MATHEMATIQUES DU SIGNAL

ESATIC UP MATHS

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Vect(A)	Le sous-espace vectoriel engendré par A
e.v.n	Espace vectoriel normée
i.e	C'est-à-dire.
s.e.v	Sous-espace vectoriel
PP	presque partout
Ω	ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire dans un espace $\mathbb{R}^n$
$\forall$	Symbole universel "pour tout"
$\exists$	Symbole universel "il existe"

Introduction

Le mot signal vient du latin signum : signe ; variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.
Un signal est donc la représentation physique de l'information. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique, etc.
Le mot signal est pratiquement toujours associé au mot bruit. Ce dernier est utilisé dans le langage commun, mais il revêt, dans la théorie du signal, un sens bien particulier.

Le mot Bruit vient du latin populaire brugere : braire et rugire : rugir ; perturbation indésirable qui se superpose au signal et aux données utiles, dans un canal de transmission ou dans un système de traitement de l'information.
Le bruit (noise en anglais) dépendra très fortement du contexte. Par exemple :

— pour un opérateur sonar, le signal utile est émis par les navires et les sous-marins, alors que les poissons et les crustacés émettent des signaux qui sont des perturbations pour le signal utile, donc des bruits,
— réciproquement, pour l'opérateur sonar d'un bâtiment de pêche, le signal utile est celui émis par les bancs de poissons, les autres signaux sont donc des perturbations et constituent donc du bruit.

Ainsi, il apparaît évident qu'un problème fondamental en traitement du signal sera d'extraire le signal utile du bruit. La difficulté du problème dépend en particulier de la proportion entre signal et bruit. Ceci est mesure par le rapport signal à bruit (RSB, ou SNR en anglais pour signal noise ratio).

Le traitement du signal est un domaine très rependu. Maitriser les outils mathématiques pour le traitement du signal, c'est maitrisé une bonne partie du traitement de signal. Dans ce cours, nous donnons les outils mathématiques couramment utilisées. Il s'agit de : l'analyse de Fourier, l'analyse fonctionnelle, les distributions et l'analyse complexe.

On étudie un signal de deux points de vue :

— le point de vue temporel (ou spatial) : étude du signal dans le temps, tel qu'il est

enregistré ou dans l'espace physique (pour une image par exemple);
— le point de vue fréquentiel : on extrait du signal des informations cachées mais qui sont caractéristiques de chaque signal. Les outils mathématiques sont essentiellement la transformation de Fourier et la transformation de Laplace (et leurs analogues "discrets", la transformation de Fourier discrète (ou TFD) et la transformation en Z.

Chapitre 1

Rappels

- Si la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est une intégrale définie et c'est un nombre si a, b et f sont spécifiés.
- Pour $x \in [a, b]$, $\int_a^x f(t)dt$ est une fonction de x. C'est la primitive de f qui s'annule pour $x = a$.
- Si l'intervalle est non borné ou si f n'est pas bornée, on dit que l'intégrale est impropre (ou généralisée).
  — $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente si $\lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(x)dx$ existe et a une valeur finie.
  — Si f n'est pas définie en b, $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si $\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ existe et a une valeur finie.

  Sinon, ces intégrales divergent.
- **Critères de Riemann**
  — $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, diverge sinon.
  — $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ converge si et seulement si a < 1, diverge sinon.
- Si, $\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq g(x) \leq f(x)$, alors $0 \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.
- Une intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite **absolument convergente** si $\int_a^b |f(x)|dx$ a une valeur finie. Cela implique qu'elle est convergente car $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. On dit alors que la fonction f est **sommable** sur $[a, b]$.
- **Critères de comparaison**
  — Pour $n > 0$, $\frac{e^X}{X^n} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $n > 0$, $\frac{\ln(X)}{X^n} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\varepsilon^n \ln(\varepsilon)^n \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.
  — f et g sont équivalentes au voisinage de a, si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, on note $f \underset{a}{\sim} g$.

— f et g sont continues sur $]a, b]$ et si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

— si f et g sont continues sur $[a, +\infty[$ et si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature.

- **Intégrales doubles**

— **Changements de variables** :
si $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, on a :

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_\Delta f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|dudv$$

où Δ est l'image du domaine D, J est la matrice jacobienne : $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$
et $|J(u, v)|$ son déterminant, appelé Jacobien.

1.0.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.0.1 (Théorème de Fubini)**.** *Soient $I = [\alpha, \beta]$ et $J = [a, b]$ deux intervalles fermés bornés. Soit f une fonction continue sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par*

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\ dt$$

est intégrable sur I et

$$\int_\alpha^\beta F(x)\ dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, t)\ dt\right)\ dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\ dx\right)\ dt\ .$$

Remarque 1.0.1. *On retient que l'on peut intervertir l'ordre d'intégration :*

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b = \int_a^b \int_\alpha^\beta$$

Géométriquement, on se souvient que calculer une intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ revient à déterminer l'aire sous le graphe, comme somme de segments de hauteur $f(t)$. Ces segments sont en fait des rectangles de largeur infinitésimale dt.

Ici, pour nos fonctions de deux variables, on calcule d'abord l'aire d'une tranche parallèle à l'axe des t (en vert sur la figure), puis on fait la somme (c'est-à-dire on effectue une seconde intégration) des aires de toutes les tranches (qui ont en fait une épaisseur infinitésimale). On pourrait faire la même opération en commençant par les tranches parallèles à l'axe des x (en rouge sur la figure). Le théorème de Fubini affirme que ces deux méthodes conduisent à la même valeur. Ce nombre correspond au volume sous la portion de surface.

Exemple 1.0.1. *Calculons :*

$$I = \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 (t \sin x + 2x)\, dt \right)\, dx$$

Première méthode. *On intègre d'abord par rapport à t, puis à x :*

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{t=0}^{t=1} (t \sin x + 2x)\, dt \right)\, dx = \int_{x=0}^{x=\pi} \left[\frac{t^2}{2} \sin x + 2xt \right]_{t=0}^{t=1} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\frac{\sin x}{2} + 2x \right) dx = \left[\frac{-\cos x}{2} + x^2 \right]_{x=0}^{x=\pi} = \pi^2 + 1 \end{aligned}$$

Seconde méthode. *On utilise le théorème de Fubini qui affirme que l'on peut d'abord intégrer par rapport à x, puis par rapport à t :*

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{t=0}^{t=1} (t \sin x + 2x)\ dt \right)\ dx = \int_{t=0}^{t=1} \left(\int_{x=0}^{x=\pi} (t \sin x + 2x)\ dx \right)\ dt \qquad \textit{par Fubini} \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \left[-t \cos x + x^2 \right]_{x=0}^{x=\pi} dt = \int_{t=0}^{t=1} (2t + \pi^2)\ dt = \left[t^2 + \pi^2 t \right]_{t=0}^{t=1} = \pi^2 + 1 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Signaux, fonctions et opérateurs de base

Ce chapitre présente la description mathématique de signaux élémentaires, souvent idéaux (en ce sens qu'il ne sont pas réalisables physiquement) mais très pratiques pour la description de modèles mathématiques. Tous ces modèles seront utilisés dans la suite de ce cours.

2.1 Signaux usuels

2.1.1 Fonction signe

Définition 2.1.1 (Fonction Signe)**.** *La fonction signe, notée sgn est une fonction réelle de la variable réelle définie par :*

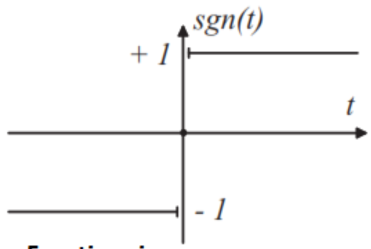
$$sgn(t) = \begin{cases} +1, & si \quad t > 0, \\ -1, & si \quad t < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Par convention, on définit :

$$sgn(0) = c_0, \quad avec \quad -1 \leq c_0 \leq +1. \tag{2.2}$$

Usuellement, on prend $sgn(0) = 0$ (figure). Avec cette convention, la fonction sgn est une fonction impaire :

$$sgn(t) = -sgn(-t), \forall t. \tag{2.3}$$



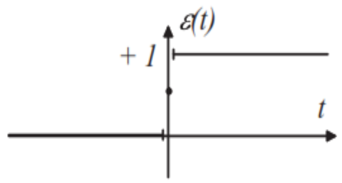
Fonction signe

2.1.2 Fonction échelon unité

Définition 2.1.2 (Fonction échelon unité)**.** *La fonction échelon unité, ou simplement échelon ou fonction de Heaviside, notée , est une fonction réelle de la variable réelle définie par :*

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} +1, & si \quad t > 0, \\ 0, & si \quad t < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

avec, par convention, $\varepsilon(0) = 1/2$*.*
Cette fonction est illustrée à la figure



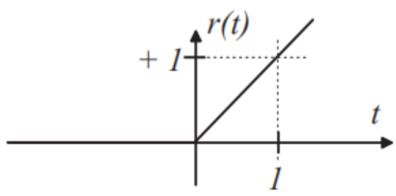
On montre facilement les relations :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) &= \frac{1}{2}sign(t) + \frac{1}{2}, \\ sign(t) &= 2\varepsilon(t) - 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

2.1.3 Fonction rampe

Définition 2.1.3 (Fonction rampe)**.** *La fonction rampe, notée* r*, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :*

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(u)du. \tag{2.6}$$



Fonction rampe, $r(t)$

2.1.4 Fonction rectangle ou porte

Définition 2.1.4 (Fonction rectangle unité)**.** *La fonction rectangle, ou fonction porte, de largeur 1, notée rect, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :*

$$rect(t) = \varepsilon(t + 1/2) - \varepsilon(t - 1/2). \tag{2.7}$$

On remarque que l'aire de la fonction rectangle de largeur unité vaut 1.

Définition 2.1.5 (Fonction rectangle de largeur T)**.** *La fonction rectangle, ou fonction porte, de largeur T , notée $rect_T$, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :*

$$rect_T(t) = rect(t/T) = \varepsilon(t/T + 1/2) - \varepsilon(t/T - 1/2) = \varepsilon(t + T/2) - \varepsilon(t - T/2). \quad (2.8)$$

Remarque 2.1.1. — *Notons que l'aire de la fonction rectangle de largeur T vaut T.*
— *On peut appliquer les opérateurs de translation et d'homotéthie à cette fonction :*
  — *la fonction $tri(t - \tau)$ est une fonction triangle unité translatée de $+\tau$,*
  — *la fonction $tri[(t - \tau)/T]$ est une fonction triangle de largeur $2T$ (ou d'aire égale à T) translatée de $+\tau$.*

Ces deux fonctions sont illustrées à la figure 2.3. Pour simplifier la représentation, on représentera fréquemment ces fonctions sans tenir compte des discontinuités en $\pm 1/2$ ou $\pm T/2$ (figure 2.4).

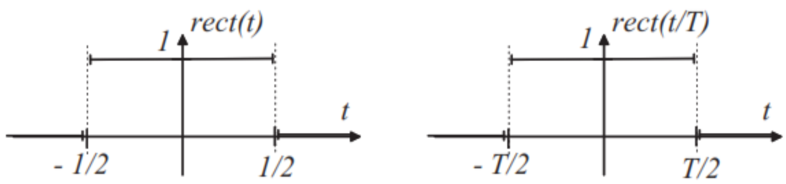


FIG. 2.3 – Fonctions rectangle, de largeur unité (à gauche) et de largeur T (à droite)

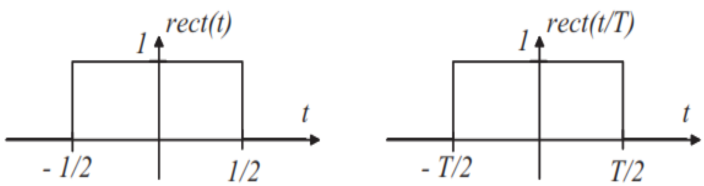


FIG. 2.4 – Représentations simplifiées des fonctions rectangle de largeur unité et de largeur T

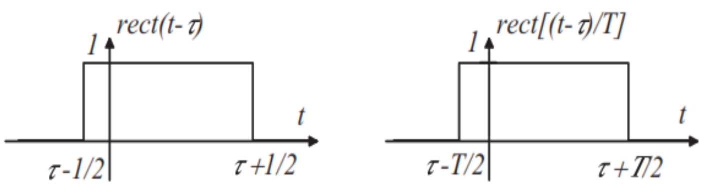


FIG. 2.5 – Fonctions rectangle de largeur unité et de largeur T, translatées de τ

La fonction rectangle est très utile pour exprimer mathématiquement une portion d'un signal de largeur T. Par exemple, on veut exprimer la portion du signal $x(t)$ dans l'intervalle $t \in [t_1, t_2]$ (Figure 2.6). La fonction rectangle sur cet intervalle a pour largeur $T = t_2 - t_1$

et est translatée de $t = (t_1 + t_2)/2$. On peut donc l'écrire :

$$rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right) = rect\left(\frac{t-(t_1+t_2)/2}{t_2-t_1}\right) \tag{2.9}$$

Considérons maintenant le produit :

$$\widetilde{x}(t) = x(t)rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \tag{2.10}$$

Par définition de la fonction $rect$, cette fonction est égale à $x(t)$ sur l'intervalle $t \in [t_1, t_2]$ et nulle en dehors. La fonction rectangle, utilisée dans le domaine fréquentiel, permettra aussi de définir des filtres idéaux, passe-bas, passe-haut ou passe-bande.

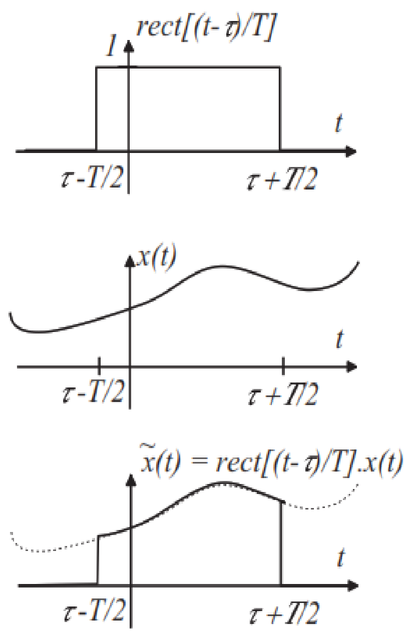


FIG. 2.6 – Utilisation de la fonction rectangle pour prélever un morceau de signal

2.1.5 Fonction triangle

Définition 2.1.6 (Fonction triangle)**.** *La fonction triangle unité, notée tri, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :*

$$tri(t) = \begin{cases} 1-|t| & si \quad |t| \leq 1, \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{2.11}$$

Remarque 2.1.2.
- *Notons que l'aire de la fonction triangle unité vaut 1 et que la largeur de son support vaut 2.*
- *On peut appliquer les opérateurs de translation et d'homotéthie à cette fonction :*

— *la fonction* $tri(t-\tau)$ *est une fonction triangle unité translatée de* $+\tau$,
— *la fonction* $tri[(t-\tau)/T]$ *est une fonction triangle de largeur* $2T$ *(ou d'aire égale à* T *) translatée de* $+\tau$.

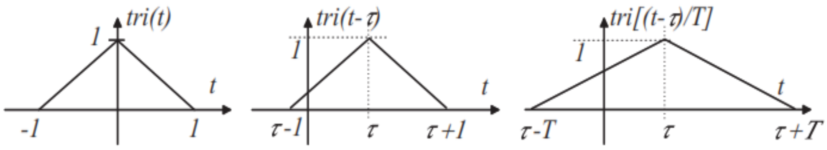


FIG. 2.7 – Fonctions triangle unité (à gauche), triangle unité translatée de τ (au milieu) et triangle d'aire $2T$ translatée de τ (à droite)

2.2 Impulsion de Dirac

La notion de distribution est un complément mathématique indispensable de la notion de fonction, notament pour décrire des événements infiniment brefs mais de puissance finie non nulle ou le phénomène d'échantillonnage.

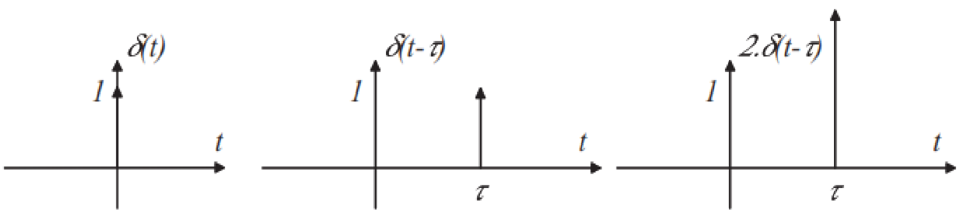


FIG. 2.8 – Distributions de Dirac : unité (à gauche), translatée de τ (au milieu), translatée de τ et d'amplitude 2 (à droite)

2.2.1 Distribution de Dirac

Définition 2.2.1 (Impulsion de Dirac)**.** *La* ***distribution*** *ou* ***impulsion de Dirac****, notée* $\delta(t)$*, vérifie :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta(t) & = & 0, \quad si \quad t \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)du & = & 1. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

On peut voir la distribution de Dirac comme la limite de fonctions, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta(t) & = & \lim\limits_{T\to 0} \frac{1}{T} tri(t/T) \\ \delta(t) & = & \lim\limits_{T\to 0} \frac{1}{T} rect(t/T) \\ \delta(t) & = & \lim\limits_{T\to 0} \frac{1}{T} sinc(t/T) 2.19 = \lim\limits_{T\to 0} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Remarque 2.2.1. *L'étude de l'impulsion de Dirac est issue de la théorie des distributions, (voir chapitre suivant). Il serait plus rigoureux de dire que δ n'existe qu'au sens des distributions et n'est pas une fonction puisque cet élément est infini en 0 et nul ailleurs.*

2.2.2 Propriétés et règles opératoires

A) Représentation

La distribution de Dirac, $\delta(t)$, se représente par une flèche verticale d'amplitude 1 localisée en $t = 0$ (figure 2.8, à gauche). Sa version translatée de τ, notée $\delta(t - \tau)$, est représentée à la figure 2.8, au milieu.

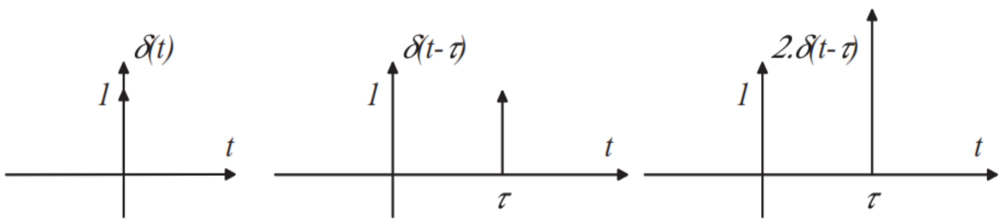


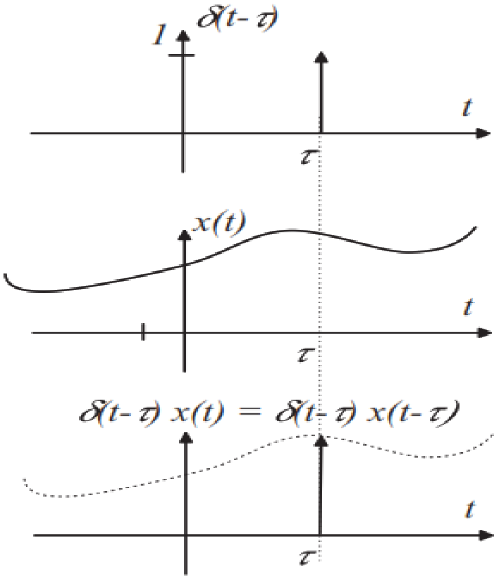
FIG. 2.8 – Distributions de Dirac : unité (à gauche), translatée de τ (au milieu), translatée de τ et d'amplitude 2 (à droite)

B) Produit d'une fonction par un Dirac

Le produit d'un fonction $x(t)$ par une distribution de Dirac $\delta(t - t_0)$ s'écrit :

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0), \tag{2.14}$$

car la distribution $\delta(t - t_0)$ est nulle partout sauf en $t = t_0$. Le produit d'une fonction $x(t)$ par la distribution de Dirac $\delta(t - t_0)$ permet donc de prélever une valeur (échantillon) de la fonction $x(t)$, plus précisément la valeur $x(t_0)$ en $t = t_0$.



C) Calcul de l'intégrale d'un produit avec un Dirac

En appliquant la règle du produit par une distribution de Dirac, on peut calculer facilement l'intégrale d'un produit d'une fonction par un Dirac :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt$$

Le produit par une distribution de Dirac permet de réaliser une opération élémentaire d'échantillonnage

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)dt &= x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt \\ &= x(t_0).\end{aligned}$$

D) Peigne de Dirac

Pour échantillonner un signal avec une période d'échantillonnage régulière T, il est pratique de définir une suite d'impulsions de Dirac, périodique et de période T. Cette distribution, appelée **peigne de Dirac** et notée $\delta_T(t)$, est définie (figure 2.10) par :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \tag{2.15}$$

Pour échantillonner une fonction $x(t)$, c'est-à-dire préléver des échantillons infiniment brefs, avec une période T, il suffit donc d'effectuer le produit de $x(t)$ par un peigne de

Dirac :

$$x_e(t) = x(t)\delta_T(t) \quad (2.16)$$

$$= x(t)\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\Big) \quad (2.17)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-kT) \quad (2.18)$$

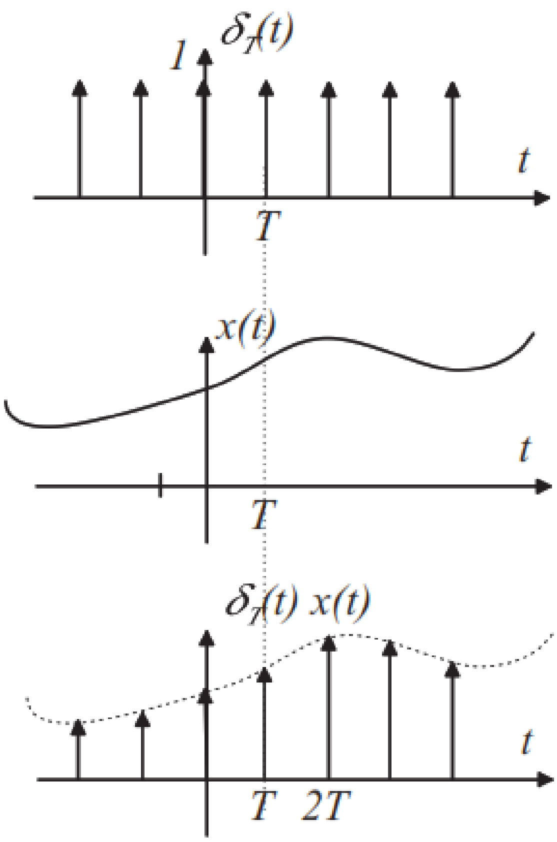


FIG. 2.10 - Peigne de Dirac de période T (en haut). Cette distribution permet d'effectuer l'échantillonnage régulier (en bas) d'un signal $x(t)$ (au milieu) par simple produit $\delta(t)x(t)$.

E) Périodisation d'un signal

A partir d'un morceau de taille finie $x(t)$, on introduit aussi un opérateur de répétition, $rep_T\{x(t)\}$, qui permet de périodiser un signal avec une rériode de répétition T :

$$rep_T x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$

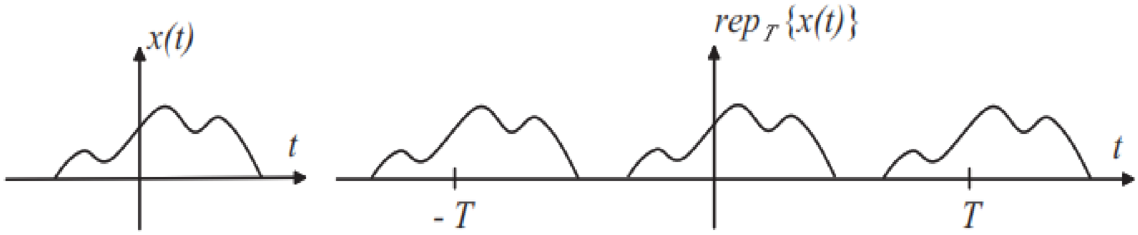


FIG. 2.11 – Périodisation d'un signal avec l'opérateur $\text{rep}_T(t)$

F) Fonction sinus cardinal

Cette fonction est très courante en traitement du signal où elle intervient comme transformée de Fourier d'une fonction rectangle. Une fonction rectangle permet de représenter par exemple des opérateurs idéaux de filtrage. La fonction **sinus cardinal**, notée $sinc(u)$, est définie :

$$sinc(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}. \tag{2.19}$$

Sa représentation est donnée à la figure 2.12.

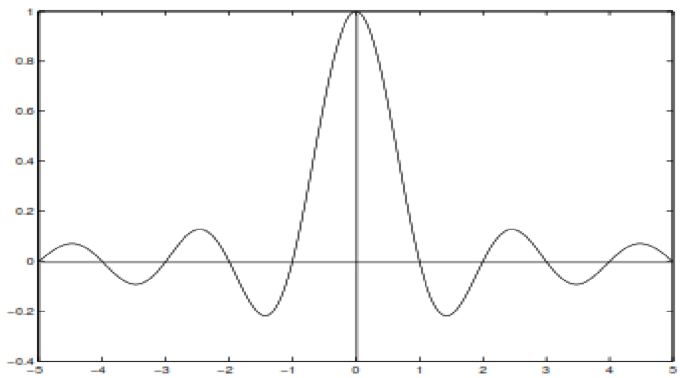


FIG. 2.12 – Représentation graphique de la fonction $\text{sinc}(u)$

On montre facilement les propriétés suivantes :

— la fonction sinus cardinal est paire : sinc(u) = sinc(-u),

— $sinc(u) \to 1$ lorsque $u \to 0$,

— $sinc(u) = 0$ si $\sin(\pi u) = 0$, c'est-à-dire si $u = k \in \mathbb{Z}^*$.

Par ailleurs, on montre également1 que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(u)du = 1, \quad et \quad \int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(u)du = 1.$$

2.3 Produit de convolution

L'opérateur de convolution est aussi très courant. Il est associé à l'opération de filtrage d'un signal $x(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ (figure 2.13). La sortie du filtre, $y(t)$, vaut alors $y(t) = x(t) * h(t)$.

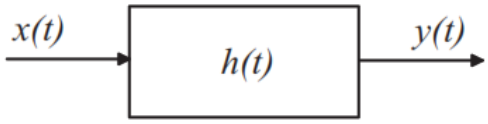


FIG. 2.13 – Filtrage d'un signal $x(t)$

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1 (Produit de convolution). *Le produit de convolution entre deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$, noté par le symbole $*$, est défini par les intégrales :*

$$
\begin{aligned}
(x * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du & (2.20)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)h(v)dv & (2.21)\\
&= (h * x)(t). & (2.22)
\end{aligned}
$$

On retiendra que le produit de convolution est commutatif. Souvent, en traitement du signal, on note de façon pratique la convolution de deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$ sous la forme :

$$(x * h)(t) = x(t) * h(t). \tag{2.23}$$

On utilisera cette notation par la suite, malgré qu'elle soit parfois ambiguë comme on le verra plus loin.

Si $x(t)$ est la distribution de Dirac $\delta(t)$, on a simplement :

$$y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t). \tag{2.24}$$

On remarque que $h(t)$ est la réponse du filtre excité par une impulsion de Dirac, d'où le nom de réponse impulsionnelle du filtre donné à $h(t)$.

2.3.2 La convolution en BD

A partir de la définition, on peut représenter l'opération de convolution de deux signaux de façon graphique simple, comme l'illustre la figure 2.14. En effet, l'équation :

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du, \tag{2.25}$$

requiert la fonction $x(u)$, la fonction $h(t-u)$, et l'intégration du produit de ces deux fonctions sur $\mathbb{R}$ pour chaque valeur de t. Ainsi, $h(u)$ est la mémoire du système : le signal $x(u)$ est pondéré aux différents instants par $h(t-u)$. Dans la figure 2.14, la forme de $h(t)$ est exponentielle. Un filtre $h(u)$ à réponse impulsionnelle rectangulaire, de la forme $h(u) = rect(u-1/2)$ aurait donné une pondération uniforme sur une fenêtre de durée 1.

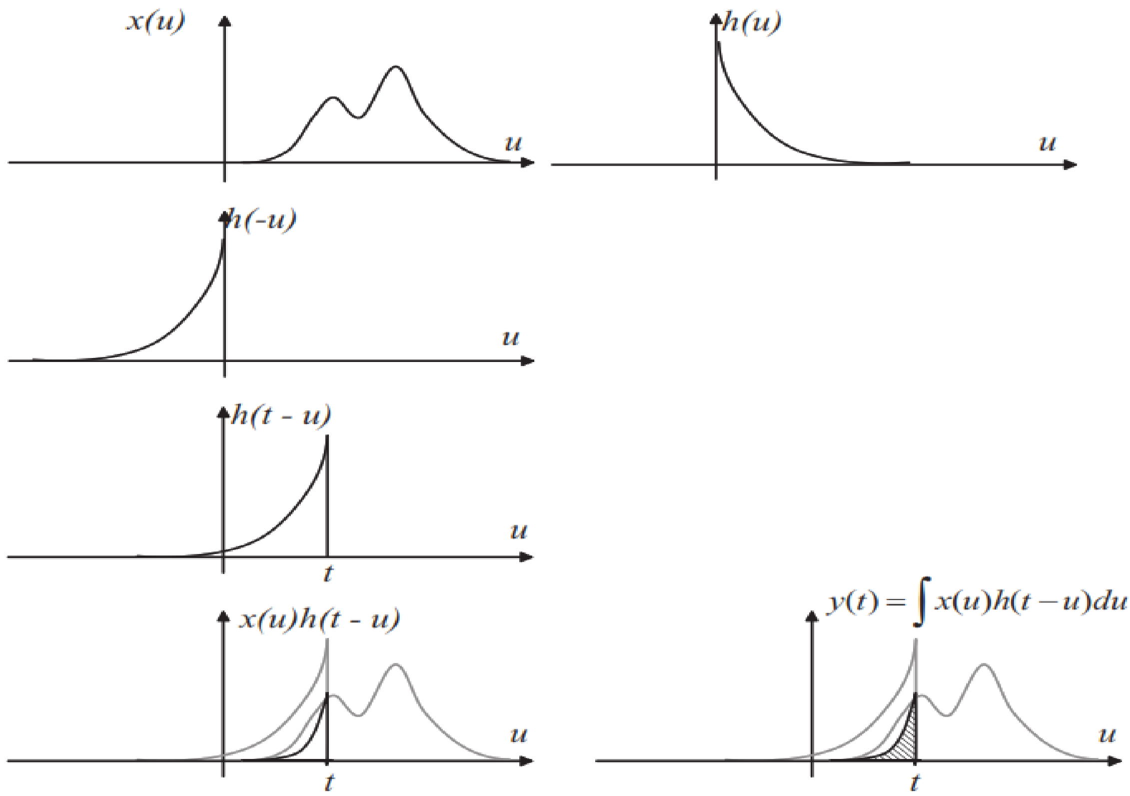


FIG. 2.14 – Convolution en BD

2.3.3 Propriétés

A partir de la définition du produit de convolution, on montre facilement que le produit de convolution est

— commutatif : $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$,

— associatif : $x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t)$,

— distributif par rapport à l'addition : $x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$.

Ces démonstrations sont laissées au lecteur à titre d'exercice.

Chapitre 3

Introduction à la théorie des distributions

• Une fonction est dans l'ensemble D des **fonctions test** si et seulement si : elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est nulle hors d'un segment (intervalle fermé et borné).
• Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions test converge dans D vers $\varphi \in D$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si :
Il existe un segment K en dehors duquel toutes les fonctions φ_n ainsi que φ sont nulles.
φ_n converge uniformément vers φ sur K , et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n^{(p)}$ converge uniformément vers $\varphi^{(p)}$ sur K.
Nous noterons $\lim\limits_{n\to+\infty} {}^D\varphi_n = \varphi$ ou $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{D}{\longrightarrow}} \varphi$
• Une distribution T est une forme linéaire continue sur D, c'est-à-dire une application de D dans $\mathbb{R}$ qui est : linéaire : $\forall\varphi,\psi \in D$, $\forall\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $T(\lambda\varphi+\mu\psi) = \lambda T(\varphi)+\mu T(\psi)$.
continue : si $\lim\limits_{n\to+\infty} {}^D\varphi_n = \varphi$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$.
Au lieu de $T(\varphi)$, on utilise souvent les notations $< T,\varphi >$, ou $< T(t),\varphi(t) >$ lorsque le besoin de faire référence à une variable réelle t se fait sentir.
• Opérations sur les distributions :
somme : $< T_1+T_2,\varphi > = < T_1,\varphi > + < T_2,\varphi >$.
produit par $\lambda \in \mathbb{R}$: $< \lambda T,\varphi > = \lambda < T,\varphi >$.
produit par une fonction g de classe C^∞ : $< gT,\varphi > = < T,g\varphi >$.
translation : $< T(t-t_0),\varphi(t) > = < T(t),\varphi(t+t_0) >$.

changement d'échelle : $< T(at),\varphi(t) > = < T(t),\frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{t}{a}\right) >$, où $a \neq 0$.
• Une fonction intégrable sur tout segment est dite localement sommable.
• Si f est une fonction localement sommable, la distribution régulière associée à f est la distribution $[f]$ définie par

$$\varphi \in D, \qquad < [f],\varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt.$$

- Une distribution qui n'est pas régulière est dite singulière. Exemples courants : distributions de Dirac : $<\delta,\varphi>=\varphi(0)$, $<\delta_a,\varphi>=\varphi(a)$. On note aussi da par $\delta(t-a)$. pseudo-fonction

$$\frac{1}{t} :< Pf\frac{1}{t},\varphi(t)>=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\Big).$$

- Si g est de classe C^∞,

$$g(t)\delta_a = g(a)\delta_a$$

  - Définition de la dérivée T' d'une distribution T :

$$\forall\varphi\in D, < T',\varphi>= -<T,\varphi'>$$

  - Dérivées d'ordre supérieur :

$$\forall n\in\mathbb{N}*,\forall\varphi\in D,\quad < T^{(n)},\varphi>=(-1)^n < T,\varphi^{(n)}>$$

  En particulier, pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a

$$\forall n\in\mathbb{N}*,\forall\varphi\in D,\quad <\delta_a^{(n)},\varphi>=(-1)^n\varphi^{(n)}(a).$$

- Dérivation d'une distribution régulière $[f]$, lorsque f et f' sont localement sommables :

$$[f]'=[f']+\sum_a (f(a^+)-f(a^-))\delta_a$$

  - Dérivation du produit d'une distribution T par une fonction g de classe C^∞ :

$$(gT)'=g'T+gT'$$

- Convergence des distributions :

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} T_\lambda = T \qquad\Leftrightarrow\qquad \forall\varphi\in D,\ \lim_{\lambda\to\lambda_0} < T_\lambda,\varphi>=< T,\varphi>$$

  - Convergence des dérivées :

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} T_\lambda = T \qquad\Rightarrow\qquad \lim_{\lambda\to\lambda_0} T'_\lambda = T'$$

  - Produit de convolution de deux distributions S et T :

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in D,\ < S*T,\varphi> &= < S(u),< T(v),\varphi(u+v)>>\\ &= < T(u),< S(v),\varphi(u+v)>>=< T*S,\varphi>\end{aligned}$$

(lorsque ces quantités ont un sens).

- Convolution avec des distributions de Dirac :

Élément neutre : $\delta * T = T * \delta = T$.
Translation : $\delta_a * T = \delta(t-a) * T(t) = T(t-a)$.
En particulier $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

- Dérivation d'un produit de convolution :

$$(S * T)' = S' * T = S * T'$$

  En particulier $\delta' * T = T'$, et $\delta^{(n)} * T = T^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre 4

Espaces L^1, L^2 et convergences

Définition 4.0.1 (Égalité presque partout)**.** *On dit que deux fonctions f et g sont égales presque partout et on note $f \stackrel{pp}{=} g$ si $f(t) = g(t)$ $\forall t$ sauf sur un ensemble dénombrable de valeurs de t (ensemble de mesure nulle). Les fonctions égales presque partout ont comme propriété :*

$$f \stackrel{pp}{=} g \Leftrightarrow \int_I f(t)dt = \int_I g(t)dt \quad \forall I \subset \mathbb{R}.$$

Définition 4.0.2. *$L^1(I)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions sommables sur l'intervalle I, borné ou non. Il est muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f(t)|dt$ et $\|f\|_1 = 0$ implique $f = 0$ presque partout (en abrégé pp).*

Définition 4.0.3. *$L^2(I)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dont le carré du module est sommable sur I. Il est muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_I |f(t)|^2dt}$, associée au produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Proposition 4.0.1 (Inégalité de Schwarz dans $L^2(I)$)**.**

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2\|g\|_2$$

c'est-à-dire

$$\Big|\int_I f(t)\overline{g(t)}dt\Big| \leq \sqrt{\int_I |f(t)|^2dt}\,\sqrt{\int_I |g(t)|^2dt}$$

Proposition 4.0.2. *Si $I = [a, b]$ est borné, $L^2(I) \subset L^1(I)$ et*

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\sup_{t\in I}|f(t)|.$$

Définition 4.0.4 (Convergence d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions vers f lorsque n tend vers $+\infty$)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I.*

— $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *de manière ponctuelle sur* I *lorsque :*
$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$ *pour chaque* t *élément de* I.

— $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *presque partout sur* I *lorsque :*
$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$ *pour presque tout* t *élément de* I.

— $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *de manière uniforme sur* I *lorsque :*
$\sup_{t\in I}|f_n(t)-f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 4.0.1. *Convergence dans* $L^1(I)$ *ou* $L^2(I)$ *:* $\|fn-f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *avec la norme appropriée.*
Pour $L^2(I)$*, on dit aussi convergence en moyenne quadratique ou au sens de l'énergie.*

Propriété 4.0.1. — *Convergence uniforme* $\Rightarrow$ *convergence ponctuelle* $\Rightarrow$ *convergence presque partout.*

— *Si une suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* I *:*
  — *si les* (f_n) *sont continues, alors* f *est continue.*
  — $\int_I f_n$ *tend vers* $\int_I f$.

— *Si une suite* (f_n) *converge ponctuellement vers* f *:*
si la suite des (f_n') *converge uniformément vers* g*, alors* $g=f'$.

— $I=[a,b]$ *borné, on a :*
convergence uniforme $\Rightarrow$ *convergence dans* $L^2(I)$ $\Rightarrow$ *convvergence dans* $L^1(I)$.

4.1 Orthogonalité, projections dans $L^2(I)$

Définition 4.1.1. *L'application* $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle=\int_I f(t)\overline{g(t)}dt$ *est un produit scalaire dans* $L^2(I)$.

Propriété 4.1.1. — *linéarité :* $\langle af+bh,g\rangle=a\langle f,g\rangle+b\langle h,g\rangle$

— $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$*, donc* $\langle f,ag\rangle=\overline{a}\langle f,g\rangle$

— $\langle f,f\rangle\geq 0$ *et* $\langle f,f\rangle=0\Rightarrow f=0$ *dans* $L^2(I)$

Propriété 4.1.2. • *Norme associée au produit scalaire :* $\|f\|=\sqrt{\int_I|f(t)|^2dt}=\overline{\langle f,f\rangle}$

• *Deux fonctions* f *et* g *sont orthogonales si leur produit scalaire est nul. Alors,*
$\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2$ ***(Pythagore)****.*

• *La projection orthogonale* $\widetilde{f}$ *d'une fonction* f *de* $L^2(I)$ *sur un sous-espace vectoriel fermé* F *engendré par la famille de fonctions orthogonales* $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ *est égale à :*

$$\widetilde{f}(t)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(t) \qquad o \qquad c_k=\frac{\langle f,\varphi_k\rangle}{\|\varphi_k\|^2}.$$

C'est la meilleure approximation de f par une fonction de F. C'est, parmi toutes les fonctions g de F, celle qui rend minimum la quantité $\|f-g\|$. Puisque $f-\widetilde{f}$ est orthogonal à $\widetilde{f}$, l'erreur d'approximation vaut :

$$\|f-\widetilde{f}\|^2 = \|f\|^2 - \|\widetilde{f}\|^2 \quad avec \quad \|\widetilde{f}\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{|\langle f, \varphi_k\rangle|^2}{\|\varphi_k\|^2}.$$

Exemple 4.1.1 (Exemples de bases)**.** **1** *base orthogonale dans $L^2(0,T)$:*

$$\left\{1,\ \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \cdots, \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right),\ \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right), \cdots\right\}$$

2 *base orthonormée dans $L^2(-1,+1)$: les polynômes de Legendre*

$$P_n(t) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$$

Chapitre 5

Analyse de Fourier

5.1 Séries de Fourier

Proposition 5.1.1. *Soit f une fonction de l'espace $L^2(0,T)$. Dans la base orthogonale $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots\}$ on a*

$$f(x) \overset{pp}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) \quad avec \quad c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \quad et \quad \langle f, g \rangle = \int_0^T f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction périodique de période T, on note S_f sa série de Fourier. Dans la base orthogonale*

$$\left\{1,\ \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \cdots, \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right),\ \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right), \cdots\right\},$$

on a

$$S_f(x) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \cdots + a_n \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) + \cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)dx,\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)dx$$

soit en utilisant la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Propriétés 5.1.1.

1. *Pour tout a réel $\int_0^T f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx$.*
2. *Si f est paire, les b_n sont nuls, S_f est une série de cosinus.*
3. *Si f est impaire, les a_n sont nuls, S_f est une série de sinus.*

4 *Dans la base orthogonale* $\exp(in\omega x)$, *avec* $n \in \mathbb{Z}$

$$S_f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(in\omega x) \quad et \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\exp(-\frac{in2\pi x}{T})dx.$$

$$c_0 = a_0, \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

5 *Dans les deux bases, on a* $S(x) \overset{pp}{=} f(x)$

5.1.1 Théorème de Dirichlet

Théorème 5.1.1. *Pour* f *de classe* C^1 *par morceaux, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_f(x) = \frac{1}{2}(\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-))$$

Pour f *continue sur* $\mathbb{R}$, S_f *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$.

5.1.2 Théorème de dérivation

Théorème 5.1.2. *Pour* f *de classe* C^1 *par morceaux, continue sur* $\mathbb{R}$, *la série de Fourier de* f' *s'obtient en dérivant terme à terme celle de* f *et elle converge dans* $L^2(0,T)$.

5.1.3 Identité de Parseval

(énergie du signal et des harmoniques) :

Théorème 5.1.3.

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(0,T)} &= T\Big(a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)\Big) \\ &= T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\overline{c_n} = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c^n|^2 \end{aligned}$$

5.1.4 Produit de convolution

Définition 5.1.2. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, On appelle produit de convolution de* f *et* g *sur* $\mathbb{R}$ *la fonction* $f * g$ *donnée par*

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Définition 5.1.3. *Soient* f, g *deux fonctions* 2π*-périodiques, continues par morceaux sur* $[0, 2\pi]$. *On appelle produit de convolution de* f *et* g *sur* $[0, 2\pi]$ *la fonction* $f * g$ *donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x)g(x)dx.$$

5.2 Transformée de Laplace

Cette section est une introduction à la transformée de Laplace, qui est une opération mathématique très utilisée en électronique, où elle correspond à changer une fonction qui dépend du temps t en une fonction qui dépend de la fréquence s. Elle est aussi utile pour résoudre les équations différentielles, car la transformée de Laplace permet de transformer des opérations d'analyse (dérivation/intégration) en des opérations algébriques (multiplication/division).

5.2.1 Définition

Définition 5.2.1. *La **transformée de Laplace** d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par l'intégrale de Laplace*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt.$$

Si l'on veut insister sur la dépendance vis-à-vis de la fonction f (plutôt que du paramètre s), alors on note plutôt cette même intégrale par :

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt \quad ou \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt.$$

Remarque 5.2.1. — *On appliquera la transformation de Laplace aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :*

- *f est **causale** c'est-à-dire telles que $f(t) \equiv 0\ \forall t < 0$. En effet la partie $\mathbb{R}_-$ du domaine de définition de f n'intervient pas dans l'intégrale de Laplace. On suppose donc que la fonction y est nulle, car 1. La transformation de Laplace est utilisée en physique pour étudier des phénomènes transitoires, c'est-à-dire pour étudier l'évolution temporelle de phénomènes à partir de l'instant de leur naissance, $t = 0$. On suppose que le phéno- mène n'existe pas avant et donc que la fonction qui le décrit est nulle.*
- *f est localement sommable sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire sommable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}_+$.*
- *f est de classe exponentielle, c'est-à-dire $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ tels que $t \geq T \Rightarrow |f(t)| \leq Be^{\sigma t}$ avec $B > 0$.*

— *Lorsque l'on écrit $F(s)$, cela signifiera par convention que l'intégrale converge.*

Exemple 5.2.1. ***1*** *Soit $f(t) = 1$, la fonction constante égale à 1. Alors, pour $s > 0$,*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt = \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-e^{-st}}{s}\right) - \left(\frac{-e^{0}}{s}\right) = \frac{1}{s}.$$

2 *Soit $f(t) = e^t$. Alors, pour $s > 1$,*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(1-s)t}\, dt = \left[\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-1}.$$

3 *Soit $f(t) = t$. On effectue une intégration par parties avec $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-st}$. Alors pour $s > 0$:*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} t{\cdot}e^{-st}\, dt = \left[t{\cdot}\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1{\cdot}\frac{-e^{-st}}{s}\, dt = 0 + \frac{1}{s}\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}$$

Voici un critère simple qui garantit l'existence et de bonnes propriétés pour la transformée de Laplace.

Proposition 5.2.1. *Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^n} = 0.$$

1 *Alors, pour tout $s > 0$, l'intégrale $F(s)$ existe.*

2 *La fonction $s \mapsto F(s)$ est continue sur $]0, +\infty[$.*

3 $\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0.$

4 *La fonction $s \mapsto F(s)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et*

$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-st}\, dt\ .$$

Remarque 5.2.2. *on pourrait raffiner la condition. En effet, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}} \to 0$ (lorsque $t \to +\infty$), alors les mêmes conclusions sont valides, mais seulement pour $s > \alpha$.*

5.2.2 Transformées de Laplace usuelles

Voici quelques transformées de Laplace classiques.

$f(t)$	$F(s)$	validité
c	$\frac{c}{s}$	$s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$s>\alpha$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$s>\alpha$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$	$s>0$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$s>0$

Voici quelques preuves :

1 Transformée de Laplace de t^n.

On effectue une intégration par parties afin de trouver une formule de récurrence, pour $n \geq 1$:

$$F_n(s) = \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-st}\,dt = \left[t^n \cdot \frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1} \cdot e^{-st}\,dt = \frac{n}{s}F_{n-1}(s)$$

On a déjà calculé $F_0(s) = \frac{1}{s}$, d'où par récurrence $F_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

2 Transformée de Laplace de $\sin(\omega t)$.

Par la formule d'Euler, $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$. Or

$$\int_0^{+\infty} e^{i\omega t}e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(-s+i\omega)t}\,dt = \left[\frac{1}{-s+i\omega}e^{-st}e^{i\omega t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-i\omega}.$$

De même, la transformée de Laplace de $e^{-i\omega t}$ est $\dfrac{1}{s+i\omega}$. Par linéarité,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{|s-i\omega|^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

3 Transformée de Laplace de $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Notons que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est définie sur $]0,+\infty[$ seulement.

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{st}$, donc $du = \frac{\sqrt{s}}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{2}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

On a $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

Exemple 5.2.2. *Calculons la transformée de Laplace de $f(t) = \frac{\sin t}{t}$: $F(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-st}\, dt$. Par la formule de dérivée (proposition 5.2.1), on sait en utilisant les tables que :*

$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} t\frac{\sin t}{t}e^{-st}\, dt = -\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s^2+1}$$

On intègre pour obtenir $F(s) = -\arctan s + c$, où $c \in \mathbb{R}$. Comme on sait que $F(s) \to 0$ (lorsque $s \to +\infty$, toujours par la proposition 5.2.1) alors $c = +\frac{\pi}{2}$. Donc

$$F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}.$$

En admettant que la formule reste valable en $s = 0$, on trouve :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

5.2.3 Propriétés de la transformée de Laplace

A) Linéarité

Proposition 5.2.2. *Soit $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors*

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g).$$

Exemple 5.2.3. *La transformée de Laplace de $f(t) = (1-at)e^{-at}$ est*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(1-at)e^{-at} &= \int_0^{+\infty}(1-at)e^{-at}e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t}dt - \int_0^{+\infty} ate^{-(a+s)t}dt \\
&= \frac{1}{s+a} + \frac{-a}{(s+a)^2} \\
&= \frac{s}{(s+a)^2}
\end{aligned}$$

Exemple 5.2.4.

$$\mathcal{L}(x^2 - 3x + 1) = \frac{2}{p^3} - 3\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

B) Translation

Proposition 5.2.3. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction causale, on considère la fonction f_a définie par $f_a(t) = f(t-a)$; $(a > 0)$ la transformée de la Laplace de f_a est*

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \bar{e}^{as}F(s).$$

Exemple 5.2.5. *Soit f la fonction définie par*

$$\begin{cases} f(x) = 0 & si \quad x < 0 \\ f(x) = 1 & si \quad 0 < x < \tau \\ f(x) = 2 & si \quad x > \tau \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1 + e^{-p\tau}}{p}.$$

C) Homothétie

Proposition 5.2.4. *Soit $k > 0$, f_k la fonction définie par $f_k(t) = f(kt)$, la transformée de la Laplace de f_k est*

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}F(\frac{1}{k}).$$

D) Dérivation

Proposition 5.2.5. *Soit f' la dérivée de f ; la transformation de Laplace correspond, à une constante additive près, à une multiplication par s de la transformée*

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

D'où

$$\mathcal{L}(f_{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}f^{(n-k)}(0).$$

Exemple 5.2.6. *La transforméee de Laplace de la fonction rampe $r(t)$ est $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$*

E) Intégration

Proposition 5.2.6. *Soit $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ une primitive de f s'annulant en $s = 0$. On a alors*

$$\mathcal{L}(F) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(F).$$

F) Théorème du retard

Proposition 5.2.7. $\mathcal{L}\big(f(t-\tau)\big) = e^{-s\tau}\mathcal{L}\big(f(t)\big).$

G) Théorème de la valeur initiale

Proposition 5.2.8. $\lim\limits_{s\to+\infty} sF(s) = f(0)$.

H) Théorème de la valeur finale

Proposition 5.2.9. *Si la limite de $f(t)$ existe et est finie lorsque t tend vers $+\infty$, alors* $\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

I) Convolution

Proposition 5.2.10. *Soit $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$*

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s)$$

5.2.4 Transformée de Laplace inverse

Il existe un théorème qui prouve que la transformée de Laplace $F(s)$ détermine la fonction $f(t)$.

Théorème 5.2.1. *Soient $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de transformées de Laplace respectives F et G.*
Si f et g ont même transformée de Laplace alors f et g sont égales presque partout sur $[0, +\infty[$. Elles sont égales partout sur $[0, +\infty[$ si elles sont continues.

Ce théorème permet de parler de la transformation de Laplace inverse, c'est-à-dire passer de $F(s)$ à $f(t)$.

Définition 5.2.2. *Soit $x(n)$ un signal causal et $X(z)$ sa transformée de Laplace alors la transformée inverse est*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(s)\exp(st)ds. \tag{5.1}$$

Remarque 5.2.3. *La relation théorique (5.1) est rarement utilisée.*
Il n'existe pas de formule à notre portée pour rendre le passage de $F(s)$ à $f(t)$. explicite. C'est donc l'intérêt des tables des transformées de Laplace : connaissant $F(s)$, on cherche à la main à quel $f(t)$ cela correspond.
La méthode plus utilisée pour calculer $\mathcal{L}^{-1}$ est la décomposition en éléments simples.

Exemple 5.2.7. *À quelle fonction $f(t)$ correspond la transformée de Laplace*

$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2+1} - \frac{3}{(s-2)^2} \text{ ?}$$

On décompose $F(s)$ en

$$F(s) = 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} - 3\frac{1}{(s-2)^2}.$$

Par la table et par linéarité, la fonction est :

$$f(t) = 2\cos t - \sin t - 3te^{2t}$$

La preuve est très jolie, mais peut être passée lors d'une première lecture. On commence par rappeler le théorème d'approximation de Weierstrass :

Théorème 5.2.2 (Théorème d'approximation de Weierstrass)**.** *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ peut être approchée uniformément par des polynômes. Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[t]$ tel que :*

$$\|f - P\|_\infty < \epsilon$$

On a noté $\|f - P\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \big|f(t) - P(t)\big|$. Le théorème d'approximation de Weierstrass se reformule aussi : « Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est limite uniforme d'une suite de polynômes. »

Corollaire 5.2.1. *Si pour tout $n \geq 0$, $\int_a^b t^n f(t)\ dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a,b]$.*

du corollaire 5.2.1. Par linéarité, l'hypothèse implique que, pour tout polynôme $P(t)$, $\int_a^b P(t)f(t)\ dt = 0$. Comme f est continue sur $[a,b]$ donc bornée, notons M un majorant de $|f|$. Fixons $\epsilon > 0$. Soit P un polynôme approchant f à ϵ près. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)^2\ dt\right| &= \left|\int_a^b f(t)^2\ dt - \int_a^b P(t)f(t)\ dt\right| \text{ car la seconde intégrale est nulle.}\\
&= \left|\int_a^b \big(f(t) - P(t)\big)f(t)\ dt\right| \leq \int_a^b \big|\big(f(t)-P(t)\big)f(t)\big|\ dt\\
&\leq \int_a^b \|f-P\|_\infty M\ dt \leq \|f-P\|_\infty M(b-a) \leq \epsilon M(b-a)
\end{aligned}$$

Donc $t \mapsto f(t)^2$ est une fonction positive, continue, et son intégrale est aussi petite que l'on veut, donc nulle. Ainsi $t \mapsto f(t)^2$ est la fonction nulle. Ainsi $f(t) = 0$, pour tout $t \in [a,b]$. □

du théorème 5.2.1.

— Nous allons faire la preuve dans le cas où les fonctions vérifient $f(t)/t^{n_0} \to 0$ et $g(t)/t^{n_0} \to 0$ (lorsque $t \to +\infty$) pour un certain $n_0 \geq 0$.

— Soient f et g deux fonctions ayant la même transformée de Laplace : $F(s) = G(s)$ pour tout $s > 0$, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} \big(f(t) - g(t)\big)e^{-st}\ dt = 0$. Il s'agit de montrer que $f - g = 0$.

— On suppose donc que l'on a une fonction $h = f - g$ telle que sa transformée de Laplace $\int_0^{+\infty} h(t)e^{-st}\,dt = 0$ et on va montrer que h est la fonction nulle. On effectue le changement de variable $u = e^{-t}$ (donc $t = -\ln u$, $dt = -\dfrac{du}{u}$ et u varie de 1 à 0 lorsque t varie de 0 à $+\infty$), et l'intégrale devient :

$$\int_0^1 h(-\ln u)u^{s-1}\,du = 0.$$

— La dernière égalité est vraie pour tout $s > 0$, donc en particulier pour les s de la forme $s = n + 2$. Autrement dit, si on pose $k(u) = uh(-\ln u)$, on a pour tout $n \geq 0$:

$$\int_0^1 u^n k(u)\,du = 0.$$

Comme $\dfrac{h(t)}{t^{n_0}} \to 0$ (lorsque $t \to +\infty$) alors $k(u) = u(-\ln u)^{n_0} \times \dfrac{h(-\ln u)}{(-\ln u)^{n_0}} \to 0$ (lorsque $u \to 0$). Ainsi la fonction k peut être prolongée par continuité en 0. Par le corollaire 5.2.1, la fonction k est nulle : $k(u) = 0$ pour tout u. Donc $h(t) = 0$ pour tout t, et ainsi $f(t) = g(t)$, pour tout $t \in [0, +\infty[$.

$\square$

5.2.5 Équations différentielles

Si $F(s)$ est la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, alors $sF(s) - f(0)$ est la transformée de Laplace de $f'(t)$. La transformée de Laplace remplace donc l'opération de dérivation sur $f(t)$ par une opération de multiplication par s sur $F(s)$.

Voici comment on peut résoudre des équations différentielles :

On transforme un problème différentiel en problème algébrique, on résout le problème algébrique, puis on transforme la solution algébrique en une solution différentielle. Afin de respecter les usages, dans la suite on note $y(t)$ les fonctions, au lieu de $f(t)$.

Exemple 5.2.8. *Quelle est la solution de l'équation différentielle :*

$$y'(t) + y(t) = t \qquad \textit{avec} \qquad y(0) = 3 \quad ?$$

1 ***Transformées de Laplace.***

On calcule les transformées de Laplace des objets qui apparaissent :

— *notons* $F(s) = \mathcal{L}(y)$,

— *alors on sait que* $\mathcal{L}(y') = sF(s) - y(0)$,

— *enfin* $\mathcal{L}(t) = \dfrac{1}{s^2}$.

2 ***De l'équation différentielle à l'équation algébrique.***

Comme $y'(t) + y(t) = t$ *alors* $\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t)$. *Ce qui donne* $sF(s) - y(0) +$

$F(s) = \dfrac{1}{s^2}$. *Et comme par hypothèse* $y(0) = 3$ *alors*

$$(s+1)F(s) = 3 + \frac{1}{s^2}.$$

3 ***Résolution de l'équation algébrique.***
Il s'agit simplement de

$$F(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

Mais nous aurons besoin de la décomposition en éléments simples :

$$F(s) = \frac{3}{s+1} + \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s+1}.$$

4 ***Retour à la solution différentielle.***
Il reste à trouver à quelle fonction $y(t)$ *correspond notre solution algébrique* $F(s)$.
C'est là où les tables sont utiles :
— *pour* $F_1(s) = \dfrac{1}{s}$, *c'est* $y_1(t) = 1$,
— *pour* $F_2(s) = \dfrac{1}{s^2}$, *c'est* $y_2(t) = t$,
— *pour* $F_3(s) = \dfrac{1}{s+1}$, *c'est* $y_3(t) = e^{-t}$.
Donc par linéarité la solution est $y(t) = -y_1(t) + y_2(t) + 4y_3(t)$, *et ainsi :*

$$y(t) = -1 + t + 4e^{-t}$$

On se rassure en vérifiant que cette fonction vérifie $y'(t) + y(t) = t$ *et* $y(0) = 3$.

On reprend rapidement un autre exemple :

Exemple 5.2.9. *Résolvons :*

$$y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t} \qquad \text{avec} \qquad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1$$

1 *Notons* $F(s) = \mathcal{L}(y)$. *On a* $\mathcal{L}(y') = sF(s) - y(0)$, *et donc* $\mathcal{L}(y'') = s\mathcal{L}(y') - y'(0) = s^2F(s) - sy(0) - y'(0)$. *Vues nos conditions initiales, on a ici* $\mathcal{L}(y'') = s^2F(s) - 1$. *Enfin* $\mathcal{L}(e^{-t}) = \dfrac{1}{s+1}$.

2 *L'équation* $y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t}$ *devient* $s^2F(s) - 1 - 4F(s) = \dfrac{3}{s+1}$. *Donc* $(s^2-4)F(s) = 1 + \dfrac{3}{s+1}$.

3 *Ainsi après décomposition en éléments simples :*

$$F(s) = \frac{1}{s^2-4} + \frac{3}{(s+1)(s^2-4)} = \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s-2} - \frac{1}{s+1}$$

4 *Avec les tables, on reconnaît la solution :*

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} - e^{-t}$$

Exercice 5.2.1. **1** *Montrer que, si pour un certain $s_0 > 0$, l'intégrale $F(s_0) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}\, dt$ converge, alors c'est aussi vrai pour tout $s \geq s_0$.*

2 *Calculer la transformée de Laplace de $f_1(t) = e^{\alpha t}$. Puis $f_2(t) = t^2$, $f_3(t) = \operatorname{sh} t$, $f_4(t) = \operatorname{ch}(3t)$.*

3 *Montrer que si $F(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, alors la transformée de Laplace de $f(kt)$ (avec $k > 0$) est $\frac{1}{k}F(\frac{s}{k})$.*

4 *Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - y(t) = e^t - t + 1$ avec $y(0) = 0$ en utilisant la transformée de Laplace.*

5 *Résoudre l'équation différentielle $y''(t) = 3y'(t) - 2y(t) + e^t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ en utilisant la transformée de Laplace.*

5.3 Transformée de Fourier

Cette section est une introduction à la transformée de Fourier. Comme la transformée de Laplace, la transformée de Fourier change une fonction qui dépend du temps en une fonction qui dépend de la fréquence et est très utilisée en théorie du signal. La transformée de Fourier s'applique à des fonctions non périodiques, contrairement aux séries de Fourier.

5.3.1 Définition

Il est possible de choisir une définition alternative pour la transformée de Fourier. Ce choix est une affaire de convention dont les conséquences ne se manifestent que par des facteurs multiplicatifs constants par exemple, certains scientifiques utilisent ainsi

Définition 5.3.1. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La* ***transformée de Fourier*** *de f est la fonction F définie par :*

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

avec t en secondes et ν la fréquence en (Hz).

On la note aussi $\mathcal{F}(f)$.

Certains électroniciens ou physiciens utilisent la définition suivante

Définition 5.3.2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La **transformée de Fourier** de f est la fonction F définie par :*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}\, dt$$

avec t en secondes et s la pulsation $(en rad.s^{-1})$:

Exemple 5.3.1. **1** *Soit f la fonction définie par $f(t) = 1$ si $t \in [-1, +1]$ et $f(t) = 0$ sinon. Alors*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}\, dt = \int_{-1}^{1} e^{-ist}\, dt = \left[\frac{e^{-ist}}{-is}\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{s}\frac{e^{-is} - e^{+is}}{2i} = +\frac{2\sin s}{s}.$$

2 *Quelle est la transformée de Fourier $F(s)$ de la fonction définie par $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, avec $\alpha > 0$?*

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha(-t)}e^{-ist}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-ist}\, dt \\
&= \left[\frac{e^{(\alpha-is)t}}{\alpha - is}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-\alpha-is)t}}{-\alpha - is}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\alpha - is} - \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{(\alpha-is)t}}{\alpha - is} + \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(-\alpha-is)t}}{-\alpha - is} - \frac{1}{-\alpha - is} \\
&= \frac{1}{\alpha - is} + 0 + 0 + \frac{1}{\alpha + is} \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + s^2}
\end{aligned}$$

Remarque 5.3.1.
- *On trouve dans la littérature d'autres définitions, avec des constantes différentes. Pour les formules, il faut donc bien faire attention à la définition que l'on choisit.*
- *L'intégrale impropre a deux points incertains $-\infty$ et $+\infty$. On rappelle que par définition une intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} g(t)\, dt$ converge **et** l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} g(t)\, dt$ converge aussi.*
- *Contrairement à la transformée de Laplace, la transformée de Fourier est souvent à valeurs dans $\mathbb{C}$, même si l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$.*

Nous donnons une condition simple pour que la transformée de Fourier existe.

Proposition 5.3.1. *Supposons que f soit continue et que l'intégrale de f soit absolument convergente, c'est-à-dire*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \quad \text{converge.}$$

Alors :

1 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'intégrale $F(s)$ existe.*

2 *La fonction $s \mapsto F(s)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

3 *La fonction $s \mapsto F(s)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$F'(s) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-ist}\, dt.$$

En fait, pour la continuité de F, on pourrait montrer qu'il suffit que f soit continue par morceaux (au lieu de continue partout).

5.3.2 Propriétés

Lemme 5.3.1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| dt$ soit convergente. Alors*

$$\lim_{s\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ist}\, dt = 0.$$

Le même résultat est vrai lorsque $s \to -\infty$. Autrement dit :

$$\lim_{s\to-\infty} F(s) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$$

Comme $s \mapsto F(s)$ est continue, on en déduit que la transformée de Fourier est une fonction bornée.

Nous donnons la preuve uniquement lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. On commence par prouver le lemme de Riemann-Lebesgue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$:

$$\lim_{s\to+\infty} \int_a^b f(t) e^{-ist}\, dt = 0$$

On effectue une intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)e^{-ist}\, dt = \left[f(t)\frac{e^{-ist}}{-is}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{e^{-ist}}{-is}\, dt = \frac{1}{-is}\left(f(b)e^{-isb} - f(a)e^{-isa} - \int_a^b f'(t)e^{-ist}\, dt\right)$$

On en déduit la majoration :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-ist}\, dt\right| \leq \frac{1}{|s|}\left(\left|f(b)\right| + \left|f(a)\right| + \int_a^b \left|f'(t)\right| dt\right)$$

Sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, la fonction f' est continue donc bornée : notons $M = \sup_{t\in[a,b]} \left|f'(t)\right|$. On a donc

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-ist}\, dt\right| \leq \frac{1}{|s|}\left(\left|f(b)\right| + \left|f(a)\right| + M(b-a)\right).$$

Ainsi lorsque $|s| \to +\infty$ alors $\int_a^b f(t)e^{-ist}\,dt \to 0$.

Pour l'intégrale impropre, fixons $\epsilon > 0$. On reprend le raisonnement précédent en fixant d'abord a et b tels que $\int_{-\infty}^a \big|f(t)\big|\,dt < \epsilon$ et $\int_b^{+\infty} \big|f(t)\big|\,dt < \epsilon$, ce qui possible car les intégrales impropres convergent. Ainsi :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{a} \big|f(t)\big|\,dt + \left|\int_a^b f(t)e^{-ist}\,dt\right| + \int_b^{+\infty} \big|f(t)\big|\,dt$$

Or pour $|s|$ assez grand, $\left|\int_a^b f(t)e^{-ist}\,dt\right| < \epsilon$ d'après le point précédent. Donc $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}\,dt\right| < 3\epsilon$ pour $|s|$ assez grand, ce qui termine la preuve. □

Voici quelques assertions parmi les nombreuses propriétés que vérifie la transformée de Fourier.

Proposition 5.3.2.

1. ***Linéarité.*** *$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{F}(f) + \mu\mathcal{F}(g)$.*
2. ***Parité.*** *Si f est une fonction paire, alors $F(s) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,dt$. Si f est impaire, alors $F(s) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(st)\,dt$.*
3. ***Dérivation.*** *$\mathcal{F}(f') = is\mathcal{F}(f)$.*
4. ***Théorème du retard.*** *$\mathcal{F}\big(f(t-\tau)\big) = e^{-is\tau}\mathcal{F}\big(f(t)\big)$.*

Démonstration. Les preuves sont similaires à celles pour la transformée de Laplace. Pour la formule de dérivation, on suppose que l'intégrale de f' est absolument convergente. Cette dernière hypothèse implique en particulier que f admet une limite finie en $-\infty$ et $+\infty$, limite qui est forcément nulle puisque $\int |f|$ est supposée convergente.

Voici la preuve pour la formule de la parité. On suppose donc que f est une fonction paire. Alors :

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-ist}\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ist}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(-u)e^{isu}\,du + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ist}\,dt \qquad \text{avec } u = -t \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)\left(e^{ist} + e^{-ist}\right)\,dt \qquad \text{car } f(-u) = f(u) \\
&= 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,dt
\end{aligned}$$

□

Exemple 5.3.2. *Quelle est la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-t^2}$? Nous allons la calculer en utilisant les propriétés énoncées plus haut. Nous notons $F(s)$ la transformée de Fourier de $f(t)$ et $G(s)$ celle de $f'(t)$.*

— *D'une part, par la formule de dérivation de la proposition 5.3.2, on sait que* $G(s) = isF(s)$.

— *Mais d'autre part* $f'(t) = -2tf(t)$, *donc*

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ist}\,dt = -2\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-ist}\,dt = -2iF'(s).$$

La dernière égalité vient de la formule de dérivation de $F(s)$ *de la proposition 5.3.1.*

— *On en déduit donc l'équation différentielle* $sF(s) = -2F'(s)$. *En écrivant* $\frac{F'(s)}{F(s)} = -\frac{s}{2}$, *on trouve* $\ln|F(s)| = -\frac{s^2}{4} + c$, *donc* $F(s) = F(0)e^{-s^2/4}$. *Et* $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. *Conclusion :* $F(s) = \sqrt{\pi}e^{-s^2/4}$.

5.3.3 Transformée de Fourier inverse

La transformée de Fourier transforme $f(t)$ en $F(s)$. Il existe une transformée de Fourier inverse qui permet de revenir de $F(s)$ à $f(t)$.

Théorème 5.3.1. *Si*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}\,dt$$

est d'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\,ds$ *absolument convergente, alors*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{+ist}\,ds.$$

Il faut bien faire attention à la constante $\frac{1}{2\pi}$ et au signe $+$ dans e^{+ist}. Nous admettons ce théorème.

En d'autres termes, si l'on note

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{+ist}\,dt,$$

alors $\mathcal{F}^{-1}$ est l'opération de

Définition 5.3.3. *transformée de Fourier inverse :*

$$\mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(f)\big) = f \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}\big(\mathcal{F}^{-1}(f)\big) = f$$

Il est remarquable que la transformée inverse ait une forme très proche de la transformée directe. Nous allons l'utiliser dans l'exemple suivant.

Exemple 5.3.3. *Quelle est la transformée de Fourier de* $g(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ *?*

On a vu dans l'exemple 5.3.1 que la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$ *est* $F(s) = \dfrac{2}{1+s^2}$*, qui est d'intégrale absolument convergente. Ce qui veut dire que, d'après le théorème 5.3.1, la transformée de Fourier inverse de* $g(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ *est* $G(s) = \dfrac{e^{-|s|}}{2}$.

On vient exactement de dire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{+ist}\,dt = G(s),$$

donc en évaluant cette expression en $-s$ *:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ist}\,dt = G(-s).$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-ist}\,dt = \frac{e^{-|-s|}}{2} = \frac{e^{-|s|}}{2}$$

Ce qui permet de conclure que la transformée de Fourier de $g(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ *est :*

$$\mathcal{F}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-ist}\,dt = \pi e^{-|s|}$$

En particulier, lorsque l'on prend la partie réelle de cette dernière égalité, on obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(st)}{1+t^2}\,dt = \pi e^{-|s|},$$

ce qui donne pour $s = 1$ *:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{e}.$$

La correspondance est donc la suivante :

5.3.4 Lien avec la transformée de Laplace

Les transformées de Fourier et de Laplace, lorsqu'elles sont bien définies, sont liées par la relation suivante :

$$\mathcal{F}(f)(s) = \mathcal{L}(f_+)(+is) + \mathcal{L}(f_-)(-is)$$

où l'on a défini f_+ *et* f_- *sur* $[0, +\infty[$ *par :* $f_+(t) = f(t)$ *et* $f_-(t) = f(-t)$ *pour* $t \geq 0$.

Exemple 5.3.4. *Calculons la transformée de Fourier de* $f(t) = t^2e^{-|t|}$*. On note* $f_+(t)$ *et* $f_-(t)$ *comme ci-dessus. Comme la fonction* f *est paire alors* $f_+ = f_-$.

Par les tables de la transformée de Laplace on sait que, pour $f_+(t) = t^2e^{-t}$ *(avec* $t \geq 0$*) qui est du type* $t^ne^{\alpha t}$*, on a* $\mathcal{L}(f_+) = \dfrac{2}{(s+1)^3}$*. On en déduit que*

$$\mathcal{F}(f)(s) = \mathcal{L}(f_+)(+is) + \mathcal{L}(f_-)(-is) = \frac{2}{(is+1)^3} + \frac{2}{(-is+1)^3} = \frac{4-12s^2}{(1+s^2)^3}.$$

5.4 Transformée en Z

La transformée en Z est un outil mathématique du traitement du signal.

Définition 5.4.1. *La transformée en Z est une application qui transforme une suite s en une fonction S d'une variable complexe z, telle que*

$$S(z) = Z\{s(n)\}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n}, \quad z \in \Big\{z \in \mathbb{C}/ \sum_{-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n} \ converge\Big\}.$$

*Si $\forall n < 0$; $s(n) = 0$, on parle de **signal causal**. Inversement, si $\forall n > 0$; $s(n) = 0$, on parle de **signal anti-causal**.*
Pour les signaux causaux, on peut aussi utiliser la transformée en Z monolatérale

$$Z\{s(n)\}(z) = \sum_{0}^{+\infty} s(n)z^{-n}.$$

Exemples 5.4.1.

1 *Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n ; $U_n = 1$; on a*

$$\text{pour } z \text{ tel que } |z| > 1 ;\ Z\{1\}(z) = \textstyle\sum_0^{+\infty} z^{-n} = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} = \tfrac{z}{z-1}.$$

2 *De même on note la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n ; $S_n = n$, on a*

$$\text{pour } z \text{ tel que } |z| > 1 ;\ Z\{n\}(z) = \textstyle\sum_0^{+\infty} nz^{-n} = \dfrac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \tfrac{z}{(z-1)^2}.$$

3 *Soit a un nombre réel non nul, on considère la suite $U_n = a^n$*

$$Z\{a^n\}(z) = \sum_{0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{0}^{+\infty} (az^{-1})^n.$$

$$\text{pour } z \text{ avec } |z| > |a| ;\ Z\{a^n\}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}.$$

4 *Soit un signal x défini par $x(t) = e^{-at}U(t)$. Avec la période d'échantillonnage T, l'échantillonné est défini par*

$$e^{-aTn} = (e^{-aT})^n.$$

donc

$$Z\{e^{-aT}\}(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

5.4.1 Propriétés de la transformée en Z

Linéarité

La transformée en Z d'une combinaison linéaire de deux signaux est la combinaison linéaire des transformées en Z de chaque signal

$$Z\{\alpha x(n) + \beta y(n)\} = \alpha Z\{x(n)\} + \beta Z\{y(n)\}.$$

Décalage temporel

Le décalage temporel d'un signal de k échantillons se traduit par la multiplication de la transformée en Z du signal par z^{-k}

$$Z\{x(n-k)\} = z^{-k}Z\{x(n)\}.$$

Convolution

La transformée en Z d'un produit de convolution est le produit des transformées en Z

$$Z\{x(n) * y(n)\} = Z\{x(n)\}.Z\{y(n)\}.$$

où

$$x(n) * y(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k).$$

En effet

$$\begin{aligned}
Z\{x(n) * y(n)\}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x(n) * y(n)\}(z)z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k)z^{-(n-k)}z^{-k} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(m)y(k)z^{-(m)}z^{-k} \\
&= \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k)z^{-k}\Big)\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(k)z^{-(m)}\Big) = Z\{x\}Z\{y\}
\end{aligned}$$

Changement d'échelle

$Z\{a^n x(n)\} = X(\frac{z}{a})$, *avec* $X(z)$ *transformée en* Z *de la suite* $x(n)$

Théorème de la valeur initiale

Soit $x(n)$ un signal causal et $X(z)$ sa transformée en Z alors

$$x(0) = \lim_{n\to 0} x(n) = \lim_{z\to+\infty} X(z).$$

Théorème de la valeur finale

Soit $x(n)$ un signal causal et $X(z)$ sa transformée en Z. Alors lorsque la limite de gauche existe, on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) = \lim_{z\to+1}(1-z^{-1})X(z) = \lim_{z\to+1}(\frac{z-1}{z})X(z).$$

Exemple 5.4.1. *Soit (x_n) une suite géométrique, avec $X_n = a^n$ et $|a| < 1$; X a un pôle (a) à l'intérieur du cercle "unité", on a*

$$\lim_{z\to+1}(1-z^{-1})X(z) = \lim_{z\to+1}(\frac{z-1}{z})(\frac{z}{z-a}) = 0 = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

- Si f est bornée et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\nu)\, e^{+2i\pi\nu x} \mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)} \tag{R5.5}$$

- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $F(f) \in L^2(\mathbb{R})$.
  On a aussi l'**identité de Parseval :** $\|f\|_2 = \|F(f)\|_2$, c'est-à-dire

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)(\nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu} \tag{R5.6}$$

- f et $F(f)$ ont même parité.
- Si f est réelle et paire, $F(f)$ est réelle et paire.
- Si f est réelle et impaire, $F(f)$ est imaginaire pure et impaire.
- **Symétrie hermitienne** : $F^{-1}(f(x)) = F(f(-x))$.
  Donc si f est paire, $F^{-1}(f) = F(f)$.
- **Translation en temps**

$$\boxed{F(f(x-a))(\nu) = e^{-2i\pi\nu a} F(f(x))(\nu)} \tag{R5.7}$$

- **Translation en fréquence**

$$\boxed{F(e^{-2i\pi x a} f(x))(\nu) = F(f)(\nu + a)} \tag{R5.8}$$

- **Changement d'échelle**

$$\boxed{F(f(ax))(\nu) = \frac{1}{|a|} F(f(x))\left(\frac{\nu}{a}\right)} \tag{R5.9}$$

- **Transformée de Fourier des dérivées**
  Si $f, f', f'' \ldots, f^{(n-1)}$ sont **continues** sur $\mathbb{R}$ et toutes dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi que $f^{(n)}$:

$$\boxed{F(f^{(n)})(\nu) = (2i\pi\nu)^n F(f)(\nu)} \tag{R5.10}$$

- **Dérivation de la transformée de Fourier**
  Si f et $x^n f$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$

$$\boxed{\frac{d^n F(f)(\nu)}{\mathrm{d}\nu^n} = (-2i\pi)^n F(x^n f)(\nu)} \tag{R5.11}$$

Bibliographie

[1] ***A. Bodin*** *:* Analyse. *Exo 7 (2016).*

[2] ***D. Djamel*** *:* Outils Mathématiques pour le Traitement du Signal . *MEMOIRE Pour obtenir LE DIPLOME DE MASTER Spécialité : Mathématiques, UNIVERSITE DE KHEMIS-MILIANA (2016).*

[3] ***F. LAUNAY*** *:* COURS TRAITEMENT DU SIGNAL . *Département R T - IUT de Poitiers site de Chatellerault (2007).*

[4] ***P. Marry, N. Point, D. Vial*** *:* MATHÉMATIQUES DU SIGNAL 3e édition . *Dunod, Paris, (2008).*