

TD5 : équations de Maxwell : correction

Exercice 1 Ondes sphériques

1. Rappels sur l'équation d'onde à une dimension

- (a) L'équation de d'ALEMBERT (ou équation de propagation) vérifiée par une onde $\psi(x, t)$ se propageant suivant l'axe des x uniquement s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

- (b) Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme :

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

où f et g sont des fonctions quelconques.

- (c) Une onde plane progressive est une onde de la forme

$$\psi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

pour une onde se propageant dans le sens des x croissants et

$$\psi(x, t) = A \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right)$$

pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants.

2. (a) Ici, ψ ne dépend que de t et de la distance $r = OM$ au point origine O .

Donc, $\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi)$ seulement (les autres termes sont nuls car ψ ne dépend ni de θ , ni de ϕ).

- (b) L'équation de d'ALEMBERT à 3 dimensions s'écrit donc :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

En multipliant cette équation par r et en remarquant que $r \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 r\psi}{\partial t^2}$, il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r\psi}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation correspond à l'équation de propagation unidimensionnelle vérifiée par la fonction $F(r, t) = r\psi(r, t)$.

- (c) On sait que $F(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct)$ et donc la forme générale des ondes sphériques, solutions de l'équation de propagation de d'ALEMBERT est :

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct) + \frac{1}{r} g(r + ct)$$

- (d) Le premier terme correspond à une onde divergeant à partir de O et le second à une onde convergeant en O .

- (e) Les surfaces d'onde (ie. surfaces équiphases) sont des surfaces où r est constant, ce sont donc les sphères de centre O . Si on cherche à évaluer le vecteur de Poynting, celui-ci est proportionnel à $1/r^2$. Ainsi, sur les surfaces équiphases, l'énergie totale (proportionnelle à l'intégrale du vecteur de Poynting sur la surface) est *constante*.

Le terme en $\frac{1}{r}$ dans l'amplitude de l'onde assure donc la conservation de l'énergie.

Exercice 2 : guide d'onde

1. Cette onde, polarisée rectilignement suivant \mathbf{u}_z se propage suivant les x croissants.
2. Elle n'est pas plane car son amplitude dépend de y . Les plans normaux à l'axe Ox ne sont pas des surfaces équiphasées.
3. (a) On a conservation de la composante tangentielle de \mathbf{E} au niveau de l'interface.
 (b) A l'intérieur du métal constituant les parois métalliques (conducteur parfait), on a $\mathbf{E} = \mathbf{0}$
 (c) L'onde est tangente aux parois. Il faut donc que $\mathbf{E}(\pm a/2, t) = \mathbf{0}$. C'est bien le cas.
- 4.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

5. (a) On écrit $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}$ de 2 façons différentes.

- $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$

Or $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

Donc $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$

- $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = \nabla \wedge \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$

ie. comme les opérateurs ∇ et $\frac{\partial}{\partial t}$ sont linéaires,

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \mathbf{B}$$

ie. $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Finalement,

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- (b) $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{u}_z \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right)$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -k^2 E_z$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 E_z$$

et $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0$

Donc, $\Delta \mathbf{E} = -\left(k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right) \mathbf{E}$

D'autre part, $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}$

Finalement, l'équation de propagation s'écrit :

$$\left(k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right) \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$$

On en déduit :

$$k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

- (c) On a propagation si k est réel, ie. si $\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 > 0$, ie. si $\omega > \omega_c$ avec $\omega_c = \frac{c\pi}{a}$

Exercice 3 : Effet MEISSNER

1. $[\lambda^2] = \frac{[\mathbf{A}]}{[\mu_0 \mathbf{j}]}$

Or $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, ie. $[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]L$

et $[\mu_0 \mathbf{j}] = [\text{rot} \mathbf{B}] = [\mathbf{B}]/L$ d'après l'équation de Maxwell-Ampère.

Donc $[\lambda^2] = L^2$: λ a la dimension d'une longueur et s'exprime en m.

Ordre de grandeur pour $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^{-31}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{29} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}} \simeq \sqrt{10^{-15}} \simeq 10^{-8}$ m.

2. a) Nous sommes en statique, donc, l'équation de Maxwell Ampère s'écrit : $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$.
Prenons le rotationnel de cette équation. Compte-tenu du fait que $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, et que $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{B}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}$, il vient : $\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} = \mathbf{0}$

b) Symétries : $\mathbf{B} = B(z) \mathbf{u}_x$.

L'équation précédente devient donc : $\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda^2} B = 0$

La solution de cette équation différentielle du second ordre est : $B = \alpha \exp \frac{z}{\lambda} + \beta \exp \frac{-z}{\lambda}$

Les conditions aux limites imposent :

$B(d) = B_0 = \alpha \exp \frac{d}{\lambda} + \beta \exp \frac{-d}{\lambda}$

$B(-d) = B_0 = \alpha \exp \frac{-d}{\lambda} + \beta \exp \frac{d}{\lambda}$

ie. $\alpha (\exp \frac{2d}{\lambda} - \exp \frac{-2d}{\lambda}) = B_0 (\exp \frac{d}{\lambda} - \exp \frac{-d}{\lambda})$

et $\alpha = \beta$.

ie. $\alpha = \beta = B_0 \frac{\sinh d/\lambda}{\sinh 2d/\lambda} = B_0 \frac{1}{2 \cosh d/\lambda}$

Finalement, $\mathbf{B} = B_0 \frac{\cosh z/\lambda}{\cosh d/\lambda} \mathbf{u}_x$

Conclusion : \mathbf{B} pénètre dans le supraconducteur sur une distance λ , ie. le supra expulse les lignes de champ de \mathbf{B} (cf. Fig.1).

c) $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial z} \mathbf{u}_y$

ie $\mathbf{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\sinh z/\lambda}{\cosh d/\lambda} \mathbf{u}_y$

(cf. Fig.2).

- d) A la limite $d \gg \lambda$, on peut modéliser le matériau supraconducteur par 2 couches infinies en $z = -d$ et $z = +d$ parcourues par un courant surfacique $\mathbf{j}_s = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \mathbf{u}_y$

Ces plaques créent $\mathbf{B} = \pm \frac{\mu_0 j_s}{2} \mathbf{u}_x$

Donc $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ à l'extérieur des plaques et $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ entre les plaques.

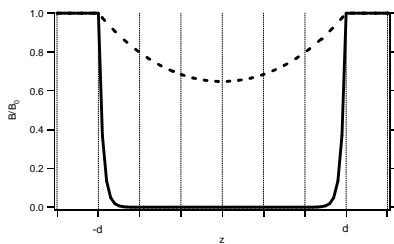


Figure 1: B/B_0 en fonction de z . Trait plein : $d \gg \lambda$, pointillés : $d \simeq \lambda$

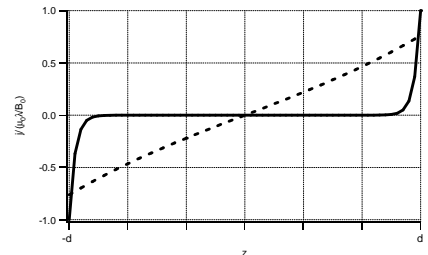


Figure 2: j en fonction de z . Trait plein : $d \gg \lambda$, pointillés : $d \simeq \lambda$