CORRIGE TD n°9 :
Polarisation des ondes lumineuses.

EXERCICE 1 : Polariseur et Analyseur

1. Un polariseur P intercepte un faisceau parallèle de lumière naturelle d'éclairement $\mathcal{E}_0$. Quel est l'éclairement associé au faisceau transmis ?
2. Un analyseur A est placé derrière P, et croisé avec celui-ci. Quel est l'éclairement associé au faisceau final ?
3. Un polariseur P', dont la direction fait l'angle α avec celle de P, est placé entre les deux. Que devient l'éclairement associé au faisceau final ? Est-il possible de l'annuler en jouant sur l'angle α ?
4. L'angle α de ce polariseur est tournant de sorte que $\alpha = \Omega t$ où Ω est la vitesse angulaire du polariseur P'. Exprimer l'éclairement associé au faisceau final, en fonction de Ω. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif.

CORRECTION

1. Pour l'onde incidente, en notation réelle $\mathcal{E}_0 = 2\left\langle \vec{E}.\vec{E} \right\rangle = 2\left\langle E_x^2 \right\rangle + 2\left\langle E_y^2 \right\rangle + 2\left\langle E_z^2 \right\rangle$.

   Pour l'onde incidente, en notation complexe $\mathcal{E}_0 = \underline{\vec{E}}.\overrightarrow{\underline{E}^*} = \underline{E_x}\underline{E_x}^* + \underline{E_y}\underline{E_y}^* + \underline{E_z}\underline{E_z}^*$.

   Par ailleurs, l'onde se propageant selon Oz, $E_z = 0$. D'autre part, la lumière naturelle est non polarisée et donc $\left\langle E_x^2 \right\rangle = \left\langle E_y^2 \right\rangle$. On en déduit que : $\mathcal{E}_0 = 4\left\langle E_x^2 \right\rangle$.

   Notons θ l'angle $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_p}\right)$. L'éclairement transmis est alors :

   $$\mathcal{E} = 2\left\langle \left(\vec{E}.\overrightarrow{u_p}\right)^2 \right\rangle = 2\left\langle \left(E_x \cos\theta + E_y \sin\theta\right)^2 \right\rangle = 2\left[\left\langle E_x^2 \right\rangle \cos^2\theta + \left\langle E_y^2 \right\rangle \sin^2\theta + \left\langle E_x E_y \right\rangle \cos\theta \sin\theta\right]$$

   Or $\left\langle E_x E_y \right\rangle = 0$ et donc $\mathcal{E} = \dfrac{\mathcal{E}_0}{2}$.

   La moitié de l'éclairement est transmis par le polariseur idéal.

2. L'analyseur A est croisé avec le polariseur P : l'éclairement du faisceau final est nul.

3. Les projections successives nous donnent :

   $$\mathcal{E} = 2\left\langle \left[\left(\vec{E}.\overrightarrow{u_p}\right)\left(\overrightarrow{u_p}.\overrightarrow{u_{p'}}\right)\left(\overrightarrow{u_{p'}}.\overrightarrow{u_A}\right)\right]^2 \right\rangle = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\left\langle \left(\overrightarrow{u_p}.\overrightarrow{u_{p'}}\right)\left(\overrightarrow{u_{p'}}.\overrightarrow{u_A}\right)^2 \right\rangle = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\cos^2\alpha \sin^2\alpha.$$

   Cet éclairement est nul si $\alpha = 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc si P' est orienté parallèlement à P ou bien à A, qui sont croisés.

4. On a $\alpha = \Omega t$. On en déduit que :

   $$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\cos^2\Omega t \sin^2\Omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{8}\sin^2(2\Omega t) = \frac{\mathcal{E}_0}{16}\left(1 - \cos(4\Omega t)\right)$$

   Ce dispositif fournit une intensité modulée à 4Ω.

EXERCICE 2 :

On considère le champ électrique d'une onde électromagnétique plane $\vec{E}(\vec{r},t)$ qui a pour composantes : $\begin{cases} A_x \cos(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\varphi_x) \\ A_y \cos(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\varphi_y) \\ 0 \end{cases}$

1. Retrouver la relation qui relie A_x, A_y et $\varphi=\varphi_y-\varphi_x$
2. Préciser les conditions sur ces trois paramètres pour que cette onde présente une polarisation soit rectiligne soit circulaire soit elliptique.

CORRECTION

1.

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{A_x} = \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ \dfrac{E_y}{A_y} = \cos(\omega t - kz + \varphi_y) = \cos(\omega t - kz + \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x) \end{cases}$$

En posant $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{A_x} = \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ \dfrac{E_y}{A_y} = \cos(\omega t - kz + \varphi_y)\cos\varphi - \sin(\omega t - kz + \varphi_x)\sin\varphi = \dfrac{E_x}{A_x}\cos\varphi - \sin(\omega t - kz + \varphi_x)\sin\varphi \end{cases}$$

On élève l'expression au carré et on somme :

$$\left((E_y/A_y)-(E_x/A_x)\cos\varphi\right)^2 = \sin^2(\omega t - kz + \varphi_x)\sin^2\varphi = \left(1-\frac{E_x^2}{A_x^2}\right)\sin^2\varphi$$

$$(E_y/A_y)^2 + (E_x/A_x)^2\cos^2\varphi - 2(E_y/A_y)(E_x/A_x)\cos\varphi = \left(1-\frac{E_x^2}{A_x^2}\right)\sin^2\varphi$$

$$(E_y/A_y)^2 + (E_x/A_x)^2 - 2(E_y/A_y)(E_x/A_x)\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

2. a). $\varphi = 0$ ou π alors $(E_y/A_y)^2 + (E_x/A_x)^2 \pm 2(E_y/A_y)(E_x/A_x) = 0$ ou encore : $\dfrac{E_y}{A_y} = \pm\dfrac{E_x}{A_x}$. La polarisation est rectiligne

b). $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ alors $(E_y/A_y)^2 + (E_x/A_x)^2 = 1$. La polarisation est elliptique avec O_x et O_y les axes de l'ellipse.

De plus en z = 0, pour $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\begin{cases} E_x = A_x\cos(\omega t) \\ E_y = -A_y\sin(\omega t) \end{cases}$. L'onde est elliptique droite.

Par ailleurs, si $A_x = A_y$ alors la polarisation est circulaire.

c). $\varphi \neq k\pi$, la polarisation est elliptique.

Si $0 < \varphi < \pi$, la polarisation est elliptique gauche.

Si $\pi < \varphi < 2\pi$, la polarisation est elliptique droite.

Pour cela, on peut regarder le signe de $\left(\dfrac{dE_y}{dt}\right)_{t=0} = -E_{0y}\omega \sin\varphi$ en fonction de φ.

EXERCICE 3 :

Donner les expressions réelles puis complexes $\vec{E}(\vec{r},t)$ pour les ondes planes suivantes :

1. Onde se propageant suivant l'axe Ox et polarisée linéairement à π/3 de Oy
2. Onde se propageant suivant Oy et polarisée elliptiquement à droite, le grand axe de l'ellipse, suivant Oz, étant trois fois plus grand que le petit axe.
3. Onde polarisée linéairement suivant Oy et se propageant parallèlement au plan zOx à π/4 de Oz.

CORRECTION :

1. L'onde se propage suivant l'axe Ox, on en déduit que $E_x = 0$.

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_{0z}\cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

   Avec $E_{0z}/E_{0y} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

2. L'onde se propage selon Oy, on en déduit que $E_y = 0$.

$$\begin{cases} E_x = E_{ox}\cos(\omega t - ky) \\ E_y = 0 \\ E_z = E_{0z}\cos\left(\omega t - ky \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

   Le grand axe est selon Oz, on en déduit que $E_{0z} = 3E_{0x}$.

3. L'onde est polarisée linéairement selon Oy donc $E_x = 0$ et $E_z = 0$. La direction de propagation est dans le plan z0x à π/4.

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\cos\left(\omega t - \dfrac{kx + kz}{\sqrt{2}}\right) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 4 : Variation du déphasage avec la fréquence

Une lame est demi-onde pour la radiation verte du mercure de longueur d'onde λ_1 = 546 nm. Déterminer son retard de phase $\varphi(\lambda)$ pour une longueur d'onde quelconque, en négligeant les variations des indices avec la longueur d'onde.
Faire le calcul pour λ_2 = 450 nm.

CORRECTION :

Le retard de phase est : $\varphi(\lambda) = \dfrac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)e$.

Comme $\varphi(\lambda_1) = \dfrac{2\pi}{\lambda_1}(n_y - n_x)e = \pi$ et que les indices et l'épaisseur sont ici des constantes, nous avons donc que $\varphi(\lambda_2) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\varphi(\lambda_1) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\pi \approx 218° \neq 180°$.

EXERCICE 5 :

Un faisceau lumineux parallèle de pulsation ω et de longueur d'onde λ se propageant selon Oz est décrit par :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k_0 z) \\ E_y = E_{0y}\sin(\omega t - k_0 z) \text{ avec } k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda \\ E_z = 0 \end{cases}$$

On supposera que les amplitudes E_{0x} et E_{0y} sont des grandeurs essentiellement positives.
On suppose que $E_{0x} > E_{0y}$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une vibration elliptique dont on précisera les axes et le sens de parcours.
2. Un analyseur est placé dans le plan z = 0 ; sa direction de polarisation fait l'angle α avec Ox. Déterminer l'expression du champ **E** après l'analyseur, et en déduire la loi de variation de l'éclairement après l'analyseur lorsque α varie.Tracer l'allure du graphe.
3. Montrer que l'on peut ainsi déterminer les axes d'une lumière polarisée elliptiquement et préciser le grand axe et le petit axe.
4. Reprendre les questions précédentes avec :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k_0 z) \\ E_y = -E_{0y}\sin(\omega t - k_0 z) \text{ avec } k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda \\ E_z = 0 \end{cases}$$

CORRECTION :

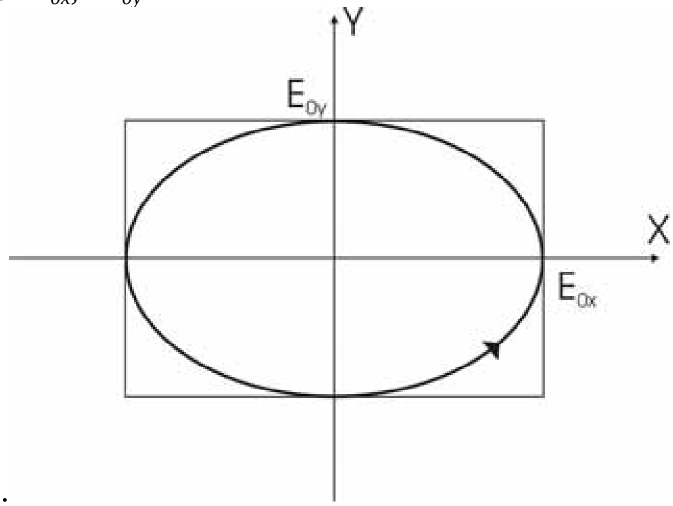
1. Décrivons le champ dans le plan d'onde z = 0.

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\sin(\omega t) \text{ avec } k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Le champ $\vec{E}$ décrit une ellipse paramétrée par t. On le voit très nettement en éliminant le paramètre t par :

$$\left(E_x / E_{0x}\right)^2 + \left(E_y / E_{0y}\right)^2 = 1$$

C'est bien l'équation d'une ellipse rapporté à ses axes. Elle est inscrite dans un rectangle de côtés *$2E_{0x}$, $2E_{0y}$*



.

En suivant par continuité le champ $\vec{E}$ à partir de t = 0, on note que la polarisation est gauche (dans le sens de la flèche sur la figure).

2. Le champ transmis est dans le plan z = 0 : $\vec{E}_{transmis} = \left(\vec{E}.\vec{u}\right)\vec{u}$ où $\vec{u}$ est la direction du polariseur.

$\vec{E}_{transmis} = \left(E_x \cos\alpha + E_y \sin\alpha\right)\vec{u}$

Soit en remplaçant E_x et E_y par leurs expressions où l'on tient compte de z = 0 :

$\vec{E}_{transmis} = \left(E_{0x} \cos\alpha \cos(\omega t) + E_{0y} \sin\alpha \sin(\omega t)\right)\vec{u}$

Pour déterminer l'éclairement lumineux, on va utiliser la notation complexe :

$\underline{\vec{E}_{transmis}} = \left(E_{0x} \cos\alpha - iE_{0y} \sin\alpha\right)e^{i\omega t}\vec{u}$

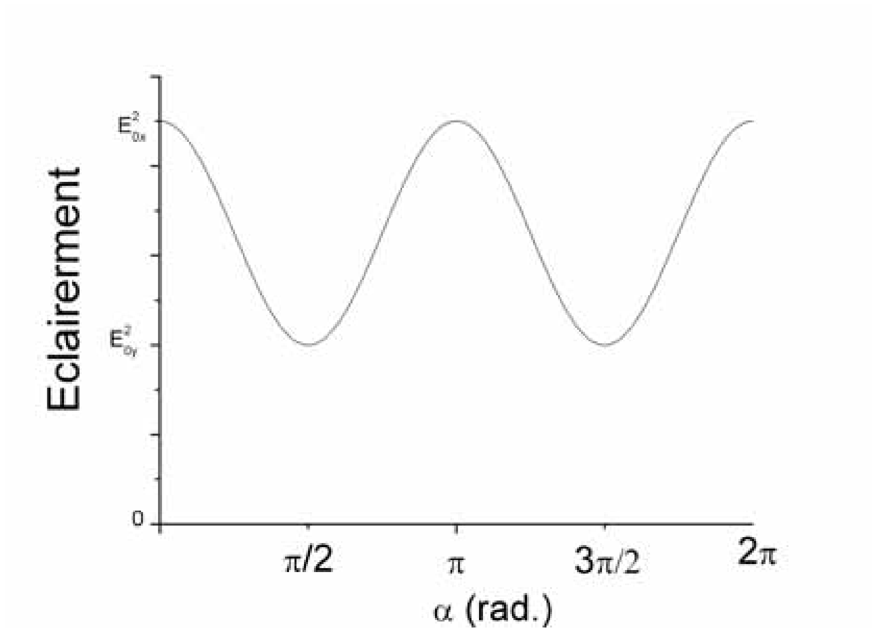
On en déduit le champ complexe conjugué :

$\underline{\vec{E}^{*}_{transmis}} = \left(E_{0x} \cos\alpha + iE_{0y} \sin\alpha\right)e^{-i\omega t}\vec{u}$.

D'où l'éclairement :

$\mathcal{E} = \vec{E}_{transmis}.\vec{E}^{*}_{transmis} = \left(E_{0x}{}^2 \cos^2\alpha + E_{0y}{}^2 \sin^2\alpha\right) = \left(E_{0x}{}^2 - E_{0y}{}^2\right)\cos^2\alpha + E_{0y}{}^2$

Les variations de $\mathcal{E}$ en fonction de α sont représentées ci-dessous.



3. On constate sur le graphe précédent, que les maxima d'éclairement sont atteints lorsque le polariseur est parallèle à la direction du grand axe, et les minima lorsque le polariseur est parallèle à la direction du petit axe. **On peut ainsi repérer les axes de l'ellipse, mais pas le sens de parcours.**

4. Le champ incident correspond cette fois à une polarisation elliptique droite (le sens de parcours de l'ellipse a changé). Formellement, on passe d'un cas à l'autre en changeant E_{0y} en $-E_{0y}$. L'expression de l'éclairement reste le-même, ainsi que le tracé du graphe, et le résultat en gras à la fin de la troisième question.

EXERCICE 6 :

Un faisceau lumineux parallèle de pulsation ω et de longueur d'onde λ se propageant selon Oz est décrit par :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_y = E_0 \sin(\omega t - k_0 z) \\ E_z = 0 \end{cases} \text{avec } k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda .$$

L'amplitude E_0 est une grandeur essentiellement positive.

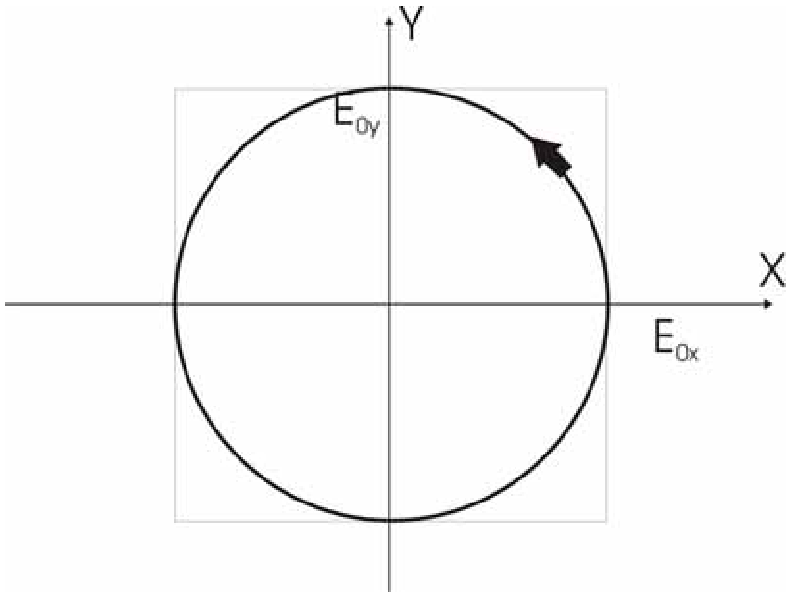
1. Montrer qu'il s'agit d'une vibration circulaire dont on précisera les axes et le sens de parcours.
2. On place une lame demi-onde dans le plan z = 0, la direction de l'axe rapide fait un angle de 0° avec *Ox*. Déterminer le champ $\vec{E}$ à la sortie de la lame demi-onde. Quel est le nouvel état de polarisation ?
3. On remplace la lame demi-onde par une lame quart-d'onde. Quel est le nouvel état de polarisation ?

CORRECTION :

1. Donnons les composantes du champ $\vec{E}$ dans le plan z = 0 :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = E_0\sin(\omega t) \text{ avec } k_0 = \omega / c = 2\pi/\lambda \\ E_z = 0 \end{cases}$$

On voit tout de suite que $E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$ de sorte qu'il s'agit d'une onde polarisée circulairement. En suivant par continuité l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ depuis t = 0, on voit qu'il s'agit d'une polarisation gauche.



2. L'axe rapide étant selon Ox, la composante selon Oy a un retard de π supplémentaire à la sortie de la lame : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi$. On en déduit qu'après la lame, le champ a pour composantes : $\vec{E}_{\text{après lame}}\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = E_0\sin(\omega t - \pi) \\ E_z = 0 \end{cases}$

Après la lame :

$$\vec{E}_{\text{après lame}}\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = -E_0\sin(\omega t) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Après la lame, la polarisation est devenue circulaire droite.

3. L'axe rapide étant selon Ox, la composante selon Oy a un retard de π/2 supplémentaire à la sortie de la lame : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit qu'après la lame, le champ a pour composantes :

$$\vec{E}_{\text{après lame}}\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = E_0\sin(\omega t - \pi/2) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\vec{E}_{après\ lame}\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = E_0\cos(\omega t) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

La polarisation est rectiligne à la sortie de la lame et inclinée de 45°.