et R_4 les résistances des conducteurs ohmiques et e_0 la f.e.m. (doc. 1) ou i_0 l'intensité fournie par le générateur idéal (doc. 2).



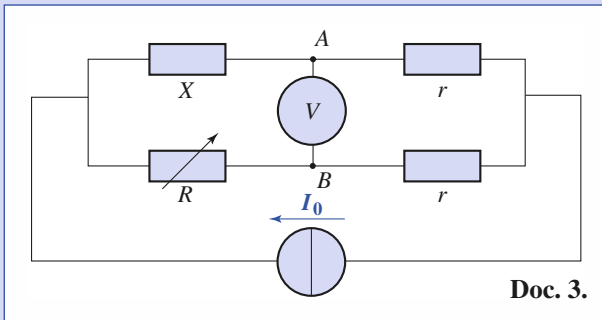
Exercices



Doc. 2.

- Déterminer la tension u_{AB} pour les documents 1 et 2.
- Mesure de températures

Dans le pont du schéma suivant (doc. 3) tous les éléments, sauf X , sont maintenus à la température du laboratoire, supposée fixe.



Doc. 3.

X est une résistance de platine dont la valeur varie avec la température θ ($^{\circ}\text{C}$) selon la relation :

$$X = X_0(1 + a\theta), \text{ avec } X_0 = 50,0 \, \Omega$$

et : $a = 0,40 \cdot 10^{-3} \, \text{K}^{-1}$;

R est une résistance réglable ;

V est un voltmètre dont la résistance interne peut être considérée infinie ;

r sont des résistances identiques de $1\,000 \, \Omega$ chacune.

Le générateur de courant est idéal et fournit une intensité :

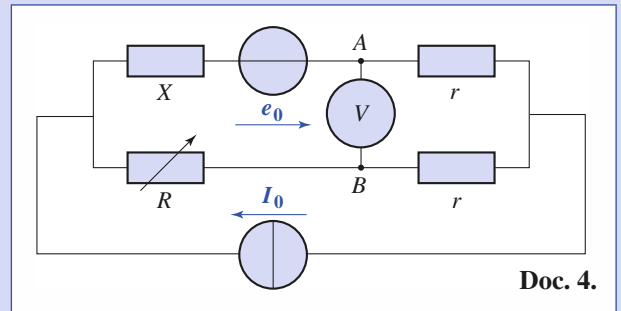
$$I_0 = 5 \, \text{mA}.$$

On néglige la résistance des fils de jonction.

a) Le pont étant initialement équilibré pour la température $100 \, ^{\circ}\text{C}$, une variation de température $\Delta\theta = 10^{-2} \, ^{\circ}\text{C}$ est imposée à la résistance de platine.

Quelle est la tension u_{AB} due à cette variation de température ? Calculer u_{AB} .

b) Le pont étant initialement équilibré pour la température $100 \, ^{\circ}\text{C}$, les jonctions font apparaître une f.e.m. parasite e_0 en série avec la résistance de platine, la température étant toujours $100 \, ^{\circ}\text{C}$.



Doc. 4.

Quelle est la tension u_{AB} due à cette f.e.m. parasite ?

Quelle est la valeur numérique maximale admissible de e_0 pour que la variation de température de 1) puisse être décelée malgré la f.e.m. parasite ?

7

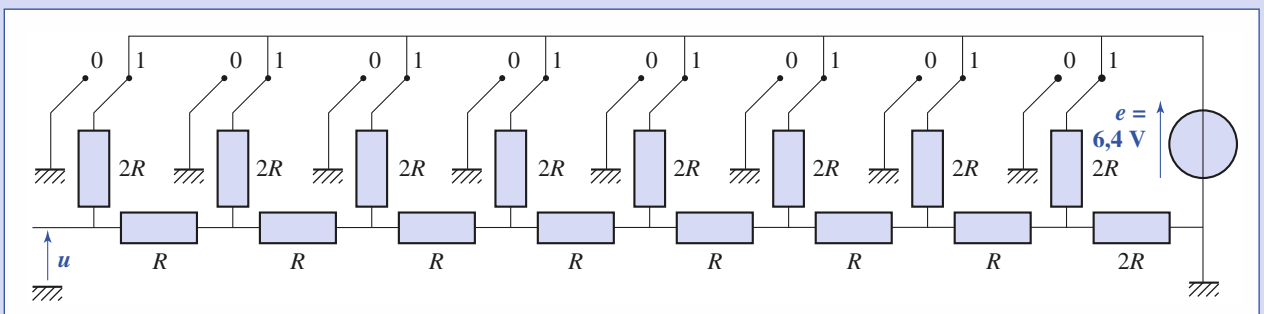
Convertisseur analogique numérique

On rappelle que tout nombre peut être représenté en notation binaire. Celle-ci se prête très bien à une conversion numérique analogique : un 1 est représenté par un interrupteur dans l'état 1 et un 0 par un interrupteur dans l'état 0.

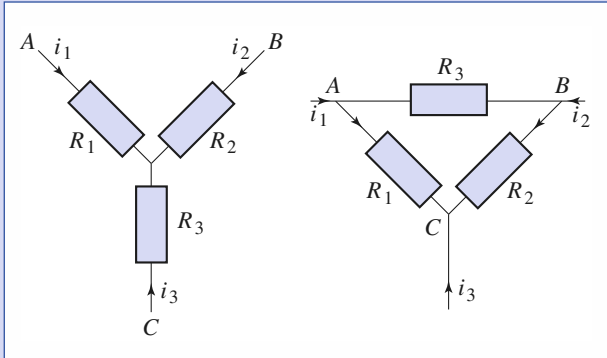
1) Combien de valeurs de tension peut-on produire avec huit interrupteurs ? Quelle tension maximale peut-on représenter si elles sont équidistantes et espacées de $25 \, \text{mV}$?

2) On réalise le montage ci-dessous. Montrer qu'il réalise la conversion d'un nombre binaire en une tension proportionnelle à ce nombre. (L'utilisation du théorème de superposition est recommandée.) Expliciter le pas de quantification.

Exemple : $n = \{a, b, c, d\} = a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d$
 a, b, c et d prenant les valeurs 0 ou 1.



8 Équivalence triangle-étoile : théorème de Kennelly



On se propose de montrer que deux éléments de circuits suivants sont équivalents.

1) En considérant le cas $i_1 = 0$, montrer que l'équivalence de ces deux montages impose une relation entre les R_i et les R'_i .

2) Que donneraient les cas $i_2 = 0$ ou $i_3 = 0$?

En déduire les expressions de R_1 , R_2 et R_3 en fonction de R'_1 , R'_2 et R'_3 .

3) L'équivalence n'est vérifiée, ici, que pour quelques cas particuliers. Est-ce bien suffisant ?

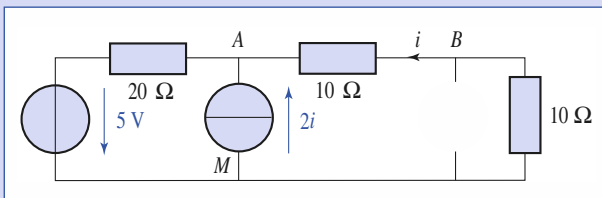
On remarquera que le « tripôle » ABC est déterminé par les intensités i_1 et i_2 ($i_3 = -i_1 - i_2$) et par les différences de potentiel u_{AC} et u_{BC} ($u_{AB} = u_{AC} - u_{BC}$).

Corrigés

Solution du tac au tac, page 62.

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ;
4. Vrai : b, c, f Faux : a, d, e

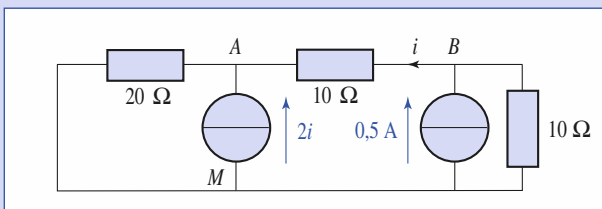
1 On éteint la source de courant indépendante :



La loi de nœuds en A donne avec u en V et i en A :

$$3i + \frac{u_M - u_A - 5}{20} = 0 ; \text{ de plus } u_M - u_A = 20i, \text{ d'où } i = 62,5 \text{ mA.}$$

On éteint la source de tension indépendante :



En appliquant la loi des nœuds en A :

$$u_{AM} = 60i, \text{ donc } u_{BM} = 70i = 10(0,5 - i), \text{ d'où } i = 62,5 \text{ mA.}$$

La superposition des deux états donne $i = 125 \text{ mA}$.

On utilise la loi des nœuds en posant $u_M = 0$:

$$\text{nœud A : } \frac{-u_A - 5}{20} + 3i = 0, \text{ nœud B : } -\frac{u_B}{10} - i + 0,5 = 0$$

$$\text{et } u_B - u_A = 10i.$$

L'élimination de u_B dans la deuxième équation conduit à :

$$-\frac{u_A}{10} - 2i + 0,5 = 0.$$

En reportant dans la première équation $i = 125 \text{ mA}$.

Remarque : Les expressions telles que $u_A - u_B = 20i$ sont apparemment inhomogènes.

Il est sous-entendu que i et u désignent les valeurs des courants en A et des tensions en V. Cela simplifie les calculs.

2 La diagonale AB est un axe de symétrie du réseau. Les points symétriques C et C', D et D', E et E' sont au même potentiel.

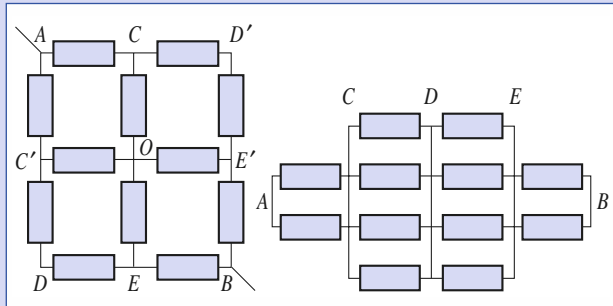
Le réseau est aussi symétrique par rapport à DD'; D, D', et O sont au même potentiel.

On peut relier les points de même potentiel par des fils sans modifier les courants dans le circuit.

Corrigés

En utilisant les formules des associations de résistances :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}.$$



3

1) La résistance équivalente est $R_{\text{eq}} = \frac{R(2R + R')}{R + (2R + R')}$.

La condition $R_{\text{eq}} = R'$ donne $R'^2 + 2RR' - 2R^2 = 0$, de solution :

$$R' = -R(1 \pm \sqrt{3}).$$

La seule solution physiquement acceptable est $R' = R(1 + \sqrt{3})$.

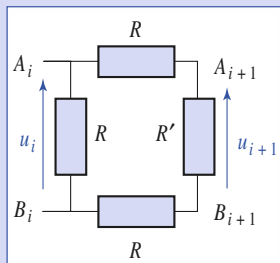
2) En utilisant 1), la résistance équivalente à la partie à droite de (A_{n-1}, B_{n-1}) est R' . Il en est de même quel que soit le couple (A_i, B_i) . On utilise cette remarque pour calculer u_{i+1} en fonction de u_i . Le schéma équivalent est représenté ci-contre.

On peut utiliser la formule du pont diviseur de tension :

$$u_{i+1} = u_i \frac{R'}{2R + R'},$$

donc $u_n = u_0 \left(\frac{R'}{2R + R'} \right)^n.$

3) $R_{AB} = R' = R(1 + \sqrt{3})$. Une telle résistance R' est dite résistance itérative.



4

On applique la loi des nœuds en termes de potentiels en A :

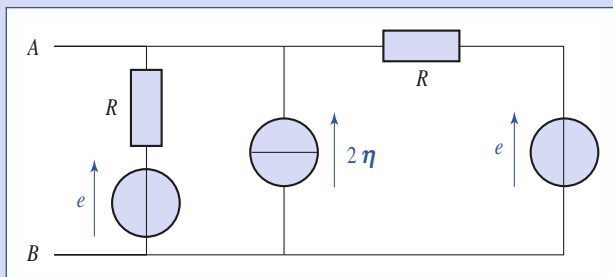
$$-\frac{u}{R'} - C \frac{du}{dt} - \frac{1}{L} \int_0^t u(t') dt' + \frac{e-u}{R} = 0.$$

Le condensateur est non chargé à $t = 0$, donc $u(0) = 0$. La relation

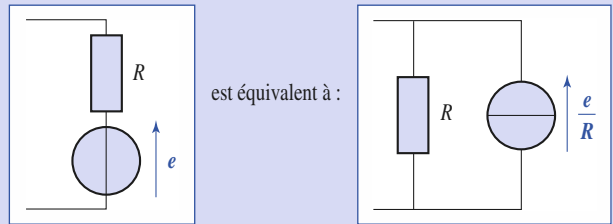
précédente donne $\left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = \frac{e}{RC}.$

5

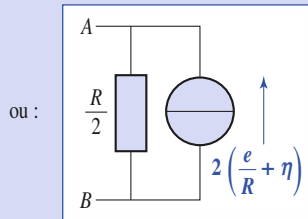
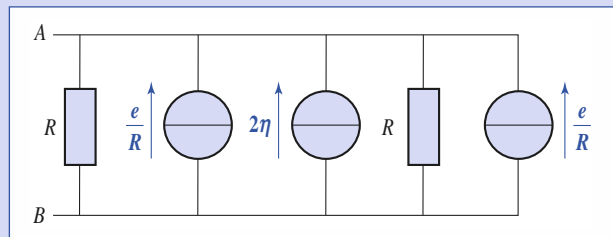
En utilisant les propriétés des associations avec des générateurs de courant ou de tension, on peut simplifier le montage (cf. Applications 1 et 4) :



Il suffit de remarquer que :

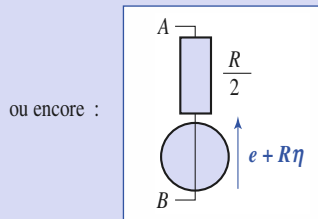


d'où le schéma équivalent :



ou :

générateur de Norton équivalent



ou encore :

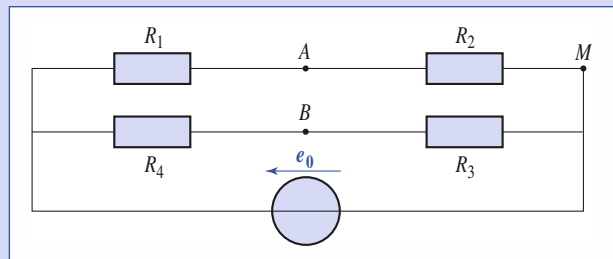
6

1) • Doc. 1.

La formule du pont diviseur de tension donne ($u_M = 0$) :

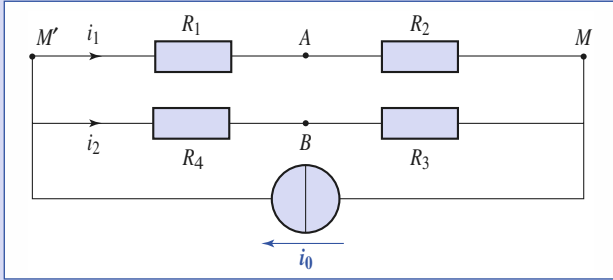
$$u_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_0 \quad \text{et} \quad u_B = \frac{R_3}{R_3 + R_4} e_0.$$

D'où $u_{AB} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) e_0.$



$$u_{AB} = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e_0.$$

• Doc. 2.



La formule de diviseur de courant nous donne :

$$i_1 = i_0 \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \text{ et donc :}$$

$$u_A = R_2 i_1 = i_0 \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Nous obtenons de même u_B et nous en déduisons :

$$u_{AB} = u_A - u_B = i_0 \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

2) a) La résistance interne du voltmètre étant infinie, on est ramené au doc. 2.

$$u_{AB} = I_0 \frac{r(X - R)}{X + R + 2R}.$$

Le pont étant équilibré pour $\theta = 100^\circ \text{C}$:

$$R = X_0(1 + 100a) = 1,04X_0$$

$$X - R = X_0a(\theta - 100)$$

Soit :
$$u_{AB} = I_0 \frac{rX_0a}{X + R + 2r} (\theta - 100).$$

Application numérique : $u_{AB} = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ V}.$

b) Éteignons la source de courant.

Nous aurons u_{AB} par la formule de diviseur de tension :

$$u_{AB} = e_0 \frac{2r}{2r + X + R} \approx e_0 \frac{r}{r + R} \approx e_0.$$

On doit donc avoir $|e_0| < 0,45 \mu\text{V}.$

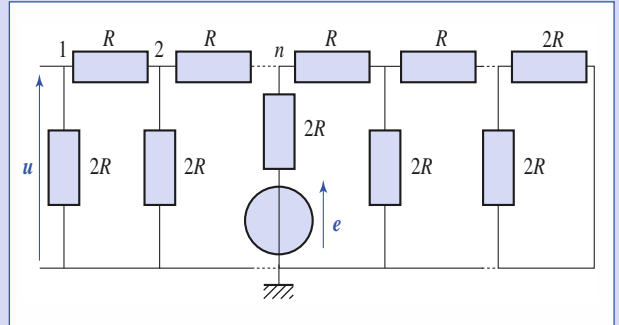
Cette f.e.m. est extrêmement faible et les jonctions doivent être conçues de façon à limiter cet « effet de thermocouple ».



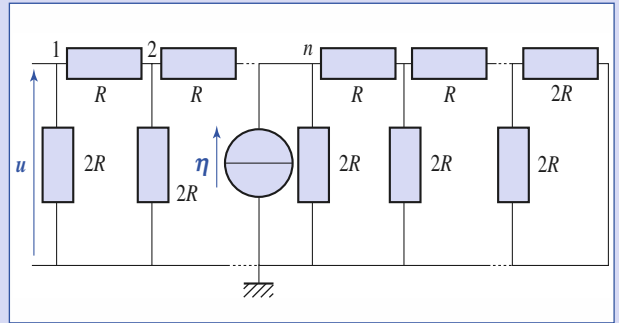
1) Avec huit interrupteurs, on peut réaliser $2^8 - 1$ valeurs de tension différentes de la valeur 0, soit 255 valeurs. Avec le pas de quantification proposé, la tension maximale sera $255 \times 25 \cdot 10^{-3} = 6,375 \text{ V}.$

2) Placer un interrupteur en l'état 1 revient à placer une source de f.e.m e en série avec la résistance $2R$ correspondante. Placer cet interrupteur en l'état 0 revient à éteindre cette source.

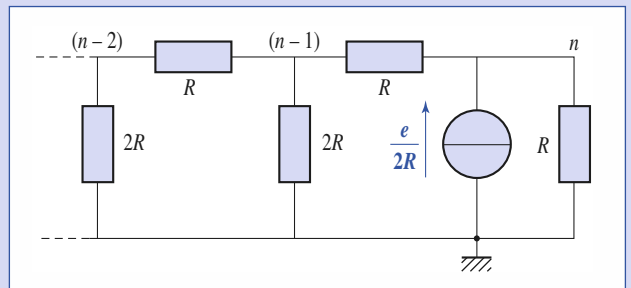
D'après le théorème de superposition (ce sont des sources libres), u est la superposition de tous les états pour lesquels un seul interrupteur est en position 1. On suppose que c'est l'interrupteur n . Le schéma équivalent est alors :



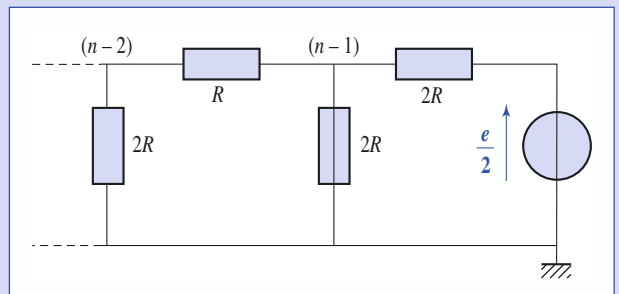
que l'on peut remplacer par le schéma de Norton équivalent avec $\eta = \frac{e}{2R}$:



On raisonne de la droite vers la gauche. On remarque que l'on peut remplacer la dernière boucle par sa résistance équivalente qui est R . En raisonnant ainsi jusqu'à la boucle n , la résistance équivalente à la partie à droite de n est R . On a donc le schéma équivalent :

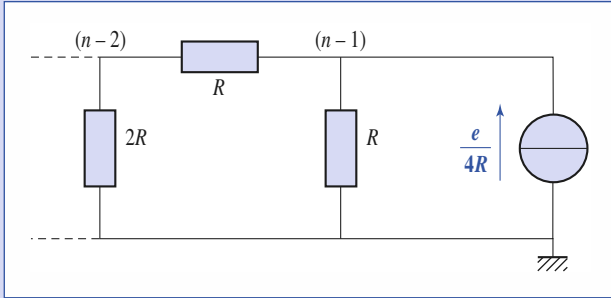


En passant au générateur de Thévenin équivalent :

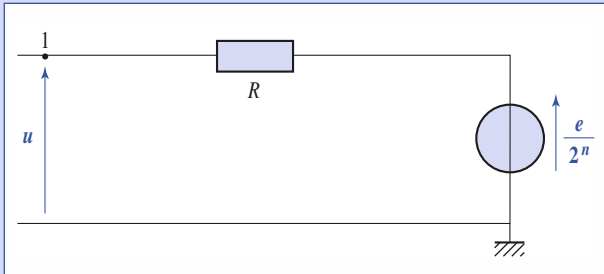


Corrigés

puis au générateur de Norton :



Cette opération peut être réalisée jusqu'à la première boucle. Le montage est donc équivalent à :



En superposant les différents états, le montage est donc équivalent à un générateur de Thévenin de résistance R et de f.e.m. $\frac{xe}{2^8} = 0,025x(V)$, où x est le nombre binaire codant les interrupteurs (pas de quantification 25 mV).

8

1) Pour $i_1 = 0$, la résistance vue entre B et C est $R_2 + R_3$, mais aussi R'_1 en parallèle avec $R'_2 + R'_3$, donc :

$$R_2 + R_3 = \frac{R'_1 (R'_2 + R'_3)}{R'_1 + R'_2 + R'_3} \quad (1)$$

2) De même, nous avons :

$$R_1 + R_2 = \frac{R'_3 (R'_1 + R'_2)}{R'_1 + R'_2 + R'_3} \quad (2)$$

et :

$$R_1 + R_3 = \frac{R'_2 (R'_1 + R'_3)}{R'_1 + R'_2 + R'_3} \quad (3)$$

En formant $(2) + (3) - 2 \times (1)$, nous obtenons :

$$R_1 = \frac{R'_2 R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3}$$

et de même, nous obtiendrons plus généralement :

$$R_i = \frac{R'_j R'_k}{R'_i + R'_j + R'_k} \quad (i, j, k \text{ tous différents}).$$

3) L'équivalence est assurée, par exemple, pour $i_1 = 0$, et pour $i_2 = 0$.

Or, de façon générale : $i_3 = -i_1 - i_2$, donc le cas général (i_1, i_2, i_3) est la superposition des états $(i_1, 0, -i_1)$ et $(0, i_2, -i_2)$, pour lesquels l'équivalence est assurée.

Par superposition, nous voyons que les conditions nécessaires établies sont aussi suffisantes.

Principe et utilisation de quelques appareils de mesure TP Cours

4

Introduction

Beaucoup de mesures physiques se ramènent à la mesure d'une tension ou d'un courant. Les mesures électriques débordent donc largement du cadre de l'électricité au sens strict.

Pour utiliser correctement les appareils, il est nécessaire de connaître leurs propriétés essentielles.

Dans ce chapitre, nous étudierons essentiellement les appareils basés sur une conversion analogique-numérique. C'est le cas, en particulier, des multimètres et des oscilloscopes numériques utilisés en travaux pratiques.

O B J E C T I F S

- Comprendre le principe des appareils de mesure utilisés en travaux pratiques : le multimètre électronique et l'oscilloscope numérique.
- Apprendre à les utiliser correctement lors de mesures de tensions, d'intensités, de résistances et d'impédances.

P R É R E Q U I

- Théorèmes de l'électrocinétique en régime permanent.

Utilisation d'un multimètre

Étudions la notice constructeur de deux multimètres pour en comprendre l'utilisation.

fonction	multimètre « haut de gamme » 200 000 points		
	calibres	précision	impédance chute tension
VDC	200 mV 2 – 20 – 200 – 1 000 V	0,006 % + 2 dgt	1 GΩ
VAC	200 mV 2 – 20 – 200 – 1 000 V RMS bande passante 20 Hz - 100 kHz	de 0,4 % à 3 % suivant la fréquence	1 GΩ
IDC	200 μA 2 – 20 – 200 mA – 2 A	0,1 %	0,2 V
IAC	200 μA 2 – 20 – 200 mA – 2 A bande passante 20 Hz – 20 kHz	0,8 % à 2 %	0,2 V
Ω	200 Ω – 2 – 20 – 200 kΩ 2 – 20 MΩ	0,1 %	V test max 0,6 V
fonction	multimètre « bas de gamme » 2 000 points		
	calibres	précision	impédance chute tension
VDC	200 mV 2 – 20 – 200 – 1 000 V	0,5 % + 1 dgt	10 MΩ
VAC	200 mV 2 – 20 – 200 – 1 000 V bande passante 40 Hz – 5 kHz	de 0,4 % à 3 % suivant la fréquence	10 MΩ
IDC	200 μA 2 – 20 – 200 mA – 2 A	1 % + 4 dgt	0,2 V
IAC	200 μA 2 – 20 – 200 mA – 2 A bande passante 10 Hz – 5 kHz	1,2 % + 4 dgt	0,2 V
Ω	200 Ω 2 – 20 – 200 kΩ – 2 – 20 MΩ	1 % + 4 dgt	V test max 0,6 V



Doc. 1. Multimètre numérique.

- 1 : afficheur LCD 2 000 points ;
- 2 : sélection gammes mA AC ;
- 3 : sélection gammes mA DC ;
- 4 : sélection gammes Ω ;
- 5 : sélection gammes V DC ;
- 6 : sélection gammes V AC ;
- 7 : prise 10 A ;
- 8 : prise mA μA ;
- 9 : prise V Ω ;
- 10 : prise COM.

Doc. 2. Caractéristiques de deux multimètres numériques.

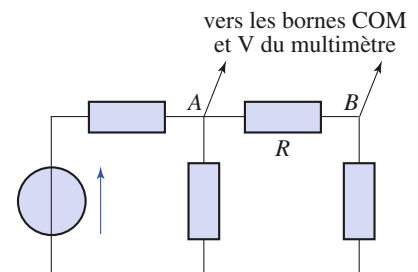
Remarque

Chacun des chiffres de l'afficheur numérique est appelé digit (dgt). Dans les questions de précision, il s'agit du chiffre de plus faible poids de l'afficheur.

1.1. Utilisation en voltmètre DC

1.1.1. Mesure d'une tension constante

La mesure de la différence de potentiel entre deux points A et B d'un circuit s'effectue en plaçant le multimètre en parallèle entre ces deux points (doc. 3).



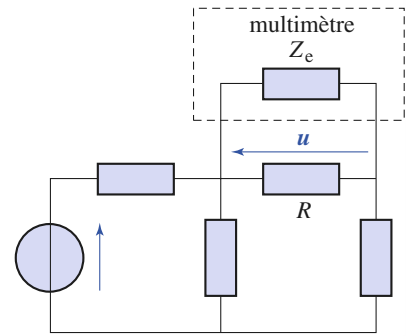
Doc. 3. Mesure de la différence de potentiel aux bornes de la résistance R.

1.1.2. Perturbation du circuit

Le fait de mesurer une tension perturbe le circuit électrique. La perturbation est introduite par l'impédance d'entrée Z_e de l'appareil de mesure (doc. 4).

La valeur mesurée n'est pas exactement la différence de potentiel en l'absence du multimètre. En continu, l'impédance d'entrée du multimètre est équivalente à une résistance supérieure à $10\text{ M}\Omega$.

Un multimètre numérique utilisé en voltmètre perturbe peu le circuit sur lequel s'effectue la mesure (§ 1.1.). Ce n'est plus le cas quand il est utilisé en ampèremètre (§ 1.2.).

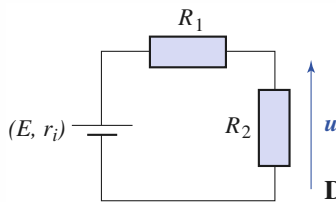


Doc. 4. Le multimètre perturbe la tension à mesurer.

Application 1

Erreur d'insertion d'un multimètre utilisé en voltmètre DC

Dans le montage représenté sur le document 5, un multimètre de résistance interne R_i est utilisé pour mesurer la tension u aux bornes de la résistance R .

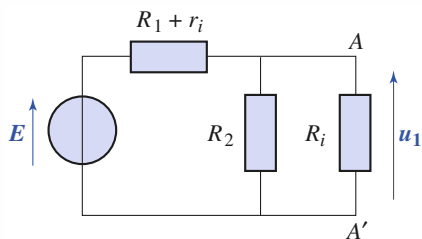


Doc. 5. Pont diviseur.

Déterminer la tension u_1 affichée par le multimètre puis l'erreur relative $\delta = \left| \frac{u_1 - u}{u_1} \right|$ due à la perturbation du circuit par le multimètre.

Faire l'application pour $R_i = 10\text{ M}\Omega$, $r_i = 50\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 1\text{ k}\Omega$ puis $R_1 = R_2 = 10\text{ k}\Omega$ et enfin $R_1 = R_2 = 1\text{ M}\Omega$. Conclure.

Le schéma équivalent avec le multimètre branché est représenté sur le document 6.



Doc. 6. Schéma équivalent.

$$\text{Posons } G_0 = \frac{1}{R_1 + r_i}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2} \text{ et } G_i = \frac{1}{R_i}.$$

La loi des nœuds appliquée en A (ou la relation de Millman) nous donne :

$$u_1 = \frac{G_0 E}{G_0 + G_2 + G_i}.$$

Sans le multimètre, nous aurions :

$$u = \frac{G_0 E}{G_0 + G_2}.$$

L'erreur commise est donc :

$$u_1 - u = -E \frac{G_0 G_i}{(G_0 + G_2 + G_i)(G_0 + G_2)}.$$

D'où l'erreur relative :

$$\delta = \frac{G_i}{(G_0 + G_2)} = \frac{R_2(R_1 + r_i)}{R_i(R_1 + R_2 + r_i)}.$$

Avec les valeurs données nous négligeons r_i .

- $R_1 = R_2 = 1\text{ k}\Omega$: $\delta = 0,01\%$: inférieur à l'incertitude de mesure ;
- $R_1 = R_2 = 100\text{ k}\Omega$: $\delta = 1\%$: un peu supérieure à l'incertitude de mesure du multimètre « bas de gamme » précédent, égale à $0,5\%$;
- $R_1 = R_2 = 1\text{ M}\Omega$: $\delta = 10\%$: perturbation importante.

1.1.3. Choix du calibre

La précision sur une mesure est déterminée par deux facteurs distincts :

- la conversion de la grandeur mesurée en la grandeur effectivement mesurable par le multimètre : une tension de moins de 200 mV, en général. L'erreur comise δ_1 est proportionnelle à la valeur mesurée ;
- la quantification de la mesure lors de la conversion analogique-numérique : l'erreur δ_2 est donnée en digits, de l'ordre de un à quelques digits.

Il en résulte que l'erreur prévisible est de l'ordre de $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Remarque

Un afficheur à 3 digits permet l'affichage de tous les entiers compris entre 000 et 999, c'est-à-dire 10^3 entiers. Il est possible, de façon économique à l'aide d'un « demi-digit », d'afficher le dépassement (0 ou 1) associé au digit de plus grand poids. Dès lors, l'afficheur permet d'afficher $2 \cdot 10^3$ entiers entre 000 et 1999. Un tel afficheur est dit à « 3 digits et demi » ou à 2 000 points de mesure.

Sur ce principe, le « demi-digit » utilisé permet, de plus en plus souvent, d'afficher les chiffres 0, 1, 2, 3. L'afficheur à « 3 digit et demi » est alors un afficheur à 4 000 points de mesure.

Application 2

Erreur d'une mesure de tension continue au multimètre

Un multimètre à 2 000 points de mesure et de précision 0,5 % + 1 digit en voltmètre DC possède les calibres 200 mV, 2 V et 20 V. Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur pour une mesure de tension de 150 mV sur ces trois calibres ?

L'erreur relative de conversion (0,5 %) conduit toujours la même erreur $\delta_1 = 150 \frac{0,5}{100} = 0,75$ mV.

L'erreur de quantification δ_2 s'y ajoute. Pour évaluer cette dernière erreur, examinons l'affichage de la grandeur mesurée avec le calibre :

calibre	affichage	unité	δ_2
200 mV	150,0	mV	0,1 mV
2 V	0,150	V	1 mV
20 V	00,15	V	10 mV

Doc. 7. Évaluation de l'erreur de quantification.

Nous remarquons que les erreurs $\delta = \delta_1 + \delta_2$ sur les calibres 200 mV et 2 V sont voisines. Ces deux calibres pourront être indifféremment utilisés.

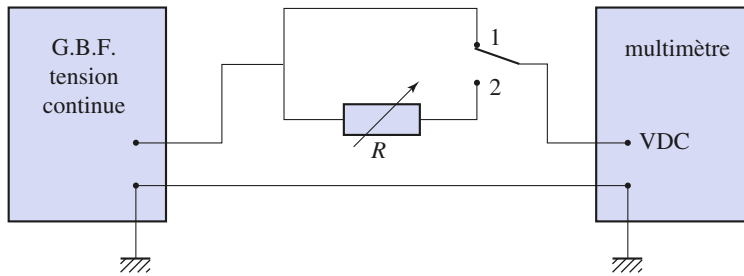
Pour bénéficier du maximum de précision, nous devons utiliser le plus petit calibre permettant d'effectuer la mesure. Sur le calibre 200 mV, le dernier chiffre ne sera pas significatif.

1.1.4. Mesure de la résistance d'un multimètre utilisé en voltmètre DC

Réalisons le montage (doc. 8.) avec un multimètre « bas de gamme » et une boîte de résistances étalonnées (résistance variable R). La source de tension étant un générateur basse fréquence en mode continu, sa résistance interne est négligeable devant celle du multimètre.

Lorsque le commutateur est en position (1), nous lisons V_1 sur le multimètre utilisé en voltmètre DC.

Plaçons le commutateur en position (2) et réglons la résistance R afin de lire $V_2 = \frac{V_1}{2}$. En considérant le diviseur de tension réalisé par R et la résistance R_e du multimètre, nous en déduisons $R_e = R$.



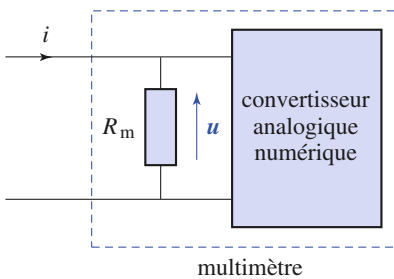
Doc. 8. Circuit de mesure de la résistance d'un multimètre utilisé en voltmètre DC.

1.2. Utilisation en ampèremètre DC

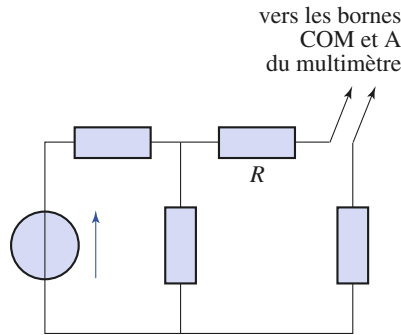
1.2.1. Principe de la mesure d'une intensité continue

Le convertisseur analogique-numérique d'un multimètre ne peut mesurer directement qu'une tension. Il est donc nécessaire d'utiliser la chute de potentiel aux bornes d'un résistor R_m connu pour mesurer une intensité (doc. 9). La valeur maximale de cette chute de tension est donnée dans la notice constructeur.

La mesure de l'intensité dans une branche de circuit s'effectue en plaçant le multimètre en série avec les éléments de la branche étudiée (doc. 10).



Doc. 9. La résistance R_m convertit le courant i à mesurer en une tension u mesurable par le convertisseur.



Doc. 10. Mesure de l'intensité traversant R .

1.2.2. Perturbation du circuit

La perturbation introduite par la mesure d'une intensité n'est négligeable que si une chute de potentiel aux bornes de l'appareil de mesure est sans importance pour le circuit étudié.

1.2.3. Choix du calibre

Le calibre utilisé doit être le fruit d'un compromis entre un maximum de chiffres affichés et un minimum de perturbation du circuit. La meilleure façon de procéder consiste souvent à diminuer le calibre jusqu'à ce que la valeur affichée ne soit plus compatible avec celle du calibre suivant.



Doc. 11. Pince ampèremétrique.

Application 3

Résistance d'entrée d'un multimètre utilisé en ampèremètre DC

Calculer les valeurs des résistances correspondant au calibre 200 mA, 20 mA, 2 A et 20 A d'un multimètre en ampèremètre DC, et dont la chute de tension maximale est 0,2 V. Quelles remarques pouvez-vous faire ?

Pour le calibre 200 μ A, nous avons une résistance $R_m = \frac{0,2}{200 \cdot 10^{-6}} = 1\ 000\ \Omega$, pour le calibre 20 mA,

elle vaut $R_m = 10\ \Omega$, pour le calibre 2 A, $R_m = 0,1\ \Omega$ et enfin, pour le calibre 20 A, $R_m = 0,01\ \Omega$.

La résistance correspondant au calibre 200 μ A est importante ; elle ne pourra être que rarement négligée.

La résistance correspondant au calibre 20 A est très faible : elle est donc difficilement réalisable. Les fortes intensités sont, en général, mesurées avec des pinces ampèremétriques (doc. 11). Ces dernières utilisent le champ magnétique créé par le courant à mesurer, ce qui présente l'avantage de ne pas avoir à modifier le circuit électrique sur lequel s'effectue la mesure.

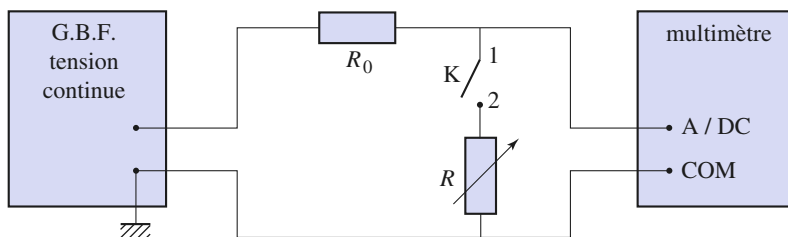
1.2.4. Mesure de la résistance d'un multimètre utilisé en ampèremètre DC

Réalisons le montage représenté sur le document 14, avec une résistance R_0 assez élevée pour que la source débite la même intensité, que l'interrupteur K soit ouvert ou fermé. La source est un générateur basse fréquence délivrant une tension continue que nous réglerons de sorte à utiliser le multimètre sur le calibre 2 mV. La résistance variable R est réalisée avec une boîte de résistances étalonnées.

Lorsque l'interrupteur K est ouvert, nous lisons i_1 sur le multimètre.

Fermons l'interrupteur K et réglons la résistance variable R de sorte que le multimètre affiche $i_2 = \frac{i_1}{2}$.

Considérant que la résistance d'entrée R_e du multimètre et la résistance variable R forment un diviseur de courant, nous en déduisons que $R_e = R$.

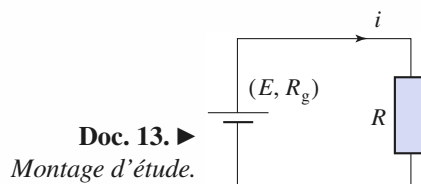


◀ Doc. 12. Principe de la mesure de la résistance d'un multimètre utilisé en ampèremètre DC.

Application 4

Erreur d'insertion d'un multimètre utilisé en ampèremètre DC

Soit le montage représenté sur le document 13 : un générateur de f.e.m. E et de résistance interne R_g alimente une résistance R . Un multimètre de résistance interne R_i est utilisé pour mesurer l'intensité du courant i . Soit i_1 la valeur affichée par le multimètre.

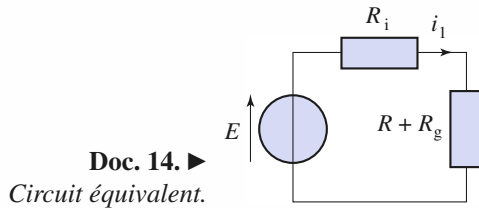


Doc. 13. ▶ Montage d'étude.

1) Déterminer l'erreur relative $\delta = \left| \frac{i_1 - i}{i_1} \right|$ due à la perturbation du circuit par le multimètre.

2) Calculer cette erreur relative pour $E = 8 \text{ V}$, $R = 2 \text{ k}\Omega$, $R_g = 10 \Omega$ en utilisant les calibres, 20 mA, 200 mA et 2 A d'un multimètre dont la chute de tension maximale est de 0,2 V.

1) Le schéma équivalent avec le multimètre branché est représenté sur le document 14.



$$i_1 = \frac{E}{R_i + R + R_g}$$

Sans le multimètre, nous aurions :

$$i = \frac{E}{R + R_g}$$

L'erreur commise est donc :

$$i_1 - i = -E \frac{R_i}{(R_i + R + R_g)(R + R_g)}$$

D'où l'erreur relative : $\delta = \frac{R_i}{R + R_g}$.

2) Le courant est de l'ordre de 4 mA : les trois calibres semblent convenir.

• Calibre 2 A :

$$R_i = \frac{\text{chute maximale de tension}}{\text{calibre}} = 0,1 \Omega ;$$

$$\delta = 0,005 \%$$

• Calibre 200 mA : $R_i = 1 \Omega$; $\delta = 0,05 \%$.

• Calibre 20 mA : $R_i = 10 \Omega$; $\theta = 0,5 \%$.

Attention : Le choix du calibre doit aussi tenir compte de la quantification de l'affichage.

	calibres	20 mA	200 mA	2 A
	erreur d'insertion	0,5 %	0,05 %	0,005 %
multimètre « haut de gamme »	erreur de quantification 1 dgt	0,002 %	0,02 %	0,2 %
multimètre « bas de gamme »	erreur de quantification 4 dgt	1 %	10 %	100 %

Doc. 15

D'après ce tableau, et compte tenu de la précision de conversion (0,1 % pour le « haut de gamme » et 1 % pour le « bas de gamme »), nous devons utiliser le multimètre « haut de gamme » sur le calibre 200 mA et l'autre sur le calibre 20 mA.

Ce tableau nous permet de voir que, dans aucun cas, la somme de l'erreur d'insertion et de l'erreur de quantification n'est inférieure à l'erreur donnée par le constructeur. Il n'est donc pas possible d'avoir la même précision pour les mesures d'intensités que pour celles de tension.

Un multimètre numérique utilisé en voltmètre perturbe peu le circuit sur lequel s'effectue la mesure (§ 1.1.). Ce n'est plus le cas quand il est utilisé en ampèremètre (§ 1.2.).

1.3. Mesure de grandeurs variables

1.3.1. Que pouvons-nous mesurer ?

Nous ne pouvons pas mesurer de grandeurs variant rapidement, car le temps mis pour effectuer une mesure n'est pas négligeable ($\approx 1 \text{ s}$).

Il est tout de même possible de mesurer des grandeurs indépendantes du temps caractéristiques de signaux périodiques.

1.3.2. Grandeurs mesurables

définition	expression
La tension maximale U_{\max}	$U_{\max} = \text{Max}(u(t))$
La tension minimale U_{\min}	$U_{\min} = \text{Min}(u(t))$
La valeur moyenne U_{moy}	$U_{\text{moy}} = \langle u(t) \rangle = \frac{1}{T_m} \int_t^{t+T_m} u(t) dt$
La valeur quadratique moyenne « vraie » (ou efficace « vraie ») U_{eff} (directement liée à la puissance) : c'est la valeur TRMS (<i>True Root Mean Square</i>), valeur quadratique moyenne du signal complet.	$U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u(t)^2 \rangle}$ $= \sqrt{\frac{1}{T_m} \int_t^{t+T_m} u(t)^2 dt}$
La valeur quadratique moyenne (ou efficace) de la composante variable $U_{\text{eff},\neq}$: c'est la valeur RMS (<i>Root Mean Square</i>), valeur quadratique moyenne de la partie alternative (de valeur moyenne nulle) du signal.	$U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle (u(t) - U_{\text{moy}})^2 \rangle}$ $= \sqrt{\frac{1}{T_m} \int_t^{t+T_m} (u(t) - U_{\text{moy}})^2 dt}$

Doc. 16. Définition des grandeurs mesurables.

Dans les expressions, T_m représente la durée (caractéristique de l'appareil de mesure) sur laquelle est traité le signal.

1.3.3. Quels sont les « appareils » disponibles pour effectuer ces mesures ?

Nous disposons d'appareils à cadre mobile (avec choix des entrées « DC » et « AC »), des appareils « RMS » (avec choix des entrées « DC » et « AC »), et des appareils « TRMS » (avec choix des entrées « DC », « AC » et « AC + DC »).

Étudions les propriétés de ces appareils :

	« DC »	« AC »	« AC + DC »
appareils à cadre mobile :	valeur 0 quel que soit le signal	valeur efficace <i>uniquement pour un signal sinusoïdal</i> (la valeur affichée est la tension U_{\max} divisée par $\sqrt{2}$)	commande inexistante pour cet appareil
« RMS »	valeur 0 quel que soit le signal	valeur efficace « RMS » quel que soit le signal	commande inexistante pour cet appareil
« TRMS »	valeur 0 quel que soit le signal	valeur efficace « RMS » quel que soit le signal	valeur efficace « TRMS » (ou « RMS » car $U_{\text{moy}} = 0$) quel que soit le signal

Doc. 17. Signal $u(t)$ de valeur moyenne nulle.

	« DC »	« AC »	« AC + DC »
appareils à cadre mobile :	utilisation impossible	utilisation impossible	commande inexistante pour cet appareil
« RMS »	U_{moy} quel que soit le signal	valeur « RMS » $U_{\text{eff},\neq}$ quel que soit le signal	commande inexistante pour cet appareil
« TRMS »	U_{moy} quel que soit le signal	valeur « RMS » $U_{\text{eff},\neq}$ quel que soit le signal	valeur « TRMS » U_{eff} quel que soit le signal

Doc. 18. Signal $u(t)$ de valeur moyenne non nulle.

Soit un signal $u(t)$ alternatif de valeur moyenne U_{moy} non nulle ; la valeur efficace de la partie alternative $v(t) = u(t) - U_{\text{moy}}$ est $U_{\text{eff}, \approx}$.
Cherchons une relation entre ces grandeurs et U_{eff} valeur efficace du signal complet :

$$\begin{aligned} \langle u(t)^2 \rangle &= \langle v(t)^2 + 2U_{\text{moy}}v(t) + U_{\text{moy}}^2 \rangle = \langle v(t)^2 \rangle + 2U_{\text{moy}}\langle v(t) \rangle + U_{\text{moy}}^2 \\ &= U_{\text{eff}, \approx}^2 + U_{\text{moy}}^2 . \end{aligned}$$

Car $\langle v(t) \rangle = 0$, ce qui donne : $U_{\text{eff}} = \sqrt{U_{\text{eff}, \approx}^2 + U_{\text{moy}}^2}$.

Ainsi :

Un multimètre en calibre « DC » mesure la composante continue d'un signal.

Un multimètre (« RMS » ou « TRMS ») en calibre « AC » mesure la valeur efficace de la composante alternative.

Un multimètre (« TRMS ») en calibre « AC + DC » mesure la valeur efficace vraie du signal.

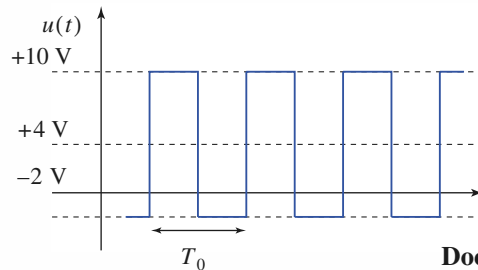
Pour des raisons de coût, de nombreux multimètres mesurent soit la valeur de crête u_m , soit la valeur moyenne absolue $\langle |u(t)| \rangle$ du signal et ils utilisent la proportionnalité entre ces grandeurs et la valeur efficace en *supposant que le signal est sinusoïdal*. La constante de proportionnalité, appelée *facteur de*

Application J

Réponses de divers appareils présentés

Soit le signal créneau de valeur moyenne non nulle ci-contre :

On dispose de deux voltmètres « RMS » (calibres « AC » et « DC »), et « TRMS » (calibres (« AC », « DC », « AC + DC »)). Quelles seront les indications de ces appareils ?



Doc. 19.

En fonction des indications précédentes, nous aurons les résultats suivants :

appareil + calibre	opération	résultat
« RMS » + « DC » et « TRMS » + « DC »	valeur moyenne U_{moy}	$U_{\text{moy}} = 4 \text{ V}$
« RMS » + « AC » et « TRMS » + « AC »	valeur efficace de la partie alternative, signal créneau de valeur moyenne nulle, et d'amplitude 6 V : $U_{\text{eff}, \approx} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \left[(+6)^2 \cdot \frac{T_0}{2} + (-6)^2 \cdot \frac{T_0}{2} \right]} = 6 \text{ V}$	$U_{\text{eff}, \approx} = 6 \text{ V}$
« TRMS » + « AC + DC »	valeur efficace du signal complet : $U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \left[(+10)^2 \cdot \frac{T_0}{2} + (-2)^2 \cdot \frac{T_0}{2} \right]} = \sqrt{52} = 7,21 \text{ V}$	$U_{\text{eff}} = 7,2 \text{ V}$

On vérifie bien que $52 = 4^2 + 6^2$!

Doc. 20.

crête dans le premier cas, est $F_c = \frac{U}{u_m}$. Dans le second cas, la constante de proportionnalité $F_m = \frac{U}{\langle |u(t)| \rangle}$ est appelée *facteur de forme*.

1.3.4. Que penser de la valeur affichée ?

Nous devons veiller à trois points pour apprécier l'indication d'un multimètre :

- le multimètre perturbe la grandeur mesurée de la même manière qu'en continu : erreur d'insertion ;
- si le signal étudié n'est pas sinusoïdal, le résultat donné par un multimètre non « efficace vrai » sera faux ;
- un multimètre a une bande passante limitée : nous devons l'utiliser dans le domaine de fréquences prévu par le constructeur. D'où l'intérêt de lire la notice du multimètre. Il est, par exemple, impossible d'utiliser le multimètre « bas de gamme » pour tracer le diagramme de Bode d'un montage dans le domaine 20 Hz – 20 kHz.

1.4. Utilisation en ohmmètre

1.4.1. Principe de la mesure d'une résistance

Une fois de plus, il est nécessaire de mesurer une tension. Il nous suffit de disposer d'un générateur de courant d'intensité η connue et de mesurer la différence de potentiel u aux bornes du dipôle. Nous aurons alors $R = \frac{u}{\eta}$.

1.4.2. Perturbation du circuit

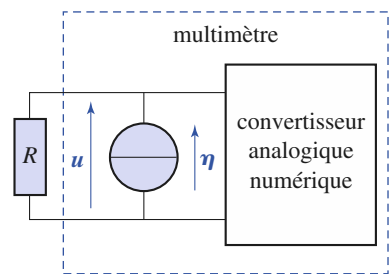
L'ohmmètre, appliqué aux bornes d'un dipôle, injecte un courant dans le circuit auquel le dipôle appartient. De ce fait, l'ohmmètre perturbe le circuit. En outre, la différence de potentiel, qui existe aux bornes du dipôle, est fonction de tout le circuit et non seulement de la résistance du dipôle.

Il est impossible de mesurer la résistance d'un dipôle branché dans un circuit !

1.5. Mesure d'impédances à l'aide d'un multimètre

Par définition, l'impédance Z d'un dipôle linéaire passif est égale au rapport de la tension maximale et du courant maximal en régime sinusoïdal :

$$Z = \frac{u_m}{i_m}$$



Doc. 21. Principe du multimètre utilisé en ohmmètre.

Application 6

Valeurs des c.e.m. d'un multimètre utilisé en ohmmètre

Calculer, pour les calibres 200 Ω, 20 kΩ et 20 MΩ, le c.e.m. du générateur de courant d'un ohmmètre, dont la tension maximale de test est 0,6 V.

Utilisons la relation $\eta = \frac{u}{R}$, d'où pour le calibre

200 Ω, $\eta = 3$ mA, pour le calibre 20 kΩ, $\eta = 30$ nA, et pour le calibre 20 MΩ, $\eta = 30$ pA.

Nous remarquons que pour mesurer de grandes valeurs de résistance l'intensité devient très faible, il faut donc augmenter la tension de test pour mesurer les très grandes résistances.

Nous étudierons cette notion au *chapitre 6* ; nous nous limitons ici à l'aspect expérimental.

Il s'agit de mesurer l'impédance Z d'un dipôle pour une tension sinusoïdale de fréquence compatible avec la bande passante du multimètre.

Nous devons simultanément mesurer l'intensité qui traverse le dipôle ainsi que la différence de potentiel à ses bornes. Nous utiliserons donc deux multimètres l'un en ampèremètre, l'autre en voltmètre. Deux montages sont possibles.

■ **Montage courte dérivation**

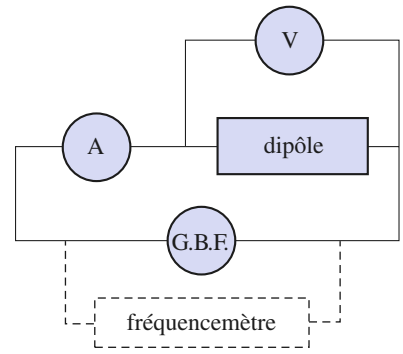
Le courant mesuré effectivement par l'ampèremètre est la somme des courants traversant le dipôle et le voltmètre (*doc. 22*).

■ **Montage longue dérivation**

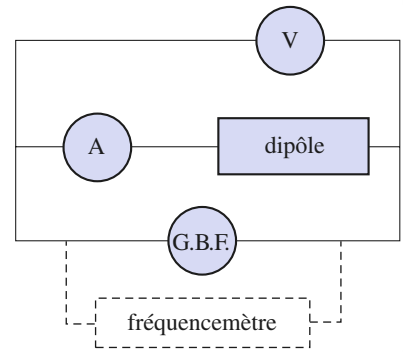
La différence de potentiel effectivement mesurée par le voltmètre est la somme des différences de potentiel aux bornes du dipôle et de l'ampèremètre (*doc. 23*).

Le courant qui traverse un voltmètre numérique est très faible (résistance interne de 10 MΩ), alors que la chute de potentiel aux bornes d'un ampèremètre n'est souvent pas négligeable.

Pour la mesure d'une impédance, seul le montage courte dérivation est à employer avec des multimètres numériques.



Doc. 22. Montage courte dérivation.



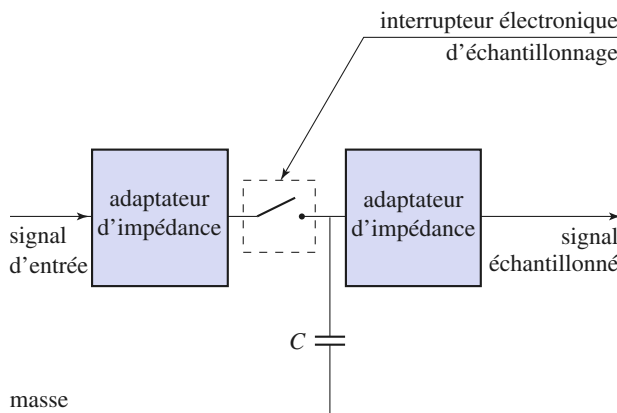
Doc. 23. Montage longue dérivation.

2 Principe de la conversion d'une tension en une grandeur numérique

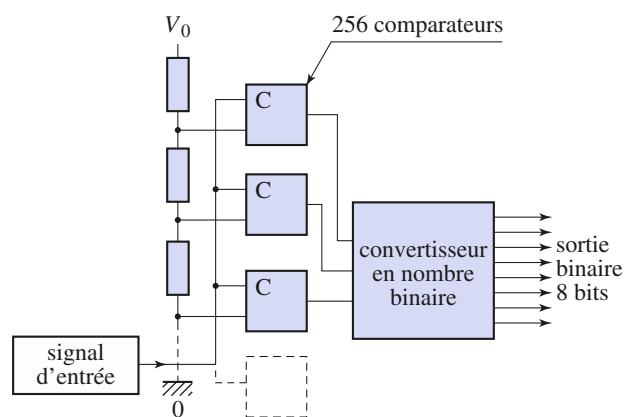
L'idée de base dans la conversion analogique-numérique d'une tension est de la comparer à des tensions de référence directement liées à une grandeur numérique. Pour éviter une variation du signal à mesurer pendant la conversion, il est mémorisé à l'aide d'un circuit appelé échantillonneur bloqueur (*doc. 24*).

2.1. Convertisseur « flash »

Ce convertisseur est basé sur la comparaison simultanée de la tension à n (souvent du type 2^p) valeurs de référence. Pour $p = 8$ (valeur la plus courante), 256 comparateurs sont nécessaires (*doc. 25*).



Doc. 24. Principe d'un échantillonneur bloqueur. Le condensateur C mémorise la tension d'entrée et fige le signal à convertir pendant la durée de la mesure.



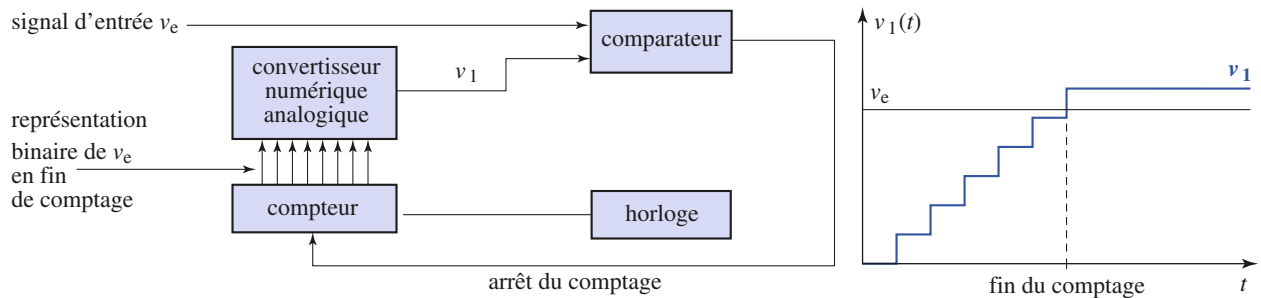
Doc. 25. Convertisseur « flash » ($p = 8$).

Il est très rapide mais coûteux et est utilisé uniquement dans les montages nécessitant des conversions rapides, par exemple dans les oscilloscopes à mémoire numérique (temps de conversion 20 ns).

2.2. Convertisseur série

Dans ce convertisseur, la tension est comparée successivement à n valeurs de référence. Ces dernières valeurs peuvent être produites par un convertisseur numérique-analogique C.N.A.

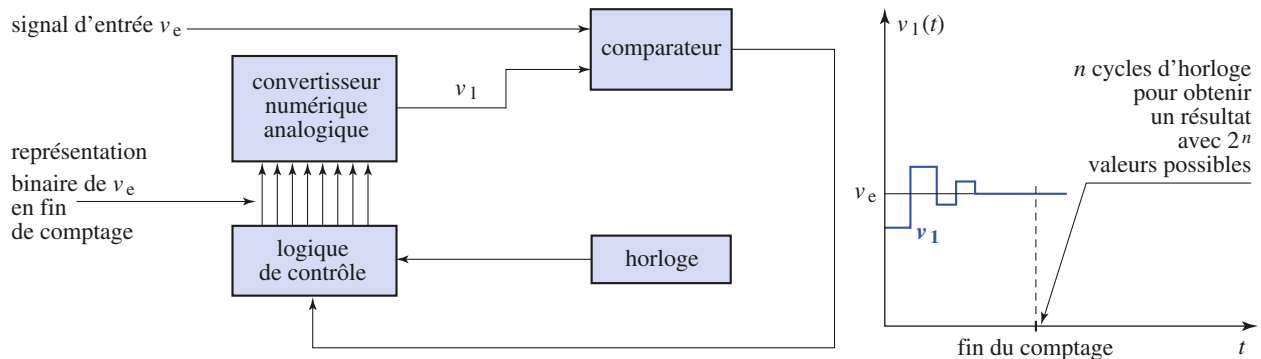
Il ne nécessite qu'un seul comparateur (doc. 26), mais le temps de conversion analogique-numérique est long. Il vaut en moyenne $\frac{n}{2}$ fois le temps nécessaire à une comparaison.



Doc. 26. Convertisseur série. Le compteur s'arrête quand le signal de sortie du C.N.A. est supérieur au signal d'entrée. La représentation binaire de celui-ci est alors présente à la sortie du compteur.

2.3. Convertisseur par approximations successives (SAR : Successive Approximations Registers)

La tension à mesurer est comparée à une tension produite par un convertisseur numérique-analogique C.N.A., dont la valeur numérique est fournie par un circuit logique de contrôle. Il permet une mesure par dichotomie de cette tension et élabore le nombre binaire la représentant (doc. 27).

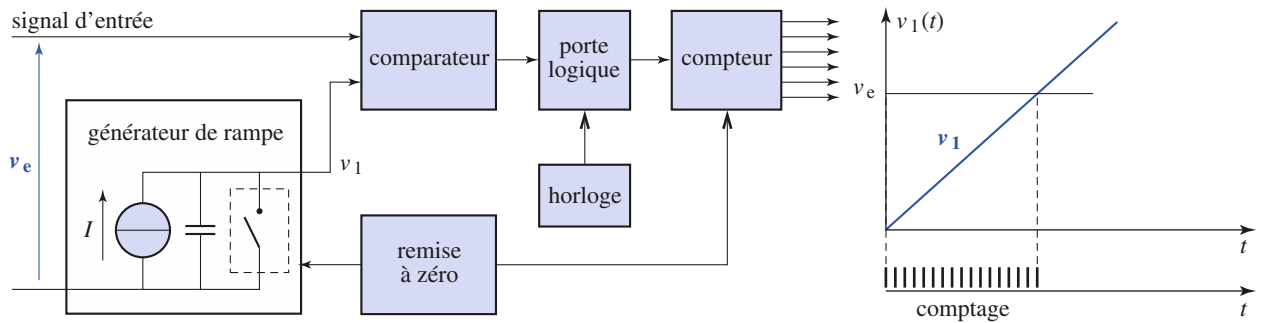


Doc. 27. Convertisseur par approximations successives.

2.4. Convertisseur simple rampe

La tension étudiée est comparée à une rampe de tension. Le temps nécessaire à obtenir l'égalité des tensions est mesuré à l'aide d'un compteur relié à une horloge (doc. 28).

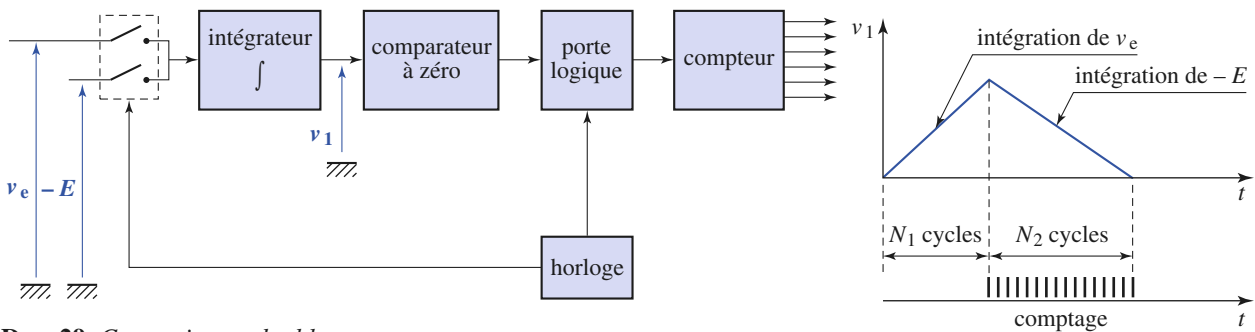
Le temps de conversion est proportionnel à la tension à mesurer. Ce convertisseur est lent.



Doc. 28. Convertisseur simple rampe.

2.5. Convertisseur double rampe

Le compteur précédent est simple, mais sa précision dépend de la capacité utilisée pour créer la rampe, et de la stabilité de la fréquence de l'horloge. Pour éliminer les dérives dues à ces deux éléments, le montage est modifié comme indiqué sur le document 29.



Doc. 29. Convertisseur double rampe.

Pendant une durée déterminée correspondant à un nombre N_1 d'impulsions d'horloge, le signal v_e est appliqué à un intégrateur. Ensuite, une tension de référence $-E$ est appliquée à l'intégrateur jusqu'à une tension de sortie de l'intégrateur nulle.

Si N_2 est le nombre d'impulsions correspondant à la deuxième étape, $v_e = E \frac{N_2}{N_1}$ (cf. exercice 3). Pour ce convertisseur, la capacité et la fréquence d'horloge n'interviennent pas sur le résultat affiché si on suppose qu'il n'y a pas de dérive de ces deux éléments pendant le temps de la mesure.

Ce type de convertisseur est couramment utilisé dans les multimètres numériques. La lenteur du convertisseur ne constitue pas une gêne, car, pour éviter le clignotement de l'affichage, les mesures sont effectuées environ une fois par seconde.

2.6. Précision des convertisseurs

Les convertisseurs analogiques numériques utilisés introduisent une erreur, liée à la quantification de l'information, de l'ordre du pas de quantification (ou unité relative).

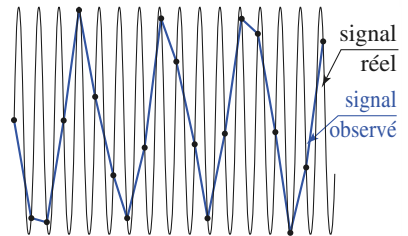
Mais elle est, en général, très inférieure aux erreurs introduites par la non-linéarité du convertisseur. L'erreur de conversion δ est la somme de l'erreur de non-linéarité δ_1 (de l'ordre de 0,005 % à 0,5 % de la valeur mesurée) et de l'erreur δ_2 de quantification (de l'ordre de quelques unités relatives).

En conclusion, une mesure sera d'autant plus précise que la valeur affichée sera proche de la valeur maximale affichable.

Le temps d'acquisition d'une mesure interdit la mesure de tensions rapidement variables.

Un oscilloscope numérique de fréquence d'échantillonnage de $f_e = 40$ MHz ne permet pas de mettre en évidence des événements de durée inférieure à $\delta t = \frac{1}{f_e} = 25$ ns. De plus, il ne permet pas de restituer un signal sinusoïdal

de fréquence supérieure à $\frac{f_e}{2} = 20$ MHz (doc. 30). La limite d'utilisation se situe vers 2 MHz.



Doc. 30. Effet d'un « sous-échantillonnage » : la fréquence d'échantillonnage est inférieure au double de la fréquence du signal. (Chaque point représente un échantillonnage.) Le signal observé est tout à fait différent du signal réel.

Un échantillonnage à la fréquence f_e interdit toute étude d'un signal de fréquence supérieure à $\frac{f_e}{2}$.

Une carte d'acquisition standard pour micro-ordinateur a une période d'échantillonnage de 10 μ s environ, ceci donne une limite d'utilisation de 10 kHz. L'échantillonnage des sons par un disque compact est réalisé à 40 kHz ; peu d'oreilles sont sensibles aux sons de fréquence supérieure à 16 kHz.

3 Principe et utilisation d'un oscilloscope

3.1. Principe d'un oscilloscope analogique

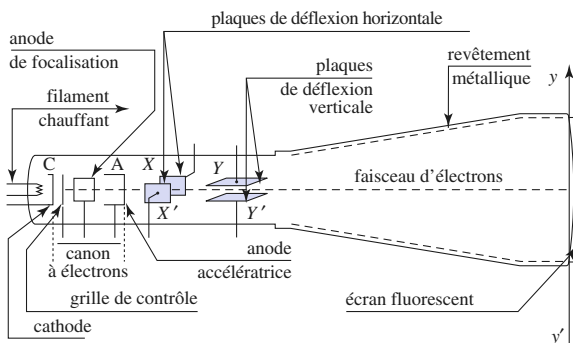
Un appareil de mesure est dit « analogique » lorsque la grandeur à mesurer est repérée par une autre grandeur qui varie de façon continue.

Un voltmètre à aiguille est un appareil analogique : le déplacement de l'aiguille est une fonction continue de la tension.

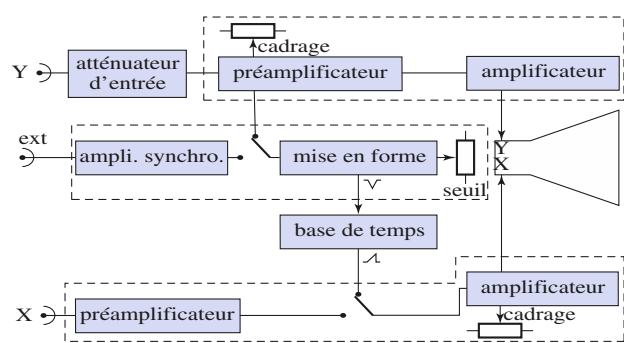
Par opposition, un appareil numérique convertit la grandeur à mesurer en un nombre qui est stocké dans une mémoire numérique.

L'élément principal d'un oscilloscope analogique est le tube cathodique, dans lequel la déviation électrostatique des électrons est réalisée par deux paires de plaques : les plaques de déviation horizontale et verticale (doc. 31).

Le principe d'un oscilloscope classique est donné sur le document 32.



Doc. 31. Tube cathodique.



Doc. 32. Principe d'un oscilloscope.

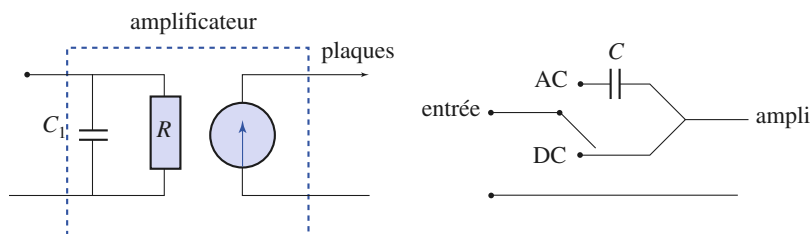
3.2. Signaux d'entrée

Le signal d'entrée (voie 1 ou 2) est calibré par un amplificateur (de 5 mV à 20 V par division) d'impédance d'entrée souvent équivalente à une résistance de 1 M Ω en parallèle avec un condensateur de 30 à 50 pF (*doc.* 33a).

Le branchement d'un oscilloscope pour mesurer une différence de potentiel perturbe le circuit de la même façon qu'un multimètre utilisé en voltmètre. Cette perturbation doit être prise en compte dans certains montages.

Remarque : La composante continue d'un signal peut masquer sa composante variable. Que dire d'un signal variable d'amplitude 10 mV « noyé » sous une composante continue de 10 V ?

La touche AC/DC de la voie étudiée permet de résoudre ce type de problème ; la composante continue du signal est éliminée en mode AC (*doc.* 33b). Attention, en mode AC le signal est filtré par un filtre passe-haut, dont la fréquence de coupure est d'une dizaine de hertz. **Ce mode ne doit être utilisé qu'exceptionnellement.**



Doc. 33a. Impédance d'entrée de l'amplificateur. **Doc. 33b.** Entrées AC et DC d'un oscilloscope.

Les impédances d'entrée d'un oscilloscope sont les suivantes, avec les ordres de grandeur standard suivants : $C_1 \approx 30$ pF ; $C_2 \approx 0,25$ μ F ; $R \approx 1$ M Ω (*doc.* 34) :

Remarque

Le bouton de positionnement de la voie ajoute une composante continue à la valeur appliquée aux plaques de déviation. Lors des mesures, la position du zéro de la voie doit être connue. Pour la visualiser, il suffit d'utiliser la touche GRND (ground ou masse) de la voie (une tension nulle est alors appliquée).

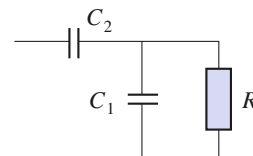
3.3. Base de temps et synchronisation

Dans le mode balayage, une tension en dents de scie est appliquée sur les plaques de déviation horizontale. Le spot se déplace à vitesse constante de la gauche vers la droite. Cette vitesse est choisie en utilisant le bouton « base de temps » qui permet le contrôle de la vitesse de balayage en seconde par division. Pendant son retour (rapide), le faisceau électronique est éteint.

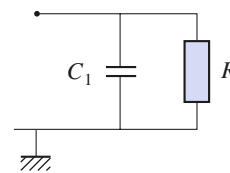
Remarque : La base de temps permet d'imprimer au spot des vitesses très élevées. Par exemple, sur la division 1 μ s . div⁻¹ (en position « calibrée »), le spot parcourt une division (généralement de 1 cm) en 1 μ s, c'est-à-dire à la vitesse

$$v = \frac{10^{-2}}{10^{-6}} = 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} !$$

Un signal périodique ne peut être visualisé de façon stable que si la période de la dent de scie est asservie à celle du signal. C'est le but de la synchronisation. Le spot attend que le signal servant à la synchronisation passe par zéro ou par une valeur fixée par le réglage du seuil avec une pente déterminée positive ou négative (bouton +/- de la base de temps) pour effectuer son trajet de gauche à droite (*doc.* 35).



Doc. 34a. Mode

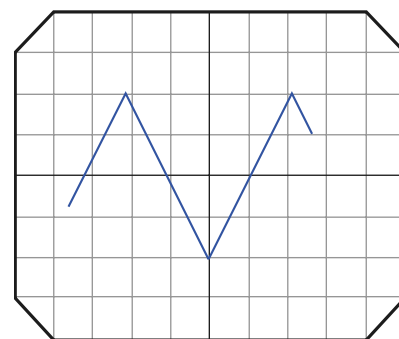
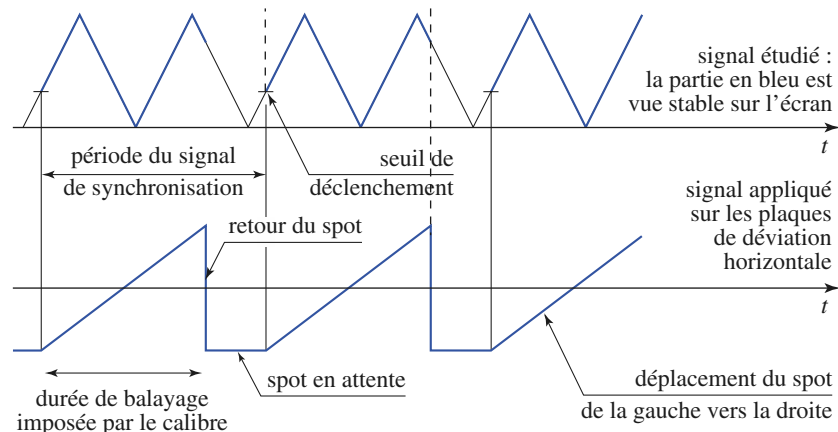


Doc. 34b. Mode DC.

Plusieurs modes de synchronisation existent. En voici quelques-uns :

- mode DC (*direct current*) : le signal est prélevé, puis directement mis en forme pour la synchronisation ;
- mode AC (*alternative current*) : seule la composante variable du signal est conservée ;
- mode LF (*low frequency*) ou basse fréquence : seule la composante basse fréquence du signal est conservée ;
- mode HF (*high frequency*) ou haute fréquence : seule la composante haute fréquence est conservée.

Dans la plupart des montages utilisés le mode LF donne les meilleurs résultats.



Doc. 35b. Aspect du signal observé sur l'écran.

Doc. 35a. Synchronisation de la base de temps.

Le signal servant à la synchronisation peut être soit :

- le signal de la voie 1 ;
- le signal de la voie 2 ;
- un signal extérieur.

Si nous utilisons le mode balayage, nous devons synchroniser la base de temps sur le signal de plus grande amplitude.

En particulier, il est souvent intéressant de se placer en mode synchronisation extérieure avec comme signal celui de la sortie « synchro » du générateur basse fréquence.

3.4. Fonctionnement bicourbe d'un oscilloscope

Seuls les oscilloscopes bicourbes haut de gamme possèdent un double canon à électrons et un double système de déviation. Les oscilloscopes classiques utilisent deux méthodes pour tracer « simultanément » deux courbes (doc. 36).

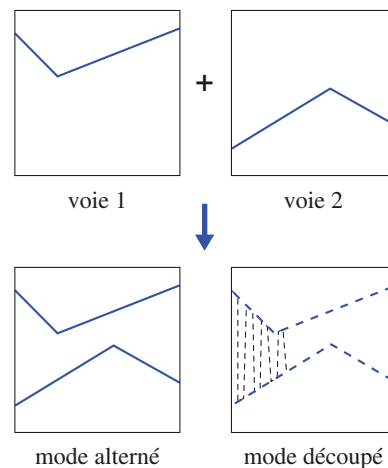
■ Le mode alterné

Après chaque retour de balayage, la voie tracée à l'écran est changée. Ce mode n'est possible que si la durée du balayage est petite (moins de 0,1 s) pour éviter le clignotement. Le signal 1 est décrit, puis 2, puis 1, etc. mais trop lentement et l'œil perçoit ces basculements de l'un à l'autre.

■ Le mode découpé (*chopped*)

Le changement de voie se fait plusieurs fois par période de balayage à une fréquence de 500 kHz environ. Ce mode n'est possible que si la période du signal est grande devant celle de découpage.

L'oscilloscope choisit souvent automatiquement le mode en fonction de la base de temps.



Doc. 36. Affichage de deux courbes simultanément.

3.5. Mesures en mode balayage

Le mode balayage permet d'observer et de mesurer l'amplitude et la fréquence d'un signal périodique en utilisant les calibres de la voie et de la base de temps.

Application 7

Analyse d'un signal

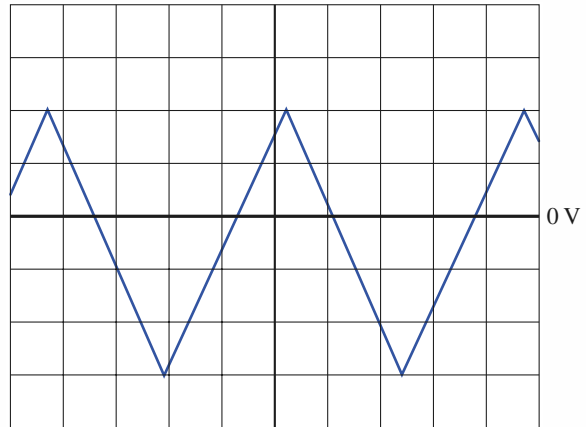
Que pouvez-vous dire du signal représenté dans le document 37 ?

Sa période est de 4,5 divisions, soit 4,5 ms ; l'amplitude crête à crête de sa composante alternative est de 5 divisions, soit 10 V. La connaissance de la position du zéro est nécessaire pour détecter une éventuelle composante continue ; en toute hypothèse, le mode utilisé n'est pas le mode AC puisque la valeur moyenne du signal n'est pas nulle.

Doc. 37. ►

Réglages : balayage horizontal : $1 \text{ ms} \cdot \text{div}^{-1}$.

Voie Y_1 : $2 \text{ V} \cdot \text{div}^{-1}$.



Le mode bicourbe permet aussi de mesurer le déphasage entre deux signaux (doc. 38). Si L est la longueur correspondant à une période et ℓ celle qui correspond au déphasage φ , alors $\varphi = 360 \frac{\ell}{L}$ en degré ou $\varphi = 2\pi \frac{\ell}{L}$ en radian.

Cette mesure peut être améliorée dans le cas des petits déphasages en utilisant une demi-période.

Remarque

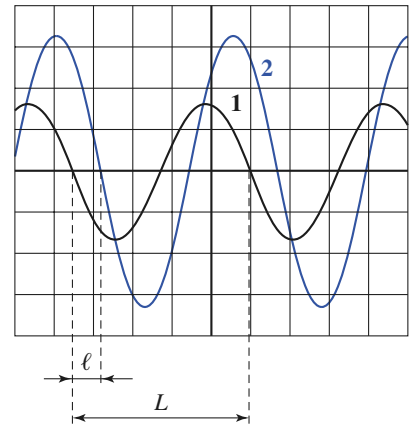
En pratique, il est commode de jouer sur la calibration de la base de temps de façon à amener la longueur d'une demi-période à **9 carreaux**.

De cette façon on mesure directement un déphasage de 20° par carreau de décalage entre deux signaux.

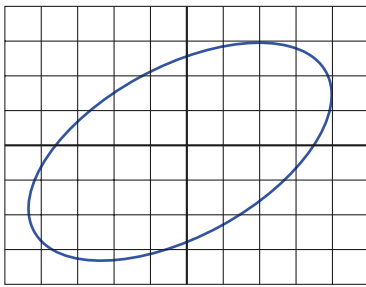
Cette méthode n'est applicable que si la base de temps est réglable de manière continue, ce qui n'est pas le cas pour tous les appareils, en particulier les numériques. Dans ce cas, le déphasage est directement affiché à l'écran.

3.6. Mesures en mode XY

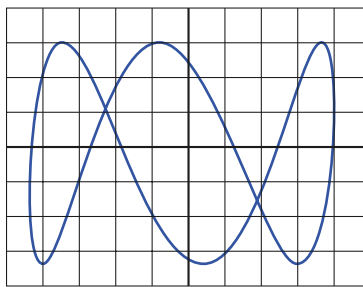
Le mode XY permet de mesurer des fréquences en comparant le signal inconnu à un signal de fréquence étalon. Si le rapport des fréquences est rationnel, nous obtenons des courbes de Lissajous (doc. 39). Ce rapport est égal au rapport des nombres de points de contact entre la courbe avec les segments horizontaux et verticaux du rectangle circonscrit.



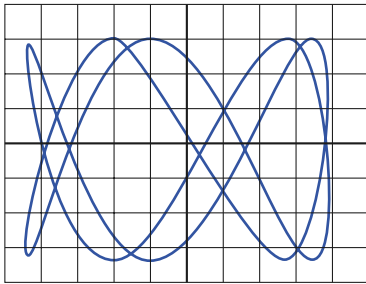
Doc. 38. Mesure d'un déphasage en mode base de temps. $\ell \approx 0,8 \text{ div}$, $L \approx 4,5 \text{ div}$ et $\varphi = 65^\circ$ (retard de 2 par rapport à 1).



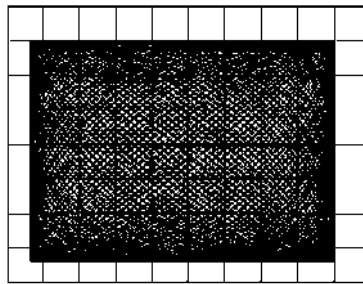
signaux de même fréquence



signal Y de fréquence triple du signal X



rapport de fréquence signal Y/signal X 5/2

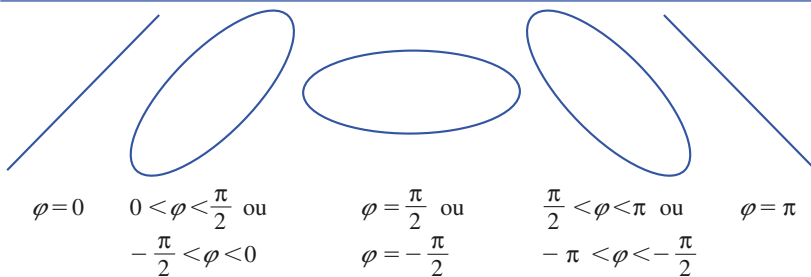


pas de rapport simple entre les fréquences

◀ Doc. 39. Courbes de Lissajous.

Il permet aussi de mesurer les valeurs de crête des deux signaux ainsi que leur déphasage (doc. 40). Cependant *ce déphasage n'est connu qu'au signe près* (doc. 41) et généralement de façon très peu précise.

Cette méthode est surtout adaptée à la mesure de faibles déphasages ou à la recherche d'une condition de déphasage nul.



Doc. 41. Déphasage en fonction de l'orientation de l'ellipse pour

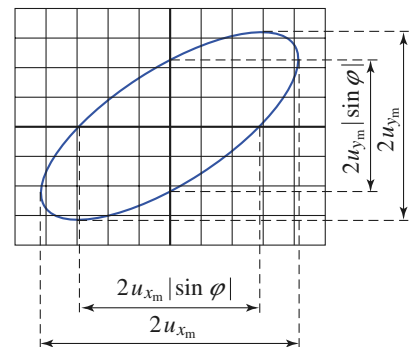
$$u_x = u_{x_m} \cos(\omega t) \text{ et } u_y = u_{y_m} \cos(\omega t + \varphi).$$

Remarque : À haute fréquence cette méthode ne peut être appliquée, car la bande passante de l'amplificateur horizontal est généralement plus faible que celle de l'amplificateur vertical. La conséquence est l'apparition d'un déphasage parasite à l'écran.

3.7. L'oscilloscope numérique

Du point de vue de son fonctionnement interne, l'oscilloscope numérique ressemble bien plus à un micro-ordinateur qu'à un oscilloscope analogique.

Les tensions u_1 et u_2 , entrées sur les voies 1 et 2, sont transformées en une suite de valeurs numériques, puis traitées comme le ferait un ordinateur. Le résultat est affiché sous forme de courbes $u_1(t)$, $u_2(t)$ ou $u_1(u_2)$ sur un écran qui peut être un écran cathodique ou un écran plat à cristaux liquides.



Doc. 40. Grandeurs mesurables en mode

XY avec : $u_x = u_{x_m} \cos(\omega t)$,

$$u_y = u_{y_m} \cos(\omega t + \varphi).$$

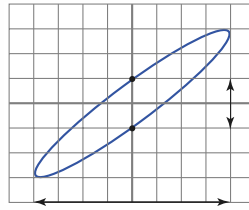
Application 8

Analyse d'une ellipse de Lissajous

Que pouvez-vous dire des deux signaux visualisés en mode XY sur le document 42 ?

Les deux signaux ont la même fréquence. L'amplitude crête à crête du signal de la voie X est $8 \times 2 \text{ V} = 16 \text{ V}$, celle du signal de la voie Y est $6 \times 0,5 \text{ V} = 3,0 \text{ V}$.

Leur déphasage est donné par $\sin \varphi \approx \frac{2}{6} = 0,33$.



Le déphasage du signal Y par rapport au signal X est donc d'environ 20° (au signe près).

◀ **Doc. 42. Mode XY.**
Calibre voie X 2 V/div.
Calibre voie Y 0,5 V/div.

Du point de vue de l'utilisateur, l'oscilloscope numérique a été conçu pour simuler les fonctions de l'oscilloscope analogique : base de temps, synchronisation, mode XY couplage AC ou DC, etc. Nous pouvons donc l'utiliser comme un appareil analogique, mais il possède en plus des fonctionnalités qui lui sont propres :

- il est possible d'afficher une courbe $u(t)$ non périodique, correspondant à un balayage unique de la base de temps. Il faut pour cela choisir le mode « monocoup » ou « single » ;
- on peut superposer plusieurs courbes obtenues successivement ;
- l'oscilloscope a également une fonction multimètre : on peut lui faire afficher la valeur de crête, la valeur moyenne et la valeur efficace des tensions mesurées. Il peut aussi indiquer la fréquence si le signal est périodique et le déphasage entre les deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

3.8. Étude de la caractéristique d'un dipôle à l'oscilloscope

Il faut tracer, en mode XY, le courant i en fonction de la tension u . Nous devons pour cela résoudre deux problèmes.

- L'oscilloscope est en fait un voltmètre. Pour avoir une image du courant i , nous allons devoir mesurer la tension aux bornes d'un résistor de résistance R intercalé dans le circuit.
- Les tensions u_1 et u_2 mesurées par l'oscilloscope sont mesurées entre deux bornes **dont l'une est à la masse**. Or, la masse de l'oscilloscope est reliée à celle du générateur par le fil de terre de l'alimentation et il n'est pas possible de concevoir un circuit où le résistor, le dipôle et le générateur aient chacun une borne à la masse. Deux solutions sont envisageables.

■ Première solution

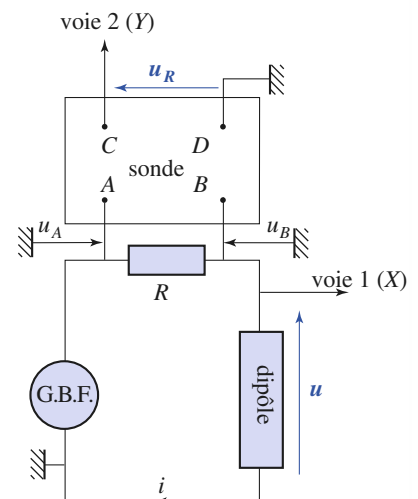
Étudions le document 43.

La position de la masse est imposée par le générateur.

La tension envoyée sur la voie 1 de l'oscilloscope est bien égale à la tension u aux bornes du dipôle.

La résistance R n'ayant aucune borne à la masse, l'oscilloscope ne peut mesurer directement la tension à ses bornes. On y remédie avec une sonde différentielle.

Cet appareil a deux bornes d'entrée (A et B) et deux bornes de sortie (C et D) dont l'une est à la masse.



Doc. 43. Utilisation d'une sonde différentielle.

Les courants entrant par les bornes d'entrée A et B sont pratiquement nuls.

La tension de sortie u_C est égale à la différence de potentiel $u_A - u_B$ entre les deux bornes d'entrée.

Finalement nous obtenons sur l'oscilloscope une courbe représentant Ri en fonction de u .

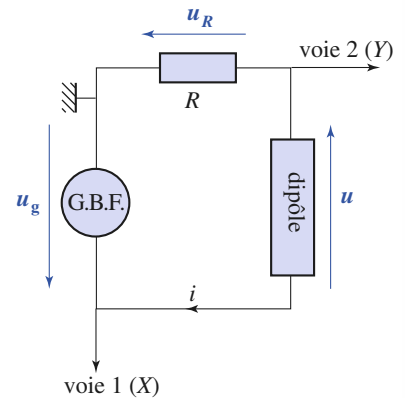
■ Seconde solution

Nous pouvons aussi utiliser une méthode moins coûteuse en matériel, mais approximative. Invertissons le branchement du générateur et choisissons la résistance R suffisamment faible pour que la tension $u_R = Ri$ soit petite devant la tension u .

Avec une assez bonne approximation :

$$u \approx u + u_R = -u_g .$$

Nous voyons sur le document 44 que la voie 2 mesure la tension $u_R = Ri$ et la voie 1 la tension $u_g \approx -u$.



Doc. 44. Tracé approximatif de la caractéristique du dipôle.



- Un multimètre numérique utilisé en voltmètre perturbe peu le circuit sur lequel s'effectue la mesure. Ce n'est plus le cas quand il est utilisé en ampèremètre.

● GRANDEURS MESURÉES

- Un multimètre en calibre « DC » mesure la composante continue d'un signal.
- Un multimètre (« RMS » ou « TRMS ») en calibre « AC » mesure la valeur efficace de la composante alternative.
- Un multimètre (« TRMS ») en calibre « AC + DC » mesure la valeur efficace vraie du signal.
- Pour la mesure de l'impédance, seul le montage courte dérivation est à employer avec des multimètres numériques.
- Les convertisseurs analogiques numériques introduisent une erreur, liée à la quantification de l'information, de l'ordre du pas de quantification (ou unité relative).
- Un échantillonnage à la fréquence f_e interdit toute étude d'un signal de fréquence supérieure $\frac{f_e}{2}$.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Savez-vous mesurer une tension ou une intensité avec un multimètre en choisissant le calibre approprié ?
- ✓ Essayer de reconnaître les limites d'un appareil de mesure.
- ✓ Quel est l'ordre de grandeur de la perturbation apportée par un appareil de mesure dans un circuit ?
- ✓ Observer et mesurer un signal périodique avec un oscilloscope analogique ou numérique.
- ✓ Utiliser systématiquement le couplage DC, sauf s'il y a une raison précise pour utiliser le couplage AC.
- ✓ Comment mesurer une tension, une période et un déphasage ?
- ✓ Savez-vous observer et mesurer un signal non périodique avec un oscilloscope numérique ?
- ✓ Expliquer comment tenir compte des connexions cachées entre les masses des différents appareils (oscilloscope, générateur).

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. La résistance d'un multimètre utilisé en volt-mètre est de l'ordre de quelques ohms.
 Vrai Faux
2. La résistance d'un multimètre utilisé en ampèremètre est plus grande pour le calibre 2 mA que pour le calibre 200 mA.
 Vrai Faux
3. Un ampèremètre perturbe d'autant moins un circuit que sa résistance est faible.
 Vrai Faux
4. Un voltmètre perturbe d'autant moins un circuit que sa résistance est faible.
 Vrai Faux
5. Les couplages AC et DC de l'entrée d'un oscilloscope sont réservés respectivement à l'étude des signaux alternants ou continus.
 Vrai Faux

► Solution, page 92.

Exercices

1 Observation d'un signal périodique

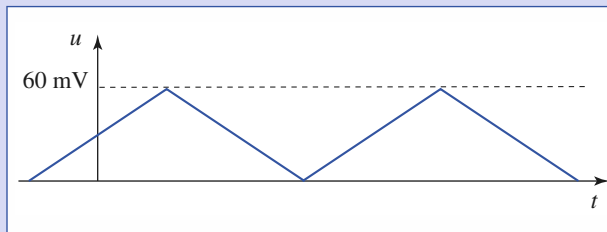
On observe avec un oscilloscope le signal triangulaire $u(t)$ représenté sur la *figure* ci-dessous. Sa période est de $750 \mu\text{s}$.

On utilise un oscilloscope avec une base temps réglée à $100 \mu\text{s}$ par division, et une déviation verticale de 10 mV par division : dont le zéro a été réglé.

La synchronisation manuelle (normale) a été sélectionnée.

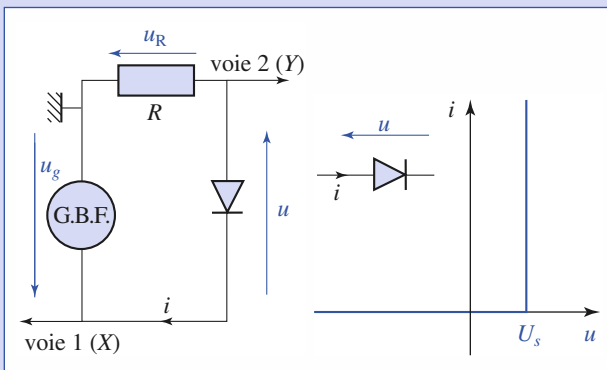
Décrire l'aspect de l'écran :

- en couplage DC avec niveau de synchronisation de -15 mV et une pente positive ;
- en couplage DC avec niveau de synchronisation de $+15 \text{ mV}$ et une pente positive ;
- en couplage AC avec niveau de synchronisation de -15 mV et une pente négative.



L'écran a une taille verticale de huit carreaux verticaux sur dix carreaux horizontaux.

2 Tracé d'une caractéristique



L'oscilloscope étant en mode (XY), on trace la caractéristique approchée de la diode dont la caractéristique idéalisée est représentée.

Déterminer la courbe vue sur l'écran sans utiliser les touches de changement de signe. $U_s = 1 \text{ V}$ et la valeur maximale de i est $I_{\text{max}} = 0,2 \text{ A}$.

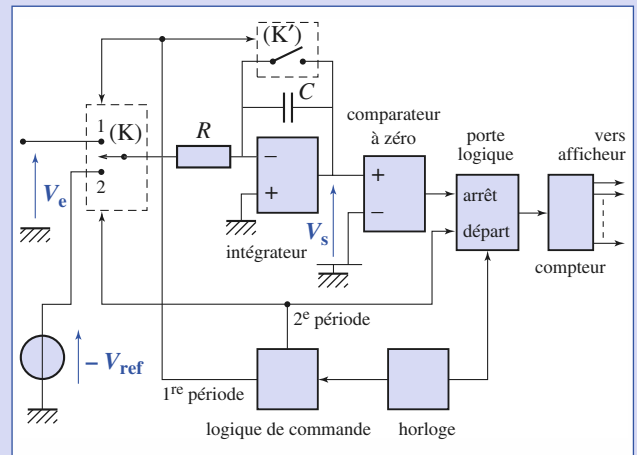
Pour quelles valeurs de la résistance R le tracé est-il acceptable ? Est-ce bien réaliste ?

3 Voltmètre numérique double rampe

Dans un voltmètre numérique double rampe, dont le schéma synoptique est donné ci-dessous, la conversion analogique-numérique de la tension d'entrée V_e se fait en deux étapes.

On pourra admettre (cf. les chapitres 7 et 8) que :

- $V_s = 0$ lorsque K' est fermé ;
- $V_s(t) = V_s(t_0) - \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t V_1(\xi) d\xi$ avec V_1 : potentiel de l'interrupteur K et $\tau = RC$.



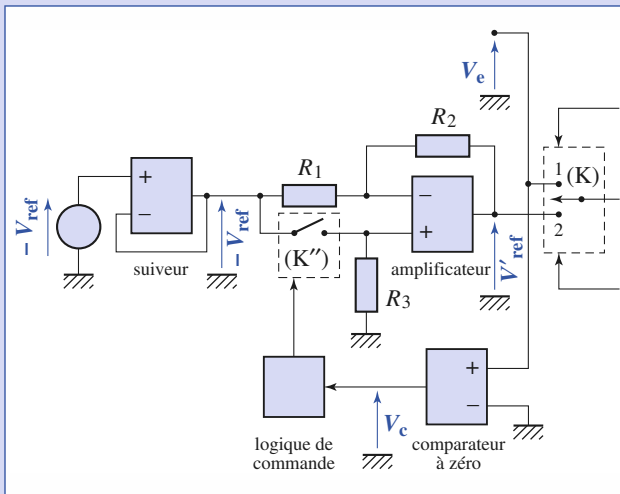
1) Lors de la première étape qui débute à $t = 0$, la logique de commande bascule le commutateur (K) en position (1) et ouvre l'interrupteur (K'). La tension d'entrée V_e , positive et constante par hypothèse, est appliquée à l'intégrateur pendant un intervalle de temps fixé de N_1 périodes T d'horloge. Calculer la tension de sortie V_{s1} de l'intégrateur à $t_1 = N_1 T$.

2) Lors de la seconde étape qui débute à $t = t_1$, la logique de commande bascule le commutateur (K) en position (2) et lance simultanément le compteur qui enregistre le nombre de périodes de l'horloge. La tension de référence $-V_{\text{ref}}$, de signe opposé à la tension d'entrée V_e , est appliquée à l'intégrateur dont la tension de sortie V_s est ramenée vers zéro. Le comparateur à zéro détecte le passage par zéro de V_s après $N_2 T$ périodes d'horloge et arrête le comptage.

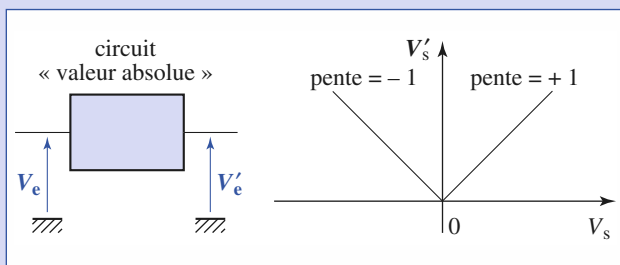
Démontrer que $V_e = V_{\text{ref}} \frac{N_2}{N_1}$ et commenter ce résultat.

3) Montrer que la durée constante t_1 de la première étape peut être utilisée pour éliminer toute influence parasite des signaux alternatifs de fréquence $f' = 50 \text{ Hz}$ superposés au signal à mesurer.

4) Pour ce type de convertisseur, la tension à convertir V_e et la tension de référence V_{ref} doivent être de signes opposés. Si on désire convertir des tensions constantes V_e aussi bien positives que négatives, il faut ajouter au circuit étudié un détecteur de signe (comparateur à zéro, par exemple) commandant un inverseur de polarité, c'est-à-dire un dispositif multipliant par $+1$ ou -1 la tension de référence V_{ref} . Vérifier que le schéma proposé réalise la fonction souhaitée, sachant que la logique de commande ferme l'interrupteur K'' quand $V_C > 0$ et l'ouvre quand $V_C < 0$ ($R_1 = R_2$).



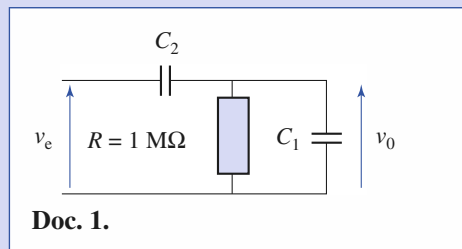
5) À la place du circuit proposé dans la question précédente, la tension V_e est d'abord appliquée à l'entrée d'un circuit « valeur absolue » dont la caractéristique est donnée dans le schéma.



En procédant ainsi, on peut mesurer des tensions constantes de signe quelconque et aussi des tensions $V_e(t)$ variables périodiques. À quoi correspond, dans ce dernier cas, la valeur affichée par le voltmètre ?

4 Déformation d'un signal créneau par l'impédance d'entrée d'un oscilloscope

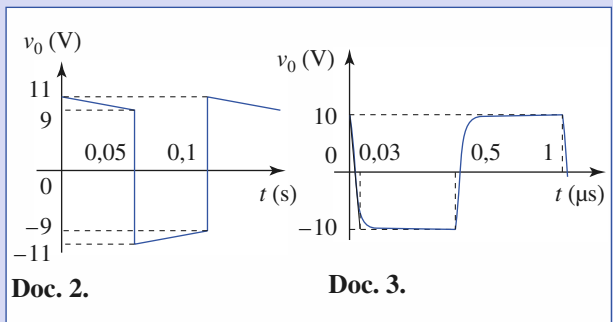
En mode AC (*alternative current*), l'entrée d'un oscilloscope est équivalente au circuit suivant (*doc. 1*).



Doc. 1.

v_e est la tension appliquée à l'oscilloscope, v_0 est la tension effectivement utilisée par l'oscilloscope. On supposera que $C_2 \gg C_1$.

On observe les courbes suivantes (*doc. 2* et *3*) pour un signal d'entrée créneau d'amplitude 10 V provenant d'un G.B.F. de résistance interne R_g égale à 1 kΩ.



Doc. 2.

Doc. 3.

- 1) En déduire l'ordre de grandeur des capacités C_1 et C_2 .
- 2) À partir de quelle fréquence, peut-on utiliser le mode AC en régime sinusoïdal si on tolère une atténuation de 2 % ?

Corrigés

Solution du tac au tac, page 89.

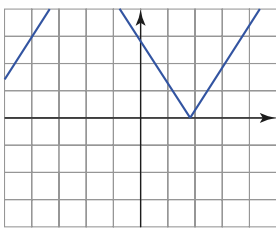
1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux ; 5. Faux.

1 Il apparaît une période plus $\frac{1}{3}$ de période sur l'écran, avec une amplitude crête à crête de six carreaux.

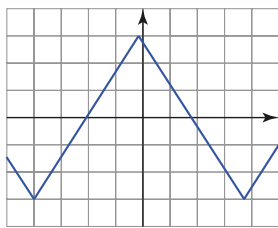
En couplage DC, la courbe est écrêtée vers le haut. En couplage AC, la courbe a une amplitude de trois carreaux de part et d'autre du zéro.

Dans le premier cas (niveau à -15 mV), le niveau n'est jamais atteint ; la base de temps ne se déclenche jamais et aucune courbe ne s'affiche.

Le deuxième cas et le troisième sont représentés sur les deux figures ci-dessous.



Couplage DC : Niveau à 15 mV
pente positive.

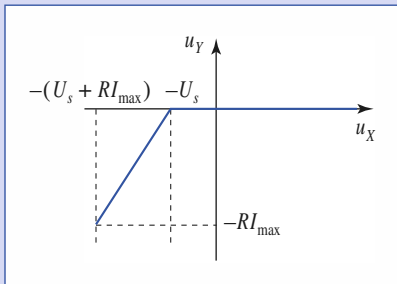


Couplage AC : Niveau à -15 mV
pente négative.

2 • Sur la voie Y : $u_Y = -u_R = -Ri$.

La voie Y est donc une image exacte du courant i .

• Sur la voie X, on observe $u_X = -u - Ri$.



Si $u < U_s$: $i = 0$ et $u_X = -u$.

Si $i > 0$: $u_X = -U_s - Ri = -U_s + u_Y$.

On obtient donc le tracé représenté (la pente observée dépend des échelles).

On peut admettre que le tracé est acceptable si $RI_{\max} \ll U_s$.

Par exemple : $RI_{\max} < \frac{1}{10}U_s$ correspond à $R < 0,5 \Omega$. Cette résistance est cependant bien faible par rapport aux composants électroniques usuels.

3 1) Par intégration :

$$V_{s1} = 0 - \frac{V_c}{\tau} \int_0^{N_1 T} dt,$$

soit : $V_{s1} = -\frac{V_c}{\tau} N_1 T$ avec $\tau = RC$.

2) On intègre :

$$0 = V_{s1} + \frac{V_{\text{ref}}}{\tau} \int_0^{N_2 T} dt,$$

soit : $N_2 T = -\frac{\tau}{V_{\text{ref}}} V_{s1}$.

En utilisant l'expression de V_{s1} obtenue dans la première question, on obtient :

$$V_c = V_{\text{ref}} \frac{N_2}{N_1}.$$

La conversion de V_c est obtenue indépendamment de la constante de temps τ de l'intégrateur, dont la valeur n'est pas connue avec précision et dont la stabilité dans le temps n'est pas assurée. Le nombre N_1 de périodes est parfaitement connu et la tension de référence $-V_{\text{ref}}$ peut être fixée avec précision. La conversion de V_c se fait avec une bonne précision (à mieux que 10^{-4}) par cette méthode.

3) La période d'un signal parasite de $f' = 50$ Hz est $T' = \frac{1}{f'} = 20$ ms.

En choisissant la durée t_1 de la première étape multiple de $T' = 20$ ms, on élimine par intégration la composante alternative parasite puisque l'intégrale de cette fonction sinusoïdale est nulle sur un tel intervalle. En fait, on élimine aussi toutes les harmoniques de cette tension parasite. C'est une qualité intéressante de ce convertisseur.

4) Le suiveur permet de prélever la tension de référence $-V_{\text{ref}}$ sans faire débiter la source. Si la tension à convertir V_c est positive, le comparateur délivre une tension de commande V_c positive et l'interrupteur (K'') est fermé.

La tension $-V_{\text{ref}}$ est appliquée sur les deux entrées de l'amplificateur qui fonctionne en régime linéaire ($\varepsilon = 0$, car la boucle de réaction aboutit sur l'entrée inverseuse).

La résistance R_1 n'est parcourue par aucun courant et l'amplificateur opérationnel se comporte comme un suiveur :

$$V'_{\text{ref}} = -V_{\text{ref}}.$$

Si la tension à convertir V_c est négative, le comparateur délivre une tension de commande V_c négative et l'interrupteur (K''') est ouvert. La tension $-V_{\text{ref}}$ est alors appliquée à l'entrée d'un amplificateur inverseur :

$$V'_{\text{ref}} = -\frac{R_2}{R_1}(-V_{\text{ref}}) = V_{\text{ref}}, \text{ si } R_1 = R_2.$$

5) La tension V_c est convertie en $V'_c = |V_c|$ avant sa conversion numérique. À la fin de la première étape, la tension de sortie de l'intégrateur est :

$$V_{s1} = \int_0^{V_{s1}} dV_s = -\frac{1}{\tau} \int_0^{N_{1T}} |V_c(t)| dt = -\frac{N_{1T}}{\tau} \langle |V_c(t)| \rangle.$$

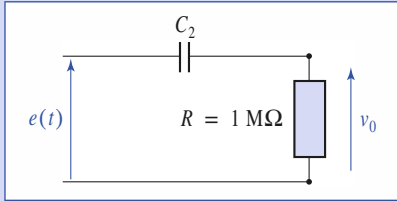
Lors de la seconde étape, on a toujours la même relation :

$$N_2 T = -\frac{\tau}{V_{\text{ref}}} V_{s1}$$

soit encore : $\langle |V_c(t)| \rangle = V_{\text{ref}} \frac{N_2}{N_1}$.

Le voltmètre affiche la valeur moyenne absolue de la tension variable $V_c(t)$ sur l'intervalle de temps $t_1 = N_1 T$ de la première étape.

4 1) Pour le signal basse fréquence, l'effet de C_1 est négligeable et la résistance R_g du G.B.F. est négligeable devant R . Le circuit équivalent est donc :



L'équation du circuit est $\frac{q}{C} + v_0 = e(t)$ avec $v_0 = R \frac{dq}{dt}$.

Pendant une demi-période, l'équation différentielle vérifiée par v_0 est $RC_2 \frac{dv_0}{dt} + v_0 = 0$.

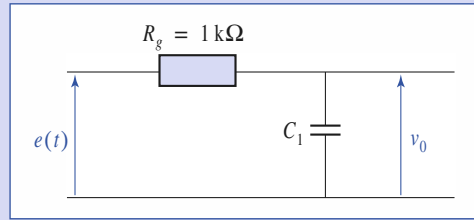
L'observation de la courbe montre que pendant la demi-période où $e(t) = 10 \text{ V}$, v_0 décroît avec une vitesse $\frac{dv_0}{dt} = \frac{v_0}{RC_2} \approx 40 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$.

$v_0 \approx 10 \text{ V}$, $R \approx 1 \text{ M}\Omega$, d'où $C_2 \approx 0,25 \mu\text{F}$.

Pour le signal haute fréquence, l'effet de C_2 est négligeable devant celui de C_1 , car $C_2 \gg C_1$.

De plus, l'impédance de C_1 à 1 MHz est probablement faible devant R mais pas devant R_g ; le circuit peut donc être simplifié comme l'indique le schéma ci-après.

L'équation différentielle vérifiée par v_0 est $R_g C_1 \frac{dv_0}{dt} + v_0 = e(t)$ avec des solutions exponentielles de constante de temps $\tau = R_g C_1$.



On utilise la méthode de la tangente à l'instant origine pour déterminer τ : la tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant $\tau = R_g C_1$. D'où :

$$R_g C_1 \approx 30 \text{ ns et } C_1 \approx 30 \text{ pF.}$$

2) Le circuit équivalent à basse fréquence à l'entrée de l'oscilloscope est un passe-haut du premier ordre, de fonction de transfert :

$$H = \frac{jRC_2\omega}{1 + jRC_2\omega}$$

et de module :

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(RC_2\omega)^2}}}$$

La condition est $1 - H < \varepsilon = 0,02$ pour le signal sinusoïdal, soit en faisant un développement limité :

$$f > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon} 2\pi RC_2} \approx 3,2 \text{ Hz.}$$

À la fréquence de 10 Hz, la touche AC peut être utilisée pour l'observation d'un signal sinusoïdal mais pas pour un créneau ! Ceci est dû au fait que le signal créneau est la superposition d'harmoniques et non une sinusoïde pure.

5

Les régimes de fonctionnement des réseaux linéaires

Exemple du circuit (R, L, C) série

O B J E C T I F

- Déterminer la réponse d'un circuit à un signal d'entrée donné.

P R É R E Q U I S

- Caractéristiques des dipôles linéaires (en particulier continuité de la charge du condensateur et de l'intensité dans une inductance).
- Théorèmes généraux sur les réseaux linéaires.
- Résolution d'équations différentielles linéaires du premier et du second ordre à coefficients constants.
- Utilisation d'un oscilloscope numérique.

Introduction

Les régimes que nous observons sur les circuits réels ont toujours un début. Il n'est pas pertinent de parler, a priori, de régimes indépendants du temps ou, par exemple, de régimes sinusoïdaux ce qui sous-entend des régimes sans début, ni fin.

À l'aide de quelques exemples nous nous proposons de montrer comment, à partir d'un état initial connu, les courants s'établissent dans un circuit.

Dans ce chapitre, nous assimilerons les condensateurs et les bobines à leurs modèles idéalisés et nous noterons par 0_- et 0_+ les instants juste avant et juste après l'instant initial $t = 0$.

Le régime libre, ou régime propre, d'un circuit est le régime que nous observons lorsque ses sources libres sont éteintes.

Nous commencerons par une étude théorique des divers circuits afin d'étudier les caractéristiques des évolutions, pour ensuite se mettre dans des conditions idéales d'observations expérimentales.

Régime libre du circuit (R, C)

1.1. Équations différentielles

Considérons le montage du *document 1*.

Avant l'instant $t = 0$, l'interrupteur I est ouvert et le condensateur a été chargé avec une charge q_0 telle que $q_0 = Cu_0$.

Fermons l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Une intensité $i(t)$ parcourt le circuit.

Nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$u(t) = -Ri(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dq}{dt}.$$

La d.d.p. $u(t)$ vérifie donc l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0$$

où RC est homogène à un temps.

En dérivant cette expression et en utilisant $i = C \frac{du}{dt}$, il vient $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$.

• Le temps caractéristique du circuit (R, C) est le temps de relaxation $\tau = RC$.

• Le circuit (R, C) est un circuit du premier ordre de constante de temps RC , car les équations différentielles vérifiées par l'intensité et la différence de potentiel sont linéaires du premier ordre.

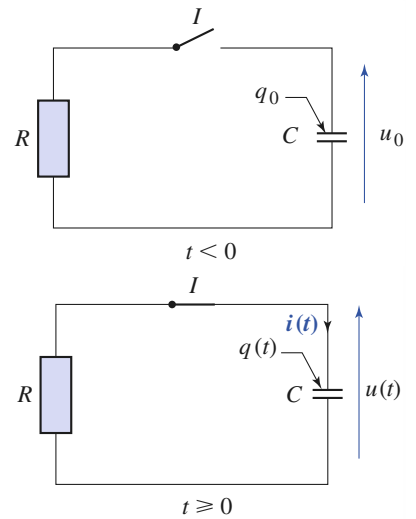
1.2. Régime libre

La solution générale de l'équation différentielle vérifiée par u est :

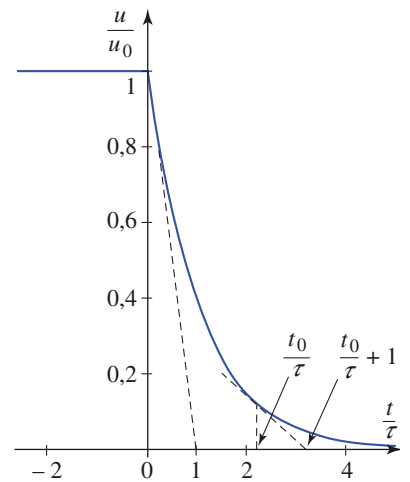
$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{pour } t > 0.$$

La continuité de u aux bornes du condensateur nous permet d'affirmer que la constante A vaut u_0 . Rappelons que cette continuité est liée à celle de l'énergie électrostatique du condensateur $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} Cu^2$: une discontinuité d'énergie n'est pas physiquement acceptable, car elle correspond à une puissance infinie.

Finalement, $u(t) = u_0$ pour $t < 0$ et $u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ pour $t > 0$.



Doc. 1. Circuit (R, C).



Doc. 2. Différence de potentiel aux bornes du condensateur.

$\frac{t}{\tau} =$	0,69	2,3	4,6	6,9
$\frac{u}{u_0} \approx$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\ 000}$

Doc. 3.

Sur le tracé $\frac{u}{u_0}$ en fonction de $\frac{t}{\tau}$, nous remarquons que la tangente à l'origine coupe l'axe horizontal en $\frac{t}{\tau} = 1$. Dans le tracé u en fonction de t , elle couperait l'axe des t en τ . Ce résultat est utilisé pour mesurer expérimentalement τ . La propriété est vraie à un instant t_0 quelconque : la tangente à la courbe $u(t)$ à l'instant t_0 coupe l'axe des t , c'est-à-dire l'asymptote, en $t_0 + \tau$.

Dès que t est de l'ordre de quelques τ , $\frac{u}{u_0}$ prend des valeurs négligeables (doc. 2).

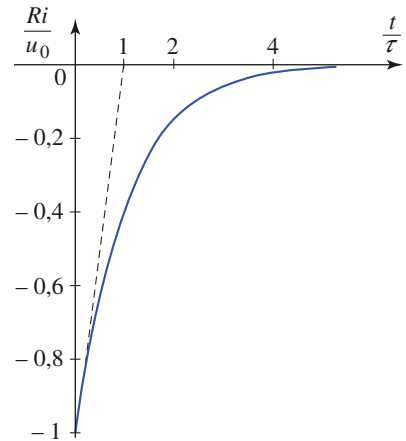
En utilisant $i(t) = C \frac{du}{dt}$, nous obtenons :

$$i(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } i(t) = -\frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ pour } t > 0 \text{ (doc. 4).}$$

Nous remarquons que i est discontinue à l'instant $t = 0$.

Cette discontinuité est liée à la modélisation du circuit par un résistor et une capacité idéale. Dans un circuit réel, la résistance et le condensateur possèdent des coefficients d'inductance non nuls. La présence de ces inductances élimine la discontinuité de i . De ce fait, la relation $i(t) = -\frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ n'est pas rigoureusement valable au voisinage immédiat de $t = 0$.

Nous pouvons faire les mêmes remarques sur la tangente à l'origine et le temps de décroissance sur le tracé $\frac{i}{i_0}$ ($i_0 = \frac{u_0}{R}$) que celles qui ont été faites sur le tracé de $\frac{u}{u_0}$.



Doc. 4. Intensité dans le circuit.

1.3. Étude énergétique

Calculons l'énergie \mathcal{E} dissipée par effet Joule dans le résistor R :

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{u_0^2}{R} e^{-2\frac{t}{RC}} dt = \frac{1}{2} Cu_0^2.$$

Cette énergie est l'énergie du condensateur à l'instant initial.

L'énergie emmagasinée à l'instant initial dans le condensateur est intégralement dissipée par effet Joule dans le résistor.

► Pour s'entraîner : ex. 1.

Application 1

Détermination de la résistance de fuite d'un condensateur

On charge un condensateur de $1 \mu\text{F}$ sous 10 V puis on branche à ses bornes un voltmètre numérique de résistance d'entrée R .

1) On commence par ne pas tenir compte de la résistance de fuite. Déterminer R sachant qu'après deux minutes le voltmètre indique une différence de potentiel de $2,3 \text{ V}$.

2) On constate que la résistance R est du même ordre de grandeur que la résistance de fuite du condensateur.

Pour mesurer cette résistance de fuite, nous rechargeons le condensateur sous 10 V et deux minutes après nous branchons le voltmètre à ses bornes pendant un court instant. Nous mesurons alors une différence de potentiel de $7,9 \text{ V}$.

Déterminer la résistance de fuite du condensateur et la résistance d'entrée du voltmètre.

1) On utilise la formule : $u = u_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, d'où :

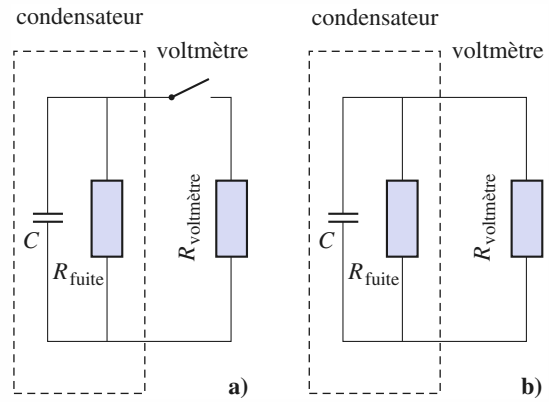
$$R = \frac{t}{C \log \frac{u_0}{u}} \approx 80 \text{ M}\Omega.$$

2) Le protocole utilise la décharge du condensateur dans sa résistance de fuite (doc. 5a), d'où :

$$R_{\text{fuite}} = \frac{t'}{C \log \frac{u_0}{u}} \approx 500 \text{ M}\Omega.$$

La mesure de 1) fait intervenir les deux résistances en parallèle (doc. 5b), d'où :

$$R_{\text{voltmètre}} = \frac{R R_{\text{fuite}}}{R_{\text{fuite}} - R} \approx 100 \text{ M}\Omega.$$



Doc. 5.

2 Régime libre du circuit (R, L)

2.1. Équations différentielles

Considérons le montage théorique du document 6 :

Avant l'instant $t = 0$, l'interrupteur I est fermé et l'intensité i_0 traverse la bobine.

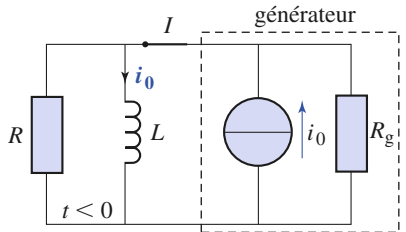
Ouvrons l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Une différence de potentiel $u(t)$ apparaît aux bornes de la bobine.

Nous pouvons écrire les relations suivantes : $i(t) = -\frac{u(t)}{R}$ et $u(t) = L \frac{di}{dt}$.

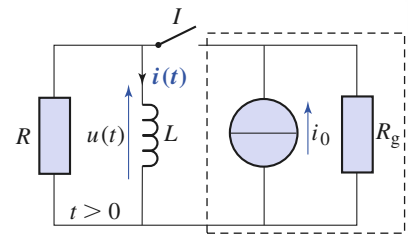
$i(t)$ vérifie donc l'équation différentielle linéaire du premier ordre $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$,

de même en dérivant cette relation et en utilisant $u(t) = L \frac{di}{dt} : \frac{du}{dt} + \frac{R}{L}u = 0$.

$\frac{L}{R}$ est homogène à un temps.



a) $t < 0$.



b) $t \geq 0$.

Doc. 6. Montage d'étude du circuit (R, L).

• Le temps caractéristique du circuit (R, L) est le temps de relaxation :

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

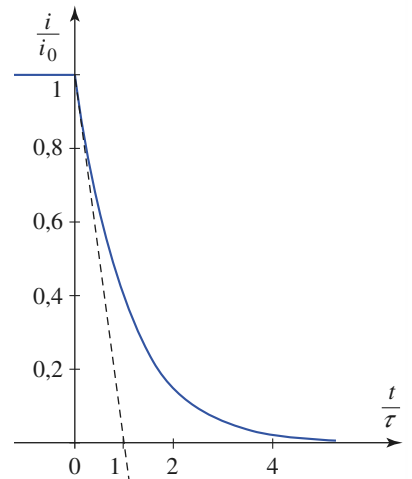
Ce circuit est un circuit du premier ordre de constante de temps $\frac{L}{R}$.

2.2. Régime libre

La solution générale de l'équation différentielle vérifiée par i est :

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } t > 0.$$

La continuité de i nous permet d'affirmer que la constante A vaut i_0 . Rappelons que cette continuité est liée à celle de l'énergie magnétique $\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2$ dans une bobine ; une discontinuité d'énergie n'est pas physiquement acceptable, car elle correspond à une puissance infinie.



Doc. 7. Intensité dans le circuit.

Finalement, $i(t) = i_0$ pour $t < 0$ et $i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ pour $t > 0$.

L'équation vérifiée par $i(t)$ est semblable à celle de $u(t)$ (cf. § 1.1.). Nous pouvons donc faire les mêmes remarques sur la tangente à l'origine et la décroissance de i .

En utilisant $u(t) = L \frac{di}{dt}$, nous obtenons :

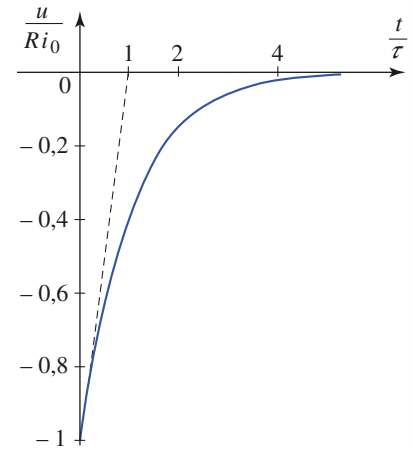
$$u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } u(t) = -Ri_0 e^{-\frac{R}{L}t} \text{ pour } t > 0.$$

Nous remarquons que u est discontinue à l'instant $t = 0$.

Dans un montage expérimental, cette discontinuité de u n'apparaît pas principalement à cause des capacités parasites de la bobine et de l'interrupteur.

De ce fait, la relation $u(t) = -Ri_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ n'est pas valable au voisinage immédiat de $t = 0$.

Notons enfin que la tangente à la courbe à l'instant t_0 coupe l'axe de temps t , c'est-à-dire l'asymptote, à la date $(t_0 + \tau)$.



Doc. 8. Différence de potentiel aux bornes de la bobine.

2.3. Étude énergétique

Calculons l'énergie \mathcal{E} dissipée par effet Joule dans le résistor R :

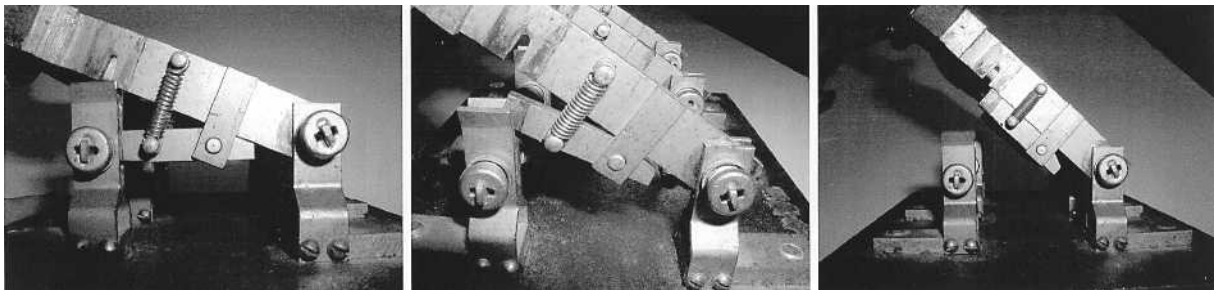
$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = \int_0^{+\infty} Ri_0^2 e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{1}{2} Li_0^2.$$

Cette énergie est l'énergie de la bobine à l'instant initial.

L'énergie emmagasinée à l'instant initial dans la bobine est intégralement dissipée par effet Joule dans le résistor.

Remarque

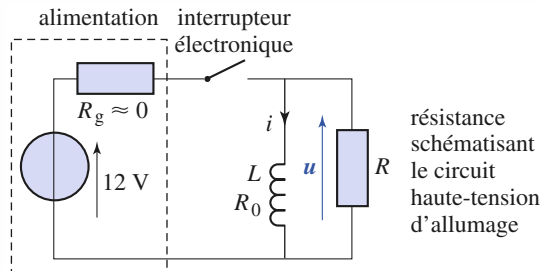
Un interrupteur est un dispositif qui permet l'ouverture et la fermeture volontaires de circuits en charge. Il doit être capable de supporter et d'interrompre des courants dans les conditions normales d'utilisation du circuit, ainsi que dans les conditions exceptionnelles spécifiées : surcharge en service, courts-circuits, etc. Ces caractéristiques imposent une commande à enclenchement et à déclenchement brusques pour limiter la durée des arcs (doc. 9). Les derniers sont soufflés soit pneumatiquement, soit magnétiquement dans les interrupteurs moyenne et haute tension à forts débits. Un interrupteur est un dispositif dont les qualités technologiques sont souvent méconnues.



Doc. 9. Exemple d'interrupteur permettant de limiter les arcs électriques : un ressort impose à la pièce mobile inférieure de sortir rapidement des « mâchoires » de contact.

Application 2

Le circuit d'allumage dans un moteur à essence est schématisé sur le document 10.



Doc. 10.

On supposera : $L = 0,8 \text{ H}$, $R_0 = 8 \Omega$ et $R = 1 \text{ k}\Omega$.

L'interrupteur électronique est initialement fermé.

1) Quel courant i_0 traverse la bobine ?

2) L'interrupteur est ouvert à l'instant $t = 0$.

Quelle d.d.p. maximale (en valeur absolue) apparaît aux bornes de R ? Quelle énergie est dissipée dans R ?

1) Pour $t < 0$, le courant traversant la bobine vaut :

$$i_0 = \frac{e}{R_0} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ A.}$$

2) Pour $t > 0$, l'intensité dans le circuit est donnée par :

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R+R_0}{L}t}$$

La valeur maximale de u (en valeur absolue) est obtenue à l'instant initial $|u|_{\max} = Ri_0 = 1,5 \text{ kV}$.

La bobine constitue le primaire d'un transformateur, dont la d.d.p. aux bornes du secondaire atteint plusieurs dizaines de kilovolts. Cette valeur est suffisante pour créer l'étincelle qui provoque la combustion du mélange air-essence. La différence de potentiel maximale aux bornes de l'interrupteur étant quasiment égale à $|u|_{\max}$, l'interrupteur électronique doit pouvoir supporter des tensions très élevées.

De façon générale, au moment où un circuit comprenant une bobine est ouvert, il apparaît une d.d.p. importante aux bornes de l'interrupteur. Cette d.d.p. peut provoquer un arc électrique appelé étincelle de rupture qui peut endommager l'interrupteur (doc. 10).

Le même courant traverse R_0 et R . Or à courant constant, la puissance est proportionnelle à la résistance.

Donc :

$$\mathcal{E} = \frac{R}{R+R_0} \left(\frac{1}{2} Li_0^2 \right) \approx \frac{1}{2} Li_0^2 = 0,9 \text{ J.}$$

3 Régime libre du circuit (R, L, C) série

3.1. Équation différentielle du circuit (R, L, C) série en régime libre

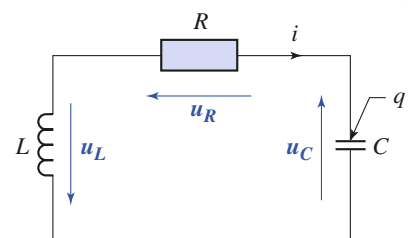
Considérons le circuit représenté sur le document 11.

La loi des mailles $u_R + u_L + u_C = 0$ s'écrit $Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$, avec $i = \frac{dq}{dt}$ (q charge de l'armature du condensateur sur laquelle i arrive).

La charge q vérifie donc l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants : $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$.

L'équation différentielle précédente s'écrit de façon canonique :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$



Doc. 11. Circuit (R, L, C).

Utilisons les relations $u_C = \frac{q}{C}$, $u_R = R \frac{dq}{dt}$ et $u_L = L \frac{d^2q}{dt^2}$ et, en dérivant si nécessaire, l'équation différentielle vérifiée par q . Nous remarquons que les différences de potentiel aux bornes de chacun des dipôles vérifient des équations du type $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$. De même, l'intensité dans le circuit vérifie :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0, \text{ car } i = \frac{dq}{dt}.$$

Le circuit (R, L, C) série est un circuit du second ordre ; il est caractérisé par deux grandeurs caractéristiques :

- sa pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;
- son facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ qui est un nombre sans dimension.

3.2. Conditions initiales

3.2.1. Deux conditions initiales

La solution générale d'une équation différentielle d'ordre deux fait intervenir deux constantes arbitraires, que l'on détermine à partir des conditions initiales. Il faut donc connaître la valeur de la fonction cherchée et celle de sa dérivée à l'instant 0_+ .

Pour cela, nous exprimons que la tension aux bornes du condensateur ainsi que l'intensité qui traverse la bobine sont des fonctions continues du temps.

Par la suite, nous noterons :

$$u(0) = u_0 = \frac{q_0}{C} \text{ et } i(0) = i_0.$$

Ces deux conditions initiales utiles pour déterminer l'évolution pour $A > 0$ du circuit (R, L, C).

3.2.2. Exemple de détermination des conditions initiales

Considérons le montage théorique du document 12, où l'interrupteur est fermé depuis un temps infini. On a atteint un régime continu où les dérivées par rapport au temps sont nulles. Le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine idéale à un fil sans résistance (doc. 13). On en déduit les valeurs :

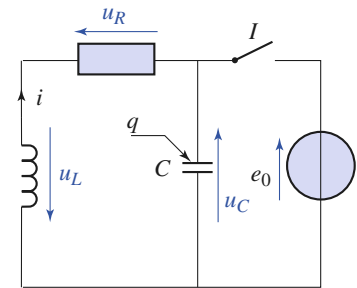
$$i = -\frac{e_0}{R} \text{ et } u_C = e_0.$$

Ouvrons l'interrupteur à l'instant $t = 0$. L'intensité $i(t)$ et la tension $u_C(t)$ étant des fonctions continues, nous pouvons écrire :

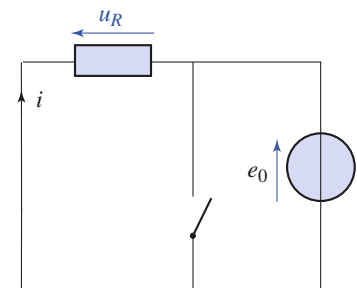
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = e_0 \text{ et } i(0_+) = i(0_-) = -\frac{e_0}{R}.$$

Maintenant que l'interrupteur est ouvert, le courant i passe dans la branche du condensateur ; nous pouvons donc écrire en faisant attention aux orientations, les deux conditions initiales recherchées :

$$u_0 = e_0 \text{ et } i_0 = C \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{0_+} = \frac{-e_0}{R}.$$



Doc. 12. Circuit R, L, C.



Doc. 13. Schéma équivalent pour $t < 0$.

3.3. Régime libre du circuit (R, L, C)

L'étude du régime libre fait intervenir le coefficient de qualité Q . Nous parlerons aussi d'amortissement : un circuit est très amorti quand sa résistance est grande (soit $Q \approx 0$) et est peu amorti quand sa résistance est faible (soit $Q \gg 1$).

Réolvons l'équation différentielle $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$.

Nous savons que sauf cas particulier, la solution de cette équation différentielle est de la forme $q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$, où A_1 et A_2 sont des constantes pouvant être complexes et r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique

associée à l'équation différentielle $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$.

Dans le cas particulier où $r_1 = r_2 = r$, la solution est de la forme :

$$q(t) = (At + B)e^{rt}.$$

Les constantes réelles A et B sont fixées par les deux conditions initiales.

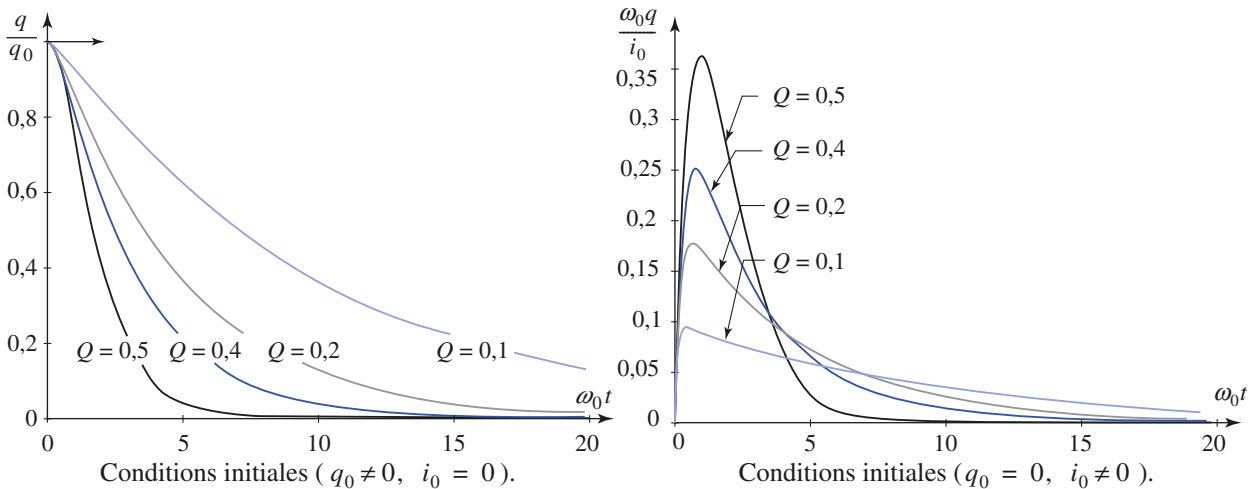
Nous pouvons donc envisager trois cas suivant le signe du discriminant réduit de l'équation caractéristique $\Delta' = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$.

3.3.1. $\Delta > 0$ ou $Q < 1/2$: régime apériodique

Les deux racines r_1 et r_2 sont réelles négatives. Une étude mathématique de la solution donnerait les résultats suivants (doc. 14) :

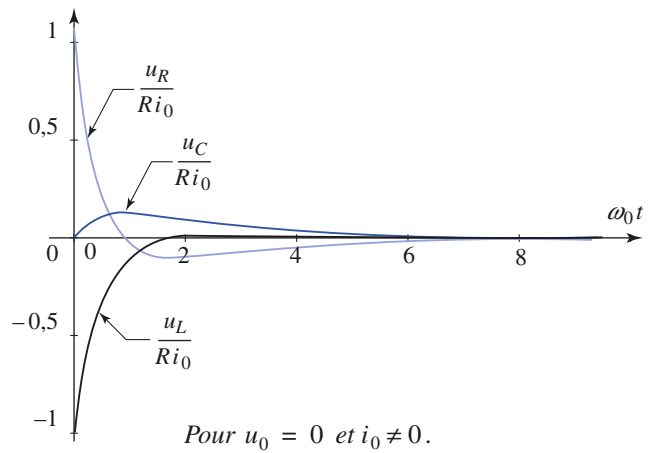
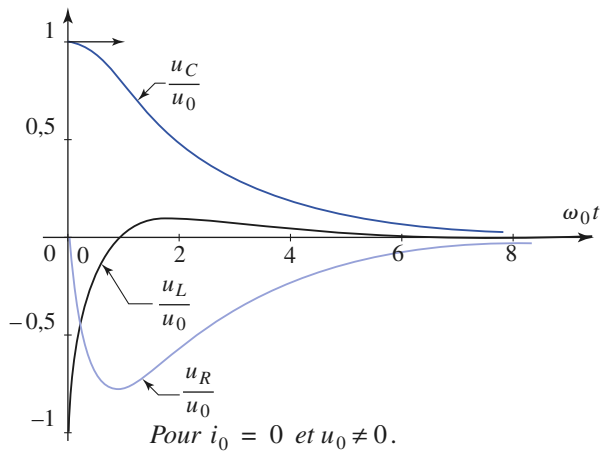
- $q(t)$ ne peut pas s'annuler plus d'une fois ;
- $q(t)$ ne peut pas prendre plus de deux fois la même valeur et ne présente qu'un extremum au plus ;
- quand t tend vers l'infini, $q(t)$ tend vers 0.

Il en est de même pour les grandeurs $i(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$ et $u_R(t)$.



Doc. 14. Régimes apériodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).

Nous remarquons que la « durée » du régime apériodique (temps pendant lequel q prend des valeurs non négligeables) est d'autant plus grande que Q est proche de 0 (doc. 14 et 15).



Doc. 15. d.d.p. aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques $Q = 0,4$.

Application 3

Déterminer $q(t)$ et $i(t)$ en fonction de Q et ω_0 dans le cas du régime apériodique pour les conditions initiales.

1) $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$.

2) $q(0) = 0$ et $i(0) = i_0$.

3) Dans ces deux cas particuliers pour $Q = 0,3$, vérifier que l'une des deux fonctions exponentielles devient rapidement prépondérante.

1) Pour les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$, nous obtenons à partir de la forme générale de la solution :

$$q(t) = q_0 \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} + \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} \right)$$

et $i(t) = q_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$ avec :

$$r_1 = -\omega_0 \frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{2Q} \quad \text{et} \quad r_2 = -\omega_0 \frac{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}{2Q}.$$

2) Pour les conditions initiales $q(0) = 0$ et $i(0) = i_0$, nous obtenons de la même façon :

$$q(t) = i_0 \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2}$$

et $i(t) = i_0 \left(\frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} + \frac{r_2}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} \right)$.

3) Étudions numériquement le cas $Q = 0,3$ en posant $x = \omega_0 t$.

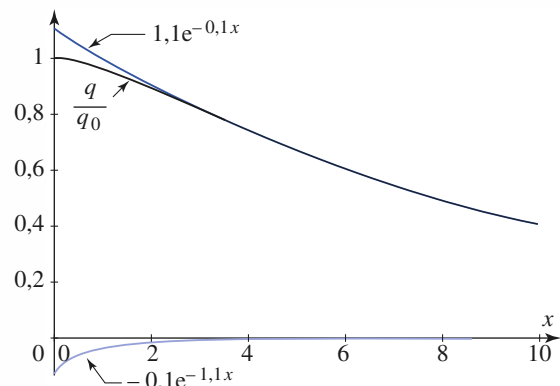
Avec les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$:

$$q(x) = q_0 (1,1e^{-0,1x} - 0,1e^{-1,1x}).$$

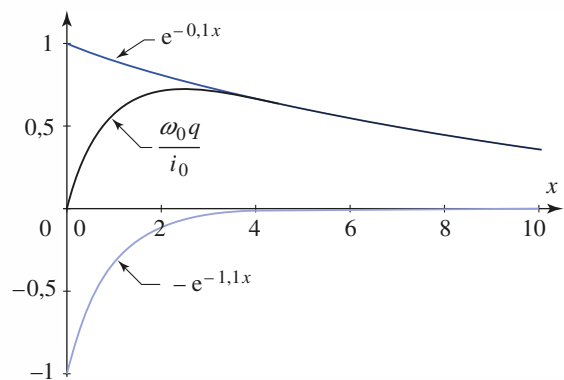
Avec les conditions initiales $q(0) = 0$ et $i(0) = i_0$:

$$q(x) = \frac{i_0}{\omega_0} (e^{-0,1x} - e^{-1,1x}).$$

Nous remarquons, dans les deux cas, que le terme en $\exp(-0,1x)$ de $q(x)$ est prépondérant dès que $x > 4$ (doc. 16 et 17).



Doc. 16. Régime apériodique. $Q = 0,3$; charge initiale du condensateur q_0 .



Doc. 17. Régime apériodique. $Q = 0,3$; intensité initiale i_0 dans le circuit.

3.3.2. $\Delta = 0$ ou $Q = 1/2$: régime critique

Dans ce cas purement théorique (physiquement il est impossible de fixer Q exactement à la valeur 0,5), la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}.$$

$q(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini avec une constante de temps $\tau = \frac{1}{\omega_0}$.

Le régime critique correspond au régime aperiodique de « durée » minimale. L'allure des courbes correspondant à ce régime est voisine de celle des régimes aperiodiques (doc. 14).

Application 4

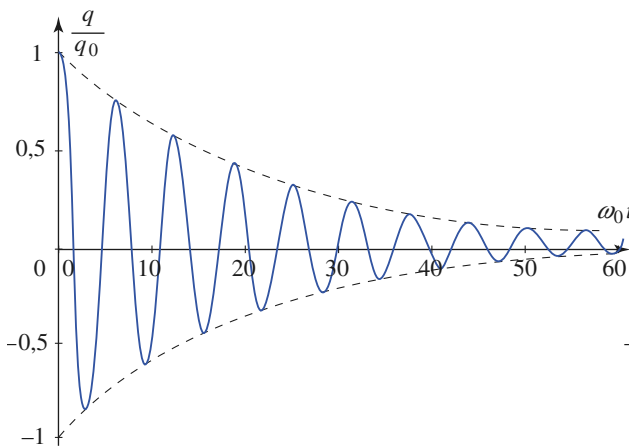
Déterminer $q(t)$ et $i(t)$ en fonction de ω_0 dans le cas du régime critique pour les conditions initiales :

- $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$.
- $q(0) = 0$ et $i(0) = i_0$.

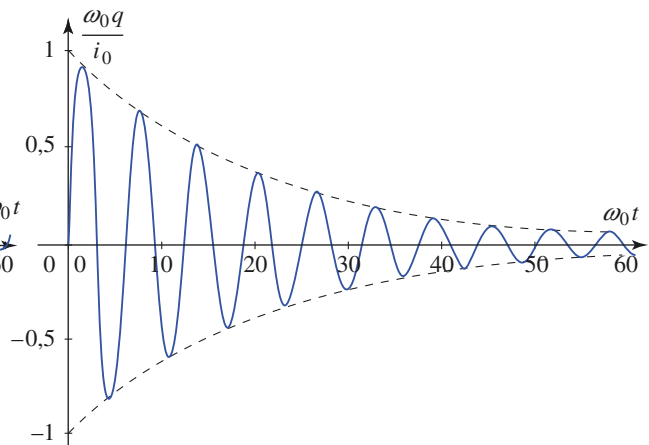
Posons $x = \omega_0 t$.

- $q(x) = q_0(1 + x)e^{-x}$ et $i(x) = -\omega_0 q_0 x e^{-x}$.
- $q(x) = \frac{i_0}{\omega_0} e^{-x}$ et $i(x) = i_0(1 - x)e^{-x}$.

3.3.3. $\Delta < 0$ ou $Q > 1/2$: régime pseudo-périodique



Doc. 18. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$.



Doc. 19. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = 0$ et $i(0) = i_0$.

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes et conjuguées :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Posons $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. τ est homogène à un temps et ω à une pulsation.

La solution générale de l'équation différentielle est :

$$q(t) = \alpha e^{-\frac{t}{\tau} + i\omega t} + \beta e^{-\frac{t}{\tau} - i\omega t} = e^{-\frac{t}{\tau}} (\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}).$$

Or, nous savons que :

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \text{ et } e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t).$$

Nous pouvons donc écrire, en introduisant de nouvelles constantes A et B :

$$q(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

Nous pouvons aussi l'écrire sous la forme équivalente :

$$q(t) = a e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi)$$

où a et φ sont deux constantes déterminées par les conditions initiales.

q(t) se présente donc sous la forme d'une fonction oscillante modulée par une enveloppe exponentielle décroissante (doc. 18 et 19).

Le régime libre est un régime transitoire de temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

Il en est de même pour les grandeurs i(t), u_L(t), u_C(t) et u_R(t).

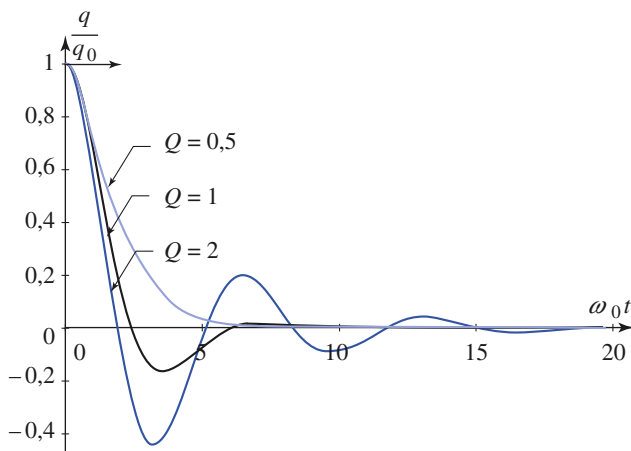
La période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ de la fonction sinusoïdale est appelée

pseudo-période du régime libre. Elle est telle que $q(t+T) = q(t)e^{-\frac{T}{\tau}}$.

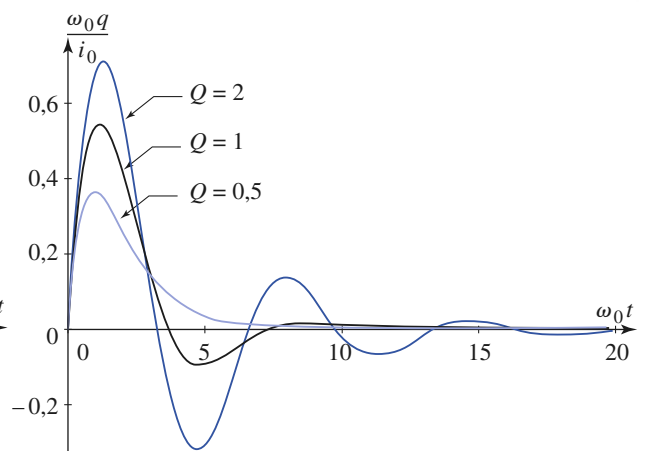
En développant $\cos(\omega t + \varphi)$ on relie les deux formulations équivalentes.

$$A = a \cos \varphi; \quad B = -a \sin \varphi;$$

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \tan \varphi = -\frac{A}{B}.$$



Doc. 20. Régimes pseudo-périodique et critique. Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.



Doc. 21. Régimes pseudo-périodique et critique. Intensité initiale i_0 dans le circuit.

Remarque

Le rapport $\frac{q(t+T)}{q(t)}$ est constant et nous appellerons *décroissement logarithmique* la quantité :

$$\delta = \ln\left(\frac{q(t)}{q(t+T)}\right) = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

La mesure de cette grandeur permet de calculer le coefficient de qualité du circuit.

Nous remarquons sur les tracés que le retour vers l'état d'équilibre $q = 0$ est d'autant plus lent que Q est grand et que la pseudo-période diminue quand Q augmente.

Dès que $Q > 4$, elle est voisine de $\frac{2\pi}{\omega_0}$ avec un écart relatif de moins de 1 %.

Application J

Réalisons un circuit (R, L, C) série très peu amorti ($Q \gg 1$) et effectuons une visualisation sur un oscilloscope numérique des différences de potentiel $u_C(t)$ et $u_R(t)$ en mode XY (un montage du type utilisé au § 5.4. peut être envisagé).

Montrer que la courbe obtenue à l'écran est une spirale logarithmique à une dilatation près de l'axe (Oy).

Le circuit est faiblement amorti ($Q \gg 1$), donc :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \ll \omega_0.$$

$$u_C(t) = \frac{A}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi) \approx \frac{A}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{et} \quad u_R(t) = Ri(t)$$

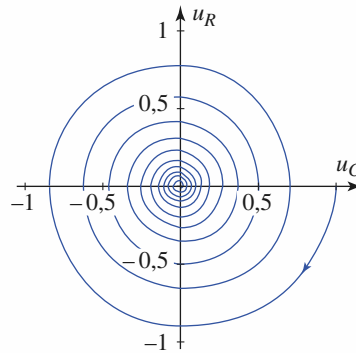
$$= -AR e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right)$$

$$\approx AR e^{-\frac{t}{\tau}} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

En posant $\theta = \omega t + \varphi$, nous obtenons :

$$u_C = K_1 e^{-a\theta} \cos \theta \quad \text{et} \quad u_R = K_2 e^{-a\theta} \sin \theta,$$

où a , K_1 et K_2 sont des constantes positives. À une dilatation près de l'axe (Oy), la courbe obtenue est une spirale logarithmique droite (décrite dans le sens horaire).



Doc. 22. Visualisation de u_C et u_R en mode XY. Condensateur initialement chargé. $Q = 10$.

En conclusion, nous pouvons affirmer que :

Le régime libre est un régime transitoire dont le temps caractéristique est minimal pour le régime critique ($Q = \frac{1}{2}$) et est très grand pour des circuits très amortis ($Q \approx 0$) ou des circuits peu amortis ($Q \gg 1$).

► Pour s'entraîner : ex. 2.

3.4. Étude énergétique

3.4.1. Étude générale

Si nous multiplions par i l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$, nous obtenons :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri^2 = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = -Ri^2.$$

Nous pouvons interpréter cette relation de la façon suivante :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

représente l'énergie emmagasinée dans la bobine et le condensateur, et constitue une fonction positive décroissante du temps. Cette énergie est dissipée par effet Joule dans le résistor et le bilan énergétique du circuit s'écrit $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -P_{\text{Joule}}$.

3.4.2. Cas du régime non amorti

Considérons, dans un premier temps, un circuit idéal non amorti ($R = 0$).

L'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ est alors : $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$.

La solution générale est :

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur vaut $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

et celle dans la bobine $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$.

Nous remarquons que $\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ est constante et que l'énergie « oscille » entre le condensateur et la bobine, sans pertes.

3.4.3. Cas du régime pseudo-périodique faiblement amorti

Pour un circuit peu amorti ($Q \gg 1$) :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \ll \omega_0.$$

$q(t)$ est alors donné par :

$$q(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi) \approx A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right) \approx A e^{-\frac{t}{\tau}} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine vaut :

$$\mathcal{E}(t) \approx \frac{1}{2} \frac{A^2}{C} e^{-\frac{2t}{\tau}} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} L \omega_0^2 A^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \frac{A^2}{C} e^{-\frac{2t}{\tau}}.$$

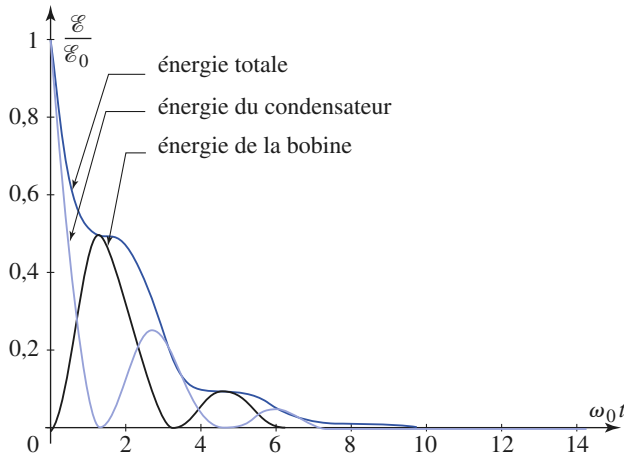
En une pseudo-période T , l'énergie décroît de la quantité :

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{A^2}{C} e^{-\frac{2t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \right),$$

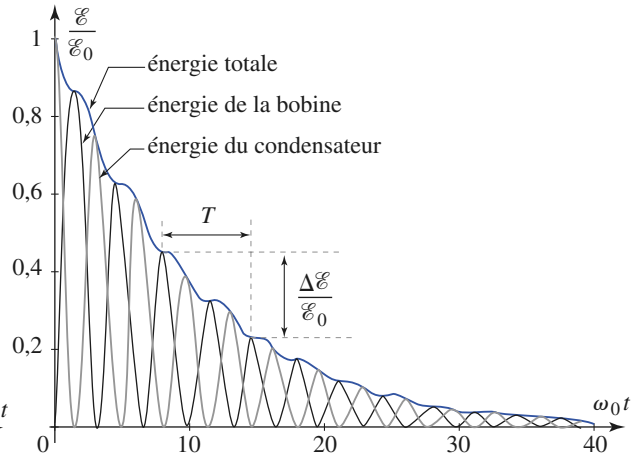
soit, comme $T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \ll \tau$, $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \approx \frac{2T}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}$, ou encore $Q = 2\pi \frac{\mathcal{E}}{\Delta \mathcal{E}}$.

Nous en déduisons une interprétation énergétique du facteur de qualité Q (quand il est grand devant 1). Le facteur de qualité est égal à 2π fois l'énergie emmagasinée dans le circuit divisée par l'énergie dissipée pendant une pseudo-période : cette définition peut s'appliquer à tout système physique (oscillateur mécanique, cavité résonante...).

Sur les courbes tracées (*doc.* 23 et 24), nous remarquons que pour $Q = 10$, l'énergie a une décroissance sensiblement exponentielle, ce qui n'est pas le cas pour $Q = 2$.



Doc. 23. Énergie dans le circuit (R, L, C) $Q = 2$,
 $q(0) = q_0$, $i(0) = 0$, $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$.



Doc. 24. Énergie dans le circuit (R, L, C) $Q = 10$,
 $q(0) = q_0$, $i(0) = 0$, $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$.

4 Réponse à un échelon de tension

Nous supposons dans ce paragraphe que le générateur du circuit délivre une f.e.m. de valeur nulle pour les temps négatifs et de valeur non nulle et égale à e_0 pour les temps positifs. Il délivre un échelon de tension (doc. 25).

Un échelon de tension peut être réalisé à l'aide d'une source de tension constante et d'un interrupteur à deux positions que l'on bascule à l'instant $t = 0$ (doc. 26).

L'intensité dans chaque dipôle et la différence de potentiel à leurs bornes est nulle pour les temps négatifs. En effet, si la source de tension est éteinte depuis un temps très négatif (c'est-à-dire très supérieur en valeur absolue au temps caractéristique du régime transitoire), le circuit est dans l'état d'équilibre du régime libre.

Dans la pratique, un interrupteur simple peut suffire : si la capacité est déchargée tension aux bornes de l'interrupteur est nulle avant sa fermeture.

4.1. Charge d'un condensateur

4.1.1. Régime transitoire

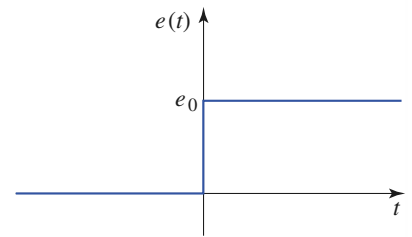
Considérons le montage (doc. 26), où $e(t)$ est un échelon de tension débutant à $t = 0$.

L'application de la loi des mailles donne :

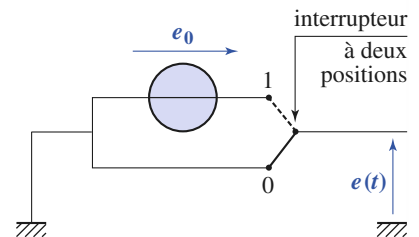
$$e(t) = Ri(t) + u(t), \text{ avec } i(t) = C \frac{du}{dt}, \text{ soit } u(t) + RC \frac{du}{dt} = e(t).$$

La solution générale de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre (régime libre).

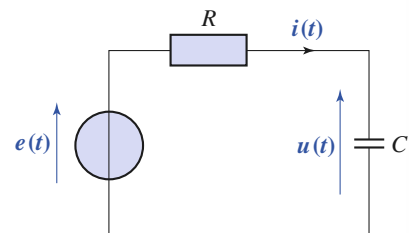
Dans le cas de l'échelon de tension, $u(t) = e_0$ est une solution particulière pour $t > 0$. La solution générale de l'équation est alors $u(t) = e_0 + Ae^{-\frac{t}{RC}}$ pour $t > 0$.



Doc. 25. Échelon de tension débutant à $t = 0$.



Doc. 26. Réalisation d'un échelon de tension.



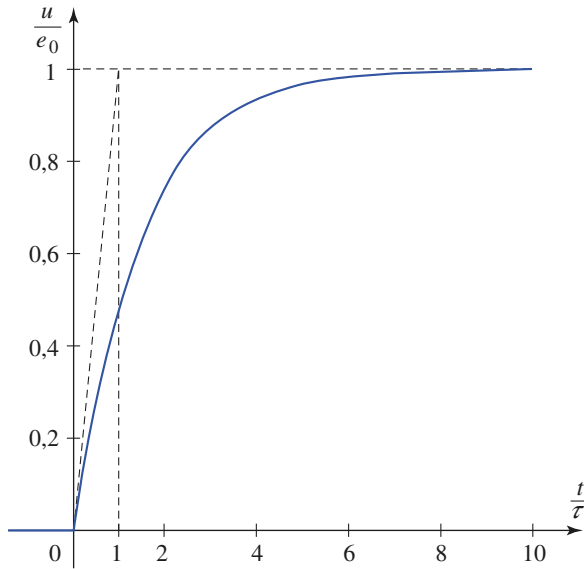
Doc. 27. Circuit d'étude de la charge d'un condensateur à travers une résistance.

Nous savons que la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur est continue. Donc si initialement le condensateur est non chargé, $u(0_+) = 0$.

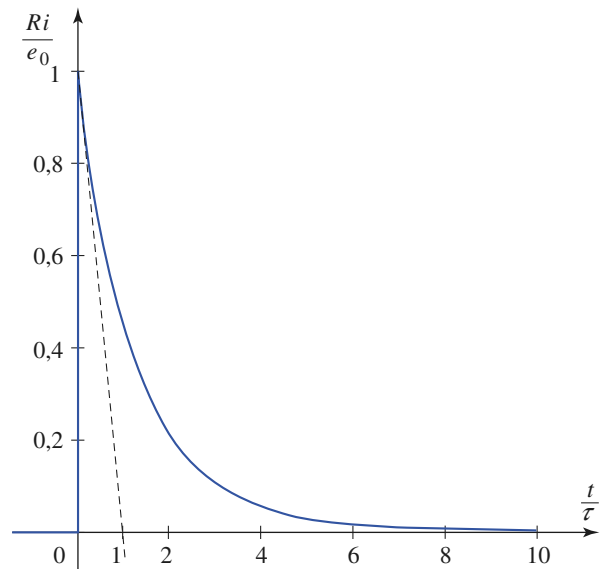
Nous en déduisons : $u(t) = 0$ pour $t < 0$; $u(t) = e_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ pour $t \geq 0$ (doc. 28).

L'intensité dans le circuit est donnée par $i(t) = C \frac{du}{dt}$, soit $i(t) = 0$ pour $t < 0$

et $i(t) = \frac{e_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ pour $t \geq 0$ (i est discontinue à l'instant $t = 0$) (doc. 29).



Doc. 28. Différence de potentiel aux bornes de C.



Doc. 29. Intensité dans le circuit.

Nous remarquons qu'après un temps de l'ordre de quelques $\tau = RC$, la tension aux bornes de C est pratiquement constante et correspond à la valeur du régime établi (le condensateur est un circuit ouvert en régime indépendant du temps). Corrélativement, le courant dans le circuit décroît et s'annule.

Après un régime transitoire d'une durée de l'ordre de τ , l'état du circuit correspond au régime établi indépendant du temps. La durée du régime transitoire chiffre le retard à l'établissement de la différence de potentiel aux bornes de la capacité.

4.1.2. Aspect énergétique

Reprenons l'équation d'évolution sous la forme : $e(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}$ et multiplions-la membre à membre par $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ où nous pouvons identifier :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie par le générateur}} = \mathcal{P}_{\text{dissipée dans la résistance par effet Joule}} + \mathcal{P}_{\text{emmagasinée dans le condensateur}}$$

car $\mathcal{P}_{\text{gén}} = ei$, $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = Ri^2$ et $\mathcal{E}_{\text{cond}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$.

Dans le cas de la charge envisagée, l'énergie totale fournie par le générateur est :

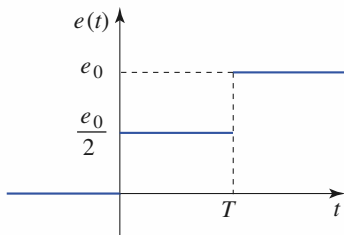
$$\mathcal{P}_{\text{gén}} = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{\text{gén}} dt = e_0 \int_0^{\infty} i dt = e_0 \cdot q_{\text{finale}} = C e_0^2.$$

C'est le double de l'énergie accumulée dans le condensateur. La moitié de l'énergie fournie par le générateur est donc dissipée par effet Joule dans la résistance.

Application 6

1) Lors de la charge d'un condensateur à travers une résistance, cette dernière dissipe autant d'énergie que le condensateur en emmagasine. Ce résultat est indépendant de la résistance du circuit. Comment expliquez-vous cela à une personne qui a décidé de ne pas perdre d'énergie sous forme d'effet Joule en branchant directement un condensateur sur un générateur de tension ?

2) Pour diminuer l'énergie gaspillée, on charge le condensateur en deux temps, avec une source de tension $e(t)$ dont le graphe est donné sur le document 30.



Doc. 30.

On supposera que T est très grand devant RC . Calculer l'énergie dissipée par effet Joule.

1) Un générateur de tension n'est jamais idéal, donc le circuit possède une résistance très faible, mais suffisante pour dissiper $\frac{1}{2}Cu^2$ sous forme d'effet Joule.

On remarquera que si la résistance du circuit est nulle, la durée de charge est nulle ($\tau = RC = 0$) avec une intensité infinie. Cette situation est donc inenvisageable.

2) Comme $T \gg \tau$, il est possible de considérer qu'à l'instant T le condensateur est totalement chargé sous la tension $\frac{e_0}{2}$. Effectuons un bilan d'énergie.

• Entre $t = 0$ et $t = T$: le générateur fournit une puissance : $\mathcal{P}_1(t) = \frac{1}{2}e_0 i(t)$ et donc une énergie :

$$\mathcal{E}_{\text{gén}1} = \int_0^T \frac{e_0}{2} i(t) dt.$$

La charge q qui est passée par le générateur est :

$$\int_0^T i(t) dt = q(T) = C \frac{e_0}{2}.$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_{\text{gén}1} = \frac{1}{4} C e_0^2.$$

• Entre $t = T$ et l'infini : le générateur fournit une puissance : $\mathcal{P}_2(t) = e_0 i(t)$ et donc une énergie :

$$\mathcal{E}_{\text{gén}2} = \int_0^T e_0 i(t) dt.$$

La charge q qui est passée par le générateur est :

$$\int_T^{\infty} i(t) dt = q_{\infty} - q(T) = C \frac{e_0}{2}.$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_{\text{gén}2} = \frac{1}{2} C e_0^2.$$

• Au total : $\mathcal{E}_{\text{gén}} = \frac{3}{4} C e_0^2 = \mathcal{E}_{\text{Joule}} + \mathcal{E}_{\text{accumulée}}$

avec $\mathcal{E}_{\text{accumulée}} = \frac{1}{2} C e_0^2$.

On en déduit :

$$\mathcal{E}_{\text{Joule}} = \frac{1}{4} C e_0^2.$$

Remarque : Nous pourrions refaire ce calcul avec n sauts de $\frac{e_0}{n}$ pour trouver :

$$\mathcal{E}_{\text{Joule}} = \frac{1}{2n} C e_0^2.$$

Il y aurait donc bien un moyen de ne pas perdre d'énergie : faire tendre n vers l'infini en utilisant un générateur de tension, réglable de façon continue. Mais il faut attendre que l'asymptote soit atteinte à chaque étape, cela impliquerait une durée infinie pour l'expérience.

4.2. Établissement du courant dans un circuit inductif

Considérons le montage (doc. 31), où $e(t)$ est un échelon de tension débutant à $t = 0$.

L'application de la loi des mailles donne $e(t) = Ri(t) + u(t)$ avec $u(t) = L \frac{di}{dt}$,

soit $i(t) + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} = \frac{e(t)}{R}$. La solution générale de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre (régime libre).

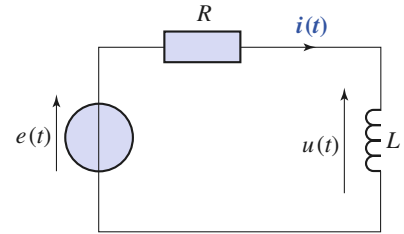
Dans le cas de l'échelon de tension, $i(t) = \frac{e_0}{R}$ est une solution particulière.

La solution générale de l'équation est alors $i(t) = \frac{e_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ pour $t \geq 0$.

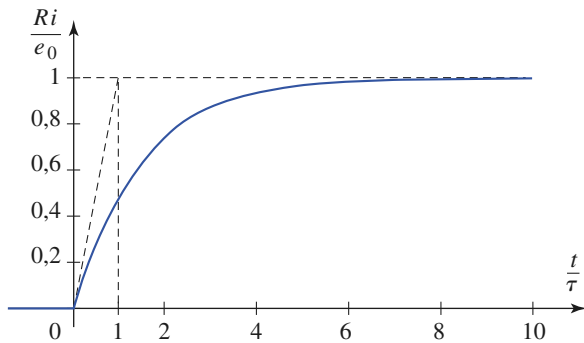
Nous savons que l'intensité traversant une bobine est continue. Comme initialement le courant traversant L est nul, $i(0_+) = 0$.

Nous en déduisons $i(t) = 0$ pour $t < 0$, $i(t) = \frac{e_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ pour $t \geq 0$ (doc. 32).

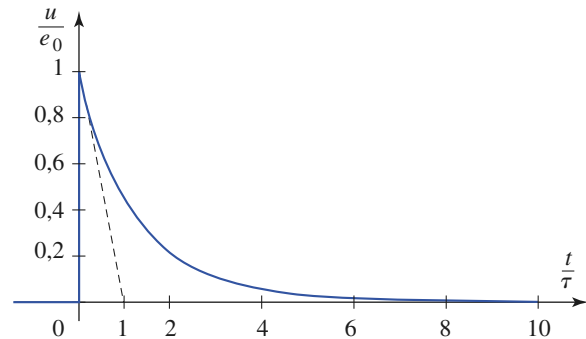
La différence de potentiel aux bornes de la bobine est donnée par $u(t) = L \frac{di}{dt}$, soit $u(t) = e_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ (doc. 33).



Doc. 31. Circuit d'étude de l'établissement du courant à travers une bobine.



Doc. 32. Intensité dans le circuit.



Doc. 33. Différence de potentiel aux bornes de la bobine.

Nous remarquons qu'après un temps de l'ordre de quelques $\tau = \frac{L}{R}$, l'intensité dans le circuit est pratiquement constante et correspond à la valeur du régime établi (la bobine est un court-circuit en régime indépendant du temps). Corrélativement, la différence de potentiel aux bornes de la bobine décroît et s'annule.

Après un régime transitoire d'une durée de l'ordre de τ , l'état du circuit correspond au régime établi indépendant du temps. La durée du régime transitoire chiffre le retard à l'établissement du courant dans la bobine.

4.3. Cas du circuit (R, L, C) série

Considérons le montage général (doc. 34), où $e(t)$ est un échelon de tension débutant à $t = 0$.

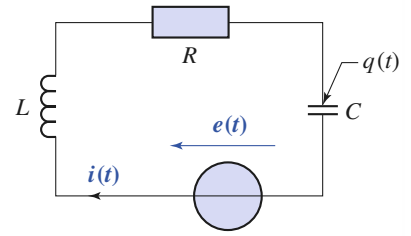
La loi des mailles s'écrit $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} - e(t) = 0$. $q(t)$ vérifie donc l'équation différentielle :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e(t) \text{ ou } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L} = C \omega_0^2 e(t)$$

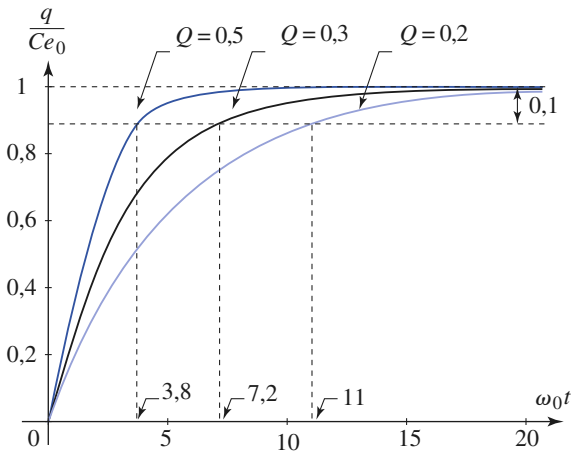
avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.

Dans le cas d'un échelon de tension, $q(t) = Ce_0$ est une solution particulière de l'équation différentielle. Sa superposition à la solution générale de l'équation sans second membre donne les courbes suivantes compte tenu des conditions initiales.

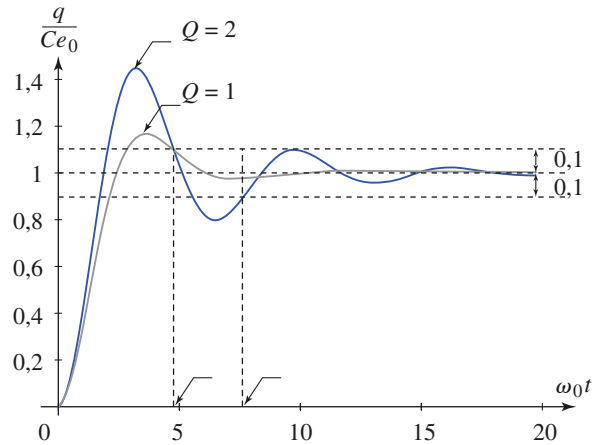
Interprétons les courbes des documents 35 et 36.



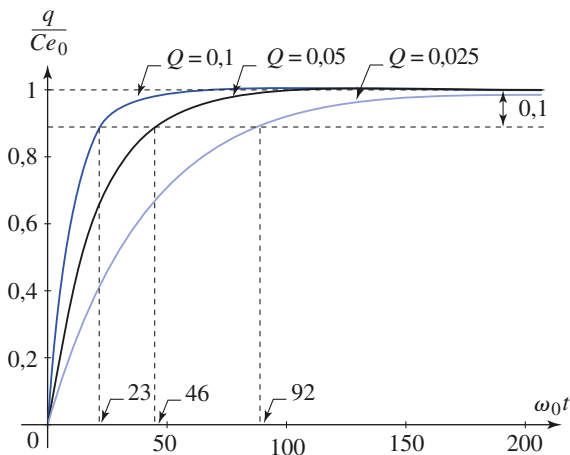
Doc. 34. Circuit d'étude de l'association série (R, L, C).



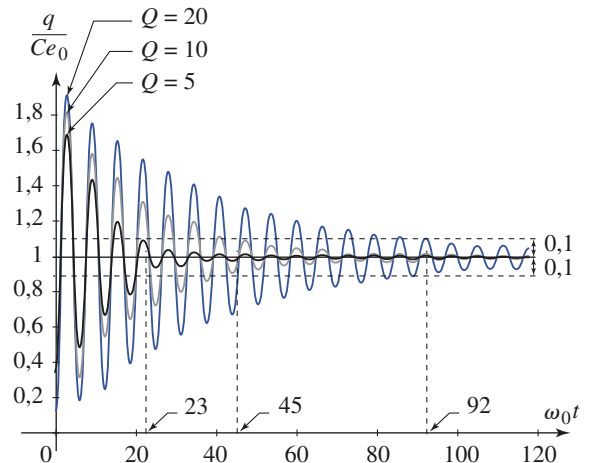
Doc. 35a. Réponse à un échelon de tension. Régimes aperiodiques.



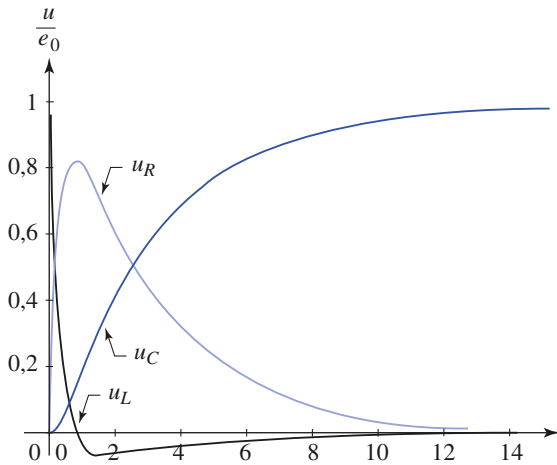
Doc. 36a. Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques.



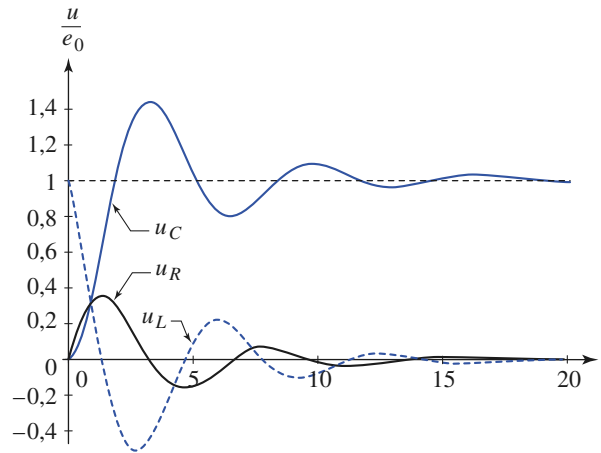
Doc. 35b. Réponse à un échelon de tension. Régimes aperiodiques très amortis.



Doc. 36b. Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques peu amortis.



Doc. 35c. Réponse à un échelon de tension. $Q = 0,3$.



Doc. 36c. Réponse à un échelon de tension. $Q = 2$.

À $t = 0$, $q(t)$ est nulle et présente une tangente horizontale. Nous vérifions ainsi la continuité de $q(t)$ (caractéristique du condensateur) et de $i(t)$ (caractéristique de la bobine).

À $t = 0$, $u_C(t)$ est continue et présente une tangente horizontale, $u_R(t)$ est continue et $u_L(t)$ est discontinue. En effet, $u_C(t) = \frac{q}{C}$ et $u_R(t) = Ri(t)$ présentent les mêmes propriétés de continuité que $q(t)$ et $i(t)$ respectivement.

Quand t est grand, $q(t)$ tend vers Ce_0 solution particulière de l'équation.

C'est le régime établi indépendant du temps.

5 Réalisation expérimentale

Nous connaissons maintenant les caractéristiques des signaux à observer : cela va nous guider lors de la réalisation expérimentale.

5.1. Réglage de l'oscilloscope

Le phénomène à étudier n'étant pas périodique, il ne peut être étudié en temps réel.

Nous devons utiliser un oscilloscope numérique pour étudier une des tensions du circuit : $u_R(t)$, $u_C(t)$ ou $u_L(t)$.

Il faut tout d'abord régler correctement l'oscilloscope.

- **Sensibilité verticale** : la courbe doit occuper une part notable de l'écran sans déborder.

- **Vitesse de balayage** : il faut afficher $u(t)$ entre 0 et t_{\max} , qui est de l'ordre de quelques τ . Connaissant la valeur approximative de τ , on choisit la vitesse de balayage. Si par exemple $\tau \approx 1$ ms, on choisira $500 \mu\text{s}$ par division.

- **Niveau et pente de synchronisation** : l'affichage se déclenche lorsque le signal $u(t)$ passe par le niveau (ou *level*) avec la pente (*slope*) positive ou négative selon le signe choisi. Il faut donc fixer le niveau à une valeur comprise entre u_{\min} et u_{\max} avec une pente de même signe que celle de $u(t)$.

Par exemple, si u passe de 0 à -2 V, il faut choisir un niveau compris entre 0 V et -2 V, avec une pente négative.

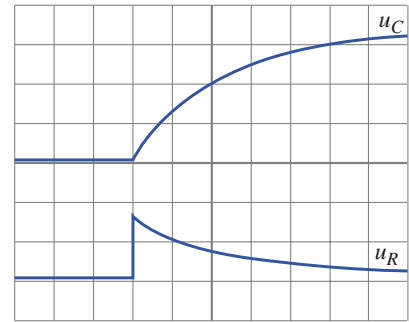
Un niveau trop faible est à éviter, car l'enregistrement risque d'être déclenché par un signal parasite. Une fois les réglages choisis, passer en mode monocoup (*single*) et lancer une acquisition (*run*). La courbe $u(t)$ s'affiche dès que l'interrupteur est fermé.

5.2. Circuit (R, C)

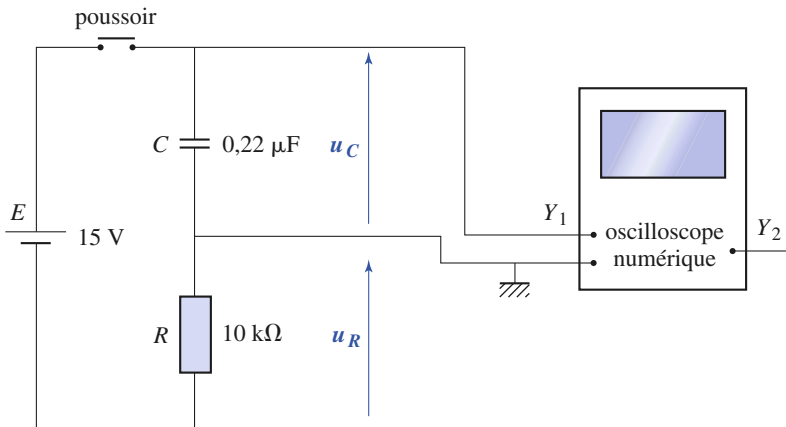
Les condensateurs de qualité (les condensateurs électrochimiques de forte capacité ne permettent pas d'effectuer des mesures fiables) ont des capacités d'au plus quelques microfarads.

L'impédance d'entrée des appareils de mesure (oscilloscope, table traçante, multimètre) est de l'ordre du mégohm.

Nous ne pouvons donc pas espérer observer des temps de relaxation supérieurs à la seconde. La solution la meilleure est d'utiliser un oscilloscope à mémoire numérique car ni la table traçante ni le multimètre ne sont adaptés à des mesures pendant des temps courts (*doc. 37* et 38).



Doc. 37. Réponse du circuit (R, C).
Balayage horizontal : 2 ms/div ;
voie Y_1 : 5 V/div ;
voie Y_2 : 10 V/div.

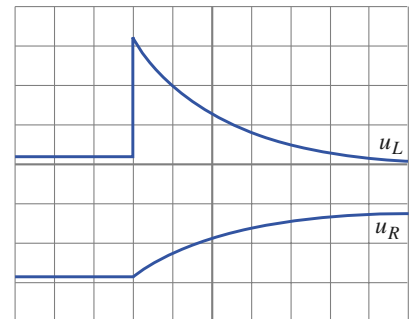


◀ **Doc. 38.** Montage d'étude du circuit (R, C).

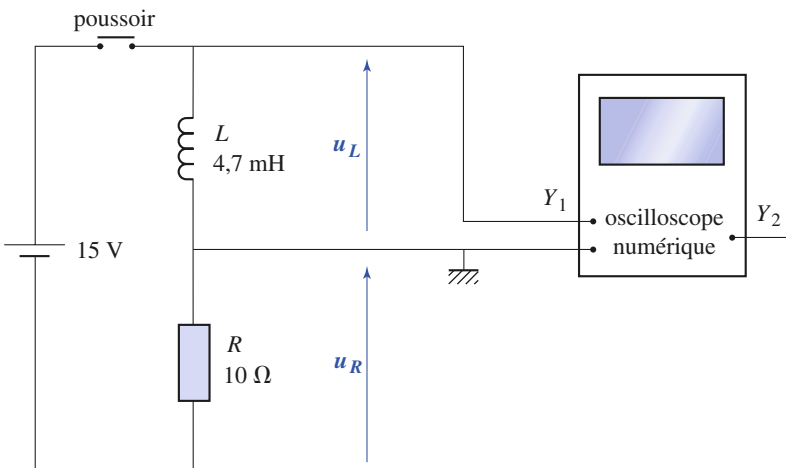
5.3. Circuit (R, L)

Les bobines de faible résistance interne ont des inductances de l'ordre de 100 mH au plus. Leur résistance interne est de l'ordre de l'ohm.

Nous ne pouvons donc pas espérer observer des temps de relaxations supérieurs au dixième de seconde. Nous utiliserons à nouveau un oscilloscope à mémoire numérique. Le réglage du mode de déclenchement de l'oscilloscope est identique à celui du circuit (R, C).



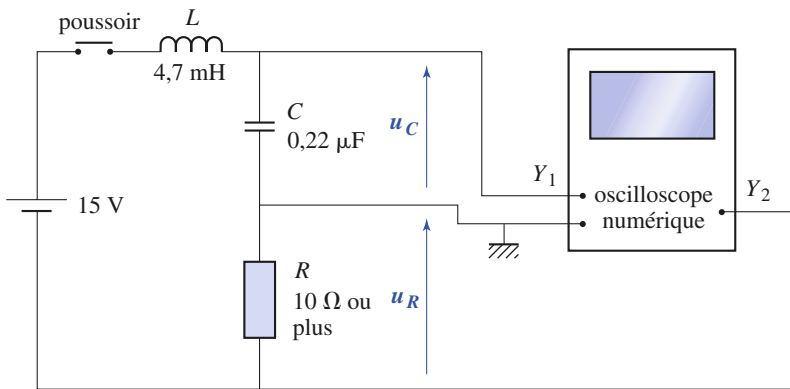
Doc. 39. Réponse du circuit (R, L).
Balayage horizontal : 0,5 ms/div ;
voie Y_1 : 5 V/div ;
voie Y_2 : 10 V/div.



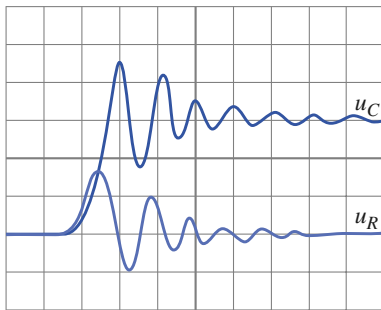
◀ **Doc. 40.** Montage d'étude du circuit (R, L).

5.4. Circuit (R, L, C)

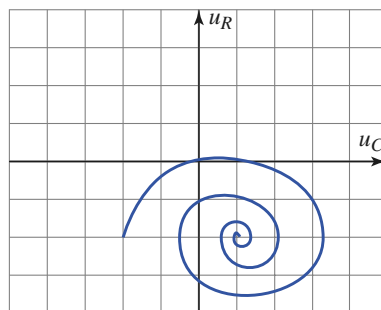
Les remarques concernant le circuit (R, C) et (R, L) sont toujours valables. Nous réalisons en conséquence le montage du document 41.



◀ **Doc. 41.** Montage d'étude du circuit (R, L, C).



Doc. 42a. Réponse du circuit (R, L, C). Balayage horizontal : 0,2 ms/div ;
voie Y1 : 5 V/div ;
voie Y2 : 0,5 V/div ; mode : alt-CH2 ;
synchronisation LF.



Doc. 42b. Réponse du circuit (R, L, C) en mode XY. Balayage horizontal : 0,2 ms/div ;
voie Y1 : 5 V/div ;
voie Y2 : 0,5 V/div ; mode : XY ;
synchronisation : LF.

CQFR

- Le régime libre ou régime propre, d'un circuit est le régime que nous observons lorsque ses sources libres sont éteintes. Les conditions initiales déterminent le régime libre qui en résulte. Ce régime est caractérisé par un temps de relaxation qui permet d'évaluer sa durée.
- Le temps caractéristique du circuit (R, C) est le temps de relaxation $\tau = RC$.
- Le circuit (R, C) est un circuit du premier ordre de constante de temps RC, car les équations différentielles vérifiées par l'intensité et la différence de potentiel sont linéaires du premier ordre.
- Le temps caractéristique du circuit (R, L) est le temps de relaxation est $\tau = \frac{L}{R}$.

Ce circuit est un circuit du premier ordre de constante de temps $\frac{L}{R}$.

• Le circuit (R, L, C) série est un circuit du second ordre ; il est caractérisé par deux grandeurs caractéristiques :

- sa pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;
 - son facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ qui est un nombre sans dimension.
- Suivant les valeurs de Q, les régimes libres sont différents :

$Q < \frac{1}{2}$: régime aperiodique,

$Q = \frac{1}{2}$: régime critique,

$Q > \frac{1}{2}$: régime pseudo-périodique.

Le temps de relaxation le plus court est obtenu pour $Q \approx \frac{1}{2}$ (régime critique). En revanche, celui des circuits fortement amortis ($Q \ll 1$) et très peu amortis ($Q \gg 1$) est grand.

- Lors de la réponse à un échelon de tension :
 - un circuit (R, C) présente un retard à l'établissement de la tension aux bornes de la capacité,
 - un circuit (R, L) présente un retard à l'établissement du courant de la bobine.

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Savez-vous établir l'équation différentielle vérifiée par un circuit (R, L, C) ?
- ✓ Faites apparaître dans l'équation :
 - la constante de temps τ pour (R, L) et (R, C) ;
 - ω_0 et Q pour (R, L, C) ?
- ✓ Comment déterminer les conditions initiales sachant que la tension aux bornes d'un condensateur et le courant traversant une bobine sont des fonctions continues du temps ?
- ✓ Savez-vous déterminer le type de solution :
 - fonction exponentielle pour les circuits (R, L) et (R, C) ;
 - régime pseudo-périodique ou apériodique pour le circuit (R, L, C) ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Avec des composants idéaux, le courant et la tension sont toujours des fonctions continues du temps.

- Vrai Faux

2. Pour un circuit constitué de composants passifs R, L et C , le courant en régime libre tend toujours vers 0.

- Vrai Faux

3. Le régime libre d'un circuit (R, L, C) prend toujours la forme d'oscillations dont l'amplitude tend vers 0.

- Vrai Faux

4. Lorsqu'un circuit (R, C) est soumis à un échelon de tension, l'énergie accumulée est exactement égale à l'énergie dissipée dans la résistance.

- Vrai Faux

5. Un circuit constitué d'une bobine idéale et d'une résistance est soumis à l'instant $t = 0$ à un échelon de tension.

- a. La tension aux bornes de la résistance est discontinue en $t = 0$.

- b. La tension aux bornes de la bobine est discontinue en $t = 0$.

- c. La tension aux bornes de la résistance tend vers 0 pour $t \rightarrow \infty$.

- d. La tension aux bornes de la bobine tend vers 0 pour $t \rightarrow \infty$.

6. Un circuit (R, L, C) série constitué avec des composants idéaux est soumis à l'instant $t = 0$ à un échelon de tension.

- a. La tension aux bornes de la résistance est discontinue en $t = 0$.

- b. La tension aux bornes du condensateur est discontinue en $t = 0$.

- c. La tension aux bornes de la résistance tend vers 0 pour $t \rightarrow \infty$.

- d. La tension aux bornes du condensateur tend vers 0 pour $t \rightarrow \infty$.

- e. La durée caractéristique d'évolution des tensions et des courants est $\tau = \frac{L}{R}$.

► Solution, page 119.

Exercices

1 Décharge rapide d'un condensateur

On charge un condensateur de $1\,000\ \mu\text{F}$ sous $15\ \text{V}$, puis on relie ses deux fils de connexion. Une étincelle se produit en leur point de contact et les deux fils sont soudés l'un à l'autre.

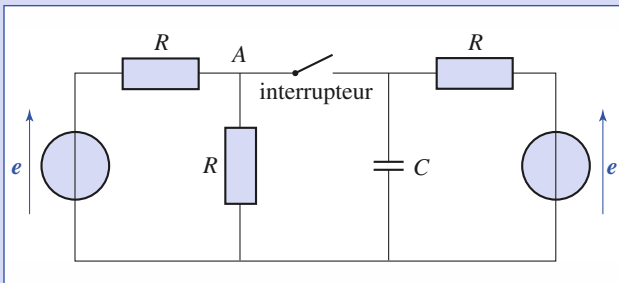
Interpréter cette expérience (pour fixer les ordres de grandeurs la résistance de contact des fils sera égale à $0,1\ \Omega$).

2 Nombre d'oscillations d'un régime libre

Montrer que dans un circuit (R, L, C) peu amorti, le nombre d'oscillations observées (pour l'intensité ou l'une des tensions aux bornes d'un composant du circuit) est de l'ordre du facteur de qualité. Nous admettrons que les oscillations sont visibles si leur amplitude est supérieure au vingtième de l'amplitude initiale.

3 Évolution d'une tension aux bornes d'un condensateur

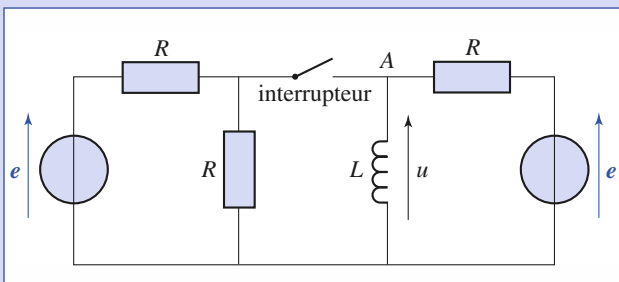
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Décrivez la différence de potentiel $u(t)$ aux bornes du condensateur.



Données : $R = 10\ \text{k}\Omega$, $C = 100\ \mu\text{F}$ et $e = 15\ \text{V}$.

4 Évolution d'une tension aux bornes d'une bobine

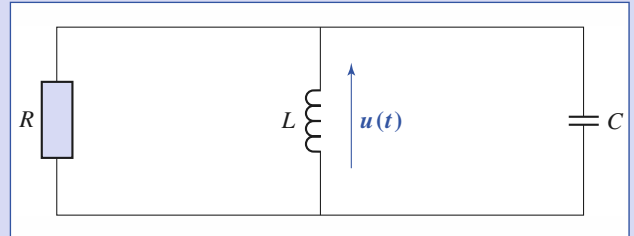
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Décrivez la différence de potentiel $u(t)$ aux bornes de la bobine.



Données : $e = 12\ \text{V}$, $R = 30\ \Omega$ et $L = 100\ \text{mH}$.

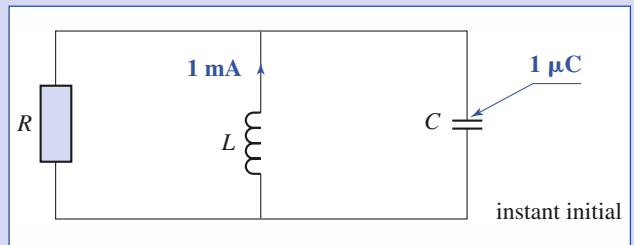
5 Étude du régime libre d'un circuit « bouchon »

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ dans le montage suivant :



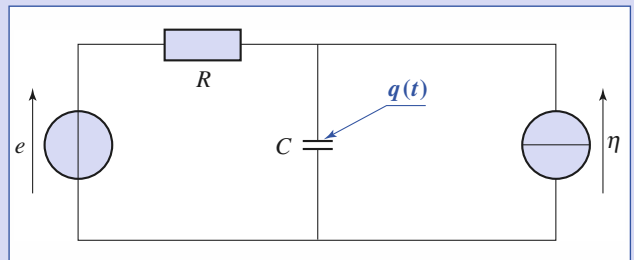
Par analogie avec l'équation différentielle vérifiée par l'intensité dans le circuit (R, L, C) série, définissez le coefficient de qualité Q du circuit.

Exprimez $u(t)$ dans le cas où $R = 10\ \text{k}\Omega$, $L = 100\ \text{mH}$ et, $C = 0,1\ \mu\text{F}$, avec les conditions initiales suivantes : charge du condensateur $1\ \mu\text{C}$ et intensité dans la bobine $1\ \text{mA}$.



6 Utilisation du principe de superposition en régime transitoire

On étudie la charge $q(t)$ du condensateur dans le montage suivant :



À l'instant $t = 0$, $q(0) = q_0$.

On utilise sans précaution le principe de superposition et on écrit $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ avec $q_1(t)$ solution du problème avec la source de courant éteinte et $q_2(t)$ solution avec la source de tension éteinte.

1) Quel résultat obtient-on ? Pour quelle raison est-il évident que ce résultat est faux ?

Exercices

2) Dans l'application du théorème de superposition en régime transitoire, nous devons aussi superposer les charges initiales dans les condensateurs et les courants initiaux dans les bobines.

Une application correcte du théorème de superposition est donc la suivante ; on doit superposer les trois états :

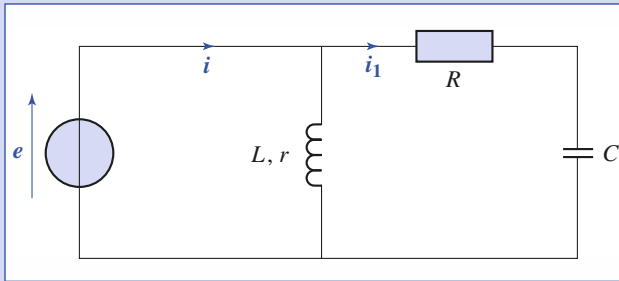
- les deux sources éteintes et $q(0) = q_0$;
- la source de tension éteinte et $q(0) = 0$;
- la source de courant éteinte et $q(0) = 0$.

Quelle valeur obtient-on pour $q(t)$ par cette méthode ?

7

Intensité débitée par un générateur de tension

À quelles conditions sur R , r , L et C , l'intensité traversant le générateur de tension du circuit suivant, est-elle constante dans le temps ? (À $t=0$ le condensateur est déchargé et aucun courant ne traverse la bobine). Déterminer sa valeur.



8

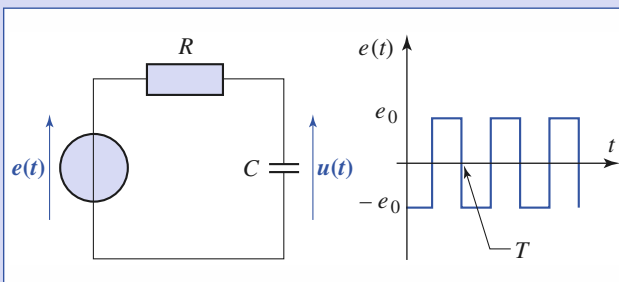
Réponse d'un circuit (R, C) à un signal créneau

On considère le montage suivant où $e(t)$ est une tension de type créneau :

$$e(t) = -e_0, \text{ pour } nT < t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T ;$$

$$e(t) = e_0, \text{ pour } \left(n + \frac{1}{2}\right)T < t < (n + 1)T \text{ (n entier).}$$

Données : $e_0 = 1 \text{ V}$, $R = 1\,000 \, \Omega$, $C = 1 \, \mu\text{F}$ et $T = 2 \text{ ms}$.



1) Donner l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $nT < t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T$ et pour $\left(n + \frac{1}{2}\right)T < t < (n + 1)T$.

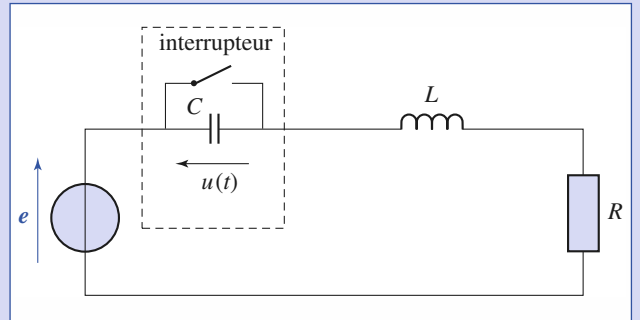
2) Après un certain temps il s'établit un régime périodique. En utilisant la continuité de la charge du condensateur, donner l'expression $u_{\text{établi}}(t)$ pour ce régime. (Ceci peut être l'occasion d'utiliser un logiciel de calcul formel.) Vérifier que ce signal est symétrique et déterminer son amplitude.

3) À $t=0$, le condensateur est non chargé. Donner l'expression de la solution particulière à ajouter à $u_{\text{établi}}$ entre $t=0$ et $t = \frac{T}{2}$.

9

Antiparasitage d'un moteur électrique continu

Un moteur électrique continu nécessite un système de commutation de son circuit électrique. Le circuit peut être schématisé de la façon suivante ; C est le condensateur « d'antiparasitage », L et R représentent la résistance et l'inductance du circuit électrique, l'interrupteur schématise le système de commutation.



1) À l'instant $t=0$, l'interrupteur s'ouvre. Expliciter la différence de potentiel à ses bornes $u(t)$ dans le cas où $\frac{L}{R} \gg RC$.

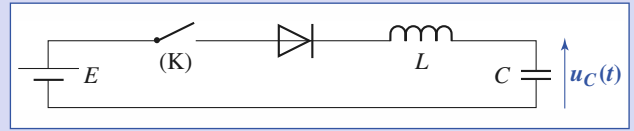
2) Données : $L = 10 \text{ mH}$, $R = 10 \, \Omega$ et $e = 12 \text{ V}$. Évaluer la valeur maximale de $u(t)$ en l'absence de condensateur d'antiparasitage (la capacité C est alors celle de l'interrupteur soit environ 10 pF). Déterminer la valeur de C à choisir pour limiter cette valeur à 500 V .

10

Doubleur de tension

Une source de tension continue de f.e.m. $E = 10 \text{ V}$ est montée en série avec un interrupteur (K), une diode idéale, une bobine idéale d'inductance $L = 10 \text{ mH}$ et un condensateur idéal de capacité $C = 0,1 \, \mu\text{F}$. Le condensateur étant

déchargé, à $t = 0$, l'interrupteur (K) est fermé. Déterminer les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.



Corrigés

Solution du tac au tac, page 116.

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ;
 5. Vrai : b, d Faux : a, c 6. Vrai : c Faux : a, b, d, e

1 L'énergie dissipée dans le circuit est indépendante de sa résistance. En revanche, la durée de la décharge est de l'ordre de grandeur de RC . La puissance dissipée peut être très grande. La partie du circuit la plus résistive est le point de contact entre les fils. C'est en ce point que le maximum d'énergie sera dégagé. Pour une résistance de contact de $0,1 \Omega$, la puissance moyenne dissipée

est de l'ordre de $\frac{1}{2}CU^2$, soit $\frac{1}{2}\frac{U^2}{R} \approx 1100 \text{ W}$ pendant $RC = 100 \mu\text{s}$. Ces valeurs sont suffisantes pour souder les fils.

2 Le circuit est faiblement amorti ($Q \gg 1$), donc :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0 \text{ et } \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \ll \omega_0.$$

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi) \approx Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

L'amplitude est divisée par vingt pour $t = \tau \ln 20 \approx 3\tau \approx 6\frac{Q}{\omega_0}$. Pendant ce temps, il y a eu $\frac{\omega_0 \tau}{2\pi} \approx \frac{6Q}{2\pi} \approx Q$ oscillations (la vérification peut se faire aisément sur les documents 18 et 19).

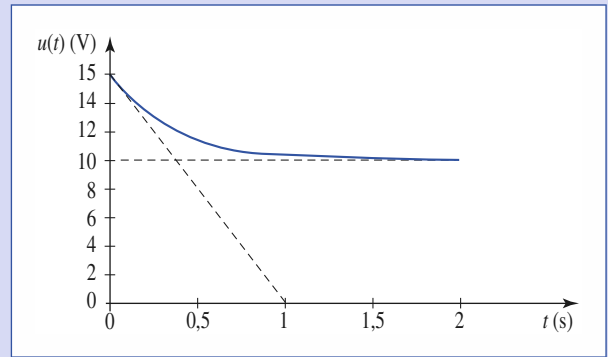
3 L'application de la loi des nœuds en termes de potentiels donne au nœud A :

$$\frac{e - u(t)}{R} + \frac{-u(t)}{R} - C \frac{du}{dt} + \frac{e - u(t)}{R} = 0, \text{ soit } \frac{du}{dt} + \frac{3u}{RC} = \frac{2e}{RC}.$$

La d.d.p. aux bornes du condensateur est continue.

$$\text{À } t=0, u(0) = e, \text{ donc } u(t) = \frac{2e}{3} + e \frac{3t}{RC} e^{-\frac{3t}{RC}}.$$

$$\text{A.N. : } u(t) = 10 + 5 e^{-3t} \text{ avec } u \text{ en volts et } t \text{ en secondes.}$$

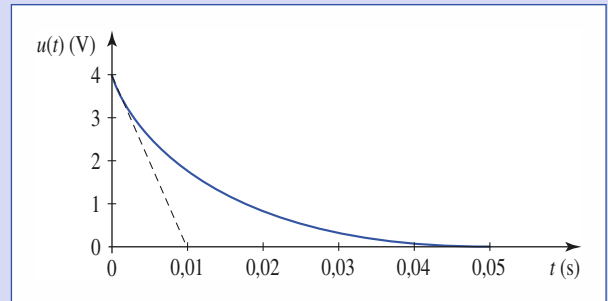


4 L'application de la loi des nœuds en terme de potentiels aux nœuds A donne (pour $t > 0$) :

$$\frac{e - u(t)}{R} + \frac{-u(t)}{R} - i_L + \frac{e - u(t)}{R} = 0 \quad (1)$$

soit en dérivant $\frac{3}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0$. À l'instant $t=0$, l'intensité dans la bobine est continue, $i_L(0) = +\frac{e}{R}$, donc d'après (1) $u(0_+) = \frac{e}{3}$ et $u(t) = \frac{e}{3} \exp\left(-\frac{Rt}{3L}\right)$.

$$\text{A.N. : } u(t) = 4 \exp(-100t) \text{ en termes de potentiel.}$$



5 La loi des nœuds en terme de potentiel donne :

$$i_L = -\frac{u}{R} - \frac{dq}{dt},$$

$$\text{avec } u = L \frac{di_L}{dt} \text{ et } q = Cu.$$

Corrigés

En la dérivant $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$, puis en posant $LC\omega_0^2 = 1$ et

$$Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0, \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0.$$

Cette équation est formellement identique à celle vérifiée par i dans le circuit (R, L, C) série mais avec une expression du facteur de qualité inverse de celle du circuit (R, L, C) série. C'est aisément compréhensible, car le cas limite $R = 0$ du circuit série correspond au cas R infini du circuit parallèle.

Numériquement $\omega_0 = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $Q = 100$. Le circuit est fortement résonant. La continuité de la charge aux bornes du condensateur donne $u(0_+) = 10 \text{ V}$, la continuité de l'intensité dans la bobine donne avec **(1)** $\frac{du}{dt} = 0$. La solution est :

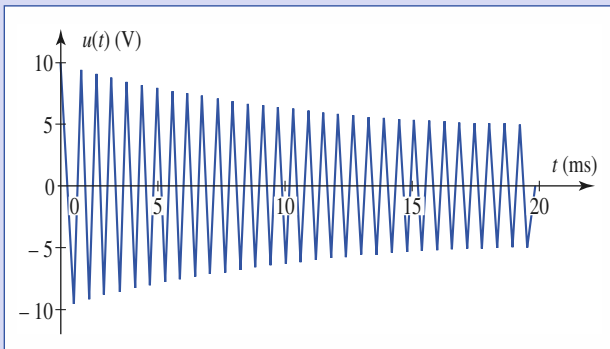
$$u(t) \approx [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec $\omega \approx \omega_0$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 20 \text{ ms}$.

Les conditions initiales donnent :

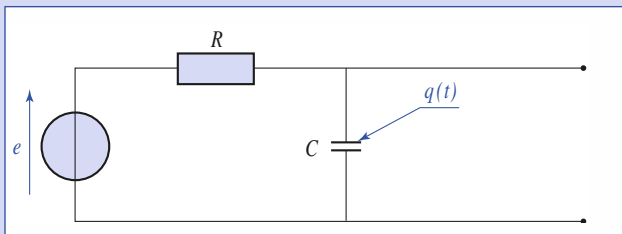
$$A = u(0_+) = 10 \text{ V} \text{ et } B \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ A, soit } B \approx 0.$$

D'où : $u(t) \approx u(0_+) \cos(\omega_0 t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.



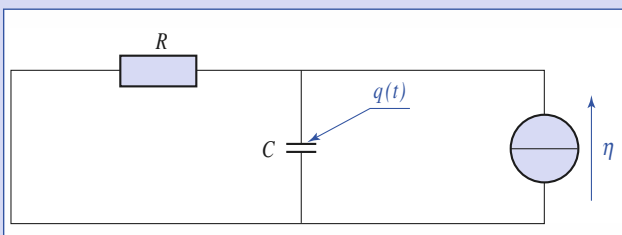
6

1) On obtient, en éteignant la source de courant :



d'où $q_1(t) = Ce + (q_0 - Ce)e^{-\frac{t}{RC}}$.

En éteignant la source de tension :



$$q_2(t) = CR\eta + (q_0 - CR\eta)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

On trouve par superposition :

$$q(t) = C(e + R\eta) + (2q_0 - C(e + R\eta))e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Ce résultat est faux, car $q(0) \neq q_0$.

2) Pour les trois états, on trouve :

- $q_1(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$;
- $q_2(t) = RC\eta \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$;
- $q_3(t) = Ce \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

D'où : $q(t) = C(e + R\eta) + (q_0 - C(e + R\eta))e^{-\frac{t}{RC}}$.

7

Dans la branche (R, C) , nous avons :

$e = Ri_1 + \frac{q_1}{C}$ avec $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$, ce qui nous donne ;

$$q_1(t) = Ce + (q_1(0) - Ce)e^{-\frac{t}{\tau}} = Ce \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \text{ avec } \tau = RC$$

Dans la branche (r, L) , nous avons :

$e = L \frac{d(i - i_1)}{dt} + r(i - i_1)$, donc :

$$\frac{L}{r} \frac{di}{dt} + i = \frac{e}{r} + \frac{L}{r} \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{e}{r} + \frac{e}{r} \left(1 - \frac{L}{rRC}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Le courant i tend donc vers la valeur limite $i(\infty) = \frac{e}{r}$, alors que sa valeur

initiale est $i(0^+) = i_1(0^+) = \frac{e}{r}$, donc : $r = R$.

L'équation différentielle ne peut, de plus, donner une solution constante que si $\frac{L}{rRC} = 1$, donc :

$$L = R^2 r C.$$

Si ces deux conditions sont vérifiées, il reste : $\frac{L}{r} \frac{di}{dt} + i = \frac{e}{R}$, avec

$i(0^+) = \frac{e}{R}$; donc :

$$i(t) = \frac{e}{R} + \left(i(0^+) - \frac{e}{R}\right) e^{-\frac{rt}{L}} = \frac{e}{R} \text{ est alors constant.}$$

Finalement : $r = R, L = R^2 r C, i = \frac{e}{R}$ sont les résultats recherchés.

8

1) Pour $nT < t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T$: $RC \frac{du}{dt} + u = -e_0$,

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)T < t < (n + 1)T : RC \frac{du}{dt} + u = e_0.$$

2) La solution est, pour $nT < t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T$ et pour $u(t) = -e_0 + A_0 e^{-\frac{t}{RC}}$:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)T < t < (n + 1)T, \quad u(t) = e_0 + B_n e^{-\frac{t}{RC}}.$$

La solution établie est périodique, donc $u(nT) = u(n+1)T$. La continuité de la charge du condensateur, donc de $u(t)$, nous autorise à utiliser indifféremment l'une ou l'autre des expressions en $(n + \frac{1}{2})T$ et $(n+1)T$.

$$-e_0 + A_n e^{\frac{nT}{RC}} = e_0 + B_n e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})T}{RC}} \quad \text{et}$$

$$-e_0 + A_n e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})T}{RC}} = e_0 + B_n e^{\frac{(n+\frac{1}{2})T}{RC}}$$

d'où : $A_n = 2e_0 \frac{e^{-\frac{nT}{RC}}}{1 + e^{-\frac{T}{2RC}}}$ et $B_n = -2e_0 \frac{e^{\frac{(n+\frac{1}{2})T}{RC}}}{1 + e^{\frac{T}{2RC}}}$.

On remarque que $u(t + \frac{T}{2}) = -u(t)$ sur l'intervalle $nT < t < (n + \frac{1}{2})T$. le signal est donc symétrique.

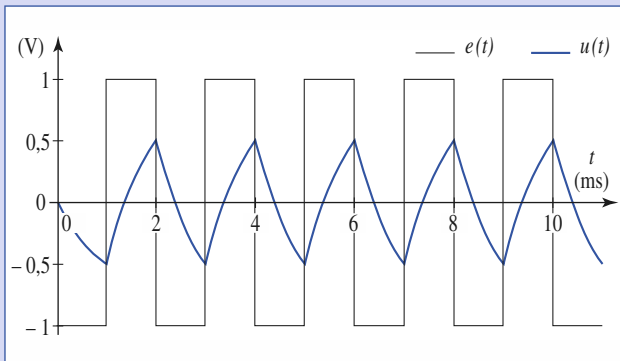
L'amplitude du signal correspond à la valeur $t = nT$, soit :

$$e_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{2RC}}}{1 + e^{-\frac{T}{2RC}}} = e_0 \tanh\left(\frac{T}{4RC}\right), \text{ numériquement } u_{\max} = 0,46 \text{ V.}$$

3) La solution générale de l'équation sans second membre est $u(t) = D e^{\frac{t}{RC}}$.

À $t = 0, u(0) = 0$, donc $D = -e_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{2RC}}}{1 + e^{-\frac{T}{2RC}}}$, d'où :

$$u(t) = u_{\text{établi}}(t) - e_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{2RC}}}{1 + e^{-\frac{T}{2RC}}} e^{\frac{t}{RC}}.$$



9

1) $u(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = e.$$

Les conditions de continuité à $t = 0$ donnent $u(0) = 0$ et $\frac{du}{dt} = \frac{e}{RC}$,

car $i(0) = \frac{e}{R}$. La solution est alors $u(t) \approx \frac{e}{RC\omega_0} \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{Rt}{2L}}$ compte tenu de l'approximation $\frac{L}{R} \gg RC$.

2) $u_{\max} \approx \frac{e}{RC\omega_0} = e \frac{\sqrt{LC}}{RC} = e \sqrt{\frac{L}{R}} \frac{1}{RC}$, car $\frac{L}{R} \gg RC$.

Pour $C = 10 \text{ pF}$, $u_{\max} \approx 40 \text{ kV}$ il y aura donc une étincelle de rupture importante. Pour ne pas dépasser 500 V , $C = 60 \text{ nF}$.

10

À $t = 0$, la présence de la bobine impose $i(0_-) = i(0_+) = 0$, donc la diode est conductrice puisque $u = E - u_C(0) = E > 0$. Tant que la diode est conductrice, elle se comporte comme un interrupteur fermé, donc :

$$E = L \frac{di}{dt} + u_C \quad \text{et} \quad i = C \frac{du_C}{dt}.$$

En éliminant i , nous obtenons $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = E$.

On pose $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, il vient $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega^2 u_C = \omega^2 E$.

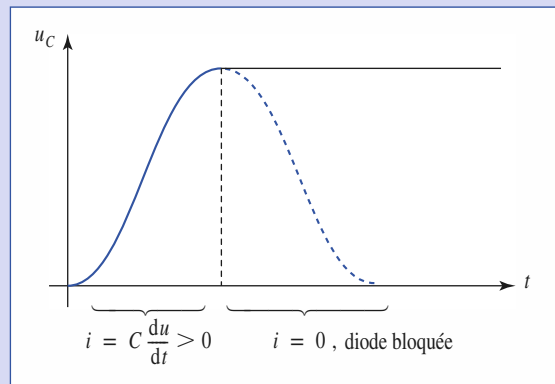
Cette équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants admet une solution de la forme $u_C(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + E$ somme de la solution générale $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ de l'équation sans second membre et de la solution particulière E de l'équation avec second membre.

Pour calculer les constantes d'intégration A et B , on détermine l'expression de

l'intensité : $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = C\omega [-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)]$.

À $t = 0$, on a $u_C(0) = 0 = A + E$ et $i(0) = 0 = CB\omega$, d'où $A = -E$ et $B = 0$, ce qui donne les expressions suivantes $u_C(t) = E(1 - \cos(\omega t))$ et $i(t) = C\omega \sin(\omega t)$.

La diode conduit tant que $i(t) > 0$, c'est-à-dire pour $0 < t < \frac{\pi}{\omega} = t_1$. À $t = t_1$, le courant s'annule et la tension aux bornes du condensateur conserve sa valeur $u_C(t_1) = E[1 - \cos(\omega t_1)] = 2E$. La tension aux bornes du condensateur reste égale au double de la f.e.m. E de la source de tension.



6

Régime sinusoïdal forcé

O B J E C T I F S

- Définir le régime sinusoïdal forcé.
- Introduire la notation complexe.
- Définir la notion d'impédance complexe.
- Formuler, en notation complexe, les lois générales des circuits linéaires.
- Introduire la notion de filtrage en relation avec le phénomène de résonance.
- Puissance en régime sinusoïdal.

P R É R E Q U I S

- Approximation des régimes quasi stationnaires.
- Lois des circuits linéaires en régime quelconque dans l'A.R.Q.S.
- Les régimes de fonctionnement des réseaux (R, L, C).

Introduction

Les sources de tension ou de courant sont très souvent périodiques : citons la tension aux bornes d'une « prise de courant » qui a, en Europe, une fréquence de 50 Hz, ou les signaux électriques qui transmettent une voix ou de la musique qui sont approximativement périodiques pendant une certaine durée.

Parmi les signaux périodiques, le signal sinusoïdal (ou harmonique) occupe une place particulière pour plusieurs raisons. En particulier, il est possible de montrer que tout signal périodique peut se mettre sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux.

Signaux électriques sinusoïdaux

1.1. Signal sinusoïdal

Considérons un signal $s(t)$ effectuant des oscillations sinusoïdales, noté :
 $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$, avec $s_m > 0$ (doc. 1).

1.1.1. Pulsation, période, fréquence

Ce signal a une **pulsation** ω . Il reprend la même valeur aux instants t_0 , $t_0 + \frac{2\pi}{\omega} \dots t_0 + n\frac{2\pi}{\omega}$ (n entier)... : le signal sinusoïdal se répète avec la

période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Sa **fréquence** est $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

1.1.2. Amplitude

Le signal $s(t)$ varie entre les valeurs extrêmes $\pm s_m$: ses oscillations ont une **amplitude** s_m .

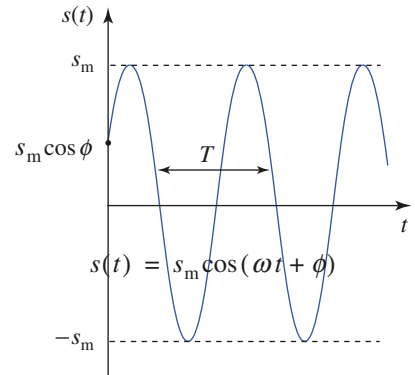
1.1.3. Phase

À l'instant pris comme origine des temps $t = 0$ pour notre étude, ce signal possède une **phase** de valeur ϕ .

Deux signaux sinusoïdaux peuvent avoir la même pulsation ω . C'est le cas, par exemple, pour le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ aux bornes d'un circuit (R, L, C) alimenté par un générateur basse fréquence délivrant un signal sinusoïdal. Ils ne sont pas nécessairement en phase :

$$i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi_i) \quad \text{et} \quad u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

mais le décalage temporel de leurs oscillations se conserve au cours du temps : la tension $u(t)$ est en **avance de phase** de $\varphi = \phi_u - \phi_i$ par rapport au courant $i(t)$.



Doc. 1. $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$ est un signal sinusoïdal ($\omega T = \frac{2\pi}{\omega}$).

1.2. Représentation complexe du signal

1.2.1. Définitions

1.2.1.1. Nombres complexes

Par la suite, nous désignerons un nombre complexe \underline{z} par : $\underline{z} = a + jb$

où a et b sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{z} .

\underline{z} peut aussi s'écrire : $\underline{z} = z e^{j\varphi}$, où $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module du nombre complexe z et φ sont argument, défini par :

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

en particulier, j est le nombre complexe de module 1 et d'argument égal à $\frac{\pi}{2}$, et nous pouvons écrire :

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad j^2 = e^{j\pi} = -1.$$

1.2.1.2. Représentation complexe

À un signal sinusoïdal : $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$

d'amplitude réelle s_m (positive) et de phase ϕ est associée la représentation complexe :

$$\underline{s}(t) = \underline{s}_m e^{j\omega t}$$

d'amplitude complexe : $\underline{s}_m = s_m e^{j\phi}$.

Dans ces conditions, la valeur réelle du signal physique s'obtient simplement en écrivant :

$$s(t) = \Re e(\underline{s}(t)).$$

Notons que l'**amplitude de complexe** s_m contient simultanément les informations d'amplitude s_m et de phase ϕ de signal physique réel.

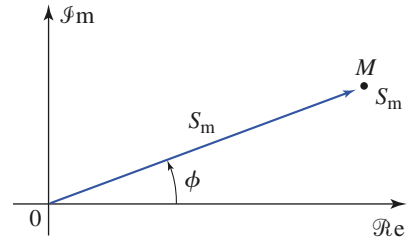
1.2.1.3. Représentation de Fresnel

La représentation de Fresnel de :

$$s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$$

est la représentation géométrique de son amplitude complexe \underline{s}_m dans le plan complexe.

Notons M l'image de \underline{s}_m : le vecteur de Fresnel associé à $s(t)$ est le vecteur de norme s_m et d'angle polaire ϕ . (doc. 2).



Doc. 2. Représentation de Fresnel de la grandeur sinusoïdale :

$$s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi).$$

1.2.2. Opérations linéaires

1.2.2.1. Combinaisons linéaires

La notation complexe s'applique sans difficulté à des résultats d'opérations linéaires effectuées sur les signaux sinusoïdaux.

Ainsi, si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont deux signaux sinusoïdaux représentés par les complexes $\underline{s}_1(t)$ et $\underline{s}_2(t)$, le signal $\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$, où α_1 et α_2 sont des réels, sera représenté par le complexe : $\underline{s}(t) = \alpha_1 \underline{s}_1(t) + \alpha_2 \underline{s}_2(t)$.

1.2.2.2. Dérivation

Dérivons le signal sinusoïdal $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$. Nous obtenons :

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\omega s_m \sin(\omega t + \phi) = \omega s_m \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dériver sa représentation complexe $\underline{s}(t)$ est simple :

$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \underline{s}_m e^{j\omega t} = j\omega \underline{s}.$$

Notons que :

$$\Re e\left(\frac{d\underline{s}(t)}{dt}\right) = \Re e(j\omega \underline{s}) = \Re e\left(s_m e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})}\right) = \frac{ds(t)}{dt}$$

de sorte que la relation entre grandeur réelle et grandeur complexe se transpose aux dérivées (à n'importe quel ordre de dérivation).

1.2.2.3. Intégration : primitive sinusoïdale

Intégrons le signal sinusoïdal en restant dans le domaine des signaux oscillants, de valeur moyenne nulle. Ainsi, nous associons au signal $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$ sa primitive sinusoïdale (constante d'intégration nulle) :

$$S(t) = \frac{s_m}{\omega} \sin(\omega t + \phi) = \frac{s_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Intégrer de la même façon sa représentation complexe $\underline{s}(t)$ revient simplement à poser :

$$\underline{S}(t) = \frac{\underline{s}_m}{j\omega} e^{j\omega t} = \frac{\underline{s}}{j\omega}$$

Attention :

La représentation complexe ne permet pas de déterminer le produit de deux fonctions sinusoïdales.

Considérons en effet deux signaux sinusoïdaux :

$$s_1(t) = s_{1m} \cos(\omega t + \phi_1) \text{ et}$$

$$s_2(t) = s_{2m} \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\bullet s_1(t)s_2(t) =$$

$$\frac{1}{2}s_{1m}s_{2m} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\times \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2).$$

• Le produit des représentations complexes est :

$$\underline{s}_1 \underline{s}_2 = s_{1m}s_{2m} e^{j(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)}.$$

Sa partie réelle est :

$$\Re e(\underline{s}_1 \underline{s}_2) =$$

$$s_{1m}s_{2m} \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2).$$

Il est clair que :

$$\Re e(\underline{s}_1 \underline{s}_2) \neq s_1(t)s_2(t).$$

et nous vérifions que :

$$\Re e(\underline{S}(t)) = \Re e\left(\frac{s}{j\omega}\right) = \Re e\left(\frac{s_m}{\omega} e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})}\right) = S(t).$$

La notation complexe d'un signal peut être utilisée lorsqu'on effectue des OPÉRATIONS LINÉAIRES sur celui-ci : addition, soustraction, multiplication par un réel, dérivation, intégration (avec une constante nulle). Les opérations de dérivation et intégration de la représentation complexe d'un signal sont très simples puisqu'il suffit de multiplier ou diviser, respectivement, le signal complexe par le facteur $j\omega$.

Application 1

Utilisation du plan complexe

Déterminer pour chacun des nombres complexes \underline{z} ci-dessous, le module z , l'argument ϕ et la courbe (C) décrite quand la variable réelle x varie de zéro à l'infini (Q est une constante réelle positive) :

- a) $\underline{z} = 1 + jx$;
- b) $\underline{z} = -1 + jx$;
- c) $\underline{z} = 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)$;
- d) $\underline{z} = 1 - x^2 + j\frac{x}{Q}$.

a) L'image M de \underline{z} décrit la demi-droite $X = 1$, $Y \geq 0$ (doc. 3a). Le module et l'argument de \underline{z} sont respectivement :

$$z = \sqrt{1 + x^2} \text{ et } \phi = \arctan(x) \left(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

b) La courbe (C) décrite par l'image M de \underline{z} est la demi-droite $X = -1$, $Y \geq 0$ (doc. 3b).

Le module et l'argument de \underline{z} valent respectivement :

$$z = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\text{et } \phi = \phi' + \pi = \pi - \arctan(x) \left(\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi\right).$$

c) Le point M décrit la droite $X = 1$ (doc. 3c).

Le module et l'argument valent respectivement :

$$z = \sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\text{et } \phi = \arctan Q\left(x - \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

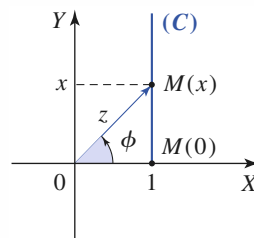
d) En éliminant x entre $X = 1 - x^2$ et $Y = \frac{x}{Q}$, nous obtenons l'équation de la demi-parabole (C) décrite

par l'image M de \underline{z} : $X = 1 - Q^2 Y^2$, avec $Y \geq 0$ (doc. 3d). Le module de \underline{z} est :

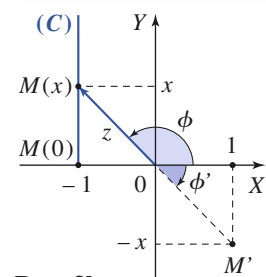
$$z = \sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}$$

et son argument :

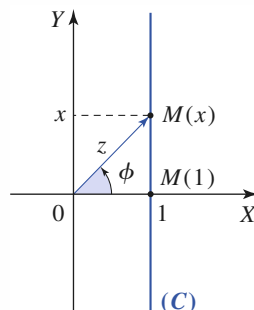
$$\phi = \begin{cases} \arctan\left[\frac{x}{Q(1-x^2)}\right] & \text{si } (1-x^2) \geq 0 ; \\ \pi + \arctan\left[\frac{x}{Q(1-x^2)}\right] & \text{si } (1-x^2) < 0 . \end{cases}$$



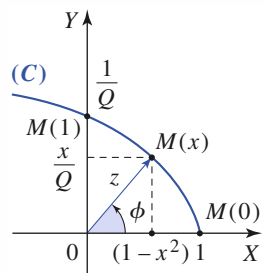
Doc. 3a.



Doc. 3b.



Doc. 3c.



Doc. 3d.

2 Le circuit (R, L, C) série en régime sinusoïdal

2.1. Régime transitoire et régime forcé

2.1.1. Problème à résoudre

Considérons un circuit (R, L, C) série soumis à l'excitation sinusoïdale $e(t)$ délivrée par un générateur basse fréquence. Nous supposons, par exemple, que le générateur délivre, à partir de l'instant $t = 0$, la tension $e(t) = e_m \cos \omega t$ (doc. 4).

Pour ce circuit, nous pouvons écrire :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q}{C} = e(t) = e_m \cos(\omega t) \quad \text{où} \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}.$$

Par dérivation, nous obtenons l'équation d'évolution du courant dans le circuit :

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = -\omega e_m \sin(\omega t).$$

En introduisant la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité

$Q = \frac{L\omega_0}{R}$ du circuit, nous obtenons :

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \frac{-\omega e_m}{L} \sin(\omega t).$$

Pour établir l'évolution du courant dans le circuit, nous devons résoudre cette équation différentielle, linéaire, à coefficients constants possédant un second membre variable.

2.1.2. Solutions de l'équation d'évolution

Supposons déjà connue une **solution particulière** $i_1(t)$ de cette équation avec second membre : $i(t)$ et $i_1(t)$ vérifient la même équation différentielle (mais pas forcément les mêmes conditions initiales !), de sorte que la différence $i_0(t) = i(t) - i_1(t)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{d^2i_0(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_0(t)}{dt} + \omega_0^2 i_0(t) = 0$$

ainsi, la solution cherchée $i(t)$ doit pouvoir s'écrire $i(t) = i_0(t) + i_1(t)$ où :

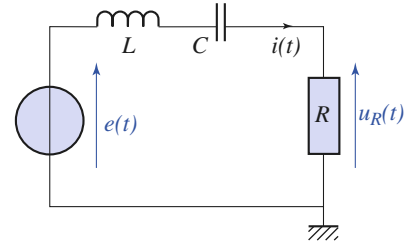
- $i_1(t)$ est une solution particulière de l'équation d'évolution ;
- $i_0(t)$ solution de l'équation sans second membre.

Ce résultat est bien entendu applicable à d'autres équations différentielles, qui seraient aussi linéaires et à coefficients constants. Nous retiendrons que :

La solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$\sum_n a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = f(t)$$

peut s'écrire comme la superposition d'une solution particulière $s_1(t)$ de cette équation avec second membre $f(t)$ et d'une solution $s_0(t)$ de l'équation sans second membre : $s(t) = s_0(t) + s_1(t)$.



Doc. 4. Étude d'un circuit (R, L, C) série.

2.1.3. Régime transitoire

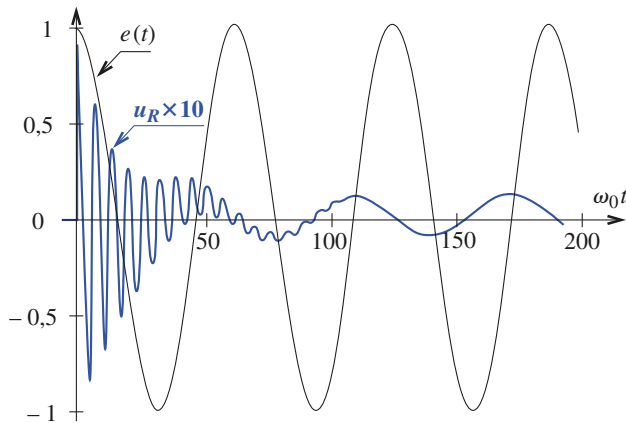
Dans le cas du circuit (R, L, C) nous savons que la résistance entraîne un amortissement des solutions du type $i_0(t)$: lorsque le second membre de l'équation d'évolution est nul, le signal tend vers zéro, et la fonction $i_0(t)$ est pratiquement nulle au-delà de $t = \tau$, temps de relaxation du circuit.

Dans ces conditions, nous pouvons dire que le signal $i(t)$ tend vers la solution particulière $i_1(t)$: après un **régime transitoire** dont la durée est indiquée par le temps de relaxation τ du circuit (R, L, C) série, seule la solution particulière subsiste.

2.1.4. Régime permanent établi

Le circuit est initialement au repos : $i(t)$ et $q(t)$ sont continues, et donc nuls à $t = 0_+$.

Observons la réponse en courant du circuit (doc. 5), soumis à partir de $t = 0$ à l'excitation sinusoïdale de pulsation ω : l'évolution du signal tend vers des oscillations sinusoïdales, son amplitude d'oscillation se stabilisant avec le temps.



◀ **Doc. 5.** Établissement d'un régime sinusoïdal dans un circuit (R, L, C) ($Q = 10$). $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$, avec $\omega = 0,1 \omega_0$ et u_R d.d.p. aux bornes de R .

Nous constatons l'existence d'un régime limite, qui représente la fonction $i_1(t)$.

Ce régime est **permanent et sinusoïdal**.

Une étude plus complète montrerait que ce régime limite a même pulsation que l'excitation. Ne dépendant que de l'excitation imposée, il est de plus indépendant des conditions initiales.

Le régime transitoire menant au régime limite fait intervenir la solution $i_0(t)$, qui dépend des conditions initiales. La nature du régime transitoire dépend du facteur de qualité Q du circuit : pseudo-périodique pour $Q > \frac{1}{2}$, purement exponentiel pour $\frac{1}{2} > Q > 0$.

Lorsqu'un circuit (R, L, C) est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω , un régime permanent sinusoïdal, de même pulsation que l'excitation imposée, s'établit après un régime transitoire qui dépend du facteur de qualité du circuit.

Lorsque le régime sinusoïdal permanent est établi, la réponse de l'oscillateur correspond à un régime d'oscillations forcées, qui est imposé par l'excitation. Cette évolution, établie après le régime transitoire, ne fait pas intervenir les conditions initiales.

2.2. Détermination du régime permanent sinusoïdal

Lorsque nous observons les signaux électriques d'un circuit (R, L, C) alimenté par une tension excitatrice sinusoïdale $e(t) = e_m \cos(\omega t)$, nous ne voyons pas apparaître le régime transitoire, qui a disparu depuis longtemps ; nous ne nous intéresserons donc ici qu'au signal $i_1(t)$ qui seul subsiste : il est sinusoïdal, de même pulsation que l'excitation :

$$i_1(t) = i_{1m} \cos(\omega t + \phi).$$

Cherchons à déterminer les paramètres de ce signal.

2.2.1. Une méthode fastidieuse

Nous devons déterminer l'amplitude i_m et la phase ϕ de cette solution particulière. Reportons donc cette expression dans l'équation avec second membre sinusoïdal :

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = -\omega e_m \sin(\omega t)$$

ce qui donne :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) i_{1m} \cos(\omega t + \phi) - \frac{\omega \omega_0}{Q} i_{1m} \sin(\omega t + \phi) = -\frac{\omega e_m}{L} \sin(\omega t).$$

Développons cette expression de façon à ne garder que des termes en $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$:

$$\begin{aligned} & \left[(-\omega^2 + \omega_0^2) \cos \phi - \frac{\omega \omega_0}{Q} \sin \phi \right] \cos(\omega t) \\ & + \left[(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi - \frac{\omega \omega_0}{Q} \cos \phi \right] \sin(\omega t) = \frac{-\omega e_m}{L i_{1m}} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Cette relation, valable pour tout t , permet d'identifier les termes en $\cos(\omega t)$ et en $\sin(\omega t)$:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2) \cos \phi + \frac{\omega \omega_0}{Q} \sin \phi = 0 \\ (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi - \frac{\omega \omega_0}{Q} \cos \phi = -\frac{\omega e_m}{L i_{1m}} \end{cases}$$

et donc :

$$\cos \phi = \frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2} \frac{\omega e_m}{L i_{1m}} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2} \frac{\omega e_m}{L i_{1m}}.$$

Pour éliminer ϕ , écrivons que $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$. Il reste, pour l'amplitude i_m du courant (positive) :

$$i_{1m} = \frac{\frac{\omega e_m}{L}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}.$$

En reportant dans les équations précédentes, il vient enfin :

$$\cos \phi = \frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}.$$

La réponse $i_1(t) = i_{1m} \cos(\omega t + \phi)$ est donc déterminée. Les calculs sont longs, et cette méthode fastidieuse est à proscrire, dans la mesure où l'utilisation de la notation complexe permet une résolution beaucoup plus rapide comme nous allons le voir.

L'utilisation de la notation complexe permet d'obtenir l'amplitude complexe de la réponse en régime permanent sinusoïdal du circuit (R, L, C).

Le module et la phase de cette amplitude complexe permettent d'obtenir l'expression de la solution du régime sinusoïdal forcé.

2.2.2. Obtention de la solution particulière avec la notation complexe

2.2.2.1. Notation complexe

La tension excitatrice et la solution sinusoïdale recherchée sont :

$$e(t) = e_m \cos \omega t \quad \text{et} \quad i_1(t) = i_{1m} \cos(\omega t + \phi)$$

qui peuvent être désignées par leurs représentations complexes :

$$\underline{e}(t) = e_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{e}_m = e_m \quad \text{et} \quad \underline{i}_1(t) = \underline{i}_{1m} e^{j\omega t} = i_{1m} e^{j(\omega t + \phi)}.$$

2.2.2.2. Les grandeurs réelles et complexes vérifient la même équation

Les fonctions $e(t)$ et $i_1(t)$ sont liées par l'équation différentielle :

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = \frac{de(t)}{dt}$$

c'est une équation différentielle linéaire et à coefficients constants, donc les représentations complexes $\underline{e}(t)$ et $\underline{i}_1(t)$ satisfont encore cette équation d'évolution.

2.2.2.3. Solution de l'équation différentielle

Pour les grandeurs complexes :

$$L \frac{d^2 \underline{i}_1(t)}{dt^2} + R \frac{d \underline{i}_1(t)}{dt} + \frac{\underline{i}_1(t)}{C} = \frac{d \underline{e}(t)}{dt}.$$

La dérivation temporelle se résume ici à la multiplication par $j\omega$, donc :

$$\left(-L\omega^2 + j\omega R + \frac{1}{C}\right) \underline{i}_{1m} e^{j\omega t} = j\omega \underline{e}_m e^{j\omega t}.$$

L'amplitude complexe du courant s'obtient immédiatement :

$$\underline{i}_{1m} = \frac{j\omega \frac{e_m}{L}}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \omega_0^2} = \frac{\frac{\omega e_m}{L}}{\frac{\omega}{Q\omega_0} + j(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

On peut aussi déterminer ϕ par

$$\tan \phi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\frac{\omega}{Q\omega_0}} \quad \text{avec}$$

$$\phi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

De façon générale, la donnée de $\sin \phi$ ou $\cos \phi$ ou $\tan \phi$ ne suffit pas à déterminer ϕ entre $-\pi$ et $+\pi$.

Il faut préciser le signe d'une seconde fonction trigonométrique de ϕ ou indiquer un domaine plus restreint.

En particulier ici :

- Si $\tan \phi = X$ et $\cos \phi > 0$, alors : $\phi = \arctan X$.
- Si $\tan \phi = X$ et $\cos \phi < 0$, alors : $\phi = \arctan X \pm \pi$.

Le dénominateur de cette expression est de la forme :

$$\frac{\omega}{Q\omega_0} + j(\omega^2 - \omega_0^2) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} e^{j\varphi}$$

avec :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

Nous pouvons donc identifier, dans l'amplitude complexe, l'amplitude et la phase de la solution sinusoïdale $i_1(t)$ recherchée :

$$\underline{i}_{1m} = \frac{\frac{\omega e_{-m}}{L} e^{-j\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} = i_{1m} e^{-j\varphi}$$

où nous retrouvons les valeurs i_{1m} et $\phi = -\varphi$ précédentes : la solution particulière $i_1(t) = i_{1m} \cos(\omega t + \phi)$ est identifiée.

Application 2

Solution complète $i(t) = i_0(t) + i_1(t)$

Déterminer la solution complète $i(t)$ en courant, le circuit (R, L, C) série du doc. 4 étant alimenté par la tension $e(t) = e_m \cos \omega t$ à partir de l'instant $t = 0$, si le facteur de qualité Q du circuit est plus grand que $\frac{1}{2}$.

La solution libre a été étudiée au chapitre précédent.

Pour $Q > \frac{1}{2}$, elle correspond à un régime pseudo-périodique :

$$i_0(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (I \cos \omega_1 t + J \sin \omega_1 t)$$

$$\text{avec } \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On sait que $i(t) = i_0(t) + i_1(t)$

avec $i_1(t) = i_{1m} \cos(\omega t + \phi)$.

Les constantes I et J sont fixées par les conditions initiales. Le courant dans l'inductance est continu, donc nul à $t = 0_+$.

$$i(0) = 0 = I + i_{1m} \cos \phi, \text{ d'où :}$$

$$I = -i_{1m} \cos \phi.$$

La charge du condensateur est continue, donc nulle. Nous en tirons :

$$e_m = \left(L \frac{di}{dt} \right)_{t=0_+} = L \left(-\frac{I}{\tau} + \omega_1 J - \omega i_{1m} \sin \phi \right)$$

$$\text{d'où :} \quad J = \frac{e_m}{L\omega_1} + \frac{i_{1m}}{L\omega_1} \left(\omega \sin \phi - \frac{\cos \phi}{\tau} \right).$$

Nous avons donc déterminé la fonction $i(t)$, représentée sur le document 5.

$$i(t) = i_0(t) + i_1(t) = i_{1m} \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \left[-\cos \phi \cos \omega_1 t + \left(\frac{e_m}{L\omega_1} + \frac{i_{1m}}{L\omega_1} \left(\omega \sin \phi - \frac{\cos \phi}{\tau} \right) \right) \sin \omega_1 t \right] + \cos(\omega t + \phi) \right]$$

qui se confond avec la solution particulière $i_1(t) = i_{1m} \cos(\omega t + \phi)$ pour $t \gg \tau$.

2.3. Réponses en courant et charge du circuit (R, L, C)

2.3.1. Observation des réponses

Nous nous intéresserons désormais à la seule réponse sinusoïdale, le régime transitoire ayant disparu plus ou moins rapidement.

Un générateur de signal sinusoïdal délivrant la tension $e(t) = e_m \cos \omega t$, nous pouvons observer :

- la réponse en charge, indiquée par la tension $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ aux bornes du condensateur (doc. 6.a.) ;
- la réponse en courant, indiquée par la tension $u_R(t) = Ri(t)$ aux bornes de la résistance (doc. 6.b.).

Notons $q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$ et $i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi)$ ces réponses en régime établi.

Sachant que $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, nous avons :

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = e(t) = e_m \cos(\omega t).$$

L'utilisation de la notation complexe nous donne immédiatement l'amplitude complexe (ici $\underline{e}_m = e_m$) :

$$\underline{q}_m = \frac{C e_m}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{C e_m}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}.$$

Dans la mesure où $i(t) = j\omega \cdot q(t)$, nous obtenons tout aussi rapidement :

$$\underline{i}_m = \frac{j\omega C e_m}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\frac{\omega e_m}{L}}{\frac{\omega}{Q\omega_0} + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

qui est le résultat obtenu au paragraphe précédent.

2.3.2. Étude de la réponse en courant

À amplitude e_m constante, faisons varier la pulsation du générateur de tension : l'amplitude i_m et la phase ϕ du courant dans le circuit, qui dépendent de ω , évoluent.

2.3.2.1. Pulsation réduite

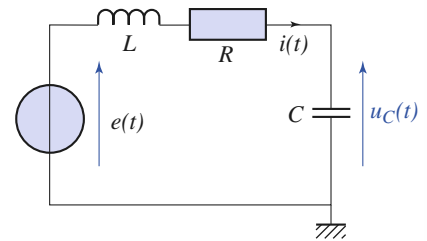
Notons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, grandeur sans dimension. L'amplitude complexe peut s'écrire (ici $\underline{e}_m = e_m$) :

$$\underline{i}_m = \frac{jxC\omega_0 e_m}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} = \frac{QC\omega_0 e_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

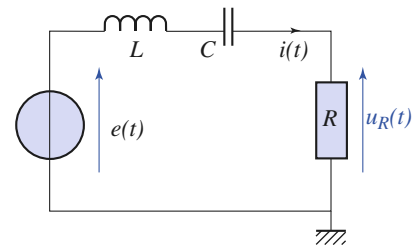
2.3.2.2. Amplitude du courant

L'amplitude du courant est alors :

$$i_m = \frac{QC\omega_0 e_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$



a. Réponse en charge.



b. Réponse en courant.

Doc. 6. Observation de la réponse en régime permanent sinusoïdal du circuit (R, L, C).

• Elle est nulle en $x = 0$ (limite basse fréquence) : le condensateur bloque le courant en régime continu. À fréquence nulle, il se comporte comme un interrupteur ouvert (doc. 7a).

• Elle est nulle pour $x \rightarrow \infty$ (limite haute fréquence) : l'inductance s'oppose aux variations très rapides du courant, elle se comporte à son tour comme un interrupteur ouvert (doc. 7b).

Elle passe par un maximum pour $x = 1$: le circuit (R, L, C) série présente une résonance en courant lorsque la pulsation coïncide avec sa pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (doc. 8).

2.3.2.3. Acuité de la résonance

À la résonance, l'amplitude maximale est :

$$i_{m, \max} = i_m(\omega_0) = QC\omega_0 e_m = \frac{e_m}{R}.$$

Nous définirons la bande passante de la réponse par la plage de pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ dans laquelle l'amplitude vérifie : $i_m \geq \frac{i_{m, \max}}{\sqrt{2}}$.

Les limites de cette zone correspondent à : $Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$, ou encore : $x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$ dont les solutions positives sont :

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}.$$

La bande passante en courant, donnée par $\omega_1 = x_1\omega_0$ et $\omega_2 = x_2\omega_0$ a donc une largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. Elle est d'autant plus étroite que le facteur de qualité Q du circuit est grand.

2.3.2.4. Phase du courant

La phase ϕ du courant est définie par :

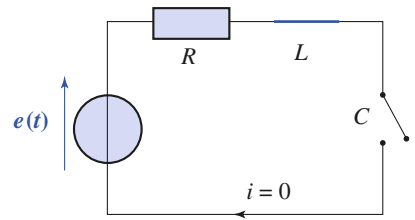
$$\underline{i}_m = \frac{QC\omega_0 e_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = i_m e^{j\phi}$$

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{-Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$

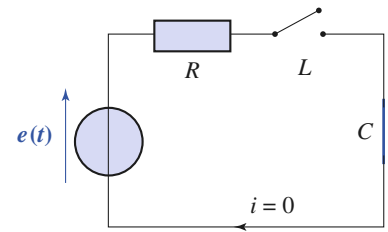
Le cosinus étant positif, la phase ϕ est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et nous pouvons l'écrire (cf. l'encadré, page 129) :

$$\phi = -\arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right].$$

Cette phase démarre à $\frac{\pi}{2}$ à basse fréquence ($x \ll 1$), et décroît jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$ à haute fréquence ($x \gg 1$). À la résonance ($x = 1$), elle est nulle (doc. 9).

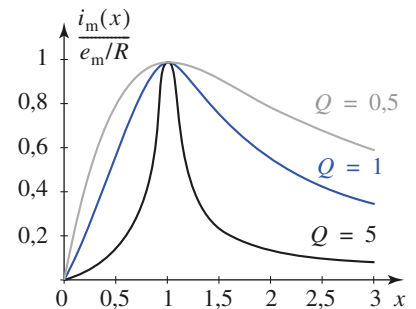


a. Équivalent basse fréquence

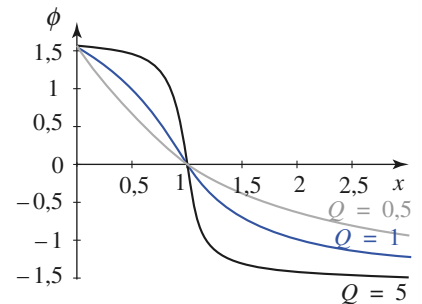


b. Équivalent haute fréquence

Doc. 7. Comportements asymptotiques du circuit (R, L, C).



Doc. 8. Variations de $\frac{i_m(x)}{e_m/R}$ en fonction de x pour $Q = \frac{1}{2}$, $Q = 1$ et $Q = 5$.



Doc. 9. Variations du déphasage $\phi(x)$ de la réponse $i(t)$ par rapport à l'excitation $e(t)$ en fonction de x pour $Q = \frac{1}{2}$, $Q = 1$ et $Q = 5$.

La rotation de phase au voisinage de $x = 1$ est d'autant plus rapide que le facteur de qualité Q est élevé.

Dans le circuit (R, L, C) série (pulsation propre ω_0 , facteur de qualité Q), le courant est nul à très haute ($\omega \gg \omega_0$) et très basse ($\omega \ll \omega_0$) fréquence. Une résonance en courant est observée lorsque le circuit est excité exactement à sa pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Le courant est alors en phase avec la tension excitatrice. L'acuité de la résonance augmente avec le facteur de qualité du circuit.

2.3.3. Étude de la réponse en charge

Reprenons l'amplitude complexe de la réponse en charge (ici $\underline{e}_m = e_m$) :

$$\underline{q}_m = \frac{C e_m}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{C e_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

2.3.3.1. Amplitude de la charge

L'amplitude correspondante est :

$$q_m = \frac{C e_m}{\sqrt{\frac{x^2}{Q^2} + (1 - x^2)^2}}$$

Elle est non nulle en $x = 0$: le condensateur est chargé en régime continu avec $q_m(0) = C e_m$. Elle est nulle pour $x \rightarrow \infty$.

Pour $x = 1$, nous obtenons $u_C = Q e_m$: si Q est supérieur à l'unité il y a une surtension aux bornes de la capacité (doc. 10).

2.3.3.2. Résonance en tension

Un éventuel maximum de q_m correspond au minimum de :

$$f(x) = x^2 + Q^2(1 - x^2)^2 = g(X), \text{ où } X = x^2.$$

La dérivée $\frac{dg(X)}{dX} = 2X(1 - Q^2(1 - X))$ s'annule en $X = 0$, et en $X = 1 - \frac{1}{2Q^2}$.

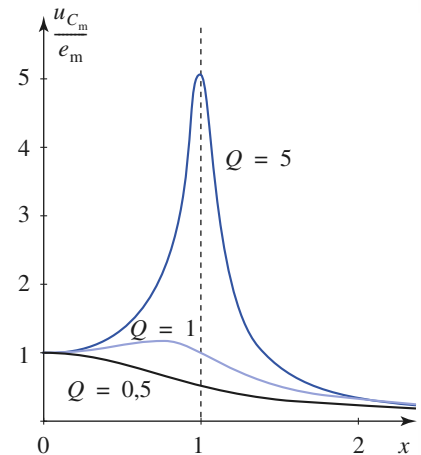
Cette solution est positive si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Une résonance en tension est donc observable si cette condition est vérifiée.

La pulsation de résonance, lorsqu'elle existe correspond à :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Dans un circuit (R, L, C) série (pulsation propre ω_0 , facteur de qualité Q) excité par un générateur sinusoïdal de tension, l'amplitude de la tension aux bornes de la capacité passe par un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans ce cas, la résonance est obtenue pour une pulsation ω_r inférieure à ω_0 . Si $Q \gg 1$, ω_r est voisin de ω_0 .



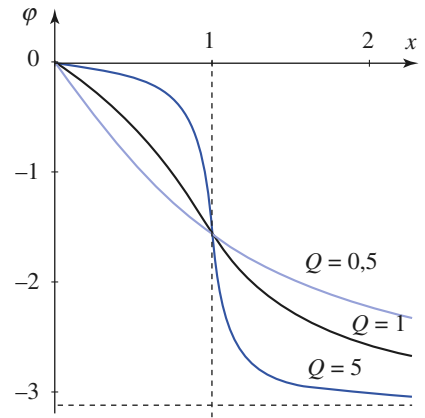
Doc. 10. Variations de $\frac{u_{C_m}}{e_m}$ en fonction de x pour $Q = \frac{1}{2}$, 1 et 5.

2.3.3.3. Déphasage

Sachant que $q_m = q_m e^{j\varphi} = \frac{i_m}{j\omega} = \frac{i_m}{\omega} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})}$, nous en déduisons que la phase de la charge du condensateur vaut :

$$\varphi = \phi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - \arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right].$$

Cette phase est nulle à basse fréquence ($x \ll 1$), et décroît jusqu'à $-\pi$ à haute fréquence ($x \gg 1$). Lorsque le circuit est excité à sa pulsation propre, la charge du condensateur est en phase avec la tension excitatrice. La rotation de phase au voisinage de $x = 1$ est ici encore accélérée pour les valeurs plus élevées de Q (doc. 11).



Doc. 11. Variations du déphasage $\varphi(x)$ et $u_c(t)$ par rapport à $e(t)$ en fonction de $Q = 1/2, 1$ et 5 .

3 Circuits linéaires en régime sinusoïdal

3.1. Régime forcé d'un circuit linéaire

3.1.1. Régime transitoire et régime permanent sinusoïdal

L'étude effectuée pour le circuit (R, L, C) série peut être généralisée aux réseaux linéaires, lorsqu'ils sont soumis à une excitation sinusoïdale : la réponse du circuit à une excitation sinusoïdale est la superposition de la réponse permanente sinusoïdale (qui ne dépend pas des conditions initiales) et d'un régime transitoire (déterminé par les conditions initiales).

Nous supposons que le régime libre du circuit est caractérisé par un régime transitoire qui tend vers zéro au cours du temps : le circuit est supposé stable, suffisamment amorti.

Pour un réseau linéaire stable, soumis à une excitation sinusoïdale, un régime permanent sinusoïdal s'établit après un régime transitoire qui tend vers zéro. En régime sinusoïdal forcé, tous les courants et tensions du circuit de même pulsation, seront caractérisés par leurs amplitude et phase.

Remarque

Si le réseau est actif, ses sources indépendantes peuvent fournir de l'énergie et le régime libre ne s'amortit pas nécessairement. Ce problème sera évoqué aux chapitres 8 et 9. Pour ce chapitre, nous supposons que le régime libre est toujours transitoire.

3.1.2. Étude du régime sinusoïdal forcé

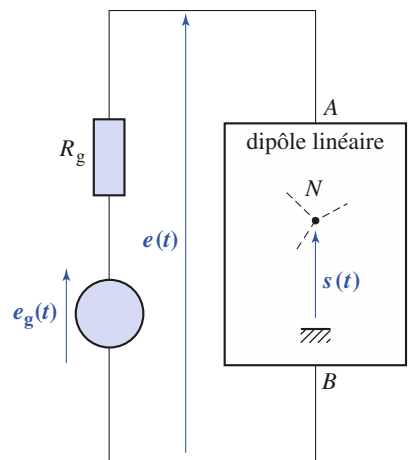
Chaque branche du circuit est régie par une équation d'évolution qui est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Pour étudier le régime sinusoïdal permanent établi, nous savons qu'il est très commode d'utiliser la notation complexe. L'équation différentielle se ramène alors à une relation entre amplitudes complexes où interviennent des polynômes de la variable ($j\omega$).

Par exemple, pour un circuit dont l'évolution est régie par l'équation (doc. 12) :

$$D_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + D_1 \frac{ds(t)}{dt} + D_0 s(t) = N_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + N_1 \frac{de(t)}{dt} + N_0 C e(t)$$

On trouvera d'autres dénominations synonymes pour qualifier le régime sinusoïdal forcé :

- régime sinusoïdal permanent,
- régime sinusoïdal établi,
- régime harmonique.



Doc. 12. Soumis à l'excitation $e(t)$, le dipôle linéaire délivre la réponse $s(t)$.

liant sa réponse $s(t)$ à l'excitation $e(t)$, nous obtenons immédiatement le rapport des amplitudes complexes de l'excitation et de la réponse sous la forme d'un rapport de deux polynômes de la variable $(j\omega)$.

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-\omega^2 N_2 + j\omega N_1 + N_0}{-\omega^2 D_2 + j\omega D_1 + D_0} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}.$$

Si nous revenons aux notations réelles $e(t) = e_m \cos(\omega t + \phi_e)$ et $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi_s)$:

$$s_m = |\underline{s}_m| = e_m \left| \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \right|$$

et $\phi_s = \arg(\underline{s}_m) = \phi_e + \arg[N(j\omega)] - \arg[D(j\omega)]$.

Remarque

On peut se poser la question de la nullité du dénominateur $D(j\omega)$. On constatera que celui-ci n'est jamais nul pour un système stable, dont le régime libre est amorti.

3.1.3. Analyse harmonique

Faire l'analyse harmonique du comportement du circuit, c'est étudier l'évolution de l'amplitude complexe (c'est-à-dire de l'amplitude et de la phase des oscillations sinusoïdales réelles) des grandeurs physiques (intensité, tension) dans le circuit en fonction de la pulsation de l'excitation.

Comme pour le circuit (R, L, C) série, nous pourrions, par exemple, observer une (ou plusieurs) résonance(s) du circuit en faisant varier la fréquence d'utilisation.

3.2. Lois de Kirchhoff en notation complexe

Les lois de Kirchhoff sont la **loi des mailles**, la **loi des nœuds**.

Ces relations s'expriment en termes de combinaisons linéaires liant les courants arrivant en un nœud du circuit, ou les tensions comptées le long d'une maille du circuit. Nous en déduisons la transposition immédiate de ces lois, en régime sinusoïdal établi aux représentations complexes de ces courants et tensions, et donc à leur amplitude complexe :

- en un nœud du circuit :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0 \quad \begin{cases} \varepsilon_k = 1 & \text{si le courant } \underline{i}_k \text{ aboutit au nœud} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{si le courant } \underline{i}_k \text{ part du nœud ;} \end{cases}$$

- sur une maille :

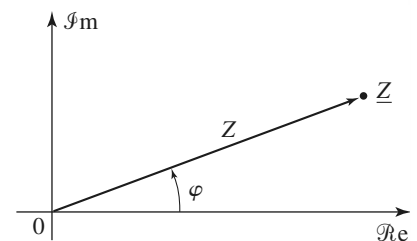
$$\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0 \quad \begin{cases} \varepsilon_k = 1 & \text{si la tension } \underline{u}_k \text{ est dans le sens de la maille} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{si le courant } \underline{u}_k \text{ est dans le sens opposé à la maille.} \end{cases}$$

3.3. Impédances complexes

3.3.1. Définitions

Considérons un dipôle *linéaire passif*. En régime harmonique, il est parcouru par un courant sinusoïdal de la forme $i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi_i)$ et la tension à ses bornes est de la forme $u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi_u)$.

En utilisant la notation complexe, étendons la notion de résistance définie en régime continu. Pour cela, notons $\underline{i}(t) = \underline{i}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{i}_m = i_m e^{j\phi_i}$ l'intensité complexe et $\underline{u}(t) = \underline{u}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{u}_m = u_m e^{j\phi_u}$ la tension complexe.



Doc. 13. Représentation de Fresnel de l'impédance complexe Z d'un dipôle. L'argument φ de $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ est le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$.

L'impédance complexe du dipôle est la grandeur complexe :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}_m}{\underline{i}_m}$$

Le module $Z(\omega) = \frac{u_m}{i_m}$ de l'impédance complexe est l'impédance du dipôle. Les impédances se mesurent en ohm (symbole : Ω). Son argument $\varphi(\omega) = \phi_u - \phi_i$ est le déphasage de la tension par rapport au courant (doc. 13).

La partie réelle $R(\omega)$ de l'impédance complexe d'un dipôle est la résistance de ce dipôle et la partie imaginaire $X(\omega)$ en est la réactance :

$$\underline{Z}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

Résistance et réactance se mesurent en ohm.

L'admittance complexe $\underline{Y}(j\omega)$ du dipôle est l'inverse de son impédance complexe :

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)} = \frac{\underline{i}_m}{\underline{u}_m}$$

Le module $Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$ de l'admittance complexe d'un dipôle est son admittance ; elle se mesure en siemens (symbole : S).

La partie réelle $G(\omega)$ de $\underline{Y}(j\omega)$ est la conductance du dipôle et la partie imaginaire $B(\omega)$ en est la susceptance :

$$\underline{Y}(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

Conductance et susceptance se mesurent en siemens.

3.3.2. Exemples d'impédances

3.3.2.1. Conducteurs ohmique

La tension $u(t)$ aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R parcouru par un courant $i(t)$ est : $u(t) = Ri(t)$. Nous en déduisons qu'en régime harmonique l'impédance complexe du conducteur ohmique est :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}_m}{\underline{i}_m} = R$$

Pour un conducteur ohmique donné, son impédance est réelle et constante (doc. 14) : la tension et le courant sont en phase (doc. 15).

3.3.2.2. Inductance

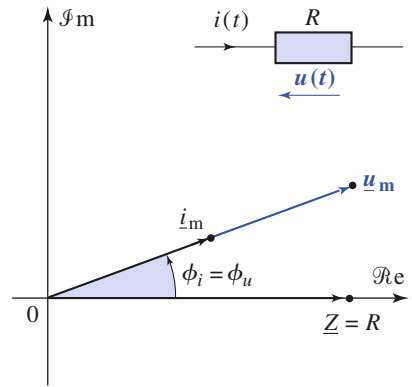
La tension aux bornes d'une inductance pure L parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ est :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

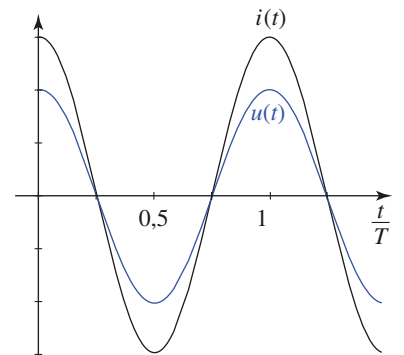
Avec les amplitudes complexes, cette relation se note $\underline{u}_m = jL\omega \underline{i}_m$, d'où l'expression de l'impédance complexe :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}_m}{\underline{i}_m} = jL\omega$$

L'impédance complexe $\underline{Z}(j\omega) = jL\omega$ d'une inductance est imaginaire pure (doc. 16).



Doc. 14. L'impédance complexe $Z = R$ d'un conducteur ohmique est réelle et constante.



Doc. 15. La tension $u(t)$ aux bornes d'un conducteur ohmique est en phase avec l'intensité $i(t)$ qui le traverse.

• Le module $L\omega$ de cette impédance est d'autant plus élevé que la fréquence est élevée. Une inductance s'oppose aux variations de l'intensité. En haute fréquence, elle se comporte comme un interrupteur ouvert. En revanche, en très basse fréquence, elle se comporte comme un interrupteur fermé.

• L'argument de $\underline{Z}(\omega)$ est $\varphi = \frac{\pi}{2}$: la tension est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant (doc. 17).

3.3.2.3. Capacité

L'intensité $i(t)$ du courant qui traverse une capacité C est liée à la tension $u(t)$ entre ses bornes, par la relation :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

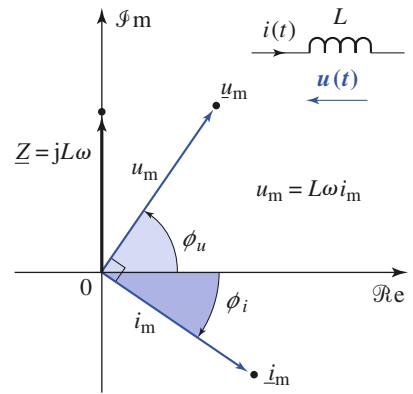
Avec les amplitudes complexes, elle se note $\underline{i}_m = jC\omega \underline{u}_m$, d'où l'expression de l'impédance complexe :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}_m}{\underline{i}_m} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

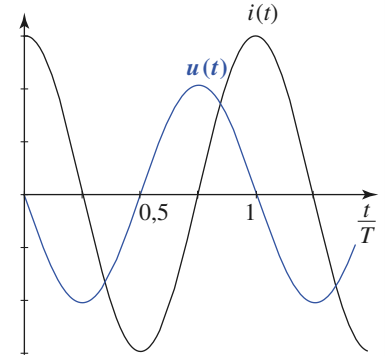
L'impédance complexe $\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{jC\omega}$ d'une capacité est imaginaire pure (doc. 18).

• Le module $\frac{1}{C\omega}$ de cette impédance est d'autant plus faible que la fréquence est élevée : la coupure du circuit par un condensateur est d'autant moins marquée que la fréquence est élevée. À haute fréquence, une capacité se comporte comme un interrupteur fermé. En revanche, à très basse fréquence elle se comporte comme un interrupteur ouvert.

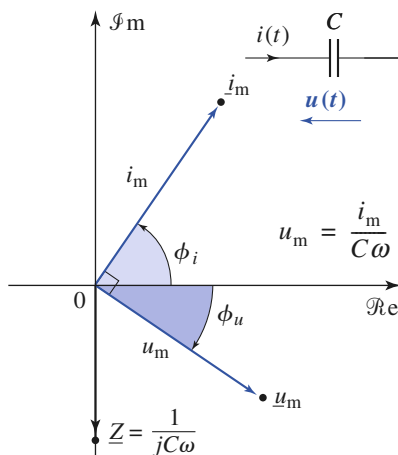
• L'argument de $\underline{Z}(j\omega)$ est $\varphi = -\frac{\pi}{2}$: la tension est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'intensité (doc. 19)



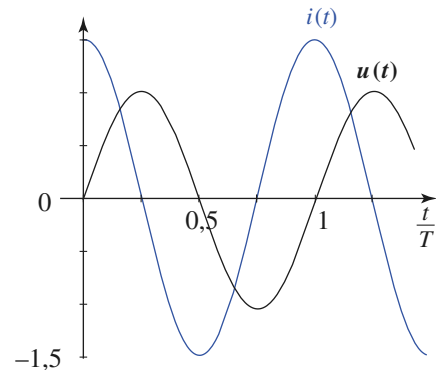
Doc. 16. L'impédance complexe $\underline{Z} = jL\omega$ d'une inductance est imaginaire pure.



Doc. 17. La tension $u(t)$ aux bornes d'une inductance est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur l'intensité $i(t)$ qui la traverse.



Doc. 18. L'impédance complexe $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ d'une capacité est imaginaire pure.



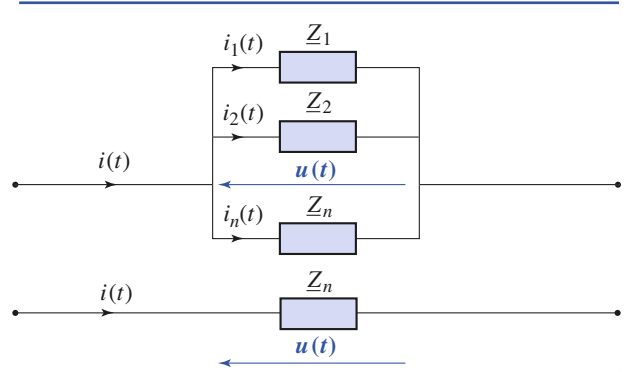
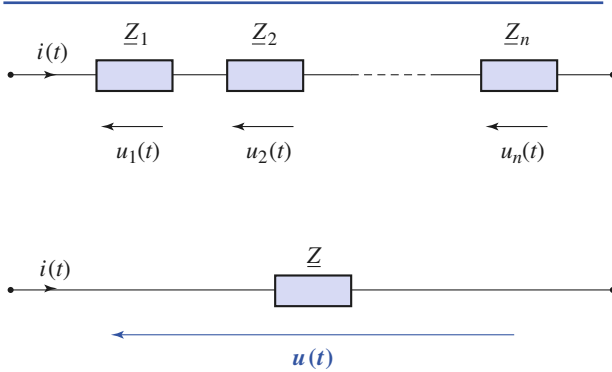
Doc. 19. La tension $u(t)$ aux bornes d'une capacité est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant $i(t)$ qui la traverse.

3.3.3. Associations d'impédances

Les relations obtenues en notation réelle se transposent encore sans difficulté aux notations complexes, soit (doc. 20 et 21) :

• en série : $\underline{Z} = \sum_k \underline{Z}_k$;

• en parallèle : $\underline{Y} = \sum_k \underline{Y}_k$.



Doc. 20. Association en série d'impédance :

$$\underline{Z} = \sum_k \underline{Z}_k .$$

Doc. 21. Association en parallèle d'impédance :

$$\underline{Y} = \sum_k \underline{Y}_k .$$

Application 3

Angle de pertes d'une bobine

Aux basses et moyennes fréquences (jusqu'à 10 kHz environ) une bobine est modélisée par l'association série de l'inductance L et de la résistance r de son bobinage (doc. 22).

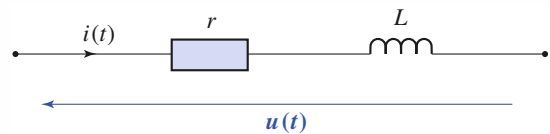
1) Déterminer son impédance complexe \underline{Z} et son angle de pertes δ , sachant que pour un dipôle d'impédance $\underline{Z} = R + jX$ l'angle de pertes δ est donné par :

$$\tan \delta = \frac{R}{|X|} .$$

2) Calculer le courant $i(t)$ qui traverse la bobine lorsqu'une tension $u(t) = u_m \cos(\omega t)$ est appliquée à ses bornes.

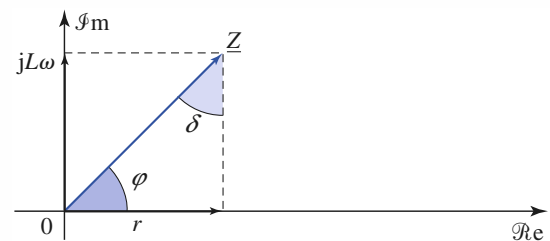
3) L'inductance et la résistance de la bobine sont respectivement $L = 100 \text{ mH}$ et $r = 10 \Omega$. Calculer son angle de pertes δ à $f = 50 \text{ Hz}$. Commenter.

Calculer le courant à travers la bobine sachant que $u_m = 10 \text{ V}$. Représenter, à cette fréquence, la caractéristique dynamique de la bobine.



Doc. 22. Modélisation d'une bobine aux basses et moyennes fréquences.

1) L'impédance complexe de la bobine s'écrit $\underline{Z} = r + jL\omega$ et son angle de pertes est donné par $\tan \delta = \frac{r}{L\omega}$. À caractéristiques (L, r) constantes, cet angle de pertes est d'autant plus faible que la fréquence est élevée. La représentation de Fresnel de $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ est donnée par le document 23 : $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.



Doc. 23. Représentation de Fresnel de l'impédance \underline{Z} d'une bobine (angle de pertes δ).

2) Utilisons la notation complexe :

$$\underline{u}_m = (r + jL\omega)\underline{i}_m, \quad \text{d'où} \quad \underline{i}_m = \frac{\underline{u}_m}{r + jL\omega}.$$

Le courant qui traverse la bobine est :

$$i(t) = \frac{u_m}{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}} \cos(\omega t + \phi),$$

$$\text{d'où :} \quad \phi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right) = -\varphi.$$

$$\text{Ainsi :} \quad \phi = -\varphi = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et donc :} \quad i(t) = \frac{u_m}{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t + \delta).$$

$$3) \tan(\delta) = \frac{10}{0,1 \cdot 2\pi \cdot 50} = 0,318,$$

$$\text{donc :} \quad \delta = 0,32 \text{ rad} \approx 17,5^\circ.$$

Plus l'angle de pertes d'une bobine est faible, plus la bobine se rapproche du composant idéal. Dans le cas présent, la bobine est très imparfaite.

L'amplitude du courant qui traverse la bobine est :

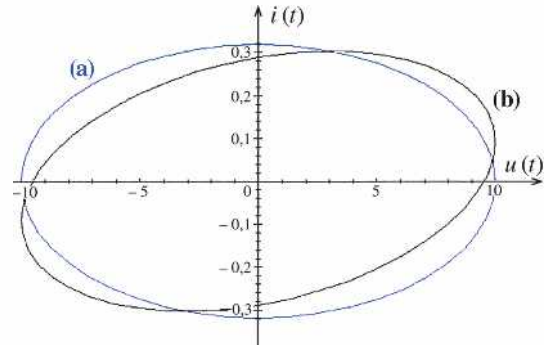
$$i_m = \frac{10}{\sqrt{10^2 + (0,1 \times 100\pi)^2}} = 0,30 \text{ A.}$$

$$\text{d'où} \quad i(t) = i_m \sin(\omega t + 0,32)$$

avec $i_m = 0,30 \text{ A}$ et $\omega = 100 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour une bobine idéale de même inductance, l'intensité aurait été égale à $i_0(t) = 0,32 \sin(\omega t) \text{ A}$.

La caractéristique dynamique de la bobine est une ellipse (doc. 24), dont l'aspect est très différent de celle obtenue avec une bobine idéale non résistive.



Doc. 24. Caractéristiques dynamiques à $f = 50 \text{ Hz}$.
(a) bobine idéale : (b) bobine réelle.

3.3.4. Diviseurs de tension et de courant

- Pour le diviseur de tension (document 25) : $\underline{u}_{2m} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{u}_m$.

- Pour le diviseur de courant (document 26) : $\underline{i}_{2m} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \underline{i}_m = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \underline{i}_m$

Exemple de réalisation : sonde atténuatrice passive d'oscilloscope

Une telle sonde est constituée d'un câble coaxial, d'environ 1 m de longueur, comportant à une de ses extrémités un circuit (R_1, C_1) parallèle (doc. 27).

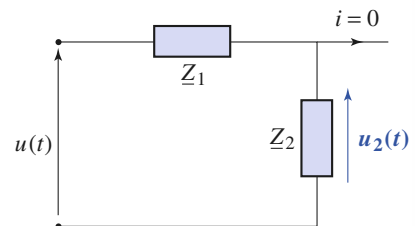
Le câble coaxial est très grossièrement modélisé par sa résistance R_0 et par sa capacité C_0 (généralement mal connue), ce qui nécessite la présence de la capacité ajustable C_1 . L'autre extrémité du câble coaxial est branchée à une entrée d'oscilloscope équivalente à l'association parallèle d'une résistance $R_e \approx 1 \text{ M}\Omega$ et d'une capacité $C_e \approx 30 \text{ pF}$.

La résistance R_0 (inférieure à 1 k Ω) étant de faible valeur devant les valeurs des autres impédances de la sonde, négligeons R_0 . Évaluons alors l'impédance Z_2 entre les bornes A et A' :

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_e} + j(C_e + C_0)\omega, \quad \text{d'où} \quad Z_2 = \frac{R_e}{1 + jR_e(C_e + C_0)\omega}.$$

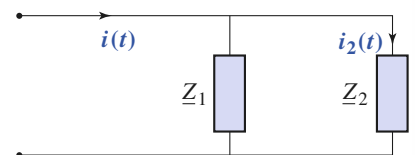
L'impédance Z_1 du circuit (R_1, C_1) vaut :

$$Z_1 = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}.$$



Doc. 25. Principe d'un diviseur de tension.

Il est essentiel que Z_1 et Z_2 soient parcourues par le même courant



Doc. 26. Principe d'un diviseur de courant.

On cherche à réaliser une sonde atténuatrice d'un facteur dix telle que :

$$u'(t) = ku(t) \text{ avec } k = 0,1 \text{ pour toute fréquence.}$$

D'après la relation du diviseur de tension :

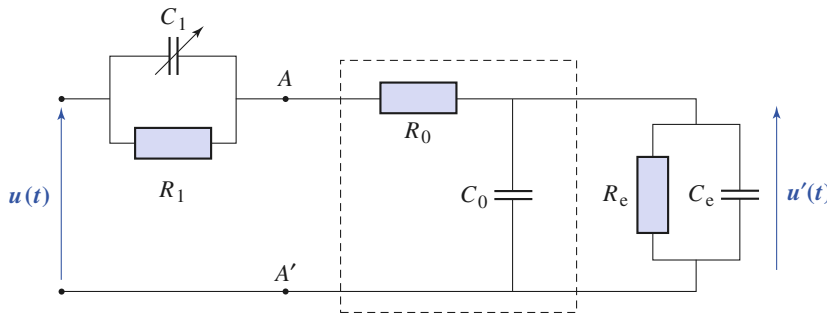
$$Z_1 = \frac{1-k}{k} Z_2$$

pour tout ω .

Cette condition est réalisée si :

$$R_1 = \frac{1-k}{k} R_e = 9R_e \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{k}{1-k} (C_e + C_0) = \frac{1}{9} (C_e + C_0).$$

Un signal carré est prélevé par la sonde et C_1 est ajusté de façon à observer le même signal carré sur l'écran de l'oscilloscope. Ce qui est une manière certaine de donner à C_1 la valeur désirée, sans connaître la valeur de la capacité C_0 du coaxial.



Doc. 27. Principe d'une sonde atténuatrice d'oscilloscope.

Si $u(t)$ est un signal carré périodique de fréquence f , il peut être représenté par la somme d'une infinité de signaux sinusoïdaux de fréquences pf avec p entier (cf. § 3.6.4.1.).

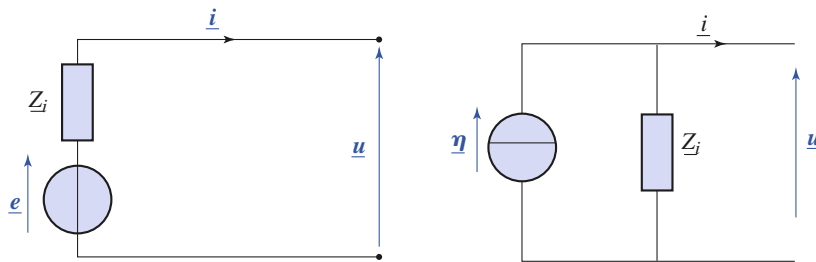
Si le facteur k dépendait de la fréquence, $u'(t)$ serait périodique et de fréquence f , mais de forme différente.

Le fait que $u(t)$ et $u'(t)$ soient tous deux des signaux carrés prouve que le facteur k est réel et indépendant de la fréquence.

3.4. Représentation de Thévenin et Norton des électromoteurs

En régime harmonique, un électromoteur (le plus souvent un générateur) peut se représenter par deux modèles dont les effets sont équivalents pour le circuit extérieur : modèle de Thévenin (e , Z_i) ou modèle de Norton (η , Z_i).

L'impédance interne Z_i de l'électromoteur a la même valeur pour les deux modèles qui sont liés par : $e_m = Z_i \eta$ (doc. 28).

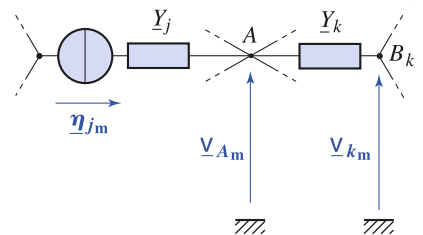


Doc. 28. Représentations de Thévenin et de Norton d'un générateur sinusoïdal en notation complexe.

3.5. Loi des nœuds en termes de potentiels

En régime sinusoïdal forcé, les branches qui aboutissent à un nœud A peuvent être classées en deux catégories (doc. 29) :

- celles qui contiennent des générateurs de courant imposant des courants de branche de valeur complexe η_j ;



Doc. 29. Nœud A avec les deux types de branches qui y aboutissent.

- celles d'admittance \underline{Y}_k , sans générateur de courant, dont le potentiel à leur extrémité B_k a une valeur complexe \underline{v}_k .

La loi des nœuds, exprimée en termes de potentiel, appliquée en A s'écrit :

$$\sum_j \varepsilon_j \eta_j + \sum_k \underline{Y}_k (\underline{v}_k - \underline{v}_A) = 0,$$

avec $\varepsilon_j = \begin{cases} +1 & \text{pour les courants aboutissant en } A \\ -1 & \text{pour les courants partant de } A \end{cases}$

En l'absence de générateurs de courant, la loi des nœuds prend la forme simple mais usuelle (relation de Milleman) :

$$\underline{v}_A = \frac{\sum_k \underline{Y}_k \underline{v}_k}{\sum_k \underline{Y}_k}.$$

En d'autres termes, le potentiel du nœud A est le barycentre des potentiels des nœuds connexes, pondérés par les admittances \underline{Y}_k .

Application 4

Transistor à effet de champ en hautes fréquences

Soit le schéma équivalent d'un transistor à effet de champ en régime linéaire et en hautes fréquences (doc. 30b). Ce circuit comprend un générateur de courant, commandé en tension, modélisant l'effet transistor; une résistance ρ et trois condensateurs C_{gs} , C_{gd} et C_{ds} . La résistance de charge du transistor est notée R_L . Attaqué par une tension sinusoïdale d'amplitude complexe \underline{u}_{gs} , le transistor délivre, dans ces conditions, une tension de sortie \underline{u}_{ds} .

Calculer :

a) L'amplification en tension $\underline{A}_u = \frac{\underline{u}_{ds}}{\underline{u}_{gs}}$;

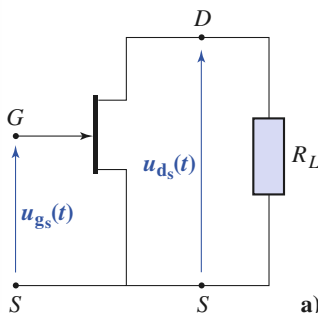
b) l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \frac{\underline{u}_{gs}}{\underline{i}_g}$;

c) l'amplification en courant $\underline{A}_i = \frac{\underline{i}_d}{\underline{i}_g}$.

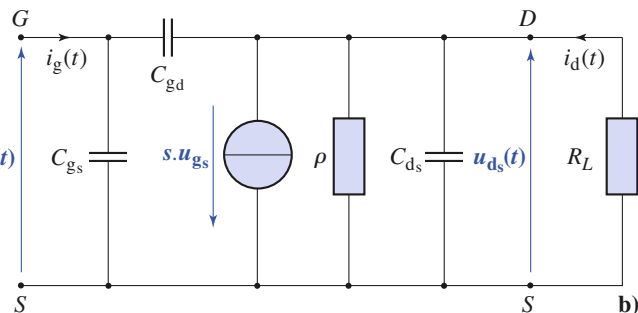
d) La fréquence du signal étant $f = 1$ MHz, calculer numériquement \underline{A}_u , \underline{Z}_e et \underline{A}_i .

Données : $s = 30 \text{ mAV}^{-1}$; $\rho = 500 \text{ k}\Omega$; $C_{gs} = C_{gd} = 5 \text{ pF}$; $C_{ds} = 0,5 \text{ pF}$; $R_L = 1 \text{ k}\Omega$.

a) La loi des nœuds appliquée en D , borne de drain, donne (la somme des courants se dirigeant vers le nœud D est nulle) :



Doc. 30 a. Transistor à effet de champ chargé par R_L .



Doc. 30 b. Schéma équivalent en régime linéaire hautes fréquences.

$$-s \underline{u}_{g_s} - \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_L} + jC_{d_s} \omega \right] \underline{u}_{d_s} + jC_{g_d} \omega (\underline{u}_{g_s} - \underline{u}_{d_s}) = 0,$$

d'où immédiatement l'amplification en tension :

$$\underline{A}_u = \frac{\underline{u}_{d_s}}{\underline{u}_{g_s}} = \frac{-s + jC_{g_d} \omega}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_L} + j(jC_{g_d} + C_{d_s}) \omega}$$

b) La loi des nœuds appliquée en G , borne de grille, s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{i}_{-g} &= jC_{g_s} \omega \underline{u}_{-g_s} + jC_{g_d} \omega (\underline{u}_{g_s} - \underline{u}_{d_s}) \\ &= j[C_{g_s} + C_{g_d}(1 - \underline{A}_u)] \omega \underline{u}_{-g_s}, \end{aligned}$$

d'où l'impédance d'entrée :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{u}_{-g_s}}{\underline{i}_{-g}} = \frac{1}{j[C_{g_s} + C_{g_d}(1 - \underline{A}_u)] \omega}$$

c) En remarquant que, d'une part, $\underline{i}_{-e} = \frac{\underline{u}_{g_s}}{\underline{Z}_e}$ et que, d'autre part, $\underline{i}_{-d} = \frac{\underline{u}_{d_s}}{R_L}$, il vient en divisant membre à membre :

$$\underline{A}_i = \frac{\underline{i}_{-d}}{\underline{i}_{-g}} = -\frac{\underline{Z}_e}{R_L} \underline{A}_u$$

d) Numériquement, nous obtenons pour l'amplification en tension :

$$\underline{A}_u = \frac{-3 \cdot 10^{-2} + j 3,14 \cdot 10^{-5}}{10^{-3} + j 3,46 \cdot 10^{-5}} \approx -30,$$

la capacité d'entrée du transistor :

$$C_e = C_{g_s} + C_{g_d}(1 - \underline{A}_u) = 160 \text{ pF}, \text{ d'où :}$$

$$\underline{Z}_e = -j 10^3 \Omega,$$

l'amplification en courant :

$$\underline{A}_i = -30j.$$

3.6. Étude électrocinétique du circuit en régime permanent sinusoïdal

3.6.1. Représentations des éléments du circuit

Dans le cas d'un réseau linéaire en régime harmonique permanent (ou régime sinusoïdal forcé), nous pouvons transposer les lois et modèles développés en régime constant, et utiliser :

- les lois de Kirchhoff ;
 - la loi des nœuds pour les intensités complexes ;
 - la loi des mailles pour les tensions complexes ;
- la décomposition du réseau en dipôles élémentaires :
 - dipôles passifs caractérisés par leur impédance complexe ($\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ en convention récepteur) ;
 - générateurs de tension sinusoïdale de f.e.m complexe $\underline{e} = \underline{e}_m \cdot e^{j\omega t}$, de courant sinusoïdal de c.e.m. $\underline{\eta} = \underline{\eta}_m e^{j\omega t}$ d'impédance interne \underline{Z}_i s'ils ne sont pas idéaux.

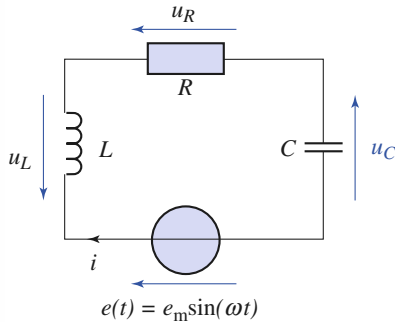
3.6.2. Théorème de superposition

Si les différentes sources sont sinusoïdales, nous obtenons un système d'équations linéaires qui relie les représentations complexes $\underline{s}_k(t)$ des différentes grandeurs physiques à celles des sources. Ce système est formellement équivalent à ceux que nous avons rencontré en régime permanent, et donc :

Dans un réseau linéaire contenant des sources sinusoïdales indépendantes, la valeur complexe $\underline{s}(t)$ d'une grandeur quelconque (courant ou tension) est égale à la somme des valeurs complexes de cette même grandeur obtenues lorsque toutes les sources sont éteintes à l'exception d'une seule.

Application J

Circuit (R, L, C) série en régime permanent sinusoïdal



Doc. 31. Circuit (R, L, C).

Retrouver le régime forcé pour le courant dans le circuit (R, L, C) série représenté sur le document 31 soumis à la tension $e(t) = e_m \cos(\omega t)$. (Il s'agit du circuit étudié au § 2).

Nous recherchons en régime forcé une solution harmonique de la forme :

$$i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi).$$

La loi des mailles nous permet d'écrire, en représentation complexe : $\underline{e}(t) = \underline{u}_L(t) + \underline{u}_R(t) + \underline{u}_C(t)$, avec :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{donc} \quad \underline{u}_L = jL\omega \underline{i}$$

$$u_R = Ri, \quad \text{donc} \quad \underline{u}_R = R \underline{i};$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad \text{donc} \quad \underline{u}_C = \frac{i}{jC\omega}.$$

Les représentations complexes de $i(t)$ et $e(t)$ sont donc liées par :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$

En introduisant la pulsation propre et le facteur de qualité du circuit (R, L, C) série, nous retrouverons les expressions établies au § 2. L'utilisation des impédances complexes simplifie encore un petit peu l'étude...

3.6.3. Intérêt de l'analyse harmonique

La place particulière accordée aux régimes harmoniques a plusieurs justifications :

- Si l'excitation est harmonique, la réponse forcée l'est également. Le régime harmonique forcé est aisément calculable, en utilisant la notation complexe.
- Les sources sont assez souvent sinusoïdales : tension du secteur, tension délivrée par un alternateur, tensions délivrées par les générateurs utilisés en TP.
- On peut montrer que tout signal physiquement réalisable peut se mettre sous la forme d'une somme infinie de signaux sinusoïdaux (décomposition de Fourier) : la réponse du circuit *linéaire* au signal complet est la *superposition des réponses* à chaque terme de la décomposition pris individuellement.

3.6.4. Superposition d'excitations et de réponses

3.6.4.1. Développement en série de Fourier d'un signal périodique

Soit $e(t)$ de période T ; on peut l'écrire, sous la forme d'une série de Fourier :

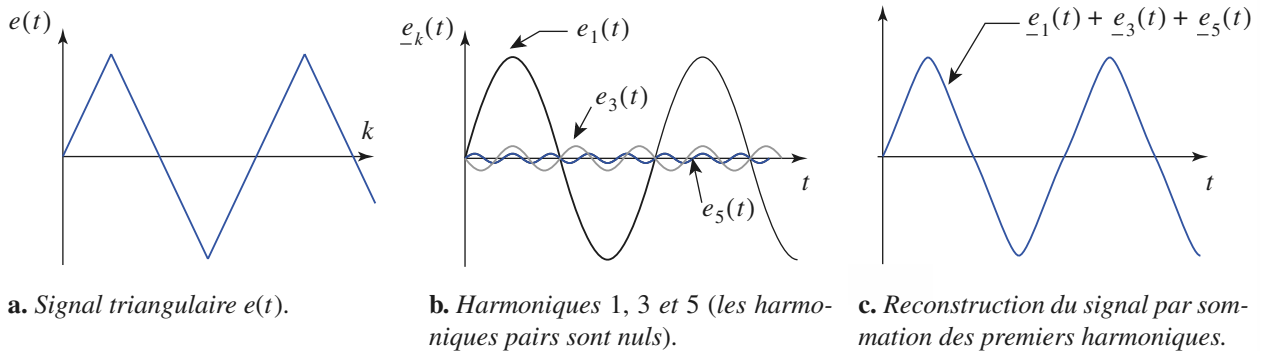
$$e(t) = \langle e(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t + \phi_n\right)$$

- $\langle e(t) \rangle$ est la *valeur moyenne* du signal $e(t)$, définie par :

$$\langle e(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt.$$

- $e_1(t) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_1\right)$ est le fondamental ;
- $e_k(t) = a_k \cos\left(\frac{k2\pi}{T}t + \phi_k\right)$ est l'harmonique de rang k .

La méthode de calcul des amplitudes a_k et les phases ϕ_k , au programme de seconde année, sera exposée au *chapitre 12*. Dans l'immédiat, contentons-nous de connaître la possibilité d'exprimer un signal périodique comme une somme de signaux harmoniques : le *document 32* illustre la reconstitution approximative d'un signal triangulaire en sommant les trois premiers harmoniques non nuls.

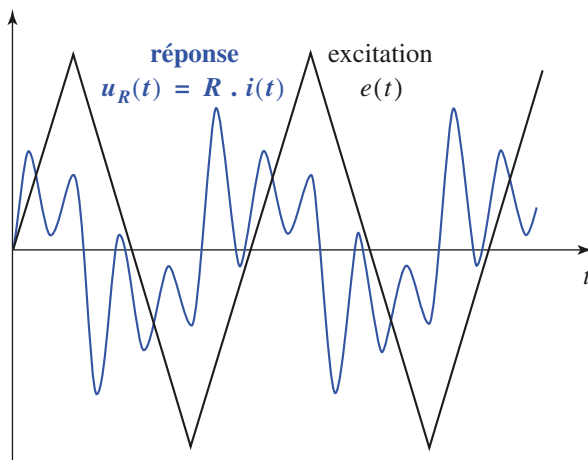


Doc. 32. Harmoniques d'un signal triangulaire.

3.6.4.2. Régime forcé

Imaginons que le signal $e(t)$ précédent représente une excitation périodique appliquée au circuit (R, L, C) série, par exemple.

En régime établi, la réponse $s(t)$ du circuit (*doc. 33*) peut être obtenue comme la superposition des réponses permanentes sinusoïdales (réponses harmoniques) à chacune des composantes de Fourier du signal.



Doc. 33. Réponse en courant du circuit (R, L, C) série soumis à une tension excitatrice triangulaire périodique.

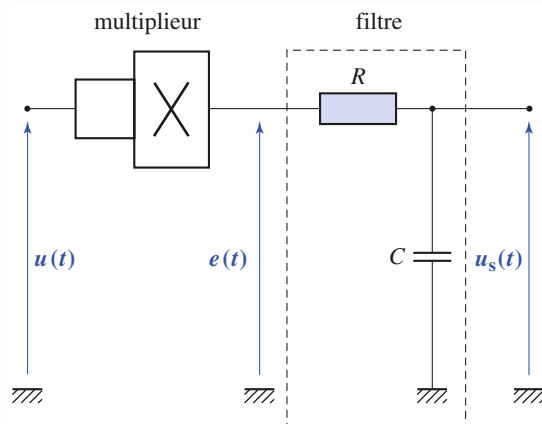
L'analyse harmonique du circuit permet alors d'étudier la réponse de celui-ci en termes d'amplification et de déphasage, suivant la valeur de la fréquence des termes contenus dans le signal exciteur. Nous mettrons en application cette approche en étudiant le filtrage des signaux aux *chapitres* 8 et 9.

Notons que la réponse, superposition des réponses à chaque composante harmonique du signal, est aussi une fonction périodique de période T : la réponse forcée d'un circuit linéaire à une excitation périodique est encore périodique, de même période que l'excitation : le *document* 33 montre la réponse en courant du circuit (R, L, C) série pour une tension d'excitation triangulaire : après quelques périodes, la réponse est périodique et de même période que l'excitation.

Application 6

Filtrage d'un signal

Un multiplieur délivre, à partir de la tension $u(t) = u_m \cos(\omega t)$, une tension $e(t)$ proportionnelle à $u^2(t)$: $e(t) = e_m \cos^2(\omega t)$, avec $e_m = k u_m^2$ où k est une constante dimensionnée connue caractéristique du multiplieur (doc. 34). Cette tension est ensuite appliquée à l'entrée d'un filtre (R, C).



Doc. 34. Le multiplieur délivre la tension $e(t) = k u^2(t)$ qui est ensuite filtrée pour obtenir $u_s(t)$.

1) Montrer que, vis-à-vis du filtre, le multiplieur est équivalent à l'association série de deux générateurs dont l'un est de f.e.m. e_1 constante et l'autre de f.e.m. $e_2(t)$ sinusoïdale.

2) En utilisant le théorème de superposition, déterminer la réponse $u_s(t)$ du filtre.

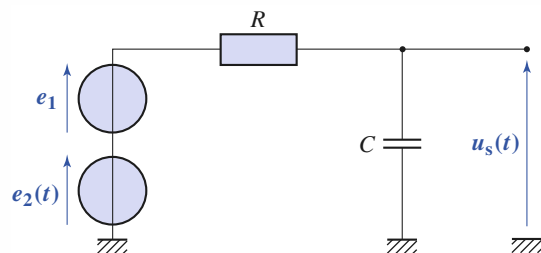
3) La composante sinusoïdale $u_2(t)$ peut être considérée comme éliminée si son amplitude est au moins 10^2 fois plus faible que celle de la composante continue u_1 : comment devons-nous choisir la

résistance R sachant que $C = 1 \mu\text{F}$ et que la fréquence du générateur $e(t)$ est de $f = 50 \text{ Hz}$?

1) Vis-à-vis du filtre, le multiplieur est un générateur de f.e.m. :

$$e(t) = e_m \cos^2(\omega t) = \frac{e_m}{2} [1 + \cos(2\omega t)].$$

Ce générateur peut s'analyser comme le générateur équivalent à l'association en série d'un générateur de f.e.m. constante $e_1 = \frac{e_m}{2}$ ($\omega = 0$) et d'un générateur de f.e.m. sinusoïdale $e_2(t) = \frac{e_m}{2} \cos(2\omega t)$ (doc. 35).



Doc. 35. Modélisation du signal fourni par le multiplieur

2) La réponse constante u_1 du filtre à l'excitation e_1 est $u_1 = e_1 = \frac{e_m}{2}$.

Notons par $u_2(t)$ la réponse du filtre à l'excitation $e_2(t)$ de pulsation 2ω . La structure de diviseur de tension du filtre donne, en notation complexe :

$$u_2(t) = \underline{e}_2(t) = \frac{1}{R + \frac{1}{jC(2\omega)}} \underline{e}_2(t) = \underline{e}_2(t) \frac{1}{2jRC\omega + 1}.$$

Posons $\omega_0 = \frac{1}{RC}$; il vient :

$$u_2(t) = \frac{e_2(t)}{1 + j\frac{2\omega}{\omega_0}} = \frac{e_m}{2\left(1 + j\frac{2\omega}{\omega_0}\right)} e^{j2\omega t},$$

ce qui, en terme réel, s'écrit :

$$u_2(t) = \frac{e_m}{2\sqrt{1 + \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cos(2\omega t + \phi),$$

avec $\phi = -\arctan\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)$.

En définitive la réponse du filtre à l'excitation $e(t)$ est :

$$u_s(t) = u_1 + u_2(t)$$

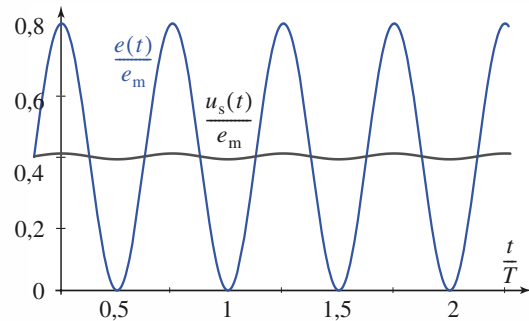
$$= \frac{e_m}{2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cos(2\omega t + \phi) \right].$$

3) La composante variable $u_2(t)$ est éliminée si :

$$\frac{u_{2m}}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2}} \leq 10^{-2}, \text{ ce qui entraîne :}$$

$$\frac{2\omega}{\omega_0} = RC2\omega \geq 10^2, \text{ donc } R \geq \frac{10^2}{C4\pi f} = 160 \text{ k}\Omega.$$

Le résultat du filtrage est illustré dans le document 36 où il apparaît qu'il ne reste plus qu'une très faible ondulation.

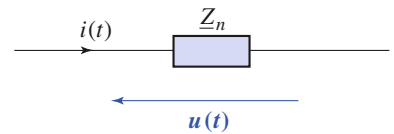


Doc. 36. Variations relatives du signal avant filtrage $\left(\frac{e(t)}{e_m}\right)$ et après filtrage $\left(\frac{u_s(t)}{e_m}\right)$.

4 Puissance en régime sinusoïdal

4.1. Puissance instantanée

Considérons un dipôle avec la convention récepteur donnée dans le document 37.



Doc. 37. Convention récepteur pour les dipôles.

La puissance instantanée reçue par le dipôle (en convention récepteur) est la fonction réelle du temps : $p(t) = u(t)i(t)$.

Cette définition de la puissance est générale et indépendante de la nature particulière du dipôle. En outre, elle ne préjuge en rien des traitements ultérieurs réalisés : conversion en puissance thermique, mécanique, lumineuse, électromagnétique rayonnée, chimique, etc. Selon que la puissance $p(t)$ est positive ou négative, le dipôle se comporte comme un récepteur ou comme un générateur, qui absorbe ou qui fournit de l'énergie au circuit.

4.2. Puissance moyenne – Facteur de puissance

4.2.1. Moyenne temporelle

Considérons une grandeur $s(t)$ fonction du temps et de nature physique quelconque. La valeur moyenne de $s(t)$ au cours du temps ou *moyenne temporelle* est la grandeur notée $\langle s(t) \rangle$ ou S , définie par :

$$\langle s(t) \rangle = S = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau s(t) dt.$$

Si $s(t)$ est *périodique* de période T , la moyenne peut se calculer sur une période :

$$\langle s(t) \rangle = S = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} s(t) dt.$$

4.2.2. Puissance moyenne

Calculons la moyenne \mathcal{P} de la puissance instantanée en régime harmonique.

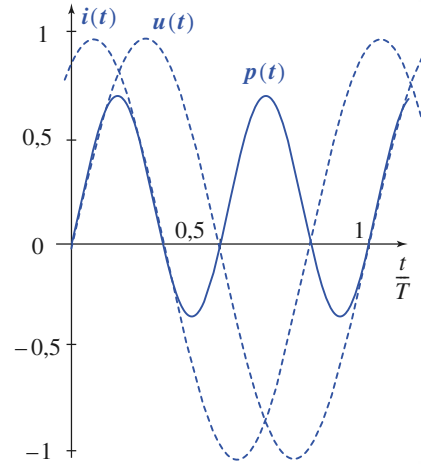
Notons par $i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi_i)$ le courant traversant le dipôle, et la tension à ses bornes par $u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi_u)$.

L'expression de la puissance instantanée s'écrit :

$$\begin{aligned} p(t) &= u_m \cos(\omega t + \phi_u) i_m \cos(\omega t + \phi_i) \\ &= \frac{u_m i_m}{2} [\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)]. \end{aligned}$$

Elle comporte deux termes (*doc. 38*) :

- $\mathcal{P} = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi$, avec $\varphi = \phi_u - \phi_i$ déphasage de la tension par rapport au courant. C'est un terme constant ;
- $\frac{u_m i_m}{2} \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)$, terme sinusoïdal de *fréquence double* de celle des signaux $u(t)$ et $i(t)$. Sa valeur moyenne est nulle.



Doc. 38. En régime sinusoïdal de fréquence f , la puissance instantanée $p(t) = u(t)i(t)$ est une grandeur sinusoïdale de fréquence $2f$.

En conséquence, la puissance moyenne a pour expression :

$$\mathcal{P} = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi.$$

En régime harmonique, la puissance moyenne est appelée *puissance active*. Elle s'exprime en watt (symbole : W).

4.3. Valeurs efficaces

La valeur efficace d'une grandeur périodique $s(t)$ est : $S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$.

La valeur moyenne est naturellement calculable sur une période T de la fonction $s(t)$: $\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{t_0+T} s^2(t) dt$.

La valeur moyenne de la fonction $\cos^2(\omega t + \phi)$ vaut $\frac{1}{2}$, nous déduisons que :

Si $s(t)$ est une grandeur sinusoïdale d'amplitude s_m : $S_{\text{eff}} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}$.

En particulier, les valeurs efficaces du courant et de la tension sont, en régime sinusoïdal :

$$I_{\text{eff}} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad U_{\text{eff}} = \frac{u_m}{\sqrt{2}}.$$

La puissance moyenne absorbée par un dipôle est : $\langle \mathcal{P} \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi$.

Par exemple, la puissance moyenne dissipée par une résistance R est :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} R i_m^2 = R I_{\text{eff}}^2.$$

Le produit $\mathcal{P} = \frac{u_m i_m}{2}$, appelé *puissance apparente*, s'exprime en volt-ampère (symbole : V.A). Le facteur, sans dimension, $\cos \varphi$ est le *facteur de puissance*.

Remarque : De façon plus générale, en régime périodique, la puissance instantanée $p(t)$ est une grandeur périodique. À ce titre, elle est décomposable en série de Fourier. Le premier terme de cette série est la valeur moyenne de $p(t)$, c'est-à-dire la puissance active \mathcal{P} . Cette remarque se révélera utile pour la conception de wattmètres, appareils permettant des mesures de puissance moyenne.

4.4. Puissance et notation complexe

La puissance est le produit de la tension par le courant : ce n'est pas une grandeur linéaire.

Il faut manipuler la notation complexe avec précaution : $\mathcal{P}(t) = u(t) i(t)$ ne s'identifie pas à $\text{Re}[u(t) i(t)]$ (cf. l'encadré, page 124).

Notons que nous avons :

$$\underline{u}(t) \underline{i}^*(t) = u_m i_m e^{-j\varphi}$$

où φ est le déphasage entre le courant $i(t)$ et la tension $e(t)$. Dans ces conditions :

La puissance moyenne absorbée par un dipôle en régime sinusoïdal est, en convention récepteur :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\underline{u}(t) \underline{i}^*(t)].$$

4.5. Autres expressions de la puissance active

Utilisons la définition de l'impédance d'un dipôle linéaire $\underline{Z}(\omega) = R + jX$ avec $Z = |Z|$: $u_m = Z(\omega) i_m$ et l'expression de $\cos \varphi = \frac{X}{Z}$ pour établir une nouvelle expression de la puissance active. Il vient :

$$\mathcal{P} = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi = \frac{Z i_m^2 R}{2 Z} = \frac{R i_m^2}{2} = R I_{\text{eff}}^2.$$

De façon analogue, la définition de l'admittance du dipôle :

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)} = G + jB \text{ avec } Y = |Y| : i_m = Y(\omega) u_m \text{ et l'expression de}$$

$$\cos \varphi = \frac{G}{Y} \text{ donnent :}$$

$$\mathcal{P} = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi = \frac{Y u_m^2 G}{2 Y} = \frac{G u_m^2}{2} = G U_{\text{eff}}^2.$$

Conséquences

• Si le dipôle est passif, il se comporte toujours en récepteur et sa puissance active est positive, $\mathcal{P} > 0$, ce qui implique $R(\omega) > 0$ et $G(\omega) > 0$.

Les parties réelles de l'impédance et de l'admittance complexes d'un dipôle linéaire passif sont toujours positives.

• Pour une inductance pure L ou une capacité C idéale, la partie réelle de l'impédance est nulle. En conséquence, $\mathcal{P} = 0$. Une inductance pure et une capacité idéale ne consomment pas, en moyenne, d'énergie. Ces éléments échangent réversiblement de l'énergie avec le circuit. Ainsi, en régime harmonique, ils restituent, en moyenne, autant d'énergie qu'ils en reçoivent.

• Une résistance absorbe de l'énergie et n'en restitue jamais. Elle transforme irréversiblement l'énergie qu'elle absorbe : c'est un élément dissipatif.

5 Adaptation d'impédances

Cherchons à quelles conditions un générateur sinusoïdal de f.e.m. $e(t) = e_m \cos(\omega t)$ et d'impédance interne $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$ fournit le maximum de puissance à un réseau d'utilisation d'impédance $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$ (doc. 39).

Supposons que les caractéristiques du générateur soient fixées et que celles de l'utilisation soient à déterminer. L'amplitude complexe du courant est :

$$\underline{i}_m = \frac{\underline{e}_m}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_u} = \frac{\underline{e}_m}{(R_g + R_u) + j(X_g + X_u)},$$

d'où :

$$i_m^2 = \underline{i}_m \underline{i}_m^* = \frac{e_m^2}{(R_g + R_u)^2 + (X_g + X_u)^2}$$

et la puissance active fournie à l'utilisation :

$$\mathcal{P}_u = R_u \frac{i_m^2}{2} = \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2 + (X_g + X_u)^2} \frac{e_m^2}{2}.$$

Dans l'hypothèse d'une f.e.m. e_m fixée, nous augmentons la valeur de \mathcal{P}_u en choisissant \underline{Z}_u avec une réactance opposée à celle de \underline{Z}_g :

$$X_g + X_u = 0.$$

Dans ces conditions, la puissance transmise à l'utilisation est :

$$\mathcal{P}_u = \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2} \frac{e_m^2}{2}.$$

Cette puissance transmise peut encore être augmentée en déterminant la valeur de la résistance R_u qui rend le facteur $y = \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2}$ maximal :

$$\frac{dy}{dR_u} = \frac{(R_g + R_u)^2 - 2(R_g + R_u)R_u}{(R_g + R_u)^4} = \frac{(R_g + R_u)(R_g - R_u)}{(R_g + R_u)^4} = 0,$$

d'où $R_u = R_g$.

Les deux conditions à satisfaire sont $R_u = R_g$ et $X_u = -X_g$: les deux impédances complexes \underline{Z}_u et \underline{Z}_g sont donc conjuguées.

La puissance transmise par un générateur à une utilisation est maximale quand les impédances du générateur et de l'utilisation sont adaptées, c'est-à-dire conjuguées :

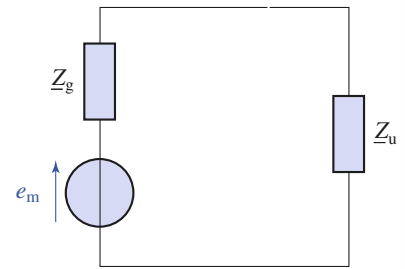
$$\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*.$$

Cette puissance maximale vaut :

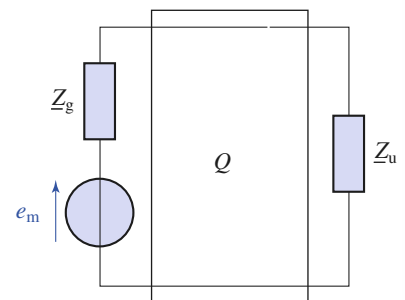
$$\mathcal{P}_{u_{\max}} = \frac{e_m^2}{8R_g}.$$

Remarque

Lorsque les caractéristiques (e_m , \underline{Z}_g) du générateur sinusoïdal et celle \underline{Z}_u de l'utilisation sont imposées, le problème de l'adaptation d'impédances ne peut être résolu qu'en intercalant un quadripôle entre le générateur et l'utilisation (doc. 40). Le quadripôle, fermé sur l'impédance d'utilisation, doit présenter en



Doc. 39. La puissance transmise par le générateur à l'utilisation est maximale lorsque $\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$.



Doc. 40. Le quadripôle Q adapte les impédances du générateur et de la charge pour une transmission maximale de la puissance moyenne.

entrée une impédance conjuguée de celle du générateur. On réalise ainsi le transfert maximal de puissance entre le générateur et le quadripôle. Pour que cette puissance maximale se retrouve ensuite sur l'utilisation, il faut réaliser le quadripôle avec des éléments non dissipatifs (inductances et capacités comme dans l'application suivante). On peut aussi utiliser comme quadripôle un transformateur.

Application 7

Adaptateur d'impédances à composants réactifs

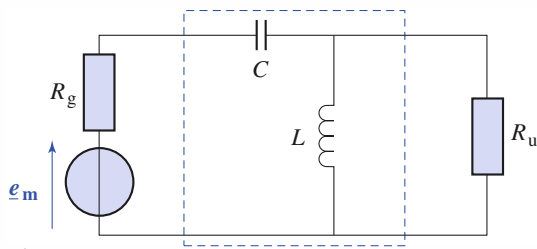
Pour transmettre une puissance maximale du générateur (e_m, R_g) à l'utilisation $R_u \neq R_g$, on intercale entre le générateur et l'utilisation un quadripôle réalisé avec une inductance L et une capacité C (doc. 41).

1) Montrer que la structure a) permet l'adaptation d'impédances souhaitée lorsque $R_u > R_g$.

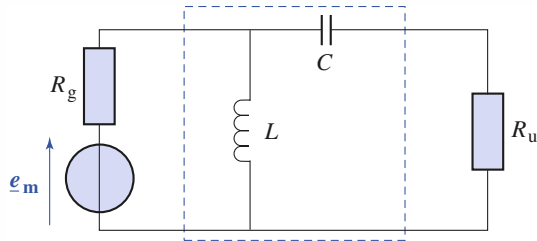
Calculer L et C en fonction de R_u, R_g et ω pulsation du générateur, afin de réaliser un transfert maximal d'énergie.

2) Vérifier que la structure b) permet cette adaptation d'impédances lorsque $R_u < R_g$.

Calculer L et C en fonction de R_u, R_g et ω pour un transfert maximal d'énergie.



a)



b)

Doc. 41. Adaptateurs d'impédances à composants réactifs.

1) Considérons la structure a). L'adaptation d'impédances entre le générateur et le quadripôle impose :

$$R_g = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega R_u}{R_u + jL\omega} = \frac{R_u(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jC\omega(R_u + jL\omega)}$$

En regroupant les termes réel et imaginaire, il vient :

$$[R_u + LC\omega^2(R_g - R_u)] + j[L - R_u R_g C] = 0.$$

L'égalité à zéro implique :

$$LC = \frac{R_u}{(R_u - R_g)\omega^2}, \text{ avec } R_u > R_g \text{ et } \frac{L}{C} = R_u R_g.$$

Connaissant le produit LC et le rapport $\frac{L}{C}$, nous en déduisons :

$$L = \frac{R_u}{\omega} \sqrt{\frac{R_g}{R_u - R_g}} \text{ et } C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_g(R_u - R_g)}}.$$

2) De même, pour la structure b), l'adaptation d'impédances entre le générateur et le quadripôle impose :

$$R_g = \frac{jL\omega \left(R_u + \frac{1}{jC\omega} \right)}{R_u + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

d'où, en regroupant les termes réel et imaginaire :

$$\left(R_g R_u - \frac{L}{C} \right) + j\omega \left[L(R_g - R_u) - \frac{R_g}{C\omega^2} \right] = 0.$$

L'égalité à zéro implique $R_g > R_u$, et :

$$\frac{L}{C} = R_g R_u \text{ et } LC = \frac{R_g}{\omega^2(R_g - R_u)} \text{ avec } R_u < R_g.$$

Nous en déduisons :

$$L = \frac{R_g}{\omega} \sqrt{\frac{R_u}{R_g - R_u}} \text{ et } C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_u(R_g - R_u)}}.$$

CQFR

● SIGNAL SINUSOÏDAL

• Représentation complexe

À un signal sinusoïdal $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$ d'amplitude réelle s_m (positive) et de phase ϕ est associée la représentation complexe : $\underline{s}(t) = \underline{s}_m e^{j\omega t}$, d'amplitude complexe : $\underline{s}_m = s_m e^{j\phi}$.

La représentation de Fresnel de $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$ est la représentation géométrique de son amplitude complexe \underline{s}_m dans le plan complexe.

• Utilisation de la notation complexe

La notation complexe d'un signal peut être utilisée lorsqu'on effectue des opérations linéaires sur celui-ci : additions, soustractions, multiplication par un réel, dérivation, intégration (avec une constante nulle).

Les opérations de dérivation et d'intégration de la représentation complexe d'un signal sont très simples puisqu'il suffit de multiplier ou diviser, respectivement, le signal complexe par le facteur $j\omega$.

● LE CIRCUIT (R, L, C) SÉRIE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Lorsqu'un circuit (R, L, C) est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω , un régime permanent sinusoïdal de même pulsation que l'excitation imposée s'établit après un régime transitoire qui dépend du facteur de qualité Q du circuit.

L'utilisation de la notation complexe permet d'obtenir l'amplitude complexe de la réponse en régime permanent sinusoïdal du circuit (R, L, C). Le module et la phase de cette amplitude indiquent l'expression du régime sinusoïdal forcé.

Le courant est nul à très haute ($\omega \gg \omega_0$) et très basse ($\omega \ll \omega_0$) fréquence. Une résonance en courant est observée lorsque le circuit est excité exactement à sa pulsation propre. Le courant est alors en phase avec la tension excitatrice. L'acuité de la résonance augmente avec le facteur de qualité du circuit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

L'amplitude de la tension aux bornes de la capacité passe par un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, la résonance est obtenue pour une pulsation ω_r inférieure à ω_0 . Pour un bon facteur de qualité $\omega_r \approx \omega_0$.

● CIRCUIT LINÉAIRE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

• Régime transitoire, régime forcé

La solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$\sum_n a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = f(t)$$

peut s'écrire comme la superposition d'une solution particulière $s_1(t)$ de cette équation avec second membre $f(t)$ et d'une solution $s_0(t)$ de l'équation sans second membre : $s(t) = s_0(t) + s_1(t)$.

Pour un réseau linéaire stable, soumis à une excitation sinusoïdale, un régime permanent sinusoïdal s'établit après un régime transitoire qui tend vers zéro. En régime sinusoïdal forcé, tous les courants et tensions du circuit, de même pulsation, seront caractérisés par leurs amplitude et phase.

CQFR

• *Étude du régime sinusoïdal forcé*

Dans le cas d'un réseau linéaire en régime harmonique permanent (ou régime sinusoïdal forcé), nous pouvons transposer les lois et modèles développés en régime constant, et utiliser :

• les *lois de Kirchhoff* :

– la loi des nœuds pour les intensités complexes ;

– la loi des mailles pour les tensions complexes ;

• la *décomposition du réseau en dipôles élémentaires* :

– dipôles passifs caractérisés par leur impédance complexe ($\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ en convention récepteur) ;

– générateurs de tension sinusoïdale de f.e.m. complexe $\underline{e} = \underline{e}_m e^{j\omega t}$, de courant sinusoïdal de c.e.m. : $\underline{\eta} = \underline{\eta}_m e^{j\omega t}$, d'impédance interne \underline{Z}_i s'ils ne sont pas idéaux ;

• le *théorème de superposition* : la valeur complexe $\underline{s}(t)$ d'une grandeur quelconque (courant ou tension) est égale à la somme des valeurs complexes de cette même grandeur obtenues lorsque toutes les sources sinusoïdales sont éteintes à l'exception d'une seule.

● **PUISSANCE EN RÉGIME SINUSOÏDAL**

La valeur efficace de la grandeur périodique $s(t)$ est :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}.$$

Si $s(t)$ est une grandeur sinusoïdale d'amplitude s_m :

$$S_{\text{eff}} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}.$$

La puissance absorbée par un dipôle est, en convention récepteur :

$$p(t) = u(t) i(t).$$

En régime sinusoïdal, la puissance moyenne absorbée est :

$$P = \langle p(t) \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi.$$

La puissance est le *produit* de la tension par le courant : ce n'est pas une grandeur linéaire :

$p(t) = u(t)i(t)$ ne s'identifie pas à $\Re e[u(t)i(t)]$.

La puissance moyenne absorbée par un dipôle en régime sinusoïdal est, en convention récepteur :

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re e[\underline{u}(t) \underline{i}^*(t)].$$

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Quels sont l'argument, la phase, la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe ?
- ✓ Comment calculer les solutions permanentes sinusoïdales d'une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque excitée par une fonction sinusoïdale de pulsation ω , en utilisant les notations complexes ?
- ✓ Quelles sont les résonances de courant et de tension aux bornes d'une capacité, dans un circuit (R, L, C) série excité par un générateur de tension sinusoïdal ?
- ✓ Quelle est la signification physique d'un coefficient de qualité ?
- ✓ Pouvez-vous écrire la loi d'Ohm, les lois des mailles et des nœuds en utilisant les impédances complexes ?
- ✓ Comment exprime-t-on la puissance moyenne dissipée dans une portion de circuit ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. On a l'intensité complexe suivante :

$$i = i_0 \frac{j \frac{x}{Q}}{(1-x^2) + j \frac{x}{Q}};$$

elle correspond en notation réelle à :

a. $i(t) = i_0 \frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \cos(\omega t - \varphi)$, avec :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \\ \sin \varphi = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \end{cases}$$

b. $i(t) = i_0 \frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \cos(\omega t + \varphi)$, avec :

$$\varphi = \arctan \frac{Q(1-x^2)}{x}.$$

c. $i(t) = i_0 \frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \cos(\omega t - \varphi)$, avec :

$$\varphi = \arctan \frac{x}{Q(1-x^2)}.$$

d.

$$i(t) = i_0 \frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \left[\frac{x}{Q} \cos \omega t - (1-x^2) \sin \omega t \right]$$

2. Dans un circuit (R, L, C) série excité par une tension sinusoïdale, la résonance se produit pour $\omega = \omega_0$ pour la différence de potentielle aux bornes de :

- a. la résistance,
- b. la capacité,
- c. l'inductance.

3. $u(t)$ et $i(t)$ étant les grandeurs tension et intensité complexe relatives à une charge donnée en convention récepteur, la puissance moyenne dissipée par cet élément s'écrit :

- a. $\mathcal{P} = \frac{1}{2} u i^*$
- b. $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[u i^*]$
- c. $\mathcal{P} = \frac{1}{2} u^* i$
- d. $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[u^* i]$

► Solution, page 156.

Exercices

1 Module et argument

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$\underline{g}_1 = 2 + j; \quad \underline{g}_2 = 2 - j; \quad \underline{g}_3 = -2 + j; \quad \underline{g}_4 = -2 - j;$$

$$\underline{g}_5 = \frac{1}{2 + j}; \quad \underline{g}_6 = \frac{1}{-2 + j}; \quad \underline{g}_7 = -\frac{1}{2 + j};$$

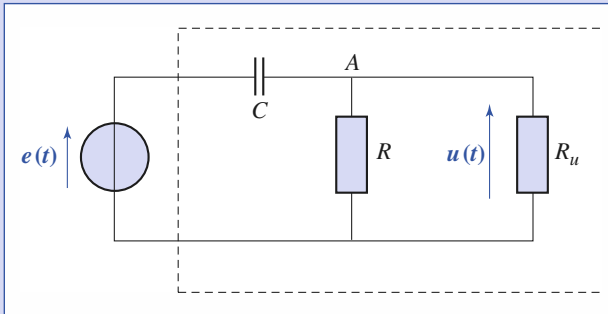
$$\underline{g}_8 = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad (\text{avec } x > 0 \text{ et } Q > 0);$$

$$\underline{g}_9 = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad (\text{avec } x \geq 0 \text{ et } Q \geq 0).$$

2 Réponse harmonique d'un dipôle

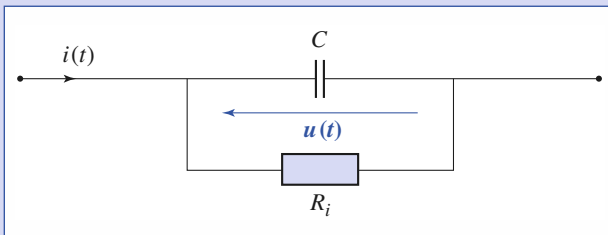
Déterminer la réponse harmonique $u(t)$ du dipôle représenté ci-dessous lorsqu'il est soumis à l'excitation sinusoïdale :

$$e(t) = e_m \cos(\omega t).$$



3 Angle de pertes d'un condensateur

Le modèle d'un condensateur aux basses et moyennes fréquences (jusqu'à 10 kHz environ pour les condensateurs électrochimiques) est l'association en parallèle de sa capacité C et de sa résistance d'isolement R_i .



1) Déterminer son admittance complexe \underline{Y} et son angle de pertes δ , sachant que, pour un dipôle d'admittance :

$$\underline{Y} = G + jB, \text{ l'angle de pertes } \delta \text{ est donné par } \tan \delta = \frac{G}{|B|}.$$

2) Calculer le courant $i(t)$ qui traverse le condensateur lorsqu'une tension $u(t) = u_m \cos(\omega t)$ est appliquée à ses bornes.

3) Calculer son angle de pertes δ à $f = 50$ Hz. Commenter. Calculer $i(t)$ sachant que $u_m = 10$ V.

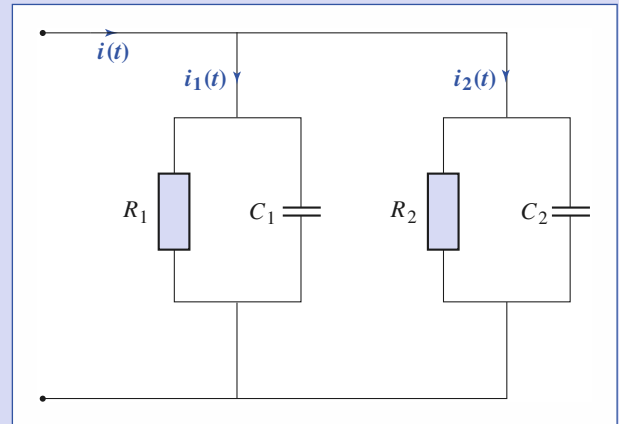
Données :

La capacité et la résistance d'isolement sont respectivement $C = 1 \mu\text{F}$ et $R_i = 100 \text{ M}\Omega$.

4 Diviseur de courant sans effet de filtrage

Un diviseur de courant sans effet de filtrage se réalise à l'aide de deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 de même structure.

L'impédance \underline{Z}_2 étant imposée, calculer R_1 et C_1 pour que le rapport d'atténuation soit constant et égal à k ($k < 1$).



5 Intensité efficace d'un courant périodique quelconque

Un courant périodique $i(t)$ comporte une composante continue de valeur I_0 et deux composantes sinusoïdales $i_1(t) = i_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $i_2(t) = i_{2m} \cos(2\omega t + \varphi_2)$.

1) Calculer sa valeur efficace I .

2) Généraliser le résultat obtenu à un courant périodique quelconque, de période T , dont nous admettons l'écriture sous la forme :

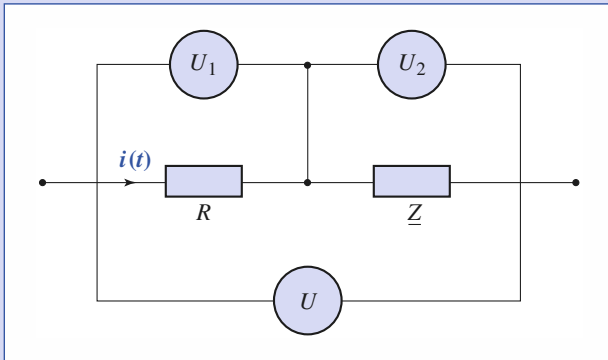
$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (écriture en série de Fourier).

6 Méthode des trois voltmètres

Pour mesurer la puissance active d'un dipôle, nous plaçons une résistance de valeur R connue en série avec un

dipôle et nous disposons trois voltmètres comme indiqué sur le schéma suivant :



- Déterminer le facteur de puissance du dipôle en fonction des indications U , U_1 et U_2 des trois voltmètres.
- En déduire la puissance active \mathcal{P} reçue par le dipôle.

7

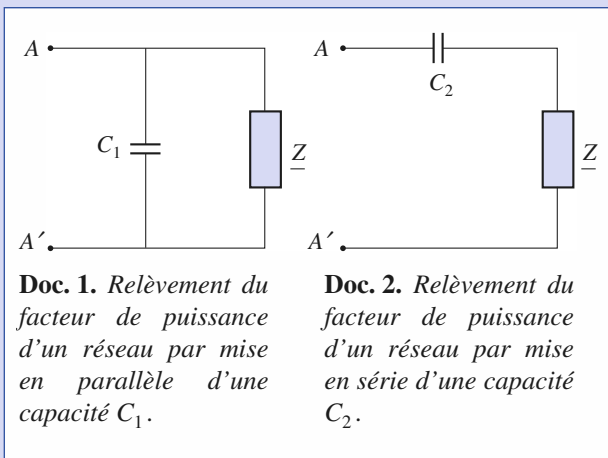
Relèvement d'un facteur de puissance

Considérons un réseau d'impédance :

$$\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

à caractère inductif : $X(\omega) > 0$. On souhaite relever le facteur de puissance de ce réseau, c'est-à-dire donner à $\cos \varphi$ une valeur égale à l'unité sans dépense d'énergie.

- Calculer, en fonction de $R(\omega)$, $X(\omega)$ et ω , la capacité C_1 à placer en parallèle sur le réseau pour que son facteur de puissance devienne égal à 1 (doc. 1).
- Quelle capacité C_2 aurait-il fallu placer en série sur le réseau (doc. 2) pour obtenir le même résultat ?



Doc. 1. Relèvement du facteur de puissance d'un réseau par mise en parallèle d'une capacité C_1 .

Doc. 2. Relèvement du facteur de puissance d'un réseau par mise en série d'une capacité C_2 .

- Des deux solutions, quelle est celle à retenir ? Pourquoi ?
- Calculer la valeur de la capacité C de la batterie de condensateurs à utiliser pour relever à 1 le facteur de puissance d'un moteur ($\cos \varphi = 0,7$), de puissance $\mathcal{P} = 10$ kW,

alimenté sous une tension de fréquence $f = 50$ Hz et d'amplitude $u_m = 220\sqrt{2}$ V.

5) La mise en parallèle d'une capacité permet de ramener le $\cos \varphi$ de l'installation à 1.

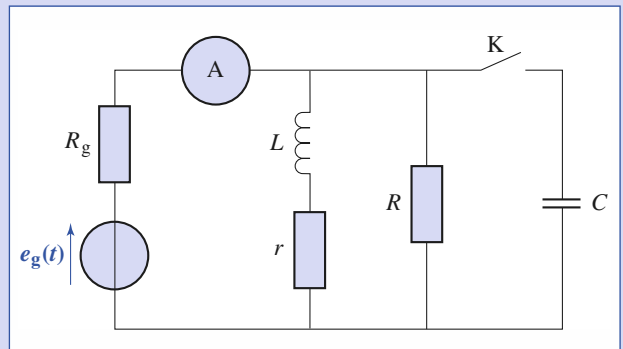
a) Calculer les intensités efficaces I et I' traversant le circuit d'alimentation avant et après le relèvement du facteur de puissance du moteur.

b) Examiner les conséquences d'un relèvement de puissance sur les pertes en ligne par effet Joule (énergie dissipée sous forme de chaleur dans la ligne pour amener la puissance à l'installation).

8

Une question d'impédance

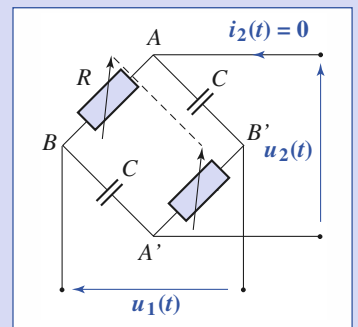
Considérons le circuit représenté sur le schéma suivant, où le générateur de f.e.m. $e_g(t) = e_{gm} \cos \omega t$, débite un courant $i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi)$. Comment doit-on choisir la capacité C pour que l'ampèremètre mesurant i_m fournisse la même indication que l'interrupteur K, ouvert ou fermé ?



9

Déphaseur (R, C)

Dans le circuit ci-contre, les résistances R sont couplées de façon à rester toujours égales. La tension d'entrée $u_1(t)$ étant sinusoïdale, déterminer la tension de sortie $u_2(t)$ lorsque la sortie est ouverte ($i_2(t) = 0$).



10

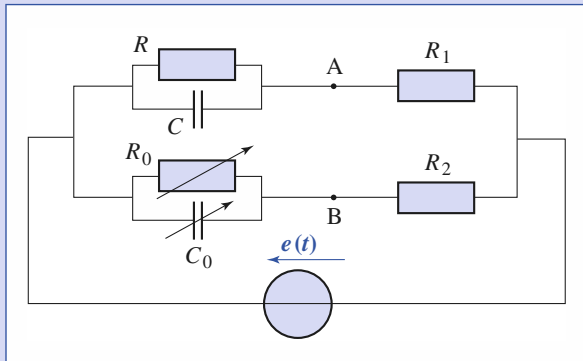
Ponts d'impédances

Pour chacun des ponts d'impédances étudiés ci-après, établir la condition d'équilibre et indiquer le mode opéra-

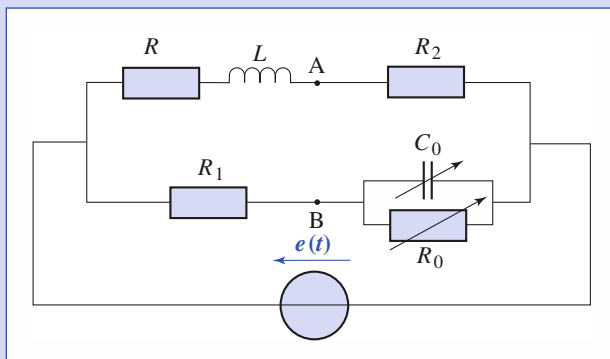
Exercices

toire permettant de réaliser l'équilibre du pont, c'est-à-dire réaliser la condition $u_{AB} = 0$.

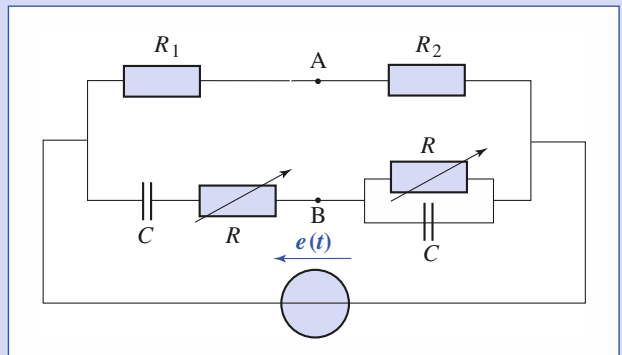
1) Pont de Sauty parallèle :



2) Pont de Maxwell :



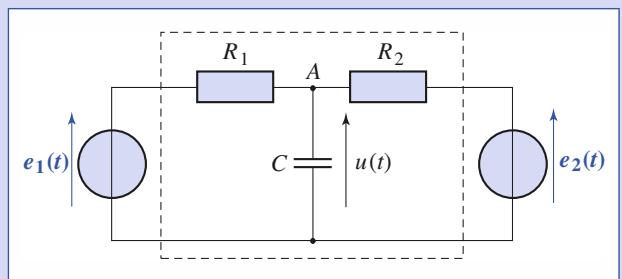
3) Pont de Robinson :



11 Réponse d'un circuit soumis à deux excitations sinusoïdales

Déterminer la réponse $u(t)$ du circuit représenté ci-dessous lorsqu'il est soumis aux deux excitations sinusoïdales :

$$e_1(t) = e_m \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad e_2(t) = e_m \sin(2\omega t).$$



Corrigés

Solution du tac au tac, page 153.

1. a, b, d : Vrai c : Faux
 2. a : Vrai b, c : Faux
 3. b, d : Vrai a, c : Faux

1 Étant donné un nombre complexe $z = a + jb$, son module $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ et son argument :

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0, \text{ avec } -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ mod } (2\pi), \\ & \text{car } \cos(\phi) > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a < 0, \text{ avec } \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} \text{ mod } (2\pi), \\ & \text{car } \cos(\phi) < 0. \end{cases}$$

$g = g_m \exp(j\phi)$	module	$\tan \phi$	ϕ ou domaine de ϕ
$g_1 = 2 + j$	$\sqrt{5}$	0,5	$+26,6^\circ$
$g_2 = 2 - j$	$\sqrt{5}$	-0,5	$-26,6^\circ$
$g_3 = -2 + j$	$\sqrt{5}$	-0,5	$180^\circ - 26,6^\circ = 153,4^\circ$
$g_4 = -2 - j$	$\sqrt{5}$	0,5	$180^\circ + 26,6^\circ = 206,6^\circ$
$g_5 = \frac{1}{2 + j}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	-0,5	$-26,6^\circ$
$g_6 = \frac{1}{-2 + j}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0,5	$206,6^\circ$
$g_7 = \frac{-1}{2 + j}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	-0,5	$153,4^\circ$
$g_8 = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$	$\frac{1}{[1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2]^{\frac{1}{2}}}$	$-Q(x - \frac{1}{x})$	$-\arctan [Q(x - \frac{1}{x})], -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$
$g_9 = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	$\frac{1}{[(1 - x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2]^{\frac{1}{2}}}$	$-\frac{x}{Q(1 - x^2)}$	si $x < 1$ $\phi = -\arctan [\frac{x}{Q(1 - x^2)}]$ si $x > 1$ $\phi = \pi - \arctan [\frac{x}{Q(1 - x^2)}]$

2 L'équation différentielle du dipôle s'obtient en appliquant la loi des nœuds en A :

$$C \frac{d[e(t) - u(t)]}{dt} = \frac{u(t)}{R} + \frac{u(t)}{R_u}$$

On pose $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_u}$ et $R_0 C = \frac{1}{\omega_0}$;

il vient $\frac{du(t)}{dt} + \omega_0 u(t) = \frac{de(t)}{dt}$.

En notation complexe : $e(t) = e_m e^{j\omega t}$ ($e_m = e_m$) et $u(t) = u_m e^{j\omega t}$.

L'équation différentielle précédente s'écrit en notation complexe :

$$\frac{d u(t)}{dt} + \omega_0 u(t) = (\omega_0 + j\omega) u_m e^{j\omega t} = j\omega e_m e^{j\omega t},$$

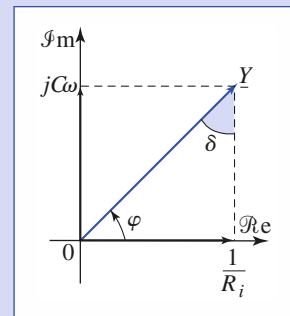
soit : $u_m = \frac{j\omega}{\omega_0 + j\omega} e_m$.

La réponse harmonique est $u(t) = -\frac{e_m \omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} \cos(\omega t + \phi)$,

avec $\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$ ($0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$).

3 1) L'admittance complexe \underline{Y} du condensateur et son angle de pertes δ sont respectivement :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_i} + jC\omega \text{ et } \tan \delta = \frac{G}{|B|} = \frac{1}{R_i C \omega}$$



À caractéristiques (C, R_i) constantes, cet angle de pertes est d'autant plus faible que la fréquence est élevée. La représentation de Fresnel de \underline{Y} est donnée ci-dessus.

2) La notation complexe nous permet d'écrire $i_m = \left(\frac{1}{R_i} + jC\omega\right) u_m$, d'où l'expression du courant à travers le condensateur :

$$i(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{R_i}\right)^2 + (C\omega)^2} u_m \cos(\omega t + \varphi),$$

avec $\tan \varphi = R_i C \omega$, et $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ($\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta$) :

soit encore : $i(t) = -\sqrt{\left(\frac{1}{R_i}\right)^2 + (C\omega)^2} u_m \sin(\omega t - \delta)$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{R_i}\right)^2 + (C\omega)^2} u_m \sin(\omega t + \pi - \delta).$$

3) $\tan \delta = \frac{1}{10^8 \cdot 10^{-6} \cdot 100\pi} = 3,2 \cdot 10^{-5}$, d'où $\delta \approx 3,2 \cdot 10^{-5}$ rad.

Corrigés

Ce condensateur est pratiquement idéal.

L'amplitude du courant qui traverse ce condensateur est :

$$i_m = 10 \sqrt{10^{-16} + (10^{-6} \times 100\pi)^2} = 3,1 \text{ mA},$$

d'où : $i(t) = -3,1 \sin(\omega t - 3,2 \cdot 10^{-5}) \text{ mA}$.

4

Le rapport d'atténuation k est :

$$k = \frac{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}$$

avec :
$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{R_2 (1 + jR_1 C_1 \omega)}{R_1 (1 + jR_2 C_2 \omega)}$$

indépendant de la fréquence si les rapports des termes homologues des deux polynômes en $j\omega$ sont égaux :

$$1 = \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}, \text{ soit } \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{R_2}{R_1} \text{ et } R_1 C_1 = R_2 C_2.$$

D'où la valeur de la résistance R_1 et celle de la capacité C_1 :

$$R_1 = \frac{k}{1-k} R_2 \text{ et } C_2 = \frac{1-k}{k} C_2.$$

5

1) On calcule la valeur moyenne de :

$$i^2(t) = [I_2 + i_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) + i_{2m} \cos(2\omega t + \varphi_2)]^2.$$

Le développement de $i^2(t)$ comprend :

- un terme constant I_0^2 ;
- deux termes en cosinus carrés : $i_{1m}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1)$ et $i_{2m}^2 \cos^2(2\omega t + \varphi_2)$,

respectivement de valeurs moyennes $\frac{i_{1m}^2}{2}$ et $\frac{i_{2m}^2}{2}$;

- deux termes en cosinus : $2I_{0m} i_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $2I_{0m} i_{2m} \cos(2\omega t + \varphi_2)$ de valeur moyenne nulle ;
- un terme comportant un produit de deux cosinus :

$$2i_{1m} i_{2m} \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(2\omega t + \varphi_2) = i_{1m} i_{2m} [\cos(\omega t + \varphi_2 - \varphi_1) + \cos(3\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)]$$

de valeur moyenne nulle.

En conséquence, on obtient :

$$\langle i^2(t) \rangle = I_0^2 + \frac{i_{1m}^2}{2} + \frac{i_{2m}^2}{2} = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2.$$

Ainsi le carré de l'intensité efficace I^2 est la somme des carrés des intensités efficaces I_k^2 des courants composants :

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2}.$$

2) Un courant périodique se développe en série de Fourier :

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

Le carré de $i(t)$ s'analyse par :

- le terme constant I_0^2 ;

- des termes en cosinus carrés : $i_{km}^2 \cos^2(k\omega t + \varphi_k)$ de valeur moyenne $\frac{i_{km}^2}{2}$;

- des termes en cosinus : $2I_0 i_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k)$ de valeurs moyennes nulles ;

- des termes comportant des produits de cosinus :

$$2i_{km} i_{k'm} \cos(k\omega t + \varphi_k) \cos(k'\omega t - \varphi_{k'})$$

$$= i_{km} i_{k'm} [\cos((k-k')\omega t + \varphi_k - \varphi_{k'}) + \cos((k+k')\omega t + \varphi_k - \varphi_{k'})]$$

de valeur moyenne nulle.

En conclusion :
$$I^2 = I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2.$$

6

1) • Méthode algébrique

La tension \underline{u}_m est en phase avec le courant \underline{i}_m qui traverse l'association. En multipliant la relation $\underline{u}_m = \underline{u}_{1m} + \underline{u}_{2m}$ par son conjugué, il vient :

$$u_m^2 = u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + \underline{u}_{1m} \underline{u}_{2m} + \underline{u}_{2m} \underline{u}_{1m} = u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + 2u_{1m} u_{2m} \cos \varphi,$$

avec φ déphasage de \underline{u}_{2m} par rapport à \underline{u}_{1m} , c'est-à-dire par rapport au courant.

D'où l'expression du facteur de puissance :

$$\cos \varphi = \frac{u_m^2 - u_{1m}^2 - u_{2m}^2}{2 \underline{u}_{1m} \underline{u}_{2m}} = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1 U_2}.$$

• Méthode géométrique

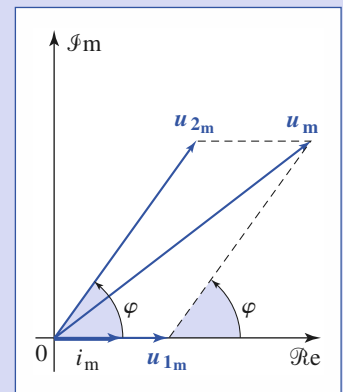
On représente la relation $\underline{u}_m = \underline{u}_{1m} + \underline{u}_{2m}$ dans le plan complexe. Il apparaît immédiatement sur le diagramme que :

$$u_m^2 = u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + 2u_{1m} u_{2m} \cos \varphi,$$

ce qui conduit à la même suite de calculs.

2) La puissance consommée est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= U_2 I \cos \varphi \\ &= \frac{U_1 U_2}{R} \cos \varphi \\ &= \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R}. \end{aligned}$$



7

1) Calculons l'admittance complexe du réseau :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R(\omega) - jX(\omega)}{Z(\omega)^2} = G(\omega) + jB(\omega), \text{ d'où}$$

$$B(\omega) = -\frac{X(\omega)}{Z(\omega)^2} < 0, \text{ et celle de l'association parallèle de } C_1 \text{ et du réseau}$$

(doc. 1) :

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y} + jC_1 \omega = G(\omega) + j[B(\omega) + C_1 \omega].$$

En choisissant $C_1 = -\frac{B(\omega)}{\omega} = \frac{X(\omega)}{\omega Z(\omega)^2} > 0$, on obtient $\cos \varphi = \frac{G(\omega)}{Y_1} = 1$.

2) L'impédance complexe de l'association série de C_2 et du réseau (doc. 2) est :

$$\underline{Z}_t = \underline{Z} + \frac{1}{jC_2\omega} = R(\omega) + j\left[X(\omega) - \frac{1}{C_2\omega}\right].$$

Pour obtenir $\cos \varphi = 1$, il faut prendre :

$$C_2 = \frac{1}{X(\omega)\omega} > 0.$$

3) Avec la seconde méthode, le condensateur C_2 est traversé par tout le courant d'alimentation du réseau d'utilisation. Il doit pouvoir supporter cette intensité, ce qui n'est pas toujours facile à réaliser lorsque les courants sont élevés.

En outre, il forme avec le réseau d'utilisation un diviseur de tension qui peut modifier de façon significative sa tension d'alimentation.

La première méthode nécessite seulement de disposer de condensateurs supportant la tension d'alimentation du réseau d'utilisation.

Cette condition ne pose aucun problème pour les tensions habituelles.

La première méthode est préférable ; elle est généralement utilisée.

4) Calculons l'admittance Y du moteur :

$$\mathcal{P} = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi = Y(\omega) \frac{u_m^2}{2} \cos \varphi,$$

d'où :

$$Y(\omega) = \frac{2\mathcal{P}}{u_m^2 \cos \varphi}.$$

Comme $\underline{Y}(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) = Y(\omega)e^{-j\varphi}$

$$= Y(\omega)[\cos \varphi - j \sin \varphi],$$

il vient :

$$B(\omega) = -Y(\omega) \sin \varphi = -\frac{2\mathcal{P}}{u_m^2} \tan \varphi.$$

La valeur de la capacité C , à placer en parallèle sur le moteur pour relever son facteur de puissance, est :

$$C = -\frac{B(\omega)}{\omega} = \frac{2\mathcal{P} \tan \varphi}{\omega u_m^2}, \text{ soit } C = 670 \mu\text{F}.$$

Cette valeur est élevée et impose l'utilisation d'une batterie de condensateurs, les condensateurs utilisés en alternatif n'étant pas électrochimiques sont de faible capacité (de l'ordre d'une dizaine de microfarad).

5) a) Avant le relèvement de son facteur de puissance, le courant alimentant le moteur avait une intensité :

$$I = \frac{\mathcal{P}}{U \cos \varphi} = 64,9 \text{ A}.$$

Après relèvement, elle devient $I' = \frac{\mathcal{P}}{U} = 45,45 \text{ A}$.

Cela représente une diminution relative de la consommation en intensité

$$\frac{I - I'}{I} \approx 30 \%.$$

b) Les pertes en ligne par effet Joule, proportionnelles au carré de l'intensité efficace, sont réduites de $\frac{I^2 - I'^2}{I^2} \approx 50 \%$, ce qui est considérable.

8) Soit \underline{Z} l'impédance de charge du générateur (e_g , R_g) quand l'interrupteur (K) est fermé. Dans ces conditions, le générateur débite le courant d'amplitude complexe :

$$\underline{i}_m = \frac{e_{gm}}{R_g + \underline{Z}}.$$

On note par \underline{Z}' cette impédance de charge quand l'interrupteur (K) est ouvert. Le

générateur débite alors un courant d'amplitude complexe $\underline{i}'_m = \frac{e_{gm}}{R_g + \underline{Z}'}$.

L'ampèremètre fournira la même indication si $\underline{i}_m = \underline{i}'_m$ ou $\underline{i}_m = \underline{i}'_m^*$.

La première condition étant irréalisable, reste la seconde qui implique $\underline{Z} = \underline{Z}'^*$, soit encore $\underline{Y} = \underline{Y}'^*$.

On calcule les admittances :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{r + jL\omega} = \left[\frac{1}{R} + \frac{r}{r^2 + (L\omega)^2} \right] + j \left[C\omega - \frac{L\omega}{r^2 + (L\omega)^2} \right]$$

et, en faisant $C = 0$:

$$\underline{Y}' = \left[\frac{1}{R} + \frac{r}{r^2 + (L\omega)^2} \right] - j \left[\frac{L\omega}{r^2 + (L\omega)^2} \right].$$

La condition à réaliser s'écrit $C\omega - \frac{L\omega}{r^2 + (L\omega)^2} = \frac{L\omega}{r^2 + (L\omega)^2}$, d'où la

valeur cherchée de la capacité : $C = \frac{2L\omega}{r^2 + (L\omega)^2}$.

9) On prend le potentiel du nœud B' comme potentiel de référence. Les branches BA et AB' forment un diviseur de tension :

$$\underline{u}_{Am} = \underline{u}_{1m} \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \underline{u}_{1m} \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

De même les branches BA' et $A'B'$ forment un second diviseur de tension :

$$\underline{u}_{A'm} = \underline{u}_{1m} \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \underline{u}_{1m} \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

L'expression de l'amplitude complexe \underline{u}_{2m} s'en déduit :

$$\underline{u}_{2m} = \underline{u}_{Am} - \underline{u}_{A'm} = \underline{u}_{1m} \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

Aucun effet de filtrage ne se manifeste $\left[(\nabla\omega)(\nabla R) \left| \frac{\underline{u}_{2m}}{\underline{u}_{1m}} \right| = 1 \right]$.

Le déphasage φ de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$ est fonction de R et de ω :

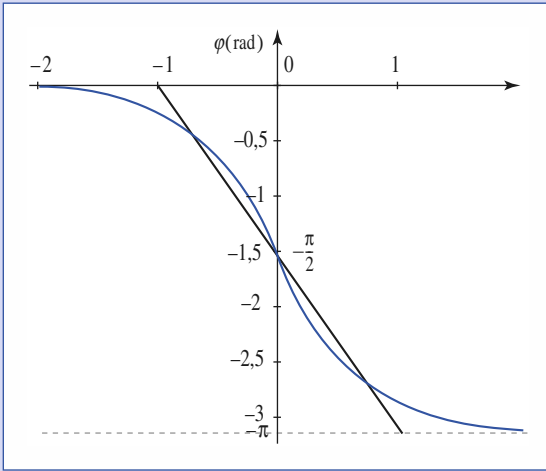
$$\varphi = \arg \left(\frac{\underline{u}_{2m}}{\underline{u}_{1m}} \right) = -2 \arctan(RC\omega) = -2 \arctan x,$$

en posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

À fréquence constante, on règle le déphasage φ par les résistances R , sans effet de filtrage : le circuit étudié est un déphaseur.

Le déphasage φ introduit peut varier de 0 à $-\pi$

Corrigés



10 1) Soit Z et Z_0 respectivement les deux impédances des deux circuits parallèles (R, C) et (R, C_0) . La condition d'équilibre qui s'écrit :

$$R_2 Z = R_1 Z_0, \text{ soit } R_1 \frac{1}{Z} = R_2 \frac{1}{Z_0},$$

s'explique en :

$$R_1 \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) = R_2 \left(\frac{1}{R_0} + jC_0\omega \right).$$

En égalant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient deux conditions d'équilibre indépendantes de la pulsation ω :

$$R_1 R_0 = R R_2 \text{ et } R_1 C = R_2 C_0.$$

Mode opératoire

Il s'agit de rendre le réglage de R_0 et de C_0 indépendants :

- en continu, on fixe la résistance de réglage à $R_0 = \frac{R R_2}{R_1}$;
- en alternatif, avec une fréquence arbitraire, on fixe la capacité de réglage à :

$$C_0 = C \frac{R_1}{R_2}.$$

Si les condensateurs ont des résistances d'isolement non infinies R_i et R_{i0} , il est possible d'en tenir compte en remplaçant respectivement R par $R' = R // R_i$ et R_0 par $R'_0 = R_0 // R_{i0}$. Ce pont est utilisé pour la mesure des capacités C .

2) La condition d'équilibre écrite sous la forme $Z = R_1 R_2 \frac{1}{Z_0}$ s'explique en :

$$R + jL\omega = R_1 R_2 \left(\frac{1}{R_0} + jC_0\omega \right),$$

d'où les deux conditions à réaliser, indépendantes de la pulsation :

$$R R_0 = R_1 R_2 \text{ et } L = R_1 R_2 C_0.$$

Mode opératoire

Il est identique à celui du pont de Sauty :

- en continu, on fixe la résistance de réglage à $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R}$;
- en alternatif, avec une fréquence arbitraire, on fixe la capacité de réglage à :

$$C_0 = \frac{L}{R_1 R_2}.$$

Le pont de Maxwell est utilisé pour la mesure des inductances.

3) Pour expliciter commodément la condition d'équilibre, on écrit cette dernière sous la forme :

$$R_1 = R_2 \frac{Z}{Z'}, \text{ d'où } R_1 = R_2 \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right);$$

d'où les deux conditions à réaliser :

$$R_1 = 2R_2 \text{ et } RC\omega = 1.$$

On remarque que la deuxième condition est fonction de la pulsation.

Mode opératoire

- Choisir $R_1 = 2R_2$.
- Faire varier R pour obtenir l'équilibre du pont.

Le pont permet de mesurer les fréquences : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$.

11

La loi des nœuds appliquée en A fournit l'équation différentielle du circuit :

$$\frac{e_1(t) - u(t)}{R_1} + \frac{e_2(t) - u(t)}{R_2} = C \frac{du(t)}{dt}.$$

On pose $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ et $RC = \frac{1}{\omega_0}$: il vient :

$$\frac{du(t)}{dt} + \omega_0 u(t) = \frac{R\omega_0}{R_1} e_1(t) + \frac{R\omega_0}{R_2} e_2(t).$$

On note $u(t) = s_1(t) + s_2(t)$, en appelant $s_1(t)$ la solution forcée due à $e_1(t)$, et $s_2(t)$ celle due à $e_2(t)$.

L'équation différentielle précédente (en notation complexe) donne en éteignant successivement les sources $e_2(t)$ et $e_1(t)$:

$$(\omega_0 + j\omega) s_1(t) = \frac{R\omega_0}{R_1} e_1(t) = \frac{R\omega_0}{R_1} e_m e^{j\omega t}.$$

$$[\omega_0 + j(2\omega)] s_2(t) = \frac{R\omega_0}{R_2} e_2(t) = -j \frac{R\omega_0}{R_1} e_m e^{2j\omega t}.$$

La réponse harmonique complexe du circuit est égale à $u(t) = s_1(t) + s_2(t)$,

$$\text{avec : } \underline{s}_1(t) = \frac{R}{R_1} \frac{\omega_0 e_m}{\omega_0 + j\omega} e^{j\omega t}$$

$$\text{et : } \underline{s}_2(t) = \frac{R}{R_2} \frac{\omega_0 e_m e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega_0 + j(2\omega)} e^{j(2\omega)t}.$$

$$\text{soit : } u(t) = \frac{R}{R_1} \frac{\omega_0 e_m}{\omega_0 + j\omega} e^{j\omega t} + \frac{R}{R_2} \frac{\omega_0^2 e_m e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega_0 + j(2\omega)} e^{2j\omega t}.$$

La réponse du circuit en est $u(t) = \Re e \underline{u}(t)$, soit explicitement :

$$u(t) = \frac{R}{R_1} \frac{\omega_0 e_m}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} \cos(\omega t + \phi_1) + \frac{R}{R_2} \frac{\omega_0 e_m}{\sqrt{\omega_0^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega t + \phi_2),$$

$$\text{où } \tan \phi_1 = -\frac{\omega}{\omega_0}, \text{ avec } -\frac{\pi}{2} \leq \phi_1 \leq 0,$$

$$\text{et } \tan \phi_2 = -\frac{2\omega}{\omega_0}, \text{ avec } -\frac{\pi}{2} \leq \phi_2 \leq 0.$$

L'amplificateur opérationnel Le modèle idéal TP Cours



Introduction

*Les premiers circuits intégrés
sont apparus vers 1962.*

*Ils permettent la réalisation de fonctions complexes
sous des volumes réduits,
avec une très faible consommation,
une très grande fiabilité et un coût très bas.*

*L'amplificateur opérationnel doit son nom
à son utilisation première dans les circuits effectuant
des opérations mathématiques discrètes ou continues
telles que des opérations logiques,
des intégrations, des dérivations, etc.
Aujourd'hui, le champ de son utilisation est si étendu
qu'il est devenu tout simplement composant.*

O B J E C T I F S

- Étudier les montages de base à amplificateurs opérationnels.

P R É R E Q U I S

- Théorèmes généraux de l'électrocinétique.
- Utilisation d'un oscilloscope pour la mesure d'amplitudes et de déphasages.

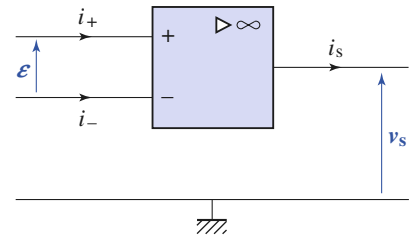
Présentation de l'amplificateur opérationnel idéal

L'amplificateur opérationnel (A.O.) idéal est un composant théorique possédant trois bornes : l'entrée inverseuse, notée $-$, l'entrée non inverseuse, notée $+$ et la sortie. Il est représenté symboliquement par le *document 1*.

Aucun courant n'arrive par les entrées : $i_+ = i_- = 0$. En revanche, un courant i_s qui dépend des circuits extérieurs peut sortir (ou entrer) par la sortie.

Un amplificateur opérationnel idéal peut fonctionner suivant deux régimes :

- un *régime linéaire* pour lequel $\varepsilon = 0$ et v_s fixé par le reste du circuit, compte tenu de la relation $\varepsilon = 0$ et dans la limite où v_s ne dépasse pas des valeurs fixées par les alimentations $V_{\text{sat}}^- < v_s < V_{\text{sat}}^+$;
- un *régime non linéaire* pour lequel la tension de sortie v_s de l'amplificateur prend une des valeurs limites V_{sat}^+ ou V_{sat}^- . Ainsi, lorsque $\varepsilon > 0$, $v_s = V_{\text{sat}}^+$ tension de saturation positive et lorsque $\varepsilon < 0$, $v_s = V_{\text{sat}}^-$ tension de saturation négative. En général, $V_{\text{sat}}^- = -V_{\text{sat}}^+$, si bien que si $\varepsilon > 0$, alors $v_s = V_{\text{sat}}^+$ et si $\varepsilon < 0$, alors $v_s = -V_{\text{sat}}^-$.



Doc. 1. Représentation symbolique d'un amplificateur opérationnel idéal.

Un A.O. idéal est caractérisé par des courants d'entrée nuls et par une différence de potentiel ε nulle entre ses deux entrées en régime linéaire. Sa caractéristique de transfert est donnée par le *document 2*.

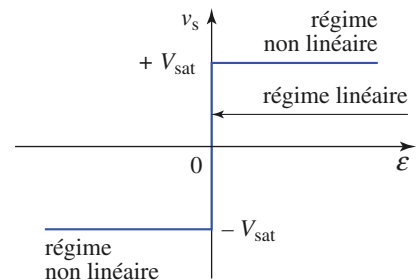
Remarques

- *Le qualificatif linéaire signifie que nous pourrions appliquer les lois de l'électrocinétique linéaire à un circuit ne contenant que des composants linéaires et des amplificateurs opérationnels idéaux en régime linéaire.*
- *Les alimentations ne sont pas représentées sur le document 1. Des courants, qui ne figurent pas sur le schéma, arrivent et partent de la masse par les alimentations. Il ne faut pas écrire : « $i_+ + i_- = i_s$ » pour un amplificateur opérationnel ainsi représenté.*

2 L'amplificateur opérationnel réel

Les amplificateurs opérationnels rassemblent sur une surface de quelques millimètres carrés de silicium une dizaine de transistors, de résistors et de condensateurs. Leurs performances dépendent principalement des transistors d'entrée qui sont bipolaires pour le $\mu\text{A}741$ et à effet de champ pour le TL081. Comme ces performances sont nettement plus médiocres pour le type bipolaire que pour le type à effet de champ, les défauts sont plus aisés à mettre en évidence sur un $\mu\text{A}741$ que sur un TL081. Pour cette raison, nous choisirons d'utiliser un 741 pour étudier les montages de base et nous réserverons le TL081 pour les montages performants.

Dans ce chapitre, le 741 désigne un amplificateur opérationnel que les constructeurs référencient sous différents noms ($\mu\text{A}741$, SFC2741, etc.) avec des caractéristiques voisines, sinon identiques.



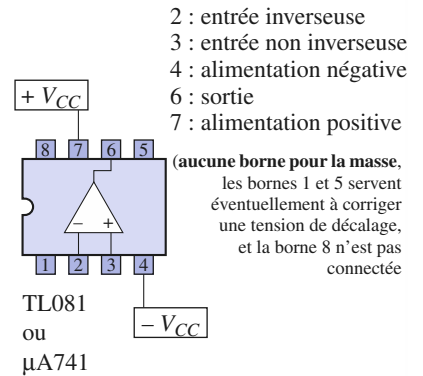
Doc. 2. Caractéristique d'un amplificateur opérationnel idéal. Lorsque $\varepsilon = 0$, v_s est imposée par le circuit extérieur.

L'amplificateur opérationnel réel est un composant dont les caractéristiques sont proches de celles de l'amplificateur opérationnel idéal.

Elles dépendent cependant de son type (741 ou TL081) et elles ne sont pas connues de façon précise, car le fabricant du composant ne garantit que des caractéristiques minimales ou typiques pour un modèle donné.

Un amplificateur opérationnel est présenté généralement sous la forme d'un boîtier à huit broches (*doc. 3*). Seules cinq d'entre elles nous intéressent : l'alimentation positive, notée $+V_{cc}$, l'alimentation négative, notée $-V_{cc}$, les deux entrées inverseuse et non inverseuse, notées $-$ et $+$ et la sortie.

Remarquons qu'il n'y a aucune borne prévue pour une masse éventuelle sur ce boîtier.

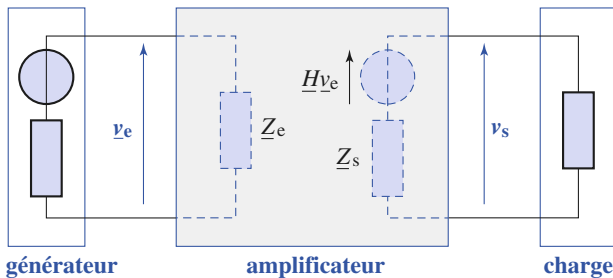


Doc. 3. Identification des broches d'un amplificateur opérationnel réel (TL081 ou $\mu A741$).

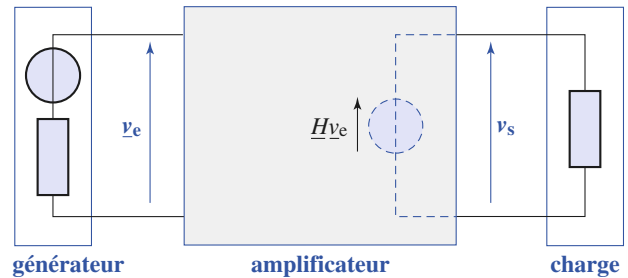
3 Montage amplificateur linéaire

3.1. Modèle idéal et modèle réel

Un montage amplificateur linéaire (réalisé, par exemple, avec un A.O.) peut être représenté, en régime sinusoïdal forcé, par une « boîte noire » possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Vu du générateur d'entrée, il est équivalent à une impédance \underline{Z}_e (impédance d'entrée) et vu de la sortie à un générateur de f.e.m. $\underline{H}v_e$ (\underline{H} fonction de transfert de l'amplificateur) et d'impédance \underline{Z}_s (impédance de sortie) (*doc. 4*).



Doc. 4. Modélisation d'un amplificateur de tension.



Doc. 5. Amplificateur de tension idéal.

Le cas idéal correspond à \underline{H} réel indépendant de la fréquence, \underline{Z}_e infini et \underline{Z}_s nul. Dans ces conditions, le circuit ne déforme pas les signaux quelles que soient leurs fréquences. En outre, il ne consomme pas de puissance en entrée et fournit une puissance arbitraire en sortie.

Un amplificateur de tension idéal est caractérisé par :

- une fonction de transfert \underline{H} réelle et indépendante de la fréquence ;
- une impédance d'entrée \underline{Z}_e infinie ;
- une impédance de sortie \underline{Z}_s nulle.

3.2. Mesure des impédances d'entrée et de sortie

Dans les montages que nous étudierons, les impédances seront toujours résistives. Nous nous contenterons d'une méthode simple permettant de déterminer l'ordre de grandeur de ces résistances.

3.2.1. Mesure de la résistance d'entrée

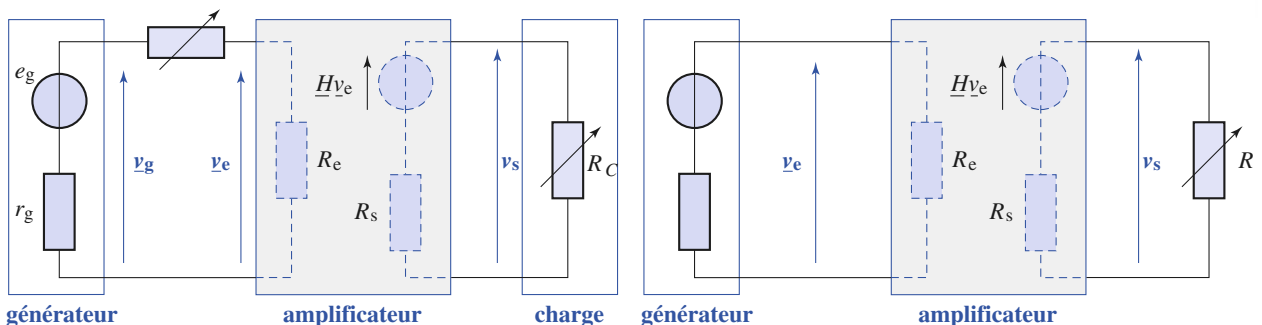
Réalisons le montage du *document 6*, la résistance R étant nulle. Nous avons alors $v_e = v_g$ et $v_s = \frac{R_e}{R_s + R_e} H v_e$. Réglons maintenant la résistance R telle que $R = R_e$, c'est-à-dire telle que $v_e = \frac{v_g}{2}$; alors $v_s = \frac{R_e}{R_s + R_e} \frac{H v_e}{2}$, le choix de ce rapport 2 entre v_g et v_e correspond à une mesure simple, réalisable avec une bonne précision.

La *résistance d'entrée* R_e est égale à la valeur de R telle qu'à $|v_g|$ constant, $|v_e|$ ou $|v_s|$ sont égales à la moitié de leurs valeurs mesurées quand R est nulle.

3.2.2. Mesure de la résistance de sortie

Réalisons le montage du *document 7*, la résistance R étant infinie; alors $v_s = H v_e$. Modifions R telle que $v_s = \frac{H v_e}{2}$, alors $R = R_s$.

La *résistance de sortie* R_s est égale à la valeur de R telle qu'à $|v_e|$ constant, $|v_s|$ soit la moitié de sa valeur mesurée quand R est infinie.



Doc. 6. Principe de la mesure de la résistance d'entrée d'un amplificateur.

Doc. 7. Principe de la mesure de la résistance de sortie d'un amplificateur.

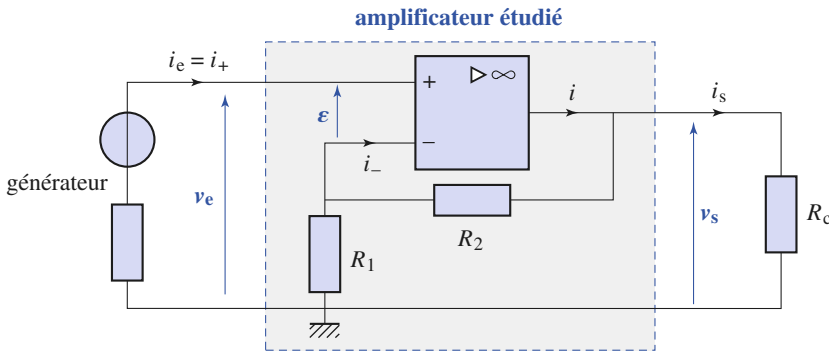
4 Montage amplificateur non inverseur

4.1. Étude théorique

Considérons le montage représenté sur le *document 8* avec un A.O. supposé idéal ($i_+ = i_- = 0$). Faisons l'hypothèse du régime linéaire ($\varepsilon = 0$) que nous justifierons ultérieurement. Comme i_- est nul, le potentiel de l'entrée inverseuse est donné par la formule du pont diviseur, soit :

$$v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s.$$

D'où $v_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_e$, puisqu'en régime linéaire $v_e = v_+ = v_-$.



Le symbole $\triangleright \infty$ sur le document 8 signifie que l'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal. La tension de sortie v_s étant non nulle pour une tension d'entrée ε nulle, le gain H d'un tel amplificateur est bien infini.

Doc. 8. Amplificateur non inverseur.

Le montage étudié est un amplificateur de tension non inverseur (v_s et v_e sont de mêmes signes) d'amplification :

$$H = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

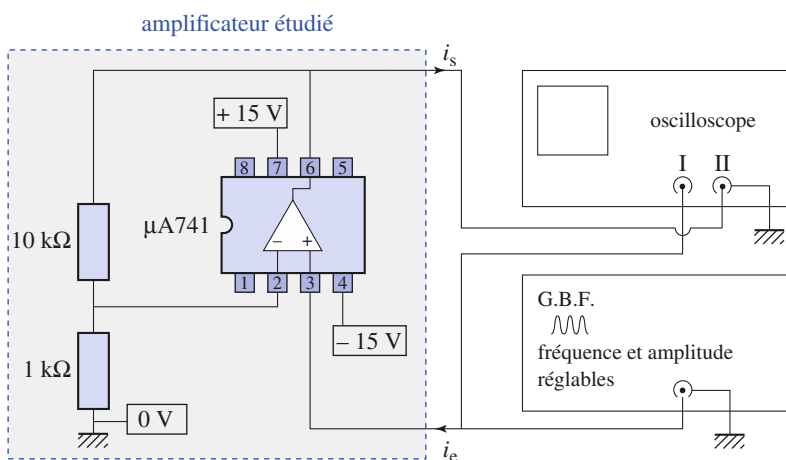
Son impédance d'entrée est infinie ($i_e = 0$) et son impédance de sortie est nulle (v_s indépendant de i_s).

Remarque

Même si le courant de sortie i_s de l'amplificateur non inverseur est nul, un courant non nul i sort de l'amplificateur opérationnel.

4.2. Réalisation expérimentale

Réalisons le montage d'un amplificateur non inverseur représenté sur le document 9. Le générateur de fréquence émet des signaux sinusoïdaux de fréquence f .



Doc. 9. Circuit d'étude d'un amplificateur non inverseur ($R_c \approx \infty$).

D'après l'étude théorique précédente, le montage réalisé est un amplificateur non inverseur d'amplification $A_v = 11$, d'impédance d'entrée infinie d'impédance et de sortie nulle.

Les tensions d'alimentation (+15 V et -15 V) sont définies par rapport à la masse.

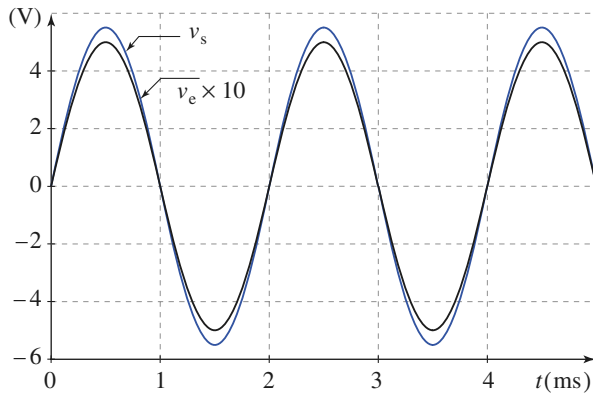
Concrètement, l'alimentation stabilisée comporte trois bornes :

- Une borne 15 V à relier à la broche 7.
- Une borne 0 V à relier à la masse de l'oscilloscope, et donc à celle du G.B.F.
- Une borne -15 V à relier à la broche 4.

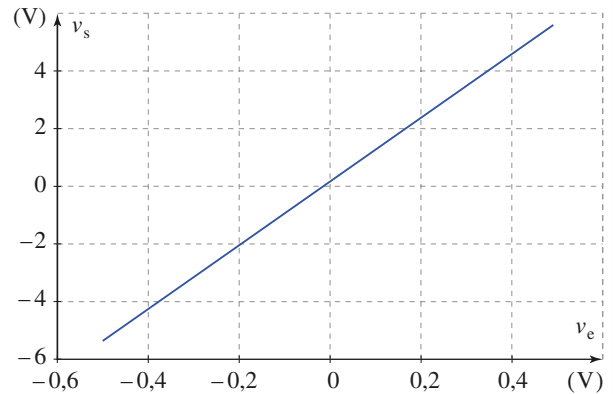
⚠ Attention, il n'y a pas de bornes de masse sur un amplificateur opérationnel.

4.3. Premières observations

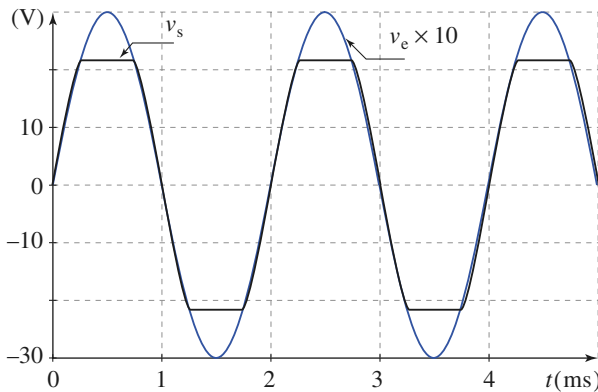
Enregistrons les signaux observés sur l'oscilloscope.



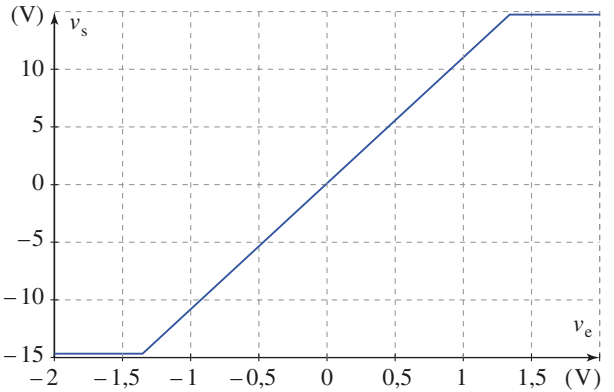
Doc. 10. Fréquence de travail $f = 500$ Hz, tension en entrée $v_e = 0,5$ V et oscillographe en mode DC bicourbe.



Doc. 11. Fréquence de travail $f = 500$ Hz, tension en entrée $v_e = 0,5$ V et oscillographe en mode XY.



Doc. 12. Fréquence de travail $f = 500$ Hz, tension en entrée $v_e = 2$ V et oscillographe en mode DC bicourbe.



Doc. 13. Fréquence de travail $f = 500$ Hz, tension en entrée $v_e = 2$ V et oscillographe en mode XY.

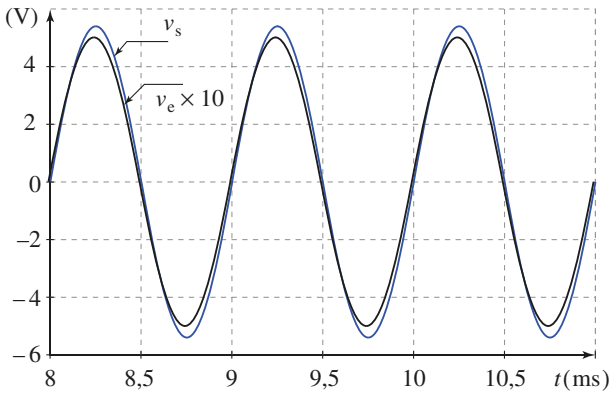
Nous remarquons sur le *document 10* que le signal de sortie est sensiblement sinusoïdal, de même fréquence que le signal d'entrée et d'amplitude 5,5 V. Le tracé en mode XY (*doc. 11*) est un segment de droite dont la pente est de l'ordre de 11.

Les tensions v_s et v_e sont donc proportionnelles. Le montage réalise effectivement une amplification $A_v \approx 11$.

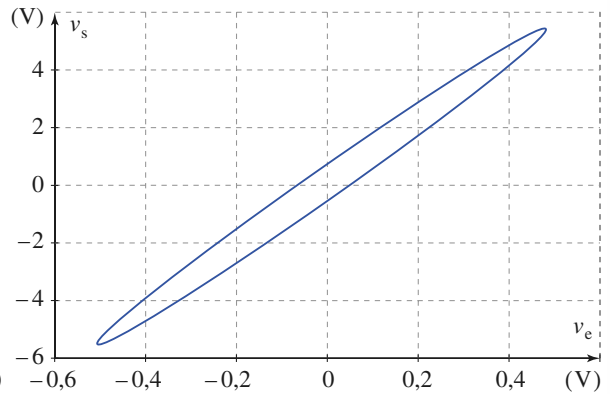
Les remarques précédentes ne s'appliquent plus à la totalité du signal sur les *documents 12* et *13*.

Nous observons un phénomène de *saturation de la tension de sortie* de l'amplificateur opérationnel à des tensions voisines des tensions d'alimentation +15 V et -15 V.

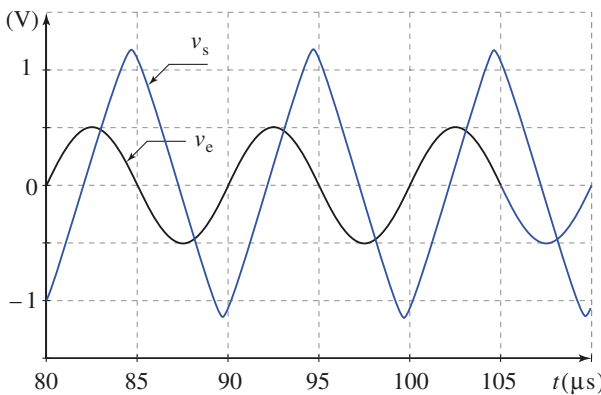
Le fonctionnement du montage est alors *non linéaire*.



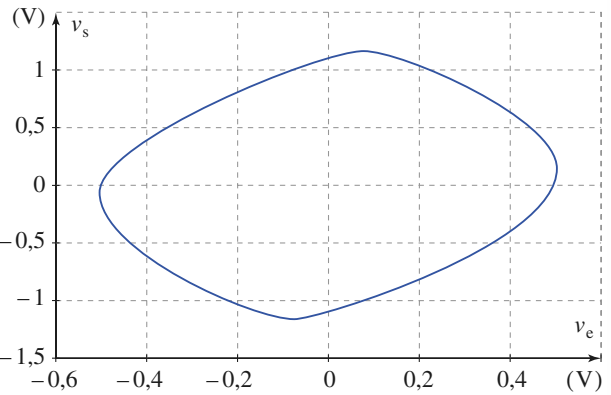
Doc. 14. Fréquence de travail $f = 10 \text{ kHz}$, tension en entrée $v_e = 0,5 \text{ V}$ et oscillographe en mode DC



Doc. 15. Fréquence de travail $f = 10 \text{ kHz}$, tension en entrée $v_e = 0,5 \text{ V}$ et oscillographe en mode XY.



Doc. 16. Fréquence de travail $f = 100 \text{ kHz}$, tension en entrée $v_e = 0,5 \text{ V}$ et oscillographe en mode bicourbe.



Doc. 17. Fréquence de travail $f = 100 \text{ kHz}$, tension en entrée $v_e = 0,5 \text{ V}$ et oscillographe en mode XY.

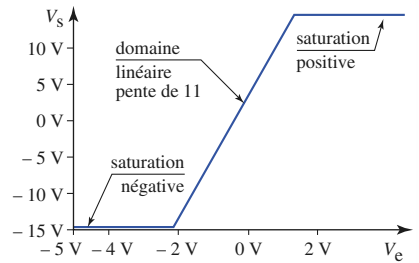
Les documents ci-dessus correspondent à une fréquence d'entrée plus élevée. À 10 kHz (doc. 14), le signal de sortie est toujours sinusoïdal, d'amplitude de $5,5 \text{ V}$, mais il est en léger retard par rapport au signal d'entrée. Le déphasage est surtout visible en mode XY, où la courbe est une ellipse (doc. 15).

À 100 kHz (doc. 16), le signal de sortie a une forme proche d'un signal triangulaire. Ce phénomène s'appelle la *triangularisation*. Le fonctionnement du montage est *non linéaire*. La courbe en mode XY (doc. 17), qui est très différente d'une ellipse, confirme cette analyse. Cette non linéarité (*triangularisation*) est liée à la vitesse de balayage (en anglais : *slew rate*) σ de l'amplificateur opérationnel : la tension de sortie v_s ne peut plus suivre les variations trop rapides de v_e : $\left| \frac{dv_s}{dt} \right| < \sigma$, de l'ordre de $0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$.

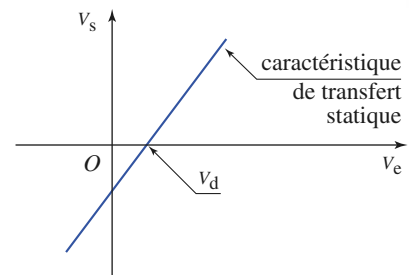
4.4. Caractéristique statique de transfert

En remplaçant le G.B.F. par une alimentation continue, traçons point par point la courbe V_s fonction de V_e en régime indépendant du temps (doc. 18). Elle peut aussi être visualisée sur un oscilloscope utilisé en mode XY à l'aide d'un générateur basse fréquence à une fréquence faible ($< 100 \text{ Hz}$). Nous vérifions ainsi la proportionnalité entre V_s et V_e dans le domaine linéaire.

En fait, V_s ne s'annule pas exactement pour $V_e = 0$. La valeur effective de v_e (de l'ordre de la dizaine de millivolts) qui annule V_s s'appelle *tension de décalage en entrée* (*input offset voltage*) (doc. 19) ; elle est notée V_d .



Doc. 18. Montage non inverseur. Caractéristique de transfert statique.

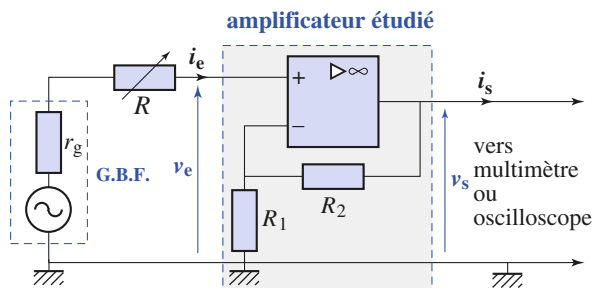


Doc. 19. Mise en évidence de la tension de décalage en entrée d'un amplificateur non inverseur.

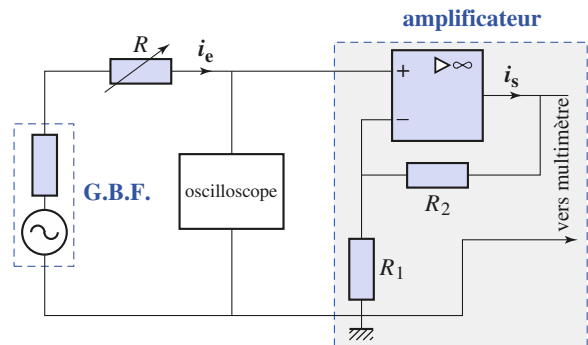
4.5. Impédances d'entrée et de sortie

4.5.1. Impédance d'entrée

Pour mesurer l'impédance d'entrée du circuit étudié, réalisons le montage représenté sur le *document 20*.



Doc. 20. Principe de la mesure de l'impédance d'entrée d'un amplificateur non inverseur.



Doc. 21. Montage à proscrire.

Nous ne devons pas placer le multimètre, ou l'oscilloscope, au niveau de l'entrée de l'amplificateur non inverseur, car l'impédance d'entrée de ce dernier est *a priori* très grande, même devant l'impédance d'entrée de ces deux appareils (infinie si l'amplificateur opérationnel était idéal) (*doc. 21*).

Pour $R = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, une tension d'entrée d'amplitude $v_e = 1 \text{ V}$ et une fréquence de $f = 500 \text{ Hz}$, nous constatons qu'en faisant varier la résistance R de 0Ω à $1 \text{ M}\Omega$ la tension de sortie v_s chute de moins de 1% . La valeur de l'impédance d'entrée de l'amplificateur non inverseur est très grande, de l'ordre de la centaine de mégahoms.

L'impédance d'entrée de ce montage amplificateur non inverseur peut être considérée comme infinie.

Application 1

Perturbation apportée par un oscilloscope

Soit le montage du document 21. L'oscilloscope a une résistance d'entrée $R_0 = 1 \text{ M}\Omega$, en parallèle avec une capacité $C_0 = 30 \text{ pF}$. Que se passe-t-il quand la résistance R varie de 0 à $10 \text{ M}\Omega$, lorsque le G.B.F. délivre un signal sinusoïdal à $f = 1 \text{ kHz}$?

À la fréquence de travail ($f = 1 \text{ kHz}$), l'admittance de l'oscilloscope est $\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{R_0} + jC_0\omega$, d'où :

$$Z_0 \approx \frac{R_0}{1 + 0,2j} \text{ et } Z_0 \approx 0,98 \text{ M}\Omega.$$

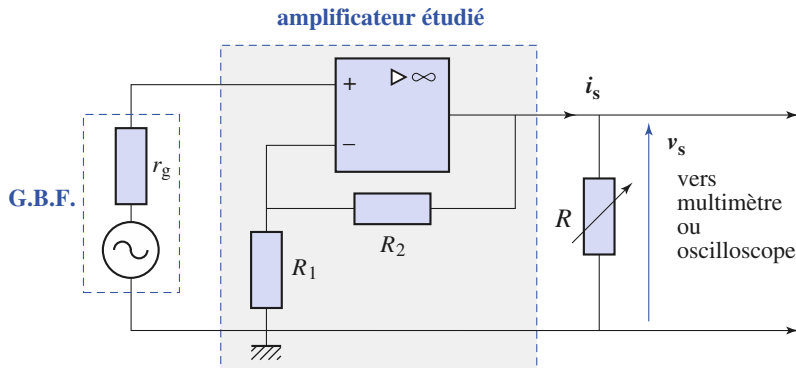
Comme la résistance d'entrée de l'amplificateur non inverseur est très supérieure à Z_0 , cette dernière impédance forme avec R un diviseur de tension : c'est pour $R \approx Z_0$ que la tension de sortie sera la moitié de celle obtenue pour $R = 0$. Si nous travaillons à 1 kHz , la capacité de 30 pF n'intervient pas.

4.5.2. Impédance de sortie

Réalisons le montage du *document 22*.

Observons les résultats du *document 23*. Nous remarquons une saturation pour $R < 350 \Omega$. La tension de saturation est sensiblement proportionnelle à la valeur de R (1,7 V pour 100Ω , 3,5 V pour 200Ω et 5 V pour 300Ω).

Un autre choix des valeurs de R_1 et R_2 pour avoir un gain plus faible ($A_v < 11$) nous aurait conduit à la même constatation à savoir l'apparition d'une saturation en sortie, fonction de la résistance R . En revanche, lorsque $R > 350 \Omega$ le signal de sortie v_s devient indépendant de R .



◀ **Doc. 22.** Principe de la mesure de l'impédance de sortie d'un amplificateur non inverseur.

Pour une résistance de charge R suffisante, le signal sinusoïdal de sortie ne subit aucune modification visible. L'impédance de sortie du montage est très faible devant R . Cette impédance de sortie est inférieure à l'ohm.

En revanche, lorsque la résistance de charge R est faible, la saturation de sortie étant proportionnelle à la résistance R , nous mettons en évidence une saturation du courant de sortie de l'amplificateur opérationnel, égale ici à environ 17 mA ($|i_s| < I_{\text{sat}} \approx 17 \text{ mA}$). (Cette limitation est souvent de l'ordre de $I_{\text{sat}} = 20 \text{ mA}$.)

La saturation en courant est voulue par le constructeur pour limiter la dissipation thermique dans l'amplificateur opérationnel et éviter sa destruction lors d'un court-circuit en sortie.

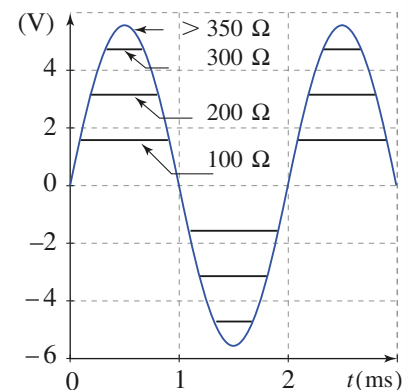
Lorsque l'A.O. n'est pas saturé en courant, l'amplificateur non inverseur fonctionne en régime linéaire avec une résistance de sortie très faible, inférieure à l'ohm.

4.6. Conclusion sur les limites de linéarité du montage

Nous avons observé trois causes de non-linéarité des montages à amplificateur opérationnel :

- la saturation en tension : $|v_s| \leq V_{\text{sat}}$ (voisine de 15 V, pour une alimentation $-15 \text{ V}, +15 \text{ V}$) ;
- la saturation en courant : $|i_s| \leq I_{\text{sat}}$ (voisine de 20 mA) ;
- la vitesse de balayage : $\left| \frac{dv_s}{dt} \right| \leq \sigma$ (voisine de $0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$).

L'amplitude de la tension délivrée par les générateurs basse fréquence et les valeurs des composants utilisés doivent être choisies de façon à minimiser les défauts de linéarité dans les montages amplificateurs ou les filtres que nous réaliserons. En particulier, les résistances doivent être choisies dans l'intervalle 1 k Ω , 1 M Ω (cf. *exercices 1 et 2* pour justifier ce choix).

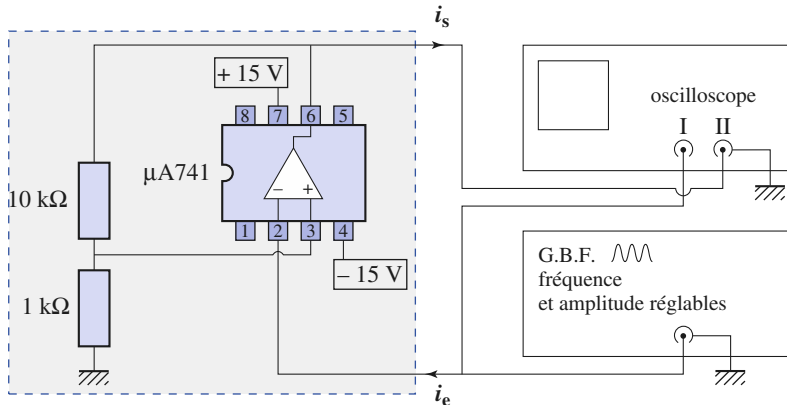


Doc. 23. Montage non inverseur. Influence de la résistance de charge. Signal d'entrée (0,5 V, 500 Hz).

4.7. Stabilité du montage

En régime linéaire, les entrées inverseuse et non inverseuse d'un amplificateur idéal semblent équivalentes.

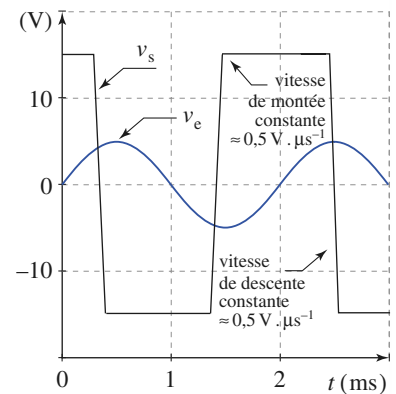
Observons le résultat obtenu en permutant les entrées + et - de l'amplificateur opérationnel du circuit initial (doc. 9) représenté ci-dessous (doc. 24).



◀ Doc. 24. Les entrées + et - ont été permutées par rapport au doc 9.

Pour une tension d'entrée sinusoïdale d'amplitude 0,5 V, la tension de sortie est constante et égale à environ +15 V ou -15 V. Pour une tension d'entrée de 5 V, nous observons la figure du document 25.

Les résultats sont totalement différents de ceux qui avaient été obtenus avec le circuit initial : la tension de sortie v_s prend successivement les valeurs $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$, et passe d'une valeur à l'autre avec une pente constante égale à la vitesse de balayage.



Doc. 25. Le montage du doc. 24 est instable. Signal d'entrée (5 V, 500 Hz), entrées + et - inversées.

Les entrées inverseuse et non inverseuse d'un amplificateur opérationnel ne sont pas équivalentes.

Pour que le montage soit stable, il est nécessaire que le nœud intermédiaire du pont de résistances soit relié à l'entrée inverseuse.

Cette condition est très générale :

La boucle de retour, ou boucle de rétroaction (purement résistive), doit revenir sur l'entrée inverseuse pour qu'un montage à amplificateur opérationnel soit stable.

4.8. Comparaison avec le montage utilisant TL081

Nous pouvons effectuer la même étude en remplaçant le 741 par un TL081. La comparaison des caractéristiques des deux amplificateurs opérationnels est résumée par le tableau ci-dessous.

	paramètres linéaires			paramètres non linéaires		
	f_0 (coupure à 0 dB)	R_e	R_s	V_{sat}	I_{sat}	σ (vitesse de balayage)
741	≈ 1 MHz	\approx infini	≈ 0	≈ 15 V	≈ 20 mA	$\approx 0,5$ V · μ s $^{-1}$
TL081	≈ 4 MHz	\approx infini	≈ 0	≈ 15 V	≈ 20 mA	≈ 10 V · μ s $^{-1}$

Doc. 26. Les montages utilisant un TL081 sont plus performants que ceux utilisant un 741.

4.9. Montage suiveur

Le montage suiveur correspond au cas particulier où R_1 infinie et R_2 nulle (doc. 27).

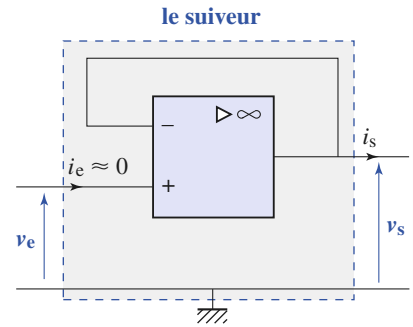
Nous avons alors $v_s \approx v_e$ dans le domaine de la bande passante à gain nul de l'amplificateur opérationnel (soit $f < f_0 = 1$ MHz pour le 741) à condition que son fonctionnement soit linéaire.

Ce montage est un *adaptateur d'impédance* : son impédance d'entrée est quasiment infinie et son impédance de sortie est quasiment nulle.

Nous l'utiliserons dans tous les montages nécessitant une grande impédance de charge.

C'est aussi un *amplificateur de puissance*, d'amplification en puissance très élevée, puisque sa puissance d'entrée est pratiquement nulle ($i_+ \approx 0$) alors que sa puissance de sortie est finie et non nulle. Avec $V_e = 10$ V (tension continue) et une résistance de charge de $R_c = 1$ k Ω (valeur minimale de résistance avec laquelle il est conseillé de travailler pour éviter une saturation en courant de sortie), cette puissance est égale 100 mW.

Pour des signaux sinusoïdaux de fréquences variant de 0 Hz à 10^5 Hz et d'amplitudes comprises entre 0 V et 10 V, le fonctionnement de ce montage est toujours linéaire : $V_s = V_e$. Aucune des saturations précédentes (V_{sat} , I_{sat} et σ) n'est atteinte.

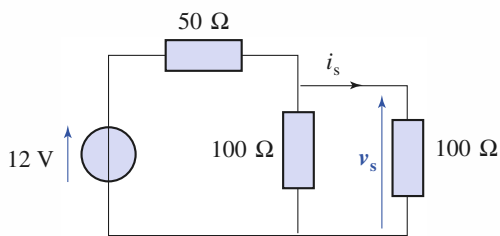


Doc. 27. Montage suiveur.

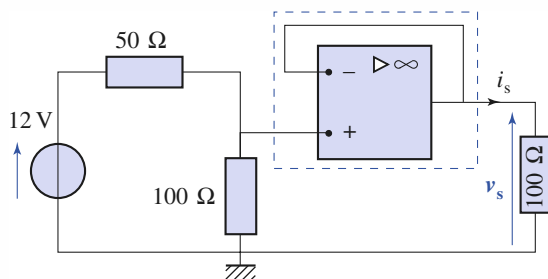
Application 2

Importance du suiveur

Déterminer la tension v_s et le courant i_s , dans les deux montages représentés sur les documents 28 a et b.



Doc. 28a.



Doc. 28b.

- Sur le circuit du document a.

– les deux résistances de 100 Ω associées en parallèle sont équivalentes à une résistance de 50 Ω ;
– la relation du diviseur de tension nous donne $v_s = 6$ V et donc :

$$i_s = 60 \text{ mA.}$$

- Sur le circuit du document b.

Le courant i_+ entrant dans l'A.O. étant nul, on applique la relation du diviseur de tension au circuit constitué des deux résistances de 50 Ω et de 100 Ω .

Le potentiel de l'entrée non inverseuse est donc :

$$v_+ = 12 \frac{100}{150} = 8 \text{ V.}$$

Cette tension se retrouve à la sortie du suiveur : $v_s = 8$ V et donc :

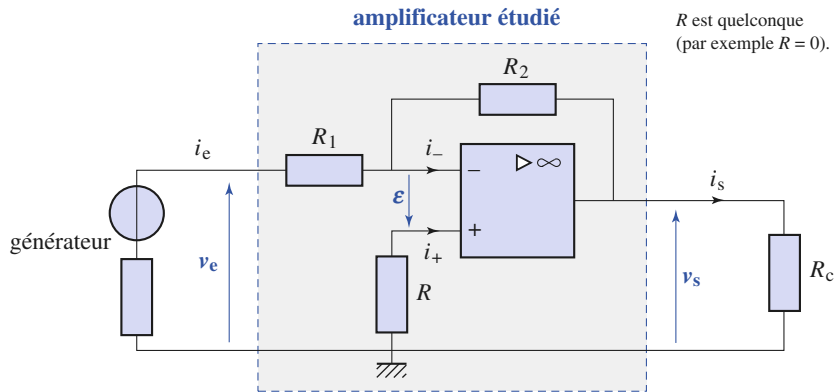
$$i_s = 80 \text{ mA.}$$

Le suiveur permet d'isoler le diviseur de tension du circuit d'utilisation situé en aval. Avec le suiveur, nous avons toujours $v_s = 8$ V quelle que soit la résistance placée à la sortie.

5 Montage amplificateur inverseur

5.1. Étude théorique

Considérons le montage du document 29 où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal.



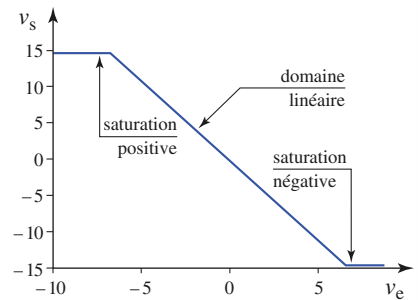
◀ Doc. 29. Amplificateur inverseur.

Comme i_+ est nulle, v_+ est nulle. En régime linéaire $\varepsilon = 0$, donc $v_- = 0$. En outre, i_- est nulle ; il en résulte que $v_e = R_1 i_e$ et $v_s = -R_2 i_e$. Nous obtenons :

$$v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e .$$

Ce montage est un amplificateur de tension inverseur (*doc. 30*) (v_s et v_e sont de signes opposés) d'amplification $H = -\frac{R_2}{R_1}$.

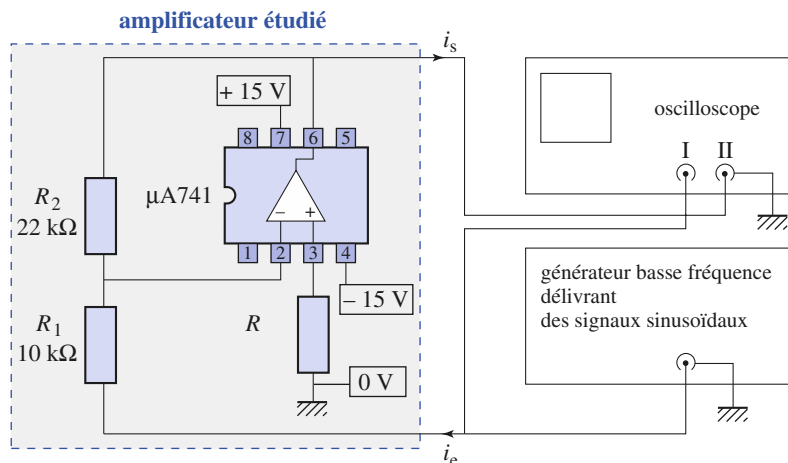
Son impédance d'entrée est R_1 ($i_e = \frac{v_e}{R_1}$) et son impédance de sortie est nulle (v_s est indépendante de i_s).



Doc. 30. Montage inverseur. Caractéristique de transfert statique.

5.2. Réalisation expérimentale

Réalisons le circuit représenté sur le document 31 (R est quelconque, à la limite $R = 0$).



◀ Doc. 31. Montage d'étude de l'amplificateur inverseur.

D'après l'étude précédente, le montage doit être un amplificateur inverseur d'amplification $H = -2,2$ et d'impédance d'entrée $R_e = 10 \text{ k}\Omega$.

Nous pouvons successivement, en suivant le même protocole opératoire que pour l'amplificateur non inverseur (cf. § 4) :

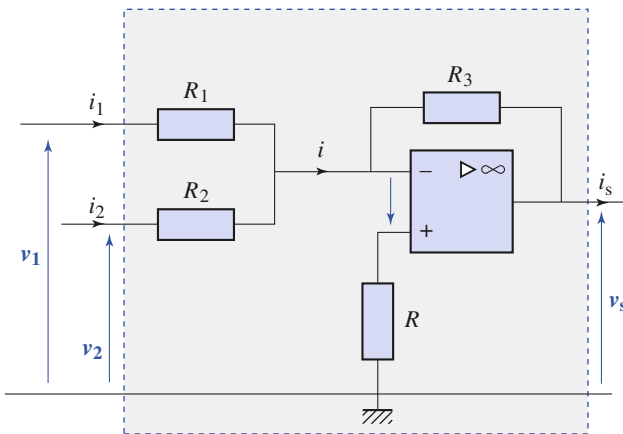
- tracer la caractéristique de transfert statique (doc. 31) à basse fréquence ;
- constater que l'amplification n'a plus la valeur prévue au-delà d'une certaine fréquence ;
- mesurer les impédances d'entrée et de sortie ($R_e \approx 10 \text{ k}\Omega$, R_s non mesurable) ;
- chercher les limites de linéarité ;
- vérifier que le montage obtenu en permutant les entrées + et - est instable.

Les résultats sont en bon accord avec la théorie.

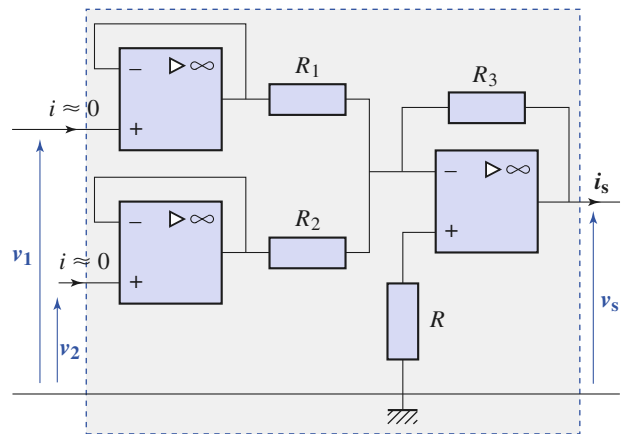
5.3. Sommateur de tensions

5.3.1. Comment ajouter deux tensions ?

En reliant les fils parcourus par deux courants i_1 et i_2 , il est simple d'obtenir la somme $i_1 + i_2$ des intensités dans un troisième fil. Remarquons qu'il est impossible d'obtenir directement une somme de tensions $u_1 + u_2$ si les deux sources de tension ont une de leurs bornes reliées à la masse.



Doc. 32. Sommateur pondéré de tensions.



Doc. 33. Sommateur à impédances d'entrée infinies et à impédance de sortie nulle.

Considérons le montage du document 32 (R est quelconque, à la limite $R = 0$). L'amplificateur opérationnel est en régime linéaire à cause de la résistance R_3 qui introduit une rétroaction sur l'entrée inverseuse, donc $\varepsilon = 0$. Comme $i_+ = 0$, il en résulte $v_+ = 0$ et $v_- = 0$. L'intensité i est la somme $i_1 + i_2$. Cette loi des nœuds traduite en termes de potentiels s'écrit :

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = -\frac{v_s}{R_3},$$

soit encore :

$$v_s = -\left(\frac{R_3}{R_1}v_1 + \frac{R_3}{R_2}v_2\right).$$

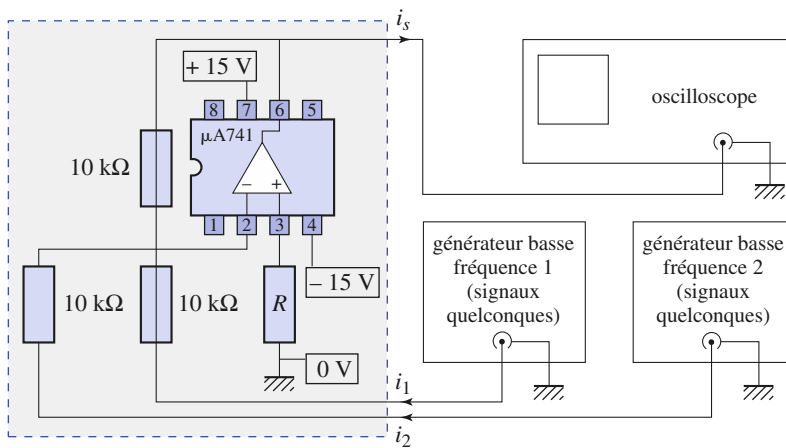
Nous avons donc réalisé, par l'intermédiaire d'une somme de courants, une somme pondérée des tensions v_1 et v_2 . Si $R_1 = R_2 = R_3$, la tension de sortie est l'opposée de la somme des tensions d'entrée : $v_s = -(v_1 + v_2)$.

5.3.2. Sommateur à impédances d'entrée infinies

Le défaut principal du montage précédent est dû à ses impédances d'entrée finies : R_1 pour le signal v_1 et R_2 pour le signal v_2 . Si les sources nécessitent une impédance de charge élevée, nous devons intercaler un montage suiveur (cf. § 4. 9) de façon à adapter les impédances du sommateur d'entrée (doc. 33 ; R étant toujours quelconque).

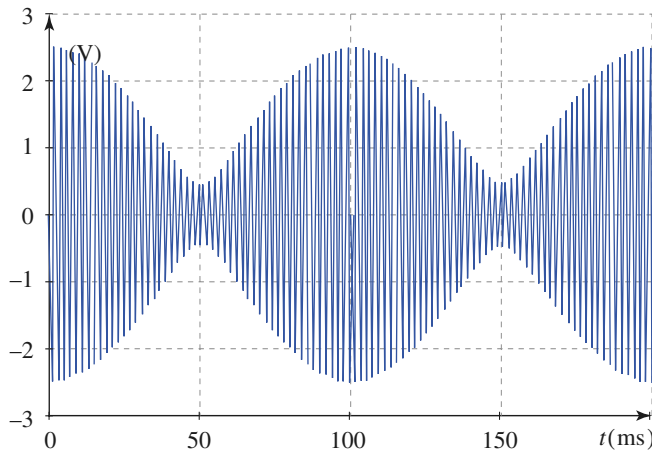
5.3.3. Réalisation expérimentale

Réalisons le montage du document 34.



◀ Doc. 34. Réalisation expérimentale d'un sommateur de tensions.

Si deux générateurs délivrent des signaux sinusoïdaux de fréquences f_1 et f_2 voisines, nous observons un phénomène de battements : le signal de sortie oscille avec la fréquence $f_1 + f_2$, et son amplitude est *modulée* à la fréquence $\frac{|f_1 - f_2|}{2}$ (doc. 35).



◀ Doc. 35. Montage sommateur inverseur, somme d'un signal d'amplitude 1 V de fréquence 510 Hz et d'un signal d'amplitude 1,5 V et de fréquence 500 Hz. Remarquons un phénomène de battements de fréquence 10 Hz.

Ce phénomène peut être utilisé pour comparer un signal de fréquence inconnue à un signal de fréquence connue de valeur voisine.

Remarque : La synchronisation de la base de temps de l'oscilloscope sur le phénomène de battements nécessite souvent de modifier le seuil de déclenchement.

► Pour s'entraîner : ex. 3, 4 et 5.

6 Réalisation d'un dipôle de résistance négative

Un composant actif comme l'amplificateur opérationnel permet de fabriquer des dipôles dont la caractéristique est impossible à obtenir avec des composants passifs. Nous étudions ici l'exemple de la *résistance négative*.

6.1. Nécessité d'un composant actif

Imaginons un dipôle qui, en convention récepteur, a pour caractéristique :

$$u = Ri \quad \text{avec} \quad R < 0.$$

Dans ce cas, la puissance $\mathcal{P} = Ri^2$ **dissipée** par le dipôle est toujours négative. Cela signifierait que le dipôle convertit de l'énergie thermique en énergie électrique, ce qui est impossible pour un dipôle passif.

En revanche, si le dipôle inclut un composant actif, l'énergie apportée au circuit peut provenir de l'alimentation du composant.

6.2. Étude du montage

Étudions le circuit représenté sur le *document 36*. Nous pouvons le décomposer en deux blocs : la source de f.e.m. E et de résistance interne R_i et le circuit situé à droite des bornes A et B . La résistance équivalente de ce circuit est :

$$R_e = \frac{u}{i}.$$

Nous supposons que l'amplificateur opérationnel est en régime linéaire. Ce n'est pas, *a priori*, évident du fait qu'il y a une rétroaction à la fois sur l'entrée non inverseuse et sur l'entrée inverseuse, mais nous l'admettons et nous pouvons le constater expérimentalement si la condition $R_1 R_1 > R R_2$ est satisfaite.

Écrivons la loi des nœuds au point A :

$$i = \frac{u - u_s}{R}.$$

L'amplificateur étant idéal, la tension u_+ se déduit de u_s par un diviseur de tension.

En régime linéaire :

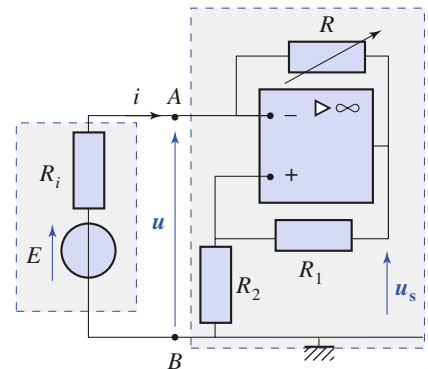
$$u = u_+ = u_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Nous en déduisons :

$$Ri = u \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) = -u \frac{R_1}{R_2}$$

et donc :

$$R_e = -R \frac{R_2}{R_1}.$$



Doc. 36. Le générateur alimente une résistance négative :

$$u = R_e i \quad \text{avec} \quad R_e < 0.$$

Application 3

Oscillateur à résistance négative

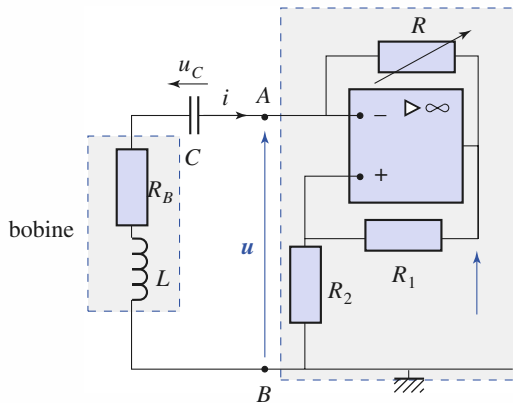
Considérons le circuit représenté sur le document 37 réalisé avec une bobine d'inductance L et de résistance R_B , et un condensateur de capacité C . Notons qu'aucun générateur n'y figure. L'amplificateur opérationnel est supposé en régime linéaire. La résistance R peut être ajustée.

1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$.

2) Pour quelle valeur R_0 de R , la solution est-elle une fonction sinusoïdale d'amplitude constante ?

3) Nous fixons R légèrement supérieure à R_0 : $R = R_0 + \delta R$. À l'instant initial $t = 0$, $u(t)$ a une valeur u_0 non nulle, très faible, due aux défauts de l'A.O. Donner l'allure de la fonction $u(t)$ (sans la calculer explicitement). Quel phénomène limite l'amplitude de $u(t)$?

4) Réaliser le montage avec une bobine (4,7 mH, 60 Ω), $C = 1 \mu\text{F}$, $R_1 = 22 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2,2 \text{ k}\Omega$, et R variable entre 0,5 k Ω et 1 k Ω . Déterminer la valeur R_0 de R pour laquelle le système oscille spontanément. Comparer avec les valeurs calculées.



Doc. 37. Réalisation expérimentale d'un oscillateur à résistance négative.

1) Nous reconnaissons entre A et B une « résistance négative » : $u = -R \frac{R_2}{R_1} i$.

Appliquons la loi des mailles :

$$L \frac{di}{dt} + R_B i + u_C - R \frac{R_2}{R_1} i = 0 \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

En dérivant la première équation, nous obtenons :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R_B - R \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

ou encore : $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0.$

Comme $u = -R \frac{R_2}{R_1} i$, $u(t)$ vérifie la même équation différentielle :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{et} \quad Q = \frac{1}{\left(R_B - R \frac{R_2}{R_1} \right) C \omega_0}$$

2) Cette équation différentielle admet une solution sinusoïdale de pulsation ω_0 si le terme en $\frac{du}{dt}$ est nul, c'est-à-dire si $R = R_0 = R_B \frac{R_1}{R_2}$.

3) Q devient négatif : $Q = -\frac{R_1}{R_2 \delta R C \omega_0}$.

La solution de l'équation différentielle est donc de la forme :

$$u(t) = u_1 \exp \frac{R_2 \delta R t}{2LR_1} \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

L'amplitude des oscillations augmente exponentiellement jusqu'à la saturation de l'A.O.

4) Nous observons des oscillations quasi sinusoïdales pour une valeur de R voisine de 600 Ω .

Du fait de l'imprécision des valeurs données pour les composants, nous ne trouvons pas exactement 600 Ω . Si $\delta R = 0,1 \Omega$, le temps de montée de l'amplitude est :

$$\tau = \frac{2R_1 L}{R_2 \delta R} = 0,94 \text{ s.}$$

La montée de l'amplitude est donc observable avec un oscilloscope analogique.

Si la tension de saturation de l'A.O. est $V_s = 14 \text{ V}$, la

valeur maximale de u est $\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s$ soit :

$$U_{\max} = 1,3 \text{ V.}$$

7 Comparateur de tension

7.1. Définition

Un comparateur de tension est un composant à deux entrées et une sortie, dont la fonction est de fournir une tension de sortie v_s fonction du signe de la tension différentielle d'entrée $v_{de} = v_2 - v_1$.

La représentation symbolique d'un comparateur de tension est donnée sur le document 38.

Parce que la tension de sortie v_s d'un comparateur ne dépend que du signe de la tension différentielle d'entrée v_{de} , la relation entre v_s et v_{de} est une relation non linéaire.

7.2. Comparateurs simples à amplificateurs opérationnels

7.2.1. Principe

Un comparateur simple est réalisable à l'aide d'un amplificateur opérationnel en boucle ouverte. La tension de référence V_{ref} est appliquée sur l'une des entrées de l'amplificateur opérationnel et la tension d'entrée v_e sur l'autre.

Rappelons que la tension différentielle d'entrée de l'amplificateur opérationnel est :

$$v_{de} = v_+ - v_-$$

Nous disposons de deux types de comparateurs simples selon que le signal d'entrée est introduit sur l'entrée non inverseuse (comparateur simple non inverseur) ou sur l'entrée inverseuse (comparateur simple inverseur) de l'amplificateur opérationnel (doc. 39).

7.2.2. Caractéristiques

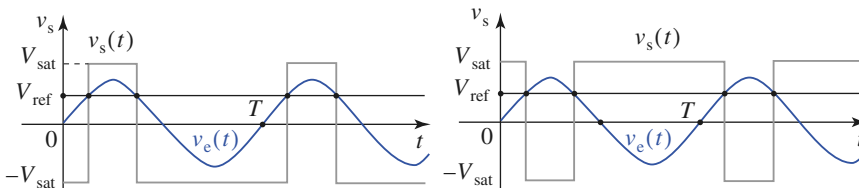
Pour les deux types de comparateurs, les tensions de sortie sont les tensions de saturation $V_H = +V_{sat}$ et $V_B = -V_{sat}$ de l'amplificateur opérationnel.

Leurs caractéristiques $v_s = f(v_e)$ (doc. 40) ne sont que les traductions graphiques des implications suivantes :

$$v_{de} > 0 \text{ entraîne } v_s = +V_{sat} \text{ et } v_{de} < 0 \text{ entraîne } v_s = -V_{sat}.$$

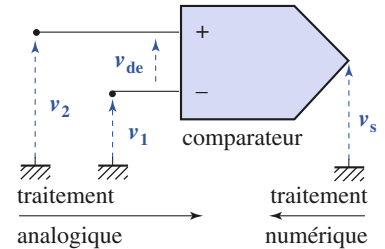
7.2.3. Chronogrammes

Pour un même signal d'entrée $v_e(t)$, la tension de sortie $v_s(t)$ d'un comparateur simple non inverseur et celle d'un comparateur simple inverseur sont données document 41.

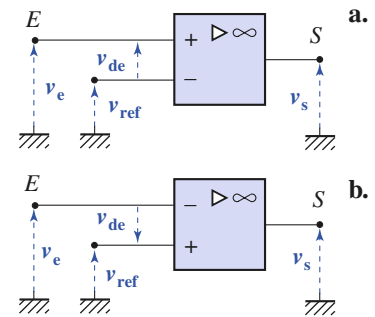


a. Comparateur non inverseur.

b. Comparateur inverseur



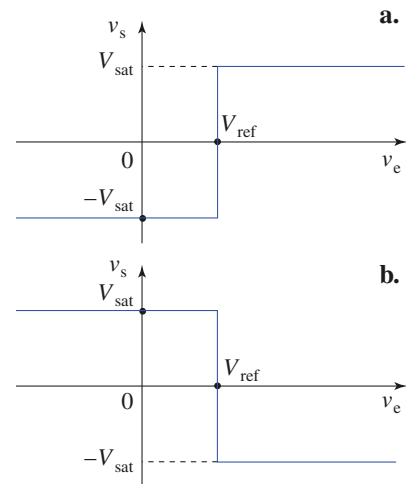
Doc. 38. Représentation symbolique d'un comparateur.



Doc. 39. Les deux types de comparateurs simples à A.O. idéal.

a. Comparateur non inverseur.

b. Comparateur inverseur.



Doc. 40. Caractéristiques des deux types de comparateurs simples à A.O. idéal.

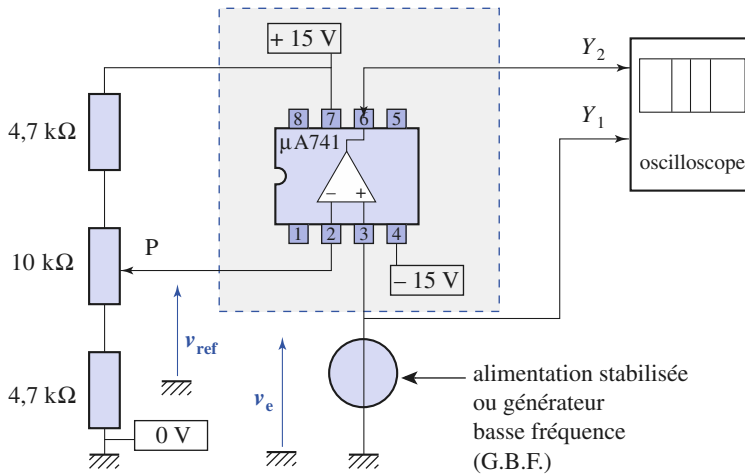
a. Comparateur non inverseur.

b. Comparateur inverseur.

Doc. 41. Réponse $v_s(t)$ d'un comparateur simple à A.O. idéal à une excitation sinusoïdale $v_e(t)$.

7.3. Réalisation expérimentale

7.3.1. Comparaison à une tension de référence non nulle



Doc. 42. Montage d'étude d'un comparateur simple non inverseur.

Réalisons le comparateur non inverseur représenté sur le document 42. La tension de référence V_{ref} est obtenue par l'intermédiaire d'un diviseur de tension utilisant le potentiomètre (P).

Traçons alors la caractéristique de transfert statique $V_s = f(V_e)$ du montage à l'aide d'une alimentation stabilisée. La courbe obtenue est bien conforme à l'étude théorique (doc. 40a.).

Remplaçons l'alimentation stabilisée par un G.B.F. et réglons-le pour qu'il délivre une tension sinusoïdale basse fréquence ($f < 200$ Hz) et d'amplitude V_e inférieure à $|V_{ref}|$. L'oscilloscope étant utilisé en bicourbe et en mode DC, observons les courbes obtenues (doc. 43). Commutons ensuite l'oscilloscope en mode XY. Nous observons un segment de droite horizontale.

La tension différentielle d'entrée v_{de} est, dans ces conditions, toujours négative. En conséquence, l'amplificateur opérationnel reste saturé négativement à :

$$v_s = -V_{sat}$$

Faisons croître l'amplitude v_{e_m} de la tension d'entrée et observons les modifications en utilisant l'oscilloscope en bicourbe. Faisons ensuite varier V_{ref} et observons les modifications des courbes obtenues.

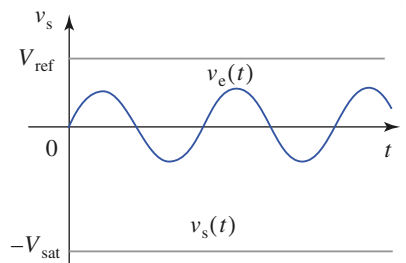
Quand $v_{e_m} \geq |V_{ref}|$, l'amplificateur opérationnel commute de $-V_{sat}$ et $+V_{sat}$, quand $v_e(t)$ prend la valeur V_{ref} par valeurs croissantes et commute de $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$, quand $v_e(t)$ prend la valeur V_{ref} par valeurs décroissantes (doc. 44).

7.3.2. Défauts du comparateur réel

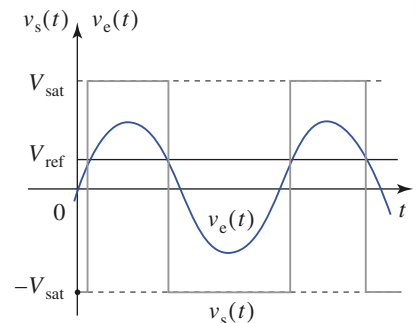
Les capacités qui se trouvent à l'intérieur de l'amplificateur opérationnel imposent à la tension de sortie une vitesse de balayage finie $\left| \frac{du_s}{dt} \right| \leq \sigma$.

La valeur maximale σ de cette vitesse de balayage est appelée *slew rate*. Comme le montrent les courbes des documents 45 et 46, ce phénomène perturbe le fonctionnement du comparateur dès que la période n'est plus grande devant le temps de montée. Sur le document 46, nous pouvons estimer σ .

$$\sigma \approx \frac{30 \text{ V}}{0,3 \text{ ms}} \text{ soit : } \sigma \approx 10^5 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}.$$

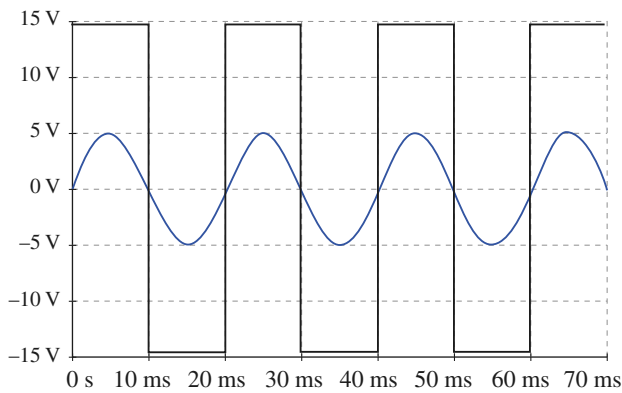


Doc. 43. L'amplitude de la tension d'entrée $v_e(t)$ est insuffisante pour provoquer le basculement du comparateur.

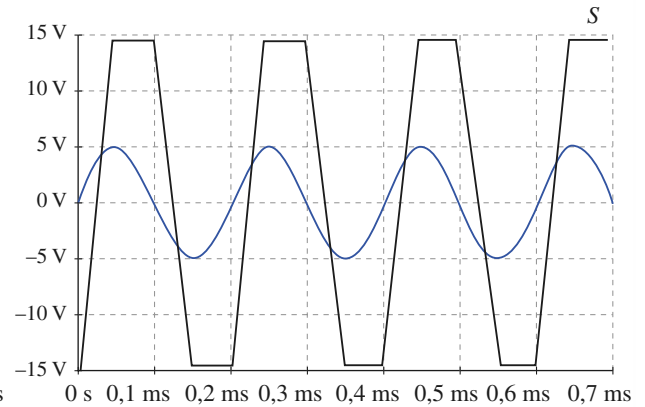


Doc. 44. Attaqué par une tension sinusoïdale, un comparateur simple non inverseur délivre une tension en créneaux.

Il existe d'autres imperfections, visibles essentiellement pour un signal d'entrée de faible amplitude. Pour les faibles valeurs de ε (typiquement inférieures à 0,1 mV en valeur absolue), un amplificateur opérationnel a un fonctionnement linéaire.



Doc. 45. Réponse d'un comparateur simple non inverseur à une excitation sinusoïdale de fréquence 50 Hz et d'amplitude 5 V.



Doc. 46. Réponse d'un comparateur simple non inverseur à une excitation sinusoïdale de fréquence 5 kHz et d'amplitude 5 V.

La valeur finie de la vitesse de balayage σ est le plus important facteur de limitation des performances du comparateur simple à amplificateur opérationnel réel.

7.4. Application des comparateurs simples

Parmi les applications possibles des comparateurs simples, signalons :

- la détection d'un niveau de tension de référence ;
- la transformation d'un signal analogique variable en un signal numérique à deux niveaux v_H et v_B permettant son traitement logique.

Les caractéristiques de commutation d'un comparateur simple à A.O. sont médiocres. Ce type de comparateur doit être réservé pour les traitements de signaux en basse fréquence, au-delà il est nécessaire d'utiliser des circuits intégrés spécialisés.

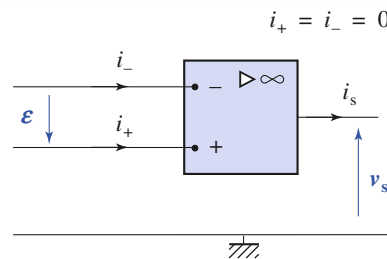
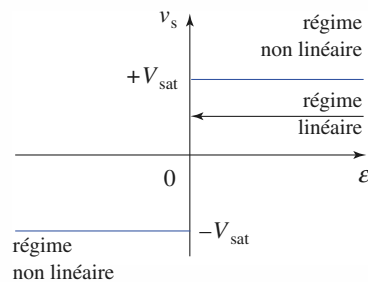
● **AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL**

Les cinq broches importantes de l'A.O. sont les alimentations (en général symétriques $+V_{cc}$ et $-V_{cc}$), l'entrée non inverseuse, l'entrée inverseuse et la sortie.

Il n'y a pas de masse sur le boîtier d'un A.O.

• **Amplificateur idéal**

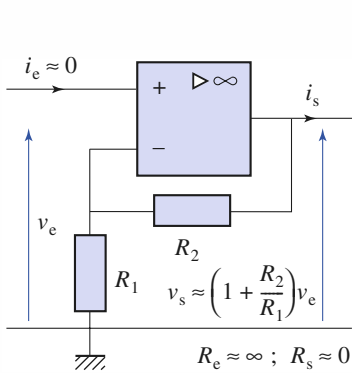
Un A.O. idéal est caractérisé par des courants d'entrée nuls ($i_+ = i_- = 0$) et par une différence de potentiel ε nulle entre ces deux entrées en régime linéaire. Sa caractéristique de transfert est :



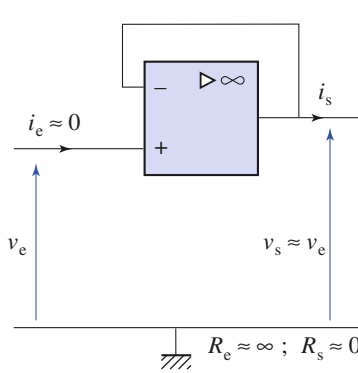
◀ Doc. 47.

En régime linéaire, la tension de sortie v_s est fixée par le reste du circuit, compte tenu de la relation $\varepsilon = 0$ et dans la limite $|v_s| < V_{sat}$. Les trois montages de base sont :

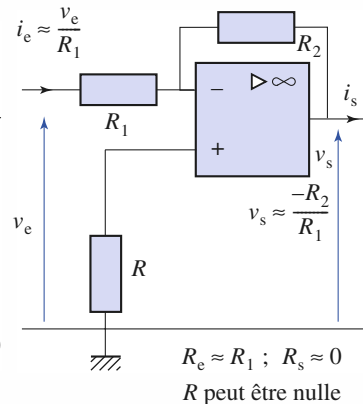
- l'amplificateur non inverseur (doc. 48) ;
- l'amplificateur suiveur ou adaptateur d'impédance (doc. 49) ;
- l'amplificateur inverseur (doc. 50).



Doc. 48.



Doc. 49.



Doc. 50.

Les entrées inverseuse et non inverseuse de l'A.O. ne sont pas équivalentes : la boucle de rétroaction résistive doit revenir sur l'entrée inverseuse pour que le montage soit stable.

CQFR

● COMPARATEUR SIMPLE

Un comparateur simple est réalisé à l'aide d'un amplificateur opérationnel en boucle ouverte.

La tension de référence V_{ref} est appliquée sur l'une des entrées de l'amplificateur opérationnel et la tension d'entrée v_s sur l'autre.

La tension de sortie est égale à $\pm V_{\text{sat}}$, et ne dépend que du signe de $v_e - V_{\text{ref}}$.

La vitesse finie de balayage σ (ou *slew rate*) est le facteur le plus important de limitation des performances d'un comparateur simple à amplificateur opérationnel réel.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Comment analyser un circuit comportant un A.O. idéal en fonctionnement linéaire ? Il faut pratiquement exploiter deux propriétés : courants d'entrée nuls et $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$.
- ✓ Savez-vous reconnaître les montages de base à l'intérieur d'un circuit plus complexe ?
- ✓ Comment dessine-t-on un amplificateur inverseur, un amplificateur non inverseur et un comparateur simple ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Pour un A.O. en fonctionnement linéaire les courants d'entrée et le courant de sortie sont nuls.
 - Vrai
 - Faux
2. Pour un A.O. en fonctionnement linéaire $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$ et $|v_s| < V_{\text{sat}}$.
 - Vrai
 - Faux
3. Pour un A.O. en fonctionnement non linéaire (saturé) : $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$ et $v_s = V_{\text{sat}}$.
 - Vrai
 - Faux
4. Les montages amplificateur inverseur et amplificateur non inverseur ont tous deux une résistance de sortie quasiment nulle.
 - Vrai
 - Faux
5. Les montages amplificateur inverseur et amplificateur non inverseur ont tous deux une résistance d'entrée infinie (avec un A.O. idéal).
 - Vrai
 - Faux
6. Avec le montage suiveur, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée ; ce montage n'a donc aucune utilité.
 - Vrai
 - Faux
7. Il est possible avec un A.O. et deux résistances de réaliser l'opération : $v_s = -v_e$.
 - Vrai
 - Faux

► Solution, page 184.

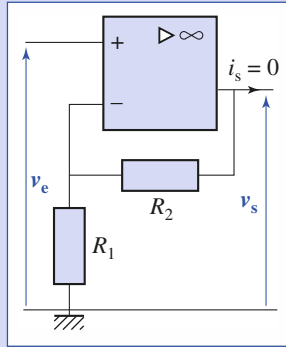
Exercices

1 Limitation de la tension de sortie d'un montage non inverseur

On considère le montage non inverseur suivant avec une sortie à vide.

L'amplificateur opérationnel a pour tensions de saturation $\pm V_{\text{sat}}$ ($V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$), pour courants de saturation $\pm I_{\text{sat}}$ ($I_{\text{sat}} = 20 \text{ mA}$) et pour vitesse de balayage :

$$\sigma = \left. \frac{dv_s}{dt} \right|_{\text{max}} \quad (\sigma = 0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}).$$



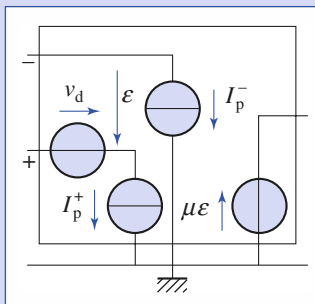
1) Quelle condition doivent vérifier R_1 et R_2 pour que la saturation en tension apparaisse avant la saturation en courant ? On admettra, pour la suite, que cette condition est vérifiée.

2) Déterminer l'amplitude maximale $v_{s,m}$ de v_s , en régime linéaire, pour un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence f . Quelles sont les valeurs de $v_{s,m}$ pour $f = 100 \text{ Hz}$, 1 000 Hz , 10 kHz , 100 kHz et 1 MHz ?

3) Déterminer l'amplitude maximale de v_s (non nécessairement en régime linéaire) pour un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence f . Valeurs pour $f = 100 \text{ Hz}$, 1 000 Hz , 10 kHz , 100 kHz et 1 MHz .

2 Calcul des grandeurs de décalage

Dans un amplificateur réel, les courants i_+ et i_- ne sont pas nuls ainsi que la tension de décalage en entrée (*input offset voltage*) v_d . On peut modéliser un tel amplificateur comme indiqué dans le schéma ci-contre.



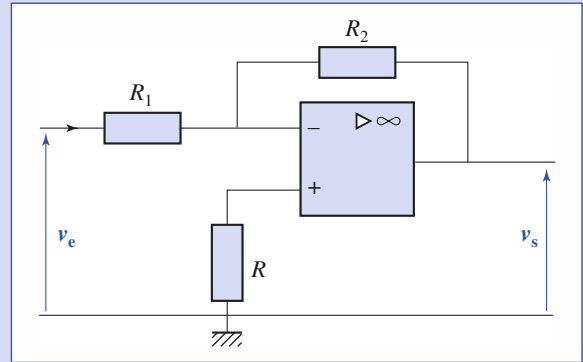
Pour le « 741 », $\mu = 10^5$,

$$I_p^+ \approx I_p^- \approx 80 \text{ nA}, \quad |v_d| = 2 \text{ mV}.$$

Les sources de courant I_p^+ et I_p^- représentent les courants de polarisation des transistors d'entrée de l'amplificateur opérationnel. Ces courants sont toujours du même ordre de grandeur, on les supposera égaux $I_p^+ \approx I_p^- = I_p$.

1) En utilisant le modèle d'amplificateur opérationnel réel proposé, déterminer la tension de sortie v_s en fonction de v_e , v_d et I_p , pour l'amplificateur inverseur avec $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$.

2) Comment doit-on choisir R pour que la tension de décalage en sortie liée aux courants de polarisation soit éliminée ?



3 Phénomène de battements

Soit deux signaux :

$$v_1 = v_{1m} \cos(\omega_1 t) \quad \text{et} \quad v_2 = v_{2m} \cos(\omega_2 t),$$

avec $\omega_1 < \omega_2$.

1) Exprimer la somme $v = v_1 + v_2$ de ces signaux en faisant intervenir les pulsations :

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

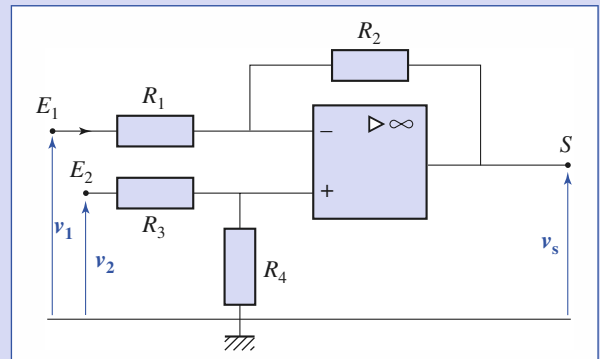
2) Si $\Delta\omega$ est très inférieur à ω , montrer que l'amplitude du signal somme est une fonction périodique de pulsation :

$$2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Donner l'allure de cette amplitude lorsque $v_{1m} = v_{2m}$, puis lorsque $v_{1m} \gg v_{2m}$.

4 Sommateur-soustracteur multiple

On considère le circuit du schéma suivant, dans lequel l'amplificateur opérationnel supposé idéal est en régime linéaire.



1) Déterminer les relations entre R_1 , R_2 , R_3 et R_4 , pour que $v_s = k(v_2 - v_1)$. À quelle condition les impédances d'entrée sont identiques pour les deux signaux ?

2) Proposer un montage à un amplificateur opérationnel réalisant la différence de deux sommes :

$$v_s = (v_1 + v_2) - (v'_1 + v'_2).$$

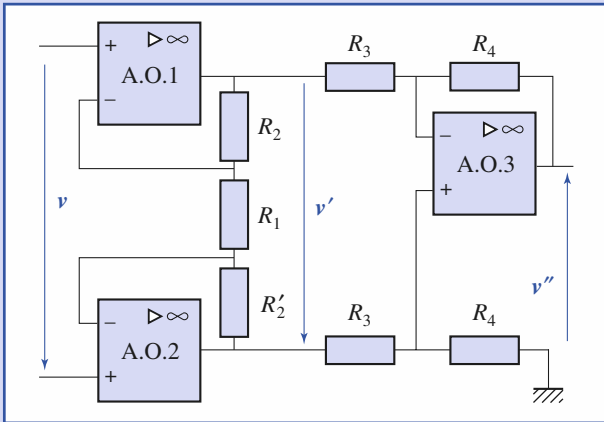
5 Amplificateur différentiel performant

On considère le circuit représenté sur le schéma ci-dessous.

1) Justifier le branchement des entrées inverseuse et non inverseuse des amplificateurs opérationnels.

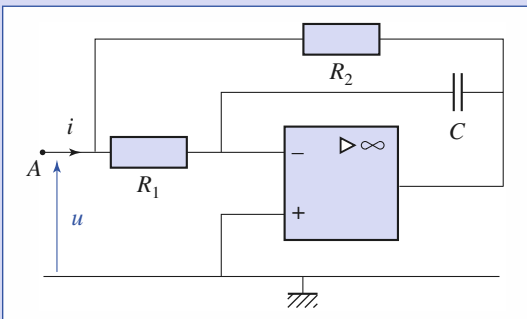
2) Que pouvez-vous dire de l'impédance d'entrée du montage ? Calculer les rapports $\frac{v'}{v}$ et $\frac{v''}{v}$ en fonction des résistances R_1, R_2, R'_2, R_3 et R_4 . Quelle opération réalise le montage ?

3) Une amplification différentielle de 100 vous paraît-elle raisonnable si le montage est réalisé à l'aide d'amplificateurs opérationnels de type 741 ? Proposer des valeurs de résistances.



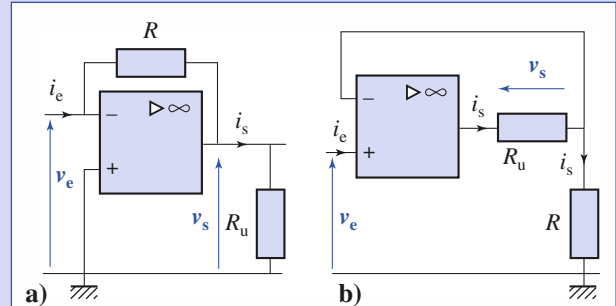
6 Impédance et dipôles

En régime sinusoïdal forcé, calculer l'impédance équivalente entre A et la masse. À quelle association de dipôles passifs ce circuit est-il équivalent ?

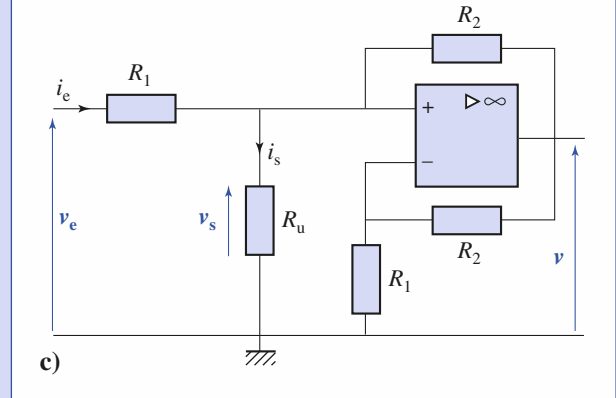


On supposera que l'A.O. est idéal et en fonctionnement linéaire.

7 Convertisseurs tension-courant et courant-tension



R_u : résistance de charge



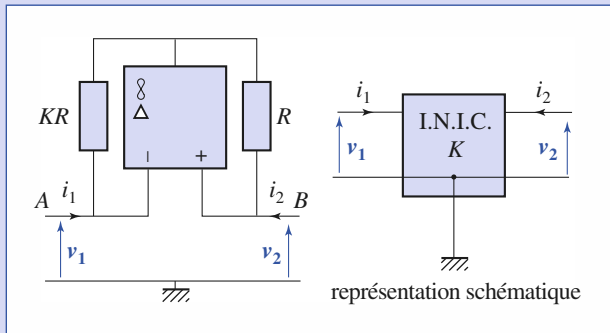
Un amplificateur idéal réalise l'opération $v_s = A v_e$ (A : amplification), son impédance d'entrée est infinie et son impédance de sortie nulle, c'est un convertisseur tension-tension. Un convertisseur courant-tension idéal réalise l'opération $v_s = R_t i_e$ (R_t : transrésistance), son impédance d'entrée est nulle et son impédance de sortie nulle.

- 1) Que sera un convertisseur tension-courant idéal ?
 - 2) Montrer que le montage a) réalise la conversion courant-tension idéale et les montages b) et c) réalisent la conversion tension-courant.
- Quel avantage présente le circuit c) par rapport au circuit b) ? Comment rendriez-vous le circuit c) idéal ?

8 Convertisseur inverseur de courant à impédance négative – Gyrateur

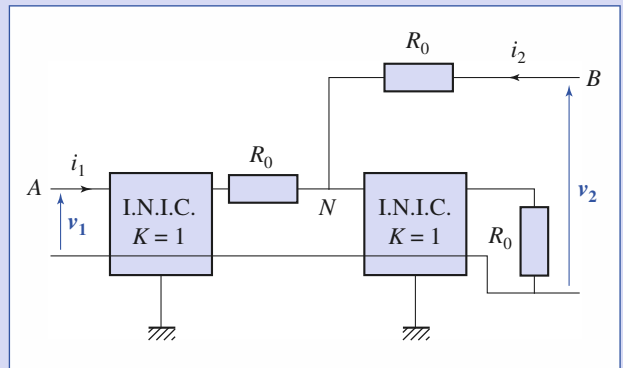
- 1) Dans le montage suivant, appelé convertisseur inverseur de courant à impédance négative (I.N.I.C.), écrire les relations entre v_1, i_1, v_2 et i_2 dans l'hypothèse d'un régime linéaire de l'amplificateur opérationnel. Quelle impédance \underline{Z}_1 est vue en entrée (entre A et la masse), lorsqu'une impédance \underline{Z}_2 est placée en sortie (entre B et la masse) ?

Exercices



2) Même question pour le circuit suivant, réalisé avec deux convertisseurs à impédance négative et appelé gyrateur. Que peut-on dire du montage, vu de ses bornes

d'entrée, lorsque le dipôle, placé entre B et la masse, est un condensateur ?



Corrigés

Solution du tac au tac, page 181.

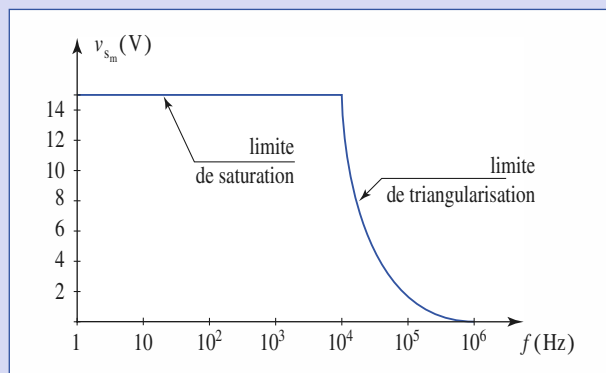
1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Faux ; 6. Faux ; 7. Vrai.

1) Le courant de sortie de l'A.O. traverse R_1 et R_2 , d'où la condition :

$$I = \frac{V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} < I_{\text{sat}}, \text{ numériquement } R_1 + R_2 > 750 \, \Omega.$$

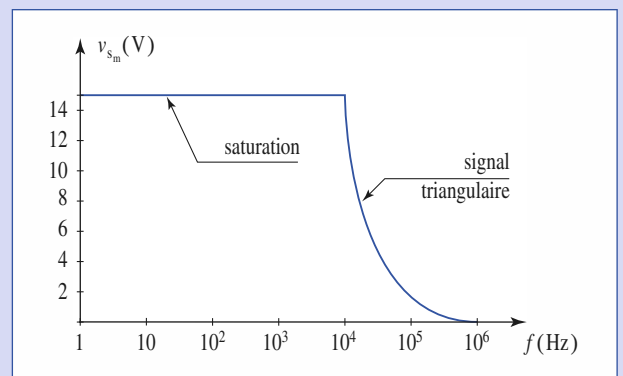
Les résistances utilisées étant, en général, supérieures à 1 k Ω , cette condition est quasiment toujours satisfaite.

2) À basse fréquence, V_{sat} limite l'amplitude du régime linéaire. À haute fréquence, en revanche, c'est la vitesse de balayage. Pour que la tension de sortie soit sinusoïdale $v_s = v_{s_m} \cos \omega t$, il faut que $v_{s_m} < V_{\text{sat}}$ et $v_{s_m} \omega < \sigma$. D'où le tracé de l'amplitude maximale en fonction de la fréquence $v_{s_m}(f)$. La fréquence charnière entre les deux conditions est de 5 kHz environ.



fréquence	100 Hz	1 kHz	10 kHz	100 kHz	1 MHz
v_{s_m}	15 V	15 V	8,0 V	0,80 V	80 mV

3) Si la vitesse de balayage limite la tension de sortie v_s , cette dernière est une tension triangulaire d'amplitude $v_{s_m} = \frac{\sigma T}{4}$ (T période du signal). Ainsi, à basse fréquence $v_{s_m} = V_{\text{sat}}$ et à haute fréquence $v_{s_m} = \frac{\sigma}{4f}$. La fréquence charnière est de 8 kHz environ.



fréquence	100 Hz	1 kHz	10 kHz	100 kHz	1 MHz
v_{s_m}	15 V	15 V	12,5 V	1,25 V	125 mV

On remarque que la non linéarité de l'amplificateur opérationnel limite le signal de sortie à des valeurs très faibles au-dessus de 100 kHz.

2 1) On calcule le potentiel de l'entrée inverseuse en utilisant le modèle de l'amplificateur opérationnel réel : $v_- = -\varepsilon + v_d - RI_p = -\frac{v_s}{\mu} + v_d - RI_p$.

La loi des nœuds au niveau de l'entrée inverseuse donne :

$$\frac{v_e - v_-}{R_1} + \frac{v_s - v_-}{R_2} - I_p^- = 0.$$

On note $\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. L'expression de v_1 s'obtient en éliminant v_- :

$$v_s \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mu R_{12}} \right) = -\frac{v_e}{R_1} + \frac{v_d}{R_{12}} + \left(1 - \frac{R}{R_{12}} \right) I_p.$$

Compte tenu de la valeur élevée de μ , on peut retenir l'expression simplifiée :

$$v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_d + R_2 \left(1 + \frac{R}{R_{12}} \right) I_p.$$

2) La tension de décalage en sortie est la tension résiduelle de v_s lorsque $v_e = 0$. Cette tension de décalage est, pour une part, liée à la tension de décalage en entrée v_d , soit $\left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) v_d \cong 20 \text{ mV}$ et, pour une autre part, liée aux courants de polarisation I_p , soit $R_2 \left(1 - \frac{R}{R_{12}} \right) I_p$. Cette dernière tension de décalage peut être éliminée en prenant $R = R_{12}$. En l'absence de correction ($R = 0$), elle vaut $R_2 I_p \cong 80 \text{ mV}$.

Remarque

• Plus R_2 est grande, plus le défaut lié aux courants de polarisation est important. Il est donc déconseillé d'utiliser des résistances supérieures au mégaohm.

• Dans le cas du TL081, les courants de polarisation sont de l'ordre de 50 pA. Leur effet est 10^3 fois plus faible que pour le 741. La résistance R n'est plus nécessaire.

3 1) Il suffit d'utiliser la relation de trigonométrie :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \text{avec } \omega_1 = (\omega - \Delta\omega) \quad \text{et} \quad \omega_2 = (\omega + \Delta\omega).$$

Ce qui donne : $v_1 = v_{1m}(\cos \omega t \cos \Delta\omega t + \sin \omega t \sin \Delta\omega t)$

et : $v_2 = v_{2m}(\cos \omega t \cos \Delta\omega t - \sin \omega t \sin \Delta\omega t)$.

Donc $v(t) = (v_{1m} + v_{2m}) \cos \Delta\omega t \cos \omega t + (v_{1m} - v_{2m}) \sin \Delta\omega t \sin \omega t$.

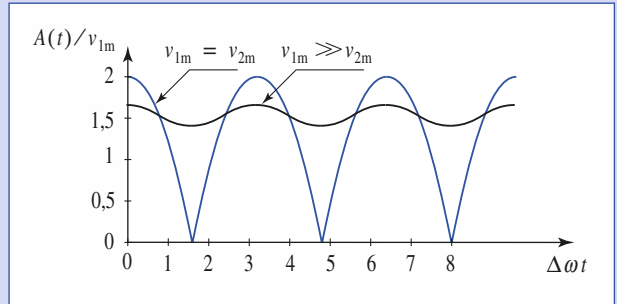
2) Si $\Delta\omega \ll \omega$, on peut considérer que ce signal est un signal sinusoïdal de pulsation ω , dont l'amplitude $A(t)$ peut être obtenue par la construction de Fresnel.

$$\begin{aligned} A(t) &= \sqrt{(v_{1m} + v_{2m})^2 \cos^2 \Delta\omega t + (v_{1m} - v_{2m})^2 \sin^2 \Delta\omega t} \\ &= \sqrt{(v_{1m}^2 + v_{2m}^2) + 2v_{1m}v_{2m} \cos(2\Delta\omega t)}. \end{aligned}$$

Cette amplitude varie au cours du temps avec la période $T' = \frac{2\pi}{2\Delta\omega}$, c'est-

à-dire lentement (par rapport à la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$). La pulsation des battements est donc :

$$2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1.$$



Si $v_{1m} = v_{2m} = v_0$, alors $A(t) = 2v_m |\cos \Delta\omega t|$, c'est-à-dire que l'amplitude s'annule avec la période T' .

Si $v_{1m} \gg v_{2m}$, alors :

$A(t) \cong v_{1m} \sqrt{1 + 2 \frac{v_{2m}}{v_{1m}} \cos(\Delta\omega t)} \cong v_{1m} + v_{2m} \cos 2\Delta\omega t$ l'amplitude varie autour de la valeur moyenne v_{1m} avec la période T' .

4 1) On utilise le théorème de superposition. Pour $v_1 = 0$, la tension de sortie est :

$$v_s' = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2$$

(pont diviseur et amplificateur non inverseur) et pour $v_2 = 0$, elle est :

$$v_s'' = -\frac{R_2}{R_1} v_1.$$

D'où $v_s = \frac{(R_1 + R_2)R_4}{R_1(R_3 + R_4)} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1$ et les conditions $R_2 = kR_1$ et

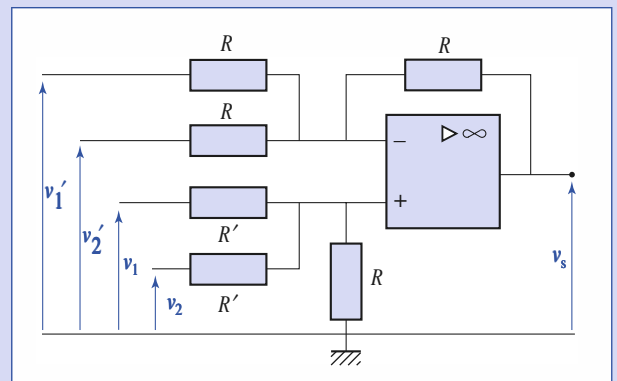
$$R_4 = kR_3.$$

On met l'entrée E_2 à la masse. L'impédance de l'entrée E_1 est R_1 . Lorsque l'entrée E_1 est à la masse, l'impédance de l'entrée E_2 est $R_3 + R_4$. La condition supplémentaire $R_1 = R_3 + R_4$ permet d'exprimer les résistances en fonction de l'une d'entre elles. La résistance R_1 étant choisie, il vient :

$$R_2 = kR_1, \quad R_3 = \frac{R_1}{(k+1)} \quad \text{et} \quad R_4 = \frac{kR_1}{(k+1)}.$$

Remarque : Pour obtenir une impédance d'entrée quasiment infinie, ce qui correspondrait au cas idéal, il faut réaliser le circuit de l'exercice 5.

2) Le montage est déduit d'un sommateur-soustracteur précédent. On cherche la valeur de R' assurant la relation demandée dans le montage ci-dessous.



Corrigés

On utilise le théorème de superposition. En éteignant v'_2 , v_1 et v_2 , il vient $v'_s = -v'_1$ (amplificateur inverseur). On pose : $\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$. En éteignant

$$v'_1, v'_2 \text{ et } v_2, \text{ il vient : } v''_s = \left(1 + \frac{R}{R'}\right) \frac{R_{//}}{R' + R_{//}} v_1 = \frac{3RR'}{2RR' + R'^2} v_1$$

(pont diviseur et amplificateur non inverseur). Donc si $R' = R$, le montage réalise :

$$v_s = (v_1 + v_2) - (v'_1 + v'_2).$$

5

1) Un amplificateur différentiel ne peut réaliser sa fonction qu'en régime linéaire. Pour ce faire, les boucles de rétroactions doivent revenir sur les entrées inverseuses des A.O.

2) Le courant d'entrée d'un amplificateur idéal est nul (très faible pour un amplificateur réel). L'impédance d'entrée est donc infinie.

Les résistances R_1 , R_2 et R'_2 sont traversées par le même courant :

$$i = \frac{v}{R_1} = \frac{v'}{R_1 + R_2 + R'_2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{v'}{v} = \frac{R_1 + R_2 + R'_2}{R_1}.$$

La deuxième partie du montage est un amplificateur différentiel (cf. exercice 4, question 1), donc $\frac{v''}{v'} = \frac{R_4}{R_3}$.

En regroupant les deux résultats précédents, il vient :

$$v'' = \frac{R_4}{R_3} v' = \frac{R_4}{R_3} \frac{R_1 + R_2 + R'_2}{R_1} v.$$

Le montage est un amplificateur différentiel d'impédance d'entrée quasiment infinie.

3) Chaque étage de l'amplificateur peut avoir un gain de 10, ce qui ne pose aucun problème de réalisation avec un « 741 ». On peut choisir, par exemple, $R_2 = R'_2 = 45 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$. De cette façon, les amplificateurs ne satureront pas en courant (résistances supérieures à $1 \text{ k}\Omega$) et les effets dus aux courants de polarisation sont négligeables (résistances inférieures au mégohm).

6

En régime linéaire $\varepsilon = 0 - \underline{u}_- = 0$ et le courant i_- est nul.

Soit \underline{v}_s la valeur complexe du potentiel à la borne de sortie de l'A.O.

Appliquons à l'entrée inverseuse la loi des nœuds en terme de potentiel :

$$\frac{\underline{u} - \underline{u}_-}{R_1} = (\underline{u}_- - v_s) jC\omega, \quad \text{avec} \quad \underline{u}_- = 0$$

$$\text{d'où : } \underline{v}'_s = -\frac{\underline{u}}{jR_1 C\omega}$$

i est égal à la somme des courants dans R_1 et R_2 :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u} - 0}{R_1} + \frac{0 - v_s}{R_2} = \underline{u} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(1 + \frac{1}{jR_1 C\omega} \right) \right)$$

$$\text{soit : } \frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jR_1 R_2 C\omega}.$$

Le montage est donc équivalent à une impédance $L = R_1 R_2 C$ en parallèle avec les deux résistances R_1 et R_2 .

7

1) Un convertisseur tension-courant idéal possède une impédance d'entrée infinie de telle sorte que son attaque, par un générateur quelconque, s'effectue toujours en tension. L'intensité de sortie doit être indépendante de la charge, donc son impédance de sortie est infinie (générateur de courant idéal). La relation est $i_s = G_t v_e$ (G_t : transconductance). En outre, ce convertisseur ne consomme pas de puissance en entrée ($i_e = 0$).

2) • Montage a)

Si l'amplificateur fonctionne en régime linéaire $v_+ - v_- = 0$, donc $v_e = 0$. Aucun courant n'entre par la borne inverseuse, donc $v_s = -R i_e$. Le circuit réalise la conversion courant-tension. En outre, $v_e = 0$ assure une impédance d'entrée nulle (donc aucune consommation de puissance en entrée) et v_s indépendant de i_s une impédance de sortie nulle. La conversion courant-tension réalisée est idéale.

• Montage b)

Si l'amplificateur fonctionne en régime linéaire $v_+ = v_- = v_e$. Aucun courant n'entre par la borne inverseuse, donc $i_s = \frac{v_e}{R}$. Le circuit réalise la conversion tension-courant. En outre, $i_e = 0$ assure une impédance d'entrée infinie et i_s indépendant de v_s une impédance de sortie infinie. La conversion tension-courant réalisée est idéale. L'inconvénient est qu'aucune des bornes de la charge R_u n'est reliée à la masse, la charge est dite flottante.

• Montage c)

Si l'amplificateur fonctionne en régime linéaire $v_+ = v_- = v_s$. La loi des nœuds appliquée respectivement à l'entrée non inverseuse et à l'entrée inverseuse donne :

$$\frac{v_e - v_s}{R_1} + \frac{v - v_s}{R_2} = i_s \quad \text{et} \quad -\frac{v_s}{R_1} + \frac{v - v_s}{R_2} = 0.$$

En soustrayant membre à membre il vient $i_s = \frac{v_e}{R_1}$. Le montage réalise une conversion tension-courant.

L'impédance de sortie est infinie, puisque i_s est indépendant de v_s . En revanche, l'impédance d'entrée n'est pas infinie. En introduisant un montage suiveur au niveau de l'entrée, ce défaut disparaît.

8

1) L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, donc $v_2 = v_1$. Aucun courant ne pénètre par l'entrée inverseuse (-) ou par l'entrée non inverseuse (+). On note par v_s la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel, il vient :

$$v_s = v_1 - K R_1 i_1 = v_2 - R i_2, \quad \text{d'où} \quad i_2 = K i_1.$$

(Attention, il ne faut pas écrire $i_2 = -i_1$, car un courant sort de l'amplificateur opérationnel). Les relations cherchées sont :

$$v_1 = v_2 \quad \text{et} \quad i_2 = K i_1.$$

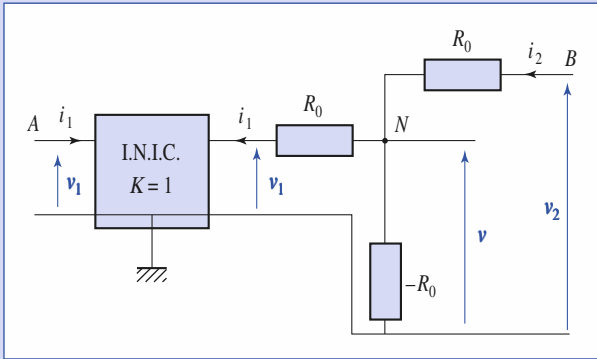
Si un dipôle d'impédance Z est placé entre B et la masse, alors :

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = -Z i_2 = -K Z \underline{i}_1.$$

L'impédance vue à l'entrée $\underline{Z}_1 = \frac{v_1}{\underline{i}_1} = -K Z$ est proportionnelle à

l'opposé de l'impédance \underline{Z} placée à la sortie.

2) Le schéma peut être simplifié en utilisant la propriété du convertisseur à impédance négative.



Le potentiel du nœud N peut s'exprimer en fonction des courants des branches aboutissant à ce nœud :

$$v = -R_0(i_2 - i_1) = v_1 + R_0 i_1 = v_2 - R_0 i_2 .$$

D'où : $v_1 = -R_0 i_2$ et $v_2 = R_0 i_1$.

Si un dipôle d'impédance \underline{Z} est placé entre B et la masse :

$$v_2 = -\underline{Z}i_2 , \text{ alors } v_1 = \frac{R_0^2}{\underline{Z}} i_1 .$$

L'impédance vue à l'entrée est proportionnelle à l'admittance placée à la sortie. Le facteur de proportionnalité R_0^2 est le carré d'une résistance R_0 appelée résistance de gyration.

Si le dipôle est un condensateur :

$$\underline{Z}_e = jR_0^2 C \omega ,$$

le dipôle équivalent à l'entrée est une inductance de valeur :

$$L = R_0^2 C .$$

Une inductance de très forte valeur peut être aisément simulée avec un condensateur.

Par exemple :

$$C = 100 \text{ nF} \quad \text{et} \quad R_0 = 10 \text{ k}\Omega$$

permettent d'obtenir une inductance $L = 10 \text{ H}$.

8

Fonctions de transfert des réseaux linéaires

OBJECTIFS

- Introduire la notion de fonction de transfert d'un réseau linéaire.
- Étudier les fonctions de transfert des filtres fondamentaux d'ordre un.
- Décrire leurs réponses fréquentielles par des diagrammes de Bode.

PRÉREQUIS

- Lois des réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé dans l'A.R.Q.S.
- Notions sur les amplificateurs opérationnels idéaux.

Introduction

La réponse d'un réseau linéaire en régime harmonique est une fonction de la fréquence de l'excitation. Cet effet de filtrage est d'une importance théorique et pratique considérable. Il n'est guère de circuits où les problèmes de filtrage ne doivent être examinés, soit pour en éliminer les effets, soit, tout au contraire, pour les accentuer. Notre étude de la réponse fréquentielle des circuits linéaires s'effectuera à l'aide de deux outils : l'un analytique et l'autre graphique, qui sont respectivement la fonction de transfert et le diagramme de Bode.

Réponse d'un circuit en régime harmonique

1.1. Réponse d'un circuit (R, C) en régime harmonique

Étudions le circuit (R, C) représenté sur le document 1, alimenté par un générateur sinusoïdal. Nous définissons la tension d'entrée $u_1(t)$ et la tension de sortie $u_2(t)$. Nous l'étudions ici en régime forcé et en sortie ouverte : aucun dipôle n'est branché entre les bornes de sortie et donc $i_2 = 0$.

Nous reconnaissons le diviseur de tension, ce qui permet d'écrire :

$$\underline{u}_{2m} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}_{1m} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{u}_{1m}.$$

La fonction de transfert est le rapport des amplitudes complexes de u_2 et u_1 :

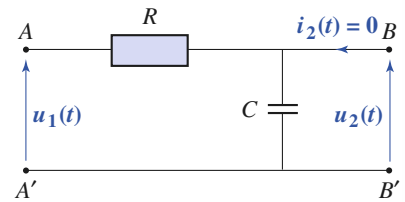
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_{2m}}{\underline{u}_{1m}}.$$

Le module $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ (grandeur positive) et le déphasage de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$, $\varphi(\omega)$ défini par $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, sont fonction de la fréquence :

$$H(\omega) = \left| \frac{\underline{u}_{2m}}{\underline{u}_{1m}} \right| = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

et $\varphi(\omega) = \arg[\underline{H}(j\omega)] = -\arctan(RC\omega)$.

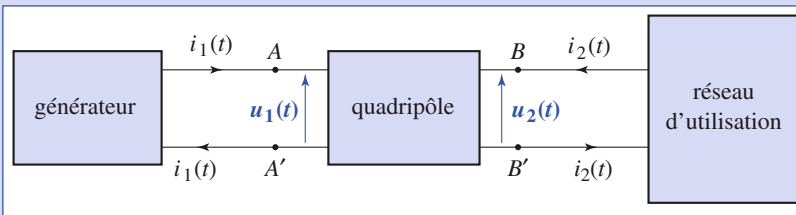
Ce circuit est appelé *filtre* car il transmet différemment des signaux harmoniques de fréquences différentes.



Doc. 1. Filtre (R, C).

L'usage le plus répandu consiste à noter la fonction de transfert comme une fonction complexe de la variable complexe $j\omega$ et non comme une fonction complexe de la variable réelle ω .

• Un quadripôle (doc. 2) est un ensemble qui présente deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.



Doc. 2. Quadripôle : u_1 est la tension d'entrée ; u_2 est la tension de sortie ; i_1 est le courant d'entrée ; i_2 est le courant de sortie.

• La fonction de transfert d'un quadripôle ne peut être définie que si le système est stable, ce que nous étudierons au § 8. *A priori*, tout quadripôle passif est stable.

Si nous étudions les tensions : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_{2m}}{\underline{u}_{1m}}$.

Un *filtre* est un quadripôle conçu pour transmettre sélectivement les diverses fréquences de la grandeur harmonique.

• Si le quadripôle est linéaire, $\underline{H}(j\omega)$ peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}, \quad N \text{ et } D \text{ étant des polynômes à coefficients réels.}$$

L'ordre du filtre est égal au degré le plus élevé de ces deux polynômes.

Un filtre est passif s'il n'est constitué que de dipôles passifs (résistances, bobines et condensateurs). Il est actif s'il contient un amplificateur alimenté par une source extérieure au circuit.

1.2. Forme réduite

La fonction de transfert du filtre (R, C) ne dépend que du produit RC qui est homogène à un temps, ou à l'inverse d'une pulsation.

Par définition, la pulsation propre du filtre est : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Notons aussi $x = \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega$ la pulsation réduite du filtre.

Le filtre (R, C) constitué d'éléments passifs est stable, c'est-à-dire que les tensions ne divergent pas.

Avec ces notations la fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}$$

1.3. Définition du gain

Le rapport $H(\omega)$ des amplitudes est généralement exprimé dans une échelle logarithmique.

Par définition, le gain en tension, exprimé en décibels, est :
 $G_{dB} = 20 \log H$ ($\log X$ étant le logarithme décimal du nombre X).

Pour le circuit étudié :

$$G(\text{dB}) = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) = -20 \log(\sqrt{1+x^2}) = -10 \log(1+x^2)$$

L'utilisation de l'échelle logarithmique permet de traiter avec autant de précision les faibles et les fortes amplitudes : la multiplication par 10 de H se traduit par un accroissement du gain de 20 dB, quelle que soit sa valeur initiale.

Nous verrons aussi que les courbes obtenues en échelle logarithmique sont plus simples à tracer et à interpréter.

Signalons enfin que l'œil et l'oreille ont une sensibilité beaucoup plus proche d'une échelle logarithmique que d'une échelle linéaire.

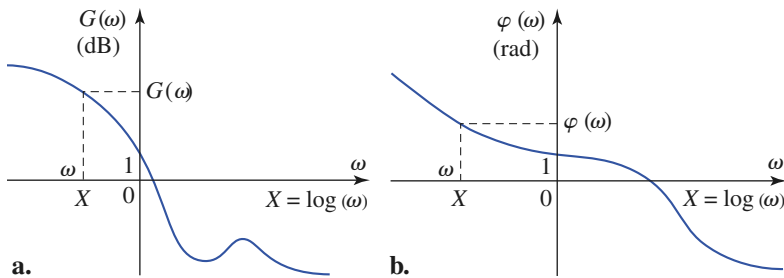
1.4. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode ne se construit que si le système est stable (cf. § 8).

1.4.1. Définition

Un diagramme de Bode (doc. 3) est la représentation d'une fonction de

transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{sm}}{u_{em}} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ à l'aide des deux courbes suivantes :



◀ **Doc. 3.** Diagramme de Bode :
 a. courbe de réponse en gain ;
 b. courbe de réponse en phase.

• courbe de réponse en gain donnant les variations du gain :

$$G(\omega)_{dB} = 20 \log | \underline{H}(j\omega) |$$

en fonction de la fréquence ou de la pulsation exprimée dans une échelle logarithmique $X = \log(\omega)$ ou $X = \log(f)$;

Quelques rappels :

- $\log(a b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(1/a) = -\log a$
- $\log a^n = n \log a$

À retenir :

- $\log 2 = 0,30$
- $\log 3 = 0,48 \approx 0,5$
(à rapprocher de $3^2 \approx 10$)
- Diviser H par $\sqrt{2}$ revient à retrancher 3 dB au gain :
 $20 \log \frac{H}{\sqrt{2}} = 20 \log(H) - 10 \log 2$
- Diviser H par 10 revient à retrancher 20 dB au gain :
 $20 \log \frac{H}{10} = 20 \log(H) - 20 \log 10$

• *courbe de réponse en phase* donnant les variations de $\varphi(\omega) = \arg[\underline{H}(j\omega)]$ en fonction de la même variable X .

1.4.2. Décades et octaves

Par définition, une décade est un intervalle de fréquences $[f_1 ; f_2]$ ou de pulsation $[\omega_1 ; \omega_2]$ tel que :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10 \text{ ou } \log(f_2) - \log(f_1) = 1$$

et un octave un intervalle de fréquences $[f_1 ; f_2]$ ou de pulsations $[\omega_1 ; \omega_2]$ tel que :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 \text{ ou } \log(f_2) - \log(f_1) = 0,30.$$

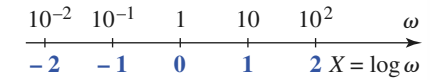
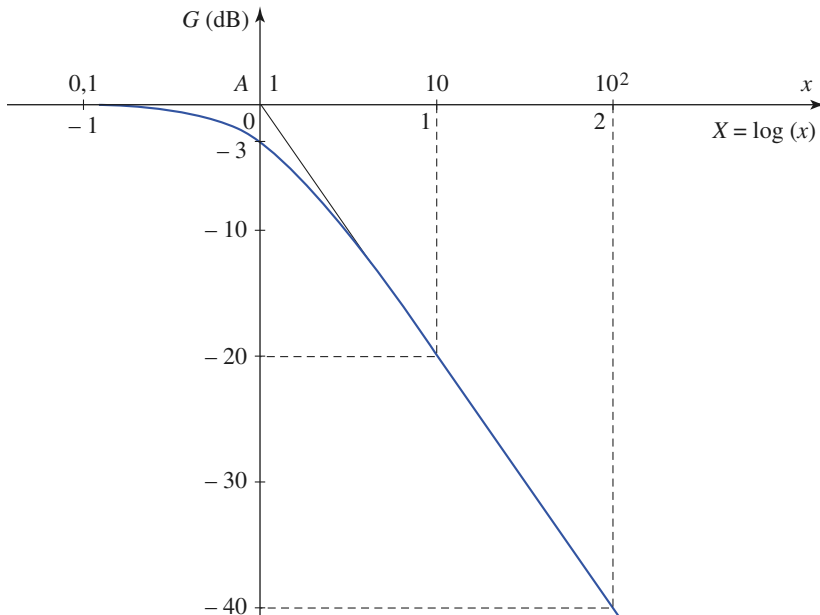
En électronique, l'intervalle de fréquences utilisé s'étend du continu à plusieurs gigahertz (10^9 Hertz). C'est un intervalle très étendu qui nécessite l'utilisation d'une échelle logarithmique pour conserver une lisibilité sur tout l'intervalle utilisé d'où l'usage du papier logarithmique pour les tracés de courbes de réponse en fonction de la fréquence. L'axe des fréquences (ou des pulsations) bien que gradué en fréquences (ou en pulsations) utilise comme abscisse $X = \log(f)$ [ou $X = \log(\omega)$] (*doc. 4*).

1.4.3. Courbe de fréquence de réponse en gain du filtre (R, C)

Un filtre (R, C) est stable ; explicitons l'expression du gain en tension de quadripôle :

$$G(x) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -10 \log(1+x^2)$$

et déterminons les asymptotes de sa courbe de réponse en gain.



Doc. 4. Principe d'une échelle logarithmique.

◀ **Doc. 5.** Courbe de réponse en gain (en bleu) et diagramme asymptotique (en noir) d'un passe-bas d'ordre un.

1.4.3.1. Asymptote basse fréquence

Aux très basses fréquences, la capacité C se comporte comme un interrupteur ouvert. Il en résulte que $u_{1m} = u_{2m}$ et par suite $G = 0$. Ce résultat peut faci-

lement être vérifié par le calcul. En effet, si $X \rightarrow \infty$ ($x \ll 1$), la valeur asymptotique du gain en basse fréquence est $G = -20 \log(1) = 0$. La courbe de réponse en gain admet l'asymptote $G = 0$ en basse fréquence (doc. 5).

1.4.3.2. Asymptote en haute fréquence

Aux très hautes fréquences, la capacité C se comporte comme un court-circuit : $u_{2m} = 0$ avec $u_{1m} \neq 0$, d'où $G \rightarrow -\infty$. Précisons ce résultat par le calcul. Si $X \rightarrow +\infty$ ($x \gg 1$), la valeur asymptotique du gain en haute fréquence est :

$$G = -10 \log(x^2) = -20 \log x = -20X.$$

En haute fréquence, la courbe de réponse en gain admet une asymptote passant par l'origine et de pente $p = -20$ dB/décade (doc. 5).

1.4.3.3. Diagramme asymptotique

En limitant les asymptotes B.F. et H.F. à leur point de concours A , nous obtenons la représentation asymptotique du gain.

Évaluons la qualité de cette représentation asymptotique. La courbe de réponse en gain, qui est confondue avec ses asymptotes lorsque $X \rightarrow \pm \infty$, s'en détache quand X prend des valeurs finies. C'est au niveau du point anguleux $A(x = 1)$ que l'écart ΔG entre la courbe de réponse en gain et sa représentation asymptotique est maximal :

$$\Delta G = G_A - G(1) = 0 - 20 \log(1 + 1) = \approx 3 \text{ dB}.$$

Cet écart est faible et la représentation asymptotique du gain est considérée comme satisfaisante.

1.4.3.4. Identification du type de filtrage

La courbe de réponse en gain montre que les pulsations inférieures à ω_0 ($x < 1$) sont transmises avec une atténuation inférieure à 3 dB, alors qu'au-delà de ω_0 ($x > 1$), elles sont atténuées de 20 dB/décade.

Un filtre pour lequel le gain est uniforme pour toutes les basses fréquences et qui coupe les hautes fréquences est appelé *filtre passe-bas*.

La variable $j\omega$ n'intervient qu'à la puissance 1 (pas de terme en ω^2 , ω^3 etc.) ; le filtre est dit du premier ordre.

Le quadripôle étudié (filtre (R, C)) est donc un *filtre passe-bas* du premier ordre.

1.4.4. Courbe de réponse en phase

Le déphasage de la tension de sortie par rapport à celle d'entrée est :

$$\varphi(x) = \arg[\underline{H}(jx)],$$

ou $\varphi(x) = -\arctan(x)$, soit $-\frac{\pi}{2} < \varphi(x) < 0$ car $x > 0$.

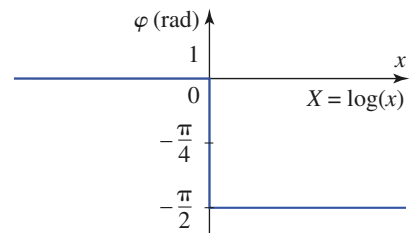
Déterminons les asymptotes de la courbe de réponse en phase.

1.4.4.1. Asymptote basse fréquence

Si $X \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow 0$), la valeur asymptotique du déphasage en basse fréquence est $\varphi = 0$ (doc. 6). La courbe de réponse en phase admet une asymptote d'équation $\varphi = 0$ en basse fréquence.

1.4.4.2. Asymptote haute fréquence

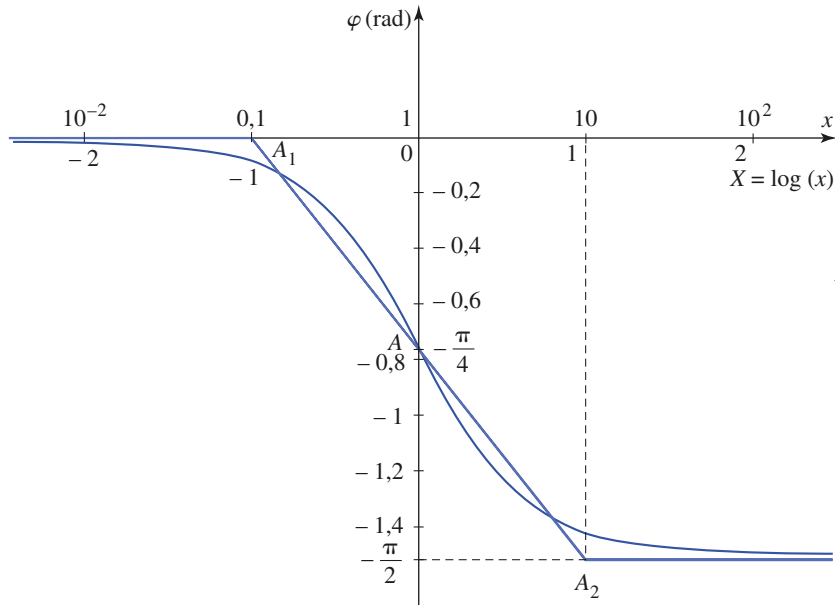
Si $X \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \infty$), la valeur asymptotique du déphasage en haute fréquence est $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.



Doc. 6. Le diagramme asymptotique formé des deux asymptotes $\varphi = 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ est insuffisant pour décrire la rotation de phase.

1.4.4.3. Diagramme asymptotique

Le diagramme asymptotique formé des deux asymptotes $\varphi = 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ est insuffisant pour décrire les variations du déphasage $\varphi(\omega)$ lorsque la pulsation varie de zéro à l'infini. Il est généralement complété par le segment A_1AA_2 décrivant le déphasage qui s'effectue, pour l'essentiel, au voisinage de $X = 0$ (doc. 7). Dans un tel diagramme, la rotation de phase s'effectue sur deux décades autour de $X = 0$, avec une valeur de $-\frac{\pi}{4}$ rad/décade. L'écart maximal entre ce diagramme asymptotique et la réponse en phase est $|\Delta\varphi| < 6^\circ$. Cette erreur est négligeable dans la pratique.

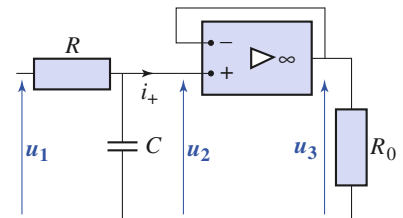


◀ **Doc. 7.** Diagramme asymptotique de la courbe de réponse en phase d'un passe-bas d'ordre un.

Remarque

La fonction de transfert étudiée correspond au circuit (R, C) du document 1 lorsque la sortie est ouverte. Nous ne pouvons donc l'utiliser que si l'impédance du circuit d'utilisation est quasi infinie : oscilloscope, voltmètre numérique. Dans le cas contraire (cf. l'Application 1) il faut modifier la fonction de transfert.

Nous pouvons aussi nous affranchir de ce problème avec un suiveur en sortie (doc. 8). Les tensions u_2 et u_3 sont égales avec $i_+ = 0$.



Doc. 8. Le courant i_+ étant nul la fonction de transfert du filtre est égale à $\frac{1}{1 + jRC\omega}$ quelque soit la valeur de R_u .

2 Filtre intégrateur

2.1. Équation différentielle et fonction de transfert

Nous cherchons un quadripôle qui réalise l'opération :

$$u_2(t) = u_2(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t u_1(\theta) d\theta, \text{ ou, ce qui est équivalent : } u_1(t) = \tau \frac{du_2}{dt},$$

τ étant une constante homogène à un temps.

En régime harmonique et en notation complexe :

$$\underline{u}_{1m} = j\omega \tau \underline{u}_{2m} \quad \text{soit :} \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_{2m}}{\underline{u}_{1m}} = \frac{1}{j\omega \tau}.$$

Un intégrateur est donc un filtre du premier ordre.

La fonction de transfert d'un filtre intégrateur est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{-2m}}{u_{-1m}} = \frac{1}{j\omega\tau}$$

2.2. Diagramme de Bode

2.2.1. Pulsation réduite

Nous définissons la *pulsation réduite* x par : $x = \tau\omega$.

La pulsation réduite est une variable sans dimension.

2.2.2. Courbe de réponse en gain

Le gain a pour expression :

$$H(\omega) = \frac{1}{\tau\omega} = \frac{1}{x}, \text{ d'où } G_{dB} = -20 \log(x).$$

La courbe de réponse en gain est donc, avec la pulsation réduite x , une droite passant par l'origine et de pente égale à -20 dB/décade (*doc. 9*).

Si nous portons en abscisse $\log(\omega)$ ou $\log(f)$, c'est une droite de pente -20 dB/décade qui coupe l'axe 0 dB en $\log\left(\frac{1}{\tau}\right)$ ou $\log\left(\frac{1}{2\pi\tau}\right)$.

2.2.3. Courbe de réponse en phase

Le déphasage φ de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est :

$$\varphi(\omega) = \arg[\underline{H}(j\omega)] \text{ soit } \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

2.3. Réalisation d'un intégrateur

2.3.1. Montage théorique

Étudions le montage théorique du *document 10a*.

La loi des nœuds au niveau de l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel s'écrit :

$$\frac{v_e - v_-}{R} + C \frac{d(v_s - v_-)}{dt} = 0.$$

En régime linéaire, v_- est nulle, soit $\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_e}{RC}$.

Le montage réalise bien une intégration quel que soit le signal d'entrée.

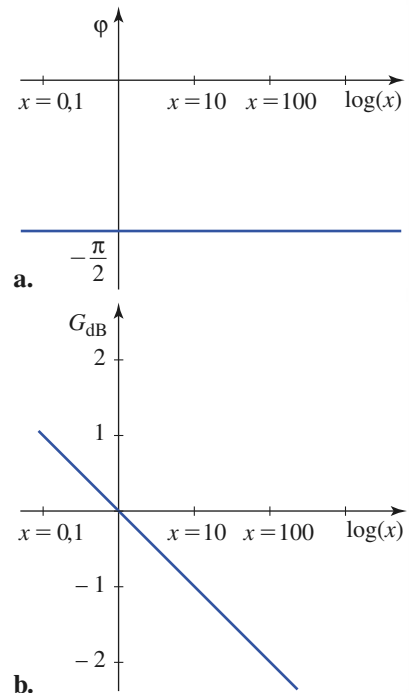
2.3.2. Réalisation du montage théorique

Réalisons le montage du *document 10b*.

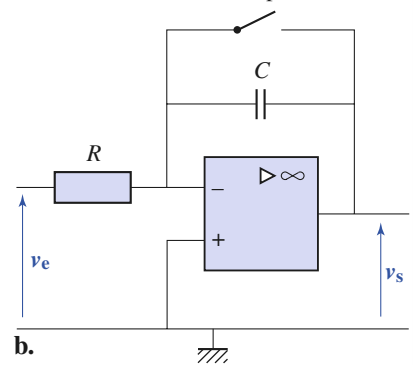
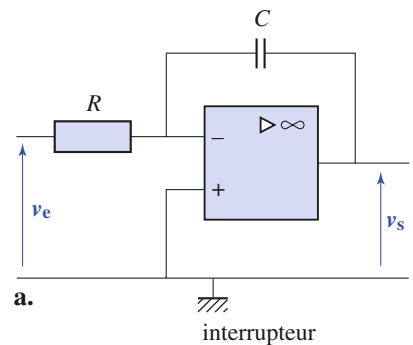
L'interrupteur a été placé de façon à pouvoir décharger le condensateur.

Prenons v_e nul (entrée court-circuitée) et ouvrons l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Nous observons soit une croissance linéaire de v_s avec le temps jusqu'à la tension de saturation de l'A.O. $v_s = V_{sat}$, soit une décroissance linéaire jusqu'à $-V_{sat}$.

Cette dérive de la tension de sortie du montage est due aux défauts de l'amplificateur opérationnel.



Doc. 9. Diagramme de Bode d'un intégrateur théorique.



Doc. 10. Intégrateurs à A.O. : montages théoriques.

Ce montage théorique n'est pas utilisable dans la pratique. Un amplificateur opérationnel réel présente de petits défauts par rapport au modèle théorique appelés *dérives* : en régime linéaire, la tension $\varepsilon = u_+ - u_-$ et le courant d'entrée ne sont pas rigoureusement nuls. Ces défauts, pratiquement sans incidence dans les montages amplificateurs étudiés au chapitre précédent, perturbent totalement le montage intégrateur qui n'est donc pas utilisable sous cette forme dans la pratique.

2.3.3. Montage amélioré

Pour éliminer le phénomène de dérive, il faudrait décharger régulièrement le condensateur. Remplaçons l'interrupteur par une résistance R' (doc. 11).

La fonction de transfert de ce nouveau montage se détermine simplement en appliquant la loi des nœuds en termes de potentiels à l'entrée inverseuse de l'amplificateur :

$$\underline{u} = 0 = \frac{u_e}{R} + \underline{u}_s \left(\frac{1}{R'} + jC\omega \right) \text{ d'où } \underline{H} = - \frac{R'/R}{1 + jR'C\omega}.$$

Nous distinguons deux domaines de fonctionnement :

■ $R'C\omega \gg 1$: Nous pouvons alors négliger le 1 du dénominateur et $\underline{H} \approx - \frac{1}{jRC\omega}$.

Dans ce domaine de fréquence, le filtre se comporte comme un intégrateur de constante de temps $\tau = RC$.

■ $R'C\omega \ll 1$: Nous pouvons alors négliger le terme $jR'C\omega$ du dénominateur et alors : $\underline{H} \approx - \frac{R'}{R}$.

Admettons que les dérives sont équivalentes à une tension continue e_d de l'ordre du millivolt ajoutée à la tension d'entrée. En régime forcé, une tension continue correspond au cas limite de la fréquence nulle.

Si $u_e = 0$, les dérives seules créent, en régime forcé, une tension de sortie $u'_2 = - \frac{R'}{R} e_d$.

Si les dérives sont nulles, la tension d'entrée sinusoïdale $u_1(t)$ crée en régime forcé une tension de sortie $u''_2(t)$ telle que $\underline{u}''_2 = \underline{H}(j\omega)\underline{u}_1$.

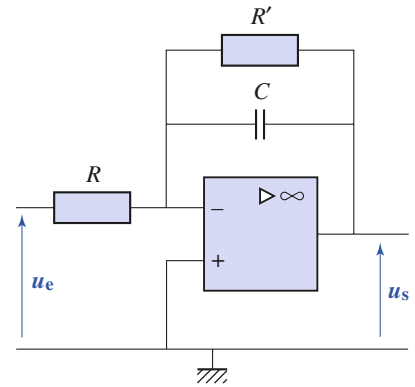
D'après le théorème de superposition : $u_2(t) = u'_2(t) + u''_2(t)$.

Nous voulons fabriquer un circuit qui élimine les effets des dérives tout en se comportant comme un intégrateur acceptable pour $u_1(t)$. L'étude précédente nous fixe donc deux conditions :

- Si nous nous fixons arbitrairement une valeur maximale de 0,1 V pour l'influence de ces dérives en sortie, nous en déduisons : $R' < 100R$ (environ) ;
- Si nous considérons (arbitrairement) que le filtre se comporte comme un intégrateur pour $R'C\omega > 100$, nous obtenons : $R' > \frac{100}{C\omega}$ ou $R' > \frac{100R}{C\omega}$.

Par exemple, avec $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$ et $R' = 1 \text{ M}\Omega$, il est possible d'écrire :

$$u_s = - \frac{1}{RC} \int u_e dt.$$



Doc. 11. Intégrateur à A.O. : montage amélioré.

Le domaine de validité d'une approximation n'a pas, en général, de frontières précises. On préférera les définir avec des « chiffres ronds ». Aussi, il ne faut pas s'étonner de voir faire correspondre 150 Hz et non 159 Hz à $\omega = 10^3 \text{ s}^{-1}$.

Pour tester un intégrateur, il est recommandé d'utiliser à l'entrée une fonction en créneaux : l'intégrale d'une telle fonction est une fonction triangle facilement identifiable.

pour des valeurs de ω supérieures à $10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ou des fréquences supérieures à 100 Hz (environ).

Remarque

Expérimentalement, pour savoir si un intégrateur est perturbé par les dérives, il suffit de faire $u_1 = 0$ (en mettant l'entrée à la masse) et d'observer la sortie.

3 Filtre passe-bas du premier ordre

3.1. Fonction de transfert

■ Expression générale

Nous avons vu un exemple de filtre passe-bas d'ordre un avec le circuit (R, C) décrit au § 1. Plus généralement :

Un filtre est passe-bas d'ordre un si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jx} \text{ avec } A_0 \text{ réel.}$$

ω_0 est la pulsation propre ou pulsation de coupure et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

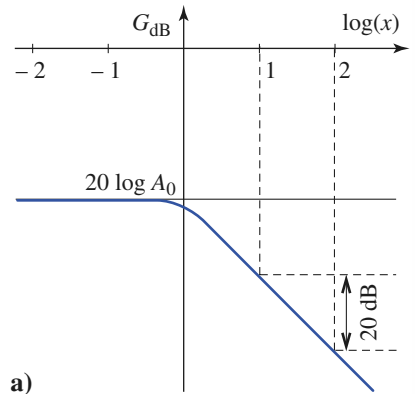
Le montage « intégrateur amélioré » vu au paragraphe précédent est un exemple de passe-bas d'ordre un avec $A_0 = -\frac{R'}{R}$ et $\omega_0 = \frac{1}{R'C}$.

Le diagramme de Bode est identique à celui du circuit (R, C) étudié au § 1, à une translation près, due à la constante A_0 (doc. 12).

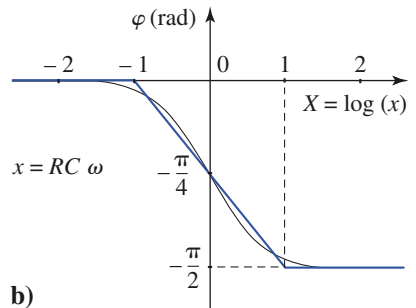
Récapitulons les caractéristiques essentielles.

- À basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ et en particulier pour le cas limite $\omega = 0$ qui correspond au régime continu), le signal de sortie est égal au signal d'entrée, simplement multiplié par le nombre réel A_0 . Cette propriété justifie la dénomination « passe-bas ».
- À haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), le signal de sortie est atténué d'un facteur α chaque fois que la fréquence est multipliée par ce même facteur α : cela se traduit sur le diagramme de Bode par une asymptote de pente -20 dB/décade .
- À haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), le signal de sortie est déphasé de $-\frac{\pi}{2}$ par rapport au signal d'entrée.
- À la fréquence de coupure, le déphasage est de $-\frac{\pi}{4}$ (toujours si $A_0 > 0$) et le gain est à 3 dB au-dessous de sa valeur maximale.

Remarque : Si $A_0 < 0$, il faut ajouter π à la phase précédente, car $e^{j\pi} = -1$.



a)



b)

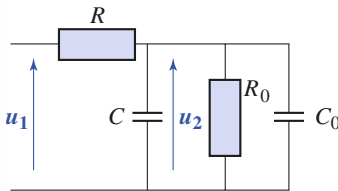
Doc. 12. Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre m.

Rappel : Retraire 3 dB revient à diviser l'amplitude par $\sqrt{2}$.

Application 1

Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre RC chargé par une résistance R_0 en parallèle avec une capacité C_0 (doc. 13).

Qualifier ce filtre et déterminer ses constantes caractéristiques.



Doc. 13. Filtre (R, C) chargé.

L'ensemble C, R_0, C_0 en parallèle a pour impédance équivalente :

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + j(C + C_0)\omega}$$

Appliquons la relation du diviseur de tension :

$$\frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{\underline{Z}_e}{R + \underline{Z}_e} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_0} + jR(C + C_0)\omega}$$

Nous pouvons transformer cette expression pour la mettre sous la forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R_0}{R + R_0}}{1 + j\frac{RR_0}{R + R_0}(C + C_0)\omega} = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

C'est donc un filtre passe-bas d'ordre un.

En identifiant, nous obtenons :

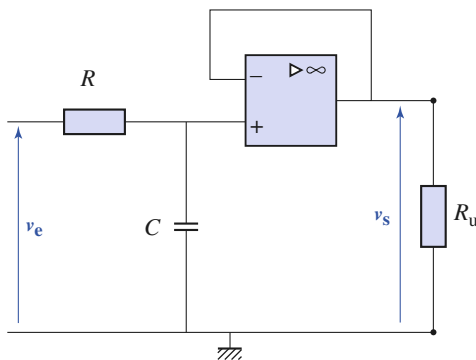
- le gain à basse fréquence : $A_0 = \frac{R_0}{R + R_0}$;
- la pulsation caractéristique ou pulsation de coupure : $\omega_0 = \frac{R + R_0}{RR_0(C + C_0)}$.

Nous retrouvons bien les valeurs connues pour le filtre (R, C) non chargé ($A_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$)

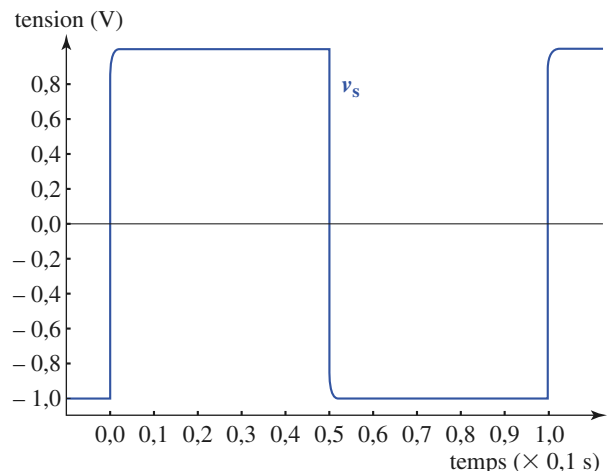
dans le cas limite $R_0 \rightarrow \infty$ et $C_0 \rightarrow 0$.

3.2. Caractère pseudo-intégrateur

Réalisons le montage (doc. 14), avec une constante de temps $RC = 10^{-4}$ s. Observons les courbes obtenues en régime forcé pour un signal d'entrée de type créneau d'amplitude $v_0 = 1$ V et de période T .



Doc. 14. Le suiveur impose au filtre (R, C) une impédance de charge infinie quelle que soit R_u .

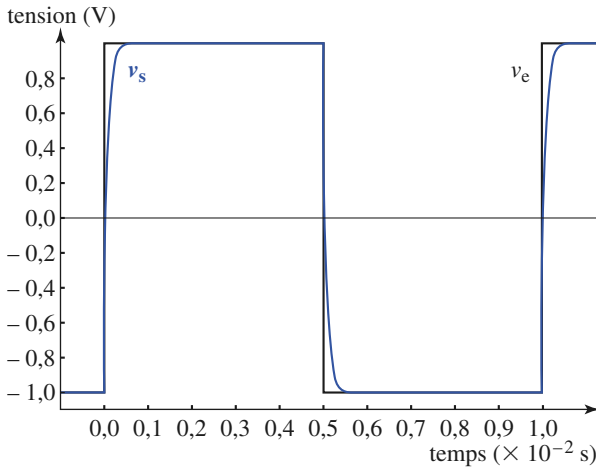


Doc. 15. Réponse du passe-bas de $RC = 10^{-4}$ s à une excitation en créneau de période $T = 10^{-1}$ s.

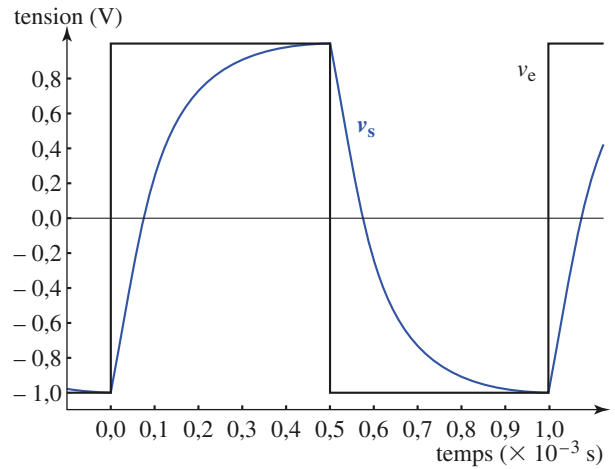
Si la période du signal est grande devant RC ($T = 0,1$ s), le signal de sortie est un créneau de même amplitude 1 V (*doc. 15*).

Si la période du signal est petite devant RC ($T = 10^{-5}$ s), le signal de sortie est un signal triangulaire d'amplitude 25 mV (*doc. 19*).

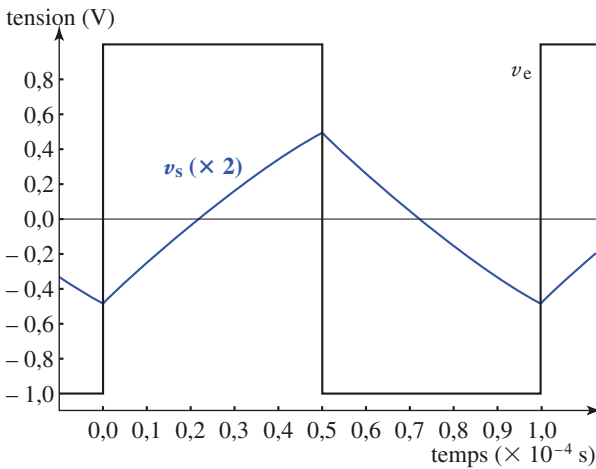
Pour des valeurs intermédiaires de la période, le signal de sortie évolue d'une forme proche d'un créneau à une forme proche d'un triangle (*doc. 16, 17 et 18*).



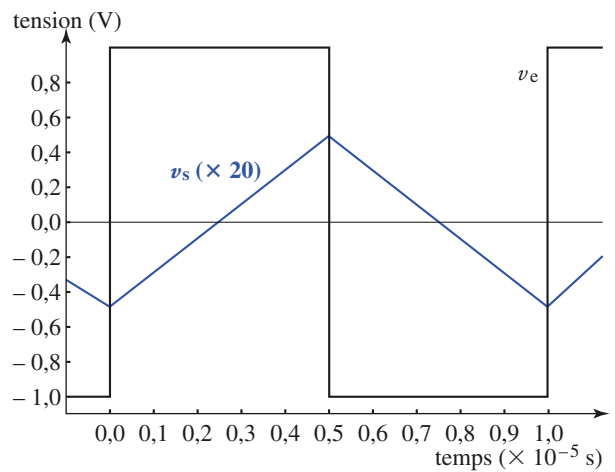
Doc. 16. Réponse du passe-bas de $RC = 10^{-4}$ s à une excitation en créneau $T = 10^{-2}$ s.



Doc. 17. Réponse du passe-bas de $RC = 10^{-4}$ s à un signal créneau de $T = 10^{-3}$ s.



Doc. 18. Réponse du passe-bas de $RC = 10^{-4}$ s à un signal créneau de $T = 10^{-4}$ s.



Doc. 19. Réponse du passe-bas de $RC = 10^{-4}$ s à un signal créneau de $T = 10^{-5}$ s.

Interprétons ces résultats à l'aide de la fonction de transfert.

Pour les pulsations grandes devant ω_0 , soit pour $RC\omega \gg 1$ la fonction de transfert peut se mettre sous la forme approchée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \approx \frac{1}{jRC\omega}$$

Nous retrouvons la fonction de transfert d'un intégrateur. En régime sinusoïdal forcé et si $\omega \gg \omega_0$, la tension de sortie $u_2(t)$ est pratiquement égale à la primitive de valeur moyenne nulle de la tension d'entrée $u_1(t)$. Graphiquement, cette condition est réalisée lorsque la courbe de réponse en gain se confond avec son asymptote haute fréquence.

En régime harmonique forcé, $u_2(t)$ est somme de fonctions sinusoïdales de valeur moyenne nulle. La primitive d'une fonction étant définie à une constante près, nous retenons pour u_2 celle dont la valeur moyenne est nulle.

Un signal créneau d'amplitude v_0 de période T peut être décomposé en ses harmoniques, signaux sinusoïdaux de période $T, \frac{T}{3}, \frac{T}{5}, \frac{T}{7}, \dots, \frac{T}{(2n+1)}$ (le signal créneau ne contient que des harmoniques impairs) d'amplitudes :

$$a, \frac{a}{3}, \frac{a}{5}, \frac{a}{7}, \dots, \frac{a}{(2n+1)} \text{ avec } a = \frac{4v_0}{\pi} \text{ (doc. 23).}$$

Dans le cas où $T = 0,1 \text{ s}$, les harmoniques d'amplitude importante vérifient $T \gg RC$ (ou $RC\omega \ll 1$). Le passe-bas (R, C) transmet sans déformation les harmoniques principaux : le signal de sortie est donc quasi identique au signal d'entrée. Dans le cas où $T = 10^{-5} \text{ s}$, tous les harmoniques vérifient $T \ll RC$ (ou $RC\omega \gg 1$). Le passe-bas atténue et intègre les harmoniques principaux : le signal de sortie est alors une primitive du signal d'entrée, donc un ensemble de segments de droite de pente $\pm \frac{v_0}{RC}$.

Application 2

Intégration d'un signal triangulaire

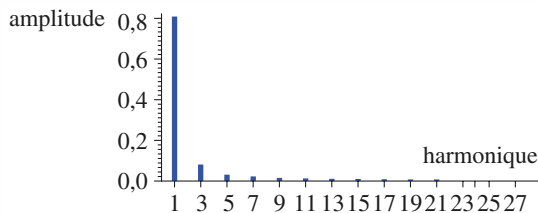
Un signal triangulaire d'amplitude v_0 et de fréquence f peut être décomposé en harmoniques (tous impairs) d'amplitude :

$$a, \frac{a}{9}, \frac{a}{25}, \frac{a}{49}, \dots, \frac{a}{(2n+1)^2}, \text{ avec } a = \frac{8v_0}{\pi^2}$$

et de fréquence $f, 3f, 5f, 7f, \dots, (2n+1)f$ (doc. 20).

1) Pourquoi le passe-bas (R, C) avec $RC = 10^{-4} \text{ s}$ déforme-t-il moins un signal triangulaire de fréquence 100 Hz qu'un signal créneau de même fréquence (doc. 22) ?

2) Quelle est la forme du signal de sortie pour un signal d'entrée triangulaire de fréquence 10^5 Hz ?

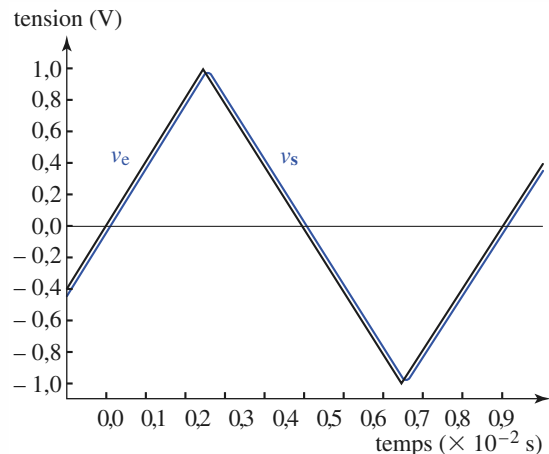


Doc. 20. Spectre de fréquence d'un signal triangulaire d'amplitude unité.

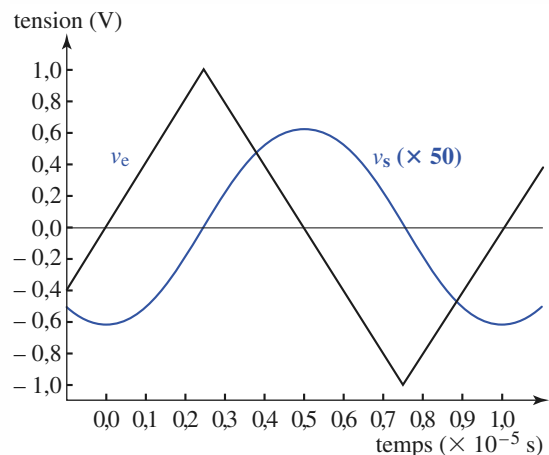
1) L'amplitude des harmoniques du signal triangulaire décroît très vite, en $\frac{1}{n^2}$.

Pour un signal de 100 Hz, les harmoniques principaux sont dans le domaine $T \gg RC$, alors que ce n'est pas le cas pour un signal créneau. Le signal triangulaire est donc peu déformé (doc. 21).

2) Le signal de sortie est proportionnel à la primitive du signal d'entrée de valeur moyenne nulle, soit un signal en arches de paraboles (doc. 23).



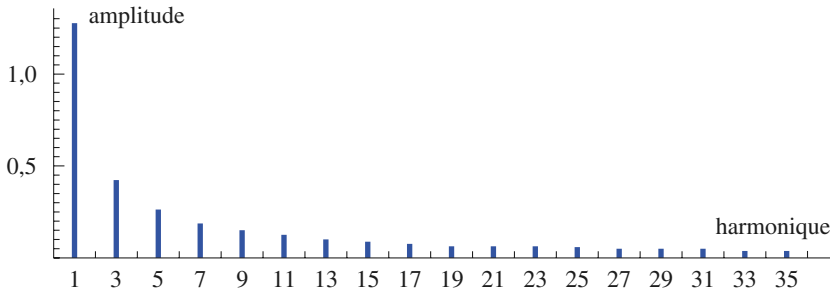
Doc. 21. Réponse $v_s(t)$ d'un passe-bas à un signal créneau $v_e(t)$ de fréquence faible ($T \gg RC$).



Doc. 22. Réponse $v_s(t)$ d'un passe-bas à un signal créneau $v_e(t)$ de fréquence élevée ($T \ll RC$).

En un quart de période, sa valeur passe de 0 à sa valeur extrême : son amplitude est donc $\frac{v_0 T}{4RC}$, soit 25 mV pour $\frac{T}{RC} = 10^{-1}$ et $v_0 = 1$ V.

Dans les cas intermédiaires, seule une partie des harmoniques d'amplitude importante vérifie $T \gg RC$ ou $T \ll RC$. Nous ne pouvons rien déduire sur le signal de sortie.



◀ Doc. 23. Harmoniques d'un signal créneau d'amplitude unité.

3.3. Valeur moyenne d'une fonction périodique

Prenons l'exemple d'un signal : $u_1(t) = U_0 + U_1 \cos(\omega t + \phi)$ envoyé à l'entrée d'un filtre passe-bas (R, C) tel que $\omega_0 = \frac{1}{RC} < \frac{\omega}{100}$ (soit $x = RC\omega > 100$).

Le signal d'entrée est la somme d'une fonction constante (de fréquence nulle) et d'une fonction harmonique de pulsation ω .

- Le filtre passe-bas laisse intégralement passer la fonction constante.
- Le filtre passe-bas est utilisé dans sa zone asymptotique pour la partie variable. Son amplitude est divisée par 100 et elle est déphasée de $-\frac{\pi}{2}$.
- En superposant les régimes forcés, nous obtenons :

$$u_2(t) = U_0 + \frac{U_1}{100} \sin(\omega t).$$

Le signal de sortie est donc pratiquement égal à la valeur moyenne du signal d'entrée. Il ne subsiste qu'une faible *ondulation*, 100 fois plus faible que celle du signal d'entrée.

Ce résultat est applicable à tout signal périodique de valeur moyenne non nulle.

Un filtre passe-bas se comporte comme un opérateur « valeur moyenne » s'il est appliqué à un signal périodique de valeur moyenne non nulle et de fréquence $f \gg f_0$.

4 Filtre dérivateur

4.1. Équation différentielle et fonction de transfert

Nous cherchons un quadripôle qui réalise l'opération : $u_2(t) = \tau \frac{du_1}{dt}$
 τ étant une constante homogène à un temps.

En régime harmonique et en notation complexe nous obtenons une fonction de transfert d'ordre un : $\underline{u}_{-2m} = j\omega \tau \underline{u}_{-1m}$, soit : $\underline{H}(j\omega) = j\omega \tau = jx$ avec $x = \tau\omega$.

La fonction de transfert d'un filtre dérivateur est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = j\omega\tau.$$

4.2. Diagramme de Bode

La fonction de transfert est inverse de celle de l'intégrateur. Pour une même valeur de x , le gain en décibels et le déphasage sont donc opposés. Nous en déduisons le diagramme de Bode du dérivateur idéal (doc. 24).

4.3. Réalisation d'un dérivateur

4.3.1. Montage théorique

Étudions le montage théorique du document 25.

Écrivons la loi des nœuds au niveau de l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel :

$$\frac{v_e - v_-}{R} + C \frac{d(v_s - v_-)}{dt} = 0,$$

soit en régime linéaire ($v_- = 0$) :

$$v_s = -RC \frac{dv_e}{dt} = -\tau \frac{dv_e}{dt}, \text{ avec } \tau = RC.$$

Le montage réalise bien une dérivation quel que soit le signal d'entrée. Sa fonction de transfert est $\underline{H}(j\omega) = -jRC\omega$. Dans ce cas, nous avons $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

4.3.2. Réalisation à l'aide d'un amplificateur opérationnel réel

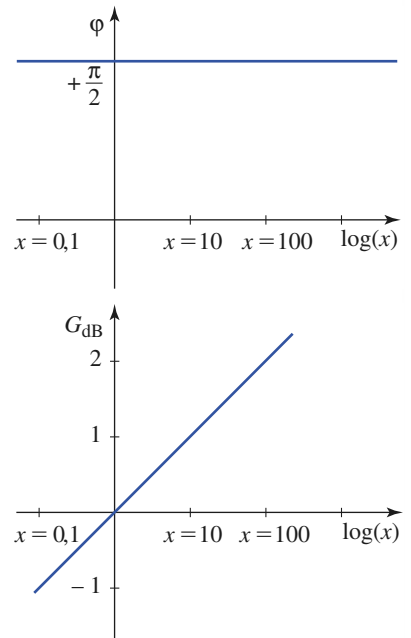
4.3.2.1. Réalisation du montage théorique

Réalisons le montage théorique à l'aide d'un amplificateur opérationnel 741 avec $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$ ($RC = 10^{-3} \text{ s}$).

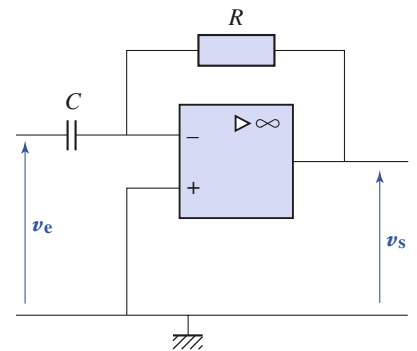
En choisissant comme signal d'entrée, un signal triangulaire d'amplitude 0,1 V, nous obtenons les résultats des documents 26a et b.

Le montage présente un phénomène d'oscillations semblable à celui observé pour l'intensité dans un circuit (R, L, C). Il y a résonance.

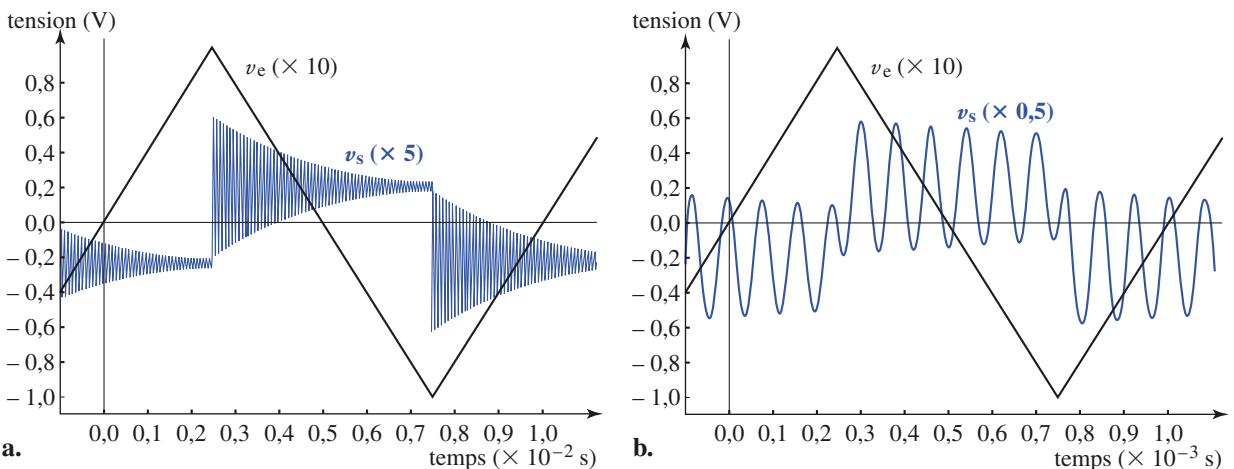
Le tracé du diagramme de Bode correspondant nous indique une résonance très aiguë pour une fréquence f_c d'environ 13 kHz.



Doc. 24. Diagramme de Bode d'un dérivateur théorique.



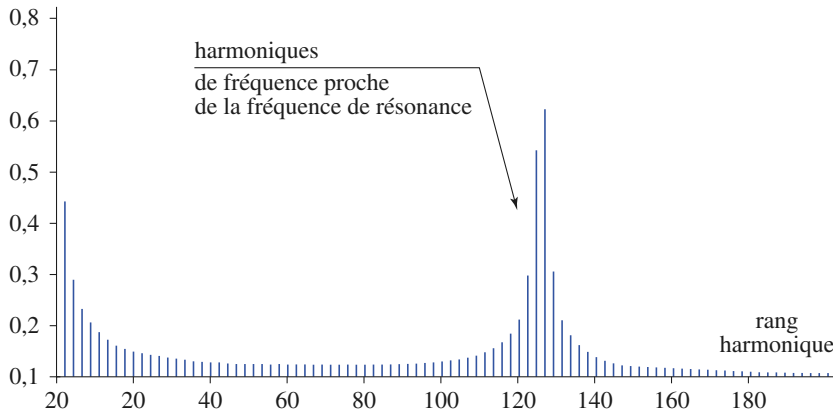
Doc. 25. Dérivateur à A.O. : montage théorique.



Doc. 26. En basse fréquence, le montage n'a pas le caractère dérivateur attendu.

Cette résonance est due à l'amplificateur opérationnel réel non idéal.

Interprétons, à l'aide de la notion d'harmoniques, le fait que le montage ne soit pas dérivateur à basse fréquence.



Doc. 27. Mise en évidence, dans le spectre de fréquence, d'une résonance de $v_s(t)$ au voisinage de 13 kHz.

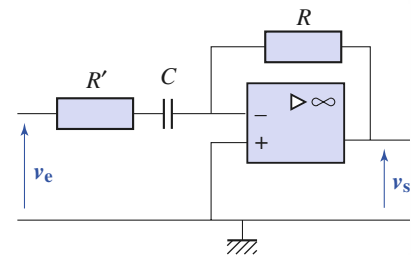
Sur le document 27 (signal d'entrée triangulaire de fréquence 100 Hz), nous remarquons que les harmoniques de rang 120 à 140 du signal de sortie ont une amplitude très grande. Leur fréquence est comprise entre 12 et 14 kHz, cela correspond au pic de résonance du montage. Cette amplification trop importante des harmoniques 120 à 140 explique les oscillations à une fréquence voisine de 13 kHz du signal de sortie. Le caractère dérivateur du montage est alors masqué par le phénomène de résonance.

4.3.2.2. Montage amélioré

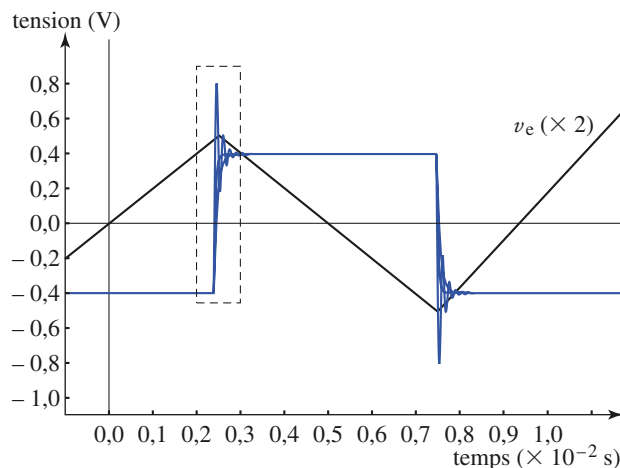
L'idée est de diminuer l'acuité de la résonance du montage et donc de diminuer son facteur de qualité.

Pour un circuit (R, L, C), il suffit d'augmenter R . Ici, nous ajouterons une résistance R' en série avec le condensateur (doc. 28).

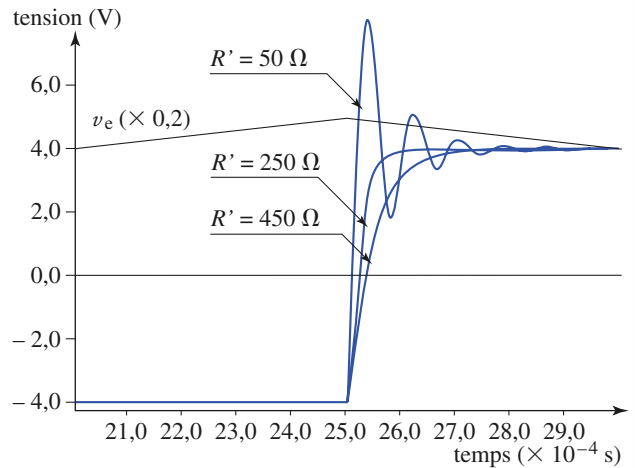
La réponse est représentée sur le document 29.



Doc. 28. Dérivateur à A.O. : montage amélioré.



Doc. 29a. Réponse du dérivateur amélioré à un signal triangulaire.

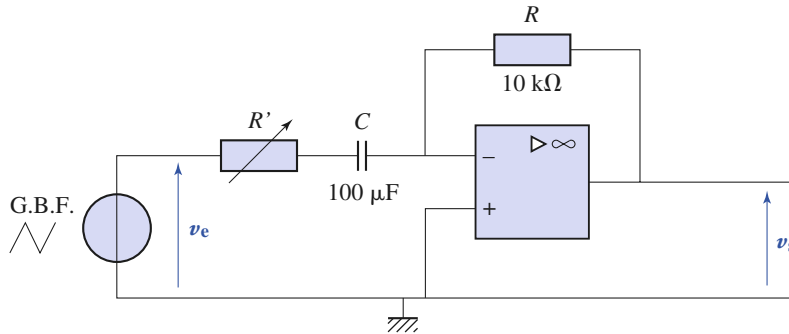


Doc. 29b. Détail de la réponse précédente.

4.3.3. Étude expérimentale

Le montage expérimental est réalisé à l'aide d'une résistance R' variable (doc. 30).

Nous choisissons un signal de sortie du générateur basse fréquence de type triangulaire de fréquence de l'ordre de 100 Hz et nous ajustons R' , de façon à obtenir en sortie de l'amplificateur opérationnel un signal aussi proche que possible du créneau (attention à la saturation en tension).



◀ **Doc. 30.** Montage expérimental d'étude du dérivateur à A.O.

Réalisons l'expérience avec un générateur basse fréquence dont l'impédance de sortie est de 600 Ω. Nous trouvons une valeur optimale de R' non nulle, de l'ordre de quelques centaines d'ohms.

5 Filtre passe-haut d'ordre un

5.1. Exemple

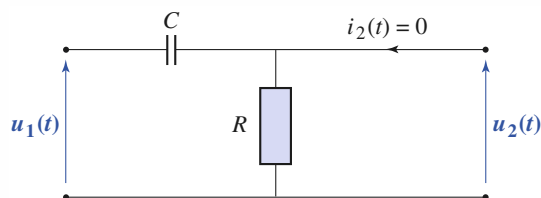
Les techniques d'étude développées pour les filtres passe-bas d'ordre un peuvent s'appliquer à l'exemple de l'Application 3.

Application 3

Filtre passe-haut d'ordre un

Permutons dans le passe-bas (R, C) (doc. 31) la position de R et C . Nous obtenons le quadripôle représenté sur le document 31. Attaqué par la tension $u_1(t)$ ce quadripôle délivre la réponse $u_2(t)$, en sortie ouverte ($i_2(t) = 0$).

Déterminer la fonction de transfert du filtre et tracer son diagramme de Bode.



Doc. 31. Passe-haut (R, C) d'ordre un.

Le filtre est un diviseur de tension :

$$\underline{u}_{-2m} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}_{-1m} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{u}_{-1m}.$$

Posons $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et introduisons la pulsation réduite

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

La fonction de transfert, d'ordre un, s'écrit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{u}_{-2m}}{\underline{u}_{-1m}} = \frac{jx}{1 + jx} = \frac{1}{1 - \frac{j}{x}}.$$

Construit avec des éléments positifs, ce filtre est stable.

• Réponse en gain : De l'expression du gain :

$$G = 20 \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right),$$

déterminons les asymptotes de la courbe de réponse en gain.

Asymptote basses fréquences :

$$x \ll 1 \Rightarrow G \approx 20 \log x = 20 X.$$

L'asymptote B.F. est une droite de pente +20 dB/dec passant par l'origine (doc. 32). Aux très basses fréquences, la capacité C se comporte comme un interrupteur ouvert et $u_{2m} = 0$ puisqu'aucun courant ne circule dans la résistance R . Par suite, aux très basses fréquences, $G \Rightarrow -\infty$, ce qui est conforme au résultat précédent.

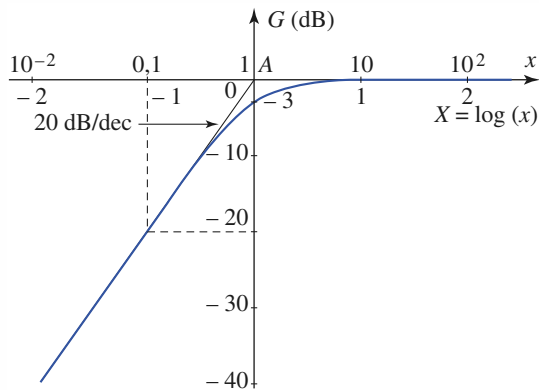
Asymptote hautes fréquences :

$$x \gg 1 \Rightarrow G \approx 20 \log\left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}\right) = 0.$$

L'asymptote H.F. est la droite $G = 0$ dB (doc. 32). Aux très hautes fréquences, la capacité C se comporte comme un court-circuit. Donc $u_{2m} = u_{1m}$ et par suite :

$$G = 20 \log\left(\frac{u_{2m}}{u_{1m}}\right) = 20 \log 1 = 0,$$

comme il vient d'être calculé.



Doc. 32. Courbe de réponse en gain et diagramme asymptotique d'un passe-haut d'ordre un.

C'est au niveau du point anguleux $A(x = 1)$ que l'écart ΔG entre le graphe et sa représentation asymptotique est maximal :

$$\Delta G = G_A - G(1) = 0 - 20 \log\left(\frac{1}{1+1}\right) = 3 \text{ dB}.$$

Cet écart est faible et la représentation asymptotique est considérée comme satisfaisante.

L'examen de la courbe de réponse en gain montre que les pulsations supérieures à $\omega_0(x > 1)$ sont transmises avec une atténuation inférieure à 3 dB, alors qu'au-dessous de $\omega_0(x < 1)$ elles sont atténuées de 20 dB/dec. Le quadripôle étudié est un passe-haut d'ordre un, dont la pulsation de coupure à 3 dB égale à ω_0 et dont la bande passante à dB est $[\omega_0; \infty[$.

Remarque

La fonction de transfert de ce filtre dépend de sa charge qui est, dans le cas étudié, infinie.

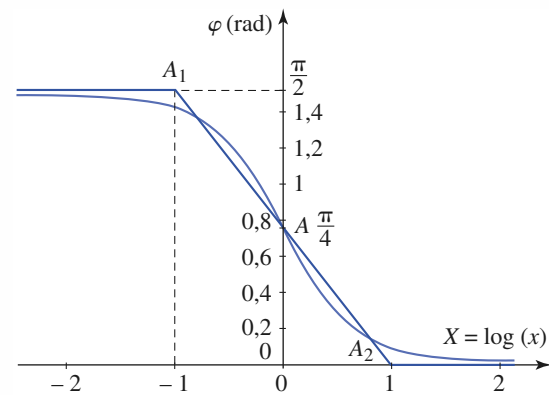
• Réponse en phase : le déphasage $\varphi(x)$ de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$ est l'argument de la fonction de transfert :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \arg\left(\frac{jx}{1+jx}\right) = \frac{\pi}{2} - \arg(1+jx) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \text{ avec } 0 < \varphi(x) < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nous remarquons que la courbe de réponse en phase d'un passe-haut d'ordre un, ainsi que son diagramme asymptotique (doc. 33) se déduisent de ceux d'un passe-bas du même ordre par une translation de $\frac{\pi}{2}$ le long de l'axe des déphasages.

Remarque

Le point $A\left[X = 0; \varphi = \frac{\pi}{4}\right]$ est un point de symétrie et un point d'inflexion de la courbe de réponse en phase.



Doc. 33. Courbe de réponse en phase et diagramme asymptotique d'un passe-haut d'ordre un.

5.2. Généralisation

Un filtre est passe-haut d'ordre un si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jA_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = A_0 \frac{jx}{1 + jx} = A_0 \frac{1}{1 - \frac{j}{x}} \text{ avec } A_0 \text{ réel.}$$

ω_0 est la pulsation propre ou pulsation de coupure et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

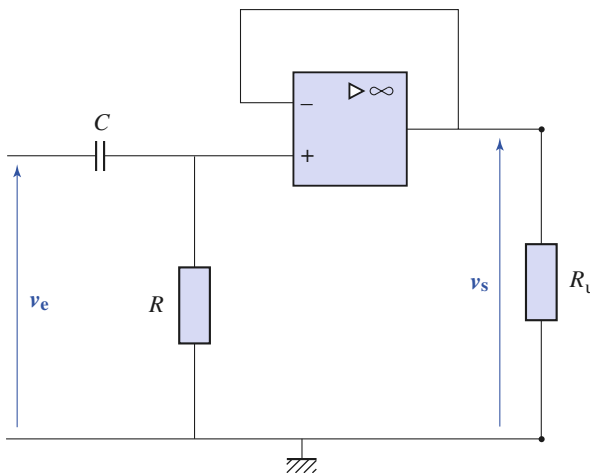
Le diagramme de Bode est identique à celui du circuit (R, C) de l'Application 3, à une translation près, due à la constante A_0 .

Récapitulons les caractéristiques essentielles.

- À haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$ ou $RC\omega \gg 1$), le signal de sortie est égal au signal d'entrée, simplement multiplié par A_0 . Cette propriété justifie la dénomination « passe-haut ».
- À basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ ou $RC\omega \ll 1$), le signal de sortie est atténué d'un facteur α chaque fois que la fréquence est divisée par ce même facteur α . Cela se traduit sur le diagramme de Bode par une asymptote de pente + 20 dB/dec.
- À basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), le signal de sortie est déphasé de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport au signal d'entrée ;
- À la fréquence de coupure, le déphasage est de $\frac{\pi}{4}$ (toujours si $A_0 > 0$) et le gain est à 3 dB au-dessous de sa valeur maximale.

5.3. Caractère pseudo-dérivateur

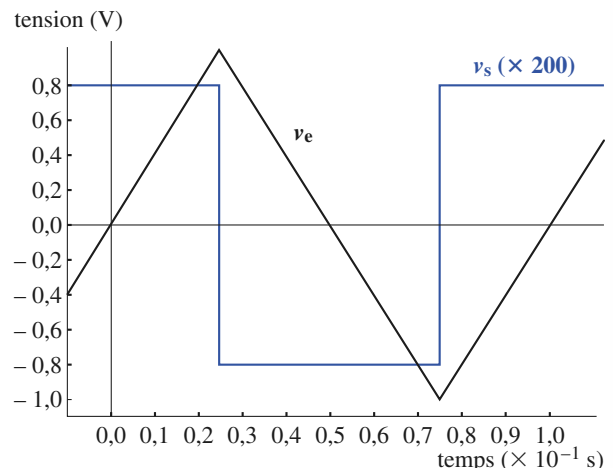
Réalisons le montage du document 34.



Doc. 34. Le suiveur impose au filtre passe-haut (R, C) une impédance de charge infinie quelle que soit R_u .

Observons les courbes obtenues en régime forcé pour un signal d'entrée triangulaire d'amplitude $v_0 = 1$ V réalisé avec une constante de temps $RC = 10^{-4}$ s.

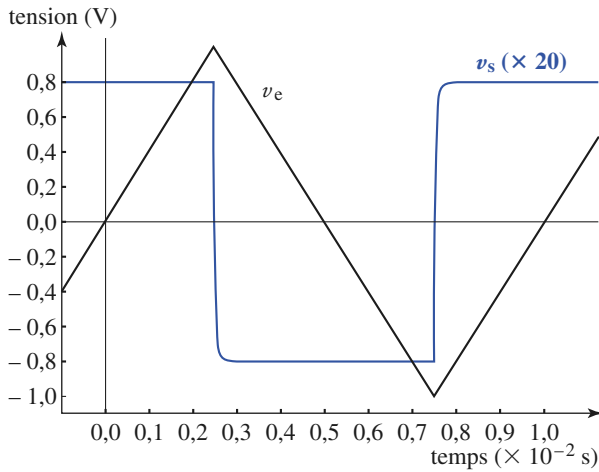
Nous remarquons que si la période du signal est $T = 0,1$ s, donc grande devant RC , le signal de sortie est un signal créneau d'amplitude 4 mV (doc. 35).



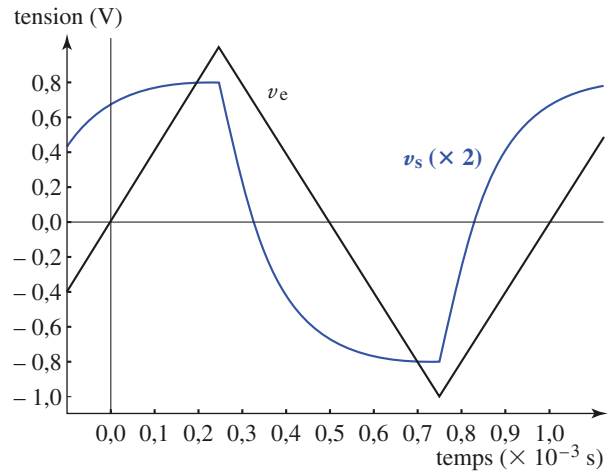
Doc. 35. Réponse du passe-haut de $RC = 10^{-4}$ s à une excitation triangulaire de $T = 10^{-1}$ s.

Si la période du signal est petite devant RC ($T = 10^{-5}$ s), le signal de sortie est un signal triangulaire d'amplitude 1 V (doc. 37).

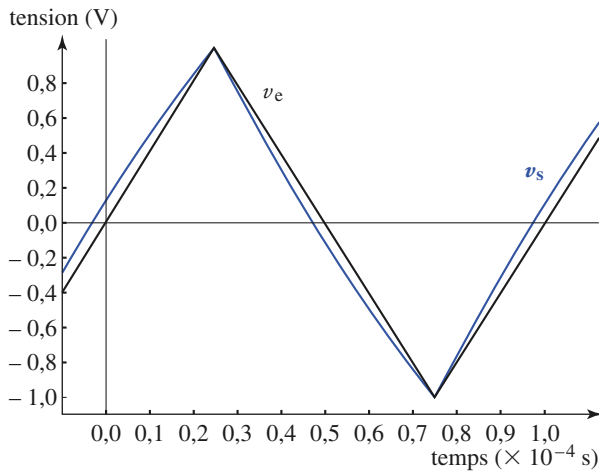
Pour des valeurs intermédiaires de la période, le signal de sortie évolue d'une forme proche d'un créneau à une forme proche d'un triangle (doc. 36 à 39).



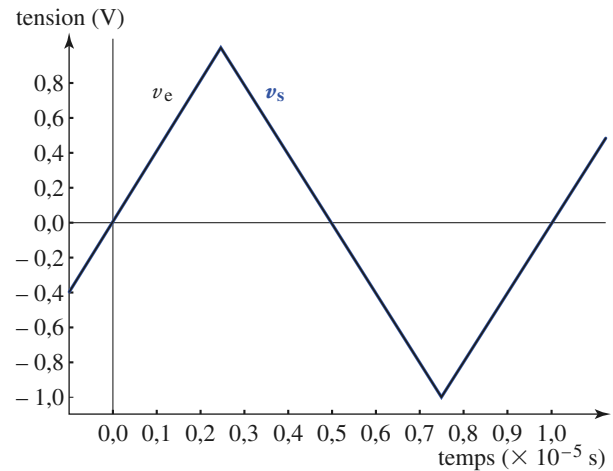
Doc. 36. Réponse du passe-haut de $RC = 10^{-4}$ s à un signal triangulaire de $T = 10^{-2}$ s.



Doc. 37. Réponse du passe-haut de $RC = 10^{-4}$ s à un signal triangulaire de $T = 10^{-3}$ s.



Doc. 38. Réponse du passe-haut de $RC = 10^{-4}$ s à un signal triangulaire de $T = 10^{-4}$ s.



Doc. 39. Réponse du passe-haut de $RC = 10^{-4}$ s à une excitation triangulaire de $T = 10^{-5}$ s.

Interprétons ces résultats à l'aide de la fonction de transfert.

Pour les pulsations faibles devant ω_0 , soit $RC\omega \ll 1$, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme approchée :

$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \approx jRC\omega.$$

Nous retrouvons la fonction de transfert d'un dérivateur. En régime sinusoïdal forcé, la tension de sortie $u_2(t)$ est pratiquement égale à la dérivée de la tension d'entrée $u_1(t)$ si $\omega \gg \omega_0$. Graphiquement, cette condition est réalisée lorsque la courbe de réponse en gain se confond avec son asymptote basse fréquence.

Prenons le cas d'un signal triangulaire v_0 de période T_0 en entrée.

Ce signal peut être considéré comme la superposition de ses harmoniques, signaux sinusoïdaux de périodes $T, \frac{T}{3}, \frac{T}{5}, \frac{T}{7}, \dots, \frac{T}{(2n+1)}$ (le signal ne contient que des harmoniques impairs) d'amplitudes :

$$a, \frac{a}{9}, \frac{a}{25}, \frac{a}{49}, \dots, \frac{a}{(2n+1)^2}, \text{ avec } a = \frac{8v_0}{\pi^2}.$$

Dans le cas où $T = 0,1 \text{ s}$, les harmoniques d'amplitude importante vérifient $T \gg RC$ (ou $RC\omega \ll 1$). Le passe-haut atténue et dérive les harmoniques principaux : le signal de sortie est la dérivée du signal d'entrée.

La pente du signal triangulaire est $\pm \frac{4v_0}{T}$, donc le signal de sortie est un créneau d'amplitude $4RC \frac{v_0}{T}$, soit 4 mV.

Dans le cas où $T = 10^{-5} \text{ s}$, tous les harmoniques vérifient $T \ll RC$ (ou $RC\omega \gg 1$). Le passe-haut transmet sans déformations les harmoniques principaux : le signal de sortie est alors identique au signal d'entrée.

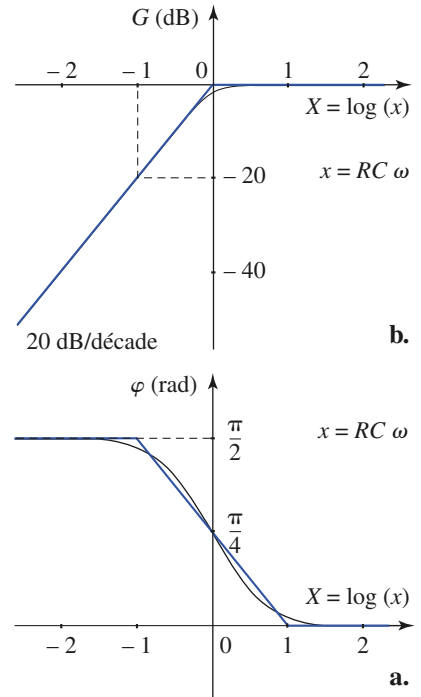
Dans les cas intermédiaires, seule une partie des harmoniques d'amplitude importante vérifie $T \gg RC$ ou $T \ll RC$. Nous ne pouvons rien déduire sur le signal d'entrée.

Nous dirons que ce montage est un *pseudo-dérivateur*, car le signal de sortie est la dérivée du signal d'entrée seulement quand ce dernier est périodique de période grande devant la constante de temps RC .

La courbe de gain est alors confondue avec son asymptote basse fréquence de pente +20 dB/décade et sa réponse en phase a la valeur asymptotique $\frac{\pi}{2}$ (doc. 40).

Nous pouvons généraliser ce résultat.

Un filtre joue le rôle de dérivateur en basse fréquence si son diagramme de Bode présente une asymptote basse fréquence de pente +20 dB/décade et si le déphasage correspondant est de $\frac{\pi}{2}$ (ou $-\frac{\pi}{2}$ s'il y a inversion de signe).

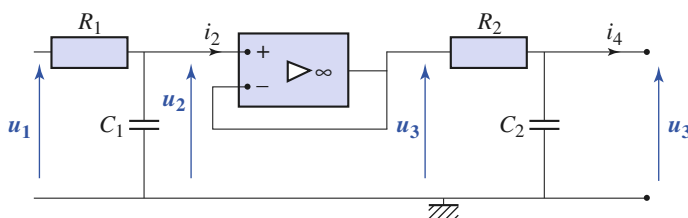


Doc. 40. Diagramme de Bode du passe-haut (R, C) d'ordre un.

6 Produit de deux fonctions de transfert

6.1. Deux filtres en cascade

Étudions le circuit représenté sur le document 41.



◀ Doc. 41. Deux filtres d'ordre un en cascade

Nous reconnaissons deux filtres passe-bas séparés par un suiveur.

Le suiveur permet d'assurer l'égalité $u_2 = u_3$ avec un courant i_2 nul.

Comme le courant i_2 est nul :

$$\frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \text{ avec } \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}.$$

Comme la sortie est ouverte ($i_4 = 0$) :

$$\frac{u_{4m}}{u_{3m}} = \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \text{ avec } \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}.$$

Nous en déduisons la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{4m}}{u_{1m}}$ du système complet :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

soit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2} + j\left(\frac{\omega}{\omega_1} + \frac{\omega}{\omega_2}\right)}.$$

Nous obtenons une fonction de transfert du second ordre.

Plus généralement : la fonction de transfert d'une association de deux filtres en cascade est égale au produit des fonctions de transfert.

Attention !

Nous n'avons pu écrire

$$\frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

que parce que i_2 est nul. Si nous n'avions pas intercalé de suiveur, le second filtre aurait « chargé » le premier et sa fonction de transfert en aurait été modifiée.

6.2. Construction du diagramme de Bode

Poursuivons l'étude de cet exemple (le système est stable).

6.2.1. Diagramme de gain

La relation $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega)$ implique : $H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$ et donc :

$$20 \log [H(\omega)] = 20 \log [H_1(\omega)] + 20 \log [H_2(\omega)]$$

soit :

$$G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB}.$$

Il suffit donc d'additionner les deux courbes de gain. En particulier, nous déterminons très facilement les asymptotes (*doc.* 42).

Le diagramme de gain nous indique que ce système est un filtre passe-bas d'ordre deux.

6.2.2. Diagramme de phase

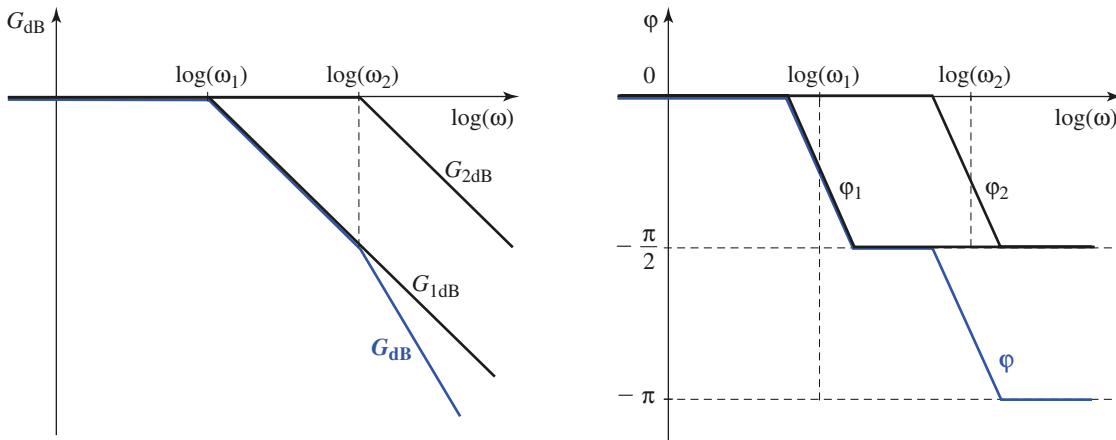
La relation $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega)$ implique également :

$$\arg [\underline{H}(j\omega)] = \arg [\underline{H}_1(j\omega)] + \arg [\underline{H}_2(j\omega)]$$

soit :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Il suffit donc d'additionner les deux courbes de phase, ce qui est particulièrement simple pour le diagramme asymptotique (*doc.* 42).



Doc. 42. Diagrammes asymptotiques pour le gain et pour la phase.

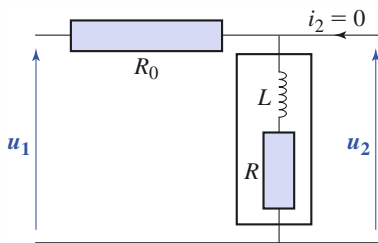
Application 4

1) Déterminer la fonction de transfert du filtre constitué avec une bobine réelle, modélisée par une résistance R en série avec une inductance L (doc. 43).

Définir deux pulsations caractéristiques ω_1 et ω_2 .

2) On suppose $R_0 = 100 R$. Tracer le diagramme de Bode asymptotique. Conclure sur la nature du filtre.

3) Quel est le comportement du filtre pour $R = R_0$?



Doc. 43

1) Nous reconnaissons un diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{R + jL\omega}{R_0 + R + jL\omega}$$

Il s'agit donc d'un **filtre du premier ordre**.

Nous pouvons mettre cette fonction de transfert sous la forme d'un produit :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega)$$

• $\underline{H}_1(j\omega) = A_0 \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)$ avec $A_0 = \frac{R}{R_0 + R}$ et $\omega_1 = \frac{R}{L}$

• $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_2 = \frac{R + R_0}{L}$ et

$\omega_2 > \omega_1$.

2) $\underline{H}_1(j\omega)$ est l'inverse d'une fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre un ; les courbes de réponse en gain et en phase s'en déduisent par un changement de signe.

$\underline{H}_2(j\omega)$ est une fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre un.

Nous traçons les deux diagrammes asymptotiques, puis nous additionnons en chaque point les valeurs du gain et du déphasage.

Si $R_0 = 100 R$, alors $\omega_2 \approx 100\omega_1$ et $\log(\omega_2) = \log(\omega_1) + 2$.

Nous constatons sur ces diagrammes que ce filtre a un comportement passe-haut pour les fréquences telles que $\omega \gg \omega_1$.

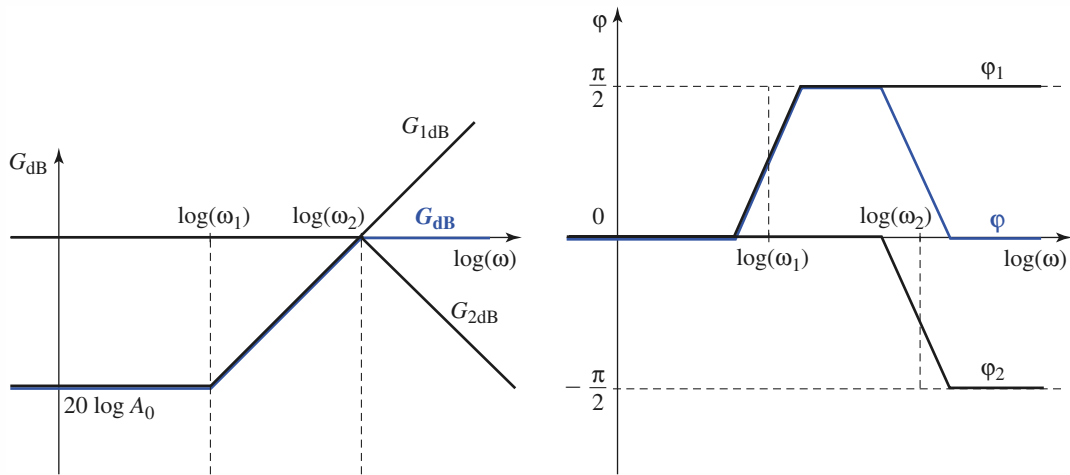
3) Si $R = R_0$, alors ;

$$\log(\omega_2) = \log(\omega_1) + \log(2) = \log(\omega_1) + 0,3$$

• Les deux pulsations caractéristiques sont trop proches pour que la courbe de déphasage atteigne la valeur $\frac{\pi}{2}$.

• Le gain évolue entre -6 dB et 0 dB, l'essentiel de l'évolution se faisant entre ω_1 et ω_2 .

Le filtre n'a pas de fonction clairement définie. Peut-on encore le qualifier de filtre ?



Doc. 44. Diagramme asymptotique pour le gain et pour la phase.

7 Réponse temporelle et réponse fréquentielle

7.1. Définitions

L'analyse temporelle d'un circuit est l'étude de sa réponse effectuée à partir de son équation différentielle et des conditions initiales. L'analyse fréquentielle en est l'étude effectuée à partir de sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.

Les caractères instantanés de la réponse sont dégagés lors de l'analyse temporelle, tandis que les caractères permanents le sont lors de l'analyse fréquentielle.

Ces deux analyses d'un même phénomène physique (la réponse du circuit) sont intimement liées.

7.2. Correspondance entre fonction de transfert et équation différentielle

La fonction de transfert permet de déterminer $u_2(t)$ à partir de $u_1(t)$ en régime harmonique. Elle n'est en fait que la traduction pour le régime harmonique de l'équation différentielle qui relie les deux tensions.

Inversement, nous pouvons en général retrouver cette équation différentielle à partir de la fonction de transfert en remplaçant $j\omega$ par une dérivation par rapport au temps.

Pour un filtre du premier ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A + Bj\omega}{C + Dj\omega} \Rightarrow (C + Dj\omega) \underline{u}_2 = (A + Bj\omega) \underline{u}_1$$

d'où l'équation différentielle :

$$Cu_2 + D \frac{du_2}{dt} = Au_1 + B \frac{du_1}{dt}.$$

Si, à la suite d'une simplification, l'ordre de la fonction de transfert est inférieur à l'ordre de l'équation différentielle, tous les coefficients de l'équation différentielle ne figurent plus dans la fonction de transfert.

Dans ce cas (rare) la fonction de transfert ne permet pas de remonter à l'équation différentielle.

Lorsqu'elles sont du même ordre, l'équation différentielle qui relie u_2 et u_1 et la fonction de transfert contiennent l'une et l'autre toutes les informations concernant le quadripôle. Les deux représentations sont équivalentes et on passe de l'une à l'autre par l'équivalence :

$$j\omega \rightarrow \frac{d}{dt}.$$

Application J

1) Pour le circuit représenté sur le document 45, établir directement l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u(t)$.

2) Calculer la fonction de transfert et retrouver l'équation différentielle.

1) La loi des nœuds en A exprimée en termes de potentiel donne :

$$\frac{e - u}{R} = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$$

d'où : $RC \frac{du}{dt} + 2u(t) = e(t).$

2) Supposons que $e(t)$ soit une tension sinusoïdale de pulsation ω . En régime forcé, nous pouvons calculer la fonction de transfert à partir de la relation du diviseur de tension.

L'impédance équivalente à l'ensemble (R, C) parallèle est :

$$\underline{Z}_e = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_e}{R + \underline{Z}_e} = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{u}{e}.$$

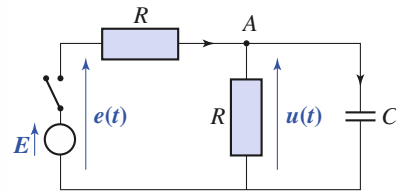
Nous écrivons cette relation sous la forme d'une égalité entre polynômes de $j\omega$:

$$(2 + jRC\omega)u = e.$$

Nous appliquons l'équivalence $j\omega \rightarrow \frac{d}{dt}$:

$$RC \frac{du}{dt} + 2u = e(t).$$

Nous obtenons bien la même équation différentielle.



Doc. 45.

8 Stabilité d'un circuit

8.1. Définition de la stabilité

Dans la théorie des circuits, le concept de stabilité est aussi fondamental que celui de linéarité. Nous conviendrons qu'un système est stable si sa réponse à toute excitation bornée, et quelles que soient les conditions initiales, reste bornée à tout instant.

Étudions la stabilité d'un filtre d'ordre un, de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A + Bj\omega}{C + Dj\omega}.$$

8.2. Condition concernant le régime libre

Le régime libre $u_{20}(t)$ est solution de l'équation homogène :

$$Cu_2 + D \frac{du_2}{dt} = 0.$$

- Si $D = 0$: $u_{20} = 0$. • Si $C = 0$: $\frac{du_{20}}{dt} = 0 \Rightarrow u_{20} = \text{cte}$.
- Si C et D non nuls : $u_{20} = U_0 e^{-\frac{c}{D}t}$.

Cette solution est bornée si C et D sont de même signe.

La condition de stabilité qui résume ces trois cas est donc : $CD \geq 0$.

Plutôt que d'appliquer mécaniquement un tel critère, il est préférable de retenir une formulation plus générale :

Le régime libre d'un système est stable si celui-ci converge vers 0.

Remarque

L'étude du gain d'un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 - jx}$ devrait nous amener à la conclusion qu'il s'agit aussi d'un passe-bas d'ordre un. Mais son régime libre est instable (solution en $e^{+\omega_0 t}$) et il n'est pas utilisable en filtre ; il est donc inutile d'étudier le diagramme de Bode de cette fonction de transfert.

8.3. Condition concernant le régime forcé

Un système est instable en régime forcé s'il est possible de trouver une excitation $u_1(t)$ qui conduit à une réponse forcée $u_2(t)$ divergente.

Pour les systèmes simples du premier ordre il est possible de raisonner directement en trouvant, lorsqu'elle existe, une excitation $u_1(t)$ qui conduit à une réponse $u_2(t)$ non bornée (cf. Application 6)

En régime harmonique, la réponse est non bornée si le module $H(\omega)$ de la fonction de transfert est lui-même non borné. Nous admettrons la généralisation à tous les régimes forcés.

Un système est stable en régime forcé si le module $H(\omega)$ de la fonction de transfert est borné à toutes les fréquences (en particulier pour $\omega \rightarrow 0$ et pour $\omega \rightarrow \infty$).

Application 6

Stabilité d'un intégrateur et d'un dérivateur

1) Étudier la stabilité d'un intégrateur parfait :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega} = -j\frac{\omega_0}{\omega}$$

2) Étudier celle d'un dérivateur parfait :

$$\left(\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0} \right)$$

1) • Le régime libre est stable :

$$\frac{du_{20}}{dt} = 0 \Rightarrow u_{20} = \text{cte}$$

• Le régime forcé est instable. Il suffit d'envisager une tension d'entrée constante $u_1 = U$ pour $t > 0$.

Dans ce cas :

$$u_2 = \frac{-1}{RC} Ut ; \text{ cette solution diverge pour } t \rightarrow \infty$$

Nous pouvons aussi vérifier que $H(\omega) \rightarrow \infty$ pour $\omega \rightarrow 0$, soit $\log(\omega) \rightarrow -\infty$.

2) • Le régime libre est stable : $u_{20} = 0$.

• Le régime forcé est instable. Il suffit d'imaginer une excitation en créneau ; à chaque commutation de u_1 , la dérivée $\frac{du_1}{dt}$ est non bornée et donc u_2 est non bornée, nous pouvons aussi vérifier que $H(\omega) \rightarrow \infty$ pour $\omega \rightarrow \infty$, soit $\log(\omega) \rightarrow +\infty$.

Le régime libre d'un système passif est généralement stable.
Si le régime libre d'un système actif est instable, la sortie diverge et tend vers la saturation des amplificateurs. Cela se produit toujours, en raison des parasites aléatoires qui écartent le système de sa valeur d'équilibre.

9 Composants à capacités commutées

Le champ d'application des composants à capacités commutées est très large et leur utilisation se généralise rapidement. Bien que ces composants ne soient pas au programme, leur étude permet de faire la synthèse de nombreuses questions explicitement au programme.

9.1. Simulation d'une résistance par commutation d'une capacité

Considérons le circuit (*doc. 46*) où (K) est un commutateur dont le chronogramme des états est donné par le *document 47*.

Faisons d'abord l'hypothèse de tensions U_1 et U_2 continues avec $U_1 > U_2$. Lorsque le régime stationnaire est établi, les variations de $u(t)$ sont périodiques, de période T_c entre les valeurs extrémales U_{\min} et U_{\max} (*doc. 48*).

Prenons comme origine des temps, la date d'une commutation de (K) de l'état ② à l'état ①. La capacité C se charge alors sous U_1 à travers R et nous pouvons écrire :

$$i_1 = \frac{U_1 - u(t)}{R} = C \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{U_1}{\tau},$$

avec $\tau = RC$ constante de temps du circuit (R, C). Par intégration, nous obtenons :

$$u(t) = (U_{\min} - U_1) e^{-\frac{t}{\tau}} + U_1 \quad \left(0 \leq t < \frac{T_c}{2}\right).$$

À la date $t = \frac{T_c}{2}$, la tension aux bornes de la capacité est :

$$u\left(\frac{T_c}{2}\right) = U_{\max} = (U_{\min} - U_1) e^{-\frac{T_c}{2\tau}} + U_1.$$

Par un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, nous établissons que :

$$u(t) = (U_{\max} - U_2) e^{-\frac{t - T_c/2}{\tau}} + U_2 \quad \left(\frac{T_c}{2} \leq t < T_c\right).$$

Donc, à la date $t = T_c$ la tension aux bornes du condensateur est :

$$u(T_c) = U_{\min} = (U_{\max} - U_2) e^{-\frac{T_c}{2\tau}} + U_2.$$

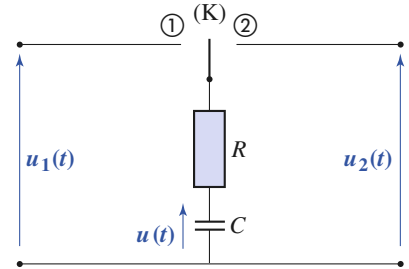
Les valeurs extrémales U_{\min} et U_{\max} sont les solutions du système :

$$-U_{\min} e^{-\frac{T_c}{2\tau}} + U_{\max} = U_1 \left(1 - e^{-\frac{T_c}{2\tau}}\right),$$

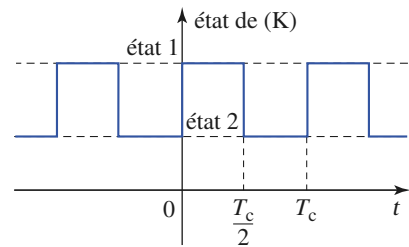
$$U_{\min} - U_{\max} e^{-\frac{T_c}{2\tau}} = U_2 \left(1 - e^{-\frac{T_c}{2\tau}}\right),$$

soit :

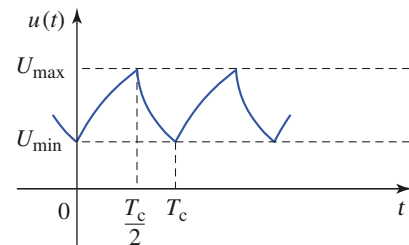
$$U_{\min} = \frac{U_2 + U_1 e^{-\frac{T_c}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T_c}{2\tau}}}, \quad U_{\max} = \frac{U_1 + U_2 e^{-\frac{T_c}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T_c}{2\tau}}}.$$



Doc. 46. Principe de la simulation d'une résistance par commutation d'une capacité.



Doc. 47. Chronogramme des états du commutateur (K).



Doc. 48. Variation de $u(t)$ en régime stationnaire établi.

Ainsi, pendant l'état ①, le condensateur reçoit la charge $q = C(U_{\max} - U_{\min})$ de la part de la source U_1 et restitue la même charge à la source U_2 pendant l'état ②.

L'intensité moyenne du courant se dirigeant de U_1 vers U_2 est :

$$\langle i_1 \rangle = \langle i_2 \rangle = \frac{q}{T_c} = \frac{C}{T_c} \frac{\left(1 - e^{-\frac{T_c}{2\tau}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{T_c}{2\tau}}\right)} (U_1 - U_2).$$

La capacité commutée simule une résistance R_{eq} de valeur :

$$R_{\text{eq}} = \frac{T_c}{C} \frac{\left(1 + e^{-\frac{T_c}{2\tau}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{T_c}{2\tau}}\right)}$$

réglable par la fréquence de commutation $f_c = \frac{1}{T_c}$.

Si la capacité est attaquée en tension (R très faible), alors la constante de temps $\tau = RC$ est très faible devant la période de commutation T_c . L'expression de la résistance équivalente se simplifie en :

$$R_{\text{eq}} = \frac{T_c}{C} = \frac{1}{Cf_c}.$$

Les résultats précédents sont encore valables en régime variable si la période T des signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ est grande devant la période T_c de commutation. Dans ces conditions, pendant la période T_c de commutation les signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ conservent quasiment les mêmes valeurs et les calculs précédents restent valables.

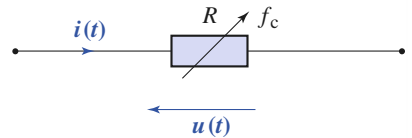
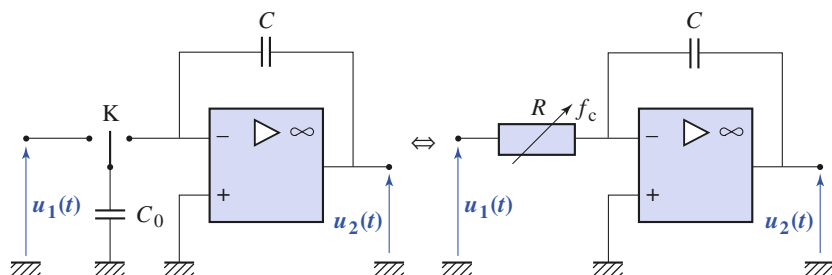
Par la suite, nous supposons toujours satisfaire les inégalités $\tau \ll T_c \ll T$ de telle sorte que les capacités commutées soient utilisables en régime variable avec un comportement équivalent à celui d'une résistance $R_{\text{eq}} = \frac{1}{Cf_c}$.

Dans ces hypothèses, les capacités commutées réalisent des résistances à valeurs contrôlées par une fréquence : nous leur attribuerons le symbole représenté dans le document 49.

9.2. Intégrateur inverseur à capacité commutée

Le principe utilisé pour réaliser un intégrateur inverseur à capacité commutée est donné sur le document 50. La loi des nœuds écrite à l'entrée inverseuse donne :

$$i = \frac{u_1(t)}{R} = C \frac{du_2(t)}{dt} \Rightarrow \frac{du_2(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} u_1(t) = -\frac{C_0}{C} f_c u_1(t).$$

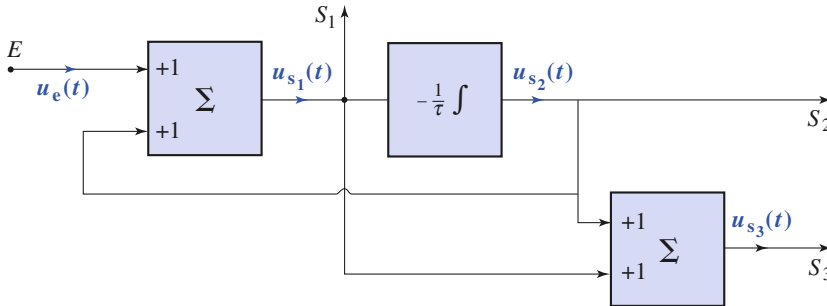


Doc. 49. Représentation d'une résistance à capacité commutée : $u(t) = Ri(t)$.

Doc. 50. Intégrateur inverseur à capacité commutée.

La constante de temps $\tau = \frac{C}{C_0} \frac{1}{f_c}$ de l'intégrateur peut être obtenue exactement, car, d'une part, la fréquence f_c de commutation se contrôle facilement et, d'autre part, dans les circuits intégrés un rapport de deux capacités peut être réalisé avec précision.

9.3. Filtre universel d'ordre un à capacité commutée



Doc. 51. Filtre universel d'ordre un.

La réalisation d'un tel filtre (*doc. 51*) nécessite un intégrateur inverseur et deux sommateurs. En régime harmonique, les signaux élaborés sont :

- à la sortie du premier sommateur : $\underline{u}_{s1m} = \underline{u}_{em} + \underline{u}_{s2m}$;
- à la sortie de l'intégrateur de constante de temps τ : $\underline{u}_{s2m} = -\frac{1}{j\omega\tau} \underline{u}_{s1m}$.

D'où, en éliminant \underline{u}_{s2m} , l'expression de la fonction de transfert d'un *passer-haut d'ordre un* entre l'entrée E et la sortie S_1 :

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{u}_{s1m}}{\underline{u}_{em}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}.$$

Entre l'entrée E et la sortie S_2 , la fonction de transfert réalisée est celle d'un *passer-bas d'ordre un* :

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{u}_{s2m}}{\underline{u}_{em}} = -\frac{1}{1 + j\omega\tau}.$$

À la sortie du second sommateur, nous trouvons le signal :

$$\underline{u}_{s3m} = \underline{u}_{s1m} + \underline{u}_{s2m}$$

ce qui permet d'avoir, entre l'entrée E et la sortie S_3 , la fonction de transfert d'un *déphaseur d'ordre un* :

$$\underline{H}_3 = \frac{\underline{u}_{s3m}}{\underline{u}_{em}} = \frac{-1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau};$$

La pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ des filtres se règle au niveau de l'intégrateur par la fréquence de commutation f_c de sa capacité commutée.

CQFR

- Un quadripôle est un ensemble qui présente deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.
- La fonction de transfert d'un quadripôle ne peut être définie que si le système est stable. Elle est égale au rapport de l'amplitude complexe d'une grandeur de sortie et d'une grandeur d'entrée.

Si nous étudions les tensions : $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}}$.

- Un *filtre* est un quadripôle conçu pour transmettre sélectivement les diverses fréquences de la grandeur d'entrée en régime harmonique.
- Pour un quadripôle linéaire $\underline{H}(j\omega)$ peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)},$$

N et D étant des polynômes à coefficients réels. L'ordre du filtre est égal au degré le plus élevé de ces deux polynômes.

- Par définition, le gain en tension, exprimé en décibels, est :

$$G_{dB} = 20 \log H \quad (\log X \text{ étant le logarithme décimal du nombre } X).$$

- La fonction de transfert d'un filtre intégrateur est de la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{1}{j\omega\tau}$.
- Un filtre est passe-bas d'ordre un si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jx} \text{ avec } A_0 \text{ réel.}$$

Un tel filtre a un comportement intégrateur pour $\omega \gg \omega_0$, lorsque la courbe de gain se confond avec l'asymptote haute fréquence.

- La fonction de transfert d'un filtre dérivateur est de la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = j\tau\omega$.
- Un filtre est passe-haut d'ordre un si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jA_0\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = A_0\frac{jx}{1 + jx} = A_0\frac{1}{1 - \frac{j}{x}} \text{ avec } A_0 \text{ réel.}$$

Un tel filtre a un comportement dérivateur pour $\omega \ll \omega_0$, lorsque la courbe de gain se confond avec l'asymptote basse fréquence.

- Lorsqu'elles sont du même ordre, l'équation différentielle qui relie u_2 et u_1 et la fonction de transfert contiennent l'une et l'autre toutes les informations concernant le quadripôle. Les deux représentations sont équivalentes et on passe de l'une à l'autre par l'équivalence : $j\omega \rightarrow \frac{d}{dt}$.
- Un système est stable si la réponse à toute excitation bornée est bornée.

Le régime libre d'un système est stable si celui-ci converge vers 0.

Le régime forcé est stable si le module $H(\omega)$ de la fonction de transfert est borné à toutes les fréquences, (en particulier pour $\omega \rightarrow 0$ et pour $\omega \rightarrow \infty$).

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Comment calculer une fonction de transfert et la mettre sous une forme canonique ?
- ✓ Qu'est-ce qu'un passe-bas, passe-haut, intégrateur et dérivateur ?
- ✓ Pouvez-vous vérifier les fonctions de transfert correspondant à des comportements établis ?
- ✓ Comment tracer les diagrammes de Bode asymptotiques pour un filtre passe-haut ou passe bas ? On se souviendra en particulier que les asymptotes de la courbe de gain ont une pente nulle ou de ± 20 dB par décade, et qu'elles se coupent pour la fréquence caractéristique.
- ✓ Quelle est l'équation différentielle reliant $u_2(t)$ à $u_1(t)$ de la fonction de transfert ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega}}$ est la fonction de transfert

d'un filtre passe-bas d'ordre un.

- Vrai Faux

2. En associant en cascade un intégrateur et un filtre passe-haut d'ordre un, on réalise un filtre passe-bas d'ordre un.

- Vrai Faux

3. Un filtre passe-haut d'ordre un a un comportement intégrateur pour $\omega \ll \omega_0$.

- Vrai Faux

4. Soit $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{1}{2(1 + jRC\omega)}$

et $u_1(t) = u_{1m} \cos(\omega t)$:

- a. Si $\omega = \frac{100}{RC}$, alors $u_2(t) \approx \frac{u_{1m}}{200} \sin(\omega t)$.

- b. Si $\omega = \frac{1}{RC}$, alors $u_2(t) = \frac{u_{1m}}{2\sqrt{2}} \cos(\omega t)$.

- c. Si $\omega = \frac{1}{RC}$,

alors $u_2(t) = \frac{u_{1m}}{4} (\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$.

- d. Si $\omega = \frac{1}{100RC}$, alors $u_2(t) = \frac{u_{1m}}{2} \cos(\omega t)$.

- e. Si $\omega = \frac{1}{100RC}$, alors $u_2(t) = \frac{u_{1m}}{2} \sin(\omega t)$.

5. Soit $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{jRC\omega}{2(1 + jRC\omega)}$:

- a. Si $u_1(t)$ est une fonction créneau de période $T \ll \frac{1}{RC}$, alors $u_2(t)$ est une fonction triangle de même période.

- b. Si $u_1(t)$ est une fonction triangle de période $T \gg \frac{1}{RC}$, alors $u_2(t)$ est une fonction créneau de même période.

► Solution, page 220.

Exercices

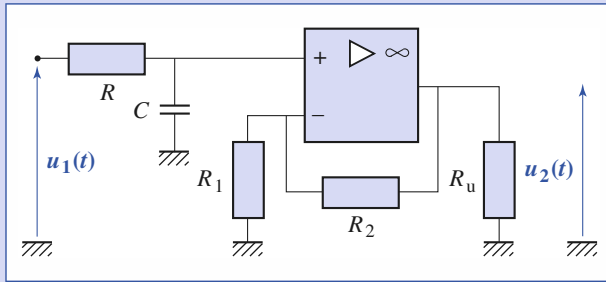
1 Passe-bas actif d'ordre un

On associe, comme indiqué sur le schéma, un filtre passe-bas passif (R, C) et un amplificateur opérationnel monté en amplificateur non inverseur.

10) Déterminer la fonction de transfert \underline{H} du filtre actif réalisé. En déduire sa pulsation de coupure ω_0 à 3 dB et son gain en bande passante G_0 .

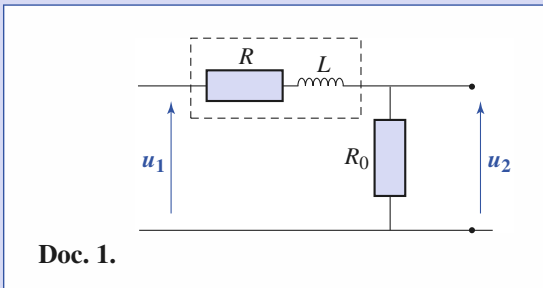
11) Donner son diagramme de Bode.

12) Proposer les valeurs des composants R, C, R_1 et R_2 pour que le filtre ait une fréquence de coupure (à 3 dB) $f_0 = 1$ kHz et un gain maximal en bande passante $G_0 = 3$ dB.



2 Filtre passif

1) Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{m2}}{u_{m1}}$ du filtre représenté sur le document 1.



Doc. 1.

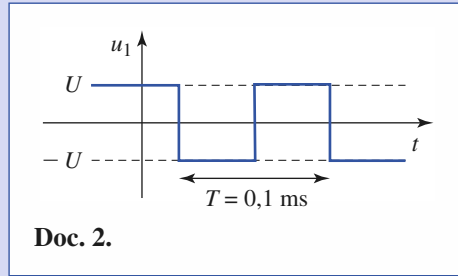
L et R représentent la résistance et l'inductance d'une bobine réelle.

Qualifier ce filtre et déterminer sa pulsation caractéristique.

2) On donne $R = R_0 = 50 \Omega$ et $L = 10$ mH.

Donner une expression approchée de $u_2(t)$ pour :

- $u_1(t) = U \cos(2\pi ft)$ avec $f = 10$ kHz ;
- $u_1(t) = U \cos(2\pi ft)$ avec $f = 100$ Hz ;
- $u_1(t)$ fonction « créneau » représentée sur le document 2, de période $T = 0,1$ ms.



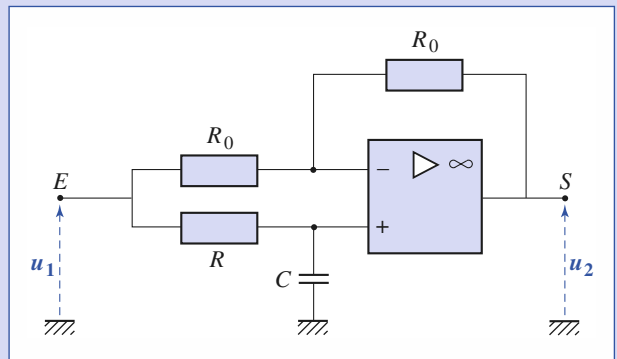
Doc. 2.

3 Déphaseur d'ordre un à amplificateur opérationnel

1) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}}$ du circuit représenté et donner son diagramme de Bode.

2) En déduire l'équation différentielle reliant u_2 à u_1 . Le signal d'entrée est un échelon de tension ($t < 0, u_1 = 0$; $t > 0, u_1 = U_0 > 0$) ; déterminer $u_2(t)$.

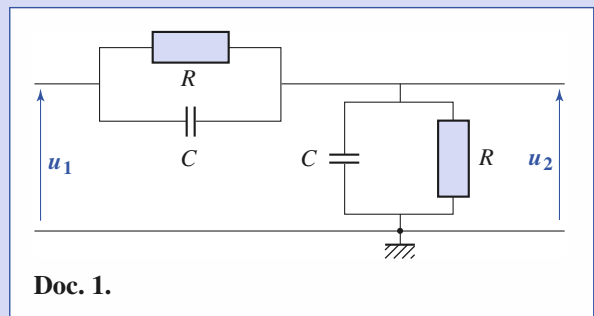
On admettra que l'amplificateur fonctionne au régime linéaire (comportement stable).



4 Double (R, C) série

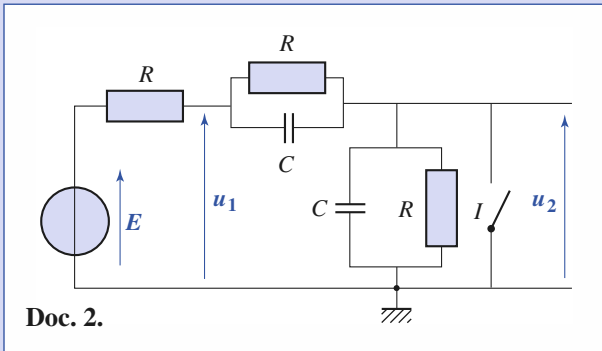
Considérons le circuit représenté par le document 1.

Posons $\frac{1}{\underline{Z}(j\omega)} = \frac{1}{R} + jC\omega$.



Doc. 1.

- 1) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}}$.
- 2) En utilisant l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ établir la relation entre l'excitation $u_1(t)$ et la réponse $u_2(t)$.
- 3) Établir directement l'équation différentielle du circuit.
- 4) Considérons le montage (doc. 2).

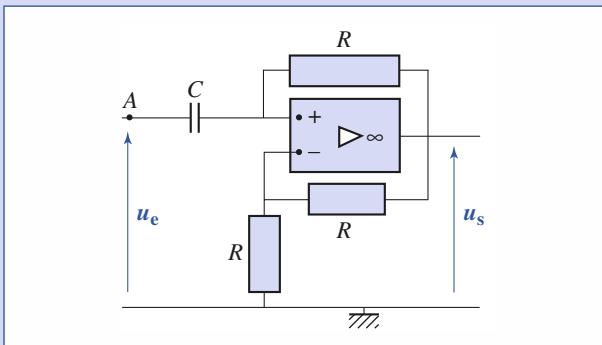


Doc. 2.

L'interrupteur (I) est fermé pour $t < 0$ et ouvert pour $t > 0$. Montrer que la relation entre $u_1(t)$ et $u_2(t)$, établie dans la question 2), n'est pas vérifiée.

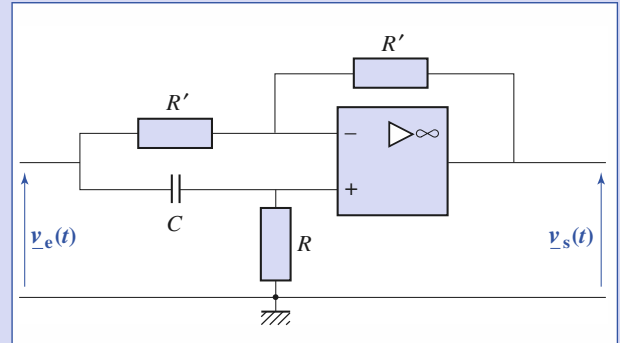
5 Stabilité d'un système

- 1) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{sm}}{u_{em}}$ du circuit représenté sur la figure ci-dessous, en supposant que l'amplificateur idéal est en régime linéaire.
- 2) On débranche la source et la borne A est reliée à la masse. Étudier la stabilité de ce système. En déduire la valeur finale de u_s .
- 3) Commenter le résultat établi dans la première question.



6 Retard de groupe

On considère le montage suivant : $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$.

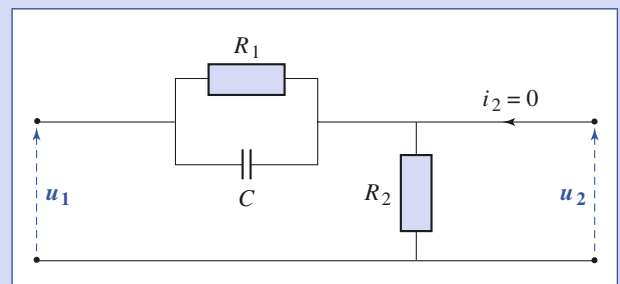


- 1) Déterminer sa fonction de transfert. Quel est son gain ?
- 2) Pourquoi un signal non sinusoïdal est-il déformé par ce filtre ?
- 3) Le signal d'entrée du filtre est : $e(t) = e_0 (\sin(0,95 \omega_0 t) + \sin(1,05 \omega_0 t))$, avec $RC\omega_0 = 1$. Tracer l'allure de $e(t)$ et de $s(t)$. Quel retard présente le déphasage entre les deux enveloppes ? Retrouver ce résultat à partir du retard de groupe $\tau = -\frac{d\varphi}{d\omega}$.

7 Circuit correcteur par avance de phase

- 1) Déterminer la fonction de transfert \underline{H} du circuit représenté, ci-dessous lorsqu'il est utilisé en circuit ouvert ($i_2 = 0$).
- 2) Tracer son diagramme asymptotique de Bode pour :

$$k = \frac{R_1}{R_2} = 4.$$



Corrigés

Solution du tac au tac, page 217.

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ;
4. Vrai : a, c, d Faux : b, e 5. Vrai : b Faux : a

1

1) L'A.O., soumis à une rétroaction négative, fonctionne en régime linéaire ; le système est stable. Il en résulte que $u_+ = u_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2$, d'où

la fonction de transfert de l'amplificateur $H_{-1} = \frac{u_2}{u_+} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = K > 1$.

Par ailleurs, la fonction de transfert du filtre passe-bas passif (R, C) qui fonctionne en circuit ouvert ($I_+ = 0$) est $H_{PB1} = \frac{u_+}{u_1} = \frac{1}{1 + jx}$, en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

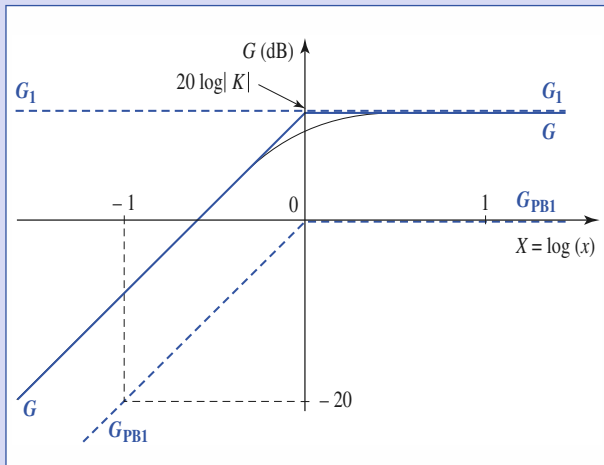
En conséquence, la fonction de transfert du filtre actif s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{u_2}{u_1} = H_{-1} H_{PB1} = \frac{K}{1 + jx}$$

On reconnaît l'expression générale de la fonction de transfert d'un passe-bas d'ordre un, de pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et de gain maximal en bande passante :

$$G_0 = 20 \log(K) > 0.$$

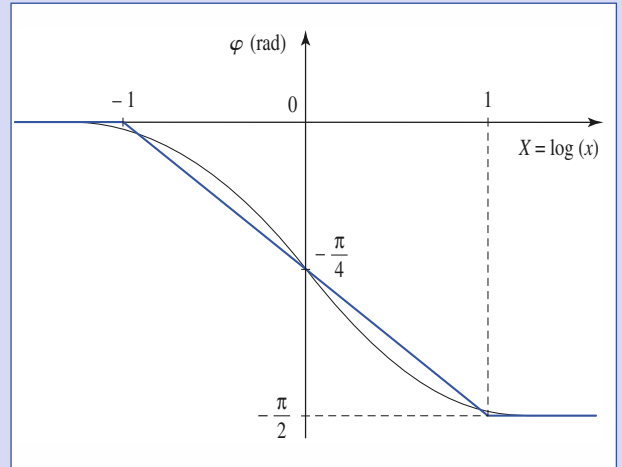
On signale une propriété importante des filtres actifs : leurs caractéristiques de filtrage ω_0 et d'amplification G_0 sont indépendantes de l'utilisation u_u . Les filtres actifs peuvent être réalisés isolément, puis intégrés dans des circuits complexes sans que leurs caractéristiques en soient affectées. C'est une qualité très appréciée dans la pratique et que ne possèdent pas les filtres passifs.



2) Le gain est $G = 20 \log \underline{H} = 20 \log \left(\frac{H_{-1}}{H_{PB1}} \right) = G_1 + G_{PB1}$. Donc la courbe de réponse en gain s'obtient en additionnant le gain constant $G_1 = 20 \log(K)$ à celui d'un passe-bas passif d'ordre un :

$$G_{PB1}(x) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Le déphasage $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{H_{-1}}{H_{PB1}}\right) = 0 + \varphi_{PB1}$ est celui d'un passe-bas passif d'ordre un.



3) Pour réaliser un tel filtre on dispose des relations suivantes :

- $\omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow RC = \frac{1}{2\pi f_0} = 159 \mu\text{s}$. On choisit arbitrairement C , soit $C = 0,1 \mu\text{F}$. On en déduit $R = 1,59 \text{ k}\Omega$;
- $G_0 = 20 \log(K)$, d'où $K = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \sqrt{2} \Rightarrow R_2 = (K - 1) R_1 = 0,41 R_1$.

On choisit arbitrairement R_1 , soit $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$. On en déduit $R_2 = 4,1 \text{ k}\Omega$.

Les réglages des caractéristiques de filtrage et d'amplification se réalisent séparément, donc facilement.

2

1) La relation du diviseur de tension nous donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_0}{R + R_0 + jL\omega} = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } A_0 = \frac{R_0}{R + R_0} \text{ et } \omega_0 = \frac{R + R_0}{L}$$

On reconnaît un **filtre passe-bas d'ordre un**.

2) $A_0 = \frac{1}{2}$ et $\omega_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$ soit $f_0 = 1,59 \text{ kHz}$.

• $f = 10 \text{ kHz}$: $\omega \gg \omega_0$ et le filtre est pratiquement un intégrateur ;

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{\omega_0 A_0}{j\omega}$$

$$H(\omega) \approx \frac{\omega_0 A_0}{\omega} = 0,08 \text{ et } \varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$$

d'où : $u_2(t) \approx 0,08 U \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ ou : $u_2(t) \approx 0,08 U \sin \omega t$.

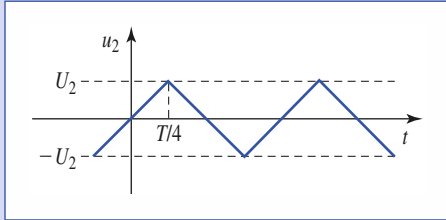
• $f = 100 \text{ Hz}$: $\omega \ll \omega_0$. On est dans le domaine de l'asymptote basse fréquence :

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{2} \text{ d'où : } u_2(t) \approx 0,50 U \cos \omega t.$$

• $f = 10 \text{ kHz}$: $\omega \gg \omega_0$ et le filtre est pratiquement un intégrateur pour tous les harmoniques de la fonction u_1 ;

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{m2}}{u_{m1}} \approx \frac{\omega_0 A_0}{j\omega} \text{ est équivalent à : } \frac{du_2}{dt} = \omega_0 A_0 u_1.$$

$u_2(t)$ est une fonction en triangle de pente $\pm \omega_0 A_0 U$ et donc d'amplitude $U_2 = \omega_0 A_0 U \frac{T}{4}$.



3 1) On note par \underline{u}_m le potentiel commun des entrées E_+ et E_- et on applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$$\frac{u_{1m} - \underline{u}_m}{R_0} + \frac{u_{2m} - \underline{u}_m}{R_0}, \text{ soit } \underline{u}_m = \frac{u_{1m} + u_{2m}}{2}.$$

On applique, de même, la loi des nœuds à l'entrée non inverseuse :

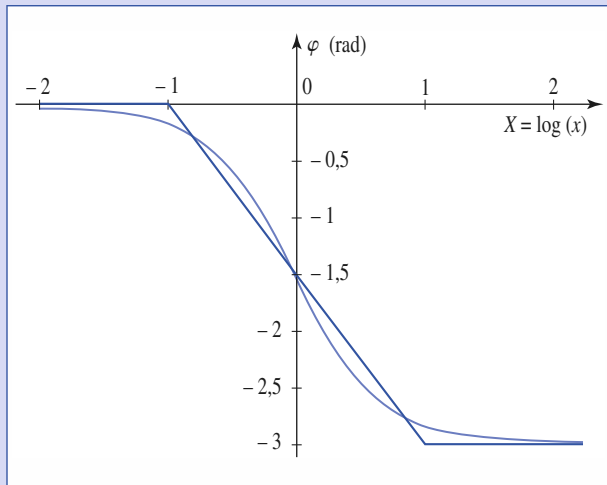
$$\frac{u_{1m} - \underline{u}_m}{R_0} + jC\omega \underline{u}_m = 0.$$

En éliminant \underline{u}_m entre les deux relations précédentes, il vient $\underline{H} = \frac{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$.

Le circuit ne présente aucun phénomène de filtrage ($|\underline{H}| = 1$) ; en revanche, le déphasage φ de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est fonction de la fréquence $\varphi = -2 \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$. Le circuit réalisé est un déphaseur d'ordre un.

Remarque

Même si son gain est nul, ce montage déforme les signaux non sinusoïdaux, car le déphasage qu'il introduit n'est pas une fonction linéaire de ω .



2 La fonction de transfert donne $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)u_{2m} = \left(1 - j\frac{\omega}{\omega_0}\right)u_{1m}$, soit en

utilisant l'équivalence entre $j\omega \underline{u}$ et $\frac{du}{dt}$: $u_2 + \frac{1}{\omega_0} \frac{du_2}{dt} = u_1 - \frac{1}{\omega_0} \frac{du_1}{dt}$.

$u_2(t) = 0$ est la solution de cette équation pour $t < 0$.

Pour $t > 0$, cette équation différentielle donne $u_2 + \frac{1}{\omega_0} \frac{du_2}{dt} = U_0$ dont la solution est $u_2(t) = U_0 + A \exp(-\omega_0 t)$, où A est une constante à déterminer en fonction des conditions initiales.

La grandeur continue est la tension u aux bornes du condensateur (continuité de la charge du condensateur).

À l'instant 0^- , cette tension u est nulle, elle est donc nulle à 0^+ . La loi des nœuds appliquée à l'instant 0^+ à l'entrée inverseuse donne alors :

$$\frac{u_1(0^+)}{R_0} + \frac{u_2(0^+)}{R_0} = 0, \text{ donc } u_2(0^+) = -u_1(0^+) = -U_0.$$

D'où $u_2(t) = U_0(1 - 2 \exp(-\omega_0 t))$. On vérifie bien la remarque de **1**) sur la déformation des signaux, puisque $u_2(t)$ n'est pas un échelon de tension.

4 1) La fonction de transfert s'obtient en appliquant la formule du pont diviseur :

$$\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{\underline{Z}(j\omega)}{2\underline{Z}(j\omega)} = \frac{1}{2}.$$

Les polynômes $N(j\omega) = \underline{Z}(j\omega)$ et $D(j\omega) = 2\underline{Z}(j\omega)$ ne sont pas premiers entre eux.

2) Considérant la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{2}$, nous serions tentés de conclure qu'en toutes circonstances la réponse $u_2(t)$ est liée à l'excitation $u_1(t)$ par la relation $u_2(t) = \frac{1}{2} u_1(t)$.

3) Établissons directement l'équation différentielle du circuit. L'équation vérifiée par l'intensité dans le circuit est :

$$i = \frac{u_2}{R} + C \frac{du_2}{dt} = \frac{u_1 - u_2}{R} + C \frac{d(u_1 - u_2)}{dt},$$

donc :
$$\frac{u_1}{R} + C \frac{du_1}{dt} = 2\left(\frac{u_2}{R} + C \frac{du_2}{dt}\right),$$

soit :
$$\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{\tau}\right), \text{ avec } \tau = RC.$$

Ce qui est une équation différentielle d'ordre un, la même que celle que nous aurions obtenue en utilisant la fonction de transfert avant sa simplification.

4) À $t < 0$, la tension u_2 est nulle. De plus, le premier condensateur a eu le temps de se charger et le courant i circule dans les deux résistances R , donc $u_1 = \frac{E}{2}$.

À $t > 0$, nous avons :

$$i = \frac{E - u_1}{R} = C \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} + \frac{u_1 - u_2}{R} = C \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R}.$$

Nous en déduisons :
$$2E = C \frac{du_1}{dt} + 3u_1.$$

Compte tenu des conditions initiales, il vient : $u_1(t > 0) = E\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} e^{-\frac{3t}{C}}\right)$.

La tension u_2 satisfait alors : $C \frac{du_2}{dt} + u_2 = E\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{-\frac{3t}{C}}\right)$.

Nous pouvons former la solution de cette équation par superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre, de la forme :

Corrigés

$u_2^{(1)} = Ee^{-\frac{t}{C}}$, et d'une solution particulière de l'équation avec second membre, qu'il est naturel de chercher sous la forme $u_2^{(2)} = \frac{E}{3} + Be^{-\frac{3t}{C}}$.

En reportant cette forme dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$B = -\frac{E}{12}, \text{ soit } u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} = \frac{E}{3} - \frac{E}{12}e^{-\frac{3t}{C}} + Ae^{-\frac{t}{C}}.$$

La condition initiale $u_2(0) = 0$ nous donne finalement :

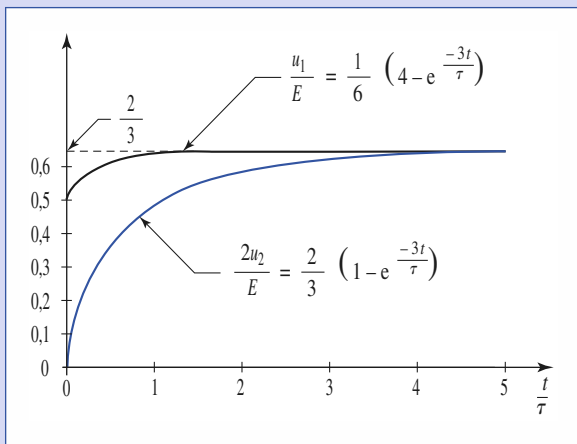
$$u_2(t > 0) = E\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}e^{-\frac{3t}{C}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{C}}\right).$$

Nous constatons que :

$$u_1(t) = E\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-\frac{3t}{C}}\right) \neq 2u_2(t) = E\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-\frac{3t}{C}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{C}}\right).$$

Les graphes de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ nous permettent d'observer ce phénomène. Lorsque le régime permanent est atteint, nous retrouvons tout de même

$$u_1(t \rightarrow \infty) = \frac{2E}{3} = 2u_2(t \rightarrow \infty).$$



5

1) L'A.O. étant idéal et en régime linéaire : $u_+ = u_- = \frac{1}{2} u_s$ (diviseur de tension).

On applique la loi des nœuds (ou relation de Millman) à l'entrée non inverseuse :

$$u_+ = \frac{G u_s + jC\omega u_e}{G + jC\omega}, \text{ avec } G = \frac{1}{R}.$$

On en déduit : $H(j\omega) = \frac{-2jRC\omega}{1 - jRC\omega}$; on prévoit un comportement instable du montage (cf. § 8).

2) L'équation différentielle se déduit de la fonction de transfert :

$$(1 - jRC\omega) u_s = -2jRC\omega u_e, \text{ d'où : } RC \frac{du_s}{dt} - u_s = 2RC \frac{du_e}{dt}.$$

Mettre la borne \underline{A} à la masse revient à faire $u_e(t) = 0$ et donc $\frac{du_e}{dt} = 0$.

La solution de l'équation différentielle est donc : $u_s(t) = Ue^{\frac{t}{RC}}$.

La moindre perturbation est amplifiée et $|u_s|$ augmente jusqu'à la saturation de l'amplificateur. L'état final est donc :

$$u_s = \pm U_{\text{sat}}.$$

3) Ce montage est en fait instable : même sans excitation en entrée, la sortie arrive à évoluer vers un état saturé de l'amplificateur opérationnel. Dans ces conditions, son fonctionnement linéaire n'est pas envisageable, et la fonction de transfert obtenue à la première question n'a pas de sens : l'alimentation du montage par une tension sinusoïdale $u_e(t)$ ne permettra pas d'observer en sortie un signal $u_s(t)$, car le régime sinusoïdal forcé ne peut s'établir (le régime transitoire ne tend pas vers zéro).

6

1) On applique la formule du pont diviseur à l'entrée non inverseuse

$$v_{+m} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} v_{em} \text{ et le théorème de Millman à l'entrée inverseuse}$$

$$v_{-m} = \frac{v_{em} + v_{sm}}{2}.$$

En régime linéaire de l'amplificateur opérationnel, $v_{+m} = v_{-m}$.

D'où $\frac{v_{sm}}{v_{em}} = H(j\omega) = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$. Le module de la fonction de transfert

est de 1, d'où le gain $G = 0$ dB.

2) Le montage introduit un déphasage $\varphi = \pi - 2 \arctan(RC\omega)$ qui n'est pas une fonction linéaire de ω , donc un signal non sinusoïdal est déformé par ce filtre (cf. § 4).

3) Pour $\omega_1 = 0,95 \omega_0$, $\varphi_1 = 1,62$ rad et pour $\omega_2 = 1,05 \omega_0$, $\varphi_2 = 1,52$ rad.

En utilisant les formules de trigonométrie sur les sommes,

$$e(t) = 2 e_0 \sin(\omega_0 t) \cos(0,05 \omega_0 t),$$

le signal peut être interprété comme un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 modulé en amplitude à la pulsation $0,05 \omega_0$.

Le signal de sortie est, par superposition des réponses :

$$s(t) = e_0 (\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2)),$$

soit encore :

$$s(t) = 2 e_0 \sin(\omega_0 t + 1,57) \cos(0,05 \omega_0 t - 0,05).$$

C'est un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 déphasé de $\frac{\pi}{2} (1,57)$ par rapport au signal d'entrée, modulé en amplitude à la pulsation $0,05 \omega_0$. La modulation

présente un retard de $\frac{0,05}{0,05 \omega_0} = 1$ ms par rapport à la modulation en entrée.

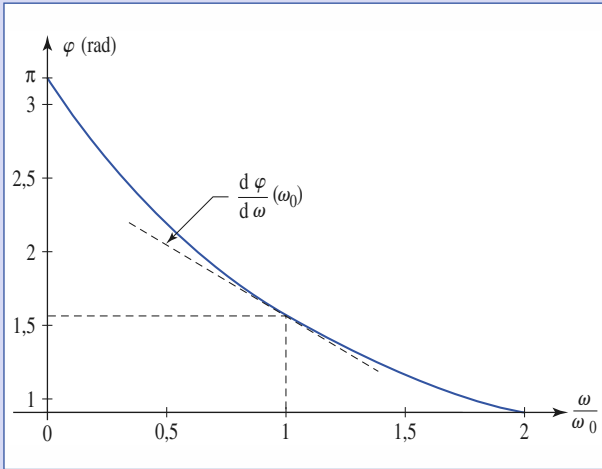
On peut écrire pour $\omega = 0,95 \omega_0$, $\varphi \approx \frac{\pi}{2} - 0,05 \frac{d\varphi}{d\omega}(\omega_0)$ et pour $\omega = 1,05 \omega_0$,

$\varphi \approx \frac{\pi}{2} + 0,05 \frac{d\varphi}{d\omega}(\omega_0)$. Alors :

$$s(t) = 2 e_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(0,05 \omega_0 \left(t - \frac{d\varphi}{d\omega}(\omega_0)\right)\right).$$

Le retard de phase est donc identique au retard de modulation calculé.

Au voisinage de ω_0 , la courbe de déphasage peut être assimilée à sa tangente.



7 1) En sortie ouverte, le circuit réalise un diviseur de tension.

$$H = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{R_2}{Z_{R_1//C} + R_2} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{1 + jR_1C\omega} + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + jR_1C\omega}{1 + j(R_1//R_2)C\omega}$$

On pose $k = \frac{R_1}{R_2}$ et $\omega_1 = \frac{1}{R_1C}$, la fonction de transfert prend la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{k+1} \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}}{1 + \frac{j\omega}{(k+1)\omega_1}}$$

2) On introduit la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_1}$, la fonction de transfert devient :

$$\underline{H} = \frac{1}{k+1} \frac{1 + jx}{1 + j\frac{x}{k+1}}$$

Le gain du circuit est : $G = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{(k+1) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{k+1}\right)^2}}$

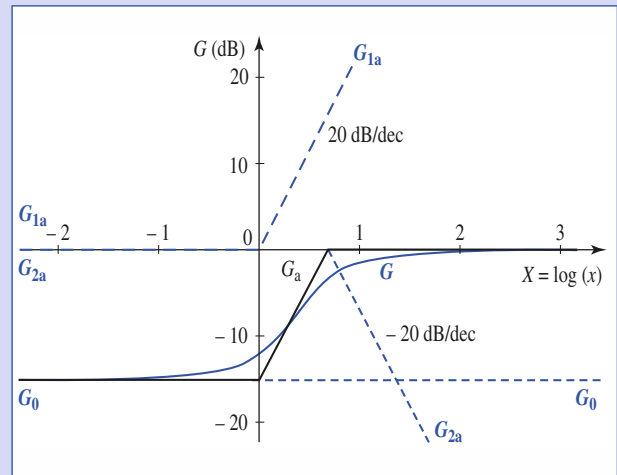
et sa courbe de réponse en gain est donnée doc. 1. Pour tracer le diagramme asymptotique G_a de la courbe de réponse en gain, on trace les diagrammes asymptotiques G_{1a} et G_{2a} respectivement de $G_1 = 10 \log (1 + x^2)$ et de

$G_2 = -10 \log \left(1 + \left(\frac{x}{k+1} \right)^2 \right)$, puis le graphe de la somme $G_0 + G_{1a} + G_{2a}$

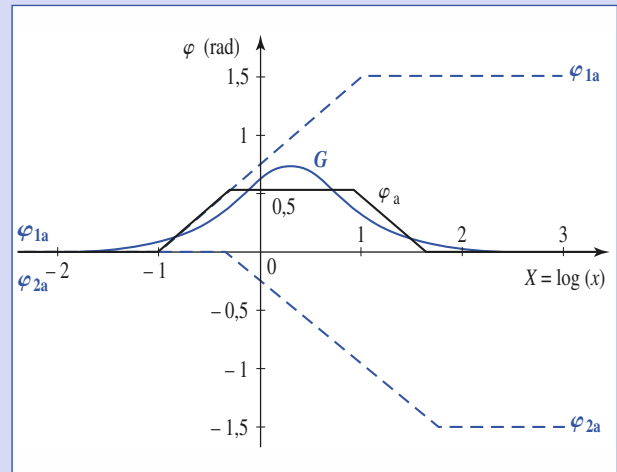
avec $G_0 = -20 \log (k + 1)$, comme il est indiqué doc. 1. La courbe de réponse en phase, donnée doc. 2, est le graphe de :

$$\varphi = \arg (\underline{H}) = \arctan (x) - \arctan \left(\frac{x}{k+1} \right)$$

Pour avoir le diagramme asymptotique φ_a de la réponse en phase, on trace les diagrammes asymptotiques φ_{1a} et φ_{2a} respectivement de $\varphi_1 = \arctan (x)$ et de $\varphi_2 = -\arctan \left(\frac{x}{k+1} \right)$, puis le graphe de la somme $\varphi_{1a} + \varphi_{2a}$, comme cela apparaît sur le doc. 2



Doc. 1.



Doc. 2

Filtres du deuxième ordre

9

Introduction

Parmi les filtres du deuxième ordre, on retrouve des fonctions de transfert passe-bas et passe-haut, mais aussi d'autres types de filtres.

Le « passe-bande » peut permettre d'isoler pratiquement une composante sinusoïdale d'un signal périodique complexe.

O B J E C T I F S

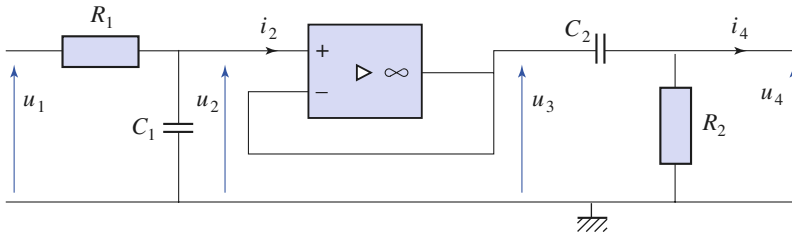
- Classer les filtres du deuxième ordre.
- Identifier les grandeurs caractéristiques d'un filtre.
- Observer l'action d'un filtre sur un signal périodique.

P R É R E Q U I S

- Fonction de transfert.
- Diagramme de Bode.
- Stabilité d'un circuit.
- Amplificateur opérationnel idéal.

Exemple de filtre d'ordre deux

Étudions le circuit représenté sur le document 1.



Doc. 1. Deux filtres d'ordre un en cascade.

Nous reconnaissons un filtre passe-bas et un filtre passe-haut d'ordre un séparés par un suiveur.

Le suiveur permet d'assurer l'égalité $u_2 = u_3$ avec un courant i_2 nul.

Comme le courant i_2 est nul :

$$\frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$$

Comme la sortie est ouverte ($i_4 = 0$) :

$$\frac{u_{4m}}{u_{3m}} = \underline{H}_2(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \quad \text{avec} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

Nous en déduisons la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{4m}}{u_{1m}}$ du système complet :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_2}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Nous obtenons une fonction de transfert d'ordre deux. Le tracé asymptotique de la courbe de gain se déduit de ceux de chaque filtre d'ordre un (doc. 2).

Nous sommes donc en présence d'un filtre qui élimine à la fois les hautes et les basses fréquences. Il s'agit d'un type de filtre, appelé *passse-bande*, que nous n'avons pas rencontré lors de notre étude des fonctions de transfert d'ordre un.

Nous pourrions rencontrer des réalisations variées de filtre d'ordre deux. L'association de deux filtres d'ordre un semble naturelle, mais ne permet pas de réaliser tous les transferts d'ordre deux. En utilisant un circuit de type (R, L, C) , dont le facteur de qualité est ajustable, nous accéderons à une présentation plus générale de ces filtres.

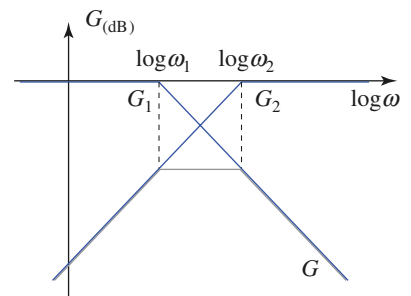
Remarque : le circuit (R, L, C) est facile à aborder mais assez peu utilisé en pratique. Dans les circuits électriques, on préfère généralement employer des résistances et capacités, composants peu encombrants et bon marché, plutôt que des bobines, qui peuvent éventuellement être simulées.

► Pour s'entraîner : ex. 2.

Nous n'avons pu écrire :

$$\frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

que parce que i_2 est nul. Si nous n'avions pas intercalé de suiveur, le second filtre aurait « chargé » le premier et sa fonction de transfert en aurait été modifiée.



Doc. 2. Tracé asymptotique de la courbe de gain.

2 Filtre passe-bas d'ordre deux

La réponse en charge du circuit (R, L, C) série à une excitation sinusoïdale en tension a été étudiée au chapitre 6. Reprenons celle-ci en utilisant les impédances complexes des composants, et interprétons-la en terme de filtrage.

2.1. Exemple de fonction de transfert passe-bas d'ordre deux

Le filtre étudié est représenté sur le document 3. Fonctionnant à vide ($i_2(t) = 0$), il réalise un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + RCj\omega + LC(j\omega)^2}$$

Notons par $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre, par $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite ($X = \log(x)$) et par $2\sigma = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q}$ l'inverse du facteur de qualité du circuit (R, L, C) série.

Avec ces notations, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + 2\sigma(jx) + (jx)^2} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

2.2. Courbe de réponse en gain

Le gain du filtre est :

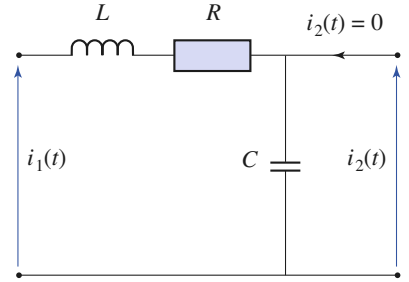
$$\begin{aligned} G(x) &= 20 \log \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 2\sigma^2 x^2}} \\ &= -10 \log [(1-x^2)^2 + 4\sigma^2 x^2]. \end{aligned}$$

2.2.1. Asymptote basse fréquence

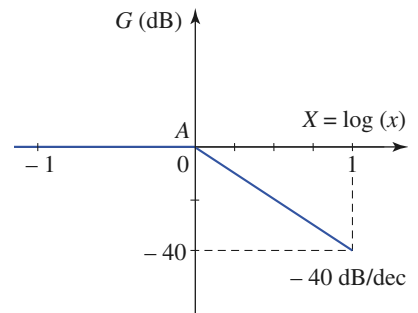
En très basse fréquence, l'inductance L se comporte comme un interrupteur fermé et la capacité C comme un interrupteur ouvert. Le circuit étant ouvert en sortie, aucun courant ne traverse la résistance R , donc $u_{1m} = u_{2m}$ et $G = 0$. Ce résultat est confirmé par le calcul. Quand $X \rightarrow -\infty$ ($x \ll 1$), la valeur asymptotique du gain est $G = 10 \log(1) = 0$ (doc. 4). La courbe de réponse en gain admet, en basse fréquence, une asymptote horizontale à $G = 0$ dB.

2.2.2. Asymptote haute fréquence

En haute fréquence, la capacité se comporte comme un interrupteur fermé, donc $u_{2m} = 0$, alors que $u_{1m} \neq 0$. Donc $G(x) = 20 \log \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = -\infty$. Déterminons l'équation de l'asymptote. Lorsque $x \gg 1$, la valeur asymptotique du gain est $G = -10 \log(x^4) = -40 \log(x) = -40X$. La courbe de réponse en gain admet, en haute fréquence, une asymptote passant par l'origine de pente -40 dB/décade (doc. 4).



Doc. 3. Filtre (R, L, C) passe-bas d'ordre deux.



Doc. 4. Diagramme asymptotique de la réponse en gain d'un filtre passe-bas d'ordre deux : pente -40 dB/décade.

2.2.3. Diagramme asymptotique

Le diagramme asymptotique est la réunion des deux asymptotes basses fréquences et hautes fréquences limitées à leur point de concours. Évaluons la qualité de cette représentation asymptotique en calculant, pour $x = 1$, l'écart entre le graphe de la réponse en gain et sa représentation asymptotique :

$$\Delta G = G(1) - G_A = -10 \log(4\sigma^2) - 0 = -20 \log(2\sigma) = 20 \log(Q).$$

Cet écart peut être considérable si le facteur d'amortissement 2σ est faible (ou le facteur de qualité Q élevé) (doc. 5). Le diagramme asymptotique est généralement insuffisant pour décrire la réponse en gain d'un filtre du second ordre. Nous sommes conduits à préciser les variations de la courbe de réponse en gain.

Posons : $y = (1 - x^2)^2 + 4\sigma^2 x^2 = x^4 + 2(2\sigma^2 - 1)x^2 + 1$.

Cette fonction bicarrée passe par un maximum pour :

$$x^2 = 1 - 2\sigma^2, \text{ si } \sigma < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La courbe de réponse en gain passe par un maximum pour :

$$x_s = \sqrt{1 - 2\sigma^2}, \text{ lorsque } \sigma < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow Q > \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

Les coordonnées du maximum sont :

$$X_s = \log(x_s) = \frac{1}{2} \log(1 - 2\sigma^2) < 0 \text{ et } G(x_s) = -20 \log(2\sigma \sqrt{1 - \sigma^2}) > 0.$$

Pour la fonction de filtrage, l'existence d'un extremum, surtout accentué, est un défaut. Le gain d'un filtre ne doit avoir que de faibles variations en bande passante. En conséquence, un filtre passe-bas d'ordre deux est réalisé généralement avec des valeurs du facteur de qualité Q de l'ordre de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.3. Courbe de réponse en phase

Le déphasage de u_{2m} par rapport à u_{1m} est $\varphi(x) = \arg[\underline{H}(jx)]$, dont les valeurs asymptotiques sont $\varphi = 0$ en basse fréquence et $\varphi = -\pi$ en haute fréquence. Par ailleurs, quelle que soit la valeur de σ , la courbe de réponse en phase passe par le point $A\left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$ (doc. 6).

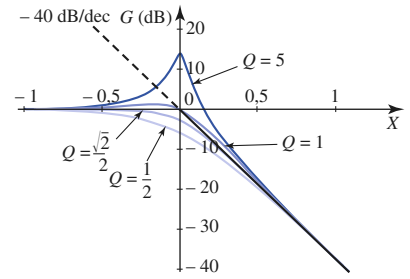
Remarque : Une faute courante est d'écrire $\varphi = -\phi = -\arctan\left(\frac{2\sigma x}{1-x^2}\right)$, où

$\phi = \arctan\left(\frac{2\sigma x}{1-x^2}\right)$ est présumé représenter l'argument du dénominateur de

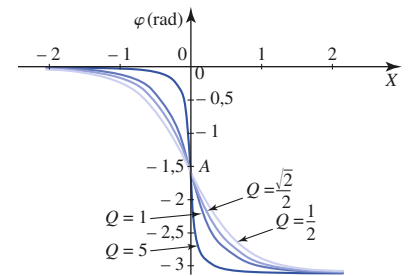
$\underline{H}(jx)$. En effet, la tangente d'un angle ne le détermine qu'à π près et il est nécessaire d'examiner le signe de son cosinus ou de son sinus pour le définir complètement. Ici, $\sin(\phi)$ est toujours positif et $\cos(\phi)$ est du signe de $(1 - x^2)$, donc $\phi = -\arctan\left(\frac{2\sigma x}{1-x^2}\right)$ si $(1 - x^2) > 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ si $(1 - x^2) = 0$ et

$\phi = \pi + \arctan\left(\frac{2\sigma x}{1-x^2}\right)$ si $(1 - x^2) < 0$.

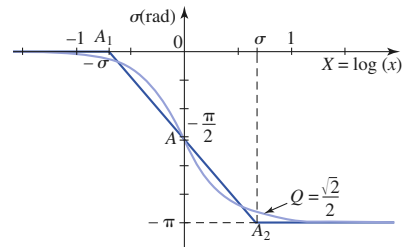
Le diagramme asymptotique de la réponse en phase constitué des deux asymptotes B.F. ($\phi = 0$) et H.F. ($\phi = -\pi$), ne décrit pas la rotation de phase au voisinage de $X = 0$. Il peut être complété comme indiqué en document 7 par le segment A_1AA_2 . La rotation de phase s'effectue pour l'essentiel au voisinage de $X = 0$ et elle est d'autant plus rapide que σ est petit (ou Q élevé) (doc. 8).



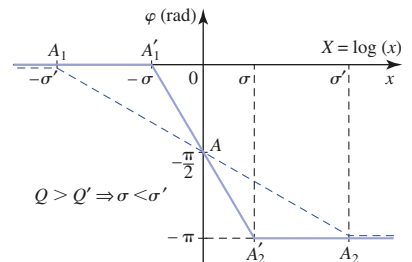
Doc. 5. Courbes de réponse en gain d'un filtre passe-bas d'ordre deux ($Q = 5, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$).



Doc. 6. Courbes de réponse en phase d'un filtre passe-bas d'ordre deux ($Q = 5, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$).



Doc. 7. Diagramme asymptotique de la réponse en phase d'un passe-bas d'ordre deux.



Doc. 8. La rotation de phase est d'autant plus rapide que Q est grand (ou petit).

2.4. Généralisation

La fonction de transfert d'un filtre pass-bas d'ordre deux peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} = A_0 \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Son diagramme de Bode est caractérisé par :

- une asymptote basse fréquence d'ordonnée $G_{(dB)} = 20 \log A_0$;
- une asymptote haute fréquence de pente -40 dB/décade ;
- une résonance pour $\omega < \omega_0$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\underline{H}(j\omega_0) = QA_0$.

On notera qu'il faut deux paramètres (A_0 et ω_0) pour définir complètement un passe-bas d'ordre un et qu'il en faut trois (A_0 , Q et ω_0) pour définir un passe-bas d'ordre deux.

Remarque : Si le facteur A_0 n'est pas réel positif, cela revient simplement à ajouter un déphasage constant au signal de sortie correspondant à ces écritures.

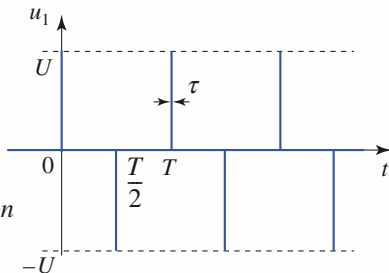
Application 1

Filtre passe-bas d'ordre deux

On utilise un filtre passe-bas d'ordre deux de fréquence caractéristique 100 Hz, de facteur de qualité $Q = 1$ et pour lequel la constante A_0 vaut 1.

Le signal d'entrée est constitué d'impulsions rectangulaires brèves d'amplitude $U = 10 \text{ V}$, de durée $\tau = 10 \mu\text{s}$, alternativement positives et négatives, et de fréquence égale à 1 kHz (doc. 9).

Donner avec un minimum de calculs, une bonne approximation du signal de sortie.



Doc. 9. Tension d'entrée $u_1(t)$.

Nous sommes ici dans un cas où la double intégration est une approximation convenable.

- Soit $u_0(t) = \omega_0 \int u_1(t) dt$; cette primitive est complètement déterminée si on impose $\langle u_0 \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} u_0\left(\frac{\tau}{2}\right) &= u_0\left(-\frac{\tau}{2}\right) + \omega_0 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_1(t) dt \\ &= u_0\left(-\frac{\tau}{2}\right) + U \omega_0 \tau \end{aligned}$$

Puis u_0 reste constante jusqu'à $t = \frac{T}{2} - \frac{\tau}{2}$.

$$u_0\left(\frac{T}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = u_0\left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2}\right) = U \omega_0 \tau = u_0\left(-\frac{\tau}{2}\right)$$

et ainsi de suite.

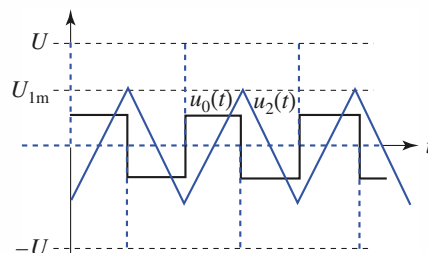
Comme $\tau \ll T$, $u_0(t)$ est pratiquement identique à une fonction créneau avec des discontinuités égales à $\pm \omega_0 U \tau$, soit une amplitude $u_{0m} = \frac{1}{2} \omega_0 \tau U$.

- $u_2(t) = \omega_0 \int u_0(t) dt$ est une fonction triangle dont la pente est égale à : $\omega_0 u_0(t) = \pm \frac{1}{2} \omega_0^2 \tau U$.

u_2 varie de $2u_{2m}$ pendant une demi-période $\frac{T}{2}$; donc :

$$2u_{2m} = \omega_0^2 \tau U \frac{T}{4}$$

$u_2(t)$ est donc une fonction triangle (doc. 10) d'amplitude $\omega_0^2 \tau U \frac{T}{8}$. $u_{2m} = 0,49 \text{ V}$.



Doc. 10. Tension $u_0(t)$ et $u_2(t)$.

2.5. Comportement à haute fréquence

À haute fréquence, c'est-à-dire lorsque la courbe de réponse en gain se confond avec l'asymptote haute fréquence, la partie principale du dénominateur est $-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ et la fonction de transfert est équivalente à :

$$\underline{H}(j\omega) \approx -\frac{A_0\omega_0^2}{\omega^2} = -A_0\omega_0^2\left(\frac{1}{j\omega}\right)^2.$$

Or, en notation complexe, multiplier par $\frac{1}{j\omega}$ revient à intégrer et, donc, multiplier par $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^2$ revient à intégrer deux fois

Lorsque l'on affirme qu'un filtre est intégrateur, il est sous-entendu qu'en régime forcé, la tension de sortie $u_2(t)$ est proportionnelle à la primitive de $u_1(t)$ dont la valeur moyenne est nulle. La tension de sortie est, en effet, égale à la somme de fonctions sinusoïdales de valeur moyenne nulle.

Lorsque la courbe de réponse en gain se confond avec l'asymptote haute fréquence, l'effet du filtre est pratiquement équivalent à une double intégration du signal d'entrée.

3

Filtre passe-haut d'ordre deux

3.1. Exemple

Comme pour l'ordre un, le filtre passe-haut d'ordre deux est complémentaire du filtre passe-bas du même ordre.

L'Application 2 propose d'étudier le filtre passe-haut associé au circuit (R, L, C).

3.2. Généralisation

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre deux peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) &= \frac{-A_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} \\ &= +A_0 \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\end{aligned}$$

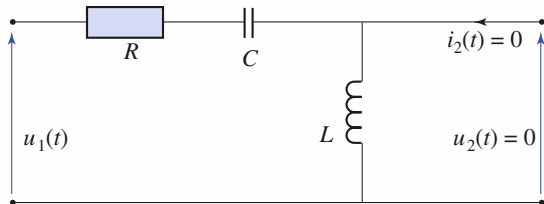
Son diagramme de Bode, symétrique de celui du filtre passe-haut se caractérise par :

- une asymptote haute fréquence d'ordonnée égale à $20 \log A_0$;
- une asymptote basse fréquence de pente 40 dB/décade ;
- l'intersection des asymptotes pour $\omega = \omega_0$;
- une résonance pour $\omega > \omega_0$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- $\underline{H}(j\omega_0) = jQA_0$.

Application 2

Filtre passe-haut d'ordre deux

Le filtre réalisé est représenté sur le document 11 et il est utilisé en sortie ouverte. Déterminer l'expression de sa fonction de transfert et tracer son diagramme de Bode.



Doc. 11. Filtre (R, L, C) passe-haut d'ordre deux.

En sortie ouverte ($i_2(t) = 0$), le filtre est un diviseur de tension, en conséquence :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \\ &= \frac{LC(j\omega)^2}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}. \end{aligned}$$

Posons, comme il est habituel, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

$x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $2\sigma = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q}$, il vient :

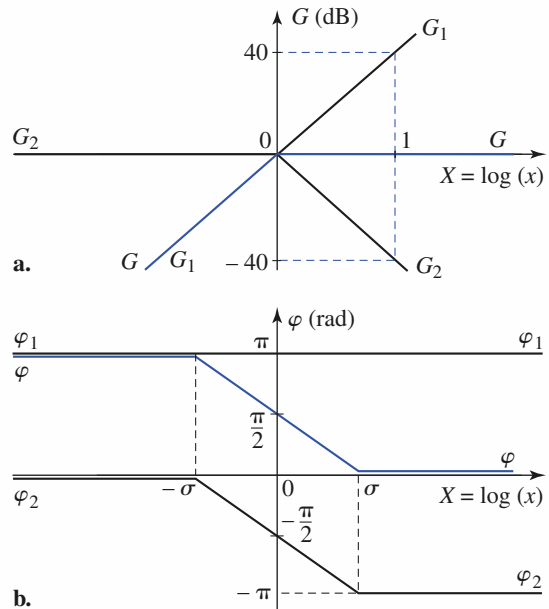
$$\underline{H} = \frac{(jx)^2}{1 + 2\sigma(jx) + (jx)^2}.$$

La fonction de transfert \underline{H} , d'ordre deux, peut être considérée comme le produit de la fonction de transfert d'un double dérivateur $\underline{H}_1 = (jx)^2$ par celle d'un passe-bas d'ordre deux :

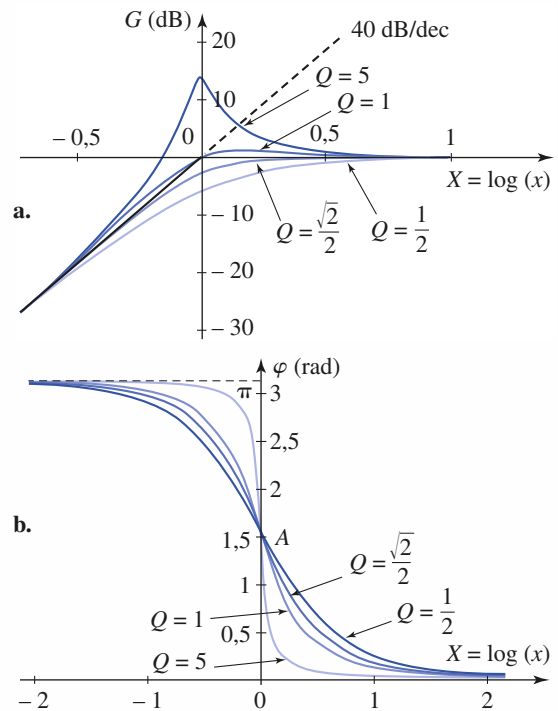
$$\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + 2\sigma(jx) + (jx)^2}.$$

Il en résulte que son diagramme asymptotique de gain et de phase est la somme des diagrammes asymptotiques correspondant de \underline{H}_1 et de \underline{H}_2 comme il est indiqué (doc. 12) et que son diagramme de Bode est la somme des diagrammes de Bode de \underline{H}_1 et de \underline{H}_2 (doc. 13).

L'examen du diagramme asymptotique de gain montre que le filtre étudié est un passe-haut. Par ailleurs, il est possible de démontrer que la courbe de réponse en gain du passe-haut réalisé est symétrique, par rapport à l'axe des gains, de celle du passe-bas de même facteur d'amortissement 2σ .



Doc. 12. Diagrammes asymptotiques de gain a. et de phase b. d'un passe-haut d'ordre deux.



Doc. 13. Diagramme de Bode d'un passe-haut d'ordre deux.

3.3. Comportement à basse fréquence

À basse fréquence, c'est-à-dire lorsque la courbe de réponse en gain se confond avec l'asymptote basse fréquence la fonction de transfert est équivalente à :

$$\underline{H}(j\omega) \approx -\frac{A_0\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{A_0}{\omega_0^2}(j\omega)^2.$$

Or, en notation complexe, multiplier par $j\omega$ revient à dériver et donc multiplier par $(j\omega)^2$ revient à dériver deux fois.

Lorsque la courbe de réponse en gain se confond avec l'asymptote basse fréquence, l'effet du filtre est pratiquement équivalent à une double dérivation du signal d'entrée.

► Pour s'entraîner : ex. 2 et 4.

La dérivation pose en général plus de problèmes que l'intégration. Si le signal d'entrée n'est pas sinusoïdal, il possède des harmoniques dont la fréquence est voisine de la fréquence caractéristique. Si le filtre est résonant ($Q > 1$), ceux-ci sont amplifiés et la dérivation n'est plus observée.

4 Filtre passe-bande d'ordre deux

Nous avons vu au § 1 un exemple de filtre passe-bande. Nous allons étudier ce type de filtre à partir d'un autre exemple, celui du (R, L, C) série.

Nous reprenons donc la réponse en courant (tension aux bornes de la résistance) du circuit (R, L, C) soumis à une tension sinusoïdale, étudiée au chapitre 6.

4.1. Détermination de la fonction de transfert

Le filtre étudié est représenté sur le document 14. En sortie ouverte ($i_2(t) = 0$), c'est un diviseur de tension, d'où l'expression de sa fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

Avec les notations $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pour la pulsation propre, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ pour la pulsation réduite, $X = \log(x)$ et $2\sigma = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 = \frac{1}{Q}$ pour le facteur d'amortissement, il vient :

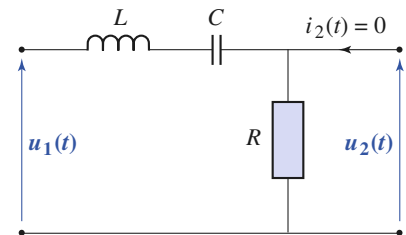
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{2\sigma(jx)}{1 + 2\sigma(jx) + (jx)^2}.$$

4.2. Courbe de réponse en gain

Calculons le gain du filtre :

$$G = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \right) = 20 \left(\frac{2\sigma x}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2\sigma x)^2}} \right)$$

et déterminons les asymptotes de sa courbe de réponse en gain.



Doc. 14. Filtre (R, L, C) passe-bande d'ordre deux.

4.2.1. Asymptote basse fréquence

Aux très basses fréquences, la capacité C se comporte comme un interrupteur ouvert et la résistance R n'est pas alimentée. Donc $\underline{u}_2 = 0$, alors que $\underline{u}_1 \neq 0$ ce qui entraîne $G = -\infty$. En effet, lorsque $X \rightarrow -\infty$ ($x \ll 1$), la valeur asymptotique du gain est :

$$G = 20 \log\left(\frac{x}{Q}\right) = 20X - 20 \log(Q).$$

La courbe de réponse en gain admet, en basse fréquence, une asymptote de pente 20 dB/décade (doc. 15).

4.2.2. Asymptote haute fréquence

En hautes fréquences, l'inductance L se comporte comme un interrupteur ouvert et la résistance R est, de nouveau, non alimentée, d'où la valeur asymptotique du gain $G = -\infty$. Déterminons l'équation de l'asymptote haute fréquence. Si $X \rightarrow -\infty$ ($x \gg 1$), alors :

$$G = 20 \log\left(\frac{1}{Qx}\right) = -20X - 20 \log(Q).$$

La courbe de réponse en gain admet, en haute fréquence, une asymptote de pente -20 dB/décade (doc. 15).

4.2.3. Diagramme asymptotique

C'est au niveau du point de concours A [$x = 1$; $G = -20 \log(Q)$] des deux demi-asymptotes que l'écart entre le diagramme asymptotique et la courbe de réponse en gain est le plus prononcé. Évaluons cet écart ΔG en remarquant que, quel que soit Q (ou 2σ), la courbe passe par le même maximum S ($x = 1$ et $G(1) = 0$). En conséquence :

$$\Delta G = G_S - G_A = 0 - 20 \log(Q).$$

Cet écart peut être considérable lorsque Q (ou 2σ) est très différent de 1 (doc. 16). L'examen de la réponse en gain montre que le filtre étudié est un passe-bande.

4.2.4. Bande passante

Calculons la bande passante à 3 dB du filtre. Les pulsations de coupure satisfont à l'équation :

$$|H(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1 \Rightarrow x^2 \pm \left(\frac{1}{Q}x - 1\right) = 0.$$

Ce qui conduit à un ensemble de deux équations du second degré dont les quatre racines sont réelles :

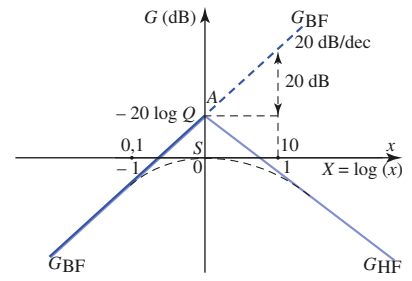
$$x = \pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}.$$

Ne retenant que les racines positives, il vient :

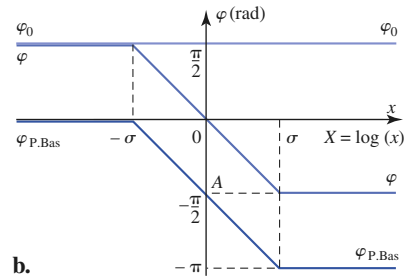
$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1},$$

d'où $x_2 - x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 2\sigma.$

La bande passante est inversement proportionnelle au facteur de qualité Q .

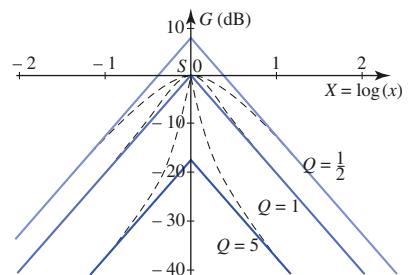


a.



b.

Doc. 15. Diagrammes asymptotiques de gain a. et de phase b. d'un passe-bande d'ordre deux.



Doc. 16. Courbe de réponse en gain d'un passe-bande d'ordre deux.

4.3. Courbe de réponse en phase

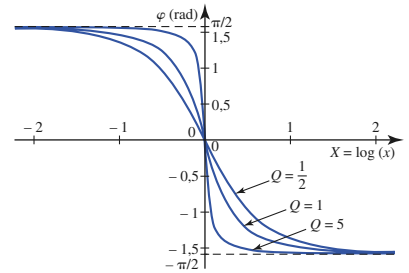
L'argument du dénominateur de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

est donné par $\phi = \arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ car son cosinus est positif.

$$\phi = -\phi = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right), \text{ avec } -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \quad (\text{doc. 17}).$$

Nous aurions pu aussi remarquer que la réponse en phase d'un passe-bande se déduit de celle d'un passe-bas d'ordre deux par une translation de $\frac{\pi}{2}$ le long de l'axe des déphasages (doc. 15b).

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{2\sigma jx}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2} = j2\sigma x \underline{H}_{P. Bas}(jx) \Rightarrow \phi(x) = \frac{\pi}{2} + \phi_{P. Bas}(x).$$



Doc. 17. Courbe de réponse en phase d'un passe-bande d'ordre deux.

4.4. Généralisation

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre deux est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = A_0 \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Son diagramme de Bode se caractérise par :

- une asymptote basse fréquence de pente 20 dB/décade ;
- une asymptote haute fréquence de pente -20 dB/décade ;
- une intersection pour $\omega = \omega_0$ au point d'ordonnée : $G = 20 \log A_0 - 20 \log Q$;
- un gain maximal, égal à $20 \log A_0$ obtenu pour $\omega = \omega_0$;
- un déphasage nul pour $\omega = \omega_0$;
- un pic de résonance de largeur (mesurée 3 dB au-dessous du maximum) $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Cette largeur est encore appelée bande passante à -3 dB.

Le filtre décrit au § 1 répond bien à cette définition. En effet :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} + j\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}}{1 + j\frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1 + \omega_2}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} - \frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega}\right)}$$

donc :

$$A_0 = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega_1 + \omega_2}$$

► Pour s'entraîner : ex. 1, 3 et 6.

4.5. Comportement intégrateur

Pour les pulsations grandes devant ω_0 , la fonction de transfert peut se mettre sous la forme approchée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \approx \frac{A_0\omega_0}{Q} \frac{1}{jC\omega}$$

Nous retrouvons la fonction de transfert d'un intégrateur. En régime sinusoïdal forcé et si $\omega \gg \omega_0$, la tension de sortie $u_2(t)$ est pratiquement proportionnelle à la primitive de valeur moyenne nulle de la tension d'entrée $u_1(t)$.

Le filtre est intégrateur pour tout signal périodique de fréquence grande devant la fréquence caractéristique f_0 . En effet, s'il est intégrateur pour le fondamental de fréquence f_0 , il l'est a fortiori pour tous les harmoniques de fréquences nf_0 .

Lorsque la courbe de réponse en gain se confond avec son asymptote de pente -20 dB/décade, le filtre passe-bande d'ordre deux a un comportement intégrateur.

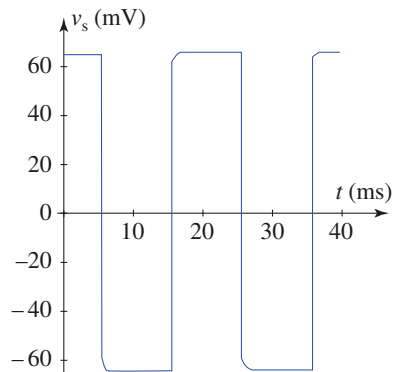
4.6. Comportement dérivateur

4.6.1. Signal d'entrée sinusoïdal

Pour les pulsations faibles devant ω_0 , la fonction de transfert peut se mettre sous la forme approchée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \approx \frac{A_0}{Q\omega_0} (j\omega)$$

Nous retrouvons la fonction de transfert d'un dérivateur. En régime sinusoïdal forcé et si $\omega \ll \omega_0$, la tension de sortie $u_2(t)$ est pratiquement proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée $u_1(t)$.



a.

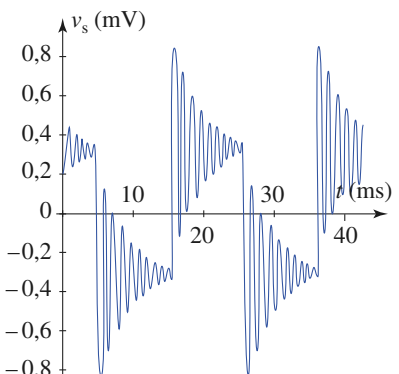
4.6.2. Signal d'entrée périodique quelconque

Si le signal d'entrée est périodique mais non harmonique, le filtre n'a pas nécessairement un effet dérivateur.

En effet, il existe des harmoniques de rang élevé qui ne vérifient pas la condition $f \ll f_0$.

En particulier, si la résonance est aiguë ($Q \gg 1$), un harmonique de fréquence voisine de f_0 pourra être fortement amplifié.

Le document 18 donne les réponses d'un filtre passe-haut à un signal d'entrée triangulaire de fréquence $\frac{f_0}{20}$ pour $Q = 0,5$ et pour $Q = 5$.



b.

Lorsque la courbe de réponse en gain se confond avec son asymptote de pente $+20$ dB/décade et si le facteur de qualité Q est suffisamment faible, le filtre passe-bande d'ordre deux a un comportement dérivateur.

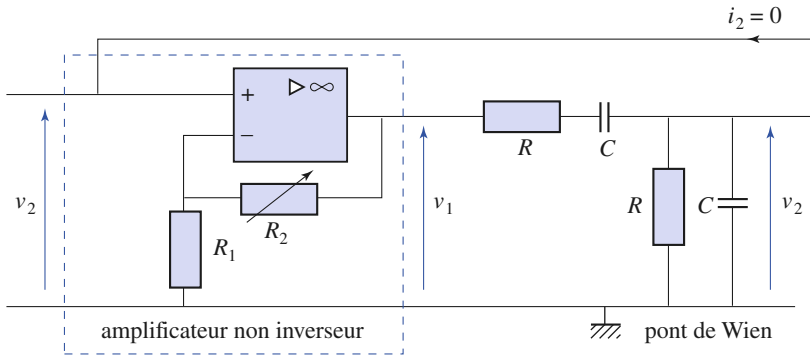
Doc. 18. Réponse d'un filtre passe-bande du deuxième ordre à un signal triangulaire de fréquence $\frac{f_0}{20}$ et d'amplitude 1 V :

- a. pour un facteur de qualité de 0,5 ;
- b. pour un facteur de qualité de 10.

4.7. Application à la réalisation d'un oscillateur quasisinusoïdal

4.7.1. Schéma de l'oscillateur

Considérons le montage représenté sur le document 19. Remarquons qu'il n'y figure pas de source et que nous étudions donc son régime libre.



◀ Doc. 19. Oscillateur à pont de Wien.

Nous pouvons identifier deux blocs :

- un amplificateur non inverseur qui impose : $v_1 = K v_3$ avec $K = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$;
- un filtre passif du second ordre, nommé « pont de Wien » (doc. 20). Le courant i_2 étant nul, nous pouvons utiliser la relation du diviseur de tension pour calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{v_2}{v_1}$.

Ce calcul, que nous conseillons vivement de faire entièrement, nous donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 3j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Il s'agit d'un passe-bande d'ordre deux peu sélectif avec $Q = \frac{1}{3}$ et $A_0 = \frac{1}{3}$.

4.7.2. Équation différentielle

La fonction de transfert permet en principe de remonter à l'équation différentielle à condition de l'expliciter sous la forme de polynômes en $(j\omega)$:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + 3j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

d'où :

$$\underline{v}_2 + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2 \underline{v}_2 + \frac{3}{\omega_0} (j\omega) \underline{v}_2 = \frac{1}{\omega_0} (j\omega) \underline{v}_1$$

$\times (j\omega)$ est équivalent à une dérivation et $\times (j\omega)^2$ à deux dérivations, soit à une dérivée seconde. L'équation différentielle doit donc être :

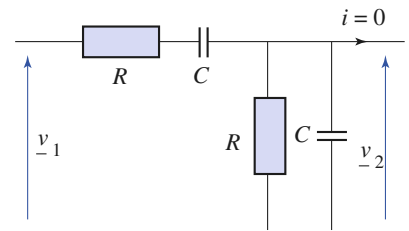
$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dv_2}{dt} + \omega_0^2 v_2 = \omega_0 \frac{dv_1}{dt}$$

Cette équation pourrait être retrouvée par un calcul direct utilisant les dérivées temporelles des tensions.

Comme $v_1 = K v_3 = K v_2$:

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + (3 - K) \omega_0 \frac{dv_2}{dt} + \omega_0^2 v_2 = 0.$$

Ceci n'est bien entendu applicable que si, aux fréquences auxquelles sera utilisé le montage, la fonction de transfert du montage amplificateur non inverseur est



Doc. 20. Pont de Wien.

bien assimilable au facteur multiplicatif K (en pratique, sa bande passante est effectivement beaucoup plus grande que la fréquence à laquelle le montage va osciller).

4.7.3. Stabilité du régime libre

L'équation d'évolution libre d'un système d'ordre deux est de la forme :

$$a \frac{d^2s(t)}{dt^2} + b \frac{ds(t)}{dt} + cs(t) = 0$$

où a , b et c sont trois constantes réelles.

L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont réelles si $\Delta > 0$ et complexes conjuguées si $\Delta < 0$, confondues et égales à $-\frac{b}{2a}$ pour $\Delta = 0$.

Les solutions du régime libre tendent vers zéro lorsque t augmente si r_1 et r_2 sont à partie réelle négative. La somme étant $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ et le produit valant $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$, nous voyons que la condition de stabilité est, quel que soit le signe de Δ , d'avoir a , b et c de même signe.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité du régime libre régit par l'équation d'évolution $a \frac{d^2s(t)}{dt^2} + b \frac{ds(t)}{dt} + cs(t) = 0$, où a , b et c sont des constantes réelles, est a , b et c de même signe.

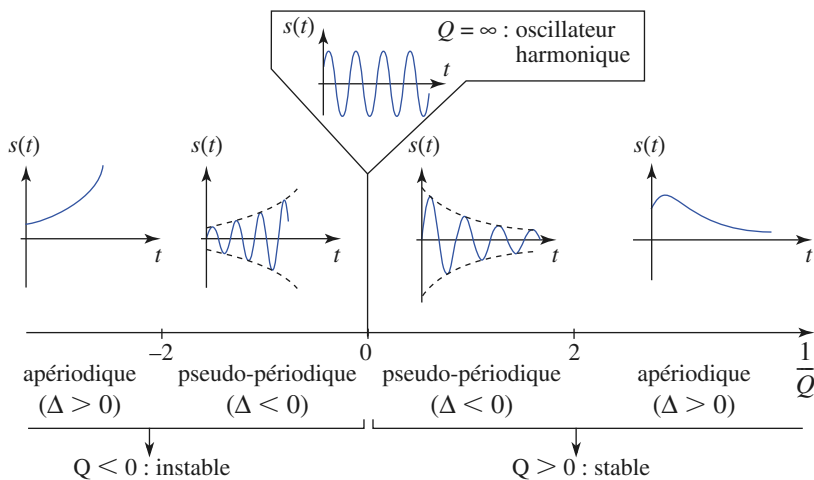
Nous en déduisons que :

Pour une équation d'évolution de la forme :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0,$$

la stabilité du régime libre est assurée par la condition $Q > 0$.

Le document 21 illustre cette conclusion.



Doc. 21. Régimes libres décrits par $s''(t) + \frac{\omega_0}{Q} s'(t) + \omega_0^2 s(t) = 0$ (le discriminant est $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$).

4.7.4. Régimes de fonctionnement du montage oscillateur

Pour le montage, la limite de stabilité correspond à $K = 3$. Discutons le comportement observé au voisinage de cette valeur :

■ $K < 3$ ou $R_2 < 2R_1$: le régime libre est stable car $v_2(t)$ tend vers 0. En l'absence de source, la tension v_2 reste nulle.

■ $K > 3$ ou $R_2 > 2R_1$: le régime libre est instable car $|v_2(t)|$ tend vers l'infini. Les petites perturbations (les défauts de l'amplificateur, par exemple) sont amplifiées jusqu'à la saturation de l'amplificateur opérationnel.

■ $K = 3$ ou $R_2 = 2R_1$: dans ce cas limite, inaccessible rigoureusement, $v_2(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude constante. En fait, le régime libre ne « démarre » spontanément que pour K légèrement supérieur à 3, et $v_2(t)$ se stabilise comme une fonction presque sinusoïdale de pulsation ω_0 , du fait d'une limitation de l'amplitude par les *non-linéarités* du montage (saturation de la sortie de l'A.O.), ce qui engendre des harmoniques (le signal est *quasi* sinusoïdal).

La réalisation expérimentale doit tenir compte des limitations de l'amplificateur opérationnel, notamment sa vitesse de balayage. Il ne faut donc pas que ω_0 soit trop grande.

Avec un 741, on obtiendra de bons résultats avec :

$R = 10 \text{ k}\Omega$; $C = 100 \text{ nF}$;

(soit $f_0 = 160 \text{ Hz}$) $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$;

R_2 : résistance ajustable pour corriger les écarts entre les valeurs affichées et les valeurs réelles des composants.

On obtient un oscillateur quasi sinusoïdal pour R_2 très légèrement supérieure à sa valeur limite qui doit être voisine de $2 \text{ k}\Omega$.

5 Filtrés sélectifs

5.1. Sélectivité d'un filtre passe-bande

Un filtre passe-bande est sélectif s'il ne transmet effectivement que des tensions sinusoïdales de fréquence voisine de sa fréquence de résonance.

La sélectivité d'un filtre est d'autant plus forte que la bande passante est étroite, ou que le facteur de qualité Q est élevé.

5.2. Exemple de réalisation

Le filtre sélectif étudié est le filtre passe-bande de Sallen et Key (*doc. 22*) pour lequel nous supposons que l'amplificateur opérationnel utilisé est idéal.

Bien qu'il y ait deux boucles de rétroaction, l'une sur l'entrée inverseuse (rétroaction stabilisante) et l'autre sur l'entrée non inverseuse (rétroaction déstabilisante), nous admettrons qu'il existe un régime linéaire dont nous déterminerons ultérieurement les conditions d'existence.

En *basse fréquence*, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. Le comportement du filtre correspond à celui du montage représenté dans le *document 23*. Nous remarquons que $v_+ = 0$, donc, en régime linéaire, v_- et v_s sont nuls. Le montage ne laisse pas passer les basses fréquences.

En *haute fréquence*, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs fermés. Le circuit équivalent au filtre est donné par le *document 24*.

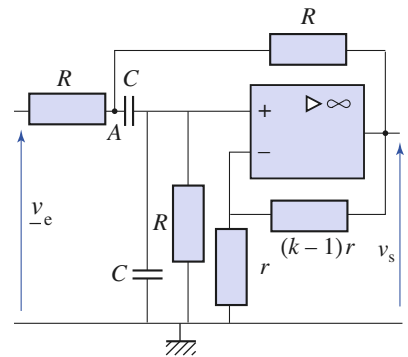
L'entrée non inverseuse est à la masse : $v_+ = 0$, donc, en régime linéaire, $v_- = v_s = 0$. Le montage ne laisse pas passer les hautes fréquences.

En conclusion, le comportement du circuit étudié est bien celui d'un filtre passe-bande.

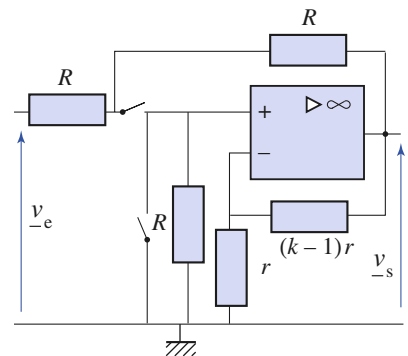
5.3. Fonction de transfert

Soit A le nœud commun aux deux résistances R et à la capacité C .

• Nous reconnaissons un amplificateur non inverseur qui impose : $v_- = k v_+$.



Doc. 22. Filtre passe-bande de Sallen et Key.



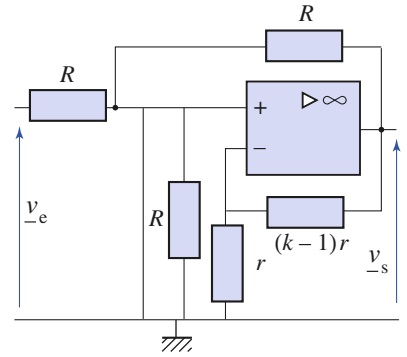
Doc. 23. Schéma équivalent au filtre passe-bande de Sallen et Key en basse fréquence.

- Le diviseur de tension nous donne la relation : $v_+ = \frac{v_A}{1 + 2jRC\omega}$.
- De la loi des nœuds appliquée en A il découle : $v_A = \frac{v_e + v_s + jRC\omega v_+}{2 + jRC\omega}$.

Nous éliminons v_A et v_+ entre ces trois équations et nous obtenons la fonction de transfert du filtre :

$$H(j\omega) = \frac{A_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} \quad \text{avec} \quad A_0 = \frac{k}{5-k},$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{5-k} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC}.$$



Doc. 24. Schéma équivalent au filtre passe-bande de Sallen et Key en haute fréquence.

5.4. Stabilité du montage

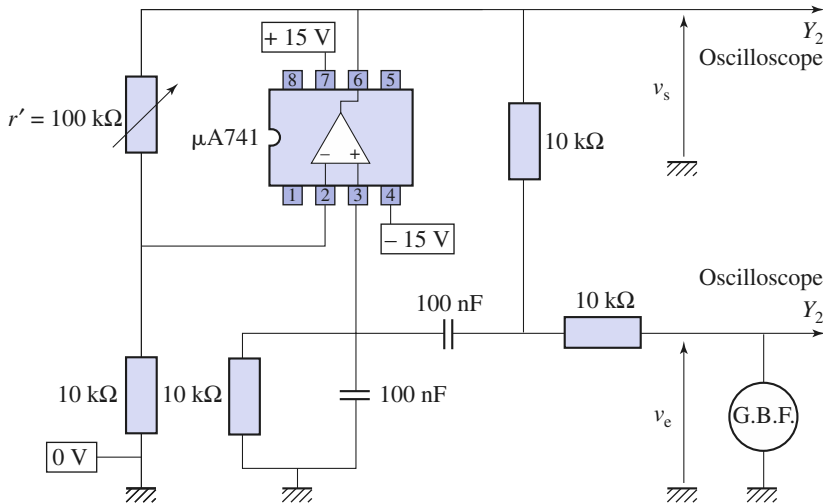
De la fonction de transfert nous déduisons l'équation différentielle liant $v_s(t)$ à $v_e(t)$:

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv_2}{dt} + \omega_0^2 v_2 = \frac{A_0 \omega_0}{Q} \frac{dv_e}{dt}.$$

Le régime libre est stable si ses solutions convergent vers 0, c'est-à-dire si Q est positif, soit $k < 5$.

La sélectivité est maximale à la limite de l'instabilité. Cette considération est importante sur le plan expérimental : il faudra ajuster la valeur de k de façon à conserver un fonctionnement stable tout en ayant une grande sélectivité.

5.4.1. Réalisation expérimentale



La condition de stabilité $k < 5$ est sans rapport avec la condition de stabilité liée à la permutation des entrées de l'amplificateur opérationnel.

◀ **Doc. 25.** Montage expérimental. $r' = (k - 1)r$ et $r = 10 \text{ k}\Omega$.

Les valeurs des résistances sont choisies dans le domaine [1 kΩ ; 1 MΩ] et la valeur de C est fixée de façon à avoir une fréquence de résonance ($f_0 = 225 \text{ Hz}$) suffisamment basse pour que les défauts de triangularisation et de bande passante limitée de l'amplificateur opérationnel soient négligeables.

La résistance ajustable de 100 kΩ permet de modifier la valeur du facteur k .

5.4.2. Mesures

Mesurons l'amplitude de v_s et v_e et leur déphasage φ en fonction de la fréquence pour $r' = 0$ ($k = 1$), $r' = 10 \text{ k}\Omega$ ($k = 2$), $r' = 20 \text{ k}\Omega$ ($k = 3$), $r' = 30 \text{ k}\Omega$ ($k = 4$), $r' = 38 \text{ k}\Omega$ ($k = 4,8$).

L'amplitude de v_e sera choisie de façon à avoir un fonctionnement linéaire de l'A.O. (ni saturation en tension, ni triangularisation). Une amplitude de v_e de 1 V ou 2 V convient, sauf pour $k = 4,8$, car les amplifications théoriques A_0 à la résonance sont respectivement 0,2 ; 0,67 ; 1,5 ; 4 et 24.

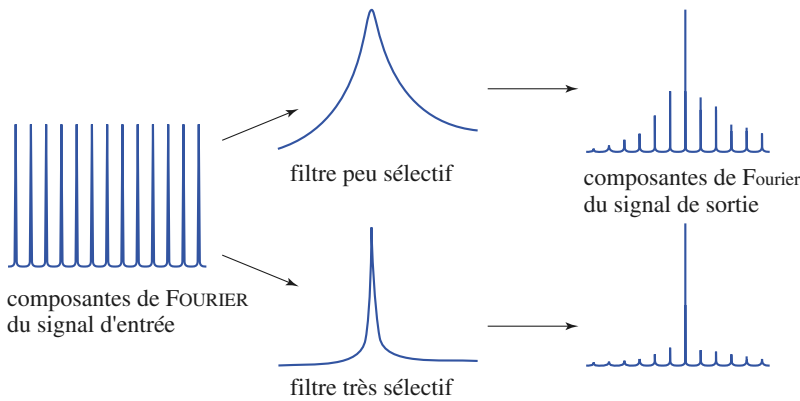
Nous effectuerons plusieurs mesures au voisinage de la fréquence de $f_0 = 225 \text{ Hz}$ pour évaluer la bande passante Δf du montage.

Les résultats expérimentaux correspondent aux résultats théoriques, compte tenu des écarts entre les valeurs réelles et nominales des composants (doc. 26). Le montage est très sensible à la modification de la valeur d'un composant au voisinage de la résonance.

5.4.3. Réponse du filtre à des signaux non sinusoïdaux

Un filtre sélectif permet l'analyse spectrale d'un signal non sinusoïdal. En effet, la réponse d'un tel filtre n'est notable que si la fréquence f_n d'un harmonique est égale ou, tout au moins, voisine de sa fréquence f_0 de résonance.

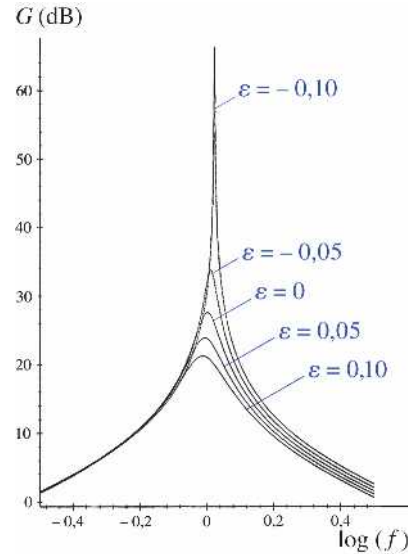
Plus le facteur de qualité Q du filtre est élevé, plus sa bande passante Δf est étroite et plus la détermination de la fréquence f est précise (doc. 27).



En outre, lorsque $f_n = f_0$, l'amplitude de la réponse du filtre $V_{s_n} = A_0 V_{e_n}$ est proportionnelle à l'amplitude de l'harmonique du signal d'entrée.

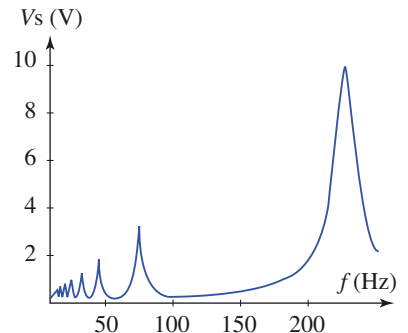
Ainsi, si nous réalisons notre filtre sélectif avec une valeur de Q élevée, nous pourrions effectuer l'analyse harmonique des signaux d'entrée.

En effet, ajustons r' , de façon à obtenir un montage stable et de grand facteur de qualité. Choisissons un signal d'entrée de type créneaux symétriques d'amplitude 0,1 V et diminuons sa fréquence f à partir de 250 Hz. Observons la forme du signal de sortie v_s et mesurons sa valeur efficace V_s . Pour $f_1 = 225 \text{ Hz}$, $f_3 = 75 \text{ Hz}$, $f_5 = 45 \text{ Hz}$, $f_7 = 32 \text{ Hz}$ et $f_9 = 25 \text{ Hz}$, la tension de sortie v_s prend des valeurs importantes et est quasiment sinusoïdale, de fréquence $f_0 = 225 \text{ Hz}$. Si sa valeur efficace est $V_{s_1} = 10 \text{ V}$ à $f_1 = 225 \text{ Hz}$, elle n'est plus que de $V_{s_3} = 3,3 \text{ V}$ à $f_3 = 75 \text{ Hz}$, $V_{s_5} = 2 \text{ V}$ à $f_5 = 45 \text{ Hz}$, $V_{s_7} = 1,4 \text{ V}$ à $f_7 = 32 \text{ Hz}$ et $V_{s_9} = 1,1 \text{ V}$ à $f_9 = 25 \text{ Hz}$ (doc. 28).



Doc. 26. Simulation de l'influence du non appariement des condensateurs (le rapport des capacités $\frac{C_4}{C_2} = 1 + \epsilon$ varie de 0,90 à 1,10) pour $k = 4,8$.

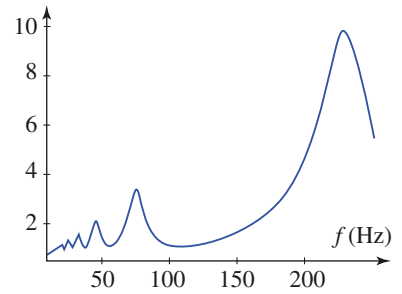
Doc. 27. Un filtre très sélectif permet d'extraire la composante sinusoïdale de fréquence égale à sa fréquence f_0 de résonance contrairement au filtre peu sélectif.



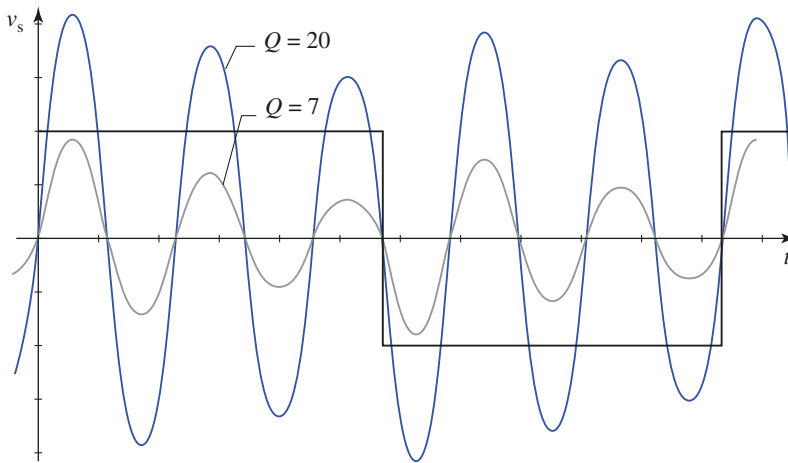
Doc. 28. Valeur efficace du signal de sortie en fonction de la fréquence ($Q = 20$). Le signal de sortie est approximativement sinusoïdal à chaque maximum.

Nous vérifions ainsi qu'un signal de type créneaux symétriques est composé uniquement d'harmoniques impaires $f_1, f_3 = \frac{f_1}{3}, f_5 = \frac{f_1}{5}, f_7 = \frac{f_1}{7}, f_9 = \frac{f_1}{9}$, d'amplitudes inversement proportionnelles à leur rang.

La comparaison entre les documents 28 et 29 ($Q = 20$ et $Q = 7$), d'une part, et le document 30, d'autre part, nous montre la nécessité d'un facteur de qualité important pour l'étude des harmoniques d'un signal périodique.



Doc. 29. Valeur efficace du signal de sortie en fonction de la fréquence ($Q = 7$). Le signal de sortie est très approximativement sinusoïdal à chaque maximum. Les maxima sont moins marqués que pour $Q = 20$ et ne sont plus séparés à basse fréquence.



Doc. 30. Signal de sortie pour un signal d'entrée 45 Hz. Le signal est encore proche d'une sinusoïde pour $Q = 20$, mais pas pour $Q = 7$.

Un filtre sélectif permet d'extraire d'un signal les composantes sinusoïdales de fréquences voisines de sa fréquence de résonance f_0 .

Application 3

Analyse de la réponse d'un filtre sélectif

Un générateur délivrant une tension en créneaux est branché à l'entrée d'un filtre passe-bande (doc. 25) dont la fréquence centrale est $f_0 = 225$ Hz. Interpréter les tensions de sortie du filtre représentées dans les documents 31, 32 et 33, pour $k = 2$ et $k = 4,8$.

Pour $k = 2$, le facteur de qualité est faible : $Q_2 = 0,47$, tandis que pour $k = 4,8$, le facteur de qualité est élevé : $Q_{4,8} = 7,1$.

Signal de fréquence 10 Hz

La fréquence de ce signal est très en deçà de la fréquence centrale f_0 du passe-bande.

Deux interprétations sont possibles.

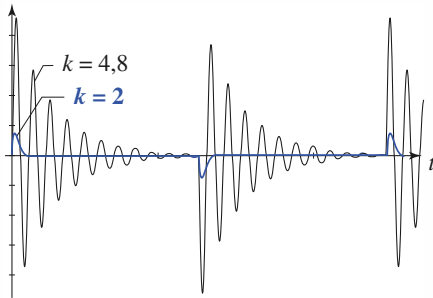
- Utilisons l'analogie avec la tension aux bornes de R

dans un circuit (R, L, C) en série, attaqué en tension.

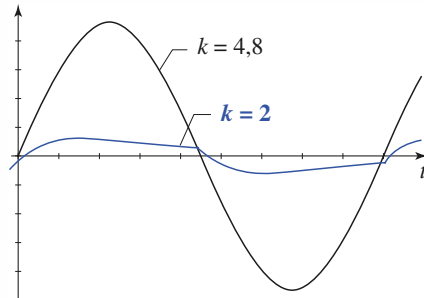
La fréquence du créneau est suffisamment faible pour considérer que la réponse est identique à la réponse transitoire à un échelon de tension.

Pour $k = 2$, le régime est aperiodique ($Q < 0,5$), d'où une forme d'impulsion large, tandis que pour $k = 4,8$ ($Q > 0,5$), le régime est pseudo-périodique, faiblement amorti.

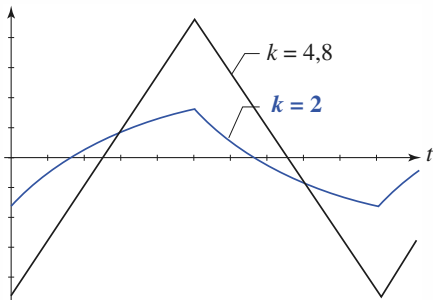
- Utilisons le diagramme de Bode. La fréquence 10 Hz est dans le domaine où le diagramme est proche de son asymptote basse fréquence à +20 dB/décade. Cela correspond à un caractère dérivateur du montage et explique l'impulsion délivrée par le montage avec $k = 2$. Pour $k = 4,8$, les harmoniques de fréquences voisines 225 Hz sont très amplifiées (doc. 34). Leur superposition crée le signal observé.



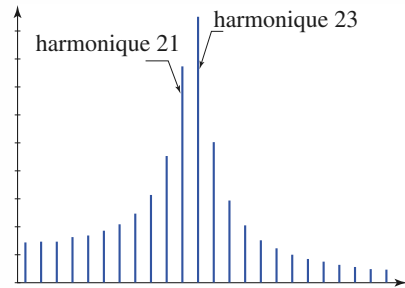
Doc. 31. Fréquence de 10 Hz.



Doc. 32. Fréquence de 225 Hz.



Doc. 33. Fréquence de 1 000 Hz.

Doc. 34. Harmoniques du signal de sortie pour une tension d'entrée en créneaux de 10 Hz, pour $k = 4,8$.

Signal de fréquence 225 Hz

Cette fréquence correspond à la fréquence de résonance du filtre. Pour $k = 2$, le filtre est peu sélectif (large bande passante), et le signal de sortie est un créneau déformé. Pour $k = 4,8$, le filtre est, en revanche, très sélectif. Seul le fondamental du signal est conservé et le signal de sortie est quasiment une sinusoïdale de fréquence $f_0 = 225$ Hz.

Signal de fréquence 1 000 Hz

La fréquence 1 000 Hz est très au-delà de la fré-

quence centrale f_0 du filtre. Elle est dans le domaine où le diagramme est proche de son asymptote haute fréquence à -20 dB/décade. Cela correspond à un caractère intégrateur du montage et explique le signal triangulaire délivré par le montage pour $k = 4,8$. En revanche, pour $k = 2$, la courbe de gain n'est pas aussi proche de l'asymptote, d'où la déformation observée du triangle.



● FILTRE PASSE-BAS D'ORDRE DEUX

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = A_0 \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Son diagramme de Bode est caractérisé par :

- une asymptote basse fréquence d'ordonnée $G_{(\text{dB})} = 20 \log A_0$;
- une asymptote haute fréquence de pente -40 dB par décade ;

- l'intersection des asymptotes pour $\omega = \omega_0$;
- une résonance pour $\omega < \omega_0$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\bullet \underline{H}(j\omega_0) = QA_0.$$

Pour $\omega \gg \omega_0$, l'effet du filtre est pratiquement équivalent à une double intégration du signal d'entrée.

● FILTRE PASSE-HAUT D'ORDRE DEUX

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-A_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = A_0 \frac{-x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}.$$

Son diagramme de Bode, symétrique de celui de filtre passe-haut se caractérise par :

- une asymptote haute fréquence d'ordonnée égale à $20 \log A_0$;
- une asymptote basse fréquence de pente 40 dB par décade ;

- l'intersection des asymptotes pour $\omega = \omega_0$;
- une résonance pour $\omega > \omega_0$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\bullet \underline{H}(j\omega_0) = QA_0.$$

Pour $\omega \ll \omega_0$, l'effet du filtre est souvent équivalent à une double dérivation du signal d'entrée.

● FILTRE PASSE-BANDE D'ORDRE DEUX

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = A_0 \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

Son diagramme de Bode se caractérise par :

- une asymptote basse fréquence de pente 20 dB/décade ;
- une asymptote haute fréquence de pente -20 dB/décade ;
- une intersection pour $\omega = \omega_0$ au point d'ordonnée $G = 20 \log A_0 - 20 \log Q$;
- un gain maximal, égal à $20 \log A_0$ obtenu pour $\omega = \omega_0$;
- un déphasage nul pour $\omega = \omega_0$;

- un pic de résonance de largeur (mesurée 3 dB au-dessous du maximum) $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

La sélectivité d'un filtre est d'autant plus forte que la bande passante est étroite, ou que le facteur de qualité Q est élevé.

Pour $\omega \gg \omega_0$ le filtre passe-bande d'ordre deux a un comportement intégrateur.

Pour $\omega \ll \omega_0$ le filtre passe-bande d'ordre deux a un comportement dérivateur.

● STABILITÉ

- La condition nécessaire et suffisante de stabilité du régime libre régi par l'équation d'évolution :

$$a \frac{d^2s(t)}{dt^2} + b \frac{ds(t)}{dt} + cs(t) = 0$$

où a , b et c sont des constantes réelles, est : a , b et c de même signe.

- Pour une équation d'évolution de la forme :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0,$$

la stabilité du régime libre est assurée par la condition $Q > 0$.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Savez-vous écrire une fonction de transfert sous forme canonique, pour en repérer les paramètres caractéristiques : A_0, ω_0, Q ?
- ✓ Comment tracer le diagramme de Bode asymptotique. Pour le faire rapidement, il faut se souvenir que les asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$ et que la différence des pentes est de 40 dB/décade. Il faut aussi éviter les erreurs (en général de π) pour la détermination des déphasages.
- ✓ Se souvenir, pour le filtre passe-bande, que :
 - le gain est maximal et le déphasage est nul pour $\omega = \omega_0$;
 - le pic de résonance est d'autant plus étroit que Q est élevé ($\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$) ;
 - un passe-bande très sélectif permet d'isoler, dans un signal périodique complexe, la composante sinusoïdale dont la fréquence est voisine de f_0 .
- ✓ Le caractère intégrateur ou dérivateur permet-il souvent de donner une bonne approximation du signal de sortie avec un minimum de calculs ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

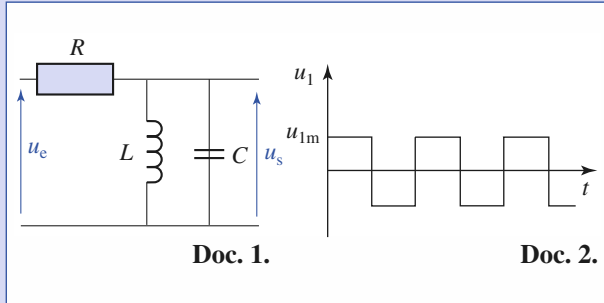
1. Il faut nécessairement une bobine et un condensateur pour réaliser un filtre d'ordre deux.
 - Vrai
 - Faux
2. Tous les filtres d'ordre deux présentent une résonance pour $\omega = \omega_0$.
 - Vrai
 - Faux
3. Pour un filtre passe-bande d'ordre deux, le déphasage est égal à 0 pour $\omega = \omega_0$.
 - Vrai
 - Faux
4. Si un signal périodique de fréquence $f \gg f_0$ est envoyé à l'entrée d'un filtre passe-bas d'ordre deux, la sortie est pratiquement égale à la valeur moyenne du signal d'entrée.
 - Vrai
 - Faux
5. Si un signal périodique de fréquence $f \ll f_0$ est envoyé à l'entrée d'un filtre passe-haut d'ordre deux, la sortie est pratiquement égale à la valeur moyenne du signal d'entrée.
 - Vrai
 - Faux
6. Si un signal triangle de fréquence $f = 100$ Hz est envoyé à l'entrée d'un filtre passe-bas d'ordre deux tel que $f_0 = 1,5$ Hz et $Q = 1$, la sortie est pratiquement un signal en créneaux.
 - Vrai
 - Faux
7. Si un signal triangle de fréquence $f = 100$ Hz est envoyé à l'entrée d'un filtre passe-bas d'ordre deux tel que $f_0 = 1,5$ Hz et $Q = 20$, la sortie est pratiquement un signal en créneaux.
 - Vrai
 - Faux
8. Si un signal en créneaux de fréquence $f = 200$ Hz est envoyé à l'entrée d'un filtre passe-bande d'ordre deux tel que $f_0 = 1,5$ Hz et $Q = 20$, la sortie est pratiquement un signal sinusoïdal de fréquence 1,5 kHz.
 - Vrai
 - Faux
9. La stabilité des solutions de

$$as''(t) + bs'(t) + cs(t) = 0,$$
 peut être étudiée en lien avec le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique associée.
 - Vrai
 - Faux

► Solution, page 245.

Exercices

1 1) En supposant la bobine idéale, déterminer la fonction de transfert en sortie ouverte du filtre représenté sur le *doc. 1*. De quel type de filtre s'agit-il ? Identifier ses grandeurs caractéristiques.

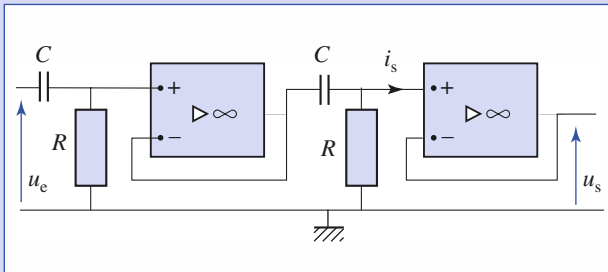


2) $R = 1 \text{ k}\Omega$; $L = 5 \text{ mH}$; $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.

$u_e(t)$ est un signal créneau de fréquence f représenté sur le *doc. 2*.

Déterminer une bonne approximation de la forme de $u_s(t)$ pour $f = 2,55 \text{ kHz}$ et pour $f = 25 \text{ kHz}$.

2 1) Identifier le filtre représenté sur la *figure*. Déterminer ses constantes caractéristiques A_0 , ω_0 et Q .



2) $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$.

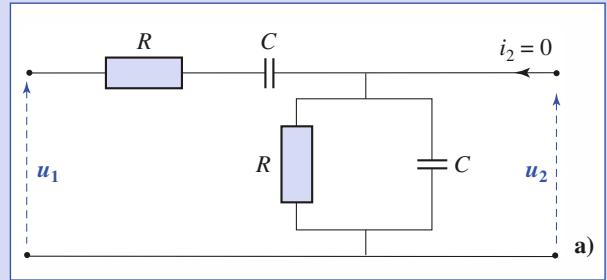
$u_e(t) = U + u_{em} \cos(2\pi f t) \cos(6\pi f t)$ avec $f = 100 \text{ Hz}$.

Identifier simplement les deux composantes sinusoïdales de $u_e(t)$ et calculer $u_s(t)$.

3 Filtres de Wien, de Colpitts et de Hartley

1) Établir la fonction de transfert du filtre de Wien (*schéma (a)*) utilisé en sortie ouverte ($i_2(t) = 0$) et la présenter sous la forme :

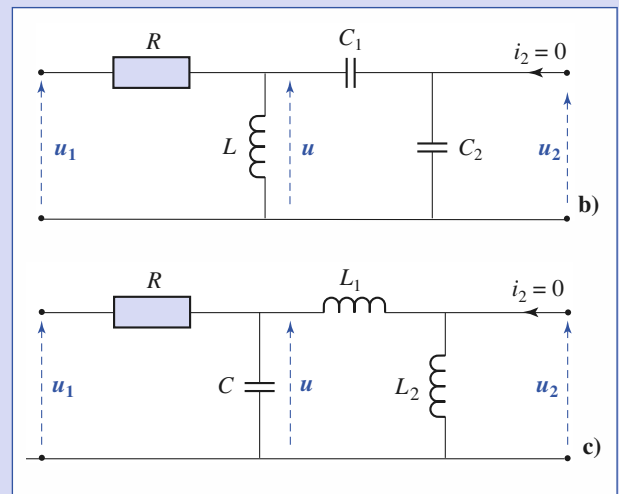
$$\underline{H} = \frac{K}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{K}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$



Expliciter ses caractéristiques ω_0 , Q et K en fonction de ses composants R et C . Quelle est la signification de chacune de ces caractéristiques ?

2) Mêmes question pour le filtre de Colpitts donné *schéma (b)* et pour le filtre de Hartley donné *schéma (c)*.

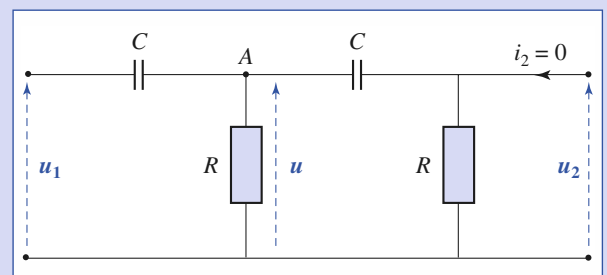
3) Tracer le diagramme asymptotique de Bode de ces trois filtres.

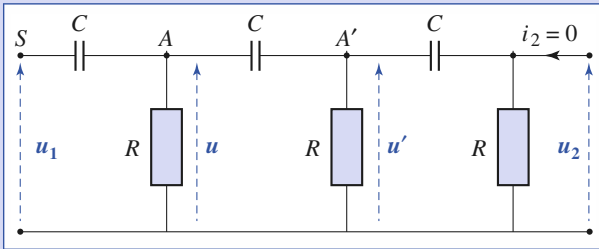


4 Association en cascade de filtres (R, C) d'ordre un

1) Deux filtres (R, C) d'ordre un sont associés en cascade comme indiqué sur le *schéma*. Déterminer la fonction de transfert de l'association lorsqu'elle est utilisée en sortie ouverte.

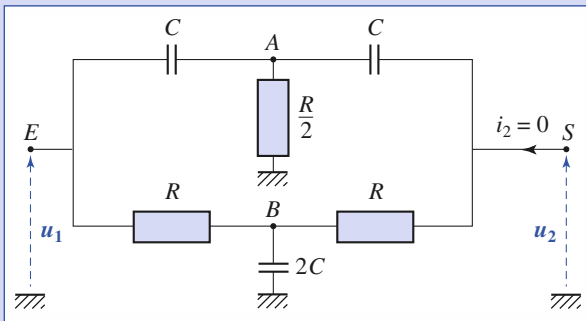
2) Même question pour une association de trois cellules RC .





5. Filtre passif réjecteur de bande

On considère le filtre passif utilisé en sortie ouverte ($i_2 = 0$).



1) Déterminer sa fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}}$$

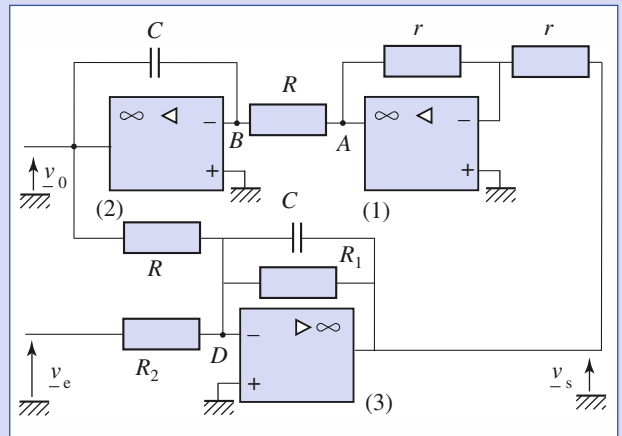
Quel est le type de ce filtre ?

2) Donner son diagramme de Bode. Démontrer que la courbe de gain est symétrique par rapport à l'axe des gains et que la courbe de réponse en phase est symétrique par rapport à l'origine.

3) On désire charger ce filtre par une utilisation d'impédance Z_u et lui conserver la même fonction de transfert. Comment pourrions-nous procéder ?

6. Filtre actif à variable d'état

On considère le montage suivant dans lequel les amplificateurs opérationnels, supposés idéaux, fonctionnent en régime linéaire.



1) Calculer le rapport des tensions complexes $\frac{v_0}{v_s}$.

2) En exprimant la fonction de transfert $\frac{v_s}{v_e}$ du filtre sous la forme générale déduire les expressions de G_0 , ω_0 , α et Q le coefficient de sélectivité.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 243.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 1. Faux | 4. Vrai | 7. Faux |
| 2. Faux | 5. Faux | 8. Faux |
| 3. Vrai | 6. Vrai | 9. Faux |

1 Pour $\omega \rightarrow 0$: L se comporte comme un fil d'ouï : $u_s \rightarrow 0$ et donc $H \rightarrow 0$.

Pour $\omega \rightarrow \infty$: C se comporte comme un fil d'ouï : $u_s \rightarrow 0$ et donc $H \rightarrow 0$.

L'impédance complexe de (L, C) parallèle est : $Z_c = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$, qui devient infinie à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, soit $H(\omega_0) = 1$.

Ce filtre est donc un passe-bande. On a un diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{Z_c}{Z_c + R} = \frac{1}{1 + j\frac{R}{L\omega}(LC\omega^2 - 1)} \\ &= \frac{1}{1 + j\frac{R}{L\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

Corrigés

On retrouve la fonction de transfert d'un passe-bande d'ordre deux avec

$$A_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{R}{L\omega_0}$$

2) $\omega_0 = 1,41 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $f_0 = 2,25 \text{ kHz}$; $Q = 14$.

• Pour $f = f_0 = 2,25 \text{ kHz}$: le filtre qui est sélectif (Q élevé) sélectionne le fondamental.

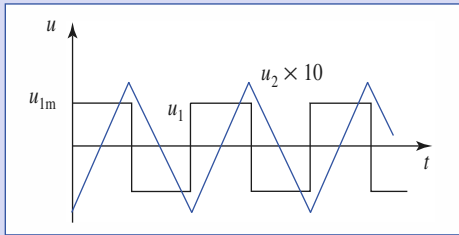
$u_s(t) = u_{sm} \cos(2\pi f t)$. Pour connaître la valeur de u_{sm} , il faudrait connaître l'amplitude du fondamental d'un signal en créneaux.

• Pour $f = 25 \text{ Hz}$: le filtre se comporte comme un intégrateur : $\frac{du_s}{dt} = \omega_0 u_e$.

$u_s(t)$ est un signal en triangle, de pente $\omega_0 u_{em}$. L'analyse de la figure montre

que $\omega_0 u_{em} \frac{T}{2} = 2u_{sm}$ d'où :

$$u_{sm} = \frac{\omega_0}{4f} u_{em} \quad \text{soit} \quad u_{sm} = 0,14 u_{em}$$



2

1) On reconnaît deux passe-haut identiques d'ordre un. Le filtre est donc un passe-haut d'ordre deux. Le premier montage suiveur a pour effet d'isoler les deux filtres d'ordre un de fréquence de coupure $\omega_0 = \frac{1}{RC}$; le second montage suiveur permet d'avoir $i_s = 0$. Donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 = \frac{-\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

D'où : $A_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{2}$.

2) $\omega_0 = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et donc $f_0 = 1,6 \text{ kHz}$.

$$u_e(t) = U + \frac{u_{em}}{2} \cos(2\pi f t) + \frac{u_{em}}{2} \cos(4\pi f t)$$

• La partie constante U est totalement éliminée par le passe-haut.

• $f \ll f_0$ donc $\underline{H}(j\omega) \approx -\frac{f^2}{f_0^2}$. Les deux composantes sinusoïdales

de fréquences f et $2f$ sont déphasées de π et leurs amplitudes sont respectivement multipliées par $\left(\frac{100}{1,6 \cdot 10^3}\right)^3 = 3,9 \cdot 10^{-3}$ et $\left(\frac{200}{1,6 \cdot 10^3}\right)^2 = 1,6 \cdot 10^{-2}$.

Finalement : $u_s(t) \approx -3,9 \cdot 10^{-3} u_{em} [\cos(2\pi f t) + 4 \cos(4\pi f t)]$.

3

1) • Filtre de Wien

Le filtre, en sortie ouverte, réalise un diviseur de tension. On note par Z_s et Z_p respectivement les impédances des associations (R, C) série et parallèle il vient :

$$\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} = \frac{1}{1 + \frac{Z_s}{Z_p}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}$$

soit finalement : $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{3} \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$, ce qui est la fonction de

transfert d'un passe-bande.

Il en résulte que la pulsation centrale de la bande passante (ou pulsation de résonance) est $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, que le facteur de qualité est $Q = \frac{1}{3}$ et que

l'amplification maximale à la résonance est $K = \frac{1}{3}$.

2) • Filtre de Colpitts

On pose $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ la capacité équivalente à l'association en série des deux capacités C_1 et C_2 . Il vient pour le diviseur de tension ainsi réalisé

$$u_m = \frac{C_2}{C} u_{2m}$$

Le diviseur de tension réalisé par R et $L // C$ donne :

$$u_m = \frac{Z_{L//C}}{R + Z_{L//C}} u_{1m} = \frac{u_{1m}}{1 + \frac{R}{Z_{L//C}}} = \frac{u_{1m}}{1 + R \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right)}$$

En éliminant u_m à l'aide de la relation précédente, on obtient :

$$\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{\frac{C}{C_2}}{1 + j \left(RC\omega - \frac{R}{L\omega} \right)}$$

ce qui est la fonction de transfert d'un passe-bande dont la pulsation de résonance est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, le facteur de qualité :

$$Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et l'amplification à la résonance} \quad K = \frac{C}{C_2}$$

• Filtre de Hartley

On pose $L = L_1 + L_2$ l'inductance équivalente à l'association en série de L_1 et de L_2 .

Il vient pour le diviseur de tension réalisé par ces deux éléments $u_m = \frac{L}{L_2} u_{2m}$.

Le diviseur de tension réalisé par R et $L // C$ donne :

$$u_m = \frac{Z_{L//C}}{R + Z_{L//C}} u_{1m} = \frac{u_{1m}}{1 + \frac{R}{Z_{L//C}}} = \frac{u_{1m}}{1 + R \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \right)}$$

Comme précédemment, l'élimination de u_m entre les deux relations fournit la

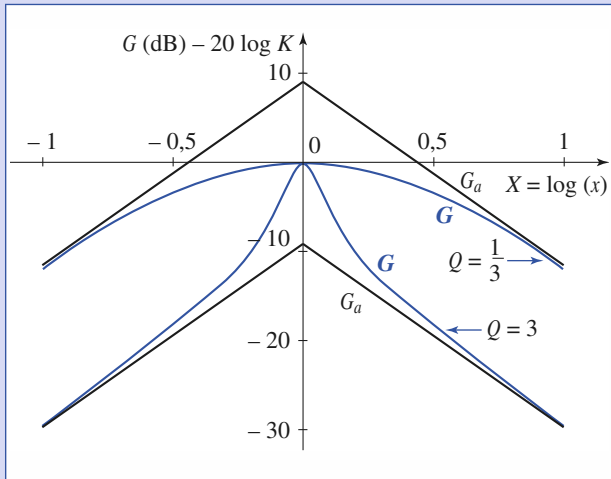
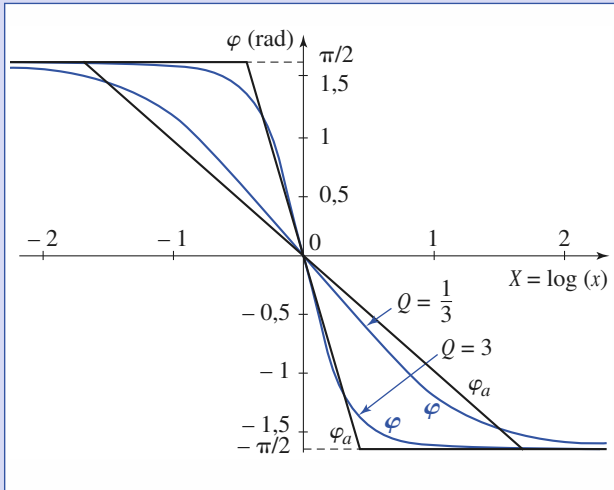
fonction de transfert $\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{\frac{L_2}{L}}{1 + j \left(RC\omega - \frac{R}{L\omega} \right)}$, ce qui est celle d'un

passe-bande dont la pulsation de résonance est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, le facteur de

qualité $Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et l'amplification statique $K = \frac{L_2}{L}$.

3) Le diagramme de Bode et son tracé asymptotique correspondent à des filtres peu ou très sélectifs.

Pour le filtre de Wien, $Q = \frac{1}{3}$: en revanche, pour les filtres de Colpitts et de Hartley, le facteur de qualité est généralement supérieur à 1. On a pris $Q = 3$ pour les tracés correspondants donnés sur les schémas suivants.



4) 1) On applique la loi des nœuds en A :

$$jC\omega(u_{1m} - u_m) + jC\omega(u_{2m} - u_m) - \frac{u_m}{R} = 0.$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, il vient $jx(u_{1m} + u_{2m}) = \frac{u_m}{R}(1 + 2jx)$.

Les éléments de la deuxième cellule forment un diviseur de tension $u_{2m} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} u_m$, d'où $u_m = \frac{1 + jx}{jx} u_{2m}$. La fonction de transfert

s'obtient en éliminant u_m entre les deux expressions précédentes :

$\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{(jx)^2}{1 + 3jx + (jx)^2}$, ce qui est une fonction de transfert de filtre passe-haut d'ordre deux.

2) On applique la loi des nœuds en A :

$$jC\omega(u_{1m} - u_m) + jC\omega(u'_m - u_m) - \frac{u_m}{R} = 0,$$

puis en A' : $jC\omega(u_m - u'_m) + jC\omega(u_{2m} - u'_m) - \frac{u'_m}{R} = 0$.

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et en élimine u_m des deux relations obtenues :

$$u_m = \frac{jx(u'_m + u_{1m})}{(1 + j2x)} = \frac{(1 + j2x)u'_m - jxu_{2m}}{jx},$$

d'où $u'_m = \frac{(jx)^2 u_{1m} + jx(1 + j2x)u_{2m}}{1 + 4(jx) + 3(jx)^2}$.

Les éléments de la dernière cellule forment un diviseur de tension, donc :

$$u'_m = \frac{R + \frac{1}{jC\omega}}{R} u_{2m} = \frac{1 + jx}{jx} u_{2m}.$$

En éliminant u'_m entre les deux dernières relations, on obtient la fonction de

transfert $\underline{H} = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{(jx)^3}{1 + 5(jx) + 6(jx)^2 + (jx)^3}$.

5

1) On applique le théorème de Millman en A :

$$u_{Am} = \frac{jC\omega(u_{1m} + u_{2m})}{2jC\omega + \frac{2}{R}} = \frac{jRC\omega(u_{1m} + u_{2m})}{2(1 + jRC\omega)},$$

puis en B : $u_{Bm} = \frac{(\frac{u_{1m} + u_{2m}}{R})}{2jC\omega + \frac{2}{R}} = \frac{(u_{1m} + u_{2m})}{2(1 + jRC\omega)}$

et on utilise les résultats obtenus en écrivant la loi des nœuds en S :

$$jC\omega(u_{Am} - u_{2m}) + \frac{1}{R}(u_{Bm} - u_{2m}) = 0.$$

On regroupe les termes en u_{1m} et u_{2m} et on pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. L'expression

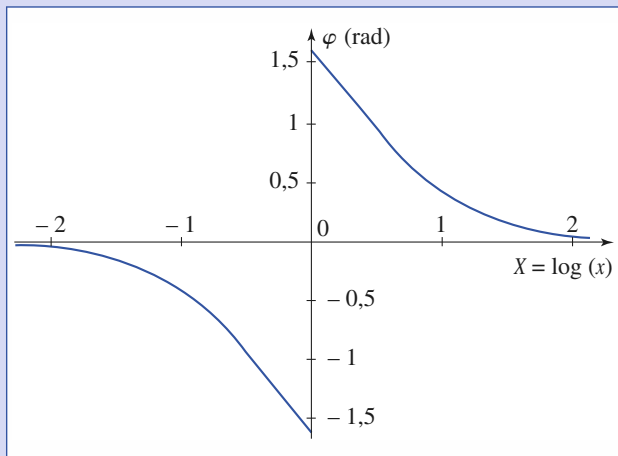
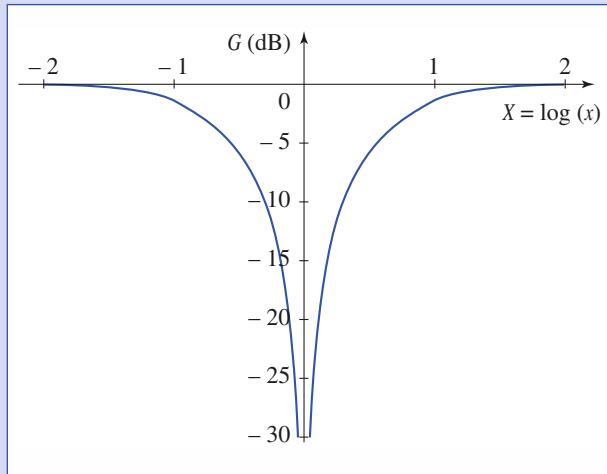
de la fonction de transfert en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ s'écrit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{u_{2m}}{u_{1m}} = \frac{1 + (jx)^2}{1 + 4(jx) + (jx)^2}.$$

On constate que $|\underline{H}(jx)| = 0$ pour $x = 1$ ($\omega = \omega_0$) : il y a réjection de la pulsation ω_0 , c'est-à-dire que cette pulsation n'est pas transmise. Au voisinage de cette dernière pulsation le gain est très faible, alors qu'il prend sa valeur maximale pour les valeurs extrêmes de ω : zéro et l'infini. Ce filtre est du type coupe-bande.

2) Le diagramme de Bode du filtre est donné ci-dessous. La fonction de transfert étant écrite sous la forme $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{jx}{1 - x^2}}$, si on change X en $-X$, c'est-à-dire x en $\frac{1}{x}$, elle devient $\underline{H}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1 - \frac{jx}{1 - x^2}}$. Il apparaît que

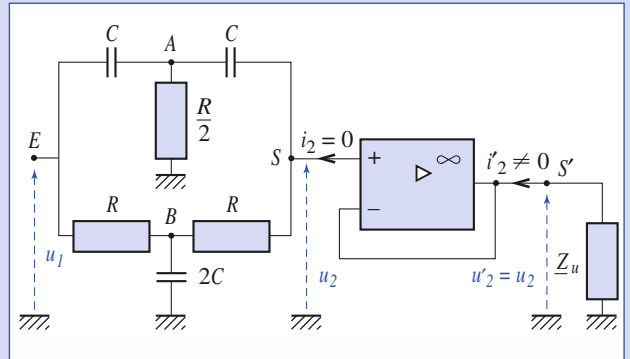
$|\underline{H}(jx)| = \left| \underline{H}\left(\frac{j}{x}\right) \right|$, c'est-à-dire que la courbe de gain est symétrique par rapport à l'axe des gains.



Pour la réponse en phase, il vient $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\varphi(x)$ puisque le changement de x en $\frac{1}{x}$ change le dénominateur en son conjugué. La courbe de réponse en phase est symétrique par rapport à l'origine.

Remarque : ce circuit est un des rares circuits pour lesquels la réponse en phase est discontinue.

3) La fonction de transfert dépend de la charge du filtre. L'expression précédente correspond à une charge infinie, puisque le circuit de sortie est ouvert. Pour conserver au filtre la même fonction de transfert, il suffit d'intercaler un suiveur entre sa sortie et l'utilisation. Le filtre continuera à fonctionner en sortie ouverte et ses caractéristiques de filtrage seront conservées. En outre, à la sortie du suiveur, une puissance non nulle sera disponible pour l'attaque de l'utilisation.



1) L'A.O. 1 est monté en amplificateur inverseur d'amplification -1 , donc $v_A = -v_s$. Par ailleurs, $v_B = 0$ (régime linéaire de l'A.O. 2). Aucun courant ne pénétrant en B dans l'A.O. 2, la loi des nœuds en B donne :

$$v_A + jC\omega v_0 = 0, \text{ d'où } \frac{v_0}{v_s} = \frac{1}{jCR\omega}.$$

2) L'A.O. 3 étant en régime linéaire, $v_D = 0$. Aucun courant ne pénétrant en D dans l'A.O. 3, la loi des nœuds en D donne $\frac{v_c}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + jC\omega\right)v_s + \frac{v_0}{R} = 0$.

En éliminant v_0 entre les deux relations précédentes, on obtient la fonction de transfert du filtre :

$$\frac{v_s}{v_c} = -\frac{\frac{R^2}{R_2}C(j\omega)}{1 + \frac{R^2}{R_1}C(j\omega) + R^2C^2(j\omega)^2}.$$

D'où les caractéristiques du filtre :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad 2\alpha = \frac{1}{Q} = \frac{R}{R_1} \quad \text{et} \quad G_0 = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Amplificateur opérationnel : bande passante, stabilité des montages bouclés et comparateurs

10

Introduction

Nous nous proposons d'éclaircir certains aspects de l'amplificateur opérationnel laissés de côté lors de notre première étude, au chapitre 7.

Pourquoi les deux bornes inverseuse et non inverseuse ne sont-elles pas équivalentes ?

Pourquoi le gain d'un amplificateur non inverseur chute-t-il au-delà d'une certaine fréquence ?

Pour répondre à ces questions, nous allons devoir affiner le modèle de l'amplificateur opérationnel en tenant compte de sa propre fonction de transfert.

O B J E C T I F S

- Étudier le fonctionnement dynamique de l'amplificateur opérationnel.
- Expliquer ce fonctionnement au moyen d'un modèle.
- Étudier les comparateurs à hystérésis.

P R É R E Q U I S

- Fonctions de transfert d'ordre un et deux.
- Stabilité d'un circuit.
- Montages de base de l'amplificateur opérationnel.

Étude dynamique du montage amplificateur non inverseur

1.1. Étude expérimentale du signal de sortie en fonction de la fréquence

Réalisons un montage amplificateur non inverseur d'amplification statique $H_0 = 11$ (doc. 1) en prenant $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$.

Nous l'alimentons avec un GBF qui délivre une tension sinusoïdale dont la valeur de crête est de l'ordre de 1 V, de façon à ne pas saturer l'amplificateur opérationnel.

Nous pouvons définir une fonction de transfert et un gain :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|.$$

Pour tracer le diagramme de Bode (courbes de réponse en gain et en phase), le montage doit fonctionner en régime linéaire.

À chaque mesure, nous devons vérifier qu'il n'y a ni saturation, ni triangularisation et modifier l'amplitude du signal d'entrée si nécessaire. Nous ne pouvons donc pas nous contenter de mesures au multimètre : l'oscilloscope est obligatoire.

Les diagrammes de Bode obtenus pour les différentes valeurs du rapport $\frac{R_2}{R_1}$ correspondent à des filtres passe-bas d'ordre un.

En basse fréquence, le gain est proche du gain théorique :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Les courbes de réponse en gain présentent toutes la même asymptote haute fréquence :

$$G_{\text{dB}} = -20 \log \left(\frac{f}{f_0} \right),$$

de pente -20 dB/décade , avec $f_0 \approx 1 \text{ MHz}$, fréquence de gain nul.

Le déphasage en basse fréquence est nul, en haute fréquence il est voisin de $-\frac{\pi}{2}$.

Le montage non inverseur peut donc être modélisé par un filtre passe-bas du premier ordre.

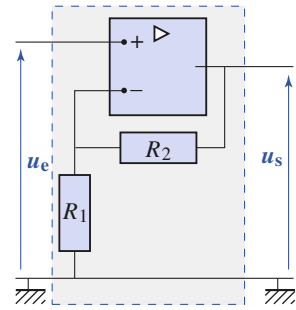
La fréquence de coupure f_c à -3 dB de ces montages est celle du point d'intersection des asymptotes basse fréquence et haute fréquence (filtres du premier ordre). Comme ils possèdent tous la même asymptote haute fréquence, le gain

à basse fréquence vérifie $G_0 = -20 \log \left(\frac{f_c}{f_0} \right)$, soit $H_0 f_c = f_0$.

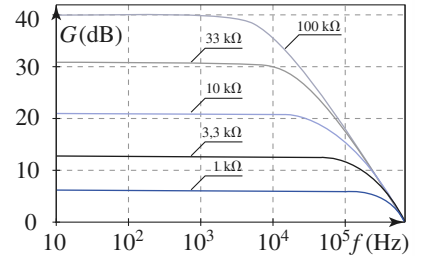
Le produit « gain » \times « bande passante à -3 dB » du montage est une constante caractéristique de l'amplificateur opérationnel.

1.2. Modélisation de l'amplificateur opérationnel réel

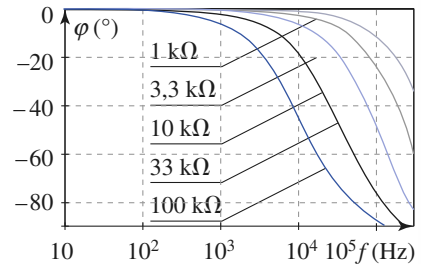
Les caractéristiques passe-bas de l'amplificateur non inverseur étudié sont dues à l'A.O. La relation entre v_s et v_e est analogue à celle qui relie la tension



Doc. 1. Amplificateur non inverseur. Un oscilloscope bicourbe mesure simultanément $v_e(t)$ et $v_s(t)$.



Doc. 2. Diagramme de Bode obtenu pour $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et R_2 variant de $1 \text{ k}\Omega$ à $100 \text{ k}\Omega$.



Doc. 3. Déphasage ϕ de v_s par rapport à v_e . Phase mesurée pour $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et R_2 variant de $1 \text{ k}\Omega$ à $100 \text{ k}\Omega$.

Le terme « gain » est un abus de langage, le terme correct est amplification.

v_C aux bornes de la capacité à la tension totale v dans un circuit (R, C) (filtre passe-bas élémentaire) :

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v.$$

Considérons le modèle de l'amplificateur opérationnel réel dit « à bande passante limitée ». Nous pouvons donner deux représentations de la relation entre v_s et v_e :

- une équation différentielle : $\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \mu_0 \varepsilon$,

τ étant une constante homogène à un temps et μ_0 une constante sans dimension ;

- une relation entre grandeurs complexes en régime sinusoïdal :

$$\underline{v}_s = \underline{\mu} \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau}.$$

Interprétons l'équation différentielle. L'amplificateur opérationnel est un amplificateur de différence $v_s = \mu(v_+ - v_-)$. Plus précisément, c'est un *amplificateur différentiel intégré*. Son *amplification différentielle en régime continu* est μ_0 (notée aussi A_d) et son *temps de relaxation* est τ .

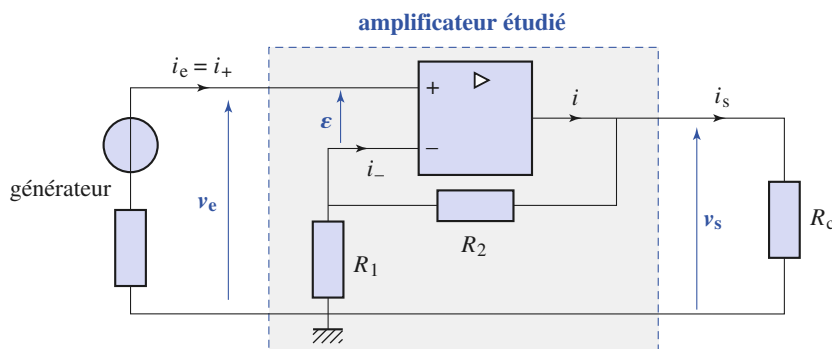
Vérifions que la relation $v_s + \tau \frac{dv_s}{dt} = \mu_0 \varepsilon$ conduit à des résultats compatibles avec ceux du § 1.1.

La formule du pont diviseur appliquée au niveau de l'entrée inverseuse ($i_- = 0$) donne (*doc. 4*) :

$$v_- = v_e - \varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s, \text{ d'où } v_s + \tau \frac{dv_s}{dt} = \mu_0 \left(v_e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s \right)$$

soit encore :

$$v_s \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) + \tau \frac{dv_s}{dt} = v_e.$$



◀ Doc. 4. Amplificateur non inverseur.

En régime sinusoïdal, cette équation s'écrit en notation complexe :

$$\underline{v}_s \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} + j\omega \frac{\tau}{\mu_0} \right) = \underline{v}_e,$$

ce qui entraîne, pour l'amplificateur non inverseur, la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} + j\omega \frac{\tau}{\mu_0}}.$$

Cette fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas.

Dans l'hypothèse $\frac{R_2}{R_1} \ll \mu_0$, l'équation de l'asymptote basse fréquence est :

$$G = 20 \log \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

et à haute fréquence :

$$G = -20 \log \left(\frac{f}{\frac{\mu_0}{2\pi\tau}} \right) = -20 \log \frac{f}{f_0}, \text{ avec } f_0 = \frac{\mu_0}{2\pi\tau}.$$

La fréquence f_0 est la fréquence de gain nul pour l'amplificateur non inverseur et sa valeur est indépendante de R_1 et R_2 .

Par ailleurs, calculons le gain de l'amplificateur opérationnel à la fréquence f_0 :

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j\mu_0}, \text{ puisque } \omega_0\tau = \mu_0, \text{ d'où :}$$

$$20 \log(|\underline{\mu}|) = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\mu_0^2}}} \right) \approx 0, \text{ car } \mu_0 \gg 1.$$

La fréquence f_0 est aussi la fréquence de coupure à gain nul de l'amplificateur opérationnel.

Les résultats expérimentaux sont compatibles avec le modèle que nous avons donné de l'amplificateur opérationnel réel (remarquons que τ est voisin de 2 ms pour le 741 puisque $\mu_0 \approx 10^5$ et $f_0 \approx 10^6$ Hz).

Remarques

La mesure de f_0 est simple (intersection de l'asymptote haute fréquence avec la droite $G_{dB} = 0$), alors que la valeur importante de μ_0 ($\approx 10^5$) rend sa mesure délicate.

1.3. Stabilité

Nous avons constaté empiriquement que le montage est stable si la rétroaction s'effectue sur l'entrée inverseuse. Le modèle de fonction de transfert passe-bas adopté pour l'amplificateur opérationnel permet d'expliquer ce phénomène.

Il suffit de reprendre l'équation différentielle obtenue au § 1.2. :

$$v_s \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) + \frac{\tau}{\mu_0} \frac{dv_s}{dt} = v_e.$$

Nous remarquons que le régime transitoire est du type $Ae^{-\frac{t}{\tau_0}}$, avec :

$$\tau_0 = \frac{\tau}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \approx \frac{\tau(R_1 + R_2)}{\mu_0 R_1}.$$

La durée de ce régime est très brève (de l'ordre de la microseconde) pour le montage non inverseur.

Permuter les entrées + et - est équivalent à changer μ_0 en $-\mu_0$. La solution transitoire est alors du type $Ae^{\frac{t}{\tau_0}}$. L'amplificateur opérationnel atteint théoriquement très rapidement la saturation (temps de l'ordre de la microseconde).

En fait, la vitesse de balayage σ de l'amplificateur opérationnel impose un temps de passage de 0 V à 15 V de l'ordre de 30 μ s pour un 741.

Application 1

Fonction de transfert d'un amplificateur inverseur

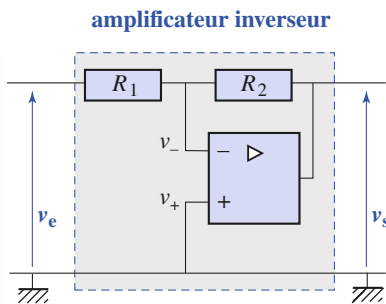
1) Déterminer la fonction de transfert d'un amplificateur inverseur réalisé à l'aide d'un amplificateur opérationnel réel décrit avec le modèle à bande passante limitée.

2) Quelles sont les valeurs asymptotiques du gain ?

3) Que vaut la fréquence de coupure à -3 dB ?

4) Vérifier que le montage est stable.

Réalisons le montage amplificateur inverseur (doc. 5).



Doc. 5. Amplificateur inverseur réalisé avec un A.O.

1) En régime linéaire :

$$v_s = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} (v_+ - v_-).$$

Comme $I_+ = 0$, nous avons $v_+ = 0$. Par ailleurs, la loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse donne :

$$\frac{v_e - v_-}{R_1} + \frac{v_s - v_-}{R_2} = 0, \text{ car } I_- = 0.$$

En éliminant v_- entre les deux relations précédentes, nous obtenons l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{1 + j\omega\tau}{\mu_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\text{soit } \underline{H}(j\omega) \approx -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{j\omega\tau}{\mu_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

2) L'équation de l'asymptote basse fréquence est :

$$G = 20 \log \frac{R_2}{R_1}$$

et celle de l'asymptote haute fréquence est :

$$G = -20 \log \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{\omega\tau}{\mu_0} \right].$$

Remarquons que l'équation de l'asymptote haute fréquence dépend des résistances R_1 et R_2 , contrairement à celle de l'amplificateur non inverseur.

Calculons la fréquence f_0 de gain nul de l'amplificateur inverseur en utilisant l'équation de l'asymptote haute fréquence :

$$G = -20 \log \frac{\omega}{\frac{\mu_0}{\tau} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0},$$

$$\text{d'où } f_0 = \frac{\mu_0}{2\pi\tau} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right).$$

3) En utilisant sa définition, la pulsation de coupure ω_c à -3 dB est donnée par :

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\omega_c\tau}{\mu_0} = 1, \text{ d'où } f_c = \frac{\mu_0}{2\pi\tau} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right).$$

Le produit « gain » × « bande passante à -3 dB » :

$$\frac{R_2}{R_1} f_c = \frac{\mu_0}{2\pi\tau} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = f_0$$

n'est pas constant, car la fréquence f_0 de gain nul est fonction de R_1 et R_2 .

4) Nous pouvons déduire, de la fonction de transfert, l'équation différentielle vérifiée par v_s :

$$\frac{\tau}{\mu_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{dv_s}{dt} + v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e.$$

Le régime transitoire est amorti ; le montage est donc stable.

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.

2 Comparateurs à hystérésis

2.1. Principe des comparateurs à hystérésis

2.1.1. Montages instables

Les comparateurs sont des montages fonctionnant à saturation de la tension de sortie : $v_s = \pm V_{\text{sat}}$.

Nous avons étudié au *chapitre 7* le comparateur simple : idéalement, sa tension de sortie est égale à $\pm V_{\text{sat}}$ selon que la tension d'entrée est supérieure ou inférieure à une tension de référence.

Des montages à A.O. avec une boucle de rétroaction positive (doc. 6 et 8), pour lesquels le fonctionnement linéaire, instable, n'est pas observable, réalisent ce type de fonctionnement des comparateurs à hystérésis.

2.1.2. Phénomène d'hystérésis

Pour ces montages, la commutation de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$ ne se fait pas pour la même tension d'entrée v_e que la commutation de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$ (doc. 7 et 9) : l'état du système dépend non seulement de la valeur d'entrée v_e , mais aussi de ses états antérieurs.

Le système garde la mémoire de son histoire : on appelle *hystérésis* le phénomène observé. Dans le plan (v_e , v_s), le système décrit un cycle d'*hystérésis*.

2.2. Comparateur non inverseur à hystérésis

Le schéma de principe de ce type de comparateur est donné *document 6*. La tension différentielle de ce comparateur est obtenue à l'aide du théorème de Millman :

$$v_{\text{de}} = v_+ - v_- = \frac{R_2 v_e + R_1 v_s}{R_1 + R_2} - V_{\text{ref}}$$

Lorsque l'amplificateur opérationnel est saturé positivement, nous avons tout à la fois :

$$v_s = +V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad v_{\text{de}} > 0.$$

Ce qui implique, en remplaçant v_s par $+V_{\text{sat}}$ dans l'expression précédente de v_{de} :

$$v_{\text{de}} = \frac{R_2 v_e + R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} - V_{\text{ref}} > 0, \quad \text{soit} \quad v_e > \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{\text{ref}} - \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = V_{e_1}.$$

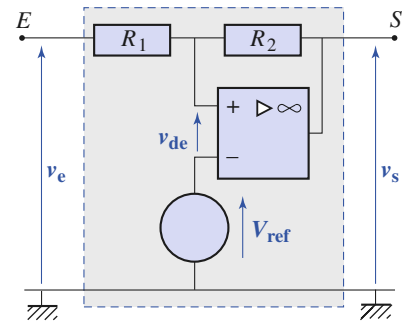
Le basculement de $v_s = +V_{\text{sat}}$ à $v_s = -V_{\text{sat}}$ se fait donc pour la tension de seuil $v_e = V_{e_1}$ au point de fonctionnement *B*.

En revanche, lorsque l'amplificateur opérationnel est saturé négativement, nous avons :

$$v_s = -V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad v_{\text{de}} < 0.$$

Ce qui entraîne, en remplaçant v_s par $-V_{\text{sat}}$ dans l'expression précédente de v_{de} :

$$v_{\text{de}} = \frac{R_2 v_e - R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} - V_{\text{ref}} < 0, \quad \text{soit} \quad v_e < \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{\text{ref}} + \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} = V_{e_2}.$$



Doc. 6. Comparateur non inverseur à hystérésis.

Le basculement de $v_s = -V_{sat}$ à $v_s = +V_{sat}$ s'effectue à la tension de seuil $v_e = V_{e_2}$, au point de fonctionnement B' .

Ces résultats conduisent à la caractéristique de transfert du *document 7*. Le cycle d'hystérésis est centré en $V_{e_0} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref}$ et sa largeur est $\Delta V_e = 2 \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

Remarque : La résistance d'entrée de ce comparateur est de l'ordre de R_1 .

2.3. Comparateur inverseur à hystérésis

Le schéma de principe de ce type de comparateur est donné sur le *document 8*. Par application de la relation de Millman à l'entrée non inverseuse de l'amplificateur opérationnel, nous obtenons :

$$v_+ = \frac{\frac{V_{ref}}{R_1} + \frac{v_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 V_{ref} + R_1 v_s}{R_1 + R_2}, \text{ soit } v_{de} = v_+ - v_e = \frac{R_2 V_{ref} + R_1 v_s}{R_1 + R_2} - v_e.$$

Lorsque l'amplificateur opérationnel est saturé positivement, nous avons tout à la fois :

$$v_s = +V_{sat} \text{ et } v_{de} > 0.$$

Ce qui implique, en remplaçant v_s par $+V_{sat}$ dans l'expression précédente de v_{de} :

$$v_{de} = \frac{R_2 V_{ref} + R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} - v_e > 0,$$

soit :
$$v_e < \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = V_{e_2}.$$

Le basculement de $v_s = +V_{sat}$ à $v_s = -V_{sat}$ se fait à la tension de seuil $v_e = V_{e_2}$, au point de fonctionnement B .

En revanche, lorsque l'amplificateur opérationnel est saturé négativement, nous avons :

$$v_s = -V_{sat} \text{ et } v_{de} < 0.$$

D'où, en remplaçant v_s par $-V_{sat}$ dans l'expression précédente de v_{de} :

$$v_{de} = \frac{R_2 V_{ref} - R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} - v_e < 0,$$

soit :
$$v_e > \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = V_{e_1}.$$

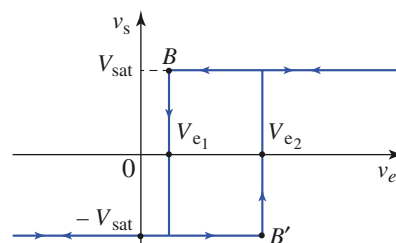
Le basculement de $v_s = -V_{sat}$ à $v_s = +V_{sat}$ s'effectue donc à la tension de seuil $v_e = V_{e_1}$, au point de fonctionnement B' .

Ces résultats permettent de tracer la caractéristique de transfert du *document 9*.

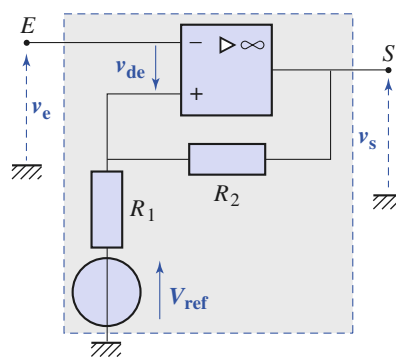
Le cycle d'hystérésis est centré en $V_{e_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref}$ et sa largeur est :

$$\Delta V_e = 2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}.$$

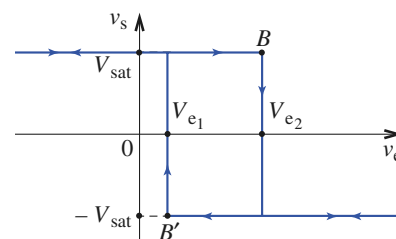
Remarque : La résistance d'entrée de ce comparateur est très grande. C'est une qualité que ne possède pas son homologue non inverseur.



Doc. 7. Caractéristique d'un comparateur non inverseur à hystérésis.



Doc. 8. Comparateur inverseur à hystérésis.

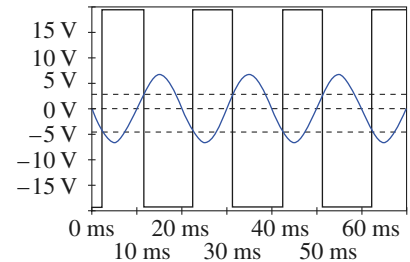
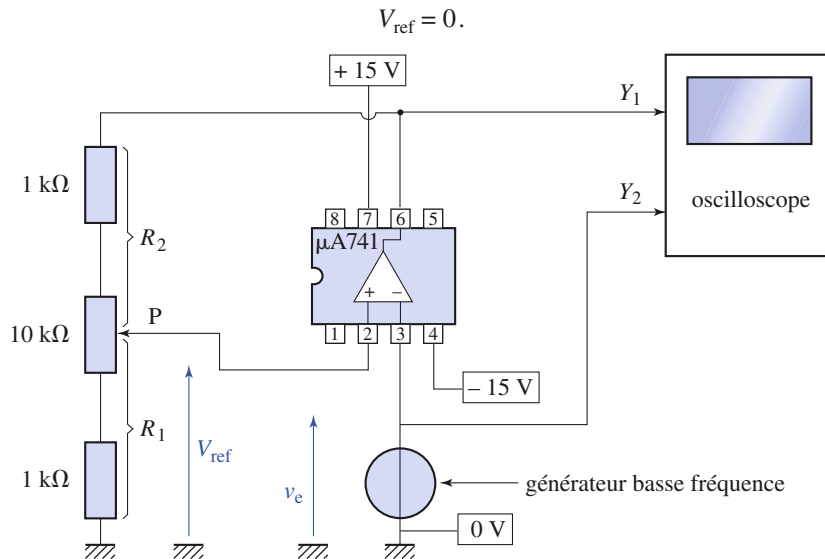


Doc. 9. Caractéristique d'un comparateur inverseur à hystérésis.

2.4. Vérifications expérimentales

2.4.1. Réalisation

Réalisons le comparateur inverseur à hystérésis décrit *document 10*, pour lequel :



Doc. 11. Réponse d'un comparateur inverseur à l'hystérésis à une excitation sinusoïdale de fréquence 50 Hz et d'amplitude 5 V.

Doc. 10. Montage expérimental pour l'étude d'un comparateur à hystérésis.

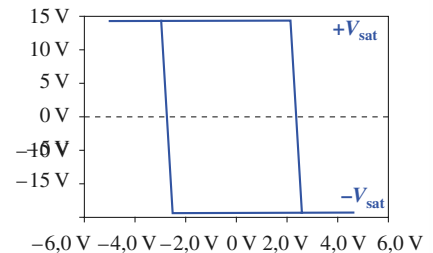
2.4.2. Observations

Réglons le G.B.F. pour qu'il délivre un signal sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz et d'amplitude $v_{e_m} = 5$ V. Observons les courbes données par l'oscillographe en mode bicourbe (*doc. 11*). Aucun défaut n'est perceptible. Commutons l'oscillographe en mode XY (*doc. 12*). La caractéristique est quasi idéale.

Faisons varier le rapport $k = \frac{2R_1}{R_1 + R_2}$ à l'aide du potentiomètre (P_1). La caractéristique reste centrée en $V_{ref} = 0$, mais la largeur ΔV_e du cycle est fonction du rapport k . Nous vérifions à cette occasion la formule :

$$\Delta V_e = \frac{2R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$

Diminuons la fréquence du signal délivré par le G.B.F. : un balayage assez lent de la tension d'entrée permet de percevoir le sens des basculements aux points de fonctionnement B et B' (*doc. 9*) afin d'en vérifier l'accord avec la théorie.



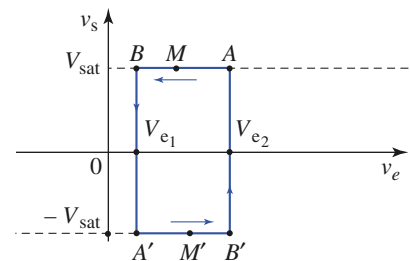
Doc. 12. Caractéristique d'un comparateur inverseur à hystérésis obtenue avec une excitation sinusoïdale de fréquence 50 Hz et d'amplitude 5 V.

3 Applications : oscillations de relaxation

3.1. Multivibrateur astable

3.1.1. Principe

Le montage est constitué de deux éléments : un comparateur à hystérésis et un intégrateur, dont le rôle est de faire glisser le point de fonctionnement M du comparateur vers ses points de basculement B et B' (*doc. 13* et 14).



Doc. 13. Pour réaliser un multivibrateur astable, le point de fonctionnement du comparateur non inverseur doit glisser de A vers B , puis de A' vers B' .

Plusieurs montages sont possibles selon que le comparateur est inverseur ou non et selon la nature du circuit associé.

Considérons un comparateur inverseur à hystérésis pour lequel $V_{ref} = 0$. Quand $v_s = +V_{sat}$, le point de fonctionnement M du comparateur doit se déplacer de A vers B qui est le point de basculement à saturation positive (doc. 14). En revanche, lorsque $v_s = -V_{sat}$, le point de fonctionnement M' du comparateur doit se déplacer de A' vers B' qui est le point de basculement à saturation négative.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que :

$$v_s = +V_{sat} \text{ entraîne } \frac{dv_e}{dt} > 0 \quad \text{et} \quad v_s = -V_{sat} \text{ entraîne } \frac{dv_e}{dt} < 0,$$

c'est-à-dire que $\frac{dv_e}{dt}$ doit être du signe de v_s .

Ces deux conditions sont simultanément réalisées par le circuit (R, C) (circuit pseudo-intégrateur) alimenté sous v_s et délivrant v_e (doc. 15). En effet, la loi des nœuds appliquée en E donne :

$$C \frac{dv_e}{dt} = \frac{v_s - v_e}{R}, \text{ soit } \frac{dv_e}{dt} = \frac{v_s - v_e}{\tau}$$

avec $\tau = RC$ constante de temps du circuit (R, C). La dérivée $\frac{dv_e}{dt}$ est bien du signe de v_s puisque :

$$|v_s| = V_{sat} > |v_e|.$$

La tension de sortie v_s du circuit bascule indéfiniment entre $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$: c'est un multivibrateur astable. Son chronogramme est donné document 16.

Remarque : Bien qu'une rétroaction existe sur la borne - de l'A.O., ce montage est instable ; cette rétroaction est rendue inexistante par la présence de la capacité qui ne peut admettre de discontinuité de potentiel entre ses bornes : une variation brusque de potentiel de S ne peut entraîner une variation brusque de celui de E .

3.1.2. Calcul de la période et du rapport cyclique

Pour ce calcul prenons comme nouvelle origine des temps la date d'un basculement, par exemple, de $+V_{sat}$ vers $-V_{sat}$. À $t = 0$, ce basculement s'est produit parce que $v_e(0) = V_{e2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.

À partir de cette date, le condensateur se charge à travers R sous la tension constante $v_s = -V_{sat}$. La loi d'évolution de $v_e(t)$ est donnée par la relation :

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{v_s - v_e}{\tau},$$

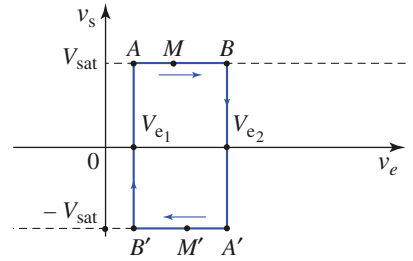
dans laquelle $v_s = -V_{sat}$. Ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{\tau} = -\frac{V_{sat}}{\tau},$$

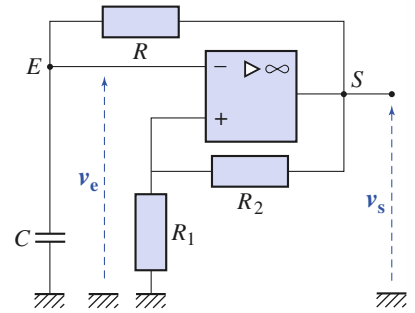
dont la solution est $v_e(t) = (V_{e2} + V_{sat}) e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{sat}$.

La tension $v_e(t)$ décroît à partir de V_{e2} pour tendre vers la tension $-V_{sat}$ qu'elle n'atteindra pas. En effet, à $t = t_1$, la tension $v_e(t)$ aura la valeur :

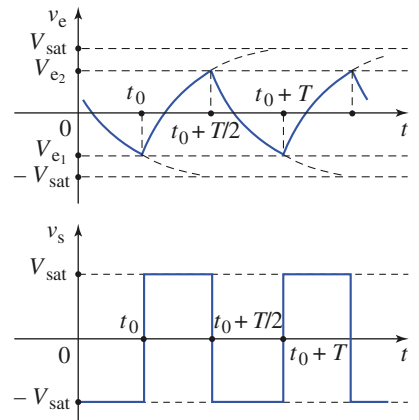
$$V_{e1} = -\frac{R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} \quad (< V_{e2})$$



Doc. 14. Pour réaliser un multivibrateur astable, le point de fonctionnement du comparateur inverseur doit glisser de A vers B , puis de A' vers B' .



Doc. 15. Multivibrateur astable à A.O.



Doc. 16. Chronogramme d'un multivibrateur astable.

et un nouveau basculement se produira amenant la tension de sortie de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$. La date $t = t_1$ se calcule en écrivant :

$$v_e(t_1) = V_{e_1} = (V_{e_2} + V_{\text{sat}}) e^{-\frac{t_1}{\tau}} - V_{\text{sat}},$$

d'où
$$t_1 = \tau \ln \left(\frac{V_{e_2} + V_{\text{sat}}}{V_{e_1} + V_{\text{sat}}} \right).$$

Le condensateur se charge alors à travers R sous la tension constante $v_s = V_{\text{sat}}$. La tension $v_e(t)$ croît à partir de V_{e_1} pour tendre vers la tension V_{sat} qu'elle n'atteindra pas. En effet, à $t = t_1 + t_2$ la tension $v_e(t)$ aura la valeur V_{e_2} ($> V_{e_1}$) et un nouveau basculement se produira amenant la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$. Le phénomène se poursuit ainsi indéfiniment.

Le calcul de la durée t_2 , qui se mène comme celui de la durée t_1 , donne :

$$t_2 = \tau \ln \left(\frac{V_{e_1} - V_{\text{sat}}}{V_{e_2} - V_{\text{sat}}} \right).$$

Posons $k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, il vient $V_{e_1} = -kV_{\text{sat}}$ et $V_{e_2} = kV_{\text{sat}}$. Les expressions des durées t_1 et t_2 se simplifient et nous constatons qu'elles sont égales, ce qui était prévisible car le cycle est symétrique :

$$t_1 = t_2 = \tau \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right).$$

La période de l'astable est $T = t_1 + t_2 = 2\tau \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right)$ et son rapport cyclique δ , qui est, par définition, le rapport de la durée de l'état à saturation positive t_2 sur la période T , vaut $\delta = \frac{t_2}{T} = 0,5$.

3.1.3. Contrôle de la période et du rapport cyclique

La période est proportionnelle à la constante de temps $\tau = RC$. Nous pouvons contrôler la période en utilisant une résistance R variable ou un condensateur C variable. Nous utiliserons un condensateur C variable, réservant la résistance R pour le contrôle du rapport cyclique.

Pour modifier le rapport cyclique sans modifier la fréquence, il suffit de faire varier de la même quantité et en sens opposé les deux constantes de temps τ_1 et τ_2 associées aux deux durées t_1 et t_2 . Le montage réalisé est indiqué *document 17*. Les résistances r sont des résistances de protection lorsque x prend une de ses valeurs extrêmes 0 ou 1. Pendant la durée t_2 de l'état de saturation positive de l'A.O., la diode D_1 est bloquée tandis que la diode D_2 conduit. La constante de temps de charge du condensateur est :

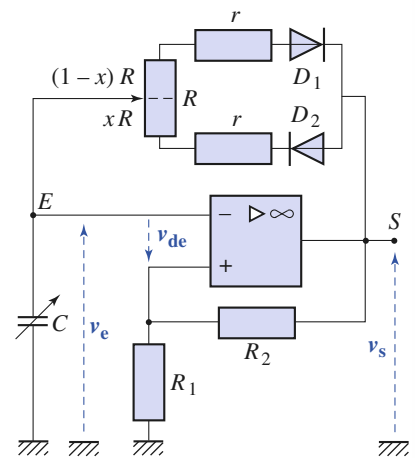
$$\tau_2 = (xR + r)C.$$

En revanche, pendant la durée t_1 de l'état de saturation négative de l'A.O., c'est la diode D_2 qui est bloquée tandis que la diode D_1 conduit. La nouvelle constante de temps de charge du condensateur est :

$$\tau_1 = [(1-x)R + r]C.$$

D'où les nouvelles expressions des durées t_1 et t_2 :

$$t_1 = \tau_1 \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right) \quad \text{et} \quad t_2 = \tau_2 \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right),$$



Doc. 17. Astable à A.O. avec contrôle de la fréquence et du rapport cyclique.

$R_1 = R_2 = 20 \text{ k}\Omega$; $R = 10 \text{ k}\Omega$;
 $r = 100 \Omega$ et C boîte de condensateurs.

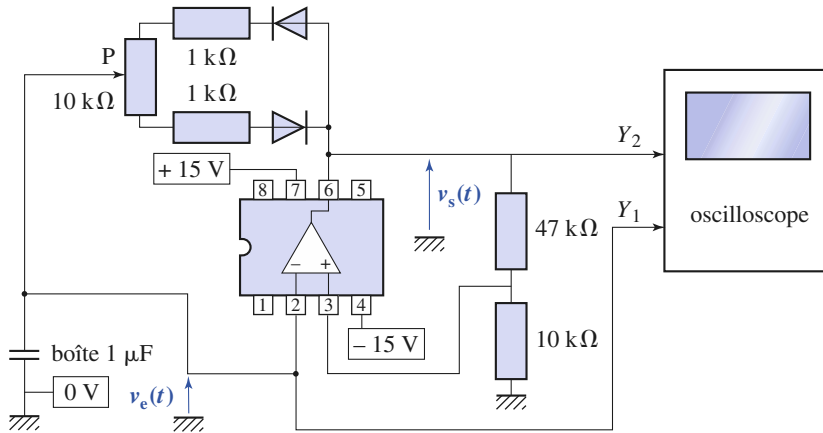
et celle de la période T de l'astable :

$$T = t_1 + t_2 = (\tau_1 + \tau_2) \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) = (R + 2r)C \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right),$$

qui est indépendant de x .

En revanche, la nouvelle expression du rapport cyclique $\delta = \frac{t_2}{T} = \frac{xR + 2}{R + 2r}$ est une fonction affine de x , ce qui permet son contrôle.

3.1.4. Vérifications expérimentales

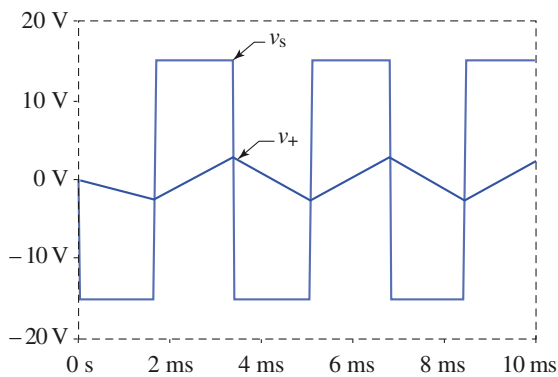


Doc. 18. Montage expérimental pour l'étude d'un multivibrateur astable.

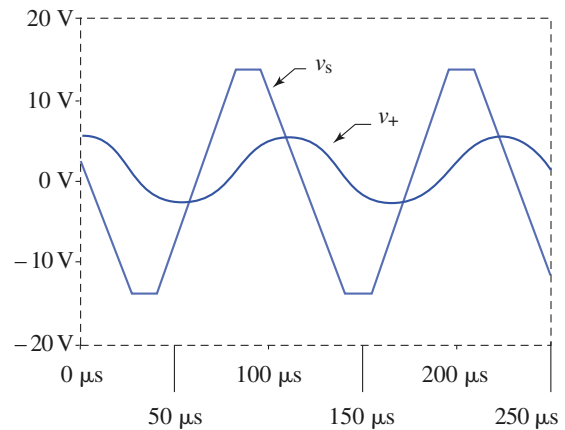
Réalisons le montage du document 18, avec $C = 1 \mu\text{F}$ (boîte de condensateurs).

Observons à l'oscilloscope, en mode bicourbe, la forme des signaux $v_e(t)$ et $v_s(t)$. Faisons varier le curseur du potentiomètre (P) et examinons les modifications des signaux $v_e(t)$ et $v_s(t)$. Nous remarquons une modification du rapport cyclique sans modification de période.

Plaçons le curseur du potentiomètre en position moyenne et faisons varier la valeur de la capacité C . Observons les modifications des signaux $v_e(t)$ et $v_s(t)$. Pour des valeurs connues de C , nous pouvons vérifier la proportionnalité de la période T à C .



Doc. 19. Multivibrateur astable $C = 1 \mu\text{F}$: les signaux sont conformes à la théorie.



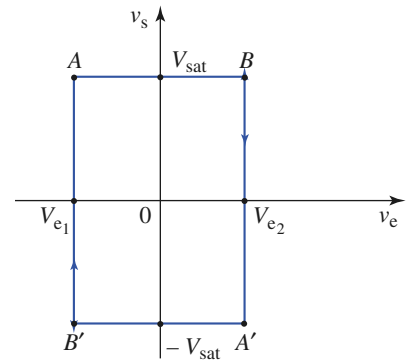
Doc. 20. Multivibrateur astable $C = 10 \text{ nF}$: les signaux sont déformés à cause de la vitesse de balayage de l'A.O.

Le curseur du potentiomètre (P) étant toujours en position moyenne diminuons progressivement la valeur de la capacité C . Observons la déformation de plus en plus accentuée des signaux $v_e(t)$ et $v_s(t)$ (doc. 19 et 20). En utilisant le signal $v_s(t)$, évaluons la vitesse maximale de balayage σ de l'A.O.

- La déformation des signaux est due à la vitesse finie de balayage des tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$. Quand cette vitesse de balayage atteint sa valeur maximale, les flancs de $v_s(t)$ ne sont plus verticaux.

Plaçons l'oscilloscope en mode XY et observons la courbe $v_s = f(v_e)$ du comparateur.

- On n'observe que la partie de la caractéristique utilisée durant le fonctionnement du comparateur (doc. 21).



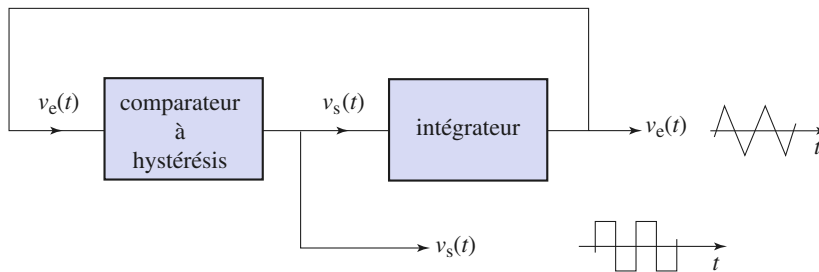
Doc. 21. Le point de fonctionnement de l'astable décrit le cycle $ABA'B'A$ ($C = 1 \mu\text{F}$).

3.2. Principe des générateurs de fonctions

3.2.1. Un système oscillateur

Un générateur de fonctions est généralement constitué d'une boucle comprenant un comparateur à hystérésis et un intégrateur (doc. 22). Il est conçu de telle sorte que le point de fonctionnement du comparateur se déplace vers ses points de basculement B et B' .

Il est possible d'utiliser les deux types de comparateurs à condition de lui associer le type d'intégrateur adéquat.



Doc. 22. Principe d'un générateur de fonctions.

Nous prenons l'exemple d'un comparateur non inverseur à hystérésis.

La caractéristique d'un tel comparateur, avec $V_{ref} = 0$, est rappelée document 23. Quand $v_s = V_{sat}$, le point de fonctionnement M du comparateur doit se déplacer de A vers B qui est le point de basculement à saturation positive.

En revanche, lorsque $v_s = -V_{sat}$, le point de fonctionnement M' du comparateur doit se déplacer de A' vers B' qui est le point de basculement à saturation négative.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que :

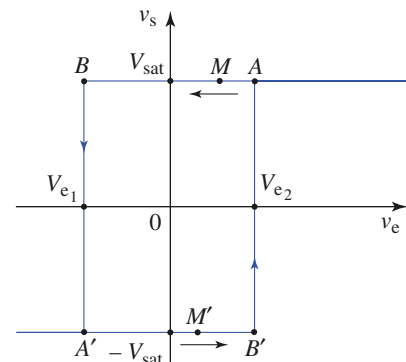
$$v_s = +V_{sat} \text{ entraîne } \frac{dv_e}{dt} < 0 \text{ et } v_s = -V_{sat} \text{ entraîne } \frac{dv_e}{dt} > 0.$$

Ces deux conditions sont simultanément réalisées par un intégrateur inverseur commandé par v_s et délivrant v_e :

$$\frac{dv_e}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_s,$$

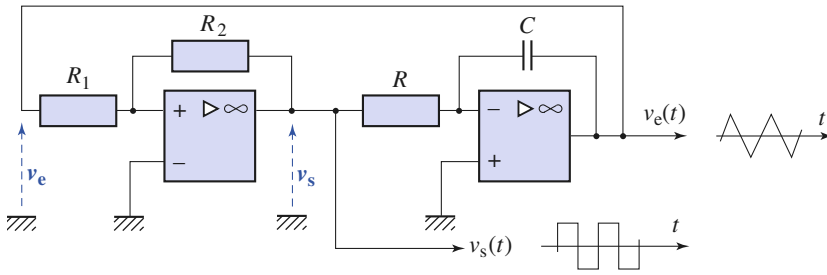
avec τ constante de temps de l'intégrateur.

D'où la réalisation donnée document 24 et le chronogramme correspondant donné document 25.



Doc. 23. Caractéristique d'un comparateur non inverseur à hystérésis.

$$V_{ref} = 0 \text{ et } V_{e2} = |V_{e1}| = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$$



Doc. 24. Générateur de fonctions à intégrateur non inverseur à hystérésis.

3.2.2. Calcul de la période

Prenons pour origine des temps l'instant auquel se produit un basculement, par exemple, de $+V_{\text{sat}}$ vers $-V_{\text{sat}}$. À cette date, nous avons :

$$v_e(0) = V_{e_1} = -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}.$$

À partir de ce moment, l'intégrateur est attaqué avec une tension constante $v_s = -V_{\text{sat}}$. La loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse de l'intégrateur donne :

$$-\frac{V_{\text{sat}}}{R} + C \frac{dv_e}{dt} = 0, \text{ soit } dv_e = \frac{V_{\text{sat}}}{RC} dt.$$

Ainsi, $v_e(t)$ croît avec le temps à partir de la valeur V_{e_1} :

$$\int_{V_{e_1}}^{v_e} dv_e = \frac{V_{\text{sat}}}{RC} \int_0^t dt, \text{ d'où } v_e(t) = V_{e_1} + \frac{V_{\text{sat}}}{RC} t.$$

À la date $t = t_1$, il atteindra la valeur V_{e_2} et un basculement de $-V_{\text{sat}}$ vers $+V_{\text{sat}}$ se produira. La date t_1 de basculement se calcule à partir du résultat précédent :

$$t_1 = \frac{V_{e_2} - V_{e_1}}{V_{\text{sat}}} RC = 2 \frac{R_1}{R_2} RC.$$

Un nouveau basculement de $+V_{\text{sat}}$ vers $-V_{\text{sat}}$ se produira à $t = t_1 + t_2$, tel que :

$$t_2 = t_1 = \frac{T}{2}, \text{ d'où } T = 4 \frac{R_1}{R_2} RC.$$

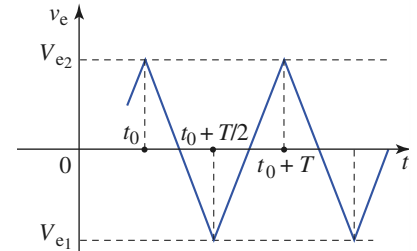
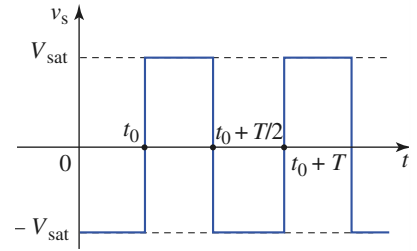
La tension $v_s(t)$ à la sortie du comparateur est un signal carré de rapport cyclique $\delta = 0,5$ et, à la sortie de l'intégrateur, $v_e(t)$ est un signal triangulaire symétrique de même période.

3.2.3. Contrôle de la période et du rapport cyclique

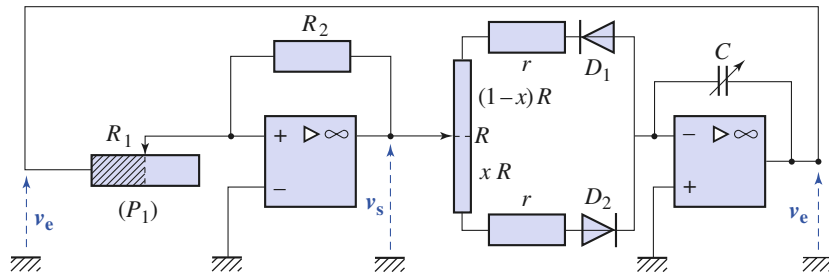
On pourra se reporter au § 3.1.3.

La période T (proportionnelle à $t = RC$) est contrôlée soit par la résistance R , soit par le condensateur C . Comme pour l'astable, nous contrôlerons la fréquence avec un condensateur réglable C , réservant R pour le contrôle du rapport cyclique.

Pour modifier le rapport cyclique sans modifier la fréquence, nous ferons varier de la même quantité et en sens inverse les deux constantes de temps τ_1 et τ_2 associées aux deux durées t_1 et t_2 . Le montage réalisé est identique à celui utilisé pour l'astable ; il est donné document 26, où $0 \leq x \leq 1$.



Doc. 25. Chronogrammes d'un générateur de fonctions à comparateur non inverseur à hystérésis.



◀ Doc. 26. Générateur de fonctions avec contrôle de la fréquence et du rapport cyclique.

Pendant la durée t_2 de l'état de saturation positive de l'A.O., la diode D_1 est bloquée tandis que la diode D_2 conduit. La constante de temps de l'intégrateur est :

$$\tau_2 = (xR + r)C.$$

En revanche, pendant la durée t_1 de l'état de saturation négative de l'A.O., c'est la diode D_2 qui est bloquée tandis que la diode D_1 conduit. La constante de temps de l'intégrateur devient $\tau_1 = [(1-x)R + r]C$.

D'où les nouvelles expressions des durées t_1 et t_2 :

$$t_1 = 2 \frac{R_1}{R_2} \tau_1 \quad \text{et} \quad t_2 = 2 \frac{R_1}{R_2} \tau_2,$$

et celle de la période T de l'astable :

$$T = t_1 + t_2 = 2 \frac{R_1}{R_2} (\tau_1 + \tau_2) = 2 \frac{R_1}{R_2} (R + 2r)C,$$

qui est indépendante de x .

En revanche, la nouvelle expression du rapport cyclique :

$$\delta = \frac{t_2}{T} = \frac{xR + r}{R + 2r}$$

est une fonction affine de x , ce qui permet son contrôle.

Remarque

Le potentiomètre (P_1) agit sur la largeur du cycle d'hystérésis, donc sur l'amplitude $|V_{e1}| = V_{e2}$ des signaux triangulaires. Les constantes de temps τ_1 et τ_2 ne sont pas affectées par les variations de (P_1). Le rapport cyclique du signal carré est conservé, mais la période T des signaux est modifiée. Si la capacité variable C est réalisée avec un ensemble de capacités commutables, le potentiomètre (P_1) permet un réglage de la fréquence à l'intérieur des différentes gammes de fréquences obtenues par commutation de C .

► Pour s'entraîner : ex. 4 et 5.

- Pour rendre compte des observations incompatibles avec le modèle de l'amplificateur opérationnel, il faut tenir compte de son comportement fréquentiel.

Il est bien représenté par un modèle de type filtre passe-bas d'ordre un, avec une amplification statique μ_0 très grande mais finie et une constante de temps τ telles que :

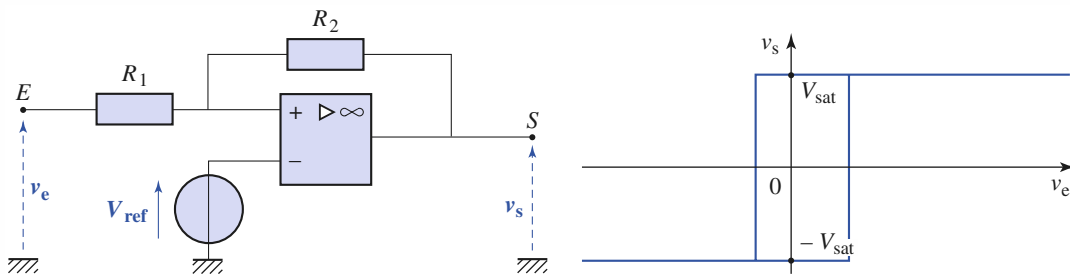
$$v_s + \tau \frac{dv_s}{dt} = \mu_0 \varepsilon \quad \text{ou en notation complexe : } \underline{v}_s = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} \quad \text{avec } \underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau}$$

typiquement, $\mu_0 \approx 10^5$ et $\tau \approx 2$ ms pour un A.O. de la série « 741 » (les plus lents).

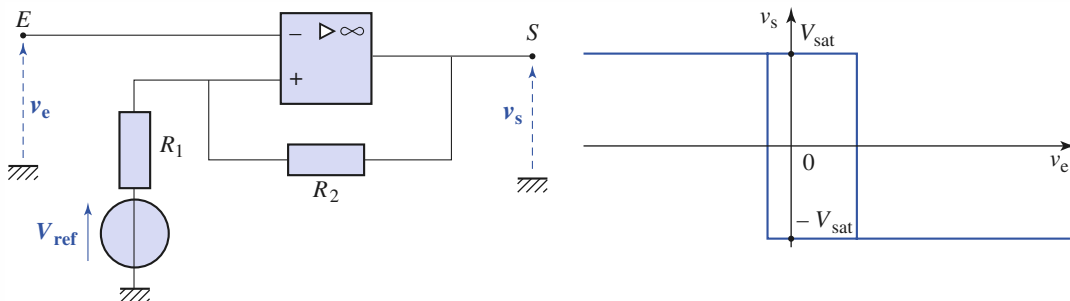
- Ce modèle permet d'expliquer que :
- Un amplificateur devient instable lorsqu'on intervertit les deux entrées de l'A.O.
- Le produit { « gain » × « bande passante à -3 dB » } d'un amplificateur non inverseur (ou inverseur de grand gain) est une constante caractéristique de l'amplificateur utilisé (ce gain représente l'amplification statique de l'amplificateur).

● COMPAREUR À HYSTÉRÉSIS

- Un comparateur à hystérésis est réalisé à l'aide d'un amplificateur opérationnel possédant une boucle de rétroaction aboutissant sur l'entrée non inverseuse.
- Il existe deux types de comparateurs à hystérésis selon que le signal d'entrée v_e est introduit sur l'entrée non inverseuse (comparateur non inverseur à hystérésis) (*doc. 27*) ou sur l'entrée inverseuse (comparateur inverseur à hystérésis) (*doc. 28*).



Doc. 27. Comparateur non inverseur à hystérésis.



Doc. 28. Comparateur inverseur à hystérésis.

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Montrer comment tenir compte de la relation $v_s = \underline{\mu} \underline{\varepsilon}$ pour l'analyse d'un montage à amplificateur opérationnel.
- ✓ Comment voir si un système est stable à partir de l'équation différentielle ?
- ✓ Se souvenir que les deux montages « comparateur à hystérésis » sont obtenus à partir des montages amplificateur non inverseur et inverseur en permutant les entrées de l'A.O.
- ✓ Comment tracer la courbe v_s en fonction de v_e pour un comparateur à hystérésis ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. **Le produit amplification statique \times bande passante d'un amplificateur non inverseur dépend de l'A.O. utilisé.**
 Vrai Faux
2. **Le temps de relaxation τ d'un A.O. est de l'ordre de :**
 a. la microseconde b. la milliseconde
 c. la seconde d. l'heure.
3. **À basse fréquence, il faut tenir compte de l'amplification μ_0 de l'A.O. pour donner une valeur précise du gain d'un montage amplificateur non inverseur.**
 Vrai Faux
4. **Un montage suiveur fonctionne bien jusqu'à quelques centaines de kilohertz.**
 Vrai Faux
5. **Pour analyser un comparateur à hystérésis, on peut, en première approximation, supposer que l'amplificateur est idéal et que donc $\varepsilon = 0$.**
 Vrai Faux
6. **La commutation entre les deux valeurs de la tension de sortie d'un comparateur à hystérésis s'effectue pour $\varepsilon = 0$.**
 Vrai Faux

► Solution, page 266.

Exercices

1 Influence de la fonction de transfert d'un A.O. sur un dérivateur

On réalise un dérivateur à A.O. avec une résistance R et une capacité C .

Déterminer la fonction de transfert du montage en tenant compte de la fonction de transfert de l'A.O. réel.

Vérifier que pour $RC = 1 \text{ ms}$, $\mu_0 = 10^5$ et $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = 1 \text{ MHz}$, la fréquence de résonance est voisine de 13 MHz.

Calculer le coefficient de qualité de montage.

2 Stabilité du régime libre d'un intégrateur

On réalise un intégrateur à A.O. avec une résistance R et une capacité C . On néglige aussi les dérives de l'A.O., mais on tient compte de sa fonction de transfert.

- 1) Déterminer la fonction de transfert du montage.
- 2) Étudier son régime libre et vérifier qu'il est stable.
- 3) Que ce passe-t-il si on intervertit les deux entrées ?

3 Régime transitoire d'un comparateur à hystérésis

Considérons un comparateur non inverseur à hystérésis, ou encore appelé trigger de Schmitt non inverseur, réalisé avec un amplificateur opérationnel.

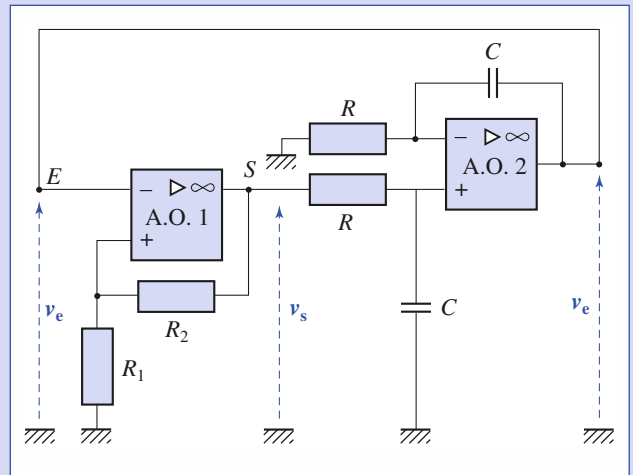
Déterminer dans le cas d'un amplificateur opérationnel régi par l'équation différentielle :

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \mu v_{de}$$

la solution générale $v_s(t)$ lorsque la tension d'entrée v_e est constante.

4 Générateur de fonctions à comparateur inverseur à hystérésis

- 1) Analyser le générateur de fonctions représenté sur le schéma ci-dessous.
- 2) Calculer la période T des signaux délivrés.



D'où l'expression de sa tension différentielle d'entrée :

$$v_{de} = v_+ - v_- = \frac{R_2 v_e + R_1 v_s}{R_1 + R_2} - V_{ref}.$$

En utilisant l'équation différentielle qui décrit le régime transitoire de l'amplificateur opérationnel.

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \mu v_{de},$$

il vient $\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \mu \left[\frac{R_2 v_e + R_1 v_s}{R_1 + R_2} - V_{ref} \right],$

soit :

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + \left[1 - \frac{\mu R_1}{R_1 + R_2} \right] v_s = \mu \left[\frac{R_2 v_e}{R_1 + R_2} - V_{ref} \right]$$

dont la solution est la somme :

- de la solution générale de l'équation différentielle homogène :

$$v_{s_0}(t) = A e^{-\left(1 - \frac{\mu R_1}{R_1 + R_2}\right) \frac{t}{\tau}} \cong A e^{-\frac{\mu R_1}{R_1 + R_2} \frac{t}{\tau}}$$

puisque $\mu \gg 1$. La constante d'intégration A est déterminée par les conditions initiales ;

- d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Cherchons une solution particulière constante v_{s_1} :

$$\begin{aligned} v_{s_1} &= \frac{\mu [R_2 v_e - (R_1 + R_2) V_{ref}]}{(1 - \mu) R_1 + R_2} \\ &\cong \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_{ref} - \frac{R_2}{R_1} v_e, \end{aligned}$$

soit finalement :

$$v_s(t) = A e^{-\frac{\mu R_1}{R_1 + R_2} \frac{t}{\tau}} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_{ref} - \frac{R_2}{R_1} v_e.$$

La solution diverge très rapidement à cause du terme exponentiel. L'amplificateur opérationnel tend très rapidement vers un état de saturation $\pm V_{sat}$, selon le signe de A fonction des conditions initiales.

Un tel circuit fonctionne en régime de commutation et se prête bien, comme prévu, à la réalisation de comparateurs.

Nous aurions abouti à la même conclusion en considérant un comparateur inverseur à hystérésis, ou trigger de Schmitt inverseur, comme il est possible de s'en convaincre en étudiant son régime transitoire.

4

1) On note par v le potentiel commun aux entrées inverseuse et non inverseuse de l'A.O. 2. On applique la loi des noeuds respectivement à ces deux entrées, il vient :

$$\frac{v}{R} + C \frac{d(v_e - v)}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{v_s - v}{R} - C \frac{dv}{dt} = 0.$$

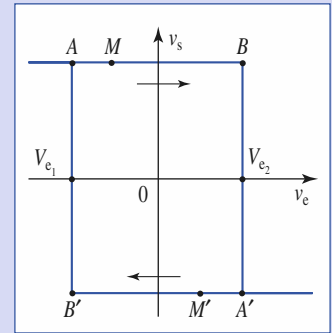
On élimine v :

$$C \frac{dv_e}{dt} = \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = \frac{v_s}{R},$$

d'où $v_s = RC \frac{dv_e}{dt}$, avec $\tau = RC$.

L'A.O. 2 réalise un intégrateur non inverseur de constante de temps $\tau = RC$.

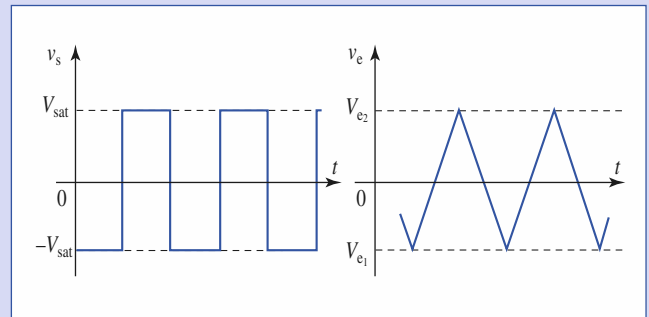
L'A.O. 1 réalise un comparateur inverseur, dont la caractéristique est rappelée sur la figure.



Quand $v_s = V_{sat}$, on a $\frac{dv_e}{dt} = \frac{V_{sat}}{\tau} > 0$: le point de fonctionnement $M(v_e, V_{sat})$ du comparateur se déplace sur la caractéristique vers le point de basculement B.

Lorsque $v_s = -V_{sat}$, on a $\frac{dv_e}{dt} = -\frac{V_{sat}}{\tau} < 0$: le point de fonctionnement $M(v_e, -V_{sat})$ du comparateur se déplace sur la caractéristique vers le point de basculement B'.

Ainsi le comparateur bascule sans arrêt d'un état de saturation à l'autre, le circuit réalisé est un générateur de fonctions dont les chronogrammes des signaux délivrés sont donnés sur le schéma ci-dessous.



2) On prend comme origine des temps l'instant d'un basculement de $-V_{sat}$ vers $+V_{sat}$. À cette date, nous avons $v_e = V_{e_1} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ et, à partir de cette date, l'intégrateur est attaqué par la tension constante $v_e = V_{sat}$. Par intégration, l'équation de l'intégrateur donne $t = \frac{\tau}{V_{sat}} (v_e - v_{e_1})$.

À la date $t_1 = \frac{\tau}{V_{sat}} (v_{e_2} - v_{e_1})$, la tension v_e atteint la valeur de basculement V_{e_2} et le comparateur bascule de l'état de saturation positive vers l'état de saturation négative. Les durées des états de saturation positive et négative du comparateur sont égales. La période des signaux délivrés par le générateur de fonctions est :

$$T = 2t_1 = \frac{2\tau}{V_{sat}} (V_{e_2} - V_{e_1}) = 4 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tau.$$

11

Redressement et lissage

OBJECTIFS

- Redressement d'une tension sinusoïdale.
- Obtention d'une tension continue.
- Détection de l'enveloppe d'un signal modulé en amplitude.

PRÉREQUIS

- Fonctionnement de l'A.O. en régime linéaire et en régime saturé.
- Circuit RC.

Introduction

Une diode est un composant non linéaire qui ne laisse passer le courant que dans un sens comparable à une valve dans un circuit hydraulique.

Cette propriété est utilisée dans les redresseurs dont la fonction est de fournir une tension toujours positive à partir d'une tension alternative.

La tension redressée peut ensuite être « lissée » : alimentation en continu d'un appareil électrique à partir de la tension alternative du secteur, détection de la modulation d'amplitude d'une onde radio (AM).

Diodes de redressement

1.1. Diodes à jonction

Une diode à jonction est un monocristal de semiconducteur (Si, Ge) dans lequel la conductibilité passe du type P (les porteurs sont les trous) au type N (les porteurs sont des électrons libres) – (doc. 1). Le type de conductibilité s'obtient par dopage, c'est-à-dire par addition d'impuretés de type convenable. L'interface des deux régions P et N constitue la jonction P-N, dont les propriétés remarquables sont exploitées dans de nombreux composants à semiconducteurs, dont les diodes à jonction et les transistors.

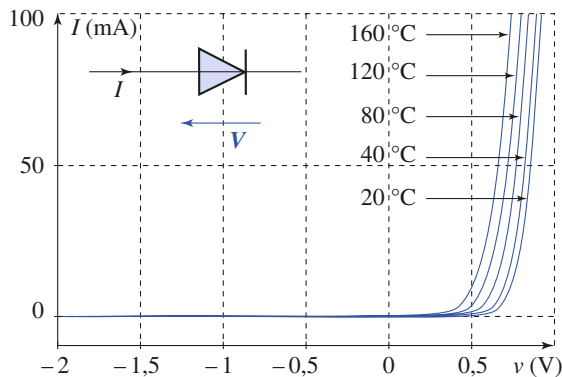
1.2. Caractéristiques

1.2.1. Modélisation du composant

La caractéristique statique *théorique* d'une diode à jonction est $I = I_s \left(e^{\frac{V}{\alpha U_T}} - 1 \right)$ avec I_s courant de saturation, U_T tension thermodynamique fonction de la température et α constante sans dimension. Pour une diode au silicium :

$$I_s \approx 1 \text{ pA}, U_T \approx 25 \text{ mV à } T = 27^\circ \text{C}$$

et $1 \leq \alpha \leq 2$ selon le type de diode.



Doc. 2. Caractéristique statique d'une diode à jonction à différentes températures.

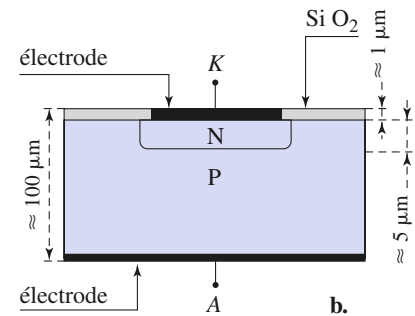
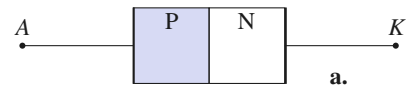
La caractéristique statique *réelle* d'une diode diffère notablement de sa caractéristique théorique, car dès que $|V| > 20U_T$ environ, elle tend à devenir rectiligne (doc. 2). Cette particularité explique la modélisation connue de la caractéristique d'une diode (doc. 3) avec V_D tension de seuil ($V_D \approx 0,6 \text{ V}$ pour une diode au silicium et $V_D = 0,3 \text{ V}$ pour une diode au germanium),

$$r_d = \left(\frac{dV}{dI} \right)_{V > 0} \quad \text{résistance dynamique en direct, de l'ordre de } 10 \Omega,$$

$$R_i = \left(\frac{dV}{dI} \right)_{V < 0} \quad \text{résistance dynamique en inverse, de l'ordre de } 100 \text{ M}\Omega.$$

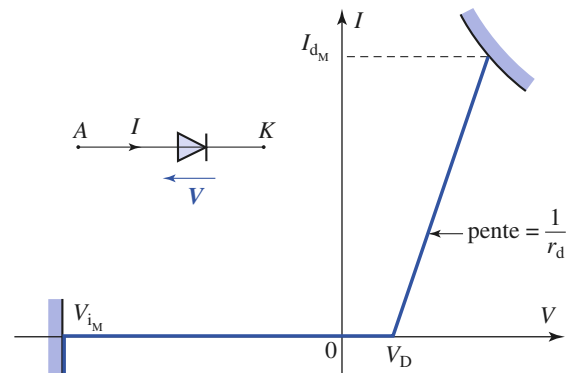
1.2.2. Limites d'utilisation

Le courant direct I d'une diode doit être inférieur au *courant direct maximal admissible* I_{dM} courant au-delà duquel la puissance dissipée par effet Joule



Doc. 1 a. Structure théorique d'une jonction P-N.

b. Structure d'une diode à jonction.



Doc. 3. Modélisation de la caractéristique statique d'une diode avec limitations absolues en courant I_{dM} et en tension V_{iM} .

provoque la destruction thermique de la jonction P-N. Cette limite absolue d'utilisation varie de quelques 10 mA à quelques 10 A suivant le modèle de diode utilisé.

La tension inverse maximale admissible V_{iM} est la tension inverse maximale que peut supporter la diode sans claquer, c'est-à-dire sans être détruite : elle varie, suivant le type de diodes, de 80 V à 500 V environ.

1.3. Modèle de la diode idéale

Une diode idéale est un élément dont la caractéristique a pour équation (doc. 4) :

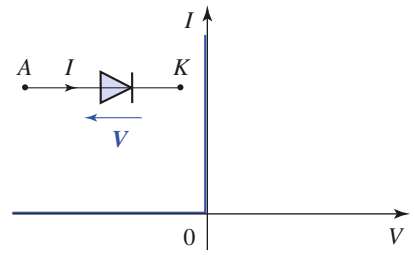
$$I = 0 \text{ si } V \leq 0 \text{ et } V = 0 \text{ si } I \geq 0.$$

Cet élément pourra être quasiment réalisé, en régime continu ou en basse fréquence, à l'aide d'une diode et d'un amplificateur opérationnel, comme nous le verrons ultérieurement au § 2.4.

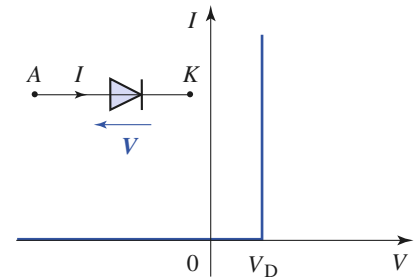
Comparativement à une diode idéale, une diode réelle possède trois défauts :

- existence d'une tension de seuil V_D ;
- résistance dynamique directe r_d non nulle ;
- résistance dynamique inverse R_i non infinie.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne tiendrons compte que du défaut principal des diodes, à savoir l'existence de la tension de seuil V_D . Ainsi, sauf spécification contraire, les diodes considérées sont des dipôles dont la caractéristique est représentée dans le document. 5.



Doc. 4. Caractéristique d'une diode idéale.



Doc. 5. Sauf spécification contraire, toutes les diodes considérées dans ce chapitre ont une caractéristique du type de celle représentée ci-dessus.

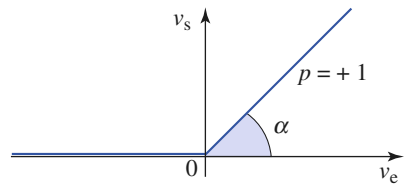
2 Redressement simple alternance

2.1. Définition

Un redresseur simple alternance est un quadripôle pour lequel :

$$v_s = \begin{cases} v_e & \text{si } v_e > 0 \\ 0 & \text{si } v_e < 0. \end{cases}$$

Sa caractéristique $v_s = f(v_e)$ est représentée dans le document 6.



Doc. 6. Caractéristique de transfert d'un redresseur simple alternance.

2.2. Redresseur élémentaire simple alternance

Réalisons le circuit du document 7, dans lequel D est une diode de redressement, R_u une résistance symbolisant un circuit d'utilisation et $v_e(t) = v_{em} \sin(\omega t)$ le signal sinusoïdal délivré par le G.B.F.

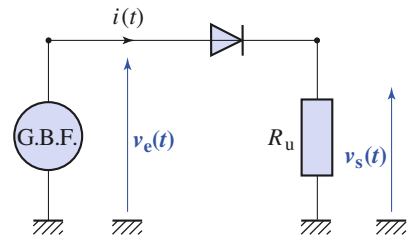
Lorsque la diode conduit ($i(t) > 0$), nous avons :

$$v_s(t) = v_e(t) - V_D = R_u i(t) > 0.$$

Soit encore :

$$v_s(t) = v_{em} \sin(\omega t) - V_D > 0.$$

Quand l'inégalité précédente n'est pas satisfaite ($v_e(t) - V_D < 0$), la diode est bloquée : $i(t) = 0$ et $v_s(t) = 0$. Comparativement au redresseur idéal, un tel redresseur possède le défaut d'avoir une tension de seuil V_D .



Doc. 7. Redresseur élémentaire simple alternance. G.B.F. (2V ~, 200 Hz) et $R_u = 10 \text{ k}\Omega$.

2.3. Expérience

• Réalisons le montage du *document 7* avec les valeurs indiquées et observons les tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ à l'oscilloscope en mode DC bicourbe (*doc. 9*). L'effet de seuil (existence d'une tension de seuil) est perceptible puisque $v_s(t)$ ne s'annule pas avec $v_e(t)$. Quand la diode conduit, elle forme avec la charge R_u un diviseur de tension : cet effet est très marqué si R_u est faible.

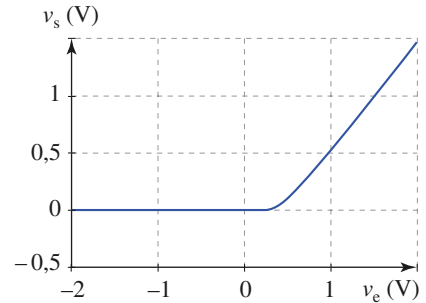
• Plaçons ensuite l'oscilloscope en mode XY et observons la caractéristique du redresseur (*doc. 8*). Utilisons, pour ce tracé, la fréquence la plus basse possible afin d'avoir la caractéristique statique ou très basse fréquence du redresseur.

La détermination de la tension de seuil du redresseur réalisé donne :

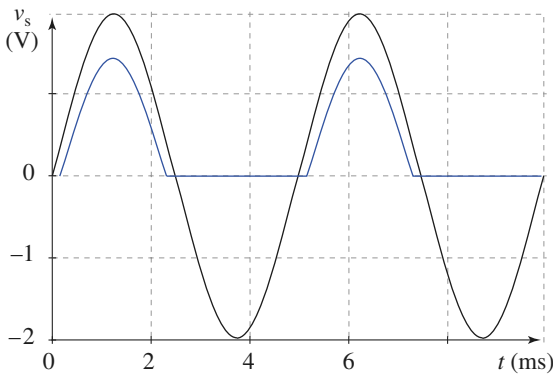
$$V_D = 0,5 \text{ V.}$$

• Appliquons des signaux en créneaux, puis triangulaires, et observons le signal de sortie $v_s(t)$ (*doc. 10*).

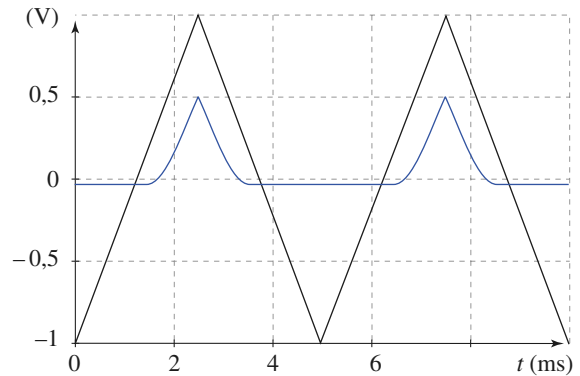
Là encore, l'effet de seuil est perceptible ainsi que l'effet du diviseur de tension constitué par la diode et la charge R_u (quand elle est de faible valeur).



Doc. 8. Caractéristique statique d'un redresseur élémentaire simple alternance.



Doc. 9. Variations de tension d'entrée $v_e(t)$ et de sortie $v_s(t)$ d'un redresseur élémentaire simple alternance.



Doc. 10. Tension de sortie d'un redresseur simple alternance pour des signaux d'entrée triangulaires de fréquence 200 Hz.

2.4. Redresseur simple alternance sans seuil

Pour éliminer le défaut du redresseur précédent, à savoir l'existence d'un seuil V_D , réalisons le circuit du *document 11* avec un amplificateur opérationnel supposé idéal.

2.4.1. Premier cas

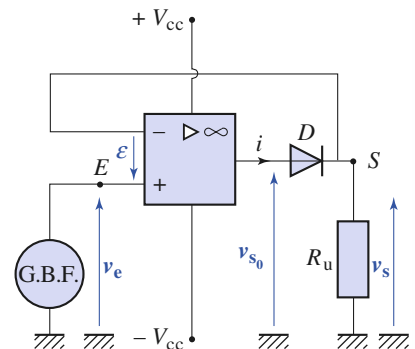
La diode conduit. L'amplificateur opérationnel est en régime linéaire, car la boucle de rétroaction est fermée sur l'entrée inverseuse. Nous avons alors $\varepsilon = 0$ et $v_s = v_e$. La diode étant passante, $i > 0$, il en résulte que $v_s = v_e = R_u i > 0$.

En définitive, $v_s = v_e$ quand $v_e > 0$.

En ne tenant compte que du principal défaut de la diode, à savoir sa tension de seuil V_D , nous avons à la sortie de l'amplificateur opérationnel : $v_{s0} \approx v_s + V_D$.

2.4.2. Second cas

La diode est bloquée et l'amplificateur opérationnel est en boucle ouverte, c'est-à-dire en régime de saturation. Comme $i_- = 0$, la tension de sortie du



Doc. 11. Redresseur simple alternance sans seuil.

G.B.F. (2V ~ , 200 Hz) et $R_u = 10 \text{ k}\Omega$ et $V_{cc} = 15 \text{ V}$.

redresseur est $v_s = 0$ et celle de l'amplificateur opérationnel $v_{s_0} < v_s = 0$, puisque la diode est bloquée. L'amplificateur opérationnel étant en régime de saturation, nous avons $v_{s_0} = -V_{\text{sat}}$, donc :

$$\varepsilon < 0 \text{ et } v_e < 0.$$

En conclusion $v_s = 0$ quand $v_e < 0$.

Remarque

Il est possible de raisonner ainsi :

- si $v_e > 0$, la sortie v_{s_0} a tendance à devenir rapidement positive, donc la diode est passante, la rétroaction existe sur l'entrée inverseuse. Nous sommes en présence d'un suiveur et $v_s = v_e$;
- si $v_e < 0$, la sortie v_{s_0} a tendance à devenir rapidement négative, donc la diode est bloquée, il n'y a aucun courant sans R_u , et $v_s = 0$.

Pour ce redresseur simple alternance sans seuil nous pouvons écrire :

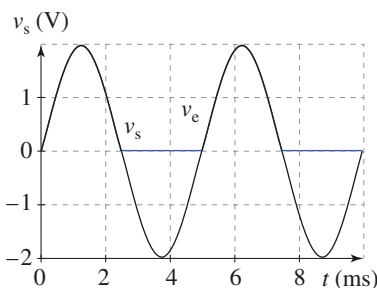
$$v_s(t) = \frac{1}{2}(v_e(t) + |v_e(t)|).$$

2.5. Expérience

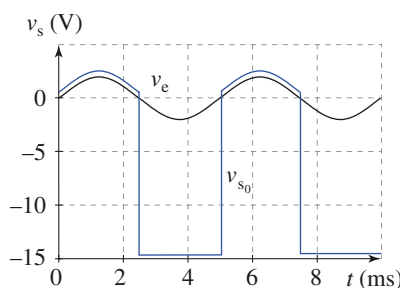
- Réalisons le montage du document 11, avec les valeurs indiquées et observons les tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ à l'oscilloscope en mode DC bicourbe (doc. 12). Nous vérifions que le redressement se fait sans seuil.
- Observons ensuite les tensions $v_e(t)$ et $v_{s_0}(t)$ (doc. 13). Nous vérifions que l'A.O. est saturé négativement lorsque la diode est bloquée.
- Plaçons ensuite l'oscilloscope en mode XY et observons la caractéristique $v_s = f(v_e)$ du redresseur réalisé. Utilisons, pour ce tracé, la fréquence la plus basse possible afin d'avoir la caractéristique statique ou très basse fréquence du redresseur (doc. 14).

Par rapport à la caractéristique du document 9, nous vérifions l'absence de seuil.

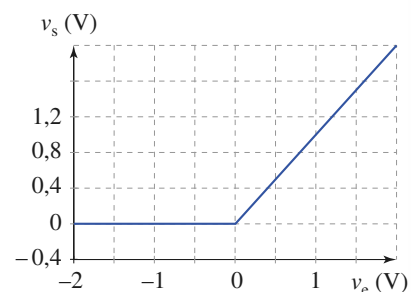
Pour des fréquences plus élevées ($f > 1$ kHz) le tracé présente un phénomène d'hystérésis. Cela est dû à l'effet capacitif de la diode et surtout à la vitesse finie de balayage de l'A.O.



Doc. 12. Variations de la tension d'entrée $v_e(t)$ et de sortie $v_s(t)$ d'un redresseur simple alternance sans seuil.



Doc. 13. Variations de la tension d'entrée $v_e(t)$ d'un redresseur simple alternance sans seuil et de la tension de sortie $v_{s_0}(t)$ de son amplificateur opérationnel (en basse fréquence).



Doc. 14. Caractéristique statique d'un redresseur simple alternance sans seuil.

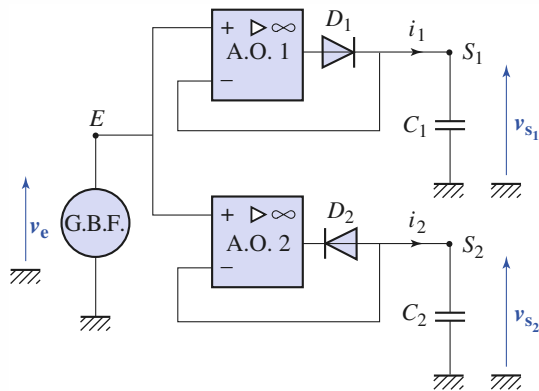
Application 1

Détecteur de crête à crête

1) Le détecteur de crête à crête du document 15 est alimenté par un G.B.F. délivrant une tension :

$$v_e(t) = V_d + v_{e_m} \sin(\omega t),$$

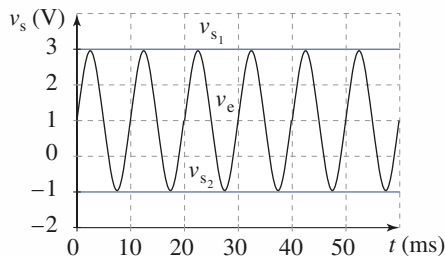
somme d'une tension constante de décalage V_d et d'une tension sinusoïdale d'amplitude $v_{e_m} = 2$ V, et de fréquence $f = 100$ Hz. En régime établi, quelles tensions $v_{s_1}(t)$ et $v_{s_2}(t)$ observe-t-on aux bornes des condensateurs C_1 et C_2 ?



Doc. 15. Détecteur de crête à crête. G.B.F. ($V_d = 1$ V, $v_{e_m} = 2$ V, 100 Hz) et $C_1 = C_2 = 100$ nF

2) Comment pourrait-on, à partir du circuit précédent, obtenir la tension de décalage V_d (ou d'offset) du signal délivré par le G.B.F. ?

1) l'association de l'A.O. 1 et de la diode D_1 réalise une diode sans seuil délivrant un courant $i_1(t) \geq 0$; de même, l'association de l'A.O. 2 et de la diode D_2 réalise une diode sans seuil délivrant un courant $i_2(t) \leq 0$. En régime établi, la tension aux bornes de C_1 est la tension maximale $v_{s_1} = V_d + v_{e_m}$ délivrée par le G.B.F., et celle aux bornes de C_2 est la tension minimale $v_{s_2} = V_d - v_{e_m}$ (doc. 16).

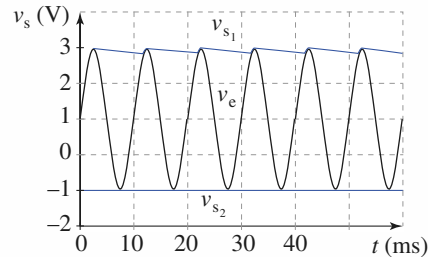


Doc. 16. Variation des tensions dans le détecteur de crête à crête.

Remarque

L'examen attentif de la tension $v_{s_1}(t)$ montre que celle-ci tend à décroître lorsque la diode D_1 est bloquée, alors qu'il n'en va pas de même pour la tension $v_{s_2}(t)$. Ce phénomène, qui est encore plus marqué avec des capacités de plus faibles valeurs ($C_1 = C_2 = 10$ nF, par exemple, doc. 17), est dû au courant de polarisation des A.O. utilisés. En effet, ceux-ci sont des « 741 » avec des transistors d'entrée bipolaires du type NPN, ce qui a pour effet de créer des courants de polarisation entrants.

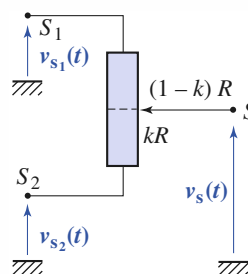
La capacité C_1 se décharge dans l'entrée inverseuse de l'A.O. 1 quand la diode D_1 est bloquée, alors que le condensateur C_2 ne peut pas se décharger dans l'entrée inverseuse de l'A.O. 2 quand la diode D_2 est bloquée. Ces détecteurs de crête à crête ne fonctionnent correctement qu'en sortie ouverte. Pour obtenir un courant important à la tension de crête, il conviendra d'utiliser le circuit étudié dans l'exercice 2.



Doc. 17. Influence du courant de polarisation sur la charge du condensateur C_1 .

2) À l'aide d'un potentiomètre (de valeur élevée afin de limiter le débit des condensateurs) monté entre les bornes S_1 et S_2 (doc. 18), nous pouvons obtenir la tension $v_s = kv_{s_1} + (1 - k)v_{s_2}$ ($0 \leq k \leq 1$).

En plaçant le curseur au milieu de la résistance R du potentiomètre ($k = 0,5$), nous obtenons la tension de décalage $v_s = V_d = 0,5(v_{s_1} + v_{s_2})$.



◀ **Doc. 18.** Montage potentiométrique permettant d'obtenir la tension de décalage.

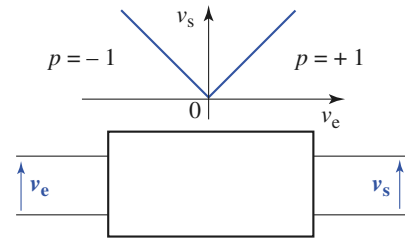
3 Redressement double alternance

3.1. Définition

Un redresseur double alternance est un quadripôle pour lequel les tensions d'entrée $v_e(t)$ et de sortie $v_s(t)$ sont liées par la relation $v_s(t) = |v_e(t)|$.

Sa caractéristique $v_s = f(v_e)$ est donnée dans le document 19. D'un point de vue fonctionnel, un redresseur double alternance réalise la fonction valeur absolue.

Le redresseur double alternance d'une tension alternative double sa fréquence et double la valeur de sa composante continue par rapport à la même tension redressée simple alternance.

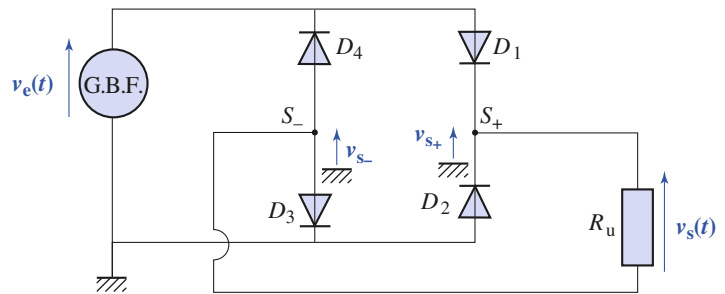


Doc. 19. Caractéristique d'un redresseur double alternance.

3.2. Redresseur double alternance à pont de diodes

Examinons le circuit du document 20, réalisé avec quatre diodes identiques (pont de Graetz), une résistance de charge R_u modélisant un réseau d'utilisation et un générateur basse fréquence.

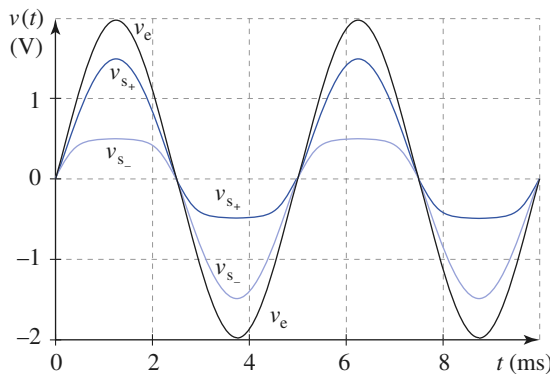
Lorsque la tension $v_e(t) > 2V_D$, les diodes D_1 et D_3 conduisent et la tension de sortie est $v_s(t) = v_e(t) - 2V_D$. En revanche, lorsque la tension $v_e(t)$ est négative $v_e(t) < -2V_D$, ce sont les diodes D_2 et D_4 qui conduisent, et la tension de sortie est $v_s(t) = -(v_e(t) - 2V_D)$. l'effet de seuil est important, puisqu'il est de l'ordre de $2V_D$.



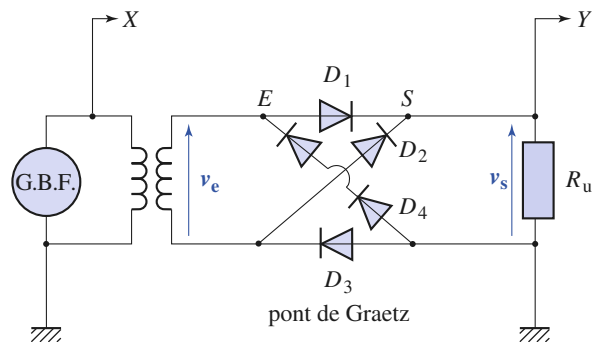
Doc. 20. Redresseur double alternance à diodes (pont de Graetz). G.B.F. (2 V ~, 200 Hz) et $R_u = 10 \text{ k}\Omega$.

3.3. Expérience

Réalisons le circuit du document 20 avec les valeurs indiquées et observons à l'oscilloscope, en mode DC bicourbe, les tensions $v_e(t)$ et $v_{s+}(t)$, puis les tensions $v_e(t)$ et $v_{s-}(t)$ (doc. 21). Les tensions $v_{s-}(t)$ et $v_{s+}(t)$ sont des tensions redressées simple alternance délivrées par un redresseur possédant un seuil.



Doc. 21. Variations des tensions dans un redresseur double alternance à diodes.



Doc. 22. Le transformateur d'isolement sépare la masse circuit du G.B.F. de celle du redresseur. G.B.F. (2 V ~, 200 Hz) et $R_u = 10 \text{ k}\Omega$.

L'observation simultanée des tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ pose des problèmes de masse qu'il est possible de résoudre à l'aide d'un transformateur d'isolement (doc. 22).

L'utilisation d'un transformateur d'isolement introduit souvent des distorsions dans les signaux du circuit secondaire. Il convient de travailler, avec un tel transformateur, à basse fréquence. Le document 23 donne les variations de $v_e(t)$ et de $v_s(t)$ à $f = 200$ Hz.

Le document 24 fournit la caractéristique du redresseur et met en évidence la tension de seuil.

Nous pouvons aussi nous affranchir du problème de masse en utilisant une sonde différentielle (cf. chapitre 4, § 3.8).

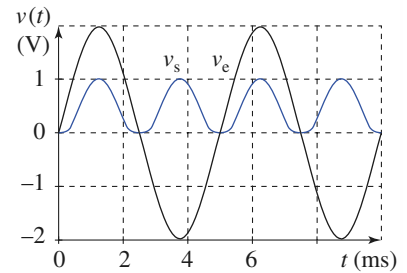
Ce système ne présente pas les inconvénients du transformateur d'isolement

3.4. Redresseur double alternance sans seuil

Un redresseur double alternance sans seuil se réalise à partir d'un redresseur simple alternance sans seuil. Il existe une grande variété de montages. Examinons le principe de l'un des plus simples.

Soit $v_e(t)$ le signal à redresser et $v_s(t) = |v_e(t)|$ le signal redressé double alternance. Notons $v_r(t)$ le signal redressé simple alternance positif (cf. § 2.4) ; nous avons :

$$v_r(t) = \frac{1}{2}[v_e(t) + |v_e(t)|], \quad \text{d'où} \quad |v_e(t)| = 2v_r(t) - v_e(t).$$



Doc. 23. Variations des tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ dans un redresseur double alternance à pont de diodes.

Un redresseur double alternance sans seuil peut être réalisé à partir d'un redresseur simple alternance positif sans seuil et d'un soustracteur.

Le redresseur utilisé est celui du document 11. Vérifions que le soustracteur du document 25, réalise la fonction demandée.

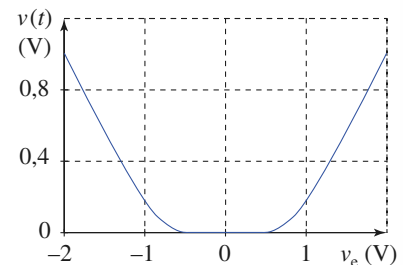
L'amplificateur opérationnel est en régime linéaire car la boucle de rétroaction aboutit à son entrée inverseuse, donc $v_- = v_+ = \frac{v_r}{2}$. La loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse s'écrit :

$$\frac{v_e - v_-}{2R} - \frac{v_-}{R} + \frac{v_s - v_-}{2R} = 0,$$

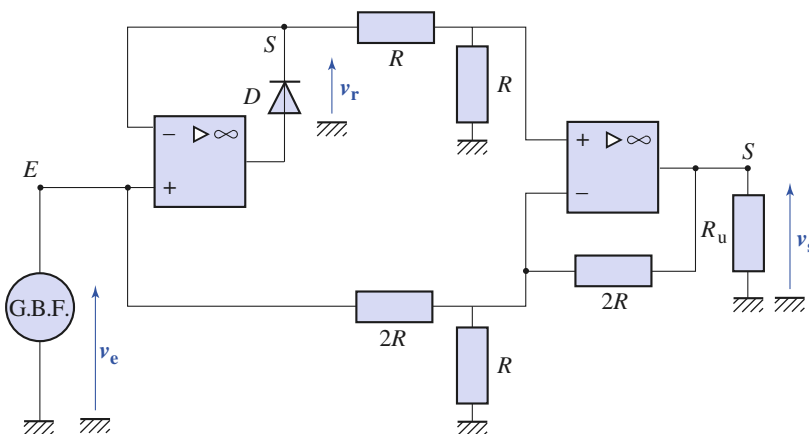
d'où, en remplaçant v_- par son expression en fonction de v_r :

$$v_s(t) = 2v_r(t) - v_e(t).$$

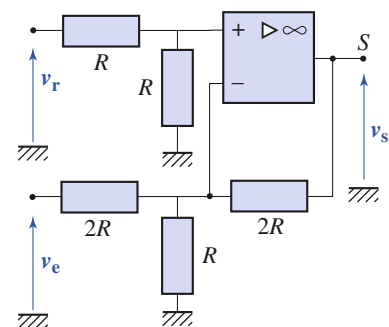
L'association de ces deux éléments donne le circuit du document 26.



Doc. 24. Caractéristique d'un redresseur double alternance à pont de diodes : il existe un seuil.



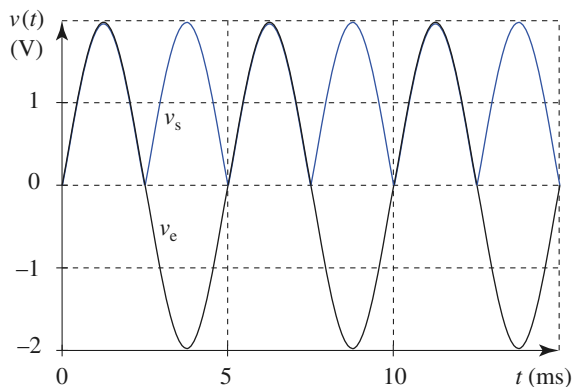
Doc. 26. Redresseur double alternance sans seuil. G.B.F. (2 V ~, 200 Hz), $R = 10$ k Ω et $R_u = 10$ k Ω .



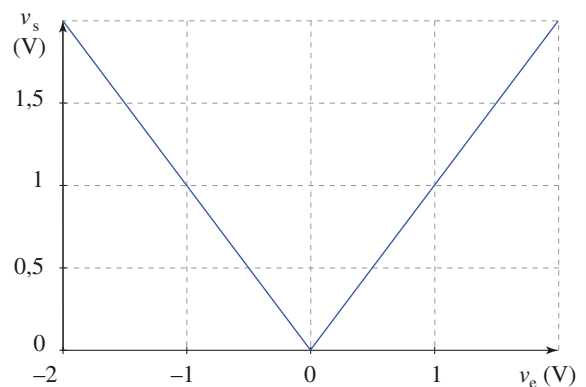
Doc. 25. Soustracteur associé au redresseur monoalternance.

3.5. Expérience

- Réalisons le circuit du *document 26* avec les valeurs indiquées pour les composants et les signaux, et observons les tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ à l'oscilloscope, en mode DC bicourbe (*doc. 27*). La tension $v_s(t)$ est bien la tension $v_e(t)$ redressée double alternance.
- Commutons en mode XY et utilisons la fréquence la plus basse possible pour tracer la caractéristique statique ou basse fréquence $v_s = f(v_e)$ du redresseur réalisé (*doc. 28*). La tension de seuil a disparu.



Doc. 27. Variations des tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ aux bornes d'un redresseur double alternance sans seuil.



Doc. 28. Caractéristique du redresseur double alternance sans seuil.

- Utilisons des signaux en créneaux, puis triangulaires, de fréquence 200 Hz et observons le signal de sortie $v_s(t)$. À cette fréquence, le redressement n'est affecté d'aucun défaut notable.

4 Redressement avec lissage

4.1. Obtention d'une tension quasi continue

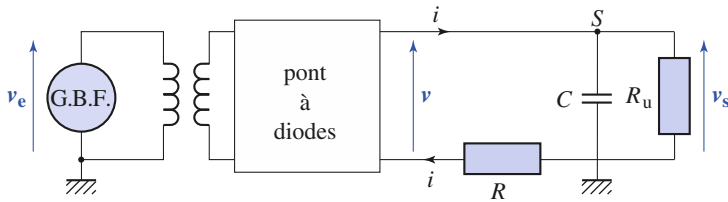
Pour alimenter certains appareils, il est nécessaire de produire une tension continue à partir de la tension alternative sinusoïdale délivrée par le secteur. Les redresseurs étudiés fournissent bien une tension de signe constant, donc de valeur moyenne non nulle, mais non constante.

Un lissage par condensateur permet d'obtenir une tension quasi constante, avec un faible taux d'ondulation.

4.1.1. Principe

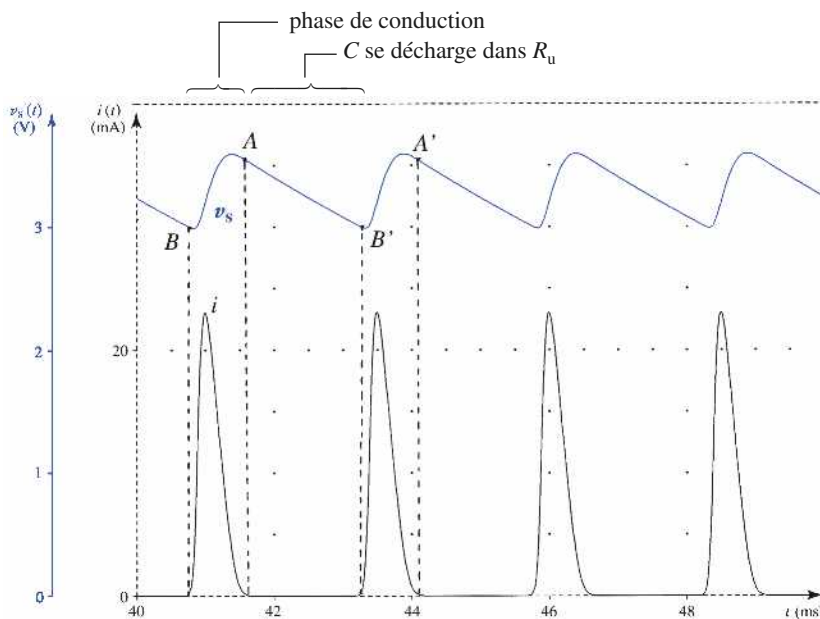
Considérons le redresseur double alternance à pont de diodes du *document 29* où un condensateur C de forte capacité est placé en parallèle sur l'utilisation modélisée par la résistance R_u .

La résistance R , de faible valeur, permettra d'examiner à l'oscilloscope le courant $i(t)$ débité par le pont redresseur.



Doc. 29 Redressement double alternance et lissage de la tension v_s par le condensateur C . G.B.F. (5 V ~, 200 Hz), $R = 47 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$ et $R_u = 1 \text{ k}\Omega$.

En régime établi, le condensateur C stocke une partie de la charge débitée par le redresseur pendant sa période de conduction et la restitue ensuite dans l'utilisation R_u pendant la période de blocage du redresseur. Le temps de circulation du courant à travers l'utilisation est alors prolongé et l'ondulation de la tension de sortie $v_s(t)$ est diminuée (doc. 30).



Doc. 30. Courant $i(t)$ délivré par le redresseur bialternance et tension $v_s(t)$ redressée et filtrée par condensateur, en régime établi.

Interprétons les courbes du document 30.

• Pendant la période de conduction (c'est-à-dire de B à A sur le document 30), le circuit (R , R_u , C) est excité par la tension de sortie $v(t)$ du redresseur dont l'amplitude est $v_{e_m} - 2V_D$. La loi des nœuds appliquée en S donne :

$$i = C \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{R_u} = \frac{v - v_s}{R},$$

soit :

$$\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} = \frac{v}{RC}.$$

La constante de temps $\tau = \frac{RR_u}{R + R_u} C \approx RC \approx 0,5 \text{ ms}$ est faible devant la

période $T \approx 5 \text{ ms}$ du signal ; la quantité $\left| \frac{dv_s}{dt} \right| \approx \frac{|v_s|}{T}$ est donc négligeable

devant $\frac{|v_s|}{\tau}$, ce qui permet d'estimer la tension aux bornes de la résistance R_u pendant cette phase de conduction :

$$v_s(t) \approx \frac{\tau}{RC} v(t) = \frac{R_u}{R + R_u} v(t) \approx v(t).$$

Ce résultat justifie l'approximation faite précédemment :

$$\left| \frac{dv_s}{dt} \right| \approx \left| \frac{dv}{dt} \right| \approx \frac{v_s}{T}.$$

• Pendant la période de blocage du redresseur ($i = 0$), le condensateur C se décharge dans l'utilisation R_u selon la loi :

$$C \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{R_u} = 0$$

obtenue par application de la loi des nœuds en S . Ainsi, la loi de décharge du condensateur est une loi exponentielle du temps, de constante de temps $\tau' = R_u C$, grande devant la période T du signal. La pente de l'exponentielle au début de cette période est $\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_s}{\tau'}$, en continuité avec celle de la sinusoïde décrivant le régime précédent, comme il est possible de le vérifier sur le document 30.

Pour un même signal d'entrée, la période T est deux fois plus faible avec un redresseur double alternance qu'avec un redresseur simple alternance.

La condition $\tau' = R_u C \gg T$ est donc plus facile à obtenir avec un redresseur double alternance.

Application 2

Calcul approché de l'amplitude de l'ondulation

Le redresseur étudié est celui du document 29, avec $R = 0$ et $\tau' = R_u C \gg T$, période du signal sinusoïdal d'entrée $v_e(t) = v_{e_m} \cos v(t)$.

1) Calculer l'amplitude Δv_s de l'ondulation du signal de sortie.

2) Déterminer la valeur de la capacité C pour que l'amplitude relative $\frac{\Delta v_s}{v_{s_m}}$ soit de 1 %, sachant que

$R_u = 1 \text{ k}\Omega$ et que la fréquence du signal $v_e(t)$ est $f = 50 \text{ Hz}$.

1) En régime établi, pour que l'ondulation soit de faible amplitude, il est nécessaire que le condensateur se décharge très peu pendant la période de blocage du redresseur. Il en sera ainsi lorsque la constante de temps $\tau' = R_u C$ est très grande devant la période T du signal $v_e(t)$. Dans ces conditions,

nous pouvons assurer, d'une part, que la durée de conduction du redresseur est très courte devant T , d'autre part, que la branche d'exponentielle peut être assimilée à un segment de droite de pente $-\frac{1}{\tau'}$.

L'équation différentielle de décharge du condensateur $\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_s}{\tau'}$ conduit alors à la relation approchée $\frac{\Delta v_s}{T} = \frac{v_{s_m}}{\tau'}$, soit $\Delta v_s = \frac{T}{2R_u C} v_{s_m}$.

2) Avec les valeurs données, l'amplitude relative de l'ondulation $\frac{\Delta v_s}{v_{s_m}} = \frac{1}{2fR_u C}$ sera de 1 % pour $C = 1 \text{ mF}$, ce qui est une capacité de très grande valeur. L'utilisation d'un condensateur électrochimique (qui est polarisé) s'impose.

4.1.2. Expérience

Réalisons le circuit du *document 29* avec $C = 10 \mu\text{F}$ et $R = 47 \Omega$.

Observons à l'oscilloscope, en mode DC bicourbe, la tension redressée filtrée $v_s(t)$ et le courant $i(t)$ délivré par le redresseur (*doc. 30*). L'amplitude de l'ondulation $v_{\text{ond}}(t)$ est $\Delta v_s \approx 0,5 \text{ V}$.

Donnons à la capacité la valeur $C = 1 \text{ mF}$ calculée dans *Application 2*. L'ondulation disparaît pratiquement (*doc. 31*) et l'amplitude de la tension redressée s'établit à $v_{s0} \approx 2,95 \text{ V}$.

► Pour s'entraîner : ex. 3, 4 et 5.

4.2. Détecteur d'enveloppe

4.2.1. Principe

Nous étudions un signal (une tension) $u(t)$ de la forme : $u(t) = U(t)\cos(\omega t + \phi)$. $U(t)$, appelée *enveloppe* est une fonction lentement variable, de durée caractéristique t_0 très grande devant $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Nous pouvons considérer que sur une durée grande devant T mais petite devant t_0 , $u(t)$ est pratiquement une fonction sinusoïdale d'amplitude $U(t)$; $u(t)$ est un signal pseudo-périodique *modulé en amplitude*.

Nous pouvons réaliser un tel signal avec un *multiplieur*, système électronique qui délivre en sortie un signal proportionnel au produit de deux tensions d'entrée.

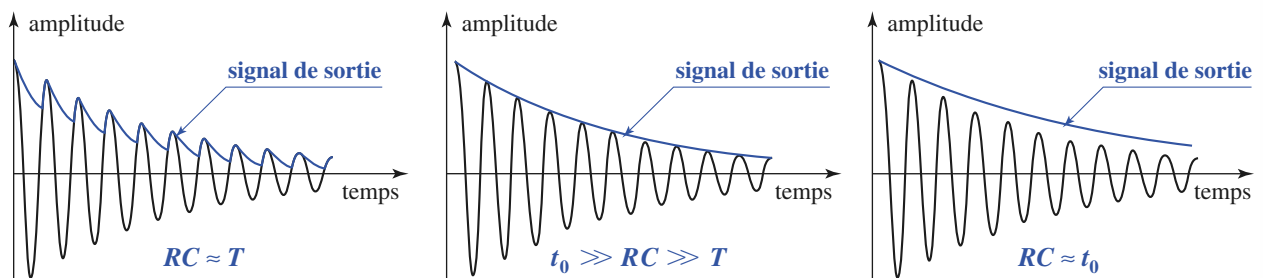
Pour extraire l'enveloppe $U(t)$ de $u(t)$, nous utilisons le montage *détecteur d'enveloppe* dont le principe est représenté sur le *document 32* où nous supposons la diode idéale.

Lorsque la diode conduit, $u_s(t) = u(t)$. Cette situation se présente si $i > 0$, ce qui est toujours vérifié si $u(t)$ est positif et croissant.

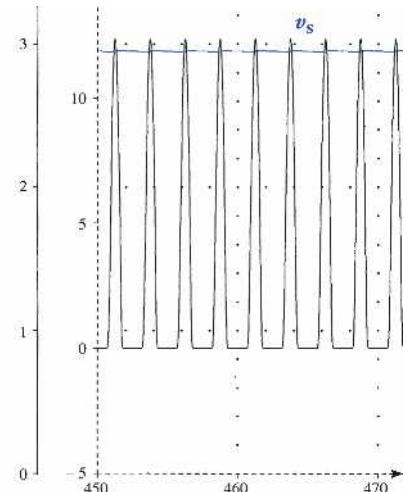
Lorsque la diode est bloquée, la capacité C se décharge dans la résistance R avec une constante de temps $\tau = RC$:

- si $\tau = RC \ll T$, $u_s(t)$ peut suivre toutes les variations de $u(t)$;
- si $\tau = RC \gg T$, la capacité ne se décharge pratiquement pas pendant une pseudo-période et $u_s(t)$ reste très voisin de $U(t)$;
- si $\tau = RC \gg t_0$, $u_s(t)$ reste quasi constant lorsque $U(t)$ décroît. $u_s(t)$ ne peut pas suivre les variations de $U(t)$.

On en déduit que $u_s(t)$ est voisin de l'enveloppe $U(t)$ si $T \ll RC \ll t_0$ (*doc. 33*).



Doc. 33. Pourquoi choisir $t_0 \gg RC \gg T$?

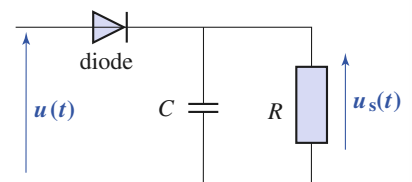


Doc. 31. Avec une capacité de filtrage suffisante, la tension redressée filtrée est quasi continue.

Le signal émis par une radio AM (modulation d'amplitude) est de cette forme.

Une porteuse sinusoïdale de quelques centaines de kilohertz est modulée par le signal audio de fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz (norme Hi-fi).

Le récepteur détecte l'enveloppe du signal modulé, c'est-à-dire le signal audio qui est ensuite amplifié.



Doc. 32. Détecteur d'enveloppe.

4.2.2. Réalisation expérimentale

L'existence de la tension de seuil nous fait remplacer la diode par le montage redresseur monoalternance sans seuil.

Le multiplieur fabrique un *signal modulé* $u(t)$, produit d'une fonction sinusoïdale de haute fréquence $u_p(t)$ appelée *porteuse* et d'un *signal modulant* $u_m(t)$ de basse fréquence dont les expressions peuvent s'écrire :

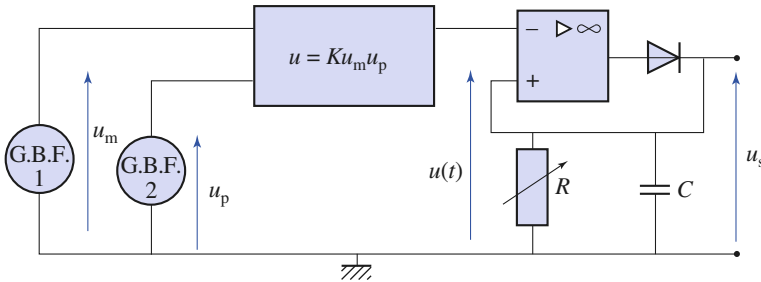
$$u_p(t) = u_{p_m} \cos(\omega_p t + \Phi_p)$$

$$u_m(t) = U_0 [1 + \alpha \cos(\omega_m t + \phi_m)] \text{ avec } \alpha < 1.$$

Le G.B.F. 1 délivre un signal $u_m(t) = U_0 [1 + \alpha \cos(\omega_m t + \phi_m)]$ de fréquence voisine de 100 Hz. Il est possible d'obtenir une valeur de α comprise entre 0 et 1 en ajoutant une tension continue à la tension sinusoïdale, fonction généralement appelée *offset* sur les G.B.F.

Le G.B.F. 2 délivre la porteuse $u_p(t) = u_{p_m} \cos(\omega_p t + \phi_p)$ de fréquence 10 kHz.

Un choix de R et C tels que $RC \approx 1 \text{ ms}$ est *a priori* satisfaisant pour obtenir une tension de sortie proche de l'enveloppe. Nous prendrons $C = 1 \mu\text{F}$ et R voisin de 1 k Ω .



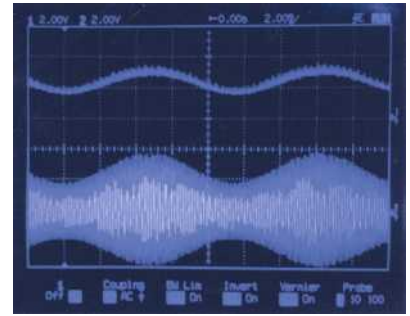
Doc. 34. Détection de l'enveloppe de $u(t)$.

4.2.3. Expériences

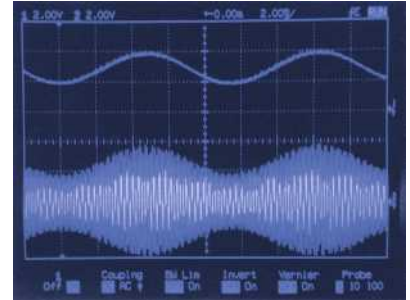
- Visualiser la porteuse sur l'oscilloscope et choisir $\alpha \approx 0,5$.
- En mode bicourbe, visualiser simultanément le signal modulé $u(t)$ et le signal de sortie.

En faisant varier R nous notons la valeur qui optimise la fonction de détection d'enveloppe. D'après les photographies du *document 35*, la valeur $R = 3 \text{ k}\Omega$ semble être un bon compromis. On vérifie que si R est trop faible, le signal de sortie conserve une partie des oscillations de la porteuse, et que si R est trop grande, $u_s(t)$ s'écarte de l'enveloppe.

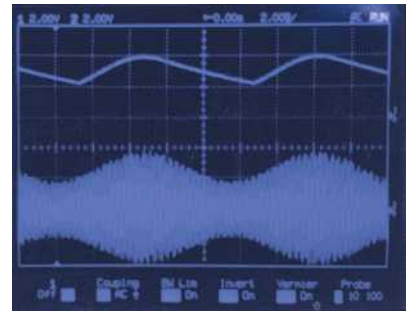
► Pour s'entraîner : ex. 5.



a. $R = 0,5 \text{ k}\Omega$



b. $R = 3 \text{ k}\Omega$.



c. $R = 10 \text{ k}\Omega$

Doc. 35. $u_s(t)$ et $u(t)$. Les deux courbes ont été décalées pour plus de lisibilité. Dans le cas **b.**, $u(t)$ suit presque exactement (à la précision du tracé) l'enveloppe $U(t)$.

CQFR

● LES DIODES

- Une *diode idéale* est un élément dont la caractéristique a pour équation :

$$I = 0 \text{ si } V \leq 0 \text{ et } V = 0 \text{ si } I \geq 0.$$

- En polarisation inverse, une diode est modélisée par un interrupteur ouvert.

● REDRESSEMENT SIMPLE ALTERNANCE

Un redresseur simple alternance est un quadripôle pour lequel :

$$v_s = \begin{cases} v_e & \text{si } v_e > 0 \\ 0 & \text{si } v_e \leq 0. \end{cases}$$

On le réalise de façon approchée avec une diode.

Un montage à amplificateur opérationnel permet d'éliminer la perturbation due à la tension de seuil de la diode.

● REDRESSEMENT DOUBLE ALTERNANCE

- Un redresseur double alternance est un quadripôle pour lequel les tensions d'entrée $v_e(t)$ et de sortie $v_s(t)$ sont liées par la relation $v_s(t) = |v_e(t)|$.
- Un redresseur double alternance sans seuil peut être réalisé à partir d'un redresseur simple alternance positif sans seuil et d'un soustracteur.

● REDRESSEMENT AVEC LISSAGE

- On obtient une tension quasi continue en branchant un condensateur de grande capacité entre les deux bornes de sortie d'un redresseur.
- Il est possible d'isoler l'enveloppe d'un signal modulé en amplitude en branchant un condensateur et une résistance en parallèle entre les deux bornes d'un redresseur.

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Une diode est un composant non linéaire. Il ne faut donc pas lui appliquer sans réfléchir les lois de l'électrocinétique linéaire.
- ✓ Une diode peut être modélisée par un composant linéaire par morceaux.
- ✓ Dans quelle condition peut-on appliquer les lois de l'électrocinétique linéaire ?
- ✓ Que permet une diode ?
- ✓ Que doit-on faire quand on lisse une tension redressée par un circuit (R, C) ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. La tension aux bornes d'une diode idéale est négative ou nulle.

- Vrai Faux

2. Deux diodes idéales tête-bêche et en série sont équivalentes à un fil.

- Vrai Faux

3. Deux diodes idéales tête-bêche et en parallèle sont équivalentes à un fil.

- Vrai Faux

4. Deux diodes idéales tête-bêche et en série sont équivalentes à un interrupteur ouvert.

- Vrai Faux

5. Deux diodes idéales tête-bêche et en parallèle sont équivalentes à un interrupteur ouvert.

- Vrai Faux

6. Pour obtenir une tension quasi continue u_s à partir d'une tension alternative $u_e(t)$:

- a. On branche un condensateur entre les deux bornes de sortie d'un redresseur.
- b. Les performances sont améliorées si on intercale une résistance entre le redresseur et le condensateur.

c. En présence d'une charge de résistance R_u , la tension est d'autant plus continue que la valeur de la capacité est élevée.

d. u_s est pratiquement égale à la valeur moyenne de la tension à la sortie du redresseur.

e. u_s est pratiquement égale au maximum de la tension à la sortie du redresseur.

7. Pour extraire l'enveloppe d'un signal modulé :

a. On branche un (R, C) série entre les bornes de sortie d'un redresseur.

b. On branche un (R, C) parallèle entre les bornes de sortie d'un redresseur.

8. Une tension :

$$u_e(t) = U_m(1 + \alpha \cos(2\pi f_1 t)) \cos(2\pi f_2 t)$$

avec $\alpha < 1$ est envoyée sur un détecteur d'enveloppe. Il est possible d'obtenir en sortie :

$$u_s(t) \approx U_m(1 + \alpha \cos(2\pi f_1 t))$$

a. Si $f_1 = 200$ Hz et $f_2 = 30$ kHz.

b. Si $f_1 = 200$ Hz et $f_2 = 400$ Hz.

c. Si $f_1 = 30$ kHz et $f_2 = 30$ Hz.

► Solution, page 284.

Exercices

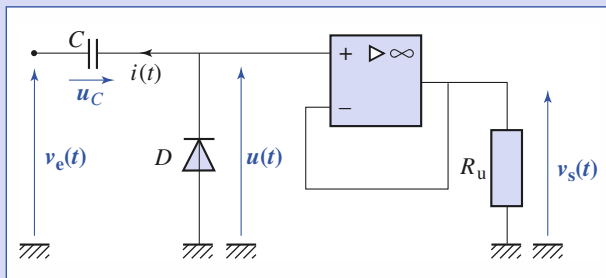
1 Addition d'une composante continue à un signal périodique

La tension de seuil de la diode D utilisée est V_D .

1) Déterminer, en régime établi, la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance d'utilisation R_u lorsque la tension appliquée à l'entrée du circuit est $v_e(t) = v_m \cos(\omega t)$, avec $v_m > V_D$.

2) Que devient cette tension $u(t)$ lorsque la diode D est retournée ?

3) Quelle est la fonction réalisée par ce circuit ?

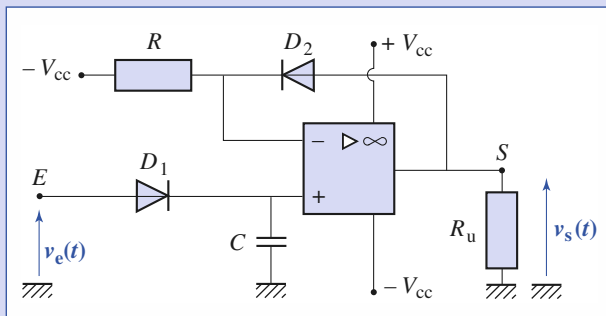


2 Détecteur de crête permettant un débit à la tension de crête

1) Soit le circuit représenté ci-dessous. Calculer, en régime sinusoïdal forcé, la tension de sortie $v_s(t)$. Les tensions de seuil des diodes D_1 et D_2 , respectivement notées V_{D_1} et V_{D_2} , sont égales.

2) Le détecteur de crête du document 15 (cf. Application 1) ne permet qu'un faible débit à la tension de crête. Ce circuit possède-t-il le même défaut ?

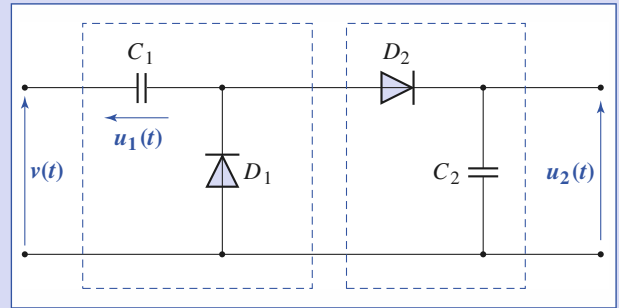
Données : $R_u = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ et $V_{cc} = 15 \text{ V}$.



3 Doubleur de tension

On associe un circuit additionneur de composante continue (C_1, D_1) (cf. exercice 1) à un détecteur de crête (cf. Application 1) comme il est indiqué sur le schéma suivant. Les diodes sont identiques et leur tension de seuil

est V_D . Une tension sinusoïdale $v(t) = v_m \cos(\omega t)$ est appliquée à l'entrée du circuit, utilisé en sortie ouverte.



1) On note $u_{1,n}$ et $u_{2,n}$ les tensions respectives aux bornes des condensateurs C_1 et C_2 après la $n^{\text{ième}}$ période. Montrer qu'à la fin de la $(n+1)^{\text{ième}}$ période, ces tensions sont liées par les deux relations suivantes :

$$u_{1,(n+1)} + u_{2,(n+1)} = (v_m - V_D)$$

$$\text{et } -C_1 u_{1,(n+1)} + C_2 u_{2,(n+1)} = C_1 (v_m - V_D) + C_2 u_{2,n}$$

2) Montrer qu'en sortie ouverte le circuit délivre, en régime établi, la tension continue $u_2 = 2(v_m - V_D)$.

3) Quelle tension u_1 existe-t-il, en régime établi, aux bornes du condensateur C_1 ?

4) On dispose d'un amplificateur opérationnel et de diodes identiques aux diodes D_1 et D_2 .

Comment pourrait-on utiliser ces composants pour réaliser un circuit doubleur de tension délivrant la tension continue $u_3 = 2v_m$ indépendante de la charge R_u ?

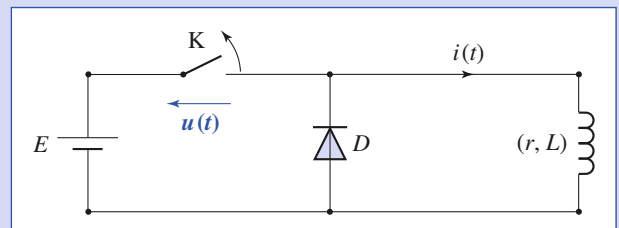
4 Diode de roue libre

Une diode de roue libre est une diode de protection placée en parallèle sur une branche de circuit à caractère inductif prononcé et dont le rôle est d'empêcher l'apparition d'une étincelle de rupture lors de la coupure du courant.

1) Pour $t < 0$, l'interrupteur K est fermé et le circuit suivant est en régime établi. À $t = 0$, l'interrupteur est ouvert. Calculer la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes de l'interrupteur.

Données : $E = 10 \text{ V}$, $L = 100 \text{ mH}$, $r = 100 \text{ }\Omega$, la tension de seuil de la diode $V_D = 0,6 \text{ V}$ et sa résistance directe $r_d = 10 \text{ }\Omega$.

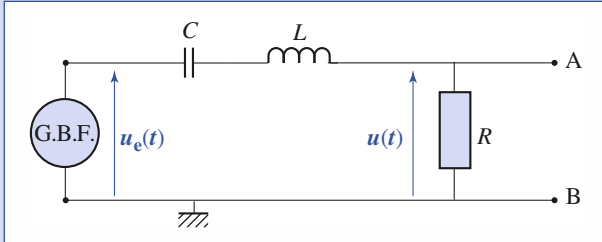
2) Que se passerait-il si la diode était supprimée ?



Exercices

5 Tracé d'une courbe de résonance

On veut tracer sur l'oscilloscope la courbe de résonance $u_m(f)$ pour le circuit représenté sur la figure.



$L = 5,0 \text{ mH}$; $C = 0,22 \text{ }\mu\text{F}$; $R = 15 \text{ }\Omega$.

Le G.B.F. est utilisé en *wobulateur*. il délivre une tension modulée en fréquence :

$$u_e(t) = u_{em} \cos[2\pi f(t)t]$$

$f(t)$ est une fonction rampe qui passe de $f_1 = 3,5 \text{ kHz}$ à $f_2 = 7,0 \text{ kHz}$ en $1,0$ seconde.

1) Montrer que le signal de sortie est de la forme :

$$u(t) = u_{sm}(t) \cos[2\pi f(t)t + \varphi(t)].$$

2) On dispose d'une diode supposée idéale, d'une résistance (R_0) et d'un condensateur (C_0).

Représenter le montage qu'il faut ajouter entre les bornes A et B pour pouvoir visualiser $u_{sm}(t)$ sur un oscilloscope numérique. Donner un choix possible pour R_0 et C_0 .

3) Le wobulateur dispose également d'une sortie qui délivre une tension fonction affine de la fréquence :

$$u_{mod}(t) = U_0[f(t) - f_1].$$

Comment faire afficher la courbe de la résonance $u_{sm}(f)$?

Corrigés

Solution du tac au tac, page 282.

- | | | | |
|-------------|-------------------|-------------|-------------|
| 1. Vrai | 2. Faux | 3. Vrai | 4. Vrai |
| 5. Faux | 6. Vrai : a, c, e | Faux : b, d | |
| 7. Vrai : b | Faux : a | 8. Vrai : a | Faux : b, c |

1) La capacité ne peut que se charger ($i(t) \geq 0$). Après un régime transitoire, la tension à ses bornes s'établit à la valeur constante maximale : $u_{c_m} = (v_{e_m} - V_D)$, avec V_D tension de seuil de la diode.

La tension aux bornes de la diode est alors :

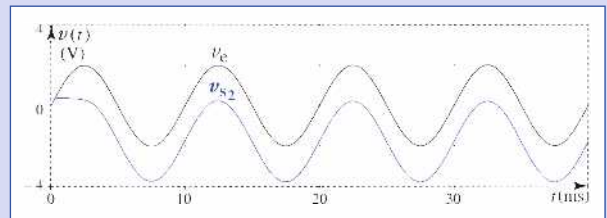
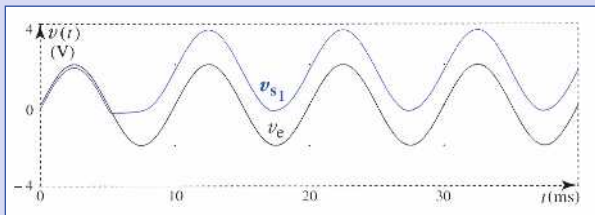
$$u(t) = v_e(t) + u_{c_m} = v_e \cos(\omega t) + (v_{e_m} - V_D) = v_{s_1}(t).$$

2) Si on retourne la diode, la tension à ses bornes est, en régime établi :

$$u(t) = v_e \cos(\omega t) - (v_{e_m} - V_D) = v_{s_2}(t).$$

Pour cette dernière expérience, un 741 ne convient pas ; le courant de polarisation de l'entrée non inverseuse prolonge la charge du condensateur, même lorsque la diode est bloquée : l'amplificateur opérationnel finit par se saturer. Il convient d'utiliser un amplificateur opérationnel dont les transistors d'entrée sont des transistors à effet de champ tel que le TL081.

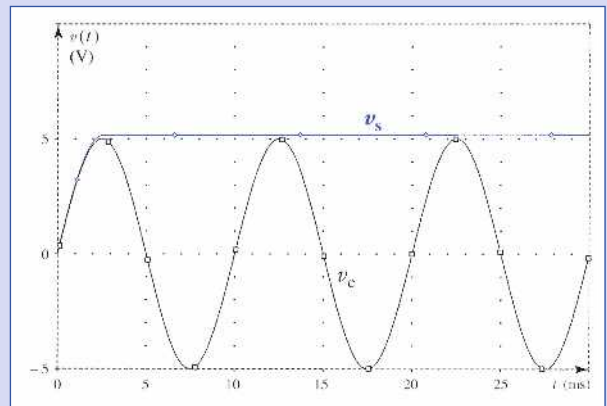
3) Ce circuit permet d'ajouter ou de soustraire une tension moyenne non nulle ($v_{e_m} - V_D$) à une tension sinusoïdale (ou périodique de valeur moyenne nulle).



2) 1) Le courant qui alimente la capacité C circule toujours dans le même sens.

Après un régime transitoire, la tension aux bornes de C est $v_+ = v_{e_m} - V_{D_1}$, où v_{e_m} est l'amplitude de la tension d'entrée $v_e(t) = v_{e_m} \sin(\omega t)$. La diode D_2 , qui est toujours passante, maintient l'amplificateur opérationnel en régime linéaire. Il en résulte :

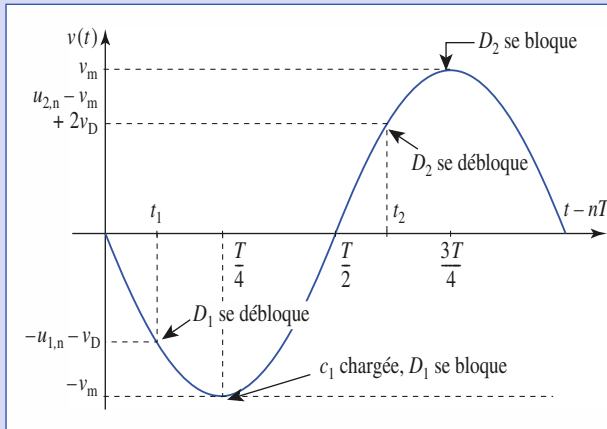
$$v_s = V_{D_2} + v_- = V_{D_2} + v_+ = v_{e_m} + (V_{D_2} - V_{D_1}).$$



Sur le schéma précédent, la tension v_s est légèrement supérieure à v_{cm} parce que, la diode D_1 débitant moins que la diode D_2 , la chute de tension à travers D_2 est supérieure à la chute de tension à travers D_1 : la correction de seuil est légèrement trop forte.

2) Grâce à l'amplificateur opérationnel, le circuit peut débiter un courant non nul sous la tension de crête v_{cm} ; en outre, l'impédance de sortie de ce circuit est faible, ce qui est une autre qualité.

3 1)



Notons que le condensateur C_2 , qui se charge à travers D_2 , conduit à une tension u_2 positive, et qui ne peut qu'augmenter.

D'autre part, le condensateur C_1 peut se charger à travers D_1 , qui est débloquée pour des valeurs de $v(t)$ convenablement négatives. La tension u_1 est négative. Prenons donc l'alternance $n + 1$ en commençant par $v(t)$ négative, comme indiqué sur la figure :

- La diode D_1 est bloquée jusqu'à $t = nT + t_1$, et le condensateur C_1 se charge, la tension u_1 atteignant la valeur $-(v_m - v_D)$ à $t = nT + \frac{T}{4}$;
- à partir de $t = nT + \frac{T}{4}$, la tension $v(t)$ remonte, et la diode D_1 se bloque ;
- la diode D_1 restant bloquée, la diode D_2 devient passante à $t = nT + t_2$ pour lequel $v(t) + (v_m - v_D)$ atteint la valeur $u_{2,n} + v_D$;
- à l'instant $t = nT + \frac{3T}{4}$, la tension $v(t)$ diminue, et la diode D_2 se bloque.

La tension u_2 a alors atteint sa valeur $u_{2,n+1}$ et u_1 la valeur $u_{1,n+1}$.

Écrivons que :

- la charge portée par les armatures de C_1 et C_2 est conservée de $t = nT + t_2$ à $t = nT + \frac{3T}{4}$:

$$C_1(v_m - v_D) + C_2 u_{2,n} = -C_1 u_{1,n+1} + C_2 u_{2,n+1} ;$$

- $v(t)$ vaut v_m à l'instant $t = nT + \frac{3T}{4}$:

$$v_m = u_{1,n+1} + v_D + u_{2,n+1}.$$

2) Nous en déduisons :

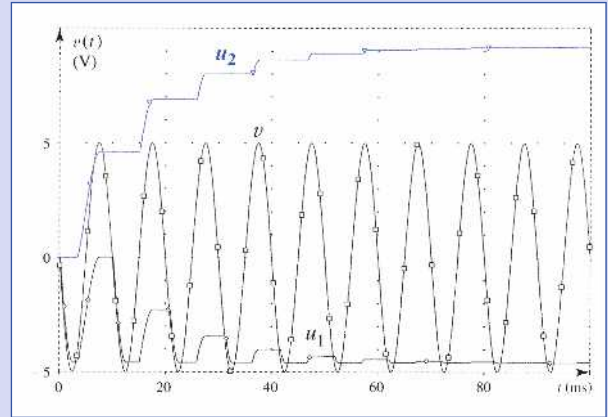
$$u_{2,n+1} = \frac{2C_1(v_m - v_D) + C_2 u_{2,n}}{C_1 + C_2}.$$

À chaque alternance, C_2 se charge un peu plus, et la tension u_2 tend vers la limite :

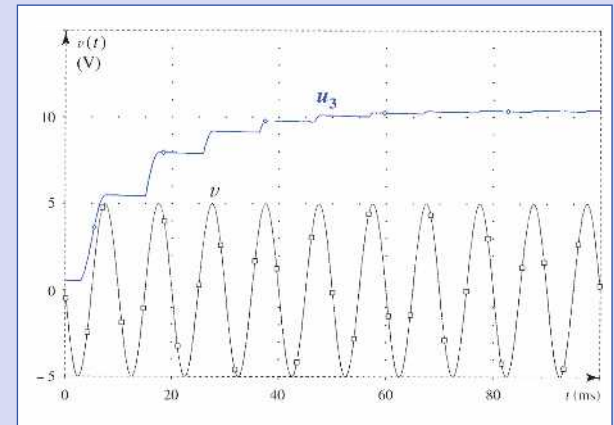
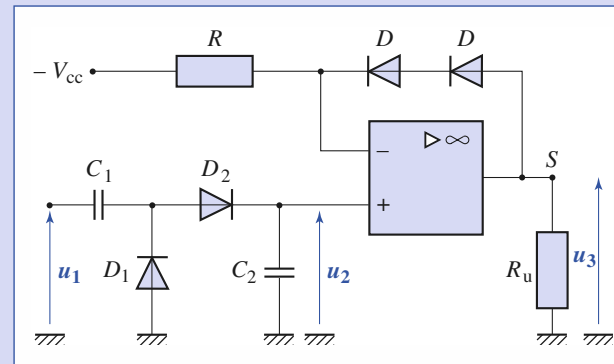
$$u_{2,\infty} = 2(v_m - v_D).$$

3) De même, en régime établi, $u_{1,(n+1)} = u_{1,n} = u_1$. Par suite :

$$u_1 + u_2 = (v_m - v_D) \text{ et } u_1 = -(v_m - v_D).$$



4) Il suffit de réaliser le circuit ci-après, où l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire ($\varepsilon = 0$). La tension de sortie $u_3 = 2V_D + u_2 = 2v_m$, comme le montre la simulation représentée ci-dessous. En outre, la résistance de sortie étant très faible, la tension u_3 est quasiment indépendante de la charge R_u .

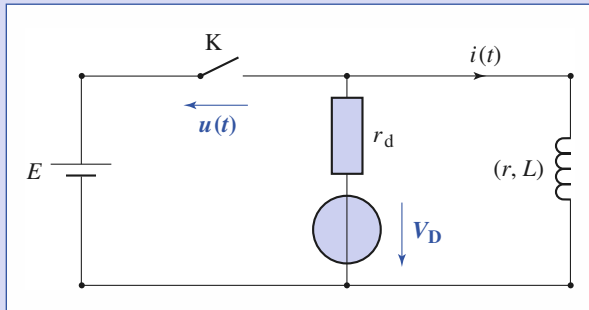


4 1)

Juste avant l'ouverture de l'interrupteur, le courant qui traverse l'inductance est $i(0_-) = \frac{E}{r}$. Juste après l'ouverture de l'interrupteur, $i(0_+) = i(0_-)$, parce que le courant qui traverse une inductance ne peut subir de discontinuité.

Corrigés

La diode qui était bloquée, lorsque l'interrupteur était fermé, conduit lorsque l'interrupteur est ouvert. Elle se substitue à la branche de circuit formée par le générateur et l'interrupteur, et reçoit le courant débité par la bobine.



L'équation du courant qui traverse la diode est :

$$L \frac{di}{dt} (r + r_d) i = -V_D \quad (i \geq 0).$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{V_D}{r + r_d}, \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{r + r_d}.$$

En utilisant les conditions initiales établies plus haut, il vient :

$$i(t) = \left(\frac{E}{r} + \frac{V_D}{r + r_d} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{V_D}{r + r_d}.$$

Ce régime se poursuit tant que la diode conduit, c'est-à-dire tant que i est positive. Avec les valeurs données, i s'annule à la date $t_1 = 2,7$ ms.

La tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes de l'interrupteur est :

$$u(t) = E + r_d i(t) + V_D \quad \text{pour } 0 < t < t_1$$

$$u(t) = E \quad \text{pour } t > t_1.$$

La tension aux bornes de l'interrupteur est égale à 11,6 V à $t = 0$, puis elle décroît très rapidement vers sa valeur limite $E = 10,6$ V, dans la mesure où le modèle de la diode reste valable quand le courant $i(t)$ devient faible.

2) Supprimer la diode revient à augmenter la valeur de la résistance r_d jusqu'à la rendre infiniment grande. La tension aux bornes de la diode aurait alors pour expression :

$$u(t) = \frac{E r_d}{r} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

c'est-à-dire qu'elle aurait une valeur très élevée juste après l'ouverture de l'interrupteur. Cette situation provoque une étincelle de rupture qui détériore les contacts des interrupteurs mécaniques et détruit les interrupteurs électroniques, d'où l'intérêt de cette utilisation des diodes, dite utilisation en diode de roue libre.

5) 1) Nous voulons avoir accès à la courbe de résonance en courant du circuit (R, L, C) série. la fréquence propre de ce circuit est :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 5 \text{ kHz}.$$

Son facteur de qualité est $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 10$ (le régime transitoire est pseudo-périodique).

Le temps caractéristique τ d'établissement d'un régime permanent sinusoïdal forcé dans ce circuit est :

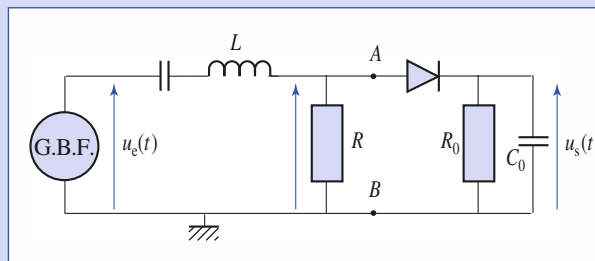
$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \approx 0,025 \text{ s}.$$

Le circuit n'est jamais soumis à une excitation sinusoïdale permanente, mais comme le temps caractéristique d'évolution de $f(t)$ est nettement supérieur à $T = \frac{1}{f(t)}$, l'approximation du régime permanent sinusoïdal établi reste acceptable. On peut écrire :

$$u_{sm}(t) = u_{em}(t) \cos[2\pi f(t)t + \varphi(t)],$$

$$\text{avec } u_{sm}(t) = \frac{u_{em}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f(t)}{f_0} - \frac{f_0}{f(t)} \right)^2}} \quad \text{et } \varphi = \arctan\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right).$$

2)



La bande passante a une largeur de 0,5 kHz ; elle est explorée en :

$$t_0 = 1 \times \frac{0,5}{3,5} = 0,14 \text{ s} \gg T = \frac{1}{f} \quad \text{et } \tau = \frac{2Q}{\omega_0}.$$

Placer le détecteur d'enveloppe « diode + circuit (R_0, C_0) parallèle » en sortie du montage.

Pour ne pas perturber le circuit, prenons $R_0 \gg R$, soit, par exemple, $R_0 = 100 \text{ k}\Omega$.

Le lissage de la tension $u_s(t)$ doit donner la crête de $u(t)$, soit : $R_0 C_0 \gg T$, mais aussi suivre les évolutions de l'amplitude $u_{sm}(t)$, soit : $R_0 C_0 \ll t_0$.

Avec $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ et $t_0 = 0,16 \text{ s}$, nous voyons que le choix $R_0 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_0 = 0,5 \mu\text{F}$ est acceptable.

3) On utilise l'oscilloscope en mode (XY) avec $u_{mod}(t)$ en X et $u_s(t)$ en Y.

Analyse harmonique d'un signal périodique

12

Introduction

Nous avons jusqu'à présent évoqué le développement en série de Fourier d'un signal périodique non sinusoïdal, mais en restant au niveau qualitatif.

Nous nous proposons de donner à cette notion très riche d'applications un contenu quantitatif.

Nous pourrions alors étudier précisément l'effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique quelconque.

O B J E C T I F S

- Introduire la notion de spectre de fréquence d'un signal périodique.
- Déterminer l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique quelconque.

P R É R E Q U I S

- Action d'un filtre d'ordre un ou deux sur un signal sinusoïdal.
- Théorème de superposition des régimes forcés.
- Opérations simples avec un logiciel de calcul.

Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

1.1. Théorème de Fourier

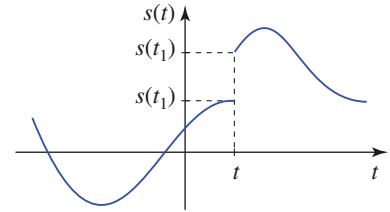
Soit un signal $s(t)$ physiquement réalisable et périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. À toute date t où le signal est continu, il est développable, de façon unique, en série de Fourier :

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)].$$

Les coefficients de la série de Fourier sont donnés par les formules :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(n\omega t) dt,$$

où t_0 est une date arbitraire.



Doc. 1. Point de discontinuité de première espèce.

Ainsi, un signal $s(t)$ périodique peut s'analyser comme la somme :

- d'un signal constant : $s_0 = \frac{A_0}{2}$;
- d'un nombre infini de signaux sinusoïdaux :

$$s_n(t) = A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \quad (n \geq 1)$$

respectivement de pulsations $\omega, 2\omega, \dots, n\omega$, appelés harmoniques et constituant l'ondulation $s_{\text{ond}}(t)$ du signal :

$$s(t) = s_0 + s_{\text{ond}}(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t).$$

Remarque

Lorsque la fonction présente un point de discontinuité de première espèce (c'est-à-dire tel que la fonction et sa dérivée à droite et à gauche soient bornées), la convergence **simple** est vérifiée en tout point sauf au point de discontinuité. Cet aspect sera développé au § 1.6.

Le signal constant est la valeur moyenne de $s(t)$ sur une période :

$$s_0 = \langle s(t) \rangle.$$

L'harmonique de rang n ($n \geq 1$) est le signal :

$$s_n(t) = A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t).$$

L'harmonique de rang 1, de même période que le signal $s(t)$, est le fondamental :

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t).$$

Remarque

Les coefficients de Fourier d'un signal périodique sont indépendants du choix particulier de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ utilisé pour leur calcul. Seule importe l'extension de cet intervalle qui doit être égale à la période T du signal.

1.2. Autre forme du développement en série de Fourier

L'harmonique de rang n ($n \geq 1$) :

$$s_n(t) = A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$$

peut s'écrire :

$$s_n(t) = C_n \cos(n\omega t + \phi_n),$$

avec :

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{et} \quad \tan \phi_n = -\frac{B_n}{A_n}.$$

où C_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n et ϕ_n sa phase à l'origine des temps.

Le développement en série de Fourier d'un signal périodique $s(t)$ peut être mis sous la forme :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n),$$

avec :

- $C_0 = \frac{A_0}{2}$: *amplitude de la composante continue* ;
- $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$: *amplitude de l'harmonique de rang n* ;
- ϕ_n : *phase à l'origine des temps telle que $\tan \phi_n = -\frac{B_n}{A_n}$* .

1.3. Propriétés

■ Pour un signal physique, l'amplitude C_n des harmoniques tend vers zéro quand leur rang n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0.$$

■ Lorsque la fonction périodique $s(t)$ est paire, son développement en série de Fourier est aussi pair, ce qui entraîne $B_n = 0$ quel que soit n , d'où :

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t).$$

La série de Fourier d'une fonction paire est une série de cosinus.

■ Lorsque la fonction périodique $s(t)$ est impaire, son développement en série de Fourier est aussi impair, ce qui entraîne $A_n = 0$ quel que soit n , d'où :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t).$$

La série de Fourier d'une fonction impaire est une série de sinus.

► Pour s'entraîner : ex. 1.

1.4. Quelques séries de Fourier

Notre but n'est pas de nous concentrer sur la technique de calcul des coefficients A_n et B_n , mais sur l'utilisation de cette notion riche en application. Nous donnons, ici, les développements de signaux fréquemment rencontrés en conseillant au lecteur de les vérifier à titre d'entraînement.

1.4.1. Signal en créneau impair et de rapport cyclique $\frac{1}{2}$

Le rapport cyclique est égal au rapport de la durée de la partie positive et de la période. Ici, les parties positive et négative ont la même durée $\frac{T}{2}$ (doc. 2).

$$s_{ci}(t) = \frac{4S_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1} \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \text{ et } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$n = 2p + 1$ représente le rang de l'harmonique. Les harmoniques de rang pair sont donc tous nuls.

1.4.2. Signal en créneau pair et de rapport cyclique $\frac{1}{2}$

$$s_{cp}(t) = \frac{4S_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\cos[(2p+1)\omega t]}{2p+1}$$

avec $p \in \mathbb{N}$, et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (doc. 3).

Ce développement se déduit du précédent par un changement de l'origine des temps.

1.4.3. Signal en triangle, pair et de rapport cyclique $\frac{1}{2}$

Pour le signal triangulaire (doc. 4), nous définissons le rapport cyclique comme le rapport entre l'intervalle de temps sur lequel le signal est croissant et sa période. Pour un rapport cyclique égal à $\frac{1}{2}$, les pentes des parties croissantes et décroissantes sont identiques, au signe près.

$$s_{tp}(t) = \frac{8S_0}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos[(2p+1)\omega t]}{(2p+1)^2} \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \text{ et } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

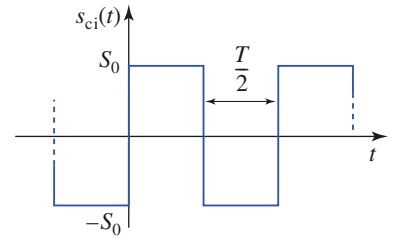
Les harmoniques de rang pair sont donc tous nuls.

Nous pouvons remarquer que si nous dérivons tous les termes, nous obtenons le développement d'une fonction en créneau d'amplitude $\frac{4S_0}{T}$, c'est-à-dire la dérivée de la fonction $s(t)$.

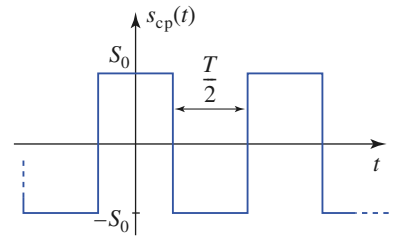
1.4.4. Signal sinusoïdal redressé double alternance

$$s(t) = \frac{2S_0}{\pi} - \frac{4S_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(2p\omega t)}{4p^2 - 1} \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$

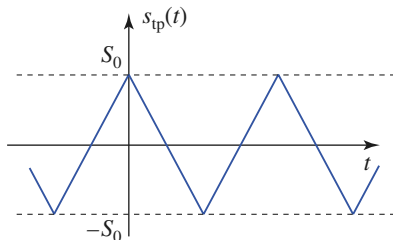
Nous remarquons que cette fonction a une valeur moyenne égale à $\frac{2S_0}{\pi}$ (doc. 5).



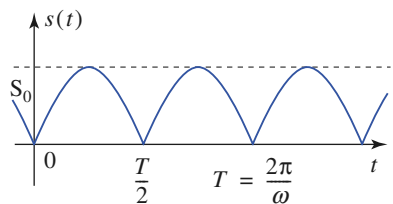
Doc. 2. Créneau impair et de rapport cyclique $\frac{1}{2}$.



Doc. 3. Créneau pair et de rapport cyclique $\frac{1}{2}$.



Doc. 4. Triangle pair et de rapport cyclique $\frac{1}{2}$.

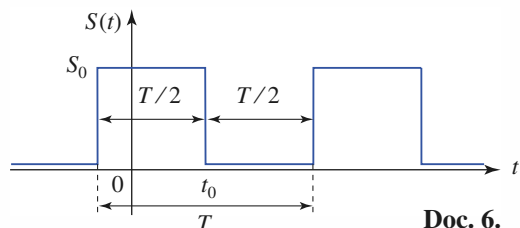


Doc. 5. Sinusoïde redressée double alternance.

Application 1

Identification d'une série de Fourier

Déterminer, sans calcul d'intégrale(s), la série de Fourier associée au signal suivant.



La valeur moyenne de ce signal est évidemment égale à $\frac{S_0}{2}$, et nous voyons que :

$$S(t) - \frac{S_0}{2} = -\frac{1}{2}S_{ci}(t - t_0)$$

d'où :

$$S_t(t) = S_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin[(2p+1)\omega(t-t_0)]}{2p+1} \right]$$

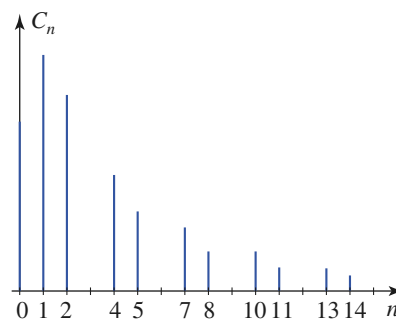
avec $p \in \mathbb{N}$, et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

1.5. Spectre de fréquence

Considérons un signal périodique dont la décomposition en série de Fourier est écrite sous la forme :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n).$$

L'ensemble des amplitudes C_n ($n \in \mathbb{N}$) forme le spectre de fréquence du signal $s(t)$. Il est représenté par un diagramme en bâtons, spectre de raies, obtenu en représentant les amplitudes C_n en fonction des pulsations $n\omega$ ou, plus simplement, en fonction des rangs n (doc. 7).



Doc. 7. Spectre de fréquence d'un signal périodique.

1.6. Synthèse de Fourier

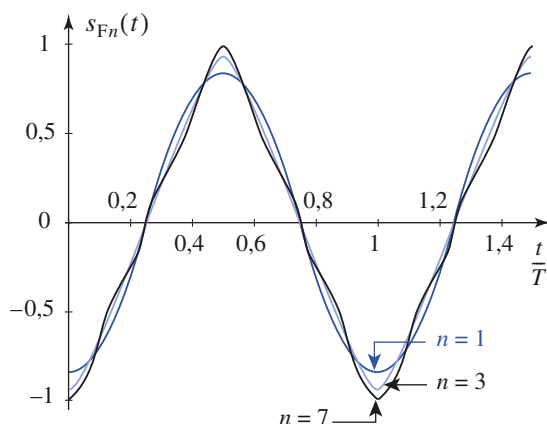
1.6.1. Signal continu

Notons $s_{Fn}(t)$ la série de Fourier d'un signal périodique continu $s(t)$, limitée à ses n premiers termes. Lorsque n tend vers l'infini, $s_{Fn}(t)$ tend vers $s(t)$:

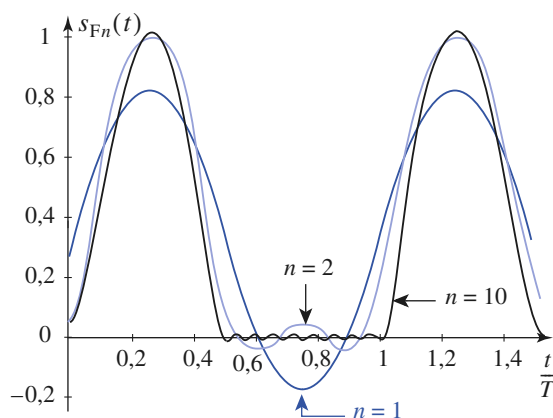
$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{Fn}(t) = s(t)$. Lors de la synthèse d'un tel signal, la somme des premiers harmoniques $s_{Fn}(t)$ suffit pour le représenter de façon satisfaisante, comme nous pouvons le constater sur les documents 8 et 9 où les signaux présentent, cependant, une discontinuité de pente.

Remarque

Le spectre de fréquence d'un signal est invariant lors des changements de l'origine des temps. Un tel changement affecte les ϕ_n et non les C_n .



Doc. 8. Synthèse d'un signal triangulaire.



Doc. 9. Synthèse d'un signal redressé simple alternance.

Une bande passante limitée suffira généralement à la transmission d'un signal périodique continu.

1.6.2. Signal discontinu

Soit $s(t)$ un signal développable en série de Fourier et présentant une discontinuité en $t = t_0$.

La série de Fourier $s_F(t)$ est continue et tend vers :

$$s_F(t) = \frac{1}{2}[s(t_{0-}) + s(t_{0+})]$$

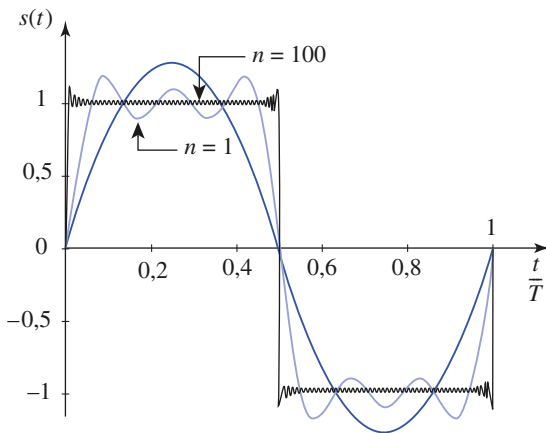
quand t tend vers t_0 . Au voisinage de t_0 , le graphe de $s_F(t)$ varie rapidement et continûment pour dépasser, de part et d'autre, la discontinuité.

En un point de discontinuité, l'écart entre les graphes de $s_{F_n}(t_0)$ et $s(t_0)$ est irréductible, quel que soit le nombre n d'harmoniques considéré. Cet effet, connu sous le nom de phénomène de Gibbs, est illustré *document 10* pour un signal carré $s(t)$, et *document 11* pour une rampe périodique. Le dépassement peut être important. Il est ainsi possible de démontrer qu'il est environ de 17 % pour le signal carré.

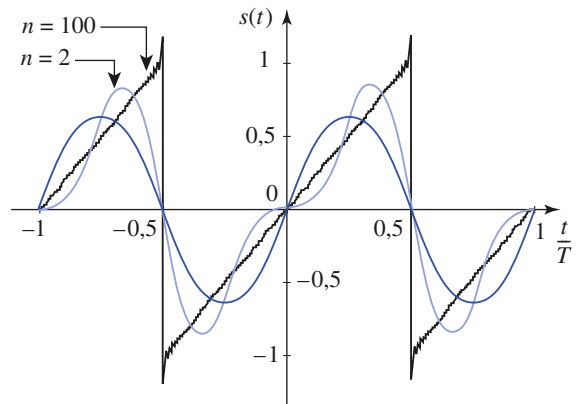
D'un point de vue pratique, nous retiendrons qu'un signal discontinu exige une bande passante très large pour sa transmission.

Lorsqu'un signal périodique ne présente que des discontinuités de pente, l'amplitude C_n des raies de son spectre de fréquence décroît rapidement (au moins en $\frac{1}{n^2}$).

Lorsqu'un signal périodique présente des discontinuités, l'amplitude C_n des raies de son spectre de fréquence décroît lentement (généralement en $\frac{1}{n}$).



Doc. 10. Mise en évidence du phénomène de Gibbs sur un signal carré.



Doc. 11. Mise en évidence du phénomène de Gibbs sur une rampe périodique.

1.7. Valeurs efficaces et coefficients de Fourier

1.7.1. Formule de Parseval

Soit S la valeur efficace d'un signal $s(t)$ périodique développable en série de Fourier :

$$S^2 = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt .$$

S^2 s'obtient par la formule de Parseval :

$$S^2 = \langle s^2(t) \rangle = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 .$$

La formule de Parseval se démontre en remarquant que :

$$s^2(t) = \left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n) \right]^2$$

comprend :

- un terme constant C_0^2 de valeur moyenne C_0^2 ;
- des termes en $2C_0C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$ et en :

$$2C_n \cos(n\omega t + \phi_n) C_m \cos(m\omega t + \phi_m) \quad (n \neq m)$$

de valeur moyenne nulle ;

- des termes en $C_n^2 \cos^2(n\omega t + \phi_n)$ de valeur moyenne $\frac{1}{2}C_n^2$.

La formule de Parseval peut s'interpréter physiquement en constatant que l'énergie est souvent une fonction quadratique du signal (par exemple

$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2$ dans un condensateur $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mv^2$ pour un point matériel...).

Elle signifie alors que l'énergie moyenne contenue dans le signal périodique est la somme des énergies moyennes associées à chacun de ses harmoniques.

Application 2

Puissance moyenne d'un courant redressé

1) Calculer, en utilisant sa définition, la valeur efficace I d'un courant sinusoïdal redressé double alternance.

Comparer au signal non redressé.

2) Ce courant redressé est filtré par un filtre passe-bas parfait, de fréquence de coupure f_H . Un tel filtre a pour fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = 1 \text{ si } f < f_H \text{ et } \underline{H}(j\omega) = 0 \text{ si } f > f_H$$

Déterminer la valeur minimale de f_H pour que 99 % de la puissance moyenne \mathcal{P} soit transmise.

Comparer au signal non redressé.

1) Par définition :

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{i_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{i_m^2}{2},$$

d'où, comme pour le signal non redressé :

$$I = \frac{i_m}{\sqrt{2}}.$$

2) Nous avons vu l'expression de la décomposition en série de Fourier d'un courant redressé double alternance (cf. § 1.4.4.) :

$$i(t) = \frac{2i_m}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(2p\omega t)}{4p^2 - 1} \right].$$

Notons $Z = R + jX$ l'impédance d'utilisation. Elle aurait reçu avant filtrage la puissance :

$$\mathcal{P} = RI^2 = R \frac{i_m^2}{2}.$$

Après filtrage passe-bas, en ne conservant que les n premiers harmoniques, cette impédance ne reçoit plus que la puissance :

$$\mathcal{P}_n = R \frac{4i_m^2}{\pi^2} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^n \frac{1}{(4p^2 - 1)^2} \right]$$

d'après le théorème de Parseval.

Le rapport ρ_n de la puissance \mathcal{P}_n transmise par le filtre à la puissance \mathcal{P} disponible avant filtrage est :

$$\rho_n = \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}} = \frac{8}{\pi^2} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^n \frac{1}{(4p^2 - 1)^2} \right].$$

Calculons les trois premières valeurs de ρ_n :

$$\rho_0 = 0,8104, \quad \rho_1 = 0,9905 \quad \text{et} \quad \rho_2 = 0,9977.$$

Pour que 99 % de la puissance soit transmise par le filtre, il suffit que sa fréquence de coupure f_H soit supérieure à la fréquence du fondamental $f_1 = \frac{2\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\pi}$, c'est-à-dire au double de la fréquence du courant avant redressement. Pour le signal non redressé, on a 100 % de transmission de la puissance dès que $f_H > f_1$. Pour le signal redressé, ce n'est pas très différent.

1.7.2. Taux de distorsion

Appliquons un signal sinusoïdal $v_e(t) = v_{e_m} \cos(\omega t)$ à l'entrée d'un amplificateur. Si ce dernier est linéaire, il délivre en sortie un signal sinusoïdal de même pulsation ω .

Ainsi, le fondamental du signal de sortie correspond à l'amplification linéaire et les autres harmoniques sont dus à la non-linéarité.

Il en résulte que la linéarité d'un amplificateur peut s'apprécier avec le taux de distorsion harmonique δ_h , rapport de la valeur efficace S_h des harmoniques ($n > 1$) créés par la distorsion à la valeur efficace S_f du fondamental :

$$\delta_h = \frac{S_h}{S_f} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2}}{C_1}$$

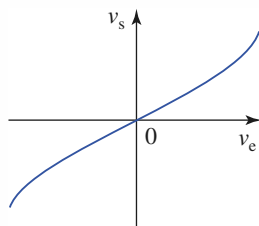
Un amplificateur est d'autant plus linéaire que son taux de distorsion harmonique est voisin de zéro.

► Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.

Application 3

Distorsion harmonique d'un amplificateur

La caractéristique $v_s = f(v_e)$, donnée document 12, est celle d'un amplificateur soumis à des tensions sinusoïdales $v_e(t) = v_{e_m} \cos(\omega t)$ dont les fréquences sont comprises dans sa bande passante. Sachant que l'équation de cette caractéristique est de la forme $v_s = av_e + bv_e^3$ ($a > 0, b > 0$), déterminer le taux de distorsion harmonique δ_h de cet amplificateur.



Doc. 12. Caractéristique d'un amplificateur en régime harmonique de forts signaux.

Appliquons, à l'entrée de l'amplificateur, un signal sinusoïdal $v_e(t) = v_{e_m} \cos(\omega t)$. Le signal délivré en sortie n'est pas sinusoïdal :

$$v_s(t) = av_{e_m} \cos(\omega t) + bv_{e_m}^3 \cos^3(\omega t)$$

Linéarisons l'expression de $v_s(t)$ à l'aide de la relation :

$$\cos^3(\omega t) = \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t)$$

Il vient :

$$v_s(t) = \left[av_{e_m} + \frac{3b}{4} v_{e_m}^3 \right] \cos(\omega t) + \frac{b}{4} v_{e_m}^3 \cos(3\omega t)$$

La décomposition en série de Fourier de la tension de sortie comprend deux termes, respectivement d'amplitude $C_1 = av_{e_m} + \frac{3b}{4} v_{e_m}^3$ et $C_3 = \frac{b}{4} v_{e_m}^3$.

Le taux de distorsion harmonique de l'amplificateur s'en déduit :

$$\delta_h = \frac{C_3}{C_1} = \frac{bv_{e_m}^3}{4av_{e_m} + 3bv_{e_m}^3}$$

Écrit sous la forme $\delta_h = \frac{b}{3b + \frac{4a}{v_{e_m}^2}}$, il apparaît que

le taux de distorsion harmonique est une fonction croissante de l'amplitude.

Comme cela est généralement le cas, la distorsion harmonique de cet amplificateur se manifeste surtout en régime de forts signaux.

2 Calcul de la tension de sortie pour un filtre linéaire

2.1. Exemple

2.1.1. Présentation

Étudions l'effet d'un filtre passe-bas d'ordre un de fréquence caractéristique f_0 sur un signal créneau pair, de rapport cyclique $\frac{1}{2}$, de fréquence $f = \frac{1}{2}f_0$ et d'amplitude V_0 (doc. 13 et 14).

2.1.2. Détermination de $v_s(t)$ par décomposition en série de Fourier

• Déterminons tout d'abord l'effet du filtre sur un signal harmonique de fréquence quelconque $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = H(\omega)e^{j\varphi} ;$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

et $\varphi(\omega) = -\arctan\frac{f}{f_0}$.

Si $v_e(t) = v_{e_m} \cos\frac{2\pi t}{f}$ alors en régime permanent :

$$v_s(t) = \frac{v_{e_m}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \cos\left(2\pi ft - \arctan\frac{f}{f_0}\right).$$

• Décomposons le signal d'entrée en série de Fourier. D'après l'expression donnée au § 1-4-1 :

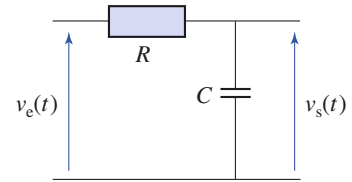
$$v_e(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin[(2p+1)2\pi ft]}{2p+1} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}$$

ou encore :

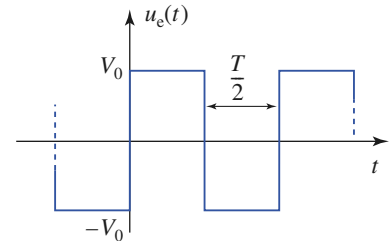
$$v_e(t) = \sum_{n \text{ impair}} v_{e_n}(t) \quad \text{avec } v_{e_n}(t) = \frac{4V_0}{\pi} \frac{\sin[(2p+1)2\pi ft]}{2p+1}, \text{ et } n = 2p+1.$$

• Si l'harmonique de rang $n = 2p+1$ était seul, le signal de sortie serait égal à $v_{s_n}(t)$, déterminée par l'effet du filtre sur la tension v_{e_n} d'amplitude $\frac{4V_0}{(2p+1)\pi}$ et de fréquence $(2p+1)f$:

$$v_{s_n}(t) = \frac{4V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2p+1)f}{f_0}\right)^2}} \frac{\sin\left[(2p+1)2\pi ft - \arctan\frac{(2p+1)f}{f_0}\right]}{2p+1}$$



Doc. 13. Filtre passe-bas d'ordre un.



Doc. 14. $u_e(t)$.

Comme $f = \frac{1}{2}f_0$:

$$v_{sn}(t) = \frac{4V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2p+1}{2}\right)^2}} \frac{\sin\left[(2p+1)2\pi f_0 t - \arctan\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right]}{2p+1}$$

• Le filtre étant *linéaire*, nous pouvons appliquer la superposition des régimes forcés. La réponse à la somme des $u_{en}(t)$ est égale à la somme des $u_{sn}(t)$:

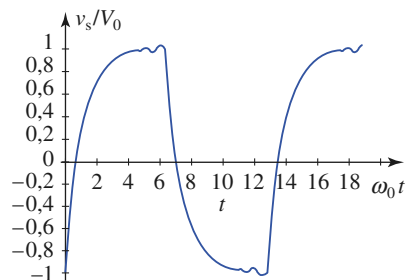
$$v_s(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2p+1}{2}\right)^2}} \frac{\sin\left[(2p+1)2\pi f_0 t - \arctan\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right]}{2p+1}$$

avec $p \in \mathbb{N}$.

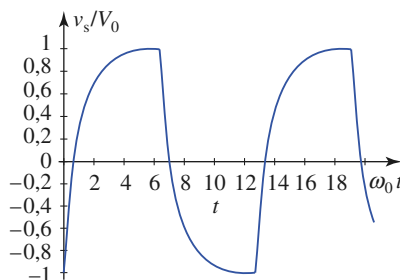
L'expression de $v_s(t)$ n'est pas particulièrement simple, mais un logiciel de calcul peut en donner une valeur approchée en calculant la somme d'un nombre fini d'harmoniques :

$$v_s(t) \approx \sum_{p=0}^{p_{\max}} v_{sn}(t) \quad (\text{doc. 15 et 16}).$$

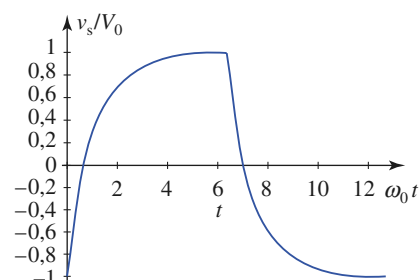
L'approximation est d'autant meilleure que p_{\max} est grand. Dans le cas étudié, on constate que la courbe donnée par le logiciel de calcul n'évolue pratiquement plus à partir de $p_{\max} = 20$. Nous pouvons donc restituer le signal de façon satisfaisante en sommant une vingtaine d'harmoniques.



Doc. 15. Valeur approchée de $v_s(t)$ pour $p_{\max} = 5$.



Doc. 16. Valeur approchée de $v_s(t)$ pour $p_{\max} = 20$.



Doc. 17. $v_s(t)$ obtenue par la résolution de l'équation différentielle.

2.1.3. Vérification par une autre méthode

Dans ce cas simple, nous pouvons déterminer une expression exacte de $u_s(t)$ en régime forcé. Fixons l'origine des temps à l'instant où v_e bascule de $-V_0$ à $+V_0$ (doc. 14).

• Lorsque $v_e = +V_0$, $v_s(t)$ est solution de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$\frac{dv_s}{dt} + \omega_0 v_s = \omega_0 V_0$$

dont la solution générale est : $v_s(t) = V_0 + Ae^{-\omega_0 t}$.

• Lorsque $v_e = -V_0$, $v_s(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dv_s}{dt} + \omega_0 v_s = -\omega_0 V_0$$

dont la solution générale est : $v_s(t) = -V_0 + Be^{-\omega_0 t}$.

- La continuité de $v_s(t)$ à l'instant $t = \frac{T}{2}$ implique :

$$V_0 + Ae^{-\frac{\omega_0 T}{2}} = -V_0 + Be^{-\frac{\omega_0 T}{2}}.$$

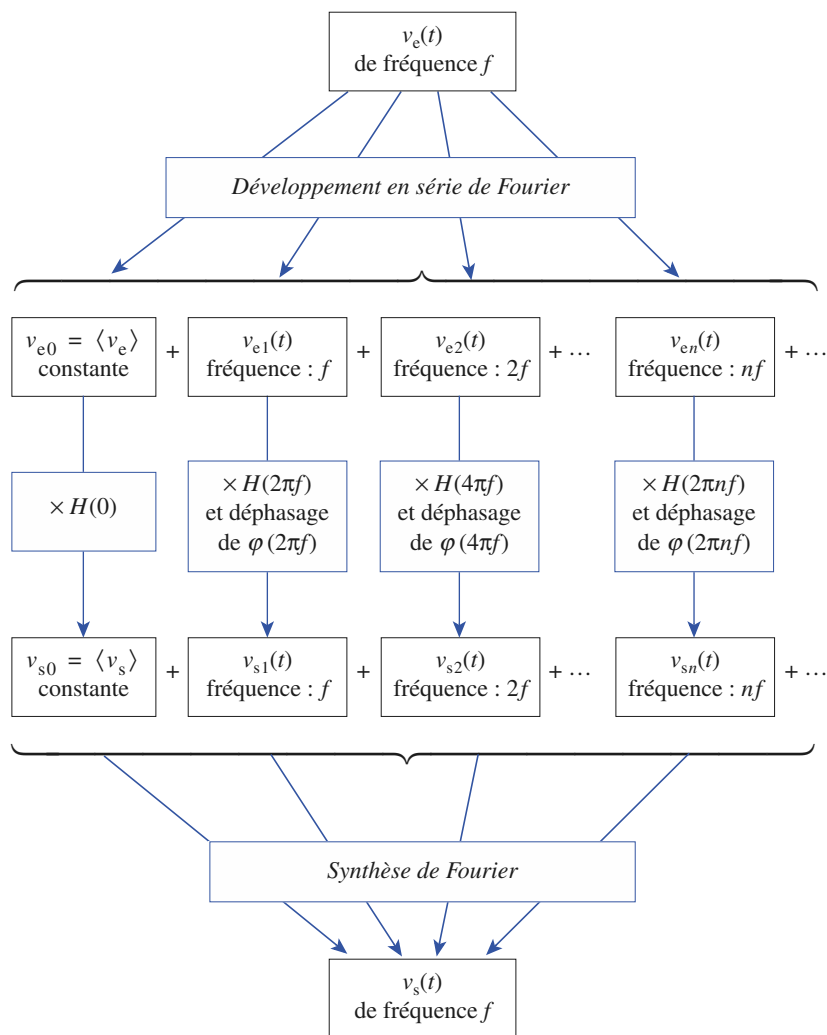
En régime établi, nous avons aussi : $v_s(0) = v_s(T)$, soit :

$$V_0 + A = -V_0 + Be^{-\omega_0 T}.$$

Des deux équations, nous tirons, avec ici $\omega_0 T = 4\pi$:

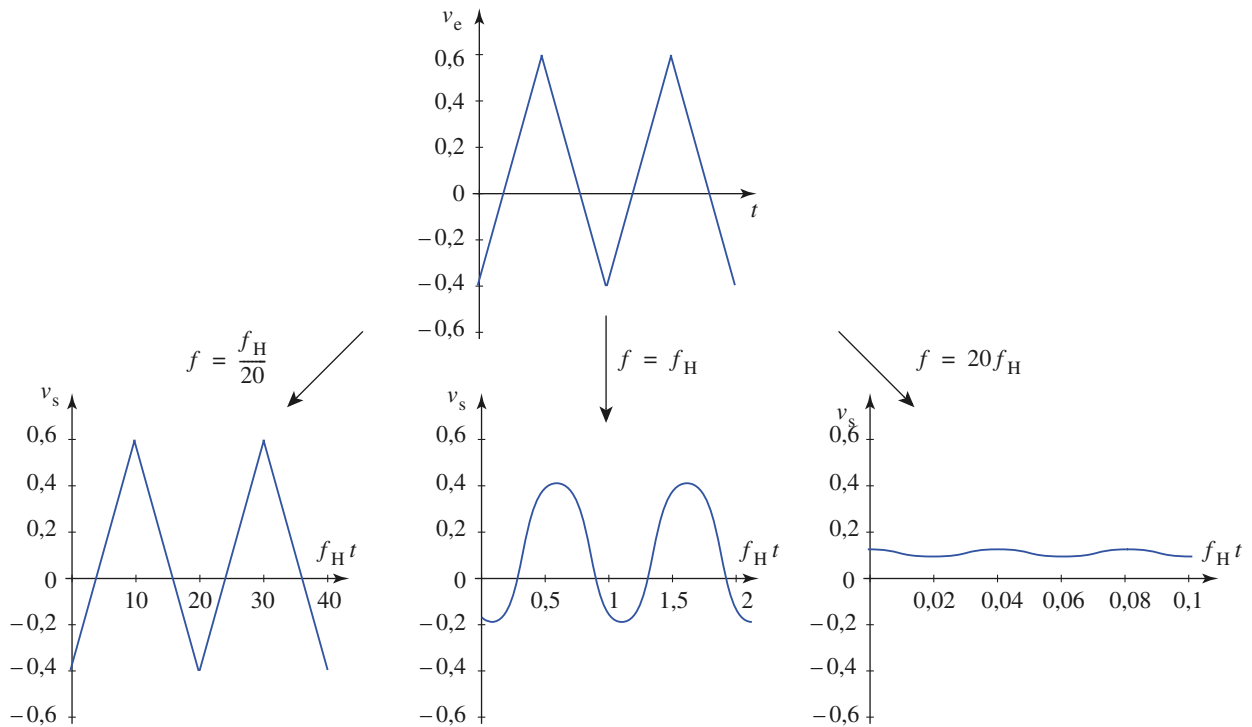
$$A = -2V_0 \frac{1}{1 + e^{-2\pi}} \quad \text{et} \quad B = 2V_0 \frac{e^{2\pi}}{1 + e^{-2\pi}}.$$

La méthode utilisée pour l'exemple précédent est applicable à tout *signal périodique* et tout *filtre linéaire*. Elle est récapitulée dans le tableau du *document 18*.

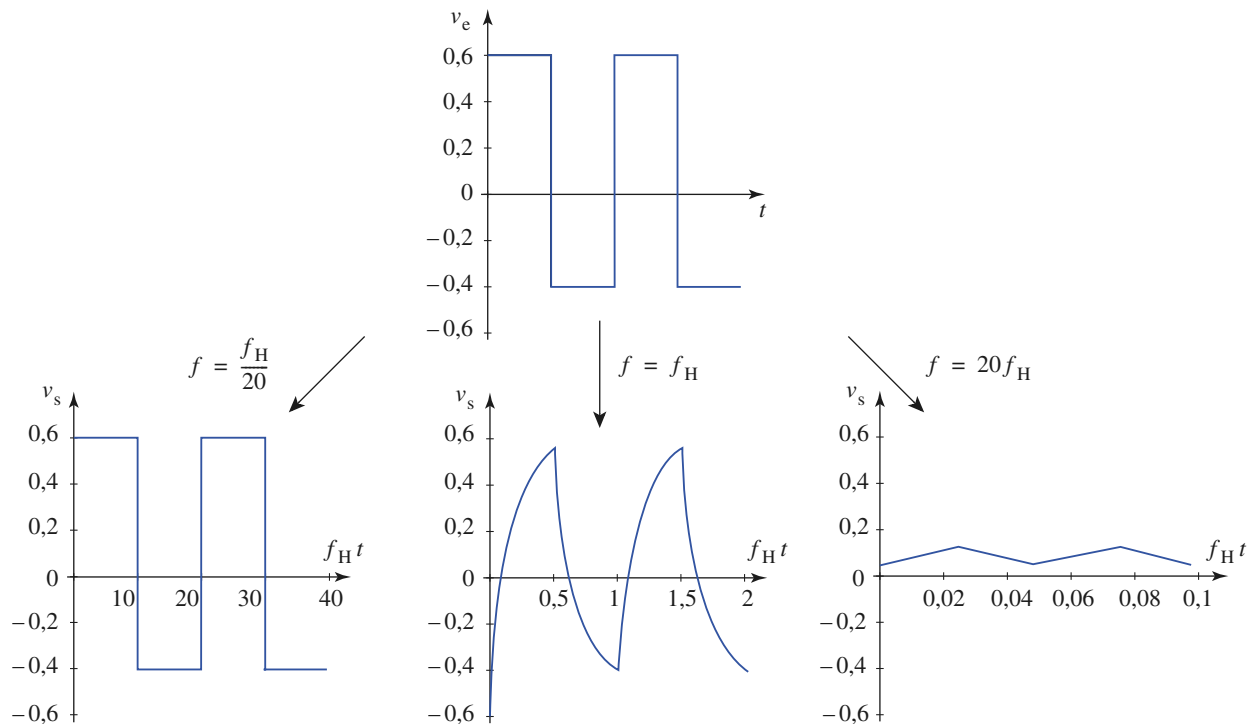


Doc. 18. Détermination du signal de sortie d'un filtre linéaire.

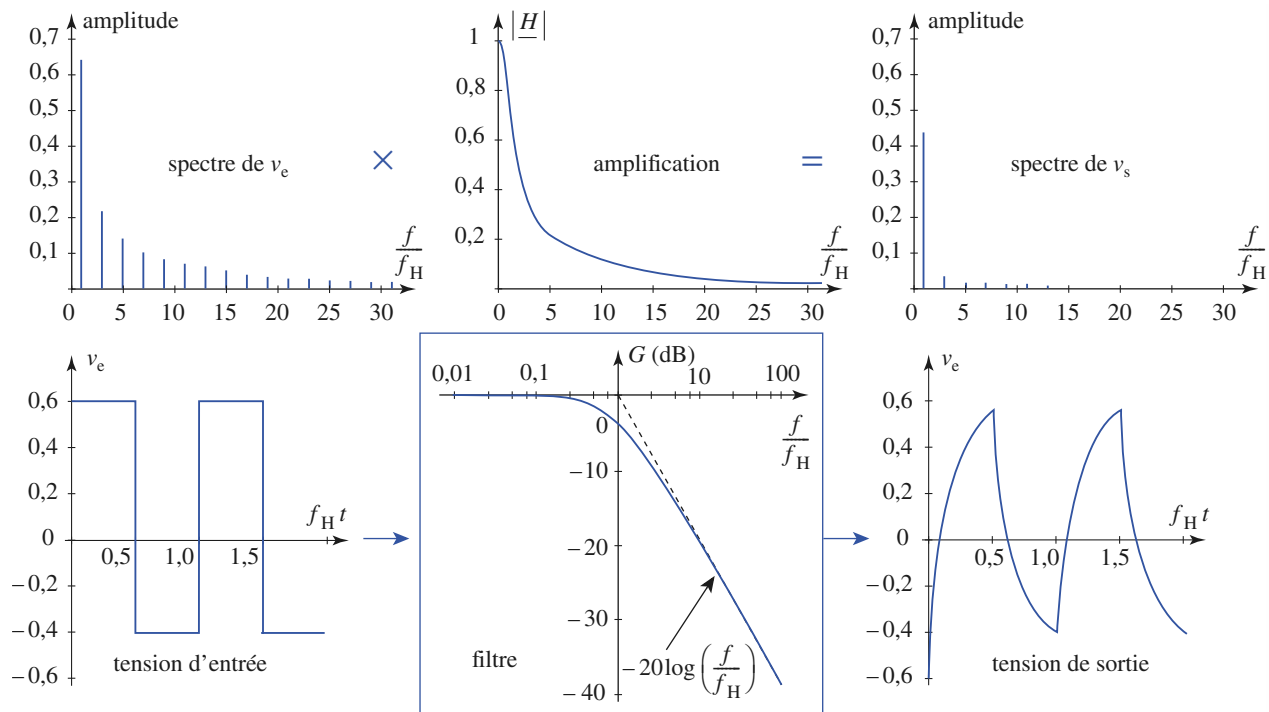
► Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.



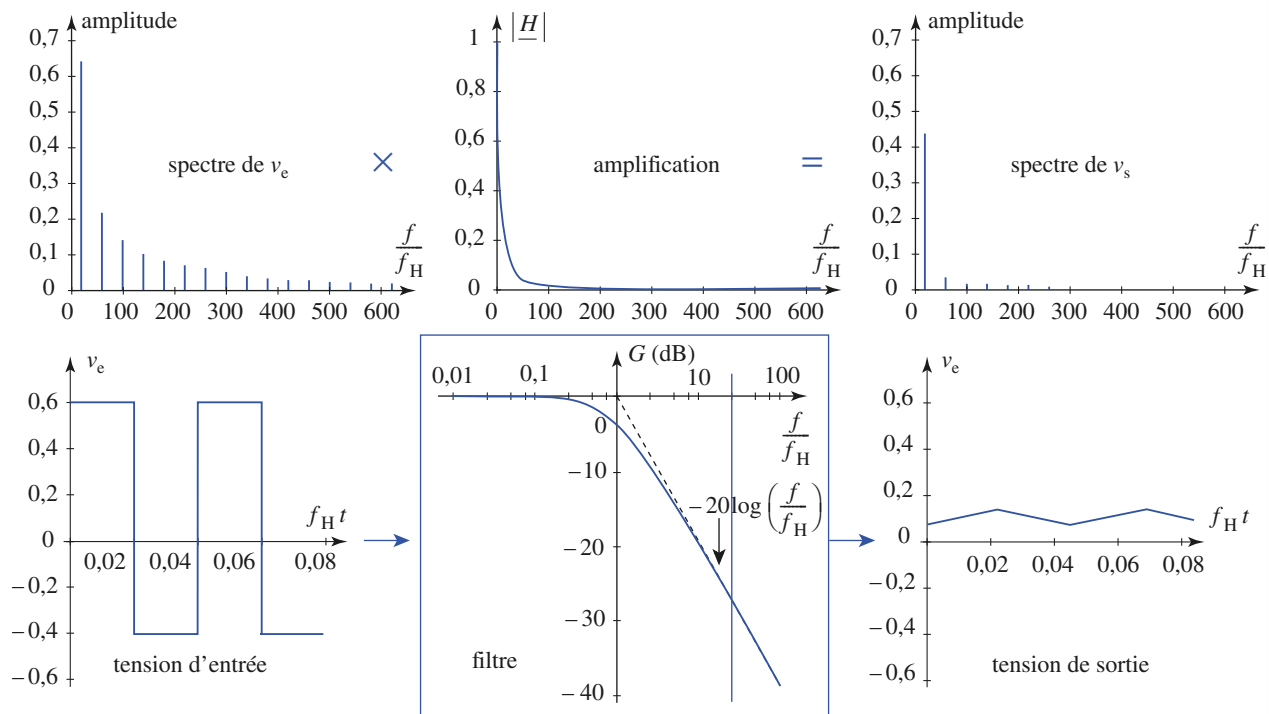
Doc. 19. *Filtre passe-bas du premier ordre. Réponse d'un signal triangulaire d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence f égale à $\frac{f_H}{20}$, $\frac{f_H}{20}$ et $20f_H$, superposé à une composante continue de 0,1 V.*



Doc. 20. *Filtre passe-bas du premier ordre. Réponse d'un signal en créneaux d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence f égale à $\frac{f_H}{20}$, f_H et $20f_H$, superposé à une composante continue de 0,1 V.*



Doc. 21. *Filtre passe-bas du premier ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence f_H , superposé à une composante continue de 0,1 V.*



Doc. 22. *Filtre passe-bas du premier ordre. Réponse à un signal créneaux d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $f = 20f_H$, superposé à une composante continue de 0,1 V.*

3 Effet d'un filtre passe-bas sur un signal périodique

Nous étudions l'effet d'un passe-bas d'ordre un. L'effet d'un passe-bas d'ordre deux peut être étudié selon les mêmes méthodes (rappelons que la coupure à haute fréquence est alors plus brutale, et qu'il peut même y avoir une résonance).

Nous pouvons envisager trois cas :

- la fréquence f du signal est très inférieure à la fréquence de coupure f_H ;
- f est de l'ordre de f_H ;
- f est très supérieure à f_H .

3.1. Observation des signaux

Ces trois cas sont représentés sur le *document* 19 (page précédente) pour un signal triangulaire et sur le *document* 20 pour un signal créneau, d'amplitude crête-crête de 1 V et de composante continue 0,1 V.

Nous remarquons que, dans tous les cas :

La composante continue du signal est intégralement transmise avec une amplification unité. Le signal de sortie ne présente jamais de discontinuité.

Observons la composante variable.

Dans le cas où $f < f_H$, le signal triangulaire est transmis avec une légère déformation au niveau de la rupture de pente alors que le signal créneau est transmis avec une déformation plus sensible au niveau de la discontinuité.

Dans le cas où f est de l'ordre de f_H , les signaux transmis sont très déformés. Si f est grand devant f_H , l'amplitude du signal variable est très faible.

3.2. Interprétation

Un signal périodique peut être décomposé en série de Fourier en une composante continue représentant sa valeur moyenne et des harmoniques de fréquence nf (n entier).

Un filtre passe-bas n'atténue pas la composante continue et les signaux sinusoïdaux de fréquence inférieure à f_H .

- Si $f \ll f_H$, une grande partie des harmoniques du signal est transmise sans modification. Le signal de sortie est voisin du signal d'entrée. La déformation du signal de sortie au niveau des discontinuités provient de l'élimination des harmoniques de rang élevé $\left(n > \frac{f_H}{f}\right)$.

- Si f est de l'ordre de f_H , le fondamental et quelques harmoniques sont transmis, les autres harmoniques sont éliminés (*doc.* 21). Le signal de sortie ne ressemble pas au signal d'entrée.

- Si $f \gg f_H$, seule la composante continue du signal est transmise sans atténuation. Les différents harmoniques sont très atténués (*doc.* 22).

Remarque

Si $f \gg f_0$, nous pouvons vérifier que, avec un signal d'entrée en créneau, le spectre du signal de sortie est équivalent au spectre d'un signal triangulaire avec des harmoniques en $\frac{1}{n^2}$. On retrouve ainsi le caractère intégrateur du filtre passe-bas d'ordre un.

4 Effet d'un filtre passe-haut sur un signal périodique

Nous étudions l'effet d'un passe-haut d'ordre un. L'effet d'un passe-haut d'ordre deux peut être étudié selon les mêmes méthodes.

Envisageons les trois cas suivants :

- la fréquence f du signal est très inférieure à la fréquence de coupure f_B ;
- f est de l'ordre de f_B ;
- f est très supérieure à f_B .

4.1. Observation des signaux

Ces trois cas sont représentés sur les *documents* 23 et 24 (pages suivantes).

Nous remarquons que, dans les trois cas, la *composante continue du signal est éliminée*. La réponse à un signal créneau présente une discontinuité d'amplitude 1 V identique à celle du signal d'entrée.

Le filtre passe-haut transmet sans atténuation les discontinuités de signal et élimine sa composante continue.

- Si $f \ll f_B$, le signal de sortie est d'amplitude faible dans le cas d'un signal triangulaire. En revanche, pour le signal créneau, il présente deux pics d'amplitude 1 V à chaque discontinuité du signal d'entrée.
- Dans le cas où f est de l'ordre de f_B , les signaux transmis sont très déformés.
- Si f est grand devant f_B , les signaux de sortie sont proches du signal d'entrée sans sa composante continue.

Remarque

Un filtre passe-haut du premier ordre est utilisé dans les oscilloscopes en mode AC (Alternative Current).

Dans ce mode, le signal visualisé est déformé si sa fréquence n'est pas très supérieure à la fréquence de coupure basse du filtre (de l'ordre de 10 Hz).

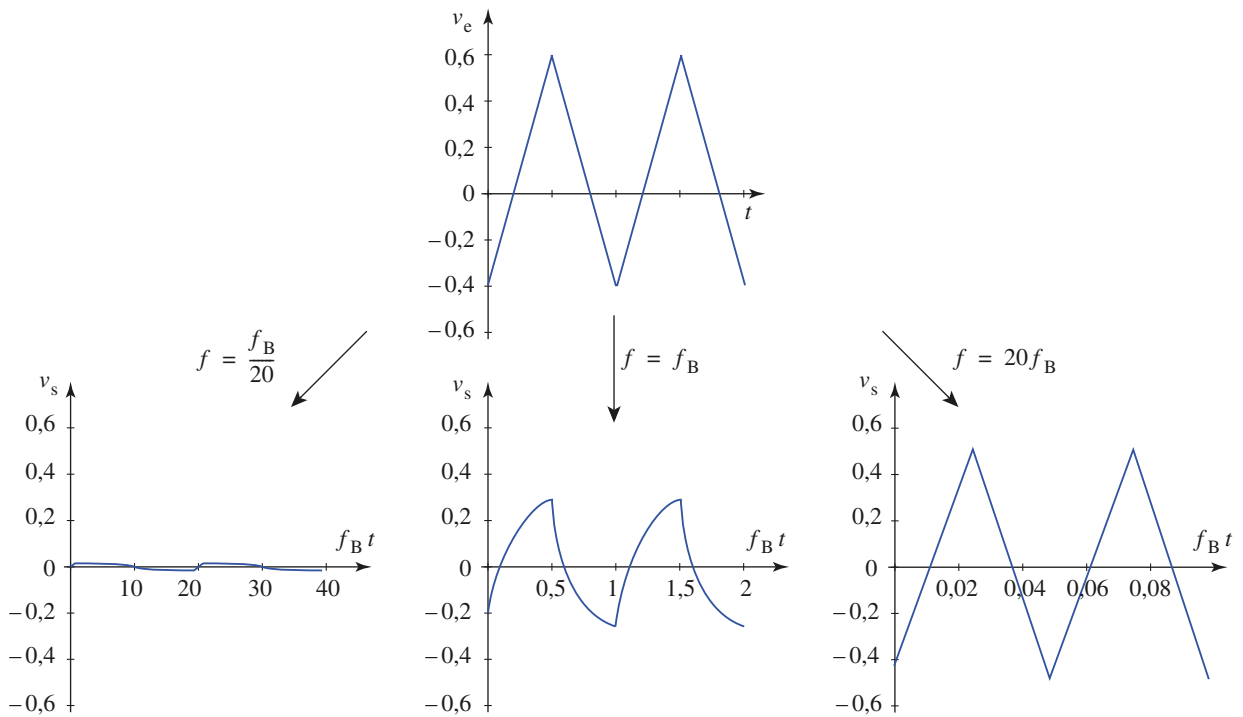
Le mode AC doit être utilisé avec précaution et pour des signaux de fréquence supérieure à 100 Hz.

4.2. Interprétation

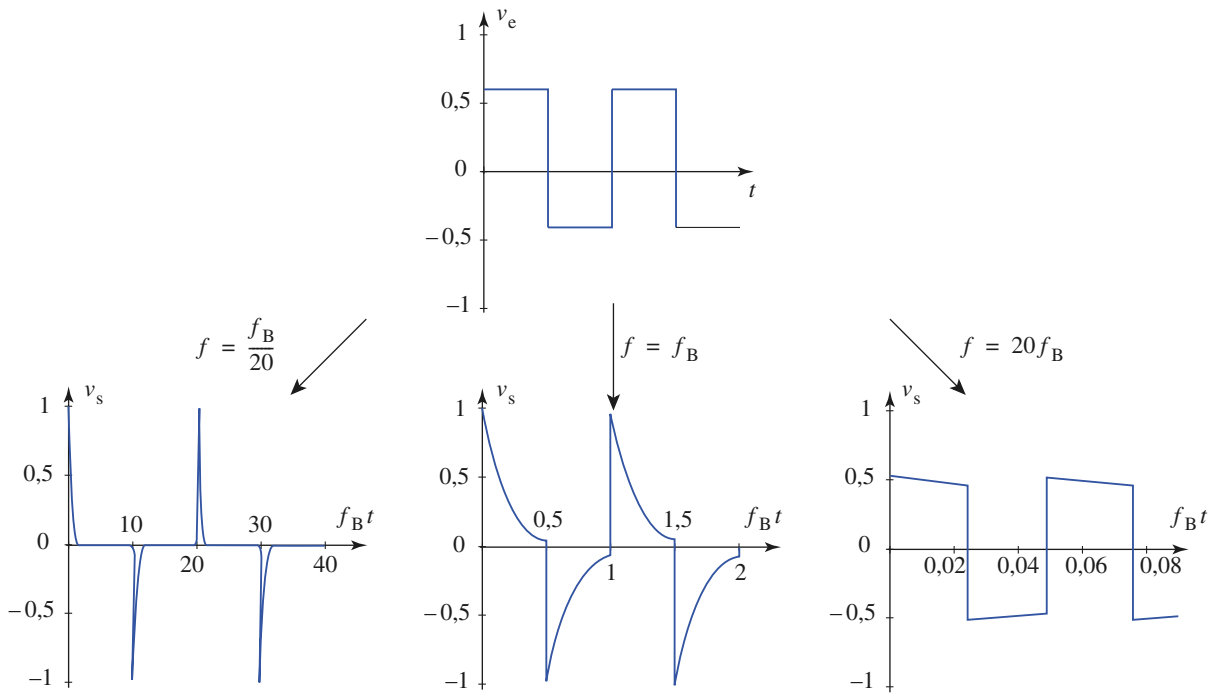
Un filtre passe-haut élimine la composante continue et atténue de façon sensible les signaux sinusoidaux de fréquence inférieure à f_B , les signaux de fréquence supérieure à f_B sont transmis.

La discontinuité de signal est due à la présence d'harmoniques de rang élevé et d'amplitude en $\frac{1}{n}$ (cf. § 1.6.). Leur transmission sans atténuation explique donc la discontinuité du signal de sortie.

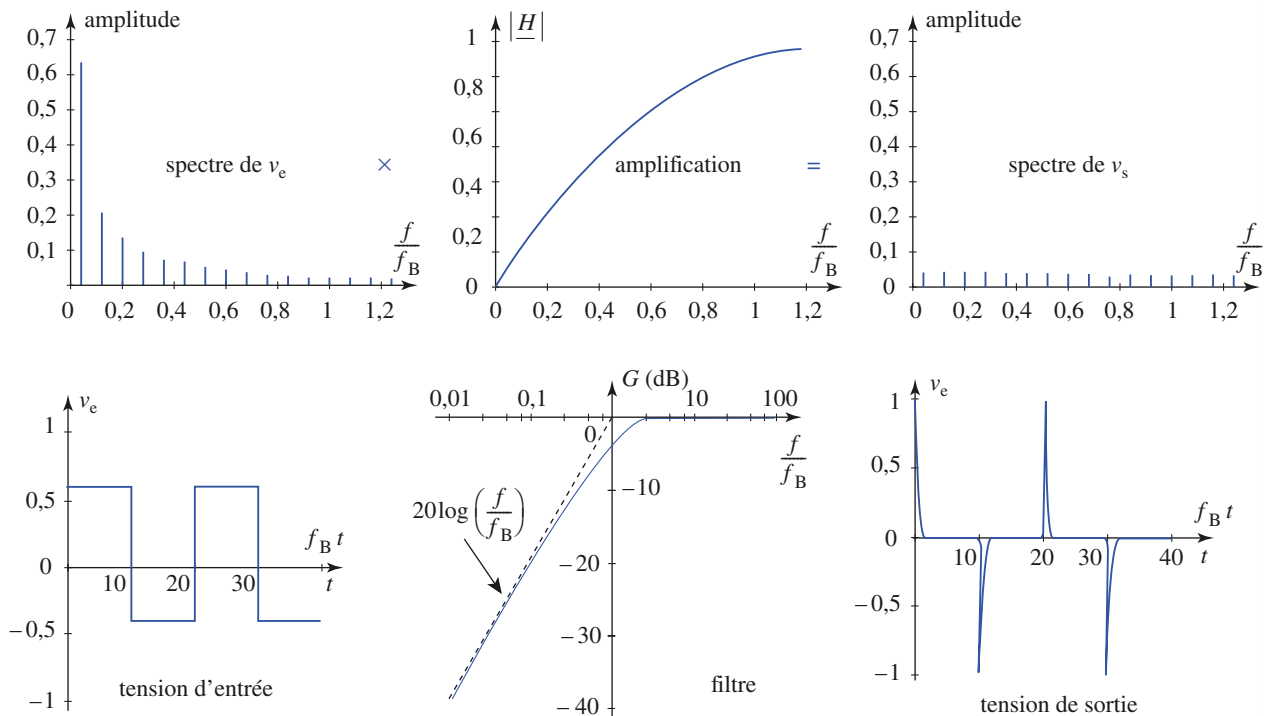
- Si $f \ll f_B$, une grande partie des harmoniques du signal est atténuée (doc. 25). Seuls les harmoniques de rang n élevé sont transmis : ceux du signal triangulaire sont en $\frac{1}{n^2}$, donc d'amplitude très faible, le signal de sortie est très faible, ceux du signal créneau en $\frac{1}{n}$ créent la discontinuité d'amplitude 1 V.



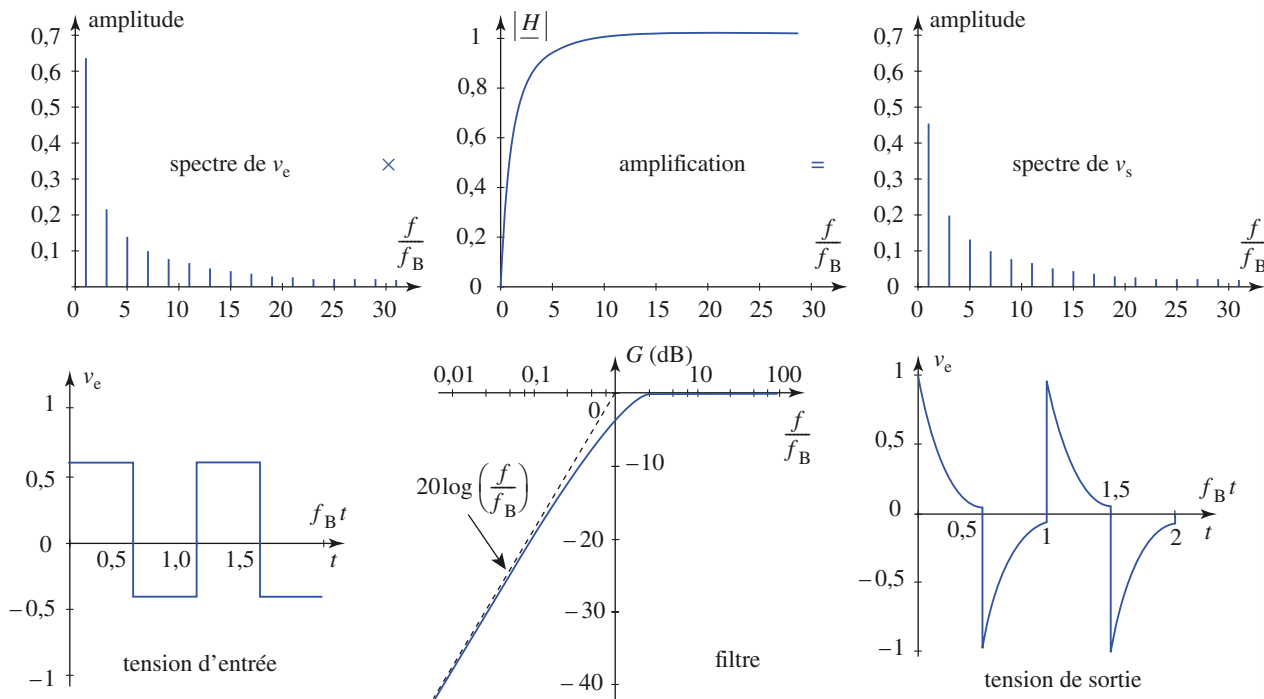
Doc. 23. *Filtre passe-haut du premier ordre. Réponse à un signal triangulaire d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $\frac{f_B}{20}$, f_B et $20f_B$, superposé à une composante continue de 0,1 V.*



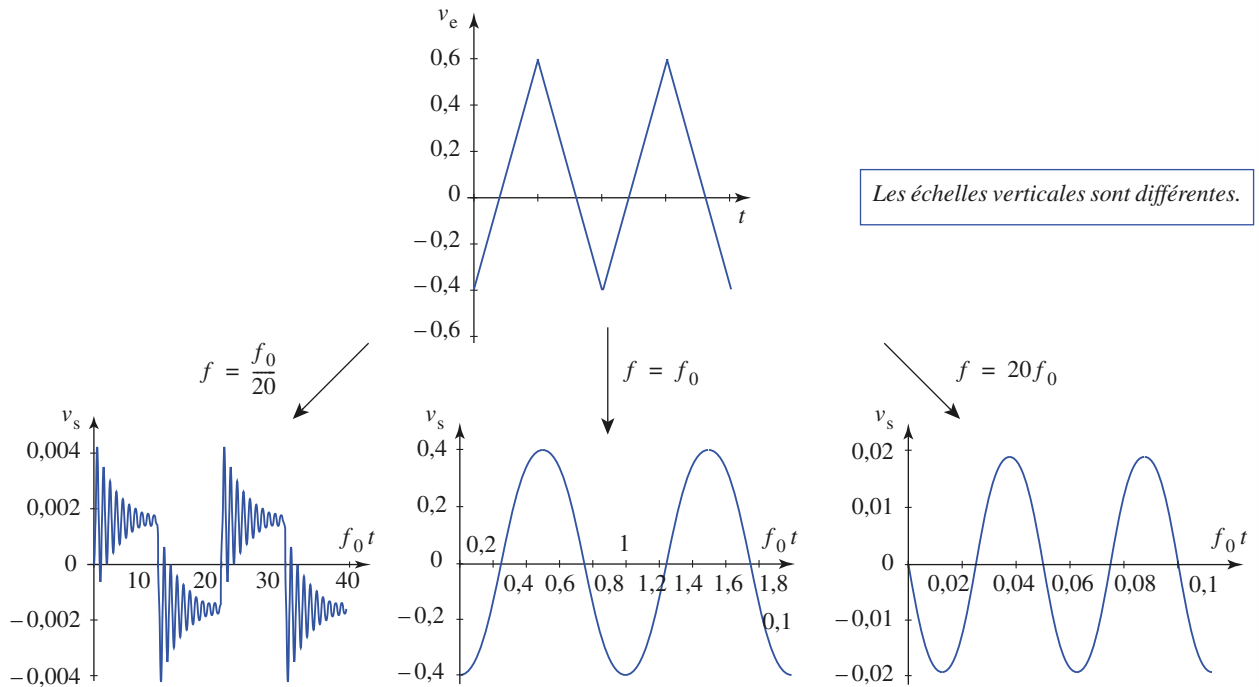
Doc. 24. *Filtre passe-haut du premier ordre. Réponse à un signal créneau d'amplitude 1 V, de fréquence $\frac{f}{f_B}$, f_B et $20f_B$, superposé à une composante continue de 0,1 V.*



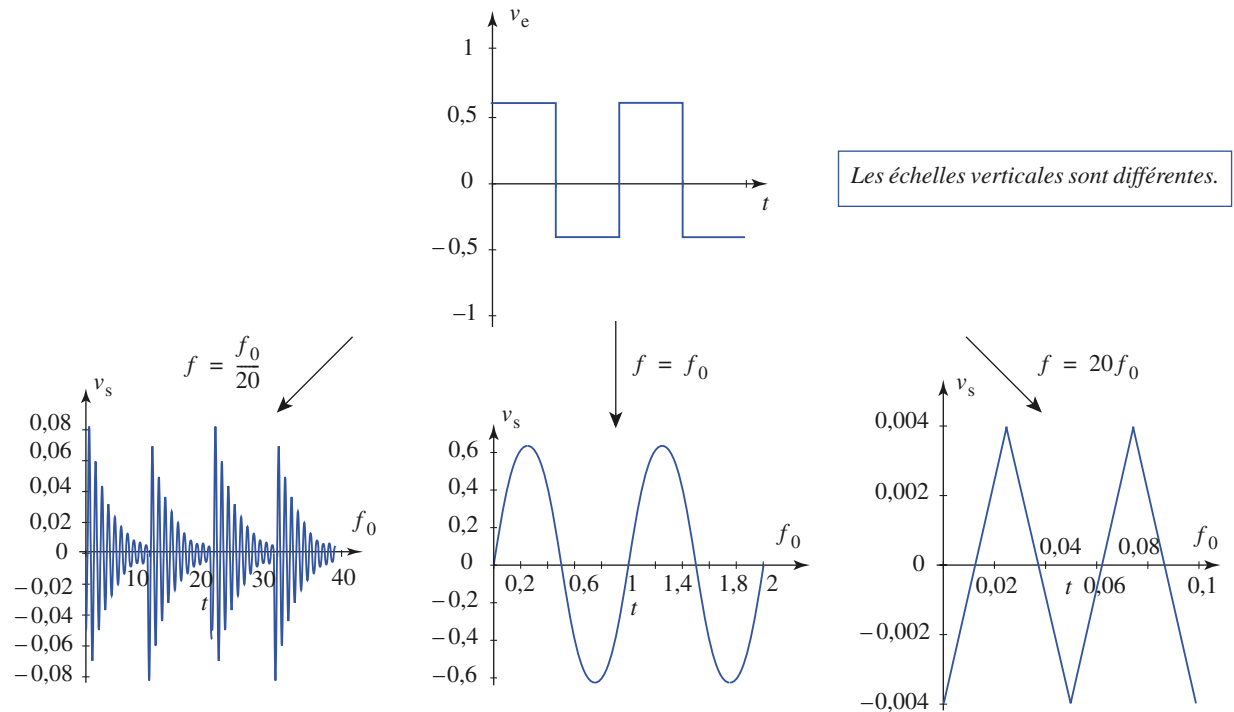
Doc. 25. *Filtre passe-haut du premier ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $\frac{f_B}{20}$, superposé à une composante continue de 0,1 V. Analyse des harmoniques du signal d'entrée et du signal de sortie.*



Doc. 26. *Filtre passe-haut du premier ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence f_B , superposé à une composante continue de 0,1 V. Analyse des harmoniques du signal d'entrée et du signal de sortie.*



Doc. 27. Filtre passe-bande de coefficient de qualité $Q = 10$. Réponse à un signal triangulaire d'amplitude crête à crête 1 V, de fréquence $\frac{f_0}{20}$, f_0 et $20f_0$ superposé à une composante continue de 0,1 V.



Doc. 28. Filtre passe-bande de coefficient de qualité $Q = 10$. Réponse à un signal en créneau d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $\frac{f_0}{20}$, f_0 et $20f_0$ superposé à une composante continue de 0,1 V.

- Si f est de l'ordre de f_B , le continu et le fondamental sont éliminés, les autres harmoniques sont transmis (*doc. 26*). Le signal de sortie ne ressemble pas au signal d'entrée.
- Si $f \gg f_B$, seule la composante continue du signal est éliminée. Les différents harmoniques sont transmis par le filtre.

Remarque

Si $f \ll f_B$, nous pouvons vérifier que, avec un signal d'entrée en triangle, le spectre du signal de sortie est équivalent au spectre d'un signal créneau, avec des harmoniques en $\frac{1}{n}$.

On retrouve ainsi le caractère dérivateur du filtre passe-haut d'ordre un.

5 Effet d'un filtre passe-bande sur un signal périodique

Étudions l'effet d'un filtre passe-bande à bande étroite ($Q = 10$) dans trois cas particuliers de signal périodique :

- $f < f_0$: fréquence inférieure à la fréquence caractéristique du filtre ;
- $f = f_0$: fréquence égale à la fréquence caractéristique ;
- $f > f_0$: signal de fréquence supérieure à la fréquence caractéristique du filtre ;

5.1. Observation des signaux

Dans tous les cas, le signal ne présente pas de discontinuité et sa composante continue est éliminée (*doc. 27 et 28*).

Le signal de sortie est soit d'amplitude très faible (si f est très différent de f_0), soit pratiquement sinusoïdal (si f est voisin de f_0).

Un filtre passe-bande à bande étroite ne transmet que les composantes sinusoïdales de fréquence voisine de la fréquence de résonance f_0 du filtre. Il élimine la composante continue et les discontinuités.

Remarque

Il faut tenir compte de la modification d'échelle pour apprécier l'atténuation du signal de sortie.

5.2. Interprétation

Un filtre passe-bande atténue les composantes sinusoïdales en dehors de sa bande passante comprise entre les fréquences f_B et f_H ; rappelons que $f_H - f_B = \frac{f_0}{Q}$.

L'harmonique de rang n du signal sera transmis sans atténuation importante si :

$$\frac{f_B}{f} < n < \frac{f_H}{f}.$$

Le nombre d'harmoniques transmis est de l'ordre de :

$$\frac{f_H - f_B}{f} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{f_0}{Qf}$$

(Δf largeur de bande passante du filtre et Q coefficient de qualité).

Trois cas se présentent suivant la valeur de $\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_0}{Qf}$

- $\frac{f_0}{Qf} \gg 1$: de nombreux harmoniques sont dans la bande passante du filtre ;
- $\frac{f_0}{Qf} \approx 1$: peu d'harmoniques sont dans la bande passante du filtre ;
- $\frac{f_0}{Qf} \ll 1$: un ou aucun harmonique est dans la bande passante du filtre ;

Remarque

La résonance aiguë ($Q = 10$) masque le caractère dérivateur du filtre passe-bande pour $f \ll f_0$ en amplifiant les harmoniques 19 et 21.

■ Si $f = \frac{f_0}{20}$

Les harmoniques de rang voisin de 20 sont transmis. Leur superposition donne dans le cas d'une excitation en créneau un signal de type pseudo-périodique de fréquence f_0 .

■ Si $f = f_0$

Seul le fondamental est transmis. Le signal de sortie est quasi sinusoïdal.

■ Si $f = 20f_0$

Le signal de sortie, très atténué, est une fonction triangle pour une attaque en créneau.

On retrouve le caractère intégrateur d'un passe-bande d'ordre deux pour $f \gg f_0$.

CQFR

● DÉCOMPOSITION DE FOURIER D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

• Un signal $s(t)$ physiquement réalisable, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, est développable en série de Fourier en tout point où il est continu :

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

Les coefficients de la série de Fourier sont donnés par les formules :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Le signal constant $\frac{A_0}{2} = \langle s(t) \rangle$ est la valeur moyenne de $s(t)$ sur une période.

L'harmonique de rang 1 : $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$ est le fondamental du signal $s(t)$.

- La série de Fourier d'une fonction paire est une série de cosinus et celle d'une fonction impaire est une série de sinus.
- L'ensemble des amplitudes $C_n (n \in \mathbb{N})$ forme le spectre de fréquence du signal $s(t)$.

Un spectre de fréquence est invariant lors d'un changement de l'origine des temps.

● LE FILTRE PASSE-BAS

La composante continue du signal est transmise sans atténuation.

Le signal de sortie ne présente pas de discontinuité.

Pour un signal périodique de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure f_H : le signal de sortie est peu déformé.

● LE FILTRE PASSE-HAUT

La composante continue est éliminée.

Les discontinuités du signal sont transmises sans atténuation.

Pour un signal périodique de fréquence très supérieure à f_B : le signal de sortie est peu déformé, sa composante continue est éliminée.

● LE FILTRE PASSE-BANDE

La composante continue du signal est éliminée.

Le signal de sortie ne présente pas de discontinuité.

Un filtre passe-bande à bande étroite ou filtre sélectif ne transmet que les composantes sinusoïdales proches de sa fréquence de résonance.

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Comment se définit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ pour des signaux sinusoïdaux. Pour étudier l'effet d'un filtre sur un signal non sinusoïdal, il faut donc le développer en série de Fourier.
- ✓ Si $\underline{H}(j\omega)$ a la même valeur pour tous les harmoniques d'amplitude non négligeable, comment est le signal de sortie ?
- ✓ Comment est le signal de sortie si $H(\omega)$ est grand pour un seul harmonique d'amplitude non négligeable ?
- ✓ Si, pour tous les harmoniques d'amplitude non négligeable, la courbe de gain se confond avec une asymptote de pente -20 dB/décade, de quelle nature est le signal de sortie ?
- ✓ Si, pour tous les harmoniques d'amplitude non négligeable, la courbe de gain se confond avec une asymptote de pente $+20$ dB/décade, et si le filtre ne présente pas de résonance aiguë, le signal de sortie est proportionnel à la dérivée du signal d'entrée.
- ✓ Un signal discontinu est riche en harmoniques de rang élevé, comment peut-on le reconstruire ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

On appelle $u_e(t)$ un signal d'entrée périodique (non sinusoïdal) de fréquence f et $u_s(t)$ le signal de sortie d'un régime forcé.

1. Pour isoler un harmonique d'un signal périodique non sinusoïdal, on utilise un filtre passe-bande dont le facteur de qualité Q est grand devant 1.

- Vrai Faux

2. Pour obtenir $u_s(t) \approx \langle u_e(t) \rangle$ il faut utiliser :

- a. un filtre passe-haut de fréquence caractéristique $f_0 \gg f$
- b. un filtre passe-bande peu sélectif
- c. un filtre passe-bas de fréquence caractéristique $f_0 \ll f$.

3. $u_e(t)$ est un signal en créneau de fréquence f et le filtre est un passe-bas d'ordre deux de fréquence caractéristique $f_0 = \frac{f}{50}$:

- a. $u_s(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence f_0
- b. $u_s(t)$ est un signal en triangle de fréquence f
- c. $u_s(t)$ est un signal dont la courbe se compose de branches paraboliques, de fréquence f .

4. $u_e(t)$ est un signal en triangle de fréquence f et le filtre est un passe-haut d'ordre deux et de facteur de qualité $Q = 20$, de fréquence caractéristique f_0 , de gain nul (en dB) à haute fréquence :

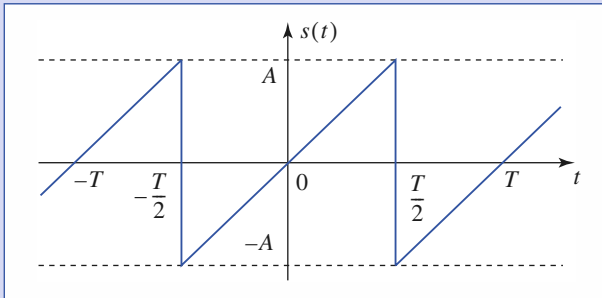
- a. si $f_0 = f$, $u_s(t)$ est sinusoïdal, de fréquence f , et d'amplitude grande devant celle de $u_e(t)$
- b. si $f_0 = f$, $u_s(t) \approx u_e(t)$
- c. si $f_0 = 10f$, $u_s(t) \approx u_e(t)$
- d. si $f_0 = \frac{f}{10}$, $u_s(t)$ est un signal en créneau.

► Solution, page 312.

Exercices

1 Développement en série de Fourier d'une rampe périodique

Développer en série de Fourier la rampe périodique de fréquence T et d'amplitude A .



2 Spectre d'un signal modulé sinusoidalement en amplitude

Un signal porteur $s_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ est modulé en amplitude lorsque son amplitude A_p est fonction d'un signal modulant $s_m(t)$ de fréquence $f_m \ll f_p$.

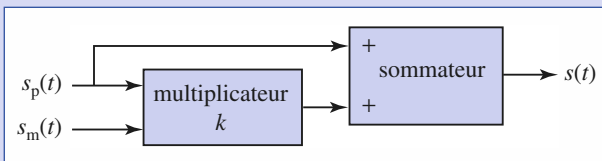
Dans le cas d'une modulation sinusoidale, le signal modulant est sinusoidal :

$$s_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

et le signal modulé de la forme :

$$s(t) = A_p [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t),$$

où m est l'indice de modulation.



1) Le modulateur utilisé étant représenté ci-dessus, calculer l'indice de modulation m .

2) Déterminer le spectre de fréquence du signal modulé $s(t)$.

3 Modulation et démodulation d'amplitude (A.M.)

Un signal modulé sinusoidalement en amplitude est un signal de la forme :

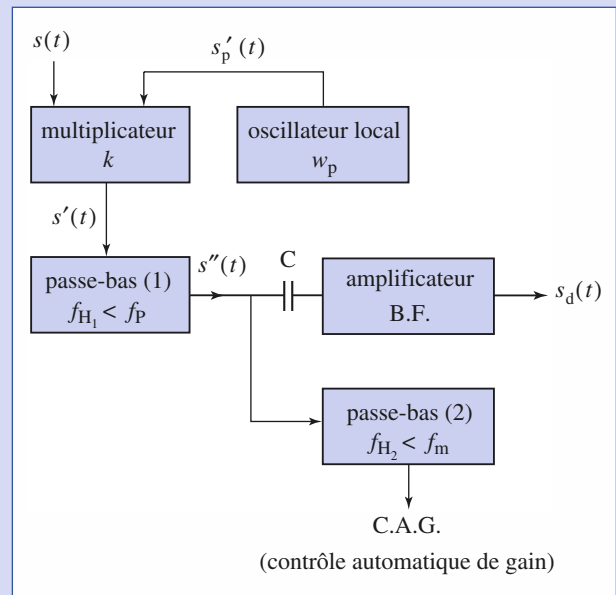
$$s(t) = A_p [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t),$$

où f_p est la fréquence du signal porteur (ou porteuse), $f_m (\ll f_p)$ la fréquence du signal de modulation et m l'indice de modulation.

1) Donner l'allure du signal modulé $s(t)$ pour un indice de modulation $m < 1$.

2) Calculer la bande passante nécessaire à la transmission d'un signal audio encombrant la plage de fréquence $f_{m_1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m_2} = 4,5 \text{ kHz}$, sachant que la porteuse utilisée est de fréquence $f_p = 1 \text{ MHz}$.

3) En admettant que nous disposons, à la réception, d'un oscillateur local $s'_p = A'_p \cos(2\pi f_p t)$ synchrone de l'oscillateur utilisé à l'émission, expliquer le principe du circuit représenté ci-après, où le filtre passe-bas (1) a une fréquence de coupure f_{H_1} telle que $f_{H_1} < f_p$ et le filtre passe-bas (2) une fréquence de coupure $f_{H_2} < f_m$.



4 Filtrage de la tension délivrée par une alimentation « continue »

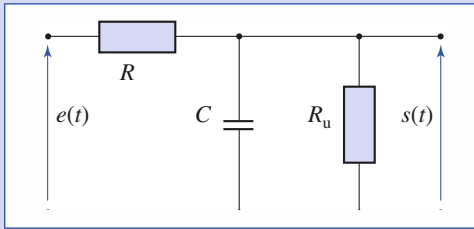
Une alimentation « continue » est basée sur le redressement de la tension sinusoidale délivrée par un transformateur. En conséquence, elle n'est pas parfaitement continue ; elle contient une composante variable de fréquence 100 Hz. Cette tension est supposée de la forme : $e(t) = E_0 + \Delta E \cos(200\pi t)$ avec $E_0 = 10 \text{ V}$ et :

$$\Delta E = 0,1 \text{ V} \left(\frac{\Delta E}{E_0} \text{ est appelé taux d'ondulation} \right).$$

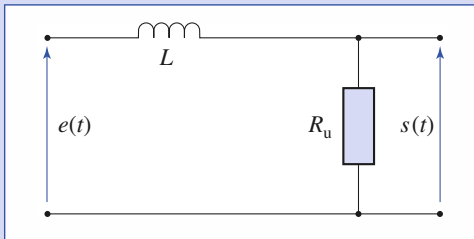
Le dispositif de résistance $R_u = 100 \Omega$ auquel elle est branchée nécessite une tension continue d'au moins 9 V avec un taux d'ondulation inférieur à $\frac{1}{1000}$.

1) Déterminer le couple de valeurs (R, C) du montage suivant réalisant ces conditions avec la valeur de C la plus petite possible. Conclure.

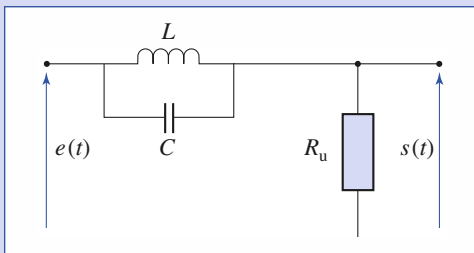
Exercices



2) Quelle est la valeur de l'inductance de la bobine à placer en série avec le dispositif suivant pour avoir le même taux d'ondulation. Conclure.



3) Montrer que le montage du document ci-après permet d'éliminer théoriquement totalement l'ondulation. Pourquoi n'est-ce pas vrai en pratique ?



Sachant que $L = 1 \text{ mH}$, calculer la valeur de C permettant d'éliminer l'ondulation.

5 Retard introduit par un filtre passe-bas d'ordre deux

Soit un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$H = \frac{1}{1 - x^2 + jx\sqrt{2}}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ($\omega_0 = 10\,000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

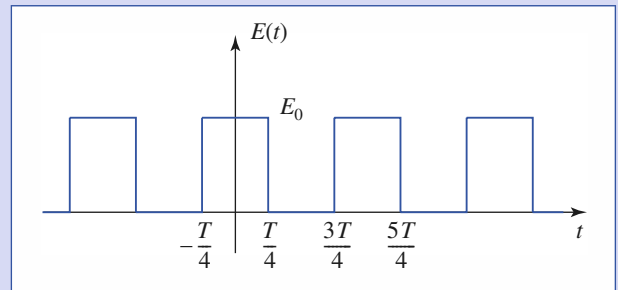
1) Montrer que la phase $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert peut se mettre pour ω très petit devant ω_0 sous la forme :

$$\varphi(\omega) = \pi - K\omega,$$

où K est une constante à déterminer.

2) Donner la décomposition en série de Fourier du signal périodique en créneaux représenté ci-après, avec $E_0 = 1 \text{ V}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, avec $\omega'_0 = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ainsi que celle du

signal de sortie obtenu après filtrage de ce signal par le filtre passe-bas.



On considérera que les signaux peuvent être assimilés à leurs six premières harmoniques non nuls.

Montrer que les seuls effets du filtrage consistent en l'inversion du signal et en l'introduction d'un retard τ entre l'entrée et la sortie que l'on calculera.

6 Retard introduit par un filtre

Soit un signal périodique $e(t)$ de période T .

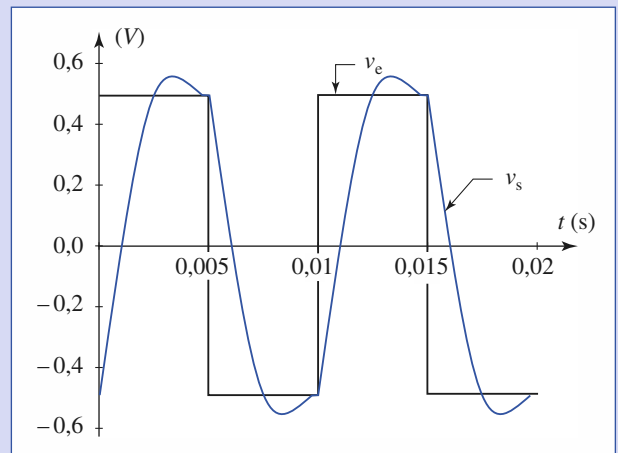
1) En utilisant la décomposition en harmoniques de ce signal, montrer que seul un filtre de fonction de transfert $H = e^{-j\omega\tau}$ introduit un retard τ sans déformation du signal.

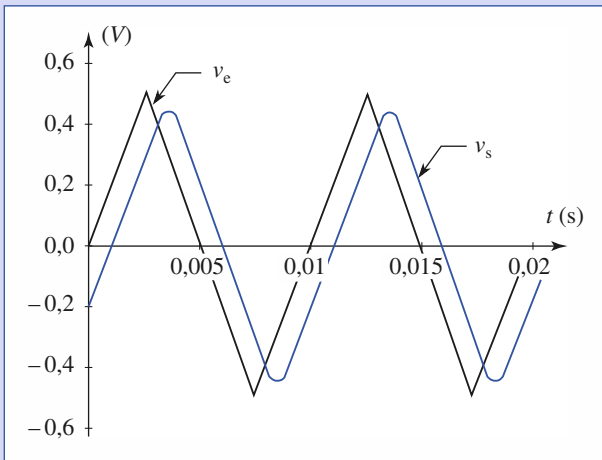
Cette fonction de transfert est irréalisable, car ce n'est pas une fraction rationnelle en $j\omega$.

2) Déterminer la fonction de transfert du filtre passe-bas du deuxième ordre se rapprochant de cette expression (on identifiera le développement limité au deuxième ordre de $e^{-j\omega\tau}$ avec son dénominateur).

3) Comment réaliser un filtre introduisant un retard de 1 ms à l'aide d'un circuit (R, L, C) en fixant $L = 0,1 \text{ H}$?

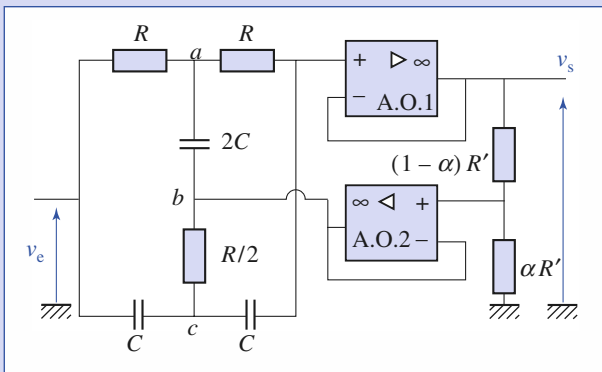
Interpréter les réponses obtenues avec ce filtre sur le document suivant :



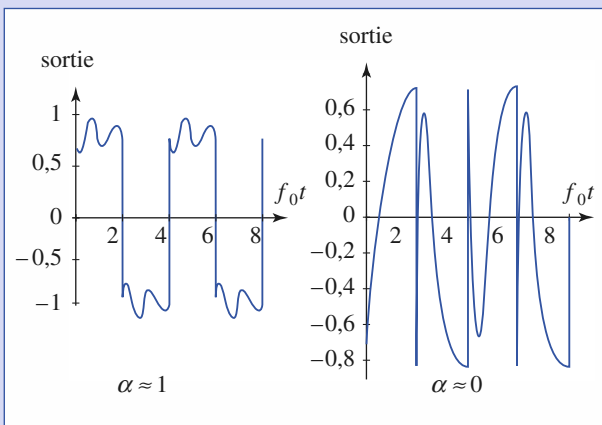


7 Coupe-bande à largeur réglable

1) Déterminer la fonction de transfert du montage suivant :

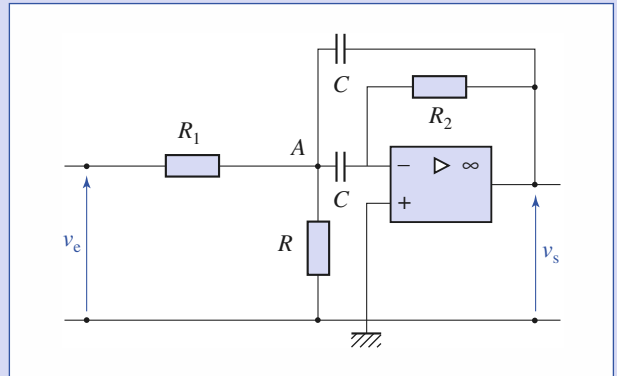


- 2) Quelle est la bande rejetée à -3 dB par ce filtre ?
- 3) Les figures suivantes représentent le signal de sortie du filtre en réponse à un signal d'entrée en créneaux de période $8\pi RC$, si α est voisin de 1 et si α est voisin de 0. Commenter les résultats observés.



8 Filtre de Rauch

On considère le montage suivant dans lequel l'amplificateur opérationnel est idéal. Le fonctionnement du dispositif est linéaire.



- 1) Que se passerait-il si on échangeait l'entrée inverseuse et l'entrée non inverseuse de l'amplificateur opérationnel ?
- 2) La tension d'entrée est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω_0 , à laquelle on associe la tension complexe notée \underline{v}_e . De même à v_s on associera \underline{v}_s . On définit T (transmittance complexe du montage) :

$$\underline{T} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$$

Montrer que \underline{T} peut se mettre sous la forme :

$$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

expression dans laquelle $j^2 = -1$. T_0 est une fonction réelle de R_1 et R_2 , Q est une fonction réelle de R, R_1 et R_2 et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ (ω_0 est une pulsation que l'on exprimera en fonction de R_1, R_2, R et C). On pourra poser :

$$R' = \frac{R_1 R}{R_1 + R}$$

- et exprimer certains des résultats demandés à l'aide de R' .
- 3) On définit le gain du montage par $G = 20 \log T$ (T est le module de \underline{T}). Le logarithme est le logarithme décimal). Tracer l'allure du diagramme donnant G en fonction du logarithme décimal de la pulsation, préciser les asymptotes. Quelle sera la fonction de ce montage ?

Exercices

4) a) Calculer T_0 , Q , ω_0 et $N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

b) Définir et calculer la bande passante à -3 dB. On donnera les valeurs numériques des fréquences de coupure.

A.N. : $C = 1$ nF, $R = 10$ k Ω , $R_1 = 100$ k Ω , $R_2 = 1$ M Ω .

5) a) On considère maintenant que la tension d'entrée v_e est une tension en créneau de période T , qui vaut V_0 pour $0 < t < \frac{T}{2}$ et $-V_0$ pour $\frac{T}{2} < t < T$.

Donner le développement en série de Fourier de cette tension.

b) Que devient ce développement si :

- $v_e = V_0$ pour $-\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4}$;
- $v_e = -V_0$ pour $\frac{T}{4} < t < 3\frac{T}{4}$?

c) Compte tenu des valeurs numériques données au 4), quelle doit être $N = \frac{1}{T}$ la fréquence de v_e pour que N_0 (défini et calculé au 2)) corresponde à la fréquence de l'harmonique 3 de la décomposition du 5) a) ?

Quelles seront les amplitudes du fondamental et des harmoniques 2, 3, 4 et 5 à l'entrée et à la sortie du montage ? On fera les calculs littéraux et numériques de ces amplitudes, on prendra $V_0 = 0,5$ V. Conclure.

9 Facteur de qualité d'un analyseur de spectre

Un analyseur de spectre est réalisé à l'aide d'un filtre passe-bande de fréquence centrale réglable, mais de facteur de qualité Q constant et d'un voltmètre efficace vrai.

Ce voltmètre mesure la racine carrée de la demi somme des carrés des coefficients de Fourier du signal à la sortie du filtre (appareil TRMS).

Le signal étudié est un signal créneau d'amplitude 1 V et de fréquence 1 000 Hz.

1) La fréquence centrale du filtre est de 1 000 Hz.

Quel doit être le coefficient de qualité du filtre pour que la valeur donnée par le voltmètre corresponde à 0,1 % près à l'amplitude du fondamental ? (On ne prendra en compte que les harmoniques 1 et 3.)

2) La fréquence centrale de ce même filtre est de 3 000 Hz.

Quelle valeur est lue sur le voltmètre ? Quelle erreur commet-on en l'assimilant à l'amplitude de l'harmonique 3 ? (On ne prendra en compte que les harmoniques 1, 3 et 5.)

3) Jusqu'à quelle fréquence du filtre peut-on approximativement faire des mesures donnant l'ordre de grandeur de l'amplitude des harmoniques ?

Corrigés

Solution du tac au tac, page 308.

1. Vrai
 2. Vrai : c Faux : a, b
 3. Vrai : c Faux : a, b
 4. Vrai : a, c Faux : b, d

1 $s(t)$ étant impaire, on ne cherche que les coefficients des sinus.

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2At}{T} \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt$$

$$B_n = \frac{4A}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt \text{ ce qui s'intègre par parties.}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt = \frac{-T}{2\pi n} \left[\frac{T}{2} \cos \frac{n2\pi \frac{T}{2}}{T} + \frac{T}{2} \cos \frac{n2\pi \frac{T}{2}}{T} \right] + \frac{T}{2\pi n} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt$$

$$B_n = \frac{4A}{T^2} \frac{T^2}{2\pi n} [-\cos(n\pi)] = (-1)^{n+1} \frac{2A}{\pi n}$$

D'où le développement :

$$s(t) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)$$

2 1) Le signal modulé obtenu est :

$$s(t) = s_p(t) + k s_p(t) s_m(t) = A_p [1 + k A_m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t),$$

donc $m = k A_m$, nombre sans dimension.

Corrigés

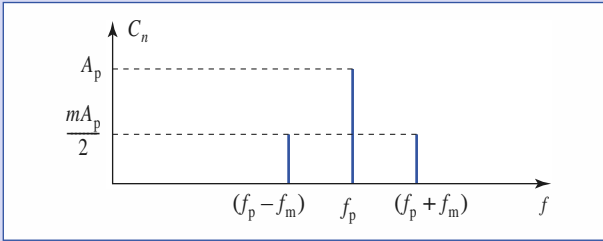
2) On développe $s(t)$:

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + mA_p \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_p t)$$

et on linéarise l'expression obtenue :

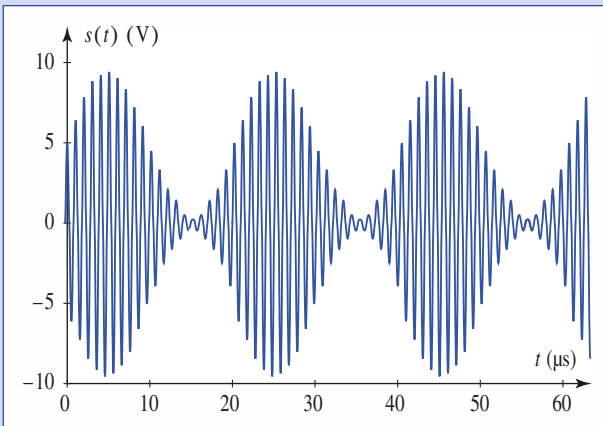
$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{mA_p}{2} \cos[2\pi(f_p - f_m)t] + \frac{mA_p}{2} \cos[2\pi(f_p + f_m)t].$$

Le spectre comprend trois raies : la raie $[f_p, A_p]$ associée à la porteuse et les deux raies $[(f_p - f_m), \frac{mA_p}{2}]$, $[(f_p + f_m), \frac{mA_p}{2}]$, créées par la modulation d'amplitude.



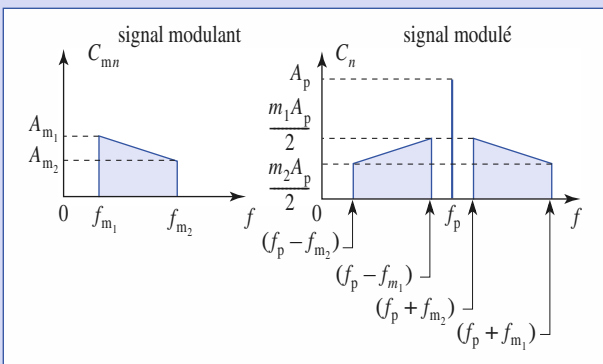
3

1) L'amplitude du signal modulé varie entre $A_p(1 + m)$ et $A_p(1 - m)$ au rythme du signal modulant $s_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ avec un indice de modulation $m = 0,9$. Pour des raisons de lisibilité, le rapport $\frac{f_p}{f_m}$ a été ramené à 20.



2) On linéarise l'expression du signal $s(t)$:

$$s(t) = A_p \cos(\omega_m t) + \frac{mA_p}{2} [\cos(\omega_p + \omega_m)t] + \cos[(\omega_p - \omega_m)t].$$



À chaque fréquence f_m du spectre audio sont associées trois raies dans le spectre du signal modulé dont les fréquences sont respectivement f_m , $(f_p + f_m)$ et $(f_p - f_m)$.

Il en résulte que la bande de fréquence nécessaire à la transmission du signal s'étend de $(f_p - f_{m_2}) = 0,9955$ MHz à $(f_p + f_{m_2}) = 1,0045$ MHz.

3) Le signal délivré par le multiplicateur est :

$$s'(t) = k's(t) s'_p(t) = k'A_p A'_p [1 + m \cos(\omega_m t)] \cos^2(\omega_p t),$$

soit en linéarisant :

$$\begin{aligned} s'(t) &= \frac{k'A_p A'_p}{2} [1 + m \cos(\omega_m t)] [1 + \cos(2\omega_p t)] \\ &= \frac{k'A_p A'_p}{2} \left(1 + m \cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_p t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{2} \cos[(2\omega_p - \omega_m)t] + \frac{m}{2} \cos[(2\omega_p + \omega_m)t] \right). \end{aligned}$$

Les fréquences $(2f_p \pm f_m)$ étant supérieures à f_m ($f_p \gg f_m$), on obtient par filtrage passe-bas le signal :

$$s''(t) = \frac{k'A_p A'_p}{2} [1 + m \cos(\omega_m t)].$$

Le signal $s''(t)$ est appliqué à l'entrée d'un amplificateur B. F. par l'intermédiaire d'un condensateur, ce qui élimine la composante continue et fournit le signal démodulé :

$$s_d(t) = \frac{k'mA_p A'_p}{2} \cos(\omega_m t).$$

La composante continue, obtenue par filtrage passe-bas de $s''(t)$, est proportionnelle à l'amplitude du signal démodulé. Cette propriété est utilisée pour la commande d'un circuit contrôlant le gain de l'amplificateur B.F. (circuit de commande automatique de gain ou C.A.G.).

4

1) On calcule la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{s}{e}$.

En utilisant la formule du pont diviseur :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_u // Z_c}{R + R_u // Z_c} = \frac{R_u}{R + R_u + jRR_u C\omega}$$

et :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R}{R_u}\right)^2 + (RC\omega)^2}}$$

L'amplification en continu est $H(0) = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_u}}$ et le taux d'ondulation :

$$\tau = \frac{|\underline{H}| \Delta E}{H(0) E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{RC\omega}{1 + R/R_u}\right)^2}} \frac{\Delta E}{E_0}$$

Les conditions imposées donnent pour la composante continue $H(0) \geq 0,9$, soit $R \leq 11 \Omega$.

Pour avoir C le plus petit possible, R doit être le plus grand possible, d'où $R = 11 \Omega$ et $C = 1600 \mu\text{F}$. C est donc un condensateur électrochimique de forte valeur.

2) On fait de même avec le deuxième montage :

$$\underline{H} = \frac{R_u}{R_u + jL\omega}, \text{ d'où } H(0) = 1 \text{ et le taux d'ondulation :}$$

Corrigés

$$\tau = \frac{|H| \Delta E}{H(0)E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R_u}\right)^2}} \frac{\Delta E}{E_0}$$

D'où la valeur minimale de $L = 1,6$ H. Une bobine de cette inductance est de volume, de poids et de coût importants donc cette méthode est inutilisable.

3) Le montage est un filtre coupe-bande de fonction de transfert obtenue à l'aide de la formule du pont diviseur :

$$\underline{H} = \frac{R_u}{R_u + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + j\frac{L\omega}{R_u} - LC\omega^2}$$

Elle s'annule pour $LC\omega^2 = 1$, soit $C = 250$ μ F. Cette méthode est théorique-ment très efficace mais l'ondulation n'est pas parfaitement sinusoïdale : les harmoniques sont donc transmis. De plus, la résistance interne de la bobine a été négligée dans le calcul.

5 1) $\tan \varphi = -\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ soit pour x petit $\varphi = \pi - x\sqrt{2}$ (attention $\tan \varphi$ donne φ à π près : $\cos \varphi < 0$),

d'où :
$$K = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}$$

2)
$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$$

avec :
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T E(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

et :
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T E(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

La fonction est paire donc $b_n = 0$, $a_0 = E_0$, $a_{2p} = 0$ pour $p \neq 0$, et

$$a_{2p+1} = (-1)^p \frac{2E_0}{(2p+1)\pi}$$

$$S(t) = H(0) \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} \left(H(n\omega'_0) a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi(n\omega'_0)\right) \right)$$

$$\underline{H}^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$$
 dans le domaine de pulsations considérées $\omega < 1$ 100 rad . s⁻¹

la valeur de \underline{H} peut être confondue avec 1 et $\varphi(n\omega'_0) = \pi - nK\omega'_0$.

D'où :
$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^6 \left(a_{2p+1} \cos(2\pi n \omega'_0 (2p+1)(t-K)) \right)$$

On peut identifier ce développement à la somme des six premiers harmoniques non nuls et à la composante continue de $E(t-K)$.

Le montage réalise donc un retard de $K = 1,4 \cdot 10^{-4}$ s.

6 1)
$$e(t) = \frac{e_0}{2} + \sum_{n>0} e_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right)$$
 et

$$s(t) = \frac{s_0}{2} + \sum_{n>0} s_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n\right)$$

La condition $s(t+\tau) = e(t)$ s'écrit pour chacun des termes de la décomposition de Fourier $s_n = e_n$ et :

$$\varphi_{e_n} = \varphi_{s_n} + \omega\tau \text{ or } s_n = \left[\underline{H}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] e_n$$

et :
$$\varphi_{s_n} = \varphi_{e_n} + \text{argument}\left(\underline{H}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right)$$

Ceci impose la forme $\underline{H} = e^{-j\omega\tau}$ pour que la relation soit valable pour tout T en n .

2) $\underline{H} = \frac{1}{a + bj\omega + c(j\omega)^2}$ (a, b, c réels positifs est la forme la plus générale d'un filtre passe-bas du second ordre. On identifie son dénominateur de développement au deuxième ordre de $e^{j\omega\tau}$:

$$1 + j\omega\tau - \frac{(\omega\tau)^2}{2}$$

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{\tau}, \quad c = \frac{\tau^2}{2}$$

On peut encore écrire $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$, avec $x = \frac{\omega\tau}{\sqrt{2}}$ et $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(coefficient de qualité).

Un filtre passe-bas (R, L, C) est obtenu en prenant la tension aux bornes de C :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

D'où $RC = 1$ ms et $LC = 0,5$ ms², soit $C = 5$ μ F et $R = 200$ Ω

3) La période des signaux est égale à 10τ . L'approximation de $e^{-j\omega\tau}$ avec la fonction de transfert ne sera valable que pour les premiers harmoniques (de rang inférieur à 10). Les harmoniques de rang plus élevé sont éliminés par le filtre (passe-bas).

On remarque que les signaux de sortie sont bien retardés de 1 ms. Cependant le signal créneau est très déformé car ses harmoniques de rang > 10 ne sont pas d'amplitude négligeable (amplitude en $\frac{1}{n}$ pour n impair). Le signal triangulaire est peu déformé car ses harmoniques de rang > 10 sont d'amplitude négligeable (amplitude en $\frac{1}{n^2}$ pour n impair).

7 1) A.O.2 est monté en suiveur, l'application de la formule du pont diviseur donne donc $\underline{V}_b = \alpha \underline{V}_s$.

A.O.1 est aussi monté en suiveur, l'application de la loi des nœuds en a donne :

$$\frac{V_c - V_a}{R} + \frac{V_s - V_a}{R} + 2jC\omega(\alpha V_s - V_a) = 0$$

La loi des nœuds en c donne :

$$jC\omega(V_c - V_e) + jC\omega(V_s - V_c) + 2\frac{\alpha V_s - V_c}{R} = 0$$

et à l'entrée + de A.O.1 :

$$\frac{V_a - V_s}{R} + jC\omega(V_c - V_s) = 0$$

Après élimination de \underline{V}_a et de \underline{V}_c et en posant $x = RC\omega$.

$$\frac{V_s}{V_e} = \underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 + 4j(1 - \alpha)x - x^2}$$

Ceci est l'équation d'un filtre réjecteur de facteur de qualité réglable :

$$Q = \frac{1}{4(1-\alpha)}$$

2) La bande coupée à -3 dB est donnée par :

$$|H|^2 = \left| \frac{1-x^2}{1+\frac{jx}{Q}-x^2} \right|^2 = \frac{1}{2},$$

ce qui est équivalent à $\frac{x}{1-x^2} = \pm 1$, d'où les équations du second degré :

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0,$$

semblables à celles obtenues pour la bande passante -3 dB du filtre passe-bande. La bande coupée à -3 dB est donc :

$$\left[f_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right), f_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right) \right],$$

avec $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ et la largeur de bande coupée $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$.

3) Le signal créneau de période $8\pi RC$ contient des harmoniques de fréquence $\frac{f_0}{4}, 3\frac{f_0}{4}, 5\frac{f_0}{4}, 7\frac{f_0}{4} \dots$ (harmoniques impairs).

Si α est proche de 1, Q est grand, la bande coupée est très étroite au voisinage de f_0 , le signal est donc transmis sans déformation (attention la rotation de phase déforme en partie le signal de sortie).

Si α est proche de 0, $Q = \frac{1}{4}$. La bande coupée à -3 dB est $[0,23f_0, 4,23f_0]$.

Les harmoniques de rang inférieur à 15 sont atténués (surtout les harmoniques 3 et 5). Les harmoniques de rang élevé qui créent la discontinuité du créneau sont intégralement transmis. Le signal de sortie est très déformé.

8

1) Si la rétroaction est sur l'entrée non inverseuse, le montage est instable et ne fonctionne plus en régime linéaire (saturation).

2) En appliquant la loi des nœuds en termes de potentiel en A :

$$\frac{v_e - v_A}{R_1} - \frac{v_A}{R} - jC\omega v_A + jC\omega(v_s - v_A) = 0$$

et à l'entrée inverseuse $jC\omega v_A + \frac{v_s}{R_2} = 0$. Soit en éliminant v_A :

$$v_e = -v_s \left(\frac{R_1}{R_2} + j \left(R_1 C \omega - \frac{R_1}{R_2 R' C \omega} \right) \right)$$

et par identification $\frac{T}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$, avec $T_0 = \frac{-R_2}{2R_1}$.

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_2 R'}} \quad \text{et} \quad Q = \sqrt{\frac{R_2}{4R'}}.$$

3) $G = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right) + 20 \log \left(\frac{R_2}{2R_1} \right)$.

• Les asymptotes sont : $\omega \ll \omega_0 : G = 20 \log \left(\frac{R_2 R' C \omega}{R_1} \right)$

$$\omega \gg \omega_0 : G = -20 \log (R_1 C \omega).$$

Deux cas sont possibles (cf. schéma ci-après) :

Le montage est un filtre passe-bande.

4) a) $T_0 = -5$, $Q = 5,24$, $\omega_0 = 1,05 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $N_0 = 1670 \text{ Hz}$.

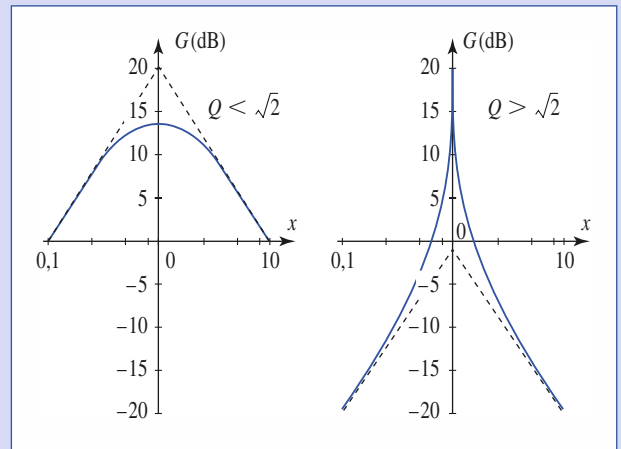
Le filtre est sélectif ($Q > 1$).

b) $G = G_0 - 3 \text{ dB}$, soit $1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 2$ ou $Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1$ ou

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

Les racines utiles (c'est-à-dire positives) sont :

$$x = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}.$$



La bande passante à -3 dB est :

$$\left[N_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right), N_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right) \right].$$

La largeur de bande passante est $\Delta N = \frac{N_0}{Q}$. Numériquement $N_1 = 1517 \text{ Hz}$, $N_2 = 1836 \text{ Hz}$ et $\Delta N = 319 \text{ Hz}$.

5) a) $v_e = \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) \right)$

$$\text{avec :} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_e(t) \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt$$

$$\text{et :} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_e(t) \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt.$$

Le signal est de valeur moyenne nulle, donc $a_0 = 0$, il est une fonction impaire du temps, d'où $a_n = 0$.

En changeant t en $t + \frac{T}{2}$, v_e se change en $-v_e$ et $\sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right)$ change de signe si n est impair et ne change pas de signe pour n pair, d'où $b_{2p} = 0$.

$$b_{2p+1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_0 \sin\left(\frac{2(2p+1)\pi t}{T}\right) dt = \frac{4V_0}{\pi(2p+1)}$$

et
$$v_e \sum_p \frac{4V_0}{(2p+1)\pi} \sin\left(\frac{2(2p+1)\pi t}{T}\right).$$

b) Ceci revient à changer t en $t + \frac{T}{2}$ dans l'expression précédente d'où :

$$v_e = \sum_p (-1)^p \frac{4V_0}{(2p+1)\pi} \cos\left(\frac{2(2p+1)\pi t}{T}\right),$$

$$(\cos(x + p\pi) = (-1)^p \cos x).$$

c) L'harmonique 3 du signal a une fréquence $3N$ d'où :

$$N = \frac{N_0}{3} \quad \text{soit} \quad N = 557 \text{ Hz.}$$

harmonique	amplitude dans v_e	$x = \frac{N}{N_0}$	$ T $	amplitude dans v_s
1 (fondamental)	$\frac{4V_0}{\pi} \approx 0,65 \text{ V}$	$\frac{1}{3}$	0,357	0,22 V
2	0	-	-	0
3	$\frac{4V_0}{3\pi} \approx 0,21 \text{ V}$	1	5	1,06 V
4	0			0
5	$\frac{4V_0}{5\pi} \approx 0,13 \text{ V}$	$\frac{5}{3}$	0,881	0,11 V

Seul l'harmonique 3 est transmis avec une amplitude notable. Le signal de sortie est pratiquement sinusoïdal de fréquence 1 670 Hz et d'amplitude 1,06 V.

9

La fonction de transfert du filtre est :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)},$$

où f_0 est la fréquence centrale du filtre.

1) Pour $f = f_0$, $|\underline{H}| = 1$;

pour $f = 3f_0$, $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{8Q}{3}\right)^2}}.$

Les amplitudes des composantes de Fourier du signal créneau sont :

$$a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}.$$

La valeur mesurée par le voltmètre est :

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{8Q}{3}\right)^2}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left| 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9 + 64Q^2} \right) \right|.$$

Pour une erreur de 0,1 %,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9 + 64Q^2} \right) \approx 10^{-3}, \quad \text{soit} \quad Q \approx 2,8.$$

2) Pour $f = f_0$, $|\underline{H}| = 1$;

pour $f = \frac{f_0}{3}$ (fondamental) :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{8Q}{3}\right)^2}};$$

pour $f = \frac{5f_0}{3}$ (harmonique 5) :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{16Q}{15}\right)^2}}.$$

La valeur mesurée par le voltmètre est environ :

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{8Q}{3}\right)^2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{16Q}{15}\right)^2}} \approx 1,094 \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.$$

L'erreur relative est environ de 10 %.

3) La bande passante du filtre est :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}.$$

L'intervalle de fréquence entre deux harmoniques d'amplitude non nulle du créneau est de 2 000 Hz (uniquement les harmoniques impaires). Les mesures ne seront significatives que si un seul harmonique est dans la bande passante du filtre, soit :

$$\Delta f \approx 2\,000 \text{ Hz}.$$

Ce qui donne $f_0 = 16 \text{ Hz}$.

Seuls les harmoniques de rang inférieur à 16 pourront être séparés par ce filtre. Ceci est souvent largement suffisant.

Index

A

Acuité de la résonance 132
Adaptation d'impédance 149
Admittance 136
 complexe 136
Ampèremètre DC 73
Amplificateur
 inverseur 172
 non inverseur 164
 opérationnel idéal 30, 162
 opérationnel réel 162
Analyse
 fréquentielle 210
 harmonique 135, 143
 temporelle 210
Appareil
 Calibre
 AC + DC 76
 AC 76
 DC 70, 76
 RMS 76
 TRMS 76
Approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.) 11
Association
 d'impédance 138
 de bobines idéales 49, 53
 de condensateurs idéaux 49, 52
 de générateurs 51
 de générateurs réels libres 49
 de résistors 48, 51
 en parallèle de dipôles linéaires 51
 en série de dipôles linéaires 48

B

Base de temps 83
Bicourbe 84
Bobine 37
 idéale 27
Branche 14

C

Capacité 137

Caractéristique
 dynamique 25
 nominale d'un condensateur 35
 nominale d'une résistance 33
 statique 24
Charge d'un condensateur 107
Circuit
 (R, C) 95
 (R, L) 97
 (R, L, C) 99, 131
 en régime harmonique 189
Coefficients de Fourier 292
Comparateur
 simple à amplificateur
 opérationnel 177
 de tension 177
Composant à capacité commutée 213
Condensateur 34
 idéale 28
Conducteur (ohmique) 27
Conduction
 dans le gaz 7
 dans le liquide 7
 dans le solide 6
Conservation de la charge 8
Convention
 d'orientation 16
 générateur 16
 récepteur 16
Convertisseur
 par approximation successive 80
 double rampe 81
 série 80
 simple rampe 80
Courant dans un circuit inductif 110
Courbe de Lissajous 85

D

Décade et octave 191
Décomposition d'un signal
 périodique 288
Développement en série de Fourier 289
Diagramme de Bode 190, 201
Dipôle 14
 actif 24

linéaire 26
passif 24
polarisé 24
symétrique 24

Diviseur de tension et de courant 139

E

Effet d'un filtre
 passe-bande sur un signal
 périodique 302
 passe-bas sur un signal
 périodique 300
 passe-haut sur un signal
 périodique 301
Électromoteur 37
Élément dipolaire
 actif 29
 passif 27
Énergie potentielle d'un porteur de charge 9

F

Facteur de forme 78
Facteur de puissance 146
Filtre
 dérivateur 200
 intégrateur 193
 passe-bas du premier ordre 196
 passe-haut d'ordre un 203
Formule de Parseval 292

I

Impédance complexe 135
Inductance 136
Intensité du courant 7

L

Limite de linéarité 169
Lissajous 87

Loi

- de Kirchhoff 14
 - en notation complexe 135
- des mailles 16, 49, 110
- des nœuds 14
 - en termes de potentiels 54
- de Pouillet 49

M

- Maille 14
- Masse 12
 - carcasse 12
 - signal 12
- Mesure
 - des impédances
 - d'entrée 164
 - de sortie 164
 - du courant électrique 8
- Métal 7
- Modélisation
 - des électromoteurs 38
 - de Norton 39
 - de Thévenin 39
- Montage suiveur 171
- Multimètre 70
- Multipôle 14

N

- Notation complexe 148

O

- Ohmmètre 78
- Oscillateur harmonique 288, 295
- Oscilloscope 82
 - analogique 82
 - numérique 86

P

- Point de fonctionnement d'un circuit 39
- Pont diviseur
 - de courant 53
 - de tension 50
- Potentiel 9
- Potentiel en un point 10
- Pseudo
 - dérivateur 205
 - intégrateur 197
- Puissance 148
 - échangée par un dipôle 16
 - instantanée 146
 - moyenne 146
 - en régime sinusoïdal 146

R

- Réactance 136
- Régime
 - apériodique 101
 - critique 103
 - pseudo-périodique 103
 - sinusoïdal forcé 134
 - statique 24
 - variable 25
- Relation de Millman 54
- Réponse
 - à un échelon de tension 107
 - fréquentielle 210
 - temporelle 210
- Représentation
 - de Norton 59
 - d'un électromoteur 140
 - de Thévenin 59, 140
- Réseau 14
- Résistance 32, 136
 - dynamique 24
 - statique 24
- Résistor 27

S

- Semi-conducteur 7
- Sens conventionnel du courant 6
- Série de Fourier 43
 - signal
 - créneau impair 290
 - créneau pair 290
 - sinusoïdal redressé double alternance 290
 - triangle pair 290
- Slew rate* 167, 178
- Sommateur de tensions 173
- Source
 - commandée 30
 - indépendante 30
 - linéaire 26
- Spectre de fréquence 291
- Stabilité
 - d'un circuit 211
 - du montage 170
- Susceptance 136
- Synchronisation 83
- Synthèse de Fourier 291

T

- Taux de distorsion 294
- Tension 9
 - entre deux points d'un circuit 10
- Théorème de Fourier 288
- Transformateur idéal 31

V

- Valeur efficace (RMS) 147
 - vraie T(RMS) 147
- Vitesse de balayage 167, 178

Électronique Électrocinétique 1^{re} année MPSI-PCSI-PTSI

1. Électrocinétique : cadre et concepts de base
2. Modélisation linéaire des composants usuels
3. Théorèmes généraux relatifs aux réseaux linéaires
4. Principe et utilisation de quelques appareils de mesure
5. Régimes de fonctionnement des réseaux linéaires. Exemple du circuit (R, L, C) série
6. Régime sinusoïdal forcé
7. L'amplificateur opérationnel. Le modèle idéal
8. Fonction de transfert des réseaux linéaires
9. Filtres de second ordre
10. Amplificateur opérationnel : bande passante, stabilité démontages bouclés (PCSI - PTSI)
11. Redressement et lissage
12. Analyse harmonique d'un signal périodique

H Prépa le savoir-faire Hachette au service des prépas

MATHÉMATIQUES

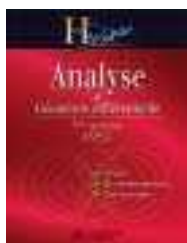
Algèbre et géométrie euclidienne MPSI
Analyse et géométrie différentielle MPSI
Algèbre et géométrie euclidienne PCPSI PTSI
Analyse et géométrie différentielle PCPSI PTSI

PHYSIQUE

Optique MPSI PCPSI PTSI
Mécanique MPSI PCPSI PTSI
Électromagnétisme MPSI PCPSI PTSI
Électronique-Électrocinétique MPSI PCPSI PTSI
Thermodynamique MPSI PCPSI PTSI

CHIMIE

Chimie 1 PCPSI 1^{re} période
Chimie 2 PCPSI 2^e période (option PC)
Chimie MPSI PTSI
(+ PCPSI option SI 2^e période)



H Prépa EXERCICES & PROBLÈMES

Des rappels de cours et de nombreux exercices corrigés pour s'entraîner toute l'année et pour préparer les concours

**TOUT LE PROGRAMME
EN UN SEUL VOLUME**

