

MATHS DU SIGNAL : TD1

UP MATHS

Exercice n° 1

Soit $\omega \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = x \sin(\omega x)$.

(a) Montrer que $f''(x) = 2\omega \cos(\omega x) - \omega^2 f(x)$.

(b) En déduire la transformée de Laplace de f .

(c) Déterminer l'original de $F(s) = \frac{s}{(s^2+3)^2}$.

Exercice n° 2

En utilisant la transformation de Laplace, calculer la solution $y(t)$ de l'EDO d'ordre 2 suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2}(t) + 2 \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = f(t) & t \geq 0 \\ y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

avec f fonction donnée, continue, bornée sur $[0; +\infty[$. De plus, on suppose que f vérifie les conditions suffisantes d'existence de sa transformée de Laplace

Exercice n° 3

Calculer les fonctions originales des fonctions suivantes.

$$1. F(p) = \frac{6}{2p-3} - \frac{3+4p}{9p^2-16} + \frac{8-6p}{16p^2+9}$$

$$2. F(p) = \frac{6p-4}{p^2-4p+20}$$

Exercice n° 4

On considère la fonction 2π -périodique f définie sur $[0, 2\pi[$ par

$$\begin{cases} f(t) = \sin t \text{ pour } t \in [0, \pi[\\ f(t) = 0 \text{ pour } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1. Tracer la courbe de f sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi[$.

2. La fonction f est-elle continue sur \mathbf{R} ?

3. La fonction f est-elle C^1 sur \mathbf{R} ?

4. La fonction f est-elle C^1 par morceaux sur \mathbf{R} ?

On se propose de calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f . On rappelle à cet effet les formules de trigonométrie suivantes :

$$\begin{cases} \sin a \cos b = 1/2[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \sin a \sin b = 1/2[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \end{cases}$$

5. Montrer que l'on a

$$\begin{cases} a_0 = 1/\pi \\ a_1 = 0 \\ a_{2p} = \frac{2}{\pi(1-4p^2)} \text{ pour } p \in \mathbf{N}^* \\ a_{2p+1} = 0 \text{ pour } p \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

6. Montrer que l'on a

$$\begin{cases} b_1 = 1/2 \\ b_n = 0 \end{cases}$$

7. Dédurre avec précision de tout ce qui précède que l'on a quelque soit t dans \mathbf{R}

$$f(t) = 1/\pi + 1/2 \sin t + 2/\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

8. En choisissant une valeur particulière pour t , montrer que l'on a l'identité suivante :

$$\pi/4 = 1/2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2}$$

Exercice n° 5

Le symbole II_E désigne la fonction indicatrice de l'ensemble E qui est définie par :

$$II_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on notera TF pour Transformée de Fourier

- 1- Soit une fonction f réelle intégrable et impaire. Que vaut $TF \hat{f}(s)$?
- 2- Calculer la TF de $f(t) = te^{-t}II_{\mathbf{R}^+}(t)$
- 3- On pose $g(x) = aexp(-ax)II_{\mathbf{R}^+}(x)$ avec $a > 0$. Que vaut Alors $g * g(x)$

Exercice n° 6

Soit la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ pour $a > 0$.

1. Calculer sa transformée de Fourier .
2. En déduire la transformée de Fourier de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
3. Calculer le produit de convolution $f * f$ et en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.