

Chapitre 1 INTRODUCTION AU FILTRAGE ANALOGIQUE

De façon générale, un **filtre** est un composant ou système utilisé pour séparer les composantes d'un mélange, par exemple le solide du liquide ou le sable du gravier. De même manière, un filtre électrique est un circuit employé afin de séparer certaines composantes d'un signal électrique d'autres. Cette séparation concerne le plus souvent le *domaine fréquentielle*, ainsi un filtre est spécifié par sa *réponse fréquentielle*. La réponse fréquentielle d'un filtre est son comportement (le signal de sortie) lorsqu'on fait varier les fréquences de son excitation (le signal d'entrée). La relation entre la sortie et l'entrée est décrite par l'analyse de FOURIER.

Le champ d'application des filtres est très vaste ; il touche tous les domaines convexes à l'électronique. Dans les récepteurs de TV, un filtrage est effectué pour choisir le canal voulu de tous les canaux reçus par l'antenne. Aussi, en radiocommunication les filtres sont utilisés pour éliminer les bruits superposés au signal utile. Dans le système CAN et CNA les filtres sont utilisés pour le lissage (qui permet d'éliminer au maximum le bruit qui perturbe le signal afin d'en extraire l'information utile) et l'anti-repliement (dont le rôle est d'éviter qu'on ait un repliement du spectre du signal)

Pour mieux aborder l'étude des filtres analogiques, nous commencerons par un rappel de la notion de quadripôle qui nous permettra de définir le filtre et la notion de fonction de transfert. Ensuite nous passerons à l'étude détaillée des différents types de filtre suivie enfin de quelques filtres particuliers utilisés dans les systèmes électriques.

1- Quadripôle, fonction de transfert

1-1 Quadripôle

Un quadripôle est par définition un réseau qui comporte quatre bornes (deux en entrée et deux en sortie) de liaisons avec les circuits extérieurs. Il s'agit souvent d'un ensemble d'éléments permettant de traiter des signaux ou de transférer de l'énergie fournie par un générateur pour les restituer sous une forme quelconque à une charge extérieure. Les échanges avec l'extérieur se font au travers de deux bornes utilisées comme bornes d'entrée (côté générateur) et vers deux autres bornes utilisées comme sortie (côté charge). Considérons le quadripôle suivant de la figure 1.1, où I_1 et V_1 désignent les grandeurs d'entrée et I_2 et V_2 celles de sortie. Cette représentation avec des courants qui entrent dans le quadripôle présente l'avantage de rendre symétriques l'entrée et la sortie. Elle est souvent adoptée par les électroniciens.

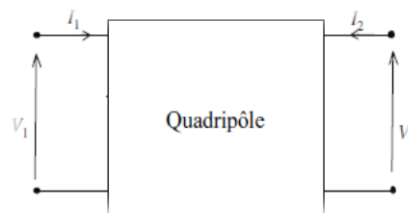


Fig.1.1 Représentation d'un quadripôle.

En les complétant d'une part avec l'équation courant-tension du générateur branché à l'entrée et de l'équation courant-tension de la charge en sortie, nous disposons du nombre nécessaire et suffisant (quatre) d'équations pour déterminer les quatre variables : I_1 , I_2 , V_1 et V_2 comme le montre la figure suivante :

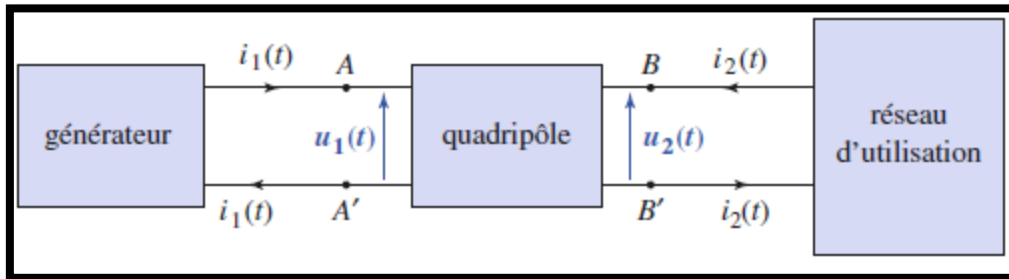


Fig.1.2 Quadripôle dans un système.

Pour généraliser l'étude des quadripôles, nous supposons les conditions suivantes :

- Les circuits du quadripôle sont linéaires, ou bien nous admettons la linéarité autour du point de fonctionnement considéré (cas du transistor par exemple).
- Les conditions initiales aux bornes des capacités et dans les inductances doivent être nulles. Nous nous limitons au régime périodique sinusoïdal établi, appelé régime harmonique.
- Les circuits internes au quadripôle ne doivent comporter que des sources contrôlées de tensions ou des sources contrôlées de courants.

1-2 Fonction de transfert

Soit un quadripôle excité par une entrée sinusoïdale de pulsation ω . L'entrée notée $e(t)$ qui peut être un courant ou une tension, provoque une réponse forcée (régime permanent établi) du réseau. Nous notons $s(t)$ cette réponse

$$e(t) = E \sin(\omega t) \text{ et } s(t) = S \sin(\omega t + \varphi).$$

Compte tenu des deux grandeurs électriques habituelles et en utilisant les grandeurs complexes, nous pouvons définir quatre transmittances ou fonctions de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} : \text{amplification de tension ;}$$

$$H(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} : \text{amplification de courant ;}$$

$$H(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} : \text{trans-admittance ;}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} : \text{trans-impédance ;}$$

Un filtre est un quadripôle conçu pour transmettre sélectivement les diverses fréquences de la grandeur harmonique.

Si le quadripôle est linéaire alors $H(j\omega)$ peut toujours s'écrire la forme suivante :

$$H(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{N(j\omega)} \text{ où } D \text{ et } N \text{ sont des polynômes à coefficients réels. Le degré de } N \text{ est l'ordre du filtre}$$

Ainsi un filtre est **passif** s'il n'est constitué que de dipôles passifs : résistance, bobine et condensateur. Mais s'il contient des composants actifs (alimenté par une source) AOP, transistor,... alors il est **actif**.

Des quatre transmittances, la plus utilisée est " l'amplification de tension " que nous utiliserons dans la suite du cours. Pour déterminer la fonction de transfert d'un circuit il faut :

- s'assurer que nous sommes en régime harmonique ;
- remplacer les résistances, les inductances (bobines) et les condensateurs par respectivement R , $j\omega L$ et $1/j\omega C$;
- trouver éventuellement les impédances équivalente à la mise en série ou en parallèle de certains dipôles ;
- appliquer ensuite les différents théorèmes d'analyse des circuits électriques pour trouver la fonction de transfert.

Exemple 1.1 Déterminer la fonction de transfert du montage où $v_s = V_m \cos(\omega t)$ de la figure (a) suivante

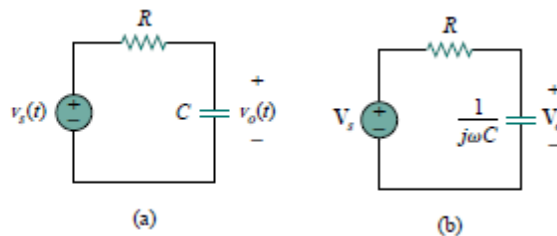


Fig.1.3 Exemple 1.3 :(a) circuit RC dans le domaine temporel, (b) circuit RC en fréquentiel.

Solution : le circuit équivalent dans le domaine fréquentiel est (b) ; en appliquant le pont diviseur de tension on obtient

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

Exemple 1.2 Déterminer la fonction de transfert du montage où $v_s = V_m \cos(\omega t)$ de la fig. 1.4

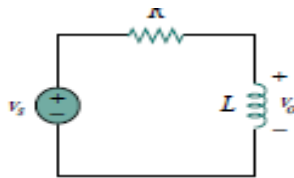


Fig.1.4 Exemple 1.2 RL circuit

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.1

Solution : en utilisant le même raisonnement on trouve $H(j\omega) = j\omega L / (R + j\omega L)$

Exercice 1 : exercice niveau 1 : trouver la fonction de transfert des circuits suivants

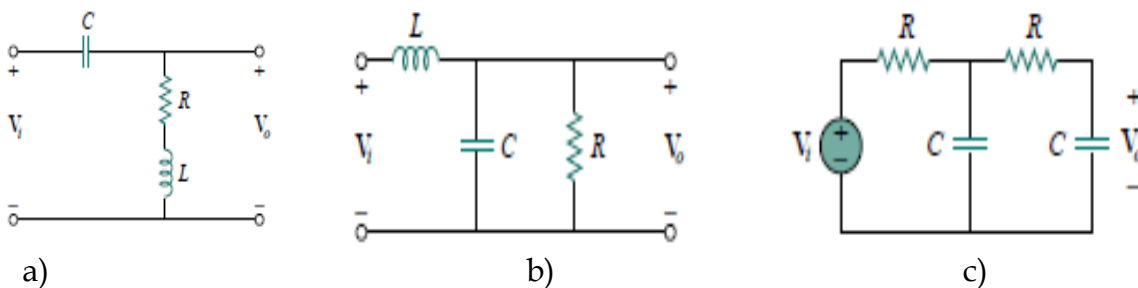


Fig. 1.5 Exercice d'entraînement 1

1.3- Le décibel

Il n'est pas facile d'avoir le graphe de la fonction de transfert défini ci-dessus. La manière la plus commode d'avoir une représentation de la fonction de transfert est d'exploiter le diagramme de BODE. Bien avant de l'étudier en détails nous rappellerons les propriétés du logarithme et nous définirons le (déci)bel utilisé pour construire le diagramme de BODE :

1. $\log(P_1 P_2) = \log P_1 + \log P_2$
2. $\log(P_1/P_2) = \log P_1 - \log P_2$
3. $\log(P^n) = n \log P$
4. $\log 1 = 0$

En télécommunication et en électronique, le gain se mesure en *bel* (**). Historiquement, le bel est utilisé pour mesurer le rapport de deux niveaux de puissance ou de deux grandeurs de même dimension :

$$G = \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (1.1)$$

Le bel se révèle trop grande pour mesure ces rapports (entre amplitudes) ainsi on a recours au *décibel* qui est le dixième du bel :

$$G_{dB} = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (1.2)$$

Si $P_1 = P_2$, il y a aucun apport en sortie d'où $G_{dB} = 0$.

Si $P_2 = 2P_1$, le gain devient $G_{dB} = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10 \log\left(\frac{2P_1}{P_1}\right) = 10 \log(2) = +3dB$.

Si $P_2 = 0.5P_1$, le gain devient $G_{dB} = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10 \log\left(\frac{0.5P_1}{P_1}\right) = 10 \log(0.5) = -3dB$.

Ainsi, l'équation (1.2) montre l'amplification (en décibel) est positive tandis que montre l'atténuation ou affaiblissement est négative ; c'est une autre raison d'utilisation des logarithmes.

Alternativement, le gain s'exprime aussi comme un rapport de tension ou d'intensité de courant. Pour cela considérons, le réseau électrique ci-dessus où P_1 est la puissance d'entrée et R_1 la résistance d'entrée, P_2 la puissance de sortie et R_2 la résistance de sortie en effet, en électricité, les puissances considérées sont souvent les puissances actives dissipées dans des résistances, et provenant de l'application à ces

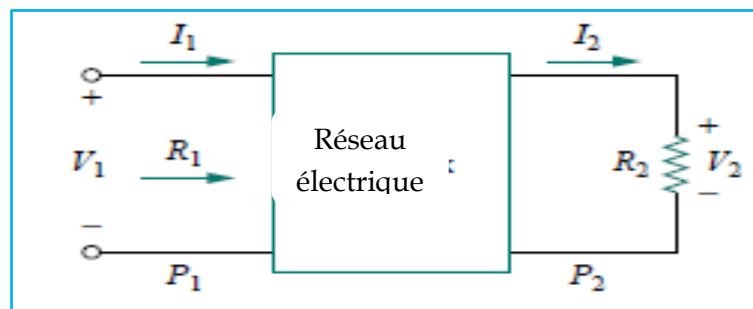


Fig. 1.6 Relation tension-intensité d'un quadripôle

résistances de certaines tensions, ou de la circulation dans ces résistances de certains courants ; on a :

$$P_1 = V_1^2 / R_1 = I_1^2 * R_1 \text{ et } P_2 = V_2^2 / R_2 = I_2^2 * R_2$$

Nous nous trouvons dans le cas où $R_1 = R_2$, dans ce cas l'éq. (1.2) dévient :

$$G_{dB} = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 20 \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 20 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \quad (1.3)$$

La simplification précédente n'est valable que si les deux résistances d'entrée et de charge sont identiques : $R_1 = R_2 = R$. C'est le cas par exemple en téléphonie avec une résistance de 600 Ω . Mais il est souvent indispensable de considérer le gain en tension lorsque l'impédance d'entrée d'un quadripôle (transistor à effet de champ, filtre actif...) est infinie : le gain en puissance n'a plus de sens. En électricité et en électronique, même si le quadripôle n'est pas adapté en impédance en sortie et en entrée, nous utilisons toujours la dernière définition (**ratio des tensions**) pour calculer le module de la fonction de transfert.

1.4- Le tracé de BODE

Dans le cas où les variations relatives de l'une des grandeurs sont très importantes, les échelles linéaires présentent un inconvénient d'ordre pratique. En effet, il est impossible de connaître avec précision l'allure de la courbe aux faibles valeurs. L'échelle logarithmique permet de réaliser une *décompression* de l'origine et une *compression* de l'infini. **En échelle logarithmique, tous les intervalles correspondant à une variation dans un rapport de dix ont une même valeur.** Ces intervalles sont des *décades*. Ce cas est souvent rencontré par exemple en étudiant la réponse d'un filtre ou d'un amplificateur en fonction de la fréquence. Cette fréquence peut varier dans de grandes proportions. Si nous prenons par exemple le cas des fréquences audibles, le nombre de décades sera de trois, puisque la fréquence varie de 20 Hz à 20 000 Hz (le nombre de décades peut être beaucoup plus important dans d'autres cas). **Nous remarquons que sur l'échelle logarithmique, nous ne pouvons pas atteindre l'origine qui est repoussée à $-\infty$.**

1.4.1 Définition

Le diagramme de BODE est la représentation de $G(j\omega)$ à l'aide de deux courbes :

- Courbe la réponse en fréquence donnant la variation du gain

$H_{dB}(\omega) = 20 \log(|G(j\omega)|)$ où $G(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$ en fonction de fréquence ou de la bien exprimé en échelle logarithmique $X = \log(f)$ ou $X = \log(\omega)$.

- Courbe la réponse en phase donnant la variation de **$\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$ en fonction de la même variable X.**

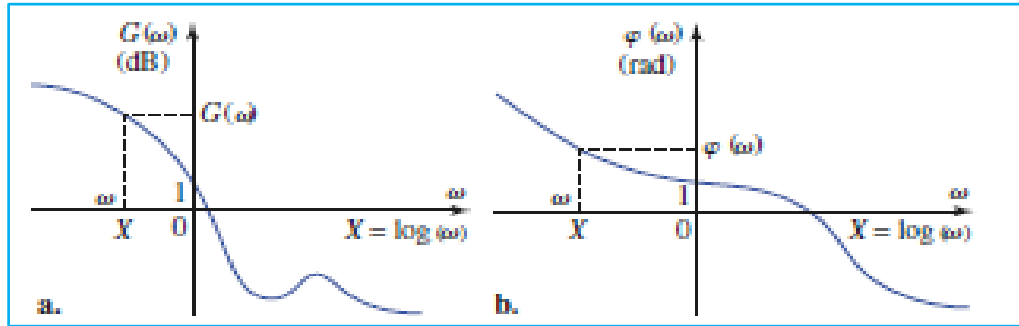


Fig. 1.6 Diagramme de BODE : a) courbe de la réponse en amplitude, b) courbe de la réponse en phase

1.4.2 Décades et octaves

Par définition, une décade est un intervalle de fréquences $[f_1 ; f_2]$ ou de pulsation $[\omega_1 ; \omega_2]$ tel que :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10 \text{ ou } \log(f_2) - \log(f_1) = \log(\omega_2) - \log(\omega_1) = 1 \quad (1.4)$$

Et une octave un intervalle de fréquences $[f_1 ; f_2]$ ou de pulsation $[\omega_1 ; \omega_2]$ tel que :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 \text{ ou } \log(f_2) - \log(f_1) = \log(\omega_2) - \log(\omega_1) = 0.3 \quad (1.5)$$

1.4.3 Avantage de la notion de décibel

Nous démontrons que toute fonction de transfert $G(j\omega)$ peut toujours se décomposer en un produit de fonctions du premier ou du second degré en $j\omega$ à coefficient réel. Ceci revient à mettre en cascade plusieurs quadripôles élémentaires :

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega) \cdot \dots \cdot G_n(j\omega)$$

Ce qui s'écrit en utilisant la forme exponentielle :

$$G(j\omega) = A_1(j\omega)e^{j\varphi_1} A_2(j\omega)e^{j\varphi_2} A_3(j\omega)e^{j\varphi_3} \dots A_n(j\omega)e^{j\varphi_n}$$

Soit en regroupant les termes :

$$G(j\omega) = A_1(j\omega) A_2(j\omega) A_3(j\omega) \dots A_n(j\omega) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n)} = A(j\omega)e^{j\varphi}$$

$$A(j\omega) = \prod_{i=1}^n A(j\omega)_i \text{ et } \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

Nous pouvons déduire le gain en décibel :

$$G_{dB} = 20 \log(|G(j\omega)|) = 20 \log(|A_1(j\omega)|) + 20 \log(|A_2(j\omega)|) + 20 \log(|A_3(j\omega)|) + \dots + 20 \log(|A_n(j\omega)|)$$

$$G_{dB} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^n G_i \text{ où } G_i = 20 \log(|A_i(j\omega)|)$$

Afin d'obtenir un diagramme simple à construire, nous utilisons l'échelle logarithmique pour transformer le produit en somme. Le diagramme de Bode s'obtient alors facilement par addition des diagrammes élémentaires de G_i et de φ_i .

1.4.4 Diagramme de BODE de principales fonctions de transfert élémentaires

1.4.4.1 Diagrammes de Bode d'une fonction constante $H(j\omega) = K$

Le gain vaut : $G_{dB} = 20 \log(|K|)$ et l'argument $\varphi = 0$ pour des valeurs de $K > 0$ ou bien $\varphi = \pm\pi$ pour des valeurs de $K < 0$. Par convention, nous prenons dans ce dernier cas : $\varphi = -\pi$

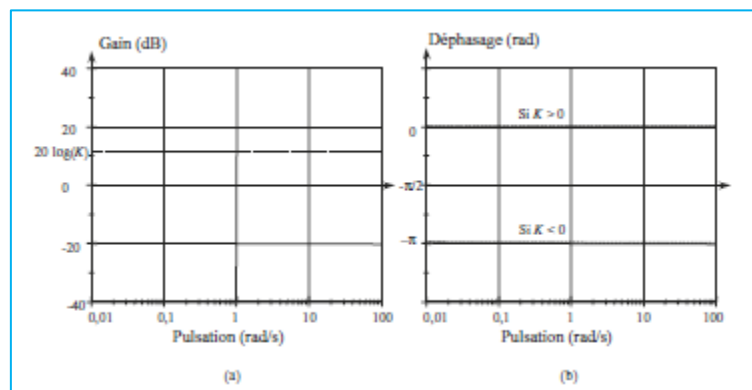


Fig. 1.7 Courbes de Bode de la fonction $H(j\omega) = K$.

1.4.4.2 Diagrammes de BODE du dérivateur et de l'intégrateur

La fonction de transfert d'un dérivateur est $H(j\omega) = j\omega$.

Son gain est $G_{dB}(\omega) = 20 \log(\omega)$ et sa phase est $\varphi = +\frac{\pi}{2}$. Lorsque nous avons une courbe qui évolue en $20 \log(\omega)$ nous disons que nous avons une pente de +20dB/décade.

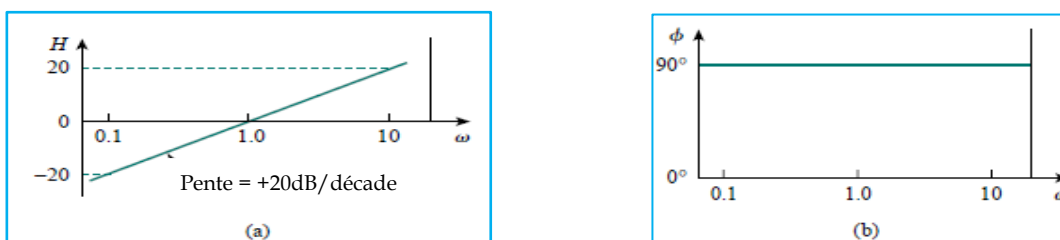


Fig. 1.8 Courbes de Bode du dérivateur $H(j\omega) = j\omega$

L'intégrateur a pour fonction de transfert $H(j\omega) = 1/j\omega$. Nous obtenons alors $G_{dB}(\omega) = 20 \log(|1/j\omega|) = -20 \log(\omega)$ et $\varphi = \arg[1/j\omega] = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi nous obtenons une pente -20dB/décade. Les lieux de BODE sont donc les suivant :

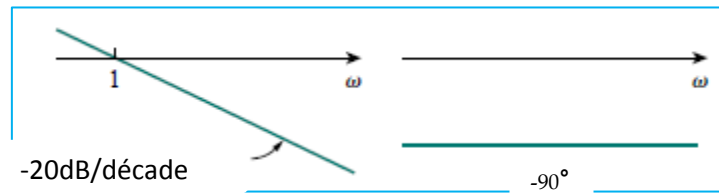


Fig. 1.8 Courbes de Bode de l'intégrateur $H(j\omega) = j\omega$

De façon général une fonction de transfert $H(j\omega) = (j\omega)^n$ où n est entier a une pente $p = +20*n$ dB/décade et une phase $\varphi = +(n * \frac{\pi}{2})$. Aussi $H(j\omega) = (1/j\omega)^n$ une pente $p = -20*n$ dB/décade et une phase $\varphi = -(n * \frac{\pi}{2})$.

1.4.4.3 Diagrammes de BODE de la fonction de transfert $H(j\omega) = (1 + j(\omega/\omega_0))$

C'est une fonction à un simple pôle. Pour tracer son diagramme de BODE pour procéderons d'abord faisons une étude asymptotique qui nous donnera les asymptotes des courbes en des points particuliers.

- Etude asymptotique du gain

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(|1 + j(\omega/\omega_0)|) = 20 \log \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2} = 10 \log(1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2)$$

Posons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ implique que $G_{dB}(x) = 10 \log(1 + (x^2))$

Si $x \ll 1$ ou $\omega \ll \omega_0$ ou en basses fréquence BF $G_{dB}(\omega) \approx 10 \log(1) = 0 \implies$ entre ω et ω_0
 $G_{dB}(\omega)$ admet une asymptote horizontale d'équation $X = \log(x) = 0$ dB.

Si $x \gg 1$ ou $\omega \gg \omega_0$ ou en hautes fréquences HF, $G_{dB}(\omega) \approx 10 \log(x^2) = 20 \log(x) \implies$
 pour $\omega \gg \omega_0$ $G_{dB}(\omega)$ admet une asymptote oblique de pente $p = +20$ dB/décade

Si $x=1$ ou $\omega = \omega_0$, $G_{dB}(\omega_0) = 10 \log(2) = 3$ dB. A cette pulsation ou fréquence les deux asymptotes se rencontrent. On l'appelle pulsation de coupure ou fréquence de coupure.

- Etude asymptotique de la phase

$$\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)] = \arg[1 + j(\omega/\omega_0)] = \arctan(\omega/\omega_0) = \arctan(x) \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Si $x \ll 1$ ou $\omega \ll \omega_0$ ou en BF, $\varphi(\omega) \approx \arctan(0) \implies$ entre ω et ω_0 $\varphi(\omega)$ admet une asymptote horizontale d'équation $X = 0^\circ$.

Si $x=1$ ou $\omega = \omega_0$, $\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega_0)] = \arctan(1) = + \frac{\pi}{4}$

Si $x \gg 1$ ou $\omega \gg \omega_0$ ou HF $G_{dB}(\omega) \approx \arctan(x \rightarrow +\infty) = + \frac{\pi}{2} \implies$ pour $\omega \gg \omega_0$ $\varphi(\omega)$ admet une asymptote horizontale $+ \frac{\pi}{2}$

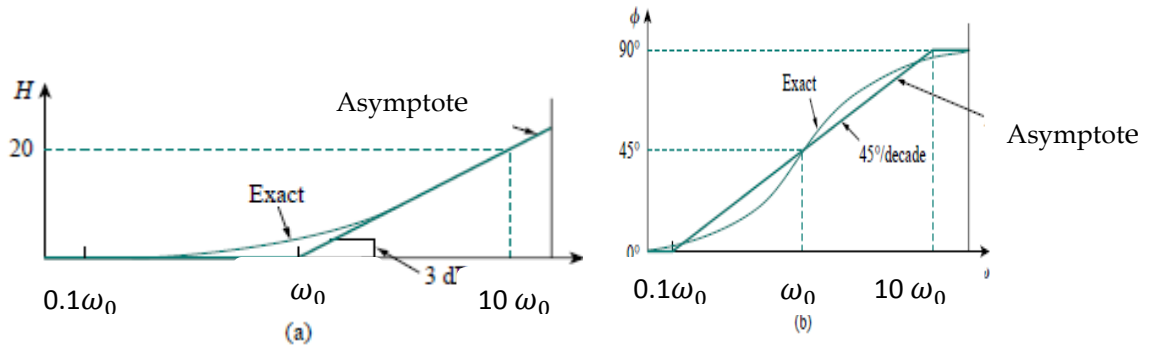


Fig.1.9 Diagramme de $H(j\omega) = (1 + j(\omega/\omega_0))$

De façon similaire l'étude de $H(j\omega) = 1/(1 + j(\omega/\omega_0))$ conduit des courbes semblable à ceux de la Fig.1.8 sauf que nous avons pente de $p = -20$ dB/décade et la phase une asymptote de $-\frac{\pi}{2}$.

1.4.4.4 Diagrammes de Bode d'une fonction de second ordre

Le dénominateur d'une telle fonction est un polynôme de second degré de la variable x (ou $j\omega$). Ce polynôme, très utilisé en électronique et en automatique, sert à obtenir des filtres passe-bas de second ordre. Le passage à des filtres passe-haut ou passe-bande s'obtient en multipliant la fonction de transfert précédente par une fonction sans dénominateur.

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + j^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K}{1 + 2jmx + j^2x^2} \quad (1.6)$$

Les diagrammes asymptotiques sont donnés en étudiant les limites. Pour cela, nous calculons le module et l'argument :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2mx)^2}} \quad \text{et} \quad \phi = -\arctan\left(\frac{2mx}{1-x^2}\right)$$

K étant une constante, nous pouvons supposer $K = 1$

Si $x \ll 1$, c'est à dire si : $\omega \ll \omega_0$, $|H(j\omega)| \approx 1$ soit : $G = 20 \log(1) = 0$ dB.

L'asymptote est donc horizontale. Le déphasage est : $-\arctan(0) = 0$. Il s'agit aussi d'une asymptote horizontale.

Si $x \gg 1$, c'est à dire si : $\omega \gg \omega_0$, $|H(j\omega)| \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, soit $G_{dB} = 20 \log\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$

$G_{dB} = 40 \log(x)$, nous avons une pente de $+40$ dB/décade

Le déphasage est : $\phi = -\pi$

Pour le gain, nous trouvons deux asymptotes : l'une est horizontale, l'autre est une asymptote de pente -2 ou -40 dB/décade : figure 1.10 (a).

Pour la phase, nous trouvons aussi deux asymptotes : une asymptote horizontale à 0 et une autre asymptote horizontale à $-\pi$: figure 1.10 (b).

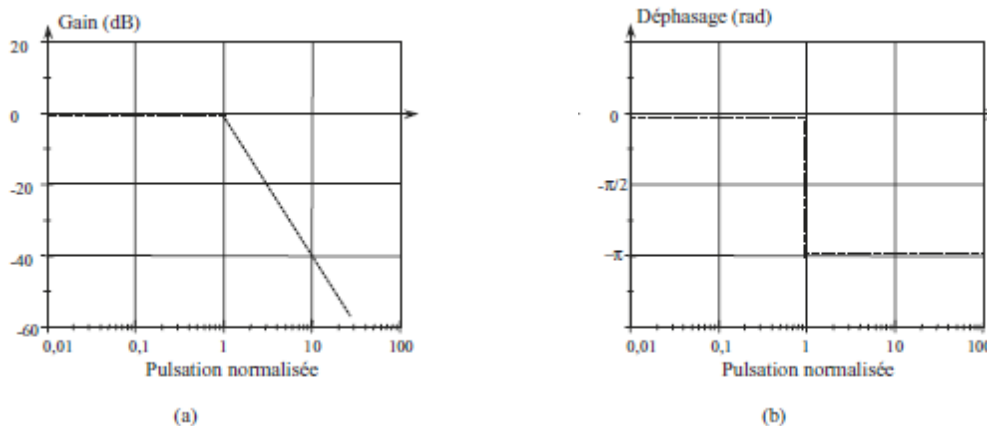


Fig.1.10 Courbes asymptotiques du gain et de la phase.

L'étude de la variation réelle du gain et de la variation réelle de la phase en fonction de la fréquence montre que trois cas se présentent selon le signe du discriminant du polynôme de second ordre.

➤ Régime critique

Ce cas, qui correspond à un polynôme de second ordre à deux racines identiques, présente peu d'intérêt.

➤ Régime apériodique

Le discriminant est positif, le polynôme possède deux racines réelles. Il est donc possible de le décomposer en deux facteurs de premier ordre :

$$H(j\omega) = K \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)} \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

avec : $\omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$ et $\omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$

Le système revient à la mise en cascade de deux fonctions simples du premier ordre. Les tracés asymptotiques se construisent en ajoutant les tracés des deux fonctions construits séparément. Nous remarquons que : $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$ et que, pour $\omega = \omega_0$, le déphasage est de $-\pi/2$. La pulsation de coupure notée ω_c c'est toujours inférieure à ω_2 . ω_1 et ω_2 , étant deux *pulsations de cassures*. Les tracés de la courbe du gain et du déphasage en fonction de la fréquence (figure 1.11) sont faits dans le cas suivant : $\omega_1 = 10$ rad/s , $\omega_2 = 100$ rad/s et $K = 10$.

➤ Système à faible amortissement - Régime oscillant

Le discriminant est négatif, le polynôme possède deux racines complexes conjuguées notées respectivement :

$$\omega_1 = \omega_0(-m + j\sqrt{m^2 - 1}) \text{ et } \omega_2 = \omega_0(-m - j\sqrt{m^2 - 1})$$

La fonction de transfert devient :

$$H(p) = K \frac{\omega_0^2}{(j\omega + m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - m^2)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4m^2 x^2}}$$

Le module de la fonction de transfert est :

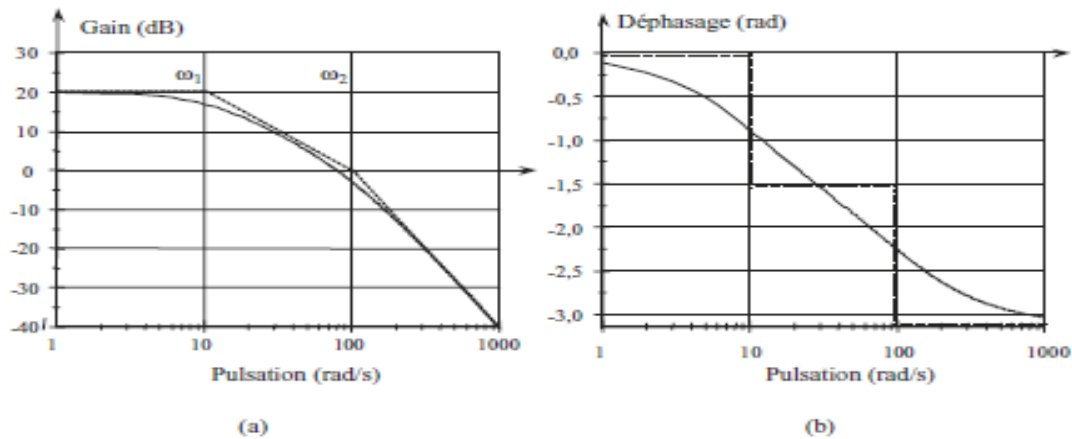


Fig1.12 Courbes de Bode et tracés asymptotiques d'un filtre passe-bas d'ordre 2 dans le cas : $m > 1$

Le déphasage est

$$\phi = -\arctan\left(\frac{2m\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Le calcul de la dérivée du module de la fonction de transfert montre que selon la valeur du coefficient d'amortissement m , la courbe présente deux aspects distincts (figure 1.12). La dérivée de $|H|$ par rapport à x donne :

$$\frac{dH}{dx} = -2Kx \frac{2m^2 - 1 + x^2}{[(1 - x^2)^2 + 4a^2x^2]^{3/2}}$$

En dehors du cas mathématique pour lequel $x = 0$, la dérivée ne peut s'annuler que si $x^2 = 1 - 2m^2$. Autrement dit, la courbe ne présente de maximum que si $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Les coordonnées du maximum sont :

$$x_M = \sqrt{1 - 2m^2} \quad \text{et} \quad H_M = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

Nous constatons que la pulsation qui permet d'avoir la valeur maximale n'est pas ω_0 mais $\omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$. Cette pulsation tend vers ω_0 pour $m \ll 1$. Dans ce cas, l'amplitude de la sortie tend vers ∞ . Le système devient instable (oscillant). Le maximum H_M est égal au facteur de surtension Q .

$$H_M = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}} \approx \frac{1}{2m} = Q$$

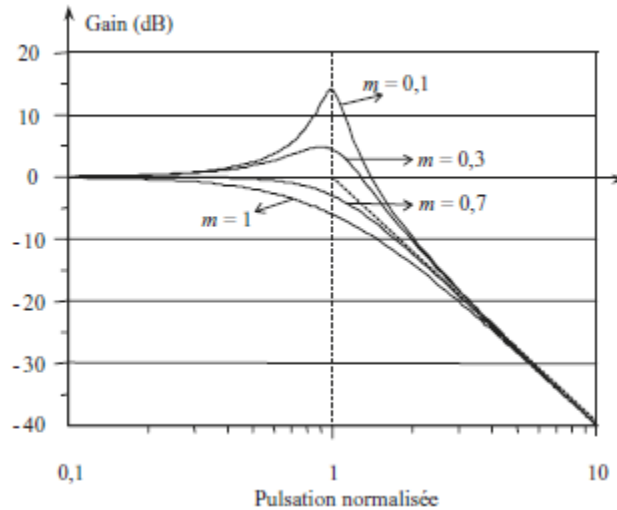


Fig.1.12 Courbes du gain et tracés asymptotiques d'un filtre passe-bas d'ordre 2 pour différents cas de m .

où ω_0 est la pulsation propre, m est le coefficient d'amortissement et K est le gain statique.

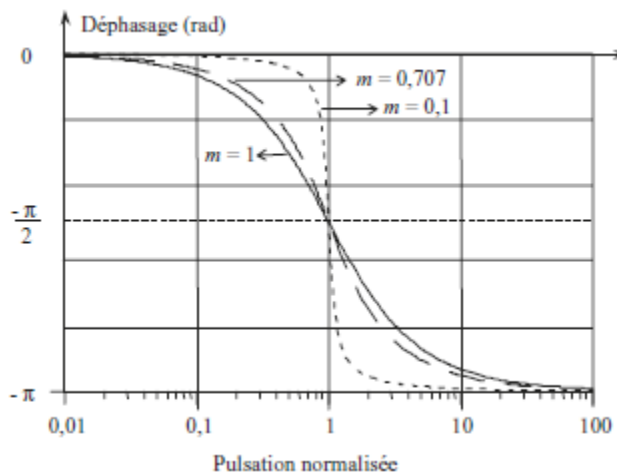


Fig.1.13 Courbes du déphasage d'un filtre passe-bas d'ordre 2 pour différents cas de m .

Pour des pulsations $\omega \ll \omega_0$. Le coefficient de qualité Q est donné par $Q = 1/2m$. Des abaques sont alors utilisés pour obtenir les courbes réelles qui sont alors très dépendantes de la valeur du coefficient d'amortissement m .

1.4.5 Exemple de tracé le diagramme de BODE

Pour tracer le diagramme de BODE des fonctions de transfert, il faut la décomposer en fonction élémentaire vu dans la section précédente et la mettre sous *forme normalisée* ou *forme standard* comme suit :

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm 1} (1 + j\omega/z_1) [1 + j2\xi_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2] \dots}{(1 + j\omega/p_1) [1 + j2\xi_2\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2] \dots}$$

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.2

La forme standard est éventuellement la combinaison variée de sept facteurs (fonctions élémentaires) :

- 1) Le gain statique K
- 2) La fonction du dérivateur ($j\omega$) ou de l'intégrateur $1/(j\omega)$
- 3) La fonction à pôle simple $1/(1+j\omega)$ ou à zéro simple $1+j\omega$
- 4) La fonction du second ordre $(1+j2m(\omega/\omega_0) + (\omega/\omega_0)^2)$ ou $1/(1+j2m(\omega/\omega_0) + (\omega/\omega_0)^2)$

Le diagramme de BODE s'obtient alors facilement par addition des diagrammes élémentaires de G_i et de φ_i (cf 1.3.3)

Exemple 1.2 Construire le diagramme de BODE de $H(j\omega) = \frac{200j\omega}{(2+j\omega)(10+j\omega)}$

On commence par mettre $H(j\omega)$ sous forme standard $H(j\omega) = \frac{200j\omega}{2 \cdot 10 (1+j(\frac{\omega}{2}))(1+j(\frac{\omega}{10}))}$

$$H(j\omega) = \frac{10j\omega}{(2+j(\frac{\omega}{2}))(1+j(\frac{\omega}{10}))} = K H_1(j\omega) H_2(j\omega) H_3(j\omega) \text{ avec } K=10, H_1(j\omega) = 10j\omega,$$

$$H_2(j\omega) = (1 / (2 + j(\frac{\omega}{2}))) \text{ et } H_3(j\omega) = 1 / (1 + j(\frac{\omega}{10}))$$

L'étude asymptotique des quatre facteurs élémentaires précédents est entièrement traitée dans le paragraphe 1.3.4. Nous consignerons les résultats dans le tableau suivant

x	x → 0	2	10	X → ∞
K	20 log(K)			20 log(K)
H ₁ (jω)	+1		+1	+1
H ₂ (jω)	0		-1	-1
H ₃ (jω)	0		0	-1
H(jω)	+1		20 log(K)	-1

+1 = +20dB/décade et -1 = -20 dB/décade

L'étude la phase donne le tableau suivant

x	x → 0	2	10	X → ∞
K	0		0	0
H ₁ (jω)	+90		+90	+90
H ₂ (jω)	0		-90	-90
H ₃ (jω)	0		0	-90
φ(ω)	90		0 ⁽¹⁾	-90

(1) Ici 0 n'est une asymptote mais traduit que la courbe coupe l'axe des abscisses et que ce point appartient à l'intervalle 2 et 10.

Le graphe de BODE est donc le suivant :

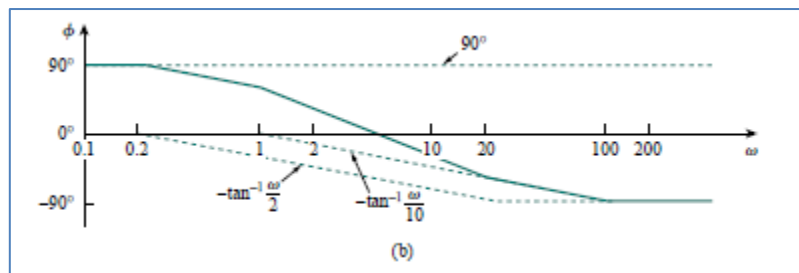
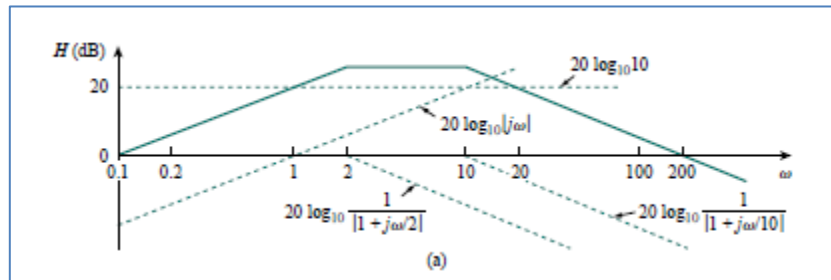


Fig.1.14 Exemple 1.2 a) la courbe de gain, b) la courbe de phase

Exemple 1.3 Après une étude asymptotique, tracer le diagramme de BODE de la fonction suivante $H(j\omega) = \frac{5(2+j\omega)}{(j\omega)(10+j\omega)}$

Une étude similaire à la précédente nous donne le graphe suivant

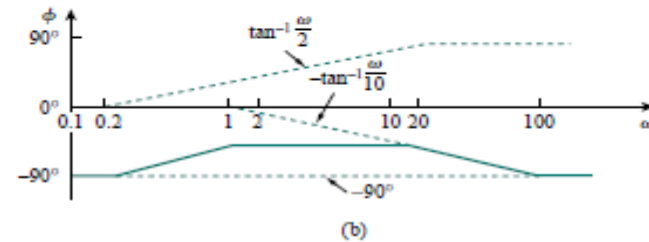
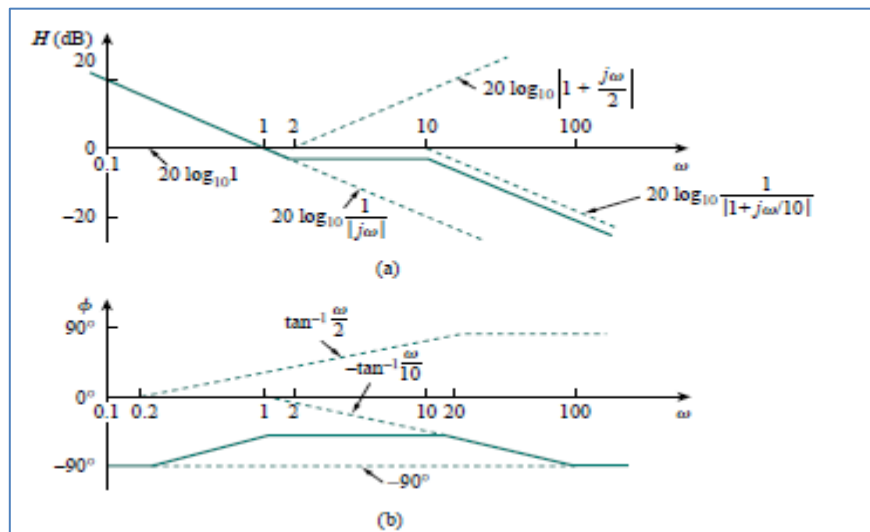


Fig.1.14 Exemple 1.3 a) la courbe de gain, b) la courbe de phase

Exemple 1.4 Donner le diagramme de BODE de $H(j\omega) = \frac{10+j\omega}{(j\omega)(5+j\omega)^2}$

En la mettant sur forme canonique on trouve $H(j\omega) = \frac{0.4(1+j\frac{\omega}{10})}{(j\omega)(1+j\frac{\omega}{5})^2}$

Le gain $H(\omega) = 20\log(0.4) + 20\log(|1 + j\frac{\omega}{10}|) - 20\log|j\omega| - 20\log(|1 + j\frac{\omega}{5}|)^2$

$\varphi(\omega) = 0^\circ + \arctan(\frac{\omega}{10}) - 90^\circ + 2 \arctan(\frac{\omega}{5})$

Pour la pulsation $\omega = 5$ rad/s (qui est un pôle double) nous avons une pente de -40 dB/décade et une phase de -90° à cause de la puissance de 2. Les lieux sont donnés dans la figure suivants(en pointillé les asymptotes de chaque fonction élémentaire et en trait continu la résultante des asymptote).

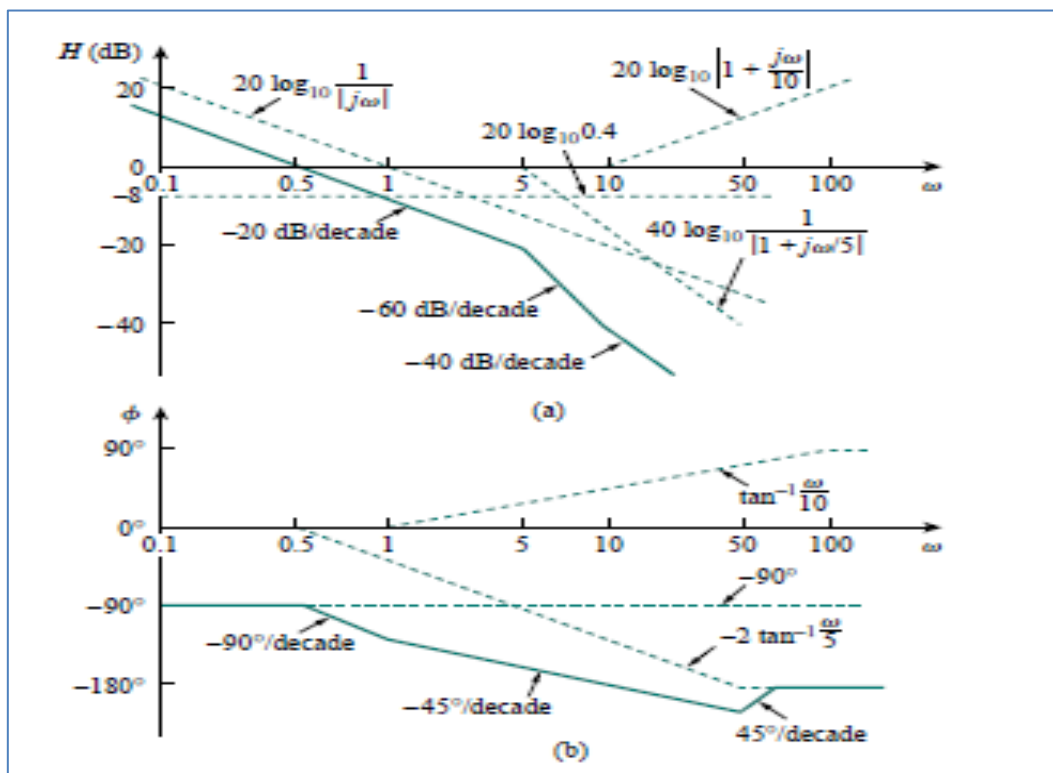


Fig.1.15 Exemple 1.4 a) la courbe de gain, b) la courbe de phase

Exemple 1.5 Dessiner le diagramme de BODE de $H(j\omega) = \frac{50j\omega}{(j\omega+4)(10+j\omega)^2}$

Le graphe est le suivant

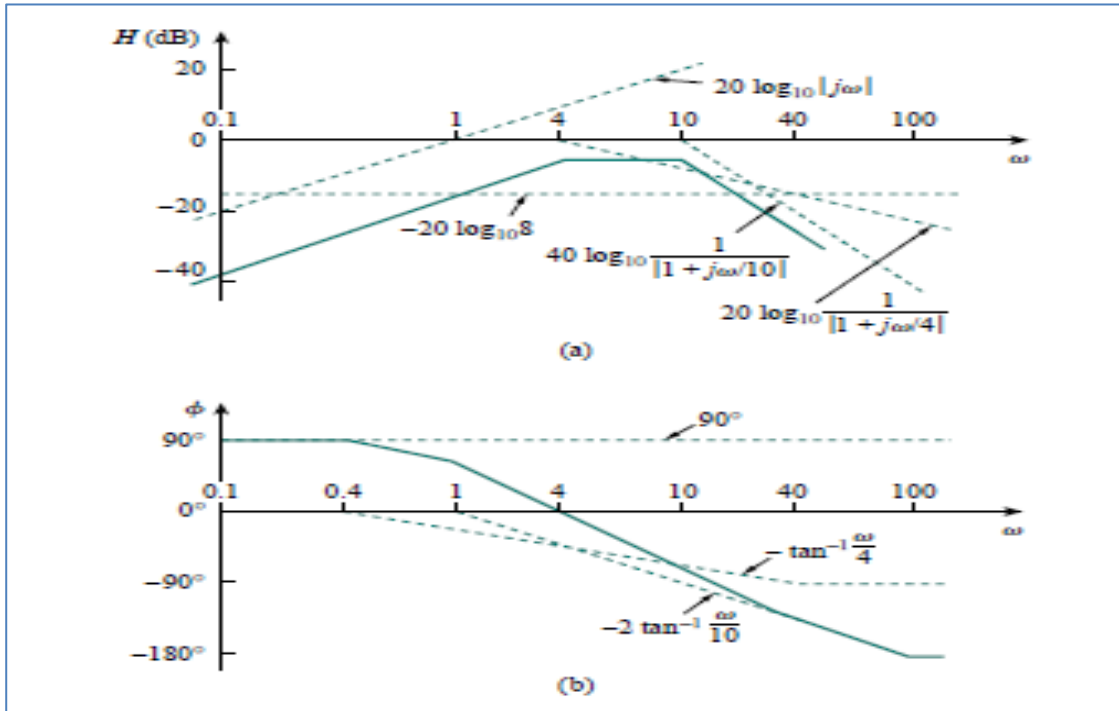


Fig.1.16 Exemple 1.5 a) la courbe de gain, b) la courbe de phase

Exemple 1.6 Tracer le diagramme de BODE de $H(j\omega) = \frac{j\omega+1}{100+60(j\omega)+(j\omega)^2}$

La forme normal de H est $H(j\omega) = \frac{1/100(j\omega+1)}{1+\frac{6}{10}(j\omega)+(j\frac{\omega}{10})^2}$

Le pôle quadratiques $\omega_n= 5$ rad/s est la pulsation propre de H(j ω).

$H(\omega) = -20\log(100) + 20\log(|1+j\omega|) + 20\log(|1 + \frac{6}{10}(j\omega) - (\frac{\omega}{10})^2|)$

$\varphi(\omega) = 0^\circ + \arctan(\omega) - \arctan(\frac{\frac{6}{10}(\omega)}{1 - (\frac{\omega}{10})^2}) = \arctan(x_1) - \arctan(\frac{6x_2}{1 - (x_2)^2})$ avec

$x_1 = \omega$ et $x_2 = \omega/10$.

Les lieux de BODE sont les suivants

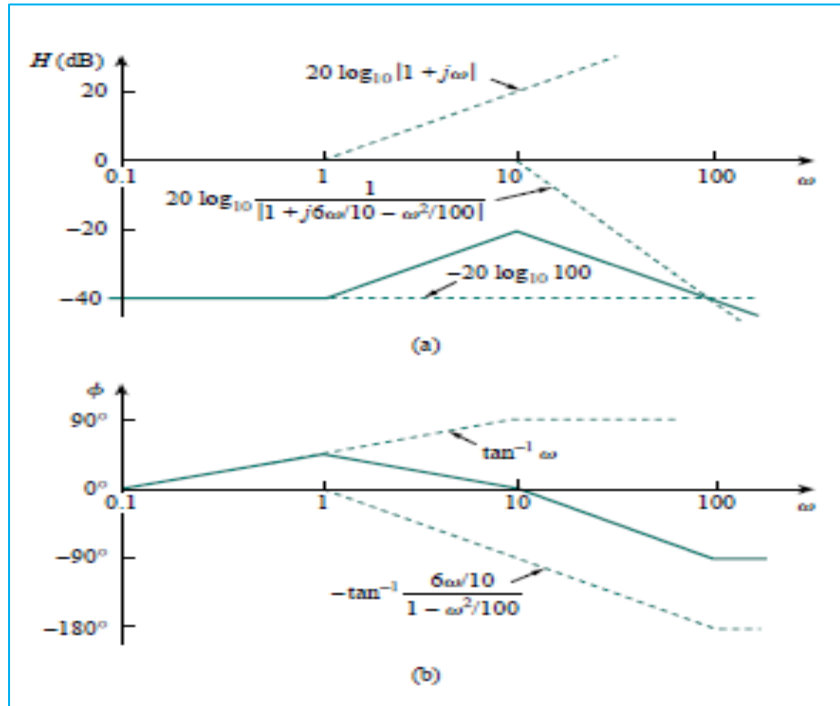


Fig.1.17 Exemple 1.6 a) la courbe de gain, b) la courbe de phase

Notez que la pulsation quadratique est considéré comme double comme dans $(1+j\omega/\omega_k)^2$

Exemple 1.7 Construire le diagramme de BODE de $H(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^2((j\omega)^2 + 80(j\omega) + 400)}$

La courbe est la suivante :

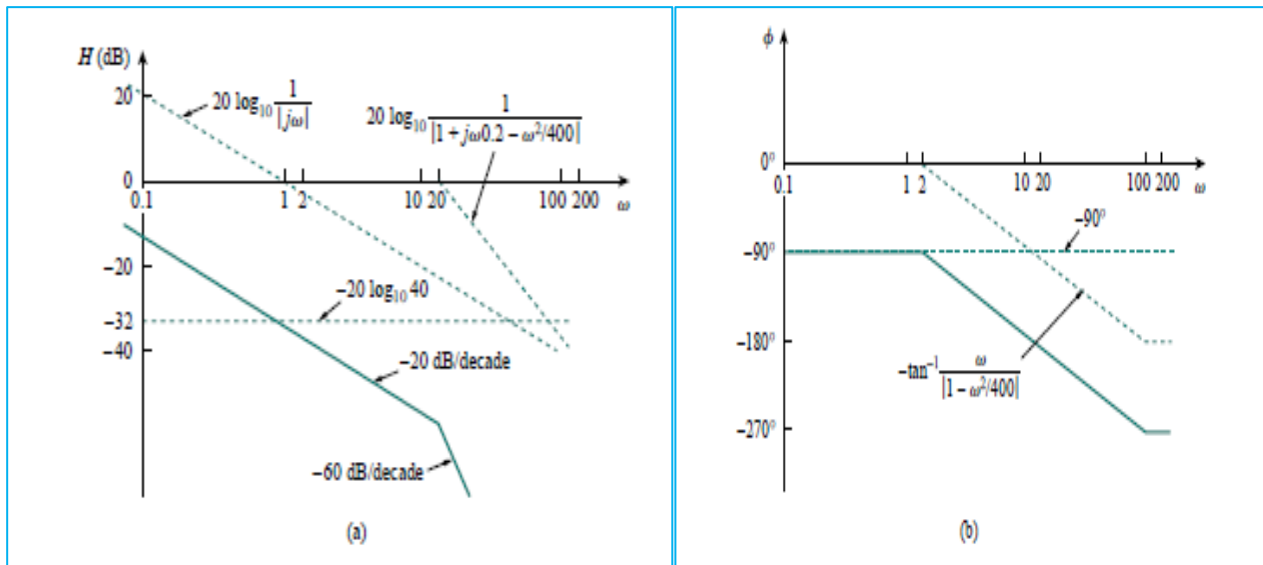


Fig.1.18 Exemple 1.7 a) la courbe de gain, b) la courbe de phase

Exercice 2 : exercice niveau 1

- 1- Calculer $H(\omega)$ si H_{dB} est égale à : a) 0.05 dB ; b) -6.2 dB ; c) 104.7 dB

2- Déterminer l'amplitude (en dB) et la phase (en degré) à la pulsation $\omega = 1 \text{ rad/s}$ si $H(j\omega) =$: a) 0.05, b) 125, c) -100, d) $\frac{10j\omega}{2+j\omega}$, e) $\frac{3}{1+j\omega} + \frac{6}{2+j\omega}$

3- Après une étude asymptotique tracer le diagramme de BODE des fonctions de transfert suivantes :

$$G(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(10+j\omega)}, \quad H(j\omega) = \frac{10+j\omega}{(j\omega)(2+j\omega)}, \quad K(j\omega) = \frac{40(10+j\omega)}{(j\omega+1)(10+j\omega)}$$

$$L(j\omega) = \frac{50(1+j\omega)}{(j\omega)(-\omega^2+10j\omega+25)}, \quad T(j\omega) = \frac{(j\omega)}{(j\omega+2)^2(1+j\omega)}$$

2- Filtrés passifs du premier ordre

2-1 Filtrés passe-bas du premier ordre

2.1.1 Définition

Un filtre est un filtre passe-bas d'ordre un si sa fonction de transfert est de la forme

$$H(j\omega) = \frac{A_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1+jx}, \quad A_0 \text{ est un réel.}$$

A_0 est le gain dans la bande passante,

ω_0 est la pulsation de coupure ou caractéristique de et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

La deuxième écriture de $H(j\omega)$ est sa forme réduite.

2.1.2 Diagramme de BODE

➤ Etude asymptotique de $H(j\omega)$

1-Etude approximative de l'amplitude $H(\omega)$

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{|A_0|}{\sqrt{1+x^2}} \iff H(\omega)_{dB} = 20 \log\left(\frac{|A_0|}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 20\log(|A_0|) - 10\log(1+x^2)$$

Pour $x \ll 1$ ou $\omega \ll \omega_0$ ou en BF, $H(\omega)_{dB} \approx 20\log(|A_0|)$. On constate que le signal de sortie est le signal d'entrée multiplié par A_0 sur l'ensemble des fréquences $[0 ; f_0]$ qui est *la bande passante* du filtre et f_0 est appelée *fréquence de coupure*.

Par définition, la bande passante d'un filtre est l'ensemble des fréquences pour lesquelles la puissance transmise est supérieure à la moitié de la puissance à l'entrée d'un filtre. Autrement c'est l'ensemble des fréquences f tel que

$$G(f)_{dB} > G_{max\,dB} - 3\text{dB} \text{ ou bien } G(f) > \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \quad (1.7)$$

où G_{max} = maximum de $G(f) = \text{maximum de } |G(jf)|$ et les fréquences tel que

$G(f)_{dB} = -3\text{dB}$ ou bien $G(f) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$ sont les fréquences de coupure ou caractéristiques du filtre.

Pour $x=1$ ou $\omega = \omega_0$ ou à la fréquence de coupure, $H(\omega)_{dB} = -3 \text{ dB}$

Pour $x \gg 1$ ou $\omega \gg \omega_0$ ou en HF, $H(\omega)_{dB} \approx -10 \log(1 + x^2) \approx -10 \log(x^2) = -20 \log(x)$. On remarque le signal de sortie est atténué de -20 dB par décade. On dit qu'on a une pente de -20 dB/décade .

Le gain dans la bande passante : les fréquences basses est uniforme et fortement atténué sur les autres fréquences. On dit qu'on a un *filtre passe-bas*.

2-Etude approximative de la phase $\varphi(\omega)$

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{A_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = \arg(A_0) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Pour $x \ll 1$ ou $\omega \ll \omega_0$ ou en BF, $\varphi(\omega) \approx \arctan(0) = 0^\circ$

Pour $x=1$ ou $\omega = \omega_0$ ou à la fréquence de coupure, $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{4}$

Pour $x \gg 1$ ou $\omega \gg \omega_0$ ou en HF, $\varphi(\omega) \approx -\arctan(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$

Notons que si $A_0 < 0$ il faut ajouter $-\pi$ à la phase.

➤ Le diagramme de BODE

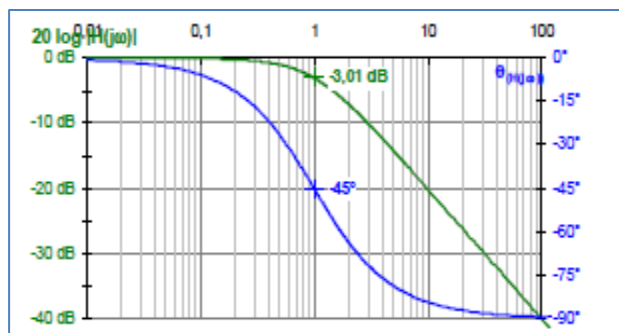


Fig2.1 Exemple de diagramme filtre passe-bas avec $\omega_0=1 \text{ rad/s}$

2.1.3 Exemple de filtre passe-bas

Exemple 2.1 : filtre RC (étude complète)

L'un des filtres passe-bas les plus élémentaires est le filtre RC dont le circuit est donné par la Fig.2.2

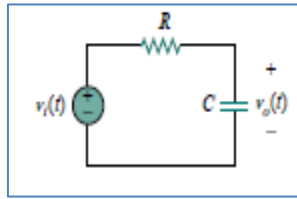


Fig.2.2 Filtre RC

Sa fonction de transfert est $H(j\omega) = \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = \frac{1/(j\omega)}{R+1/(j\omega)} = \frac{1}{1+RCj\omega} = \frac{1}{1+j(\omega/\omega_0)}$

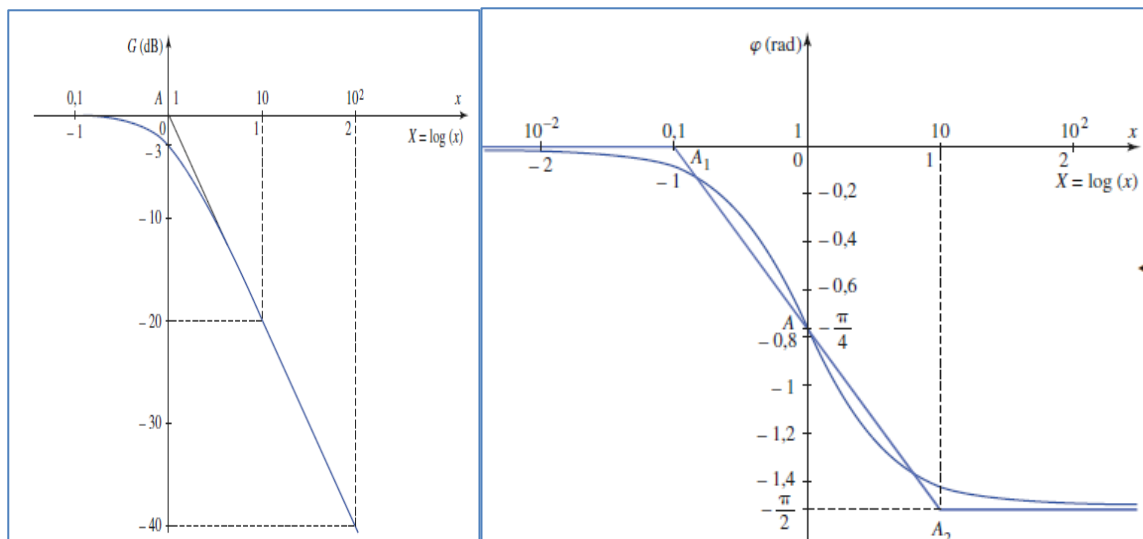
Son amplitude est $H(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j(\omega/\omega_0)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$ et sa phase est

$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_0)$.

La pulsation caractéristique est $\omega_0 = 1/RC$ et la fréquence de coupure $f_0 = 1/2\pi RC$

Son gain est $H(\omega)_{dB} = -20 \log(\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2})$

Le diagramme de BODE est le suivant :



a) Courbe du gain

b) courbe de la phase

Fig2.3 Diagramme de BODE d'un filtre RC

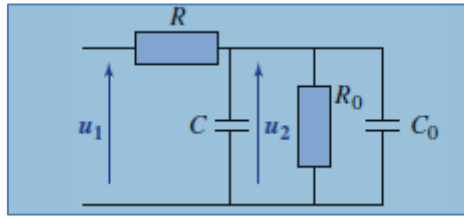
Exercice 3 : exercice niveau 1

- 1- Calculer la fréquence de coupure si $R=1\text{ k}\Omega$ et $C=10\text{ nF}$
- 2- Calculer R si $\omega_0=10\text{ rad/s}$ et $C=2.2\text{ nF}$
- 3- Déterminer le gain et la phase pour $f_i = 0.1f_0$, $f_i = 10f_0$; $f_i = 100f_0$

Exercice 4 : exercice niveau 1

Soit le circuit suivant

Pour s'entraîner
exer. de niveau 1 : Ex.3, 4 et
6



- 1- Déterminer sa fonction de transfert, son amplitude et sa phase
- 2- Calculer sa fréquence de coupure.
- 3- Identifier ce filtre et donner ces caractéristiques

2-2 Filtres passe-haut du premier ordre

2.2.1 Définition

Un filtre est un filtre haut-bas d'ordre un si sa fonction de transfert est de la forme

$$H(j\omega) = \frac{A_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0 x}{1 + jx} = \frac{A_0 x}{1 - \frac{j}{x}}, A_0 \text{ est un réel.}$$

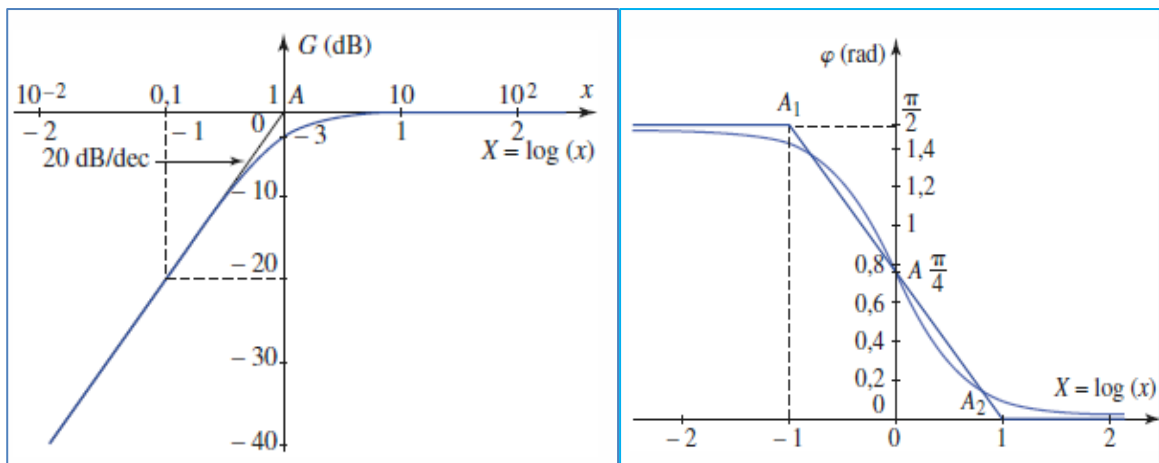
A_0 est le gain dans la bande passante,

ω_0 est la pulsation de coupure ou caractéristique de et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

La deuxième écriture de $H(j\omega)$ est sa forme réduite.

2.2.2 Diagramme de BODE

Une étude similaire au filtre passe-bas donne les graphes suivants :



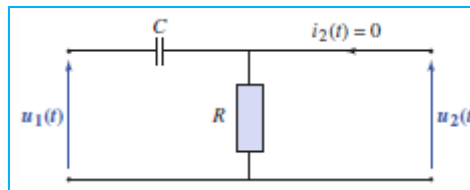
a) Courbe du gain

b) courbe de la phase

Fig.2.3 Diagramme de BODE d'un filtre passe-haut

2.1.3 Exemple de filtre passe-bas CR

Exemple 2.1 : filtre CR (étude complète)



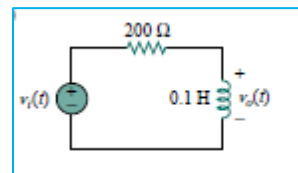
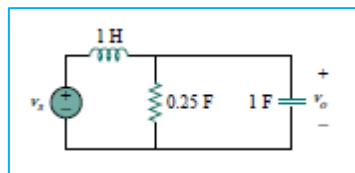
- 1- Déterminer sa fonction de transfert, son amplitude et sa phase
- 2- Calculer sa fréquence de coupure.
- 3- Identifier ce filtre et donner ces caractéristiques
- 4- Tracer le diagramme de BODE

Exercice 5 : exercice niveau 1

Reprendre les questions de l'Exercice 3 : exercice niveau 1 appliqué au filtre CR

Exercice 6 : exercice niveau 1

Pour les circuits suivants :



- 1- Déterminer sa fonction de transfert, son amplitude et sa phase
- 2- Calculer sa fréquence de coupure.
- 3- Identifier ce filtre et donner ces caractéristiques
- 4- Tracer le diagramme de BODE

3 Les filtres passifs du second ordre

L'étude générale des filtres du second ordre a été détaillée dans le paragraphe 1.3.4.4. Ainsi nous donnerons les définitions des filtres et les principaux résultats suivis des exemples.

3-1 Filtres passifs passe-bas du second ordre

3.1.1 Définition et principaux résultats

Un filtre est un filtre passe-bas d'ordre deux si sa fonction de transfert est de la forme

$$H(j\omega) = \frac{A_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} = \frac{A_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}, \quad A_0 \text{ est un réel.}$$

A_0 est le gain dans la bande passante,

ω_0 est la pulsation de coupure ou caractéristique de et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

La deuxième écriture de $H(j\omega)$ est sa forme réduite.

Son diagramme de BODE es caractérisé par :

- 1- Une asymptote basse fréquence d'équation $H_{dB} = 20 \log(A_0)$
- 2- Une asymptote haute fréquence de pente -40 dB/décade
- 3- Une résonnant pour $\omega < \omega_0$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 4- $H_{dB}(j\omega_0) = A_0 Q$

3.1.2 Exemple de filtre passe-bas d'ordre deux

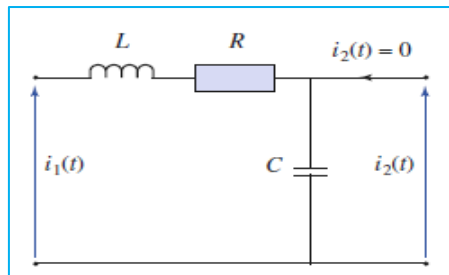


Fig. 2.4 Circuit RLC filtre passe-bas d'ordre deux

- 1- Déterminer sa fonction de transfert, son amplitude et sa phase
- 2- Calculer sa fréquence de coupure.
- 3- Identifier ce filtre et donner ces caractéristiques
- 4- Tracer le diagramme de BODE

3-2 Filtres passifs passe-haut du second ordre

3.2.1 Définition et principaux résultats

Un filtre est un filtre passe-haut d'ordre deux si sa fonction de transfert est de la forme

$$H(j\omega) = \frac{-A_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{-A_0 x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}, \quad A_0 \text{ est un réel.}$$

A_0 est le gain dans la bande passante,

ω_0 est la pulsation de coupure ou caractéristique de et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

La deuxième écriture de $H(j\omega)$ est sa forme réduite.

Son diagramme de BODE es caractérisé par :

- 1- Une asymptote haute fréquence d'équation $H_{dB} = 20 \log(A_0)$
- 2- Une asymptote basse fréquence de pente $+40 \text{ dB/décade}$
- 3- Une résonnant pour $\omega > \omega_0$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 4- $H_{dB}(j\omega_0) = jA_0 Q$

3.2.2 Exemple

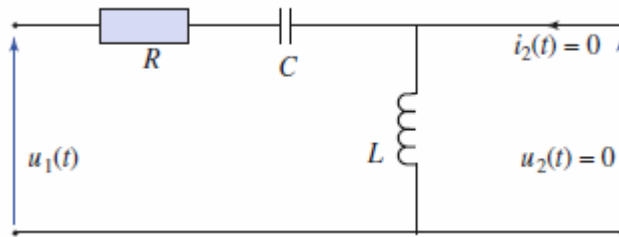


Fig. 2.5 Circuit RLC filtre passe-haut d'ordre deux

- 1- Déterminer sa fonction de transfert, son amplitude et sa phase
- 2- Calculer sa fréquence de coupure.
- 3- Identifier ce filtre et donner ces caractéristiques
- 4- Tracer le diagramme de BODE

3-3 Filtres passifs passe-bande du second ordre

3.3.1 Définition

Un filtre est un filtre passe-bande d'ordre deux si sa fonction de transfert est de la forme

$$H(j\omega) = \frac{A_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

A_0 est le gain dans la bande passante,

ω_0 est la pulsation de coupure ou caractéristique de et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

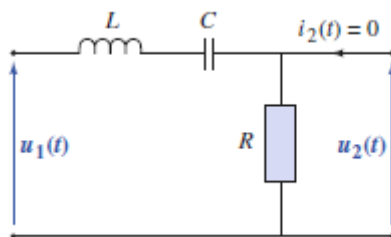
Son diagramme de BODE es caractérisé par :

- 1- Une asymptote basse fréquence de pente +20 dB/décade ;
- 2- Une asymptote haute fréquence de pente -20 dB/décade ;
- 3- Une intersection pour $\omega = \omega_0$ au point d'ordonnée : $G = 20\log(A_0) - 20\log(Q)$;
- 4- Un gain maximal, égal $20\log(A_0)$ obtenu pour $\omega = \omega_0$;
- 5- Un déphasage nul pour $\omega = \omega_0$;
- 6- Un pic de résonance de largeur (mesurée 3dB au-dessous du maximum) $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Cette largeur est encore appelée bande passante à -3dB

3.3.1 Exemple de filtres passifs passe-bande du second ordre

- 1- Déterminer sa fonction de transfert et la mettre sous forme $H(\omega) = \frac{2\delta jx}{1 + 2\delta(jx) + (jx)^2}$
son amplitude et sa phase
- 2- Faire l'étude asymptotique en basse et haute fréquences



3- Calculer la bande passante à -3dB et l'exprimer en fonction de $Q = \frac{1}{2\delta}$

4- Tracer le diagramme de BODE

4-Filtres actifs

4.1 Filtres actif versus filtre passif

En électronique les filtres actifs et passifs sont utilisés. Cependant les filtres actifs ont des avantages par rapport aux filtres passifs :

- *Pas d'effet de charge* : à cause de la grande résistance d'entrée et de la faible résistance de sortie des AOP les filtres actifs ne causent aucun effet de charge sur les signaux d'entrée ou de sortie ;
- *Faible coût (lowcost) et faible dimension* : les filtres actifs sont moins chers que les filtres passifs à cause des AOP bon marché et de l'absence des inductances ;
- *Intégration numérique* : les filtres analogiques et la circuiterie numérique peuvent être intégrés sur une puce électronique ;
- *Fonction des filtres* : les filtres actifs peuvent réaliser plus de fonctions des filtres que les filtres passifs ;
- *Isolation et mise en cascade* : les filtres actifs peuvent être combinés aux montages suiveurs pour isoler chaque filtre de la source alimentation et de la charge. Cette isolation permet de dimensionner chaque étage indépendamment des autres et ensuite fait une mise en cascade pour réaliser la fonction de transfert

Les filtres actifs ont aussi quelques désavantages :

- *La bande passante* : les composants actifs ont une bande passante finie (limite) qui limite les applications des filtres passifs aux fréquences audio. Par contre les filtres passifs n'ont pas de telle fréquence supérieure limite et peuvent être utilisés jusqu'à 500 MHz ;
- *Les dérives* : les filtres actifs sont sensibles à la dérive des composantes dues à la tolérance de construction ou des changements de l'environnement alors que les filtres passifs sont moins affectés par ces facteurs ;
- *Les tensions d'alimentation* : Les filtres actifs nécessitent une tension d'alimentation tandis que les filtres passifs n'en ont pas besoin ;

En générale, les avantages des filtres actifs surclassent sur leurs désavantages dans la communication de données et de la voix. Les filtres actifs sont utilisés dans la plupart des systèmes électroniques sophistiqués de communication et du traitement du signal tels que la télévision, la téléphonie, le radar, les satellites dans l'espace et les équipements biomédicaux. Cependant, les filtres passifs sont encore largement utilisés.

4.2 Filtres actifs du premier ordre

La structure générale des filtres actifs du premier ordre est la suivante :

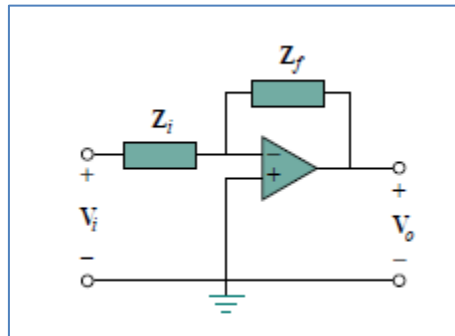


Fig.4.1 Structure générale des filtres actif du premier ordre

Les choix de Z_i et de Z_f permettront de déterminer si le filtre est passe-bas ou passe-haut.

La fonction de transfert est $H(j\omega) = -\frac{Z_f}{Z_i}$.

4.2.1 Filtre actif passe-haut du premier ordre

Par exemple pour la figure suivante Fig.4.2

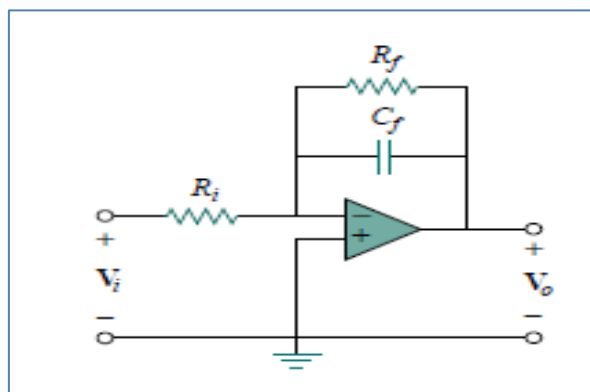


Fig.4.1 Exemple de filtres actif passe - haut du premier ordre

$$Z_i = R_i \text{ et } Z_f = R_f \parallel \frac{1}{j\omega C_f} = \frac{R_f}{1 + j\omega R_f C_f} \text{ ce qui conduit à } H(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f}$$

Le gain statique est $K = -\frac{R_f}{R_i}$ et $\omega_c = \frac{1}{R_f C_f}$. On remarque ω_c est indépendante de R_i ce qui signifie que plusieurs signaux d'entrée avec des R_i pourraient être sommés mais la fréquence ne changera pas.

4.2.1 Filtre actif passe-bas du premier ordre

En suivant la même démarche que précédemment on trouve pour la figure ci-dessus

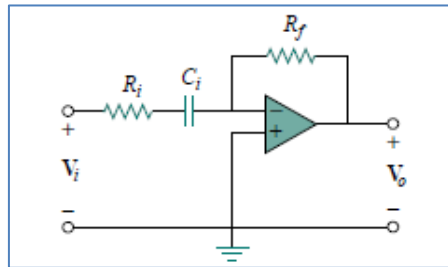
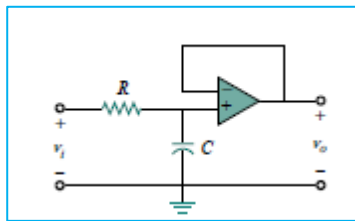


Fig.4.2 Exemple de filtres actif passe - bas du premier ordre

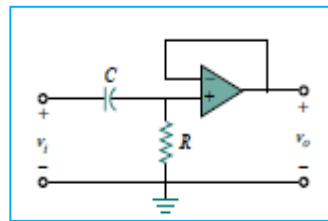
$$H(j\omega) = -\frac{j\omega R_f C_i}{1 + j\omega R_i C_i} \text{ avec } f_c = \frac{1}{2\pi R_i C_i}$$

Exercice 7 : exercice niveau 1

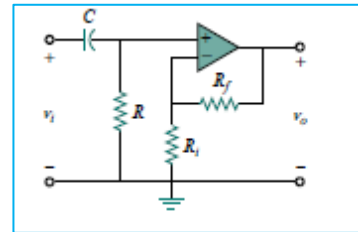
1- Trouver la fonction de transfert des circuits suivants :



a)



b)



c)

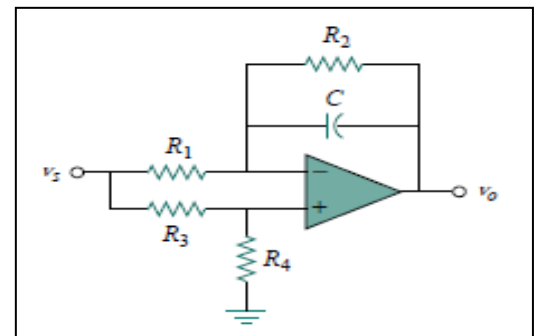
2- Pour le circuit b) la fréquence de coupure est 1kHz. Trouver la sortie si l'amplitude du signal d'entrée est 120 mV aux fréquences suivantes : a-200Hz ; b-2kHz ; c- 10 kHz

3- La structure générale d'un filtre d'ordre 1' est le suivant :

3.1 Trouver sa fonction de transfert H et montrer que

$$H(s) = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{s + (1/R_1 C)[R_1/R_2 - R_3/R_4]}{s + 1/R_2 C}$$

$$s = j\omega$$



3.2 Dans quel cas ce filtre est-il passe-bas ? ou passe-haut ?

4.3 Filtres actifs du deuxième ordre

4.3.1 Filtre passe-bande du deuxième ordre

Un filtre passe-bande actif de gain statique K peut être obtenu en mettant en cascade un filtre unitaire ($K=1$) passe-bas, un filtre passe-haut ($K=1$) et un inverseur qui introduit le gain $K = -\frac{R_f}{R_i}$ comme le montre la structure suivante :

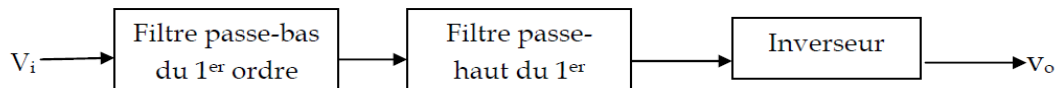


Fig.4.3 Structure des filtres actifs passe-bande

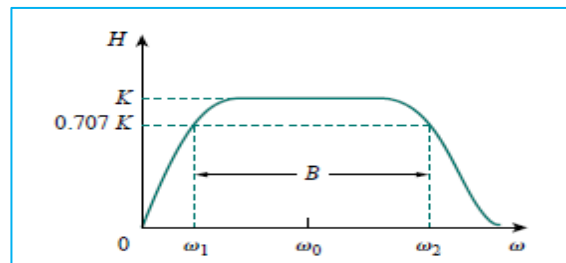


Fig.4.4 Diagramme de BODE des filtres actifs passe-bande

Le circuit suivant donne un exemple de construction d'un filtre actif passe bande. L'analyse du circuit est relativement simple car il se fait étage par étage. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \frac{V_o}{V_i} = \left(-\frac{1}{1 + j\omega C_1 R} \right) \left(-\frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R} \right) \left(-\frac{R_f}{R_i} \right) \\ &= -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 + j\omega C_1 R} \frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R} \end{aligned}$$

Etage passe-bas introduit sa fréquence de coupure $f_2 = \frac{1}{2\pi R C_1}$.

Etage passe-haut introduit sa fréquence de coupure $f_1 = \frac{1}{2\pi R C_2}$.

Avec ces deux paramètres on déduit la fréquence centrale, la bande passante, le facteur de qualité ou le coefficient de surtension :

fréquence centrale $f_c = \sqrt{f_1 * f_2}$

bande-passante : $B = f_2 - f_1$

le facteur de qualité $Q = \frac{f_c}{B}$

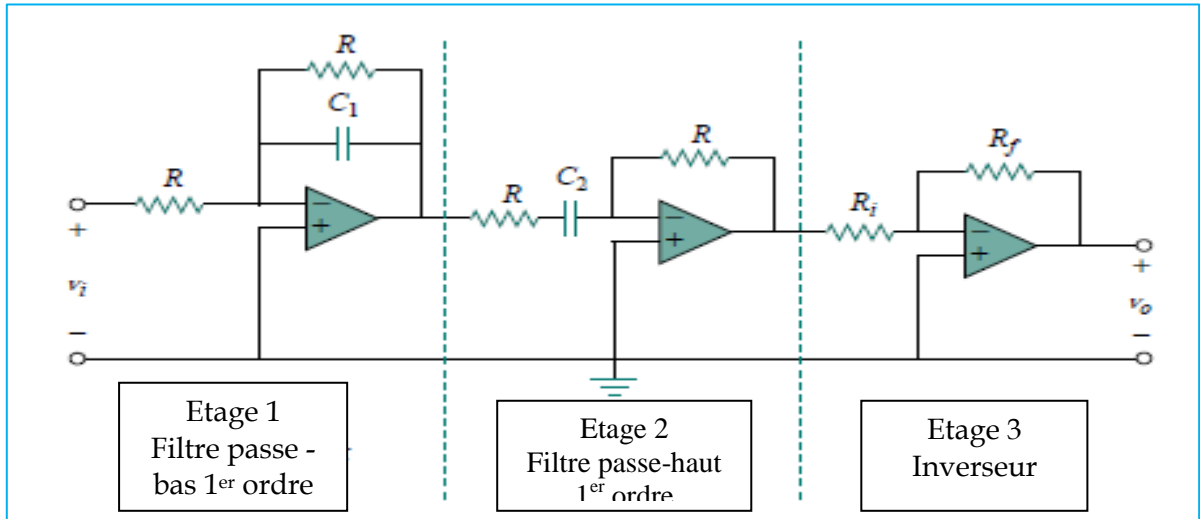


Fig.4.5 Construction d'un filtre actif passe-bande du deuxième ordre

4.3.2 Filtre coupe-bande ou réjecteur ou notch du deuxième ordre

Un filtre notch peut être construit par une combinaison parallèle d'un filtre passe-bas et un filtre passe-haut et d'un sommateur comme le montre le schéma suivant :

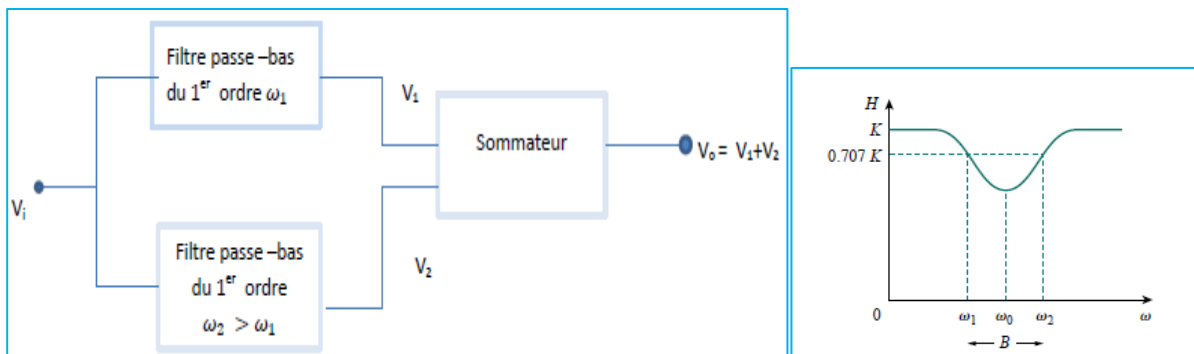


Fig.4.6 a) Structure des filtres actifs coupe-passe b) Réponse fréquentielle

Le circuit est un exemple de filtre coupe-bande construit selon le structurel ci-dessus

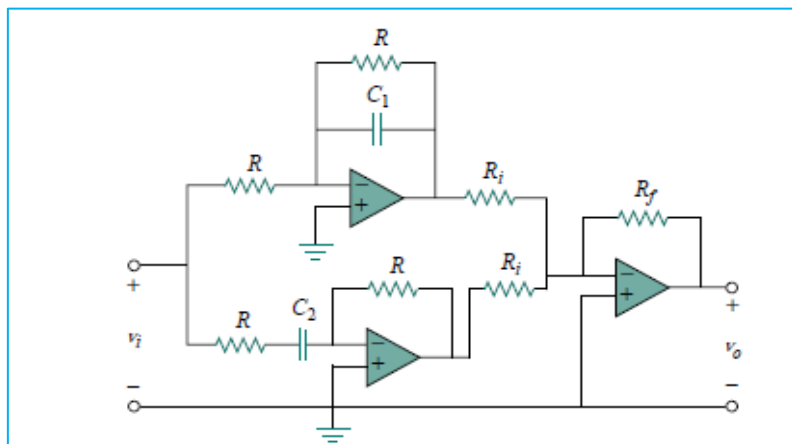


Fig.4.7 Construction d'un filtre actif coupe-bande du deuxième ordre

La fonction de transfert est la suivante :

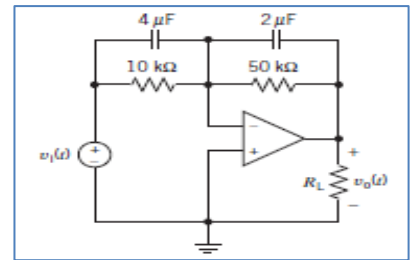
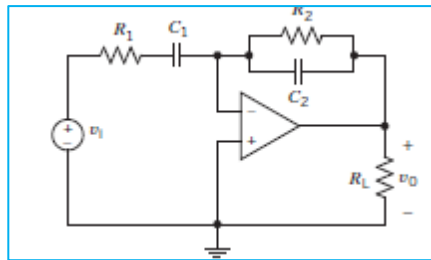
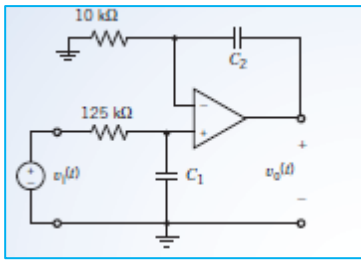
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_f}{R_i} \left(-\frac{1}{1 + j\omega C_1 R} - \frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R} \right)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{R_f}{R_i} \left(\frac{1}{1 + j\omega/\omega_2} + \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1} \right)$$

$$= \frac{R_f}{R_i} \frac{(1 + j2\omega/\omega_1 + (j\omega)^2/\omega_1\omega_1)}{(1 + j\omega/\omega_2)(1 + j\omega/\omega_1)}$$

Exercice 8 : exercice niveau 1

Trouver la fonction de transfert des circuits suivants

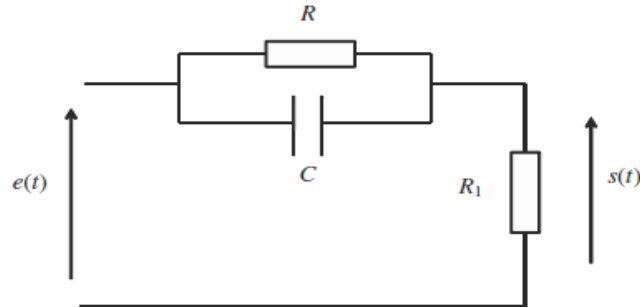


EXERCICES NIVEAU II

Exercice niveau 2 sur les filtres passifs du 1^{er} ordre

Exercice 1 Circuit correcteur par avance de phase

Soit le circuit suivant :



1. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$H = A \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}$$

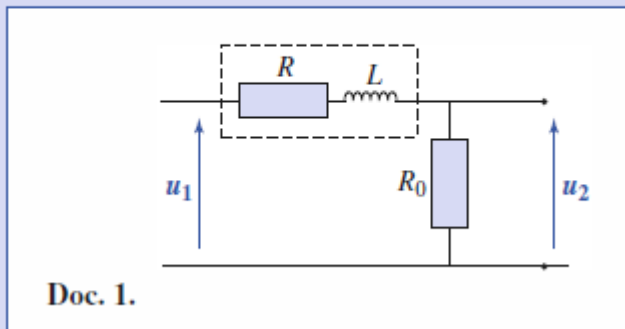
avec A , ω_0 et ω_1 des constantes à déterminer.

Pour la suite, on prendra $R_1 = \frac{R}{9}$.

2. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre en s'aidant de la fonction de transfert de deux filtres simples du premier ordre.

Exercice 2 Effet d'un filtre

1) Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_{m2}}{u_{m1}}$ du filtre représenté sur le *document 1*.



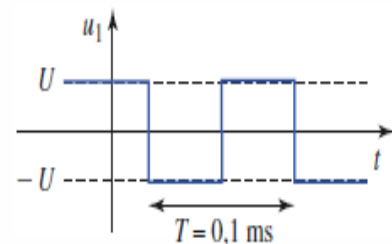
L et R représentent la résistance et l'inductance d'une bobine réelle.

Qualifier ce filtre et déterminer sa pulsation caractéristique.

2) On donne $R = R_0 = 50 \Omega$ et $L = 10 \text{ mH}$.

Donner une expression approchée de $u_2(t)$ pour :

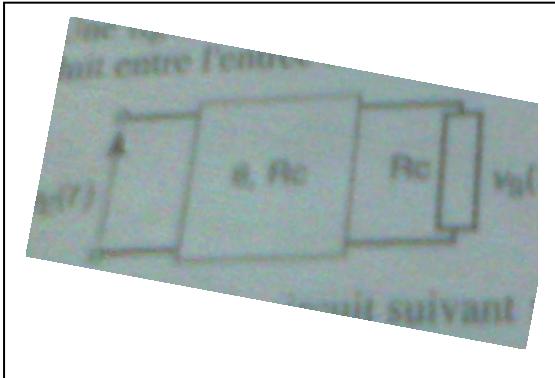
- $u_1(t) = U \cos(2\pi ft)$ avec $f = 10 \text{ kHz}$;
- $u_1(t) = U \cos(2\pi ft)$ avec $f = 100 \text{ Hz}$;
- $u_1(t)$ fonction « créneau » représentée sur le *document 2*, de période $T = 0,1 \text{ ms}$.



Doc. 2.

Exercice 4 Filtre en peigne

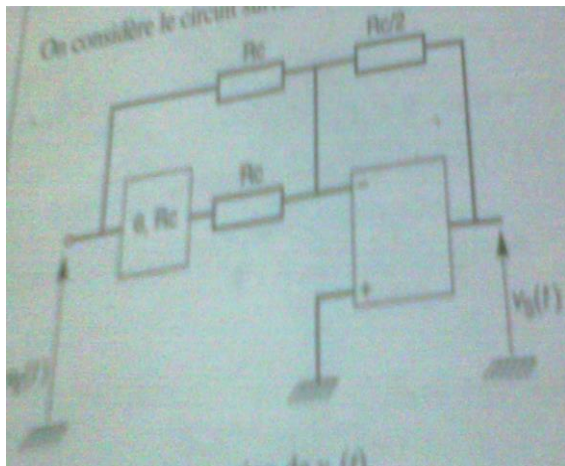
Une ligne à retard est un dispositif caractérisé par la du retard θ qu'elle introduit entre l'entrée et la sortie et sa résistance caractéristique R_c .



Lorsqu'elle est chargée par sa résistance caractéristique, elle réalise la fonction retard.

$$V_s(t) = V_e(t - \theta)$$

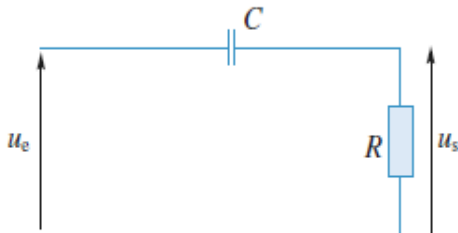
Soit le circuit suivant : l'AOP est supposé parfait



- 1) Déterminer l'expression de $V_s(t)$.
- 2) On s'intéresse au régime sinusoïdal permanent, calculer la fonction de transfert $H(j\omega)$
- 3) Calculer $|H(j\omega)|$ et $\arg[H(j\omega)]$ et les représenter graphiquement en utilisant une échelle linéaire pour f .

1) Exercice 4 Action d'un filtre passe-haut

On étudie l'action du filtre représenté ci-dessous sur différents signaux, en régime forcé.
 $R = 2 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.



- 1 • Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega)$ de ce filtre. Tracer le diagramme de Bode.
- 2 • u_e est une tension constante. Déterminer $u_s(t)$ en régime établi.

3 • $u_e(t) = U_0[1 + \cos(2\pi ft)]$. U_0 est une constante homogène à une tension et $f = 20 \text{ kHz}$.

Déterminer $u_s(t)$.

Commenter le résultat.

4 • $u_e(t) = U_0 \cos^3(2\pi ft)$ avec $2\pi f = 250 \text{ s}^{-1}$.

Sachant que :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} [\cos(3x) + 3 \cos(x)],$$

écrire l'expression de $u_s(t)$ en régime établi.

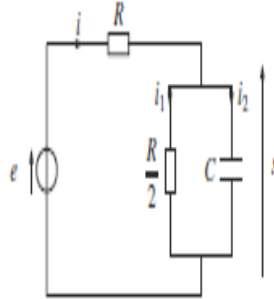
Quelle est la sortie si du bruit se superpose au signal d'entrée ?

5 • $u_e(t)$ est une fonction créneau de fréquence f telle que $2\pi f = 250 \text{ s}^{-1}$.

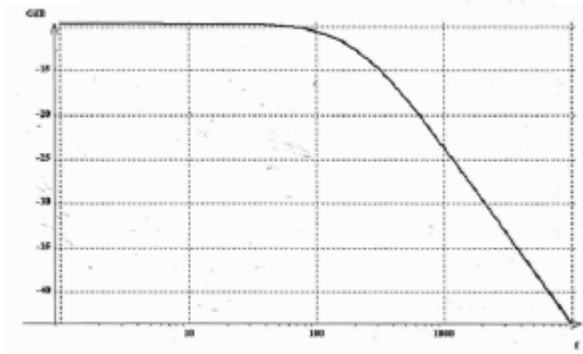
On ne cherchera que l'allure de la tension de sortie u_s .

Exercice 5

Soit le circuit suivant alimenté par une source idéale de tension $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$ où E est la tension efficace.



1. Déterminer la fonction de transfert \underline{H} et l'écrire sous la forme $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$.
2. Préciser le gain H et le déphasage φ introduit par ce filtre.
3. Etablir l'expression littérale de la fréquence de coupure f_c en fonction de R et C .
4. Le diagramme de Bode en gain a été tracé en échelle semi-log.

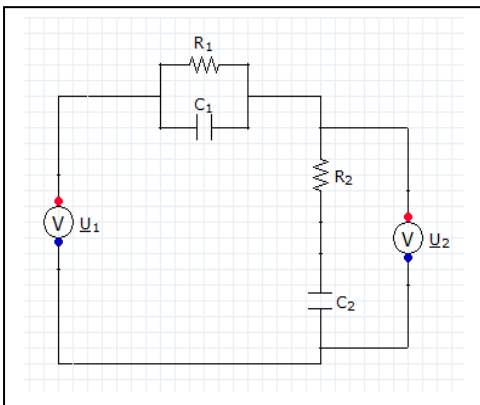


Déterminer la valeur de fréquence de coupure f_c en détaillant la réponse.

5. En déduire la valeur de la capacité C sachant que $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.

Exercice niveau 2 sur les filtres passifs du 2^e ordre

Exercice 6 Filtre coupe-bande



1. Déterminer la fonction de transfert de ce filtre, que l'on mettra sous forme

$$H(j\omega) = \frac{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_3})(1 + j\frac{\omega}{\omega_4})}$$

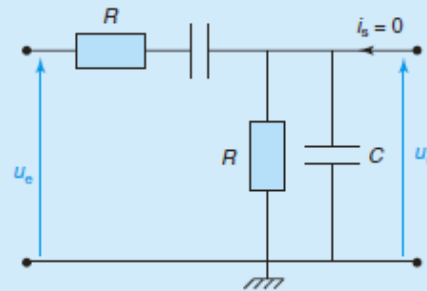
2. Effectuer une étude qualitative de ce filtre. On prendra $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 15 \text{ nF}$. Tracer le diagramme de BODE.

3. Réaliser une simulation avec OrCad

Exercice 7 Filtre passe-bande de WIEN

On considère le filtre de la figure ci-contre.

Données : $C = 0,10 \mu\text{F}$ et $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.



1 Déterminer les comportements asymptotiques à basse et à haute fréquences. En déduire la nature du filtre.

2 Soit x la pulsation réduite définie par la relation $RC\omega = x$. Exprimer la fonction de transfert sous la forme réduite $\underline{H}(jx)$.

3 Calculer la valeur du facteur de qualité Q .

4 Montrer que la fonction de transfert se met sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

En déduire le gain maximal G_{max} .

5 Calculer la fréquence caractéristique f_0 du filtre.

6 Déterminer la pulsation réduite x_1 de la borne inférieure et la pulsation réduite x_2 de la borne supérieure de la bande passante. En déduire les fréquences f_1 de f_2 correspondantes, puis la bande passante Δf . Vérifier sa valeur à partir de son expression en fonction de Q .

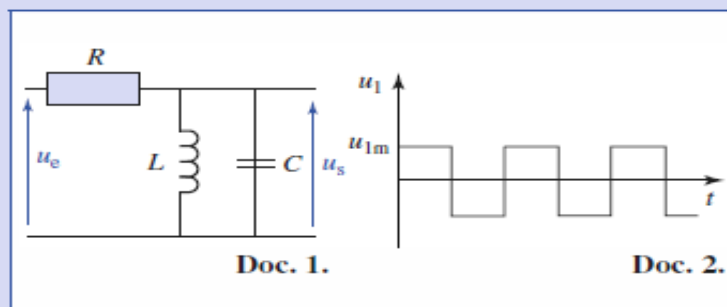
7 Exprimer la phase $\varphi(x)$ de la fonction de transfert. Déterminer les phases $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$.

8 Tracer le diagramme de Bode.

Exercice 8



1) En supposant la bobine idéale, déterminer la fonction de transfert en sortie ouverte du filtre représenté sur le doc. 1. De quel type de filtre s'agit-il ? Identifier ses grandeurs caractéristiques.



2) $R = 1 \text{ k}\Omega$; $L = 5 \text{ mH}$; $C = 1 \mu\text{F}$.

$u_e(t)$ est un signal créneau de fréquence f représenté sur le doc. 2.

Déterminer une bonne approximation de la forme de $u_s(t)$ pour $f = 2,55 \text{ kHz}$ et pour $f = 25 \text{ kHz}$.

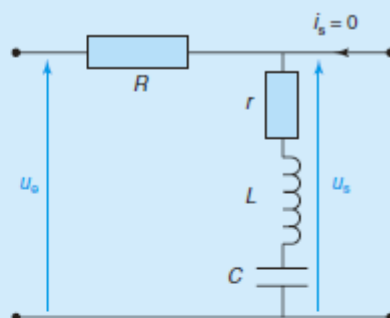
Exercice 9

On considère le quadripôle ci-contre qui comprend un résistor de résistance R , un condensateur de capacité C et une bobine réelle d'inductance L et de résistance r .

Données : $C = 10 \mu\text{F}$; $L = 0,10 \text{ H}$;

$r = 100 \Omega$; $R = 100 \Omega$.

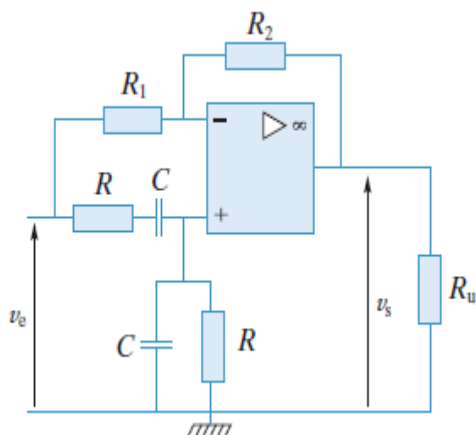
On pose : $R' = R + r$.



- 1 Calculer la pulsation propre ω_0 du circuit $R'LC$, la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q .
- 2 Déterminer les comportements asymptotiques à basse et à haute fréquences. Peut-on en déduire la nature du quadripôle ?
- 3 Quelle est la valeur de l'impédance du dipôle LC à la fréquence propre ? En déduire le quadripôle équivalent au filtre à cette fréquence.
- 4 Calculer le gain du filtre à la fréquence propre.
- 5 Soit x la pulsation réduite avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Exprimer la fonction de transfert sous la forme réduite $\underline{H}(jx)$.
- 6 Exprimer le gain $G(x)$ en décibels.
- 7 Tracer l'allure de la courbe de la réponse $G(x)$ en fonction de $\log(x)$.

Exercice niveau 2 sur les filtres actifs

Exercice 10 Filtre réjecteur de fréquence



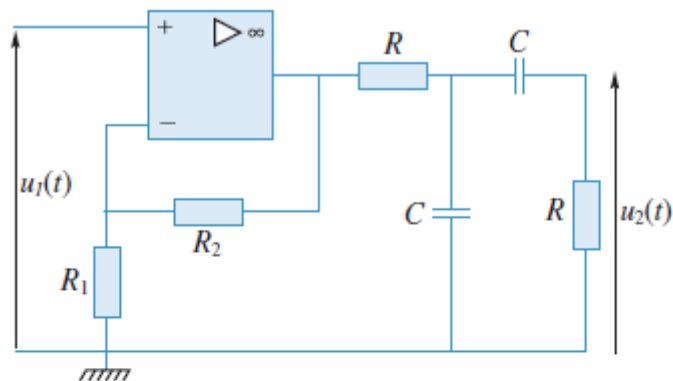
On considère le filtre page suivante, où $R_1 = 2R_2$ et où l'amplificateur opérationnel est considéré comme parfait ; il fonctionne, de plus, en régime linéaire.

Calculer la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} \text{ du montage.}$$

Donner l'allure de $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de ω en échelles logarithmiques.

Exercice 11 Etude d'un filtre passe-bande



- 1 • Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_2}{u_1}$ du montage et la mettre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{jKx}{1 + 2jKx + (jx)^2}$$

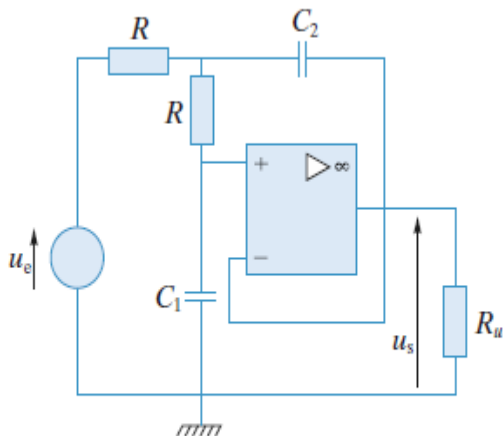
avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

- 2 • Tracer le diagramme de Bode du filtre en fonction de $\log x$.

3. Pour quelles valeurs de la pulsation a-t-on $\arg(\underline{H}(j\omega)) = +\pi/4$?

Exercice 12 Filtre de BUTTERWORTH

On considère le montage ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel utilisé est supposé parfait.



- 1 • Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ du montage.

- 2 • Comment choisir C_2 pour que $\underline{H}(j\omega)$ ait un module égal à $|\underline{H}(j\omega)| = \left(1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$?

Quelle est alors la valeur de ω_0 en fonction de R et C_1 ?
Quelle est la pulsation de coupure ω_c du montage ?

