Christian GARING
Frédéric PAVIET

Les Mille et Une Questions en **PRÉPA**

PHYSIQUE

2e année MP/MP*

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

ellipses

2e année

MP/MP*

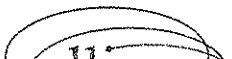
Les Mille et Une questions de la physique en prépa

Nouveau programme

Christian GARING Frédéric PAVIET

Professeurs en classes préparatoires au lycée Thiers à Marseille et au lycée Kléber à Strasbourg

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance



Retrouvez tous les titres de la collection
Les Mille et Une questions
sur http://www.editions-ellipses.fr

ISBN 978-2-7298-9832-8
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2014
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-propos

Ce livre conforme aux nouveaux programmes de 2014 reprend une conception originale imaginée dans l'unique but d'être utile aux élèves. Sous forme d'une batterie de questions de cours courtes, de conseils et d'exercices, il embrasse la totalité du programme de physique de la filière MP.

Il doit permettre de préparer efficacement une colle, de faire le point sur ses connaissances avant un devoir surveillé, et d'entamer sereinement les révisions de fin d'année pour la préparation à l'écrit et à l'oral des concours. Mais pour éviter de travailler par à-coups, il vaut mieux en faire un « compagnon de route », utile de façon régulière pour un travail de fond tout au long de l'année.

Il regroupe tout ce qui est indispensable pour réussir à l'écrit et à l'oral et sera donc utile à tous ceux qui ont à cœur de travailler la physique dans l'objectif des concours et de leur formation personnelle.

La présentation sous cette forme est inédite ; l'ouvrage de seconde année MP/MP* comporte 11 chapitres, chacun regroupant de 40 à 90 questions réparties en rubriques :

- Les ordres de grandeur utiles
- Le cours d'abord
- Conseils à suivre ; erreurs à éviter
- Applications directes du cours
- Questions de réflexion ; physique pratique
- Exercices
- Travaux pratiques (selon les cas)

Bien sûr chaque chapitre « questions » est suivi de son chapitre « réponses » **entièrement rédigé** et reconnaissable à sa marge grisée sur le côté droit.

L'esprit de ces rubriques est détaillé ci-après :

Les ordres de grandeur utiles

Cette rubrique donne des valeurs utiles :

- des constantes fondamentales : à l'oral, par exemple, il est bon de connaître la masse et la charge de l'électron, la perméabilité magnétique du vide, la constante de Planck,...
- mais aussi des grandeurs courantes (et que l'on ne peut pas ignorer) : les longueurs d'onde du doublet jaune du sodium, l'indice de réfraction du verre, la masse molaire de l'air,...
- et enfin, une foule de données dont il est bon d'avoir une idée numérique : les dimensions d'un atome ou d'un noyau, l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, la densité particulaire de l'air, la masse de la Terre,...

Toutes ces grandeurs ont une unité à respecter (non, un champ électrique ne s'exprime pas en volts !) et, le cas échéant, à convertir en unité du système international avant de passer à une application numérique (non, une masse volumique ne s'utilise pas en $g.cm^{-3}$).

Il est conseillé de (re)lire les tableaux au début de chaque chapitre afin de se faire aux ordres de grandeur, dont la mémorisation vient automatiquement avec la pratique et la réflexion.

Le cours d'abord

La physique n'étant pas une « science contemplative », il est illusoire de croire qu'il suffit de lire le cours pour savoir faire ! L'apprentissage du cours suppose au contraire une implication active, stylo à la main et cahier fermé pour refaire les calculs, les schémas, les démonstrations des théorèmes,...

Une réflexion sur les modèles et les hypothèses s'impose : la signification et la vraisemblance des résultats doivent primer.

Sans ce travail approfondi, pas de miracle : la résolution des exercices et problèmes est vite compromise.

Les questions de cours proposées dans ce livre se posent fréquemment telles quelles aux écrits des concours. Elles n'ont pas vocation à se substituer au cours du professeur, mais elles permettent de « Faire le Point » par l'auto-évaluation des connaissances utiles pour réussir.

Elles sont courtes, précises et sans difficultés et sont regroupées par paragraphes d'intérêt. Il ne s'agit pas d'y répondre par une « formule », mais, comme à l'oral, de conduire un raisonnement à l'aide de phrases étayées par des démonstrations reproduisant une partie du cours. Les résultats essentiels doivent être obligatoirement mémorisés : ils apparaissent encadrés dans la partie « réponses ».

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

Il faut apprendre à être réceptif aux conseils, et non essayer de « réinventer les méthodes ». Car hélas, l'addition des intensités de deux ondes cohérentes entre elles ne permet pas de décrire les phénomènes d'interférences, et l'omission du passage en notation complexe pour l'étude d'un système dissipatif en régime forcé tourne vite au cauchemar trigonométrique...

Alors dissipons d'entrée tout malentendu à propos de cette rubrique : les « conseils à suivre » sont prodigués pour aider sincèrement, pas pour contraindre inutilement ; les « erreurs à éviter » sont signalées afin de ne pas être commises et non pour induire en erreur.

La connaissance du cours n'est rien si elle n'est pas renforcée par des conseils d'application. Cette rubrique est donc à lire plutôt dix fois qu'une, et surtout à faire sienne, sans hésitation ni état d'âme...

Applications directes du cours

Tout exercice sur une partie du programme récemment abordée présente une difficulté par sa nouveauté, tant que les bons réflexes ne sont pas installés, alors qu'il paraîtra élémentaire quelque temps après : c'est cette phase d'apprentissage qu'il faut surmonter sans se décourager.

Cette rubrique regroupe de petits exercices au contenu plus modeste et dont la résolution suppose simplement l'application directe d'un résultat de cours ou d'une technique immédiate de calcul, ce qui n'exclut pas la réflexion. En cas de difficulté, ne pas se précipiter sur la solution, mais revoir la partie correspondante du cours.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

Cette rubrique, qui s'inscrit dans l'esprit des nouveaux programmes, est faite pour les curieux, ceux qui aiment comprendre le monde qui les entoure. Elle plaira à ceux qui aiment réinvestir leurs connaissances fondamentales dans la résolution de problèmes concrets.

Les questions inciteront le jeune scientifique à penser comme un futur ingénieur ou chercheur : quelles applications imaginer pour un résultat ? et quelle notion scientifique mobiliser pour comprendre un phénomène ?

Les calculs y sont limités, et il faut faire preuve de bon sens ; seules certaines questions sont un peu plus difficiles.

Exercices

Aucune intention d'être exhaustif ici. Chaque chapitre propose néanmoins une liste d'une douzaine d'exercices variés, souvent posés à l'oral des concours ou issus de problèmes d'écrit récents, avec pour intention de faire découvrir la diversité du sujet traité dans le chapitre. Certains énoncés sont « classiques », de difficulté moyenne, présentant un intérêt explicité dans le titre ; d'autres, marqués d'un astérisque (*), soit sont plus originaux, soit nécessitent un peu plus de réflexion...

Le but n'est pas de les apprendre en espérant « tomber dessus » le jour de l'écrit ou de l'oral, mais d'acquérir sur ces exercices les réflexes sains permettant d'en aborder d'autres dans de bonnes conditions.

Il faut, à l'écrit comme à l'oral, être très attentif aux applications numériques qui sont le débouché naturel d'un grand nombre d'exercices ou de problèmes de physique. Pour cela il est très important d'apporter systématiquement, pour chaque application numérique, un commentaire physique sur la valeur que l'on vient de calculer : ordre de grandeur, pertinence, intérêt pour l'étude, vérification d'une hypothèse, compréhension concrète du phénomène étudié, comparaison avec d'autres grandeurs, faisabilité d'une mesure expérimentale...

Travaux pratiques

L'ambition de cette partie reste modeste. Elle conclut un bon nombre de chapitres, ceux qui se prêtent particulièrement aux travaux pratiques, et son but n'est pas de proposer des séances de TP toutes faites. En revanche elle regroupe une série de questions simples sur les dispositifs, les montages, les conditions expérimentales, les fonctionnements d'appareils, le pourquoi de telle observation, les ordres de grandeur classiques... faisant partie des compétences expérimentales.

Ce sont de bons exemples de questions pouvant être abordées à la partie orale de TP des concours, celle-ci jouant un rôle important pour départager les candidats.

Cette partie est particulièrement orientée, dans l'esprit des nouveaux programmes, vers la mesure et l'exploitation des séries de mesures qui, avec les incertitudes, sont au cœur de la démarche scientifique.

Nous tenons à remercier tout particulièrement Anne Henriet et Marc Venturi pour leurs relectures attentives et leurs remarques constructives.

Pour conclure nous exprimons le vœu que ce livre soit utile au plus grand nombre, à ceux qui simplement ont à cœur de travailler la physique parce qu'elle donne lieu à des épreuves de concours et à ceux, heureusement nombreux, qui par curiosité et goût, ont toujours plaisir à étudier cette discipline.

Les auteurs

Sommaire

Chapitres	Questions	Réponses
1 : Traitement du signal	15	31
2 : Les lois de l'électromagnétisme	69	81
3 : Ondes électromagnétiques	105	129
4 : Électrostatique	185	203
5 : Magnétostatique	251	265
6 : Optique physique	295	321
7 : Mécanique	381	399
8 : Physique quantique	443	461
9 : Thermodynamique	505	521
10 : Diffusion thermique	549	569
11 : Thermodynamique statistique	609	623

Formulaire d'analyse vectorielle

Composition d'opérateurs

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V = \vec{0}$$
$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = 0$$
$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V = \Delta V$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Composition de champs

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ (V_1 V_2) = V_1\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V_2 + V_2\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V_1$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\ (V\vec{A}) = V\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\ V \wedge \vec{A}$$
$$\text{div}\ (V\vec{A}) = V\ \text{div}\ \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\ V.\vec{A}$$
$$\text{div}\ (\vec{A_1} \wedge \vec{A_2}) = \vec{A_2}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A_1} - \vec{A_1}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A_2}$$

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$$

Théorème d'Ostrogradsky : $\oiint_{(S)} \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \text{div}\,\vec{A}\ d\tau$

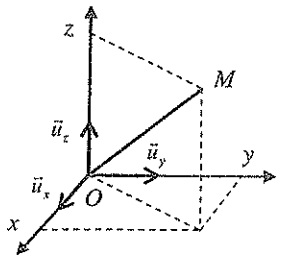
Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue au volume intérieur à cette surface.

Théorème de Stokes : $\oint_{(C)} \vec{A}.\overrightarrow{dM} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}.\overrightarrow{dS}$

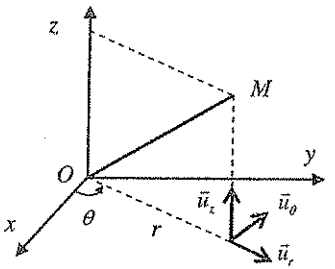
La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque s'appuyant sur ce contour.

Systèmes de coordonnées

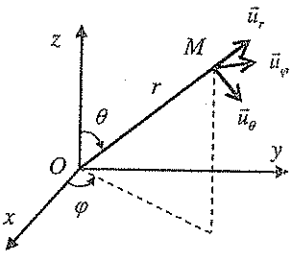
cartésiennes



cylindriques



sphériques



Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\text{div}\ \vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta V = \vec{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ en chaque point, constituent des champs uniformes et ont tous une divergence et un rotationnel nuls.

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\text{div}\ \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Vecteurs unitaires : $\text{div}\ \vec{u}_r = \frac{1}{r}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_r = \vec{0}$; $\text{div}\ \vec{u}_\theta = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_z}{r}$; $\text{div}\ \vec{u}_z = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_z = \vec{0}$

Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

$$\text{div}\ \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Quelques résultats utiles : $\text{div}\ \vec{u}_r = \frac{2}{r}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_r = \vec{0}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\varphi = \frac{\vec{u}_z}{r\sin\theta}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$

NB : Ne pas utiliser l'opérateur Nabla en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Petit formulaire pour les calculs en physique

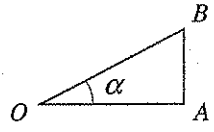
Équation du second degré

Avant de chercher les solutions d'une équation $ax^2+bx+c=0$, il est impératif d'obtenir des renseignements sur le signe des racines (ou de leur partie réelle) ; pour cela il suffit de voir le signe de leur somme $S=-b/a$ et de leur produit $P=c/a$.

Formules de trigonométrie

$$\sin\alpha=\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypothénuse}}=\frac{AB}{OB},\quad \cos\alpha=\frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypothénuse}}=\frac{OA}{OB}$$

$$\tan\alpha=\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}}=\frac{AB}{OA}$$



Il faut connaître les formules de trigonométrie, en particulier : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\ ;\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ ;\ \sin 2x=2\sin x\cos x$$

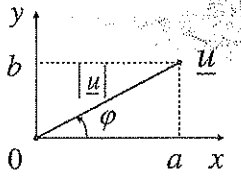
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\ ;\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\quad\text{et}\quad \sin p+\sin q=2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}\ \text{(le – d'abord !)}$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)\quad\text{et}\quad \sin a\sin b=\frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

Les nombres complexes

- dans l'écriture mathématique $\underline{u}=a+ib$ apparaissent les parties réelle $a=|\underline{u}|\cos\varphi$ et imaginaire $b=|\underline{u}|\sin\varphi$, avec $|\underline{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi=\arg\underline{u}=\arctan(b/a)$ (à π près, il faut en plus préciser $\sin\varphi$ ou $\cos\varphi$) soit $\tan\varphi=\frac{b}{a}$.



- en physique, on préfère souvent écrire $\underline{u}=|\underline{u}|\exp(i\varphi)$ en faisant apparaître directement le module $|\underline{u}|$ et la phase (ou argument) φ.

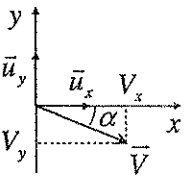
$$\text{Rappel :}\ \left|\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right|=\frac{|\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|}\quad\text{et}\quad \arg\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}=\arg\underline{u}_2-\arg\underline{u}_1$$

Projection d'un vecteur

Il faut particulièrement veiller aux signes des projections.

sur la figure : $V_x = \vec{V}.\vec{u}_x > 0$ et $V_y = \vec{V}.\vec{u}_y < 0$

avec $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y$



Théorème de Pythagore : $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ car $V^2 = \vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$

Avec l'angle α (pris positif), $V_x = V\cos\alpha > 0$ et $V_y = -V\sin\alpha < 0$

Le théorème de Pythagore redonne $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Moyenne de fonctions temporelles

Si $u(t) = u_0\cos(\omega t + \varphi)$, alors sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $< u > = 0$ et $< u^2 > = \frac{1}{2}u_0^2$

Utilisation de la notation complexe pour les grandeurs énergétiques moyennes (attention, aucune grandeur énergétique ne peut être complexe !).

Si $f(t) = f_0\cos(\omega t)$ et $g(t) = g_0\cos(\omega t + \varphi)$, alors :

$$< fg > = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}.\underline{g}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}^*.\underline{g}) = \frac{1}{2}f_0 g_0\cos\varphi \quad \text{et} \quad < f^2 > = \frac{1}{2}|\underline{f}|^2$$

Formule de Taylor à l'ordre 1

Il faut savoir faire le lien entre :

– l'écriture mathématique : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h\frac{df}{dx}(x_0) + \ldots$

– et l'écriture physique : $u(x_0 + dx) - u(x_0) = du = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0} dx + \ldots$

Pour x, $|x| \ll 1$, on a $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$, $\tan x \approx x$, $\ln(1+x) \approx x$, $e^x \approx 1 + x$, $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \ldots$

Et si $u(x,y)$ est une fonction de deux variables, à l'ordre 1 : $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

Le théorème de Schwarz indique que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

Une grandeur petite ne doit être prise nulle

De la même manière qu'en mathématique une fonction n'est pas « équivalente à zéro », en physique non plus une grandeur petite ne doit être prise nulle ; si elle intervient dans une fonction, il suffit (en général) de prendre le premier terme non nul du développement limité de cette fonction.

En revanche, à l'ordre un en ε, on a simplement $\varepsilon.f(\varepsilon) = \varepsilon\left[f(0) + f'(0)\varepsilon + \ldots\right] \approx \varepsilon.f(0)$.

Formule du binôme

Surtout appliquée aux développements limités (ε tel que $|\varepsilon| \ll 1$ est l'infiniment petit)

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots$$

Par exemple : $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$; $\frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1+\varepsilon$; $\sqrt{1\pm\varepsilon} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{2}$

Dans le cas $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2$, il ne faut pas faire d'abord le développement limité de la racine puis celui de l'inverse, mais les deux simultanément !

Disque, cylindre et sphère

Disque : périmètre $2\pi r$; surface πr^2 ; élément de surface d'une couronne circulaire entre r et $r+dr$: $2\pi r dr$.

Cylindre : surface latérale $2\pi rh$; volume $\pi r^2 h$; élément de volume d'une coquille circulaire entre r et $r+dr$: $2\pi r dr h$.

Sphère : surface $4\pi r^2$; volume $4\pi r^3/3$; élément de volume d'une coquille sphérique entre r et $r+dr$: $4\pi r^2 dr$.

Formules de trigonométrie hyperbolique

Relations fondamentales : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$

$$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \ ; \ (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx) \ ; \ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ ; \ \operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ ; \ \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivées : $\frac{d}{dx}\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$; $\frac{d}{dx}\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$; $\frac{d}{dx}\operatorname{th} x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$\frac{d}{dx}\coth x = 1 - \coth^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \ ; \ \frac{d}{dx}\operatorname{argch} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ ; \ \frac{d}{dx}\operatorname{arth} x = \frac{1}{1-x^2}$$

Développements limités au voisinage de zéro :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \ ; \ \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right) \ ; \ \operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)$$

Équation différentielle du premier ordre

$$\text{du type : } \tau\frac{dx}{dt}+x=x_0\cos\omega t$$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime transitoire** (ou libre en l'absence d'excitation $x_0\cos\omega t$) est solution de $\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{\tau}$ soit $x_t(t)=A\exp(-t/\tau)$; ce régime transitoire tend vers zéro.

– **le régime forcé** (par l'excitation) est une solution particulière recherchée sous la forme d'une fonction de même pulsation ω, mais déphasée (retard φ), $x_f(t)=X\cos(\omega t-\varphi)$, soit en passant en notation complexe :

$$(i\omega\tau+1)\underline{x}=x_0 \quad\Rightarrow\quad \underline{x}=Xe^{-i\varphi}=\frac{x_0}{1+i\omega\tau} \quad\text{d'où}\quad X=\frac{x_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad\text{et}\quad \tan\varphi=\omega\tau$$

NB : La détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale $x_t(t)+x_f(t)$!

Équation différentielle classique du second ordre

$\ddot{x}+\omega^2x=0$ admet comme solution : $x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t$ ou $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

$\ddot{x}-\omega^2x=0$ admet comme solution : $x(t)=ae^{\omega t}+be^{-\omega t}$ ou $x(t)=A\,\mathrm{ch}\,\omega t+B\,\mathrm{sh}\,\omega t$

Équation différentielle du second ordre en régime forcé

$$\text{du type : } a\ddot{u}+b\dot{u}+cu=e\cos(\omega t) \quad\text{où}\quad \dot{u}=\frac{du}{dt} \quad\text{et}\quad \ddot{u}=\frac{d^2u}{dt^2}$$

Les coefficients a, b et c sont constants (et positifs pour un système physique)

Le régime forcé (par l'excitation $e\cos(\omega t)$ à la pulsation ω) est une solution particulière de l'équation, elle-même de pulsation ω, mais déphasée (retard φ) sur l'excitation :

$u(t)=U\cos(\omega t-\varphi)$, soit en passant obligatoirement en **notation complexe** :

$$(-a\omega^2+bi\omega+c)\underline{u}=e \quad\Rightarrow\quad \underline{u}=Ue^{-i\varphi}=\frac{e}{c-a\omega^2+ib\omega} \quad\text{d'où par module et argument :}$$

$$U=\frac{e}{\sqrt{(c-a\omega^2)^2+b^2\omega^2}} \quad\text{et}\quad \tan\varphi=\frac{b\omega}{c-a\omega^2} \quad\text{(à préciser par le signe de } \sin\varphi)$$

Équation différentielle du second ordre à coefficients constants

du type : $a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=e\cos(\omega t)$ où $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ et $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime libre** (car l'excitation $e\cos(\omega t)$ disparaît) est solution de $a\ddot{x}+b\dot{x}+c=0$

L'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ avec en physique les trois constantes a, b et c positives, conduit à $S=-b/a\le 0$ et $P=c/a\ge 0$ d'où les deux cas :

- si $\Delta=b^2-4ac>0$ (ce qui suppose un fort coefficient de frottement b), les deux racines sont réelles négatives, notées $-r_1$ et $-r_2$, d'où une solution en exponentielles décroissantes : $x(t)=A\exp(-r_1t)+B\exp(-r_2t)$ appelé régime transitoire (car il tend vers zéro) apériodique
- si $\Delta=b^2-4ac<0$ (ce qui suppose un faible coefficient de frottement b), les deux racines sont complexes conjuguées à partie réelle négative, notées $-r\pm i\Omega$, d'où une solution (somme des 2 exponentielles complexes) oscillatoire d'amplitude en exponentielle décroissante :

$$x(t)=\exp(-rt).(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t) \quad \text{ou} \quad x(t)=\alpha\exp(-rt).\cos(\Omega t+\varphi)$$

$$\text{ou} \quad x(t)=\beta\exp(r_1t)+\gamma\exp(r_2t) \quad (r_1 \text{ et } r_2 \text{ racines complexes})$$

appelé régime transitoire pseudopériodique

À noter que dans tous les cas, le régime transitoire disparaît (tend vers zéro). Le régime critique est celui (un peu théorique) où $\Delta=0$.

– **le régime forcé** (par l'excitation) est solution particulière de $a\ddot{x}+b\dot{x}+c=e\cos(\omega t)$; elle se cherche sous la forme d'une fonction de même pulsation, mais déphasée (retard φ) : $x(t)=X\cos(\omega t-\varphi)$, soit en passant en notation complexe :

$$(-a\omega^2+bi\omega+c)\underline{x}=e \quad \Rightarrow \quad \underline{x}=Xe^{-i\varphi}=\frac{e}{c-a\omega^2+ib\omega} \quad \text{d'où } X \text{ et } \tan\varphi$$

NB : la détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale !

Chapitre 1
Traitement du signal

Les ordres de grandeur utiles

Les composants

Résistances en électronique	1 kΩ à 1 MΩ
Capacités en électronique	1 nF à 100 µF

Le matériel de TP

Temps de montée du créneau d'un GBF	$dV/dt \approx 50\ V/\mu s$
Résistance de sortie d'un GBF	50 Ω
Fréquence maximum d'un GBF	10 MHz
Bande passante d'un oscilloscope	60 MHz
Impédance d'entrée d'un oscilloscope	$R_e = 1\ M\Omega\ //\ C_e = 10\ pF$

Constantes de temps des dipôles classiques

constante de temps du dipôle RC $\tau = RC$	$R = 1\ k\Omega, C = 0{,}1\ \mu F$ $\tau = 0{,}1\ ms$
constante de temps du dipôle RL $\tau = L/R$	$R = 1\ k\Omega, L = 10\ mH$ $\tau = 10\ \mu s$
fréquence d'oscillation d'un dipôle LC $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$	$L \approx 10\ mH, C \approx 0{,}1\ \mu F$ $f_0 \approx 5\ kHz$

Le cours d'abord

Signaux

1. En électronique, quelle est la nature physique des signaux les plus courants ?
   Quel est le plus souvent utilisé ?
   Quelles sont les principales caractéristiques d'un signal ?

2. Pour un signal $u(t)$ dépendant du temps, définir sur un intervalle la moyenne, et la valeur quadratique moyenne (ou RMS ou encore efficace).
   Quelle est la valeur de ces grandeurs sur une période dans le cas où le signal est sinusoïdal d'amplitude U_m ?
   Si le signal est la tension aux bornes d'une résistance, à quelle grandeur physique la valeur RMS est-elle liée ?

3. Quelles sont la fréquence fondamentale f et la pulsation fondamentale ω d'un signal périodique de période T ?
Qu'est-ce que la décomposition spectrale du signal, et quelles sont les fréquences présentes *a priori* dans le spectre de ce signal ?
Quelle simplification peut-on apporter dans le cas où le signal est une fonction paire ou impaire du temps ?

4. Dans le spectre d'un signal périodique de période T, quelle est l'influence concrète sur la forme de sa représentation graphique en fonction du temps :
– du terme constant, encore appelé *offset* ?
– du terme fondamental ?
– des harmoniques de rang élevé ?

Filtres linéaires

5. Donner la définition d'un système linéaire, continu, et invariant.

6. Donner une propriété caractéristique d'un tel système utilisant l'ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation ω.

7. Définir la fonction de transfert complexe d'un système linéaire ainsi que l'ordre de ce système. Comment peut-on obtenir l'équation différentielle du système ? Qu'appelle-t-on fonction de transfert opérationnelle ?

8. Qu'est-ce qu'un filtre en électronique ? Un filtre actif et un filtre passif ?

9. On peut représenter graphiquement une fonction de transfert à l'aide d'un diagramme de Bode. De quoi est-il constitué ? Quel est son intérêt ?

10. Comment est affecté qualitativement le spectre d'un signal par un filtre linéaire ?
Est-il possible de faire apparaître ou disparaître de nouvelles composantes spectrales par filtrage linéaire ? Donner des exemples concrets.

11. Qu'est-ce qu'un moyenneur et comment choisir ses paramètres ?
En donner un exemple concret très simple sur une tension en électronique.

12. Expliquer comment il est possible, en utilisant un filtre linéaire passe-bande très sélectif (à la limite raisonner avec un filtre idéal parfaitement sélectif) avec une fréquence de résonance ajustable, de construire un analyseur de Fourier permettant la mesure des amplitudes des différentes composantes spectrales d'un signal périodique.
Définir des notations pour construire le raisonnement.

13. Définir un filtre intégrateur idéal. Quel est sa fonction de transfert ? Définir sa constante de temps.
Quels doivent être ses diagrammes de Bode en amplitude et en phase ?
Comment faut-il modifier ces résultats dans le cas d'un intégrateur inverseur ?

Pourquoi l'intégrateur idéal est-il un modèle inatteignable en réalité ? Par quel circuit concret à base de deux composants simples peut-on en pratique réaliser l'intégration d'une tension ? Dans quel domaine de fréquence ? Avec quelle constante de temps ?

14. Donner un exemple concret d'un autre circuit simple du deuxième ordre qui peut être un intégrateur de tension. Préciser dans quelles conditions et avec quelle constante de temps.

15. Transposer la question **13.** en remplaçant « intégrateur » par « dérivateur ».

■ Électronique numérique

16. En quoi consiste l'opération d'échantillonnage d'un signal continu ? Définir la fréquence d'échantillonnage f_e.

17. Énoncer la condition de Nyquist-Shannon.

18. Quel est le principe d'un convertisseur analogique-numérique ? Quels sont ses principaux paramètres de fonctionnement ?

19. Quelles sont les caractéristiques du spectre du signal discret obtenu après échantillonnage du signal d'origine ? En particulier, quelles sont les similitudes et les différences entre le spectre du signal d'origine et le spectre du signal échantillonné ?

20. Expliquer le phénomène de repliement de spectre.

21. Quel traitement permet, sur le signal à échantillonner, de supprimer ce repliement ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ La notation complexe en $\exp(j\omega t)$ est très utile en électronique mais elle est n'est valable en toute rigueur qu'en régime sinusoïdal à la pulsation ω. Sinon, quelle serait la signification du ω dans l'exponentielle ? En régime variable quelconque (non sinusoïdal) il est souvent préférable de revenir aux relations linéaires du type $u_L = L di_L / dt$ (tension aux bornes d'une bobine) ou $i_C = dq / dt = C du_C / dt$ (courant dans un condensateur) et établir une équation différentielle dont la solution est la fonction cherchée (tension ou courant).

L'équation différentielle obtenue est bien entendu valable dans le cas du régime sinusoïdal ; étant unique, elle peut être établie dans ce cas particulier avec la notation complexe puis étendue au cas d'une fonction du temps quelconque vue comme une superposition de sinusoïdes au sens de Fourier, mais cette justification doit être présentée et elle est souvent aussi longue que le calcul direct !

☐ La représentation complexe ne doit pas être utilisée pour exprimer une puissance en régime sinusoïdal. La puissance consommée par un dipôle $P = UI\cos\varphi$ (avec U la tension efficace aux bornes du dipôle, I le courant efficace traversant le dipôle et φ le déphasage tension-courant) est en effet non linéaire. On retrouve la même difficulté en électromagnétisme : *ne pas utiliser la notation complexe pour les énergies et les puissances.*

☐ Il faut savoir passer de la forme (partie réelle – partie imaginaire) à la forme (module – argument) d'un complexe dans les deux sens. Pour mémoire :

$$\underline{Z} = a + jb = |\underline{Z}|\exp(j\varphi) \qquad a = |\underline{Z}|\cos\varphi \qquad b = |\underline{Z}|\sin\varphi \qquad |\underline{Z}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a} \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

☐ La valeur quadratique moyenne d'un signal n'est égale à sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$ que dans le cas où il est sinusoïdal. Sinon, il faut reprendre le calcul à partir de la définition. Pour cette raison, il est préférable d'employer dans le cas non sinusoïdal comme vocabulaire « RMS » plutôt que « efficace ».

☐ Un raisonnement de type spectral doit devenir un réflexe : se demander d'abord si le filtre est linéaire. Si c'est le cas, il n'ajoute aucune nouvelle composante spectrale et se contente de modifier en amplitude et en phase les composantes existantes, sinon, il enrichit le spectre.
Pour préciser l'effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique, il faut penser à son effet sur chaque fréquence du spectre du signal, et donc, se demander :
– le filtre laisse-il passer ou non le continu ? (si c'est non, le signal de sortie est à moyenne nulle),
– le filtre est-il extrêmement sélectif ? (si oui, la sortie est soit sinusoïdale à la fréquence sélectionnée par le filtre si elle existe dans le spectre d'entrée, soit nulle sinon),
– le filtre coupe-t-il les hautes fréquences du spectre ? (si oui, les variations temporelles du signal de sortie sont moins « abruptes » que celles de l'entrée).

☐ Un intégrateur (ou un dérivateur) non inverseur est entièrement déterminé par sa constante de temps, ou de manière équivalente, par la valeur de son gain à une fréquence donnée.

☐ Un filtre linéaire affecte aussi la phase de chaque composante spectrale, même si on a tendance à privilégier l'action sur l'amplitude dans les représentations graphiques. Par exemple, l'inversion d'une composante spectrale (donc sinusoïdale) se traduit par une avance de phase de π de la sortie par rapport à l'entrée et une intégration (sans inversion) se traduit par un retard de $\pi/2$.

☐ Aucun filtre passe-bas, même numérique, n'est capable de réaliser une coupure franche à une fréquence choisie (c'est-à-dire ne pas atténuer du tout les composantes spectrales de fréquence inférieure et faire disparaître toutes les fréquences supérieures). Se souvenir qu'un passe-bas analogique du premier ordre coupe avec une pente asymptotique à –20 db/décade, du deuxième ordre à –40 db/décade, etc...

Applications directes du cours

Signaux

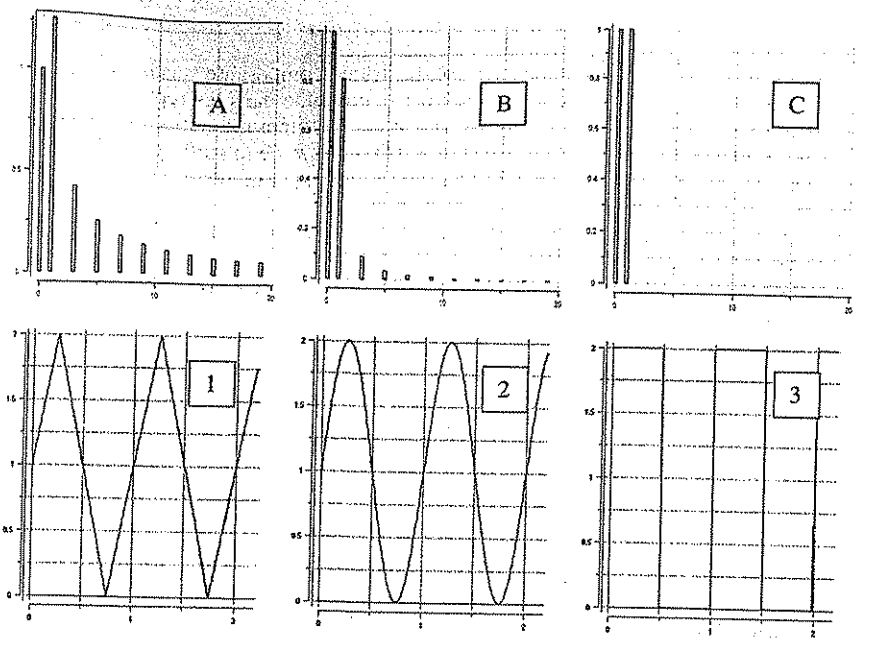
22. Rappeler l'expression de la tension efficace en fonction de la tension maximum aux bornes d'un dipôle dans le cas d'un régime sinusoïdal.
À partir de la définition, faire le calcul de la tension RMS dans le cas d'une tension T périodique, de forme triangulaire, de moyenne nulle, et d'amplitude U_m.
Même question si on ajoute à la tension précédente un « offset » (valeur constante U_0 positive ici).

23. Un multiplieur est un circuit intégré capable de réaliser à l'instant t le produit de deux tensions d'entrée u_1 et u_2 pour donner en sortie une tension $u_s = k\,u_1\,u_2$.
Quelle est l'unité de k ?
Les deux tensions d'entrée sont imposées à deux pulsations différentes :

$$u_1(t) = c_1 + a_1 \cos \omega_1 t \text{ et } u_2(t) = c_2 + a_2 \cos \omega_2 t$$

Calculer la tension de sortie et montrer que l'opération de multiplication a enrichi le spectre des tensions initiales. Commenter le résultat.

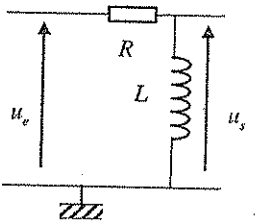
24. Dans les spectres ci-dessous, numérotés A, B, et C, se trouve en abscisse la fréquence en kHz, et en ordonnée, l'amplitude spectrale en Volt.
Les allures des signaux en fonction du temps correspondant à ces spectres, numérotés 1, 2, et 3 sont représentés plus bas. Sur ces chronogrammes, l'ordonnée est graduée en Volt également.
a) Attribuer à chaque spectre le numéro du chronogramme qui lui correspond en argumentant et en justifiant les choix.
b) Quelle est l'unité de l'abscisse des chronogrammes, et pourquoi ?



Filtres linéaires

25. Une tension créneau de fréquence fondamentale f est placée à l'entrée d'un filtre passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure est très supérieure à f.
Sans calcul, par un raisonnement simple, prévoir l'allure de la sortie du filtre en fonction du temps.

26. On considère le filtre passif RL suivant :
Trouver sans calcul son comportement asymptotique et préciser sa nature (passe-bas, passe-bande...).
Établir sa fonction de transfert et la donner sous forme canonique. Comment peut-on en déduire son équation différentielle en régime variable quelconque ?
Établir enfin la réponse indicielle du filtre (ou réponse à un échelon de tension) et tracer son allure en fonction du temps.



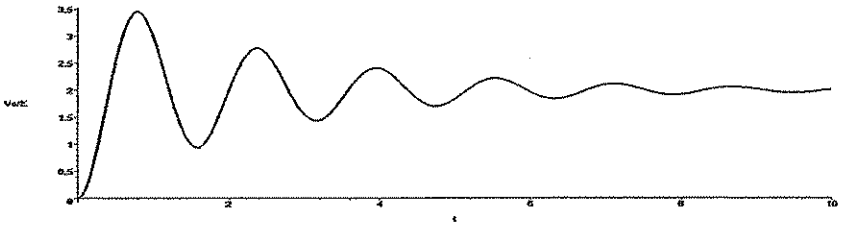
27. On reprend le filtre de la question précédente. Est-il possible qu'il fonctionne en intégrateur ? en dérivateur ? Expliquer pourquoi.
En cas de réponse positive, préciser dans quel domaine de fréquence cela est possible.

28. Un filtre linéaire possède une fonction de transfert du type :

$$H(j\omega)=\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \quad \text{avec } \omega_1 \ll \omega_2$$

Quelle est la nature de ce filtre (passe-haut , passe-bande ,...) ?
Tracer l'allure de son diagramme de Bode asymptotique en amplitude en précisant les points particuliers. Peut-il se comporter en intégrateur ? Si oui, dans quel domaine, et avec quelle constante de temps ?

29. Un filtre passif d'ordre 2 présente la réponse indicielle ci-dessous.



Ce filtre est soit un passe-bas, soit un passe-haut : choisir entre ces deux propositions.
Donner l'expression de sa fonction de transfert sous forme canonique, et préciser les valeurs numériques des constantes qui y interviennent.

30. Donner un schéma de filtre passe-bande avec une résistance R , une bobine L et un condensateur C . Préciser les tensions d'entrée et de sortie sur le schéma.
Retrouver sa fonction de transfert et la mettre sous forme canonique (deux formes possibles). À quelle condition aura-t-on un filtre très sélectif ? peu sélectif ? Comment cela se traduit-il sur le diagramme de Bode en amplitude ?

31. Un circuit *RLC* série à haut facteur de qualité $(Q>1)$ est alimenté par un générateur de tension délivrant une tension créneau d'amplitude E et de grande période. Calculer l'intensité dans le circuit et donner son allure en fonction du temps.

■ Échantillonnage

32. Une corde en mouvement ondulatoire, excitée par un vibreur sinusoïdal de fréquence $f=50$ Hz , ne peut pas être observée correctement à l'œil qui n'est pas assez rapide pour discerner ses différentes positions.
Pour ralentir artificiellement le mouvement de la corde, on l'éclaire avec une lampe stroboscopique qui délivre des flashes lumineux très brefs à la fréquence f_e réglable par un potentiomètre gradué.
Quelle fréquence faut-il choisir pour voir une période apparente $T_a=1/f_a$ d'une demi-seconde ?
Serait-il possible d'observer un mouvement apparent en sens inverse du mouvement réel, par exemple une onde progressive qui recule au lieu d'avancer ?

Faire le lien entre ce problème et le repliement du spectre étudié en travaux pratiques. Citer une application de ce phénomène au cinéma.

Questions de réflexion □ Physique pratique

33. Pourquoi les résistances de petite valeur ont-elles en pratique plus de chance de griller ? Pourquoi est-il, sauf situation très particulière, inutile d'acheter des résistances de puissance de 1 MΩ ?

34. On entend souvent dire : « le vrai danger en sécurité électrique, c'est le courant ». Mais alors, une batterie de voiture pouvant facilement débiter 100 A et communiquer assez de puissance à un gros moteur électrique (démarreur) pour le faire tourner en charge ne devrait-elle pas être dangereuse si on vient à toucher ses deux bornes ?

35. Est-il dangereux pour la santé d'habiter sous une ligne électrique haute tension ? Plus généralement, quels sont les effets physiologiques des champs électromagnétiques à basse fréquence créés par les circuits électriques ?

36. Quel sont les principes de la compression MP3 utilisée pour que les fichiers informatiques de musique soient jusqu'à dix fois moins volumineux que les fichiers audio natifs (au format WAV par exemple) sans perte notable de qualité ? (penser à utiliser un raisonnement spectral plutôt que temporel).

37. À quelle fréquence est échantillonné un disque compact ?
Pour quelles raisons ce choix a-t-il été fait ?

38. Pour échantillonner un signal dans de bonnes conditions, il faut des périodes (et donc des fréquences) extrêmement stables, c'est-à-dire dérivant très peu au cours du temps.
En électronique numérique, il faut souvent des filtres de très grand facteur de qualité.
Voyez-vous un lien entre ces deux contraintes ?
Quel est, en électronique le composant à bas coût, universellement utilisé pour répondre à ce cahier des charges et sur quel phénomène physique est basé son fonctionnement ?

39. Un synthétiseur est un appareil produisant des sons à l'aide de circuits électroniques. Quels types de circuit faut-il choisir pour régler la hauteur, le timbre et l'intensité du son ?

40. Pour transmettre plusieurs communications téléphoniques à travers un seul fil (ou plusieurs signaux dans la même fibre optique), on peut utiliser le multiplexage fréquentiel. Comment cela fonctionne-t-il ?

41. Les récepteurs radio sont dits superhétérodynes ; de quoi s'agit-il ?

Exercices

42. Temps de réponse d'un système linéaire du premier ou du deuxième ordre

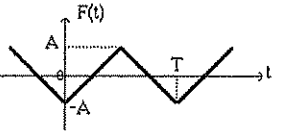
a) Définir le temps de réponse à 5% d'un système linéaire. Que caractérise-t-il ?

b) Combien vaut-il pour un système du premier ordre ?

c) Trouver sa variation en fonction de σ dans le cas d'un système du second ordre de fonction de transfert $H(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + j2\sigma\tau\omega - \tau^2\omega^2}$.

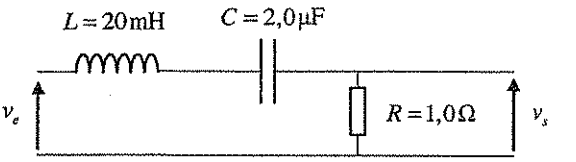
43. Tripleur de fréquence

Le développement en série de Fourier de la fonction F du temps de période T et de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ représentée ci-contre est :



$$F(t) = -\frac{8A}{\pi^2}\left[\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + ... + \frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)\omega t\right) + ...\right]$$

$F(t) = v_e(t)$ de période $T = 3{,}77\,\text{ms}$ et d'amplitude $A = 10{,}0\,\text{V}$ est injectée à l'entrée du filtre RLC ci-contre.



a) Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre. Quels sont sa pulsation de résonance ω_0 et son facteur de qualité Q ? Comparer numériquement ω_0 à ω.

b) Préciser $u_s(t)$ sous la forme d'une série de Fourier où l'amplitude du terme de rang k est donnée en fonction de A, du module et de l'argument de la fonction $\underline{H}$.

c) Donner enfin $u_s(t)$ sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales à amplitude réelle et préciser pour le terme de rang k l'amplitude A_k et la phase à l'origine φ_k en fonction de R, L, C et A, puis en fonction de Q, ω_0 et A.

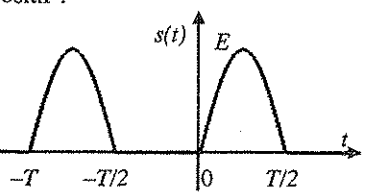
d) AN : Calculer A_k et φ_k pour les termes de pulsation ω, 3ω et 5ω.
Quel est le terme prépondérant ? Quelle approximation peut-on faire pour $u_s(t)$?

e) Représenter soigneusement sur le même schéma $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

f) Quelle application peut-on imaginer à ce dispositif ?

44. Filtrage d'un signal périodique (*)

Le signal s (nommé tension redressée monoalternance) est une fonction périodique de période T du temps et de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$.



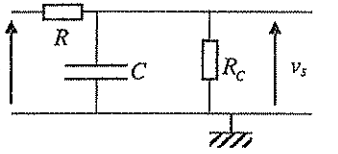
$s(t)=0$ pour $t\in\left[-\frac{T}{2},0\right]$ et $s(t)=E\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ pour $t\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$

a) Donner les expressions et valeurs numériques de la période fondamentale T et de la pulsation fondamentale ω de $s(t)$.

Le développement de s en série de Fourier est donné :

$$s(t)=E\left[\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(\omega t)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2\omega t+\frac{1}{15}\cos 4\omega t+...+\frac{1}{n^2-1}\cos n\omega t+...\right)\right]$$

b) Pour le filtre ci-contre avec $C=10000\ \mu F$, $R=10\ \Omega$, $R_C=10\ \Omega$.
Trouver sa fonction de transfert, son gain statique G_0, et sa pulsation de coupure ω_c.

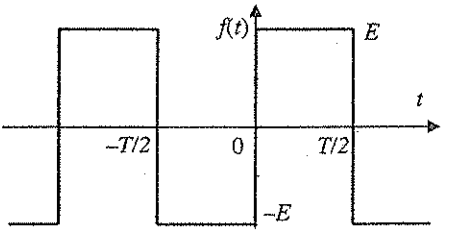


c) On injecte la tension $s=v_e$ à l'entrée du filtre précédent. Décrire précisément le spectre de la tension de sortie v_s.

d) Le taux d'ondulation τ de v_s est le rapport de l'amplitude de la partie variable de v_s à sa valeur moyenne.
Calculer τ en justifiant que la partie variable peut en première approximation être assimilée au premier harmonique non nul. Faire l'application numérique. Représenter l'allure de v_s.
Quelle application peut-on imaginer à cela sachant que l'on peut facilement obtenir, grâce à une diode de redressement, un signal de la forme de s à partir d'une tension alternative ?

45. Intégration d'un créneau par un filtre passe-bande

Le développement en série de Fourier d'une fonction créneau f du temps t, de période T, de pulsation ω, et d'amplitude E est :



$$f(t)=\frac{4E}{\pi}\left[\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+...+\frac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)\omega t\right)+...\right]$$

La tension définie par ce créneau notée $f(t)=v_e(t)$ est injectée dans un filtre passe-bande non inverseur d'ordre 2, de pulsation de résonance ω_0, de facteur de qualité Q et de gain maximum G_0. La pulsation ω de la tension créneau est supposée grande devant ω_0.

a) Montrer que le filtre se comporte vis-à-vis du créneau d'entrée comme un intégrateur. Préciser sa constante de temps τ.

b) Écrire l'équation différentielle reliant la tension d'entrée $v_e(t)$ et la tension de sortie $v_s(t)$ de l'intégrateur. Qu'obtient-on précisément en sortie du filtre ? Préciser en particulier l'amplitude A de la tension obtenue.
Comment seraient modifiés les résultats si on ajoutait une tension continue (un « *offset* ») au créneau à l'entrée ?

46. CD et repliement du spectre

Le but est de graver sur un CD une chanson issue d'un microphone dans un studio amateur d'enregistrement. Problème : sur ce signal musical, se superpose un bruit électronique parasite sinusoïdal à la fréquence $f = 42{,}1$ kHz, et personne ne le remarque dans le studio, car le son est inaudible pour les fréquences au-delà de 20 kHz.

Les spécifications de l'industrie du CD imposent une opération d'échantillonnage du signal à la fréquence de $f_e = 44{,}1$ kHz (voir la question **37.**).

a) Sachant que l'échantillonnage se fait avec une résolution de 16 bits avec deux voies gauche et droite séparées en stéréo, calculer la taille minimale en mégaoctets (un octet correspond à 8 bits) du fichier musical, de durée $\Delta t = 74$ minutes à graver sur le CD.
En réalité, les fichiers sont un peu plus lourds, pourquoi ?

b) La condition de Nyquist-Shannon est-elle vérifiée sans le bruit parasite ? Avec le bruit parasite ?

c) Montrer que dans le spectre du signal échantillonné au studio apparaît une fréquence audible. Est-elle gênante à l'oreille ? Est-ce toujours le cas ?

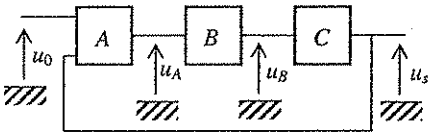
d) Pour s'affranchir de ce problème, il faut soumettre le signal à échantillonner, juste avant cette opération, à un filtrage. Quel type de filtrage doit-on employer (passe-haut, passe-bande,...) ? Comment a-t-on intérêt à choisir la fréquence de coupure ? Comment s'appelle le filtre ?

e) À partir de quelle valeur de la fréquence le filtre doit-il entièrement bloquer le spectre ? Jusqu'à quelle fréquence doit-il le laisser passer sans aucune atténuation ? Est-ce facilement compatible ? Pourquoi les défauts qui apparaissent immanquablement sont-ils néanmoins supportables ?

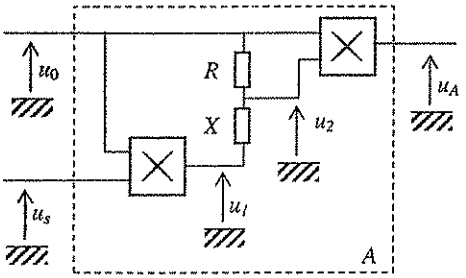
f) Quelle amélioration pourrait-on proposer pour s'affranchir des difficultés mises en évidence dans cet exercice ?

47. Ohmmètre

Le montage du schéma ci-dessous est alimenté par le signal $u_0(t)$, sinusoïdal de fréquence 1 kHz et d'amplitude 10 V.



L'intérieur du bloc [A] est représenté entouré de pointillés sur le schéma ci-dessus.



Ce bloc contient deux multiplieurs idéaux de constante $k = 0{,}10\ \mathrm{V}^{-1}$ ainsi que la résistance X à mesurer et une résistance étalon R, connue et réglable.
Le bloc [B] est un filtre passe-bas.
Le bloc [C] est un intégrateur éventuellement inverseur.

a) Le bloc [B] est réglé pour ne conserver que la fréquence la plus basse du spectre de son signal d'entrée. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_s(t)$ dont les variations temporelles sont supposées lentes.
b) Le bloc [C] doit-il être un intégrateur inverseur ou non inverseur ?
c) Expliquer le principe de fonctionnement de l'ohmmètre. Comment doivent être reliés les ordres de grandeur de R et de X pour que la mesure de X soit précise ?
d) Comment faut-il choisir la constante de temps de l'intégrateur pour que la mesure puisse s'effectuer en moins d'un dixième de seconde ? Les hypothèses faites à la question a) restent-elles valables dans ce cas ?

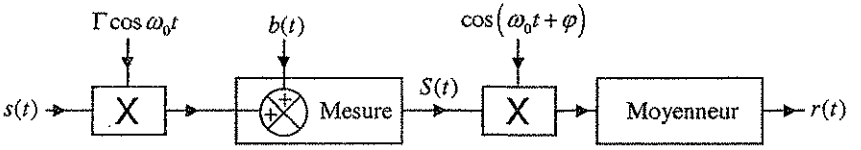
48. La détection synchrone

1. Principe de la détection synchrone

Un signal variant lentement au cours du temps, le plus souvent une tension à mesurer, est noté $s(t)$. Pour diverses raisons, le détecteur lui superpose du bruit inconnu, aléatoire, et à large spectre, noté $b(t)$ et mesure en fait : $s(t)+b(t)$.
Il n'est pas rare que le signal soit totalement noyé dans le bruit, et donc impossible à mesurer directement.
Il est parfois possible d'agir sur le signal pour le moduler, c'est-à-dire faire varier son amplitude ; c'est souvent le cas dans un laboratoire (mais pas toujours en réalité, penser par exemple au signal émis par la boîte noire d'un avion qui s'est abîmé en mer).
Dans ces conditions, la solution pour s'affranchir du bruit est la détection synchrone ; le signal est d'abord modulé ce qui revient à le multiplier par une fonction d'amplitude Γ et de pulsation ω_0 choisies : $\Gamma\cos\omega_0 t$. Le résultat de la mesure donne alors, en tenant compte du bruit introduit une nouvelle valeur :

$$S(t) = \Gamma s(t)\cos\omega_0 t + b(t)$$

Pour extraire le signal de cette mesure, il faut lui appliquer un traitement électronique ; il consiste à le multiplier (grâce à un circuit intégré multiplieur) par $\cos(\omega_0 t+\varphi)$ pour obtenir le produit : $P(t)=S(t)\cos(\omega_0 t+\varphi)$. Dans la dernière étape, on utilise un moyenneur pour sortir un signal lentement variable $r(t)$.



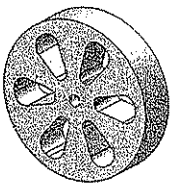
a) Exprimer le produit $P(t)$ issu du deuxième multiplieur, et montrer qu'il peut se mettre sous la forme d'une somme de deux termes dont l'un est indépendant du signal.
b) Quel est la fonction du moyenneur ? Montrer qu'il est capable dans ce cas d'éliminer le terme indépendant du signal en le justifiant clairement.
c) Avec une approximation à préciser, montrer que la sortie du moyenneur permet de retrouver le signal isolé du bruit.

On rappelle la formule : $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

Comment choisir et ajuster φ en pratique ?

Comment choisir la fréquence de coupure du moyenneur ?

2. Une application avec la lumière (*)

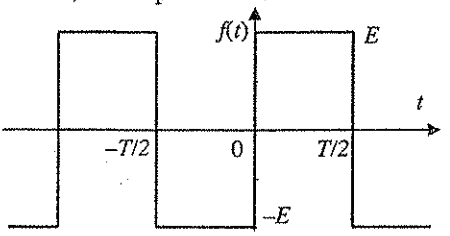


Il n'est pas toujours facile de moduler sinusoïdalement l'intensité d'un faisceau lumineux codant un signal dans sa variation d'intensité. Une méthode plus simple pour réaliser une détection synchrone est d'utiliser un modulateur mécanique dont la fonction est de hacher le faisceau.
Il s'agit d'une roue ajourée, comme sur la figure, percée de p trous identiques et régulièrement répartis tournant à grande vitesse angulaire ω_a autour de son axe. Un faisceau lumineux passant dans un trou est donc périodiquement occulté.

a) Si le diamètre du faisceau est petit devant la largeur du trou à travers lequel il passe, tracer l'allure de l'intensité lumineuse en fonction du temps en sortie pour une intensité d'entrée constante. À quelle condition obtient-on un créneau symétrique ? (pour la suite, se placer dans ce cas). Quelle est sa pulsation ω_0 ?

Une tension proportionnelle à cette intensité s'obtient facilement avec une photodiode éclairée par une LED placée de l'autre côté de la roue en rotation. En la moyennant à zéro, on obtient la tension $u(t)$.
Le faisceau porteur de l'information à traiter $s(t)$, très lentement variable dans le temps, est lui aussi de la même façon, haché en passant à travers un autre trou de la roue ajourée en rotation, puis détecté sur une autre photodiode pour donner une tension, moyennée à zéro, et entachée de bruit notée $S(t)$.

Les deux faisceaux (le faisceau de référence produisant $u(t)$ et le faisceau portant le signal) sont occultés aux mêmes instants.
Le produit $P(t) = S(t)\ u(t)$ est alors réalisé électroniquement.
Le développement en série de Fourier d'une fonction créneau du temps t, de période T, de pulsation ω, et d'amplitude E est donné :

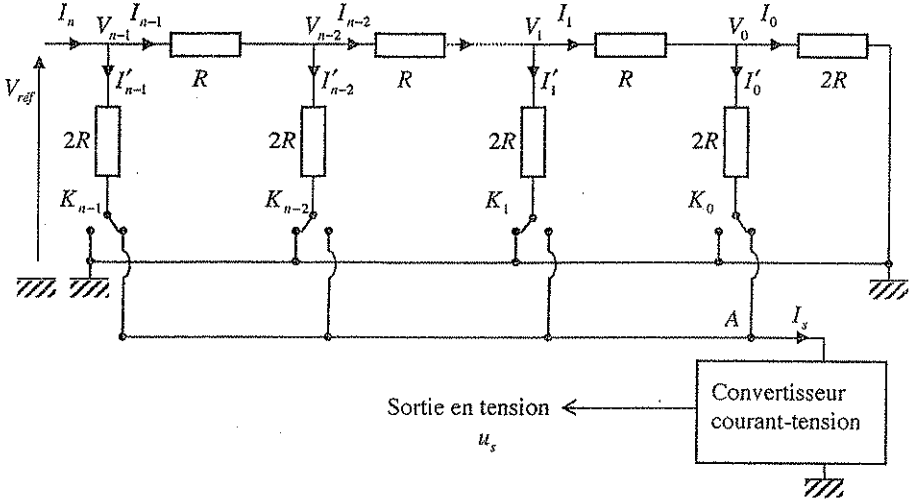


$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + ... + \frac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)\omega t\right) + ...\right]$$

b) Montrer que tout se passe comme si le signal était modulé par une infinité de fonctions sinusoïdales ; donner les pulsations respectives.
c) Comment faut-il s'y prendre pour retrouver l'information transportée dans l'intensité du faisceau ?

49. Convertisseur numérique analogique (CNA)

Il existe plusieurs possibilités de schémas pour faire un convertisseur numérique analogique (CNA). Cet exercice en présente une assez simple, ci-dessous, bien adaptée à une intégration sur silicium.



Il contient n cellules identiques, si l'on excepte la dernière résistance à droite.

Il est alimenté par une tension de référence $V_{réf}$, et sa sortie en courant I_s dépend de l'état des inverseurs ; ceux-ci sont commandés par le signal numérique à n bits à convertir, du bit de plus faible poids (LSB) qui commande K_0 au bit de plus fort poids (MSB) qui commande K_{n-1}. Pour un bit à la valeur 1 l'inverseur correspondant est connecté au convertisseur , et pour la valeur 0 à la masse.

V_{n-1}, V_{n-2},...,V_1, V_0 désignent les potentiels des nœuds successifs par rapport à la masse.

Le convertisseur courant-tension est supposé idéal, ce qui implique que le point A a le même potentiel que la masse ($V_A = 0$) et que la sortie en tension vaut $u_s = \alpha I_s$, α étant un coefficient constant réglable.

Le but est de reconstruire à tout instant le signal analogique suivant :

$$u_s = \beta \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k 2^k$$

où β est une constante, et $a_k = \pm 1$ représente l'état du bit de rang k.

a) Montrer que les potentiels V_k et les courants I_k sont indépendants de la position des inverseurs.

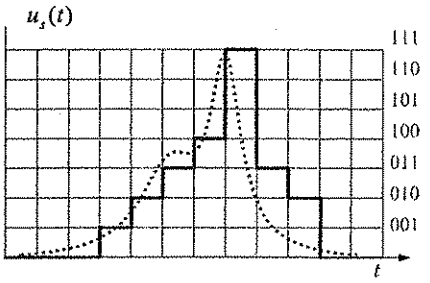
b) Montrer que $I'_0 = I_0$, et que $V_1 = 2V_0$.

c) En raisonnant par récurrence, en déduire que, pour tout k, $I'_k = I_k$ et $V_{k+1} = 2V_k$.

d) Exprimer le courant I et la tension de sortie u_s, et montrer que le CNA fonctionne bien. Quelles sont les valeurs minimales et maximales de u_s, et dans quels cas les obtient-on ?

e) Qu'est ce qui limite le temps de réponse du CNA ? Commenter.

f) Le signal analogique converti reste en réalité quantifié (pour bien le comprendre, voir l'exemple de la figure où sont représentés les chronogrammes d'un signal qui a été numérisé sur $n = 3$ bit après le CAN, et en pointillé le vrai signal analogique de départ avant l'échantillonnage). Comment pourrait-on, à partir de ce signal continu par morceaux, obtenir une courbe régulière ?



50. Simulation numérique d'un oscillateur de Duffing simplifié

Le modèle de l'oscillateur de Duffing est utilisé pour décrire une grande variété de phénomènes physiques dans les domaines de la mécanique, de l'électronique ou encore de l'électromagnétisme. Afin de mener une étude dans le cas général, les variables utilisées dans la suite sont données en unité arbitraire (u.a.).

Le comportement de l'oscillateur de Duffing simplifié à un degré de liberté $x(t)$ est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x}+r\dot{x}+x+\beta x^3=f\cos\omega t$$

où r, β, f et ω sont des paramètres constants.

Dans toutes les situations étudiées, les conditions initiales sont $x(0)=1$ et $\dot{x}(0)=0$.

a) Étude du régime libre non amorti $(f=0, r=0)$

Transformer l'équation de Duffing en un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre. En utilisant la fonction **odeint** du module **scipy.integrate**, représenter sur un même graphe, pour $t\in[0,11]$, les variations de $x(t)$ dans les cas $\beta=0$ puis $\beta=3$. Représenter également le portrait de phase pour les deux valeurs de β. Commenter.

b) Étude du régime libre amorti $(f=0, r\neq 0)$

Représenter sur un même graphe, pour $t\in[0,30]$, les variations de $x(t)$ dans le cas $\beta=3$ et $r=0{,}1$. Représenter également le portrait de phase et commenter.

Travaux pratiques

51. Expliquer quel est l'intérêt de la touche « dB » présente sur la plupart des multimètres.

52. Pourquoi les montages électroniques utilisent-ils des résistances variant entre 1 kΩ et quelques centaines de kΩ ?

53. Y a-t-il une différence entre potentiomètre et résistance variable ?
Comment peut-on simplement, grâce à un potentiomètre, obtenir une fraction réglable d'une tension ? À quelle condition le résultat est-il assuré ?

54. Un filtre est alimenté par un GBF délivrant une tension constante à l'entrée en régime sinusoïdal. Quelle est la méthode à employer pour mesurer la fréquence de coupure à 3 dB ?

55. Comment peut-on visualiser la réponse indicielle d'un système linéaire en électricité ?

56. Que se passe-t-il si l'on ne respecte pas la condition de Shannon lors de la numérisation d'un signal ? Comment peut-on mettre expérimentalement en évidence à l'oscilloscope les phénomènes qui se produisent ?

57. Rappeler comment se manifeste en pratique le défaut de vitesse limite de balayage d'un circuit intégré (ou temps de montée limite, ou encore « *slew rate* » en anglais). Par quelles expériences aisément réalisables en TP pourrait-on prouver que ce défaut est non linéaire ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Signaux

1. Les signaux les plus courants en électronique sont les tensions (différence de potentiel entre deux points) et les courants.
C'est la tension qui est la plus utilisée comme grandeur de commande à l'entrée d'un système ou comme grandeur de sortie pour alimenter la charge.
Très fréquemment, on choisit comme tension signal la différence de potentiel entre un point et la masse du montage : elle s'identifie alors au potentiel de ce point.
Les principales caractéristiques d'un signal sont : son amplitude, sa moyenne temporelle, son spectre en fréquences, son rapport signal/bruit.

2. La valeur moyenne et la valeur quadratique moyenne d'un signal entre deux instants t_1 et t_2 sont, par définition :

$$\langle u(t)\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u(t)\,dt \quad \text{et} \quad U_{RMS} = \sqrt{< u^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)\,dt}$$

- Pour un signal sinusoïdal (sans composante continue donc), en moyennant sur $t_2 - t_1 =$ une période, on trouve facilement : $\langle u(t)\rangle = 0$ et $U_{RMS} = U_m / \sqrt{2}$.
- Pour une tension quelconque à l'instant t aux bornes d'une résistance, la puissance dissipée dans la résistance parcourue par le courant $i(t)$ vaut : $\mathcal{P}_J(t) = R\,i^2(t) = u^2(t)/R$. On en déduit immédiatement : $\langle \mathcal{P}_J(t)\rangle = U_{RMS}^2 / R$.

  La valeur quadratique d'une tension est donc la valeur de la tension continue qui permettrait de dissiper la même puissance dans la résistance sur l'intervalle de temps considéré.

3. Pour tout signal périodique de période T, on définit :
- la fréquence fondamentale : $f = 1/T$
- la pulsation fondamentale : $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$

La décomposition spectrale (ou décomposition de Fourier) du signal consiste à le représenter comme une somme (en général infinie) d'un ensemble de fonctions sinusoïdales du temps. Les fréquences de ces différents termes sont :
0 : fréquence nulle correspondant à une constante, nommée *offset* en anglais.
f : la fréquence fondamentale.
$2f, 3f, 4f$,...les harmoniques, qui sont les multiples de f.
Les sinusoïdes en question peuvent être, pour chaque fréquence, des cosinus, des sinus, ou une superposition des deux.

Si le signal est une fonction paire du temps, il n'a dans son développement que des termes pairs en cosinus : $s(t)=\langle s(t)\rangle+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\omega t)$

Pour une fonction impaire, il n'a que des termes en sinus : $s(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(n\omega t)$

4. Le terme constant est la moyenne de la fonction sur une période.
Le terme fondamental détermine la période du signal : c'est donc lui qui joue le rôle le plus important.
Les harmoniques de rang élevé vont déterminer les détails fins de la représentation graphique. S'ils sont nombreux, et d'amplitudes non négligeables, la fonction présente des variations rapides sur des échelles de temps petites devant la période.

Filtres linéaires

5. On considère un système qui associe à une grandeur d'entrée $e(t)$ (par exemple la position angulaire de la poignée d'accélération d'une moto) une grandeur de sortie $s(t)$ (par exemple la vitesse de la moto).
Ce système est continu si toutes les grandeurs qui définissent son état sont continues, au sens mathématique du terme. Cela exclut en particulier tous les systèmes numériques.
Ce système est invariant (ou permanent), si son fonctionnement ne dépend pas de la date, c'est-à-dire qu'à $e(t-\tau)$ est associée $s(t-\tau)$.
À l'entrée $e_1(t)$ est associée la sortie $s_1(t)$ et à l'entrée $e_2(t)$ est associée la sortie $s_2(t)$. Le système est linéaire si à l'entrée $\alpha\, e_1(t)+\beta e_2(t)$ est associée la sortie $\alpha\, s_1(t)+\beta s_2(t)$ où α et β sont des nombres réels.

6. Un système est linéaire si et seulement si sa réponse à toute entrée sinusoïdale du temps à la pulsation ω est une sortie sinusoïdale du temps à la même pulsation ω.

7. Le système étant linéaire, continu et invariant, à l'entrée sinusoïdale $e(t)=E_m\cos(\omega t+\varphi_e)$ (où $E_m>0$ est l'amplitude de l'entrée) de représentation complexe $\underline{e}(t)=E_m e^{j\varphi_e}e^{j\omega t}$ correspond une sortie sinusoïdale de même pulsation $s(t)=S_m\cos(\omega t+\varphi_s)$ (où $S_m\geq 0$ est l'amplitude de la sortie) de représentation complexe $\underline{s}(t)=S_m e^{j\varphi_s}e^{j\omega t}$.

La fonction de transfert complexe est définie par $\underline{H}=\dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$. Il s'agit d'une fonction de $j\omega$ dont le module est égal au rapport des amplitudes $\dfrac{S_m}{E_m}$ et l'argument $\varphi=\varphi_s-\varphi_e$ est égal à l'avance de phase de la sortie sur l'entrée.

Les systèmes linéaires sont décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell \frac{d^\ell e(t)}{dt^\ell}$.

Dans ce cas la fonction de transfert complexe s'écrit $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell (j\omega)^\ell}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}$.

Comme l'inertie interdit à un système réel de posséder une réponse qui croît infiniment avec la pulsation ω, l'ordre n du dénominateur est supérieur à celui du numérateur. Cet entier n est appelé « ordre du système ».

Il est également possible de réaliser l'opération inverse et déduire l'équation différentielle de la fonction de transfert, en remplaçant chaque terme en $j\omega$ par une dérivée $\frac{d}{dt}$. L'équation différentielle obtenue est unique pour un circuit linéaire et est donc valable pour toute entrée, même non sinusoïdale. On peut aussi remarquer que toute fonction périodique en entrée est décomposable au sens de Fourier en une somme de fonctions sinusoïdales ; chaque fonction sinusoïdale vérifiant l'équation différentielle, la superposition la vérifie aussi par linéarité.

Afin de simplifier les notations, on peut remplacer $j\omega$ par la variable « de Laplace » notée p ce qui conduit à la fonction de transfert opérationnelle :

$$H(p) = \frac{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell p^\ell}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}$$

8. En électronique, on classe les systèmes suivant leur fonction principale : amplificateur de tension, amplificateur de puissance, ligne à retard, déphaseur, filtre,...
Un filtre linéaire est un système linéaire qui agit différemment sur l'amplitude de la sortie suivant la pulsation ω de la sinusoïde qu'il traite. Pour une même amplitude d'entrée, certaines zones de pulsations conduisent donc à des amplitudes élevées, d'autres à des amplitudes faibles.
Un filtre passif est constitué de composants passifs (résistance, bobine, condensateur s'il est linéaire), c'est-à-dire non alimenté par un générateur continu lui fournissant de la puissance. Un filtre actif, au contraire, est alimenté (transistors, ou circuits intégrés comme les ALI : amplificateur linéaire intégré, par exemple).

9. Un diagramme de Bode est constitué de *deux* courbes, représentant en fonction du logarithme décimal de la pulsation (ou de la fréquence) :

– le gain en décibel défini par $G(\omega) = 20\log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\log\left(\frac{S_m}{E_m}\right)$,

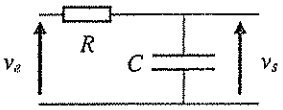
– l'argument $\varphi(\omega) = Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \varphi_s - \varphi_e$.

L'emploi des coordonnées logarithmiques permet de décrire le comportement du système sur de grands intervalles de fréquence et ces diagrammes sont faciles à tracer à partir des diagrammes dits « asymptotiques » (voir livre de première année).

10. La nature du spectre n'est pas affectée par un filtre linéaire : si les composantes spectrales sont présentes à l'entrée du filtre, elles le sont aussi en sortie, *a priori*.
Mais attention, l'amplitude de chaque composante est affectée. Dans un cas limite, l'amplitude de sortie peut alors être nulle et la composante spectrale disparaître.
On peut citer l'exemple d'un passe-haut, qui éradique la composante continue, à fréquence nulle (la fonction de transfert s'annule pour $\omega = 0$), ou encore un filtre extrêmement sélectif qui annule en sortie toutes les composantes spectrales qui n'ont pas exactement sa fréquence de résonance.
En revanche un filtre linéaire ne peut jamais ajouter de nouvelles composantes spectrales. L'enrichissement du spectre est réservé aux systèmes non linéaires.

11. Un moyenneur est un filtre destiné à conserver uniquement la composante continue, c'est-à-dire sa moyenne.
Comme cette composante constante est de fréquence nulle (elle a une période qui tend vers l'infini), le moyenneur idéal doit couper toutes les composantes variables de fréquences non nulles ; c'est donc un filtre passe-bas, dont la fréquence de coupure doit être la plus basse possible, en tous cas, assez basse devant la fréquence fondamentale du signal. Si le fondamental est coupé, les harmoniques, de fréquences supérieures, le sont aussi forcément.
Exemple : Le passe-bas RC d'ordre 1 dont la fréquence de coupure vaut :

$$f_C = \frac{1}{2\pi RC}$$



12. Définissons quelques notations : le filtre parfaitement sélectif a un gain G_0 connu, supposé réel positif pour sa fréquence de résonance f_0. Pour toutes les autres fréquences, son gain est nul. Il traite un signal périodique de fréquence fondamentale f dont le spectre contient *a priori* les fréquences 0, f, $2f$, $3f$,...avec des amplitudes spectrales a_0, a_1, a_2, a_3,...

On part de $f_0 = 0$. Si la moyenne du signal est non nulle, une sortie continue est présente, et vaut $G_0 a_0$. Il suffit de la mesurer pour en déduire a_0 (s'il n'y a pas de sortie : $a_0 = 0$)

On augmente f_0 jusqu'à f : la sortie est sinusoïdale à la fréquence $f = f_0$, car les autres composantes sont bloquées. Son amplitude vaut $G_0 a_1$, et on en déduit a_1.

On passe ensuite à $f_0 = 2f$: la sortie est encore sinusoïdale à f_0. La mesure de son amplitude $G_0 a_2$ donne a_2. Puis $f_0 = 3f$, $4f$,... pour obtenir a_3, a_4,...
Il est donc possible de mesurer avec une bonne précision tous les coefficients de la décomposition avec ce dispositif qui est un analyseur de Fourier.

13. Un intégrateur idéal doit réaliser la fonction suivante : $s(t) = \int \frac{1}{\tau} e(t)\,dt$ où τ, constante de temps de l'intégrateur doit être présent pour des raisons d'homogénéité.
En notation complexe, cette relation s'écrit :

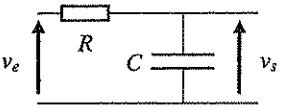
$$j\omega\tau \underline{s}(t) = \underline{e}(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{j\omega\tau}$$

Les diagrammes de Bode correspondants (qui caractérisent cette fonction d'intégrateur) sont :
– pour l'amplitude, une droite de pente –20 dB/décade ,
– pour la phase, une constante de valeur $-\frac{\pi}{2}$ car $1/j = -j = \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$.

> Un filtre possède un caractère intégrateur si, dans le domaine de fréquence où se situent tous les harmoniques importants du signal d'entrée, les diagrammes de Bode ont une courbe de gain de pente –20dB/décade et une courbe de phase C^te à $-\frac{\pi}{2}$.

Pour un intégrateur inverseur, la sortie est déphasée de π (à 2π près), et donc le déphasage doit être de $+\frac{\pi}{2}$.
Cet intégrateur théorique a une fonction de transfert et un gain qui tendent vers l'infini en continu (lorsque $\omega \to 0$), ce qui n'est pas possible en pratique.

On peut obtenir un intégrateur approché par un filtre passe-bas RC d'ordre 1 :
Dans le domaine de fréquence situé largement au-delà de la fréquence de coupure, le diagramme de Bode est bien celui d'un intégrateur non inverseur.



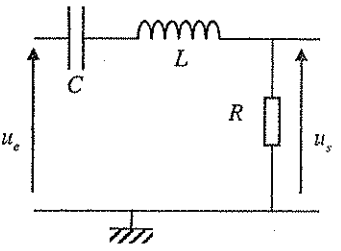
Sa fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\, RC}$
(obtenue en utilisant par exemple la formule du diviseur de tension), permet de voir que dans la zone asymptotique : $\omega \gg 1/RC \;\Rightarrow\; f \gg f_C = 1/(2\pi RC)$

$\underline{H}(j\omega) \to \frac{1}{j\omega\, RC}$ qui est celle d'un intégrateur de constante de temps $\tau = RC$.

14. Un passe-bande d'ordre 2, de fonction de transfert canonique :

$$\underline{H}_{PBande} = H_0 \frac{j\omega\tau}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$$ donne dans le domaine asymptotique : $\omega \gg 1/\tau$

$\underline{H}_{PBande} \to H_0 \dfrac{j\omega\tau}{-\omega^2\tau^2} = \dfrac{H_0}{j\omega\tau}$ correspondant à un intégrateur de constante de temps τ, inverseur ou non suivant le signe de H_0.



On peut proposer comme schéma concret :
Avec une fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Dans la zone asymptotique intégratrice :
$\omega \gg 1/\sqrt{LC}$

$\underline{H}(j\omega) \to \dfrac{jRC\omega}{-LC\omega^2} = \dfrac{1}{jL\omega/R}$, soit une constante de temps : $\tau = L/R$.

15. Un dérivateur idéal doit réaliser la fonction suivante : $s(t) = \tau \dfrac{de}{dt}$ où τ, constante de temps du dérivateur doit être présent pour des raisons d'homogénéité.
En notation complexe, cette relation s'écrit :

$$\underline{s}(t) = j\omega\tau\,\underline{e}(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = j\omega\tau$$

Les diagrammes de Bode correspondants (qui caractérisent cette fonction de dérivateur) sont :

– pour l'amplitude, une droite de pente +20 dB/décade,

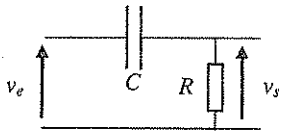
– pour la phase, une constante de valeur $+\dfrac{\pi}{2}$.

> Un filtre possède un caractère dérivateur si, dans le domaine de fréquence où se situent tous les harmoniques importants du signal d'entrée, les diagrammes de Bode ont une courbe de gain de pente +20 dB/décade et une courbe de phase C^te à $+\dfrac{\pi}{2}$.

Pour un dérivateur inverseur, la sortie est déphasée de π (à 2π près), et donc le déphasage doit être de $-\dfrac{\pi}{2}$.

Ce dérivateur théorique a une fonction de transfert et un gain qui tendent vers l'infini en haute fréquence (lorsque $\omega \to \infty$), ce qui n'est pas possible en pratique : tous les circuits électronique voient leur gain chuter à très haute fréquence.
On peut obtenir un dérivateur approché par un filtre passe-haut CR d'ordre 1 :

Dans le domaine de fréquence situé largement en deçà de la fréquence de coupure, le diagramme de Bode est bien celui d'un dérivateur non inverseur.



Sa fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$, permet de voir que dans la zone asymptotique : $\omega \ll 1/RC \Rightarrow f \ll f_c = 1/(2\pi RC)$

$\underline{H}(j\omega) \to j\omega RC$ qui est bien celle d'un dérivateur de constante de temps $\tau = RC$.

■ Électronique numérique

16. L'opération d'échantillonnage consiste à prélever et à mesurer la valeur d'un signal à intervalles réguliers distants de $T_e = 1/f_e$ (la période d'échantillonnage).

Ces valeurs discrètes sont ensuite stockées sous la forme d'un tableau dans lequel chaque valeur est quantifiée en la remplaçant par l'approximation obtenue par comparaison avec un ensemble de possibilités prédéfinies ($2^8 = 256$ valeurs par exemple pour un codage sur 8 bits).

17. Condition de Nyquist-Shannon : Pour ne pas perdre d'information lors de l'échantillonnage d'un signal, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage au moins égale au double de la fréquence maximale présente dans le spectre du signal.

Si l'échantillonnage respecte la condition de Nyquist-Shannon, le tableau de la question précédente contient toute l'information contenue dans le signal d'origine.

18. Un convertisseur analogique numérique (CAN en abrégé) réalise concrètement en électronique l'opération d'échantillonnage décrite dans la question précédente.
Il existe plusieurs moyens de procéder, mais schématiquement, il doit y avoir :
- une phase d'échantillonnage pure où, commandé par un signal à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ un circuit échantillonneur-bloqueur conserve la valeur du signal prélevée au début de la période T_e pour la traiter ensuite.
- une phase de numérisation proprement dite où des circuits comparateurs comparent cette valeur bloquée à toutes les valeurs discrètes possibles pour choisir la plus proche.

Une sortie codée en binaire est obtenue. Chacun des n bits utilisés peut prendre la valeur 0 ou 1, ce qui donne 2^n possibilités de valeurs, en général réparties à intervalles égaux entre la valeur 0 et la valeur maximale autorisée s_{max}.

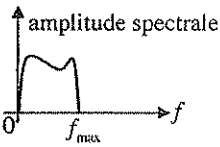
La grandeur discrète s à stocker pour la période considérée est donc caractérisée par la valeur possible $a_k = \pm 1$ de chaque bit k :

$$s(a_0, a_1, ..., a_k, ..., a_{n-1}) = s_{max} \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k 2^k$$

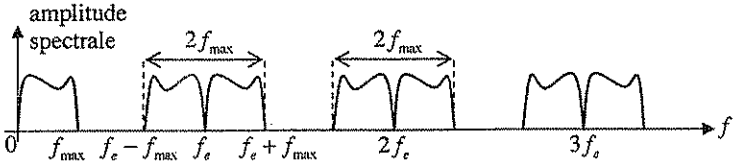
Il y a 2 possibilités pour chaque bit, donc au total 2^n possibilités pour s.
Ce sont ces nombres qui sont stockés dans le tableau mentionné en question **16.**
a_0 est appelé le bit de poids faible (LSB : *Less Significant Bit* en anglais) et a_{n-1} le bit de poids fort (MSB : *Most Significant Bit* en anglais).

Finalement, les principaux paramètres du convertisseur sont sa fréquence d'échantillonnage, et sa résolution (ou nombre n de bits).

19. Dans cette question, on suppose que le spectre du signal à échantillonner s'étend entre les fréquences 0 et f_{max} (voir un exemple sur le schéma ci-contre).

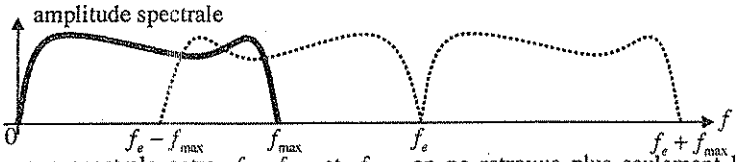


En nommant f_e la fréquence d'échantillonnage, on peut montrer par le calcul que le spectre du signal échantillonné possède l'allure suivante :



On reconnaît le spectre du signal d'origine, mais aussi, autour de f_e ce même spectre et son symétrique.
Par ailleurs, cette structure double s'étend aussi autour des harmoniques $2f_e, 3f_e, \ldots$

20. Pour l'explication, reprendre la figure de la question précédente.
Si la fréquence d'échantillonnage f_e diminue (sans modifier le signal à échantillonner), la structure double dans le spectre du signal échantillonné, autour de f_e s'approche de f_{max}.
À la limite du recouvrement, $f_{max} = f_e - f_{max}$ donc : $f_e = 2f_{max}$.
Si f_e diminue encore, les deux parties se chevauchent comme sur le détail suivant :



Dans la zone spectrale entre $f_e - f_{max}$ et f_{max}, on ne retrouve plus seulement le spectre d'origine (en gras), mais aussi des composantes parasites (ou fantômes) qui n'existaient pas dans le signal : c'est le phénomène de repliement.
Lors de la reconstruction du signal d'origine à partir du signal échantillonné, ces fréquences fantômes apparaîtront et poseront problème (voir la question **46.** sur le CD par exemple).

Rq : Ces considérations permettent de retrouver la condition de Nyquist-Shannon, puisque le cas limite où le spectre d'origine n'est pas affecté correspond à $f_e = 2f_{max}$. Il faut donc bien, pour éviter le repliement et ne pas perdre d'information, imposer la condition $f_e \geq 2f_{max}$.

21. Pour être certain d'éviter le phénomène de repliement pour un échantillonnage fonctionnant à la fréquence f_e, le signal doit vérifier la condition de Nyquist-Shannon : $f_{max} \leq f_e / 2$; il faut donc limiter la fréquence maximale du spectre du signal f_{max}.
Ceci est obtenu en plaçant avant l'échantillonneur un filtre passe-bas qui supprime toutes les composantes du signal de fréquences supérieures à $f_e / 2$. Ce filtre est appelé filtre « anti repliement » (*anti aliasing* en anglais)

Signaux

22. Pour une tension sinusoïdale, $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

La définition de la valeur efficace est $U_{eff} = \sqrt{< u^2(t) >}$ dans le cas général, où $u(t)$ représente la valeur instantanée (c'est-à-dire à l'instant t par opposition à la moyenne) et $< u^2(t) >$ la valeur moyenne du carré de cette tension.
Pour le triangle, on calcule la moyenne sur une période :

$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt}$, f^2 étant paire, l'intégrale se simplifie en :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt}$$

Entre 0 et $\frac{T}{2}$ on a facilement l'expression de f qui a une pente de $\frac{2U_m}{T/2} = 4\frac{U_m}{T}$ et qui s'annule en $t = \frac{T}{4}$: $f(t) = 4\frac{U_m}{T}\left(t - \frac{T}{4}\right)$ on en déduit l'intégrale cherchée :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 16\frac{U_m^2}{T^2}\left(t - \frac{T}{4}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T}16\frac{U_m^2}{T^2}\frac{T^3}{96}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \qquad \boxed{U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}}$$

Ce qui conduit bien une valeur différente du cas sinusoïdal (elle est plus faible dans le cas du triangle où la tension est « plus proche du zéro » pour la même amplitude).

Si on ajoute un « *offset* » U_0, on utilise $f(t) = 4\frac{U_m}{T}\left(t - \frac{T}{4}\right) + U_0$ et l'intégration donne :

$$\boxed{U_{eff}^2 = \frac{U_m^2}{3} + U_0^2}$$

Ce résultat s'interprète facilement dans le cas de la tension aux bornes d'une résistance R où la puissance moyenne consommée vaut $\frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{U_m^2}{3R} + \frac{U_0^2}{R}$, la somme des puissances consommées avec une tension triangulaire à moyenne nulle et avec une tension U_0 continue.
Il y a donc indépendance énergétique entre les deux composantes du signal.

23. u_s, u_1, u_2 sont des tensions. La relation $u_s = k\,u_1\,u_2$ montre que k est en V^{-1}.

$$u_s = k\,u_1\,u_2 = k\left(c_1 + a_1\cos\omega_1 t\right)\left(c_2 + a_2\cos\omega_2 t\right)$$
$$= k\,c_1\,c_2 + k\,a_1\,c_2\cos\omega_1 t + k\,a_2\,c_1\cos\omega_2 t + k\,a_1\,a_2\cos\omega_1 t\,\cos\omega_2 t$$
$$= k\,c_1\,c_2 + k\,a_1\,c_2\cos\omega_1 t + k\,a_2\,c_1\cos\omega_2 t + \frac{k\,a_1\,a_2}{2}\cos(\omega_1+\omega_2)t + \frac{k\,a_1\,a_2}{2}\cos(\omega_1-\omega_2)t$$

Le premier terme, constant, est de pulsation nulle, les autres de pulsation : ω_1, ω_2, $(\omega_1+\omega_2)$, $(\omega_1-\omega_2)$.

Dans les tensions d'entrée, il y a donc 3 composantes spectrales (aux pulsations 0, ω_1, ω_2) et dans la tension de sortie 5 composantes : 0, ω_1, ω_2, $(\omega_1+\omega_2)$, $(\omega_1-\omega_2)$. L'opération de multiplication a enrichi le spectre !

Cet enrichissement est possible car l'opération est non linéaire. Rappelons que les transformations linéaires conservent le spectre (tout en modifiant les amplitudes et les phases des composantes).

24. A correspond à 3. B correspond à 1. C correspond à 2.

Le spectre C a une composante continue à fréquence nulle, et une composante variable a une seule fréquence $f_0 = 1$ kHz (correspondant à une sinusoïde de fréquence $f_0 = 1$ kHz). Par ailleurs, ces deux composantes ont même amplitude 1 V, ce qui permet de déduire que la moyenne du signal est égale à l'amplitude de la sinusoïde pour un signal global qui varie donc entre 0 et 2 V. Il s'agit de la courbe 2.

Le spectre A possède une composante continue, et un fondamental à $f_0 = 1$ kHz, tout comme le B.
Mais les composantes spectrales du A décroissent moins vite avec la fréquence que celles du B, trahissant une structure temporelle fine plus abrupte (variations plus rapides présentes dans le chronogramme avec des variations brutales de 0 à 2 V).

Les trois chronogrammes ont la même période T_0 correspondant à la fréquence fondamentale des spectres : $T_0 = 1/f_0 = 1$ ms.
On observe sur les trois graphes que cette période correspond juste à une graduation. Donc, une graduation correspond à une milliseconde sur les chronogrammes.

Filtres linéaires

25. Un passe-haut du premier ordre fonctionne, très en deçà de sa fréquence de coupure f_C, comme un dérivateur (voir la question **15.**).

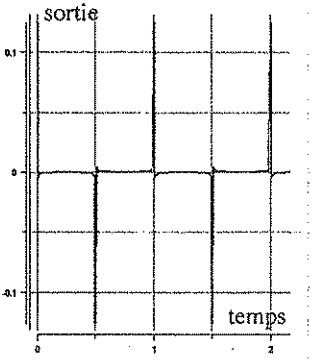
Dans le spectre de la tension créneau de fréquence f, se trouvent les fréquences f, $3f$, $5f$,...(bien que cela n'ait pas d'importance ici, il n'y a pas d'harmonique de rang pair, ce qui s'observe dans le spectre A de la question **23.**).

Chacune de ces fréquences reste très inférieure à f_C, grâce à la condition $f \ll f_C$.

On en déduit que le filtre dérive chaque fréquence du spectre, et agit donc comme un dérivateur global.

Mais attention, ce dérivateur n'est pas parfait, car il y aura bien un harmonique de rang n pour lequel $nf \approx f_C$, à partir duquel le filtre n'est plus du tout dérivateur : les harmoniques de rang très élevé ne sont donc pas dérivés, mais leur amplitude tend vers zéro.

La dérivée du créneau est très positive à la montée et très négative à la descente du créneau. On en déduit l'allure de la sortie en fonction du temps (cette courbe correspond au graphe de la tension créneau de la question **23.**).



Rq : Cette dérivation constitue un moyen pratique simple pour obtenir des impulsions très brèves à partir d'une tension créneau que peut délivrer n'importe quel GBF de TP.

26. En basse fréquence, la bobine se comporte comme un fil et la tension de sortie à ses bornes est nulle. En haute fréquence, elle se comporte comme un coupe-circuit, donc le courant dans la résistance est nul, la chute de tension à ses bornes également, $u_s = u_e$ et la fonction de transfert tend vers 1.

Il s'agit donc d'un filtre *passe-haut du premier ordre*.

Par la formule du diviseur de tension : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}$, soit sous forme canonique :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad \text{constante de temps}}$$

On établit l'équation différentielle à laquelle obéit u_s en régime sinusoïdal : dans ce cas, $j\omega$ peut être remplacé par $\dfrac{d}{dt}$ et l'équation $\underline{u_s}(R + jL\omega) = jL\omega\underline{u_e}$ donne :

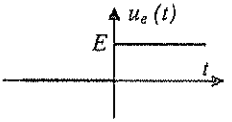
$$R\underline{u_s} + L\frac{d\underline{u_s}}{dt} = L\frac{d\underline{u_e}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\underline{u_s}}{dt} + \frac{1}{\tau}\underline{u_s} = \frac{d\underline{u_e}}{dt}$$

L'équation différentielle obtenue est unique pour un circuit linéaire. C'est donc l'équation cherchée, et elle est valable pour toute entrée, même non sinusoïdale.

On peut aussi le justifier en disant qu'une entrée fonction quelconque du temps peut être décomposée au sens de Fourier en une somme de fonctions sinusoïdales ; chaque fonction sinusoïdale vérifiant l'équation différentielle, la superposition la vérifie aussi par linéarité.

$$\boxed{\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau}u_s = \frac{du_e}{dt}}$$

Soit un échelon de tension d'amplitude E :



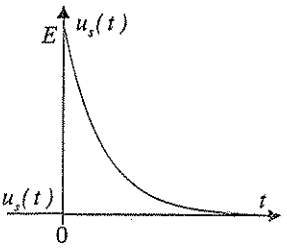
La solution particulière en régime permanent établi ($u_s = \text{Cte}$ au bout d'un temps très long) est : $u_s = 0$.

La solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire libre) est : $u_s = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

La solution générale est donc : $u_s = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 0 = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

Pour trouver la constante A, il faut exprimer une condition initiale. Elle s'obtient en traduisant le fait que le courant dans la bobine est continu à l'instant initial : $i(t=0^+) = 0$. Donc, la tension Ri aux bornes de R est continue et nulle à $t = 0^+$, et $u_s = u_e = E$ à $t = 0^+$. Cette condition initiale donne $A = E$ et la solution discontinue :

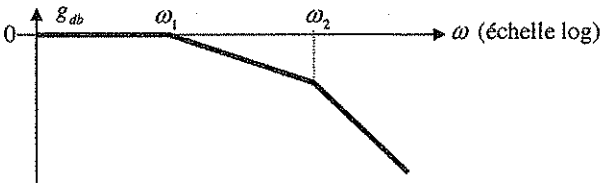
$$u_s(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } u_s(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ pour } t > 0$$



27. Pour qu'un filtre puisse fonctionner en intégrateur ou en dérivateur, il doit avoir sur une entrée sinusoïdale le même effet qu'un intégrateur ou un dérivateur idéal :
- pour l'intégrateur, il faut une pente de –20 dB/décade dans le diagramme de Bode en amplitude ce qui ne se produit pas dans le cas du filtre passe haut : impossible.
- pour le dérivateur, il faut une pente de +20 dB/décade dans le diagramme de Bode en amplitude ce qui se produit dans le domaine asymptotique des basses fréquences, soit pour des pulsations vérifiant $\omega \ll \frac{1}{\tau}$. Il faut aussi un déphasage $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée, ce qui est bien le cas dans le domaine de pulsation évoqué. En conclusion :

$$\boxed{\text{Montage dérivateur si } \omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}}$$

28. Ce filtre est un passe-bas d'ordre 2. Pour bien s'en convaincre, faire tendre ω vers zéro ou vers l'infini et observer le comportement de la fonction de transfert.
Pour tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique en amplitude, il faut considérer trois domaines asymptotiques :
- si $\omega \ll \omega_1$, $\underline{H} \to 1$, et $g_{db} \to 0$
- si $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, $\underline{H} \to \frac{1}{j\omega/\omega_1}$ et $g_{db} \to -20\log\left(\omega/\omega_1\right)$
- si $\omega_2 \ll \omega$, $\underline{H} \to -\frac{1}{\omega^2/\omega_1\omega_2}$ et $g_{db} \to -40\log\left(\omega/\sqrt{\omega_1\omega_2}\right)$



C'est donc dans la zone intermédiaire, $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, que le filtre fonctionne en intégrateur non inverseur, avec sa fonction de transfert caractéristique $\dfrac{1}{j\omega/\omega_1}$ correspondant à une intégration avec une constante de temps $\tau = 1/\omega_1$.

29. La sortie tend vers une valeur constante en continu. À moins d'un décalage en sortie (défaut non envisagé ici), on en déduit que le système laisse passer le continu. En clair, l'échelon de tension à l'entrée a une composante continue que l'on retrouve (éventuellement amplifiée et / ou inversée) en sortie. Le filtre est donc un passe-bas. Comme il est d'ordre 2 sa fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \omega^2\tau^2}$$

La valeur finale valant $2{,}0\,E$, comme $E = 1$ V (échelon unité) : $H_0 = 2{,}0$.

La réponse est pseudo périodique faiblement amortie, on a donc $\sigma^2 \ll 1$: la pseudo-période $T_P = \dfrac{2\pi}{\omega_p} = \dfrac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\sigma^2}}$ vaut pratiquement $2\pi\tau$. Sur la figure on mesure $4T_P = 6{,}3$ s, soit $\tau = 0{,}25$ s.

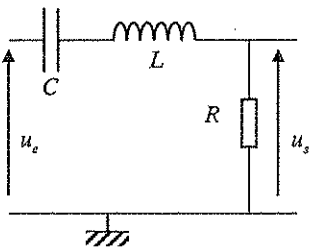
En notant dep_1 et dep_2 les dépassements (par rapport à la valeur finale de régime permanent), le décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\dfrac{dep_1}{dep_2}\right) = \dfrac{2\pi\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$ (voir livre de première année) est pratiquement égal à $2\pi\sigma$. Sur la figure on mesure :

$$\begin{cases} dep_1 = 3{,}5 - 2{,}0 = 1{,}5 \text{ V} \\ dep_2 = 2{,}8 - 2{,}0 = 0{,}8 \text{ V} \end{cases}$$

On en déduit $\sigma = 0{,}1$. La vérification $\sigma^2 = 0{,}01 \ll 1$ assure que les approximations faites sont légitimes.

30. Le passe bande RLC est un montage connu :
La formule du diviseur de tension en sortie ouverte conduit à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$



qui est de la forme :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega)=\frac{2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\quad\text{avec}\quad\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}\quad\text{et}\quad\boxed{\sigma=\frac{RC}{2}\omega_0=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

et qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{R}{R+jL\omega+\dfrac{1}{jC\omega}}=\frac{1}{1+\dfrac{j}{R}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}=\frac{1}{1+\dfrac{j}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}\left(\omega\sqrt{LC}-\dfrac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega)=\frac{1}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}\quad\text{où}\quad\boxed{Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{1}{2\sigma}}$$

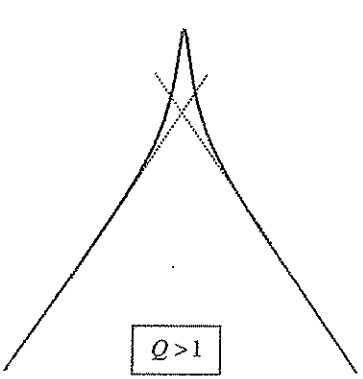
est le facteur de qualité du filtre.

Le filtre est sélectif si : $Q>1 \Rightarrow \sigma<\dfrac{1}{2} \Rightarrow R<\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

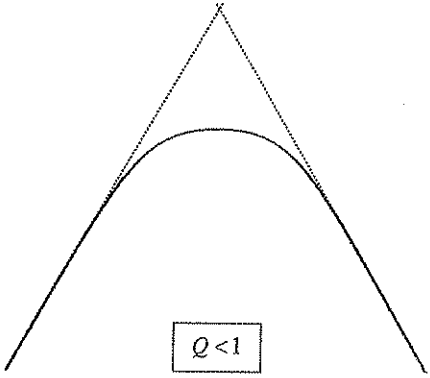
Dans ce cas, le diagramme de Bode en amplitude est situé au-dessus de ses asymptotes.

Le filtre est peu sélectif si : $Q<1 \Rightarrow \sigma>\dfrac{1}{2} \Rightarrow R>\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Dans ce cas, le diagramme de Bode en amplitude (g en dB en fonction de ω sur une échelle log) est situé en dessous de ses asymptotes.

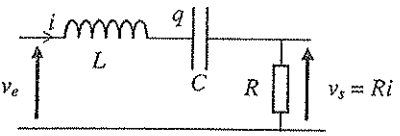


$Q>1$



$Q<1$

31. L'équation différentielle à laquelle obéit v_s (proportionnel à i) se trouve en écrivant la loi aux mailles :



$$v_e = v_s + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} \text{ avec } i = \frac{dq}{dt}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps pour éliminer q :

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{RC} + \frac{L}{R}\frac{d^2v_s}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{LC}v_s = \frac{R}{L}\frac{dv_e}{dt}$$

et sous la forme canonique : $\frac{d^2v_s}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 2\sigma\omega_0\frac{dv_e}{dt}$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

Rq : On aurait aussi pu trouver cette équation à partir de la fonction de transfert calculée dans la question précédente **30.** (à condition de justifier la démarche).

Le créneau est une succession d'échelons de tension alternativement positifs et négatifs. On cherche donc la réponse à un échelon de tension d'amplitude E.

Pour $t > 0$, $v_e = E$ et $\frac{dv_e}{dt} = 0$ et l'équation différentielle se réduit à :

$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0 \quad (1)$$

Les conditions aux limites s'obtiennent ainsi :

- continuité de i (courant dans la bobine), donc continuité de v_S :

  $v_s(t = 0^+) = 0$ (2)

- continuité de $q = C(v_e - v_s) - LC\frac{di}{dt}$ (d'après la loi aux mailles) ; à $t = 0^+$, q reste nul, et comme $v_e = E$ et $v_s = 0$,

$$0 = q(t = 0^+) = CE - LC\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0^+} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dv_s}{dt}\right)_{t=0^+} = \frac{RE}{L} \quad (3)$$

L'équation caractéristique associée à l'équation (1) : $X^2 + 2\sigma\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (2\sigma\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2(1 - \sigma^2) < 0$ car $\sigma = \frac{1}{2Q} < 1$ (pour la relation entre σ et Q, voir la question précédente).

Les deux racines sont conjuguées : $r = -\sigma\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \sigma^2}$

La solution générale est donc pseudo périodique :

$$v_s(t) = A\exp(-\sigma\omega_0 t)\sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \sigma^2}\, t + \varphi\right)$$

où A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales écrites plus haut.

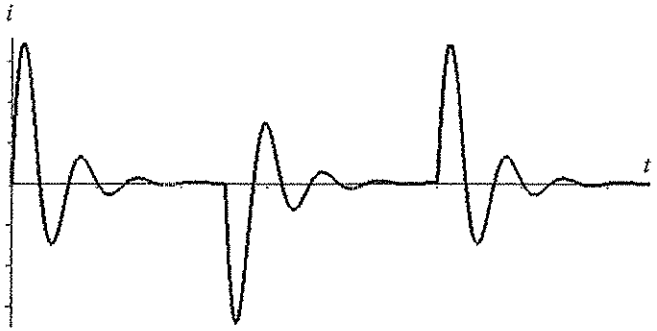
(2) donne $\varphi = 0$ (on pourrait aussi prendre $\varphi = \pi$, peu importe, le signe de A est indéterminé), d'où $v_s(t) = A\exp(-\sigma\omega_0 t)\sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \sigma^2}\, t\right)$, alors :

$$\frac{dv_s(t)}{dt} = -\sigma\omega_0 A\exp\left(-\sigma\omega_0 t\right)\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}\,t\right)$$
$$+\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}\,A\,\exp\left(-\sigma\omega_0 t\right)\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}\,t\right)$$

(3) donne ensuite : $\frac{RE}{L} = \omega_0\sqrt{1-\sigma^2}\,A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{RE}{L\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}}$, et finalement :

$$\boxed{v_s(t) = Ri(t) = \frac{RE}{L\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}}\exp\left(-\sigma\omega_0 t\right)\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}\,t\right)}$$

Pour le créneau descendant, si on est revenu à $v_s = 0$ (période du créneau assez longue devant la pseudo-période $\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}}$), on obtient la même forme de solution en changeant E en $-E$. L'allure est obtenue pour $Q = 2$ soit $\sigma = \frac{1}{4}$.



Échantillonnage

32. Pour figer complètement le mouvement, il faut que le stroboscope émette un flash à chaque période $T = 1/f$ de la corde. La corde sera alors toujours vue sur la même position et semblera fixe (un flash toutes les n périodes convient également).

Pour ralentir son mouvement artificiellement, il faut qu'entre deux flashes, il y ait une période du stroboscope $T_e = 1/f_e$ légèrement supérieure à T : $T_e = T + \varepsilon$. Ainsi, entre deux flashes, la corde se retrouve légèrement décalée dans son mouvement.

Une période apparente $T_a = 1/f_a = 1/2$ s est décrite lorsque la corde sera revenue sur un flash au début de son cycle, après p décalages, lorsque $p\varepsilon = T$.
Le temps écoulé depuis le départ est alors de $p+1$ périodes, donc $T_a = (p+1)T$.

De ces relations, on tire : $p+1 = \frac{T_a}{T} = \frac{f}{f_a} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{f}{f_a} - 1 = \frac{50}{2} - 1 = 24$

Enfin : $\varepsilon = T/p$, et $T_e = T + \varepsilon \Rightarrow T_e = \frac{p+1}{p}T \Rightarrow f_e = \frac{p}{p+1}f = f - f_a = 48$ Hz

Rq : D'autres fréquences plus faibles peuvent également convenir lorsque par exemple : $T_e = 2T + \varepsilon$.

Il est également possible d'observer un mouvement apparent en sens inverse, si la période du stroboscope est légèrement inférieure à T : $T_e = T - \varepsilon$; le même type de calcul peut alors conduire à la fréquence f_e à choisir.

Le stroboscope qui éclaire par impulsion la corde joue le rôle de l'échantillonneur à la fréquence f_e. L'oscillation d'un point de la corde à la fréquence f est le signal, dans ce cas, simplement sinusoïdal.
L'ensemble des positions éclairées d'un point de la corde correspond au signal échantillonné.
Ici, la condition de Nyquist-Shannon n'est pas respectée, car la fréquence f_e est voisin de f, et même inférieure : elle n'est donc pas supérieure à $2f$!
On observe en conséquence un phénomène de repliement de spectre avec l'apparition d'une composante spectrale « fantôme » à la fréquence $f - f_e$ qui est précisément la fréquence apparente que l'on souhaite observer !

Le même type d'effet stroboscopique est observé au cinéma dans les films, où les roues de voiture semblent tourner au ralenti, et parfois en sens inverse. L'échantillonnage est ici imposé par la caméra qui réalise 24 prises de vue par seconde (mais les nouveaux films commencent à sortir à une fréquence double) ; d'après la condition de Nyquist-Shannon, le repliement se manifeste alors pour les phénomènes périodiques de fréquence supérieure à 12 Hz.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

33. La puissance dissipée par effet Joule par une résistance alimentée sous une tension U (valable en régime périodique à condition de prendre la valeur efficace) est :

$$P_J = U^2 / R$$

Au laboratoire, les tensions sont de l'ordre d'une dizaine de volts : $P_J \sim \frac{100}{R}$ en W.

Ainsi une résistance de 100 Ω peut être amenée, si l'alimentation arrive à débiter le courant nécessaire pour maintenir la tension, à dissiper une puissance thermique de l'ordre de 1 W, ce qui lui est fatal si elle n'est pas dimensionnée pour cela…
Aucun risque, en revanche, pour une résistance de 1 MΩ. Le type de résistance basse puissance pouvant dissiper 1/4 W suffit.

34. Non, pas de risque avec une batterie seule !
Il est vrai en revanche que c'est le courant à travers le corps humain qui a des effets dangereux voire potentiellement mortels, les mécanismes étant l'échauffement dû à l'effet Joule et la tétanie des muscles (le cœur en particulier !).

Mais la résistance du corps humain étant assez élevée (quelques centaines de kΩ entre les deux mains sèches compte tenu de la médiocrité des contacts), il faut une tension assez élevée pour avoir des courants dangereux : $U = RI \sim 100$ V pour avoir un courant de 1 mA . Ainsi, le seuil de danger est-il fixé aux environs de 50 V . Une batterie de 12 V est sans effet.

Mais attention, en présence d'une bobine (existant dans le circuit d'allumage d'une voiture), on peut avoir des surtensions élevées. C'est d'ailleurs le but de ce circuit d'allumage que de créer des hautes tensions pour alimenter la bougie créant une étincelle qui enflamme le mélange air-carburant. *Danger dans ce cas* !

35. Pour les lignes HT, les études statistiques de santé sont toujours en cours, et il est encore hasardeux de trancher, surtout si on voit que les enjeux économiques ne contribuent pas à apaiser le débat.
Il est établi, en revanche que les effets physiologiques des champs électromagnétiques sont une réalité. Mais tout dépend de l'intensité, de la fréquence, et du temps d'exposition. Ainsi en faisant varier un de ces paramètres, le même champ pourra-t-il avoir des effets dangereux, bénéfiques ou aucun des deux.
Des médecins s'intéressent de près à des thérapies par exposition électromagnétique, et établissent des procédures sur des fenêtres (intensité, fréquence, temps) spécifiées.
Par exemple, à fréquence et temps d'exposition fixés, ils pensent qu'un champ peut avoir des effets bénéfiques pour une intensité donnée, mais aucun effet pour une intensité double ! un bel exemple de non-linéarité.

36. La compression MP3 utilise une analyse spectrale sur chaque intervalle de temps d'un signal musical. Puis, dans le spectre obtenu, elle élimine les composantes inutiles. Par exemple, si le signal présente une amplitude spectrale importante à 500 Hz et une faible amplitude spectrale à 490 Hz, il est possible, sans conséquence audible, de supprimer la seconde (effet de masquage). Simplifier ainsi le spectre revient évidemment à alléger le fichier. Il ne reste plus ensuite qu'à reconstituer le signal avec ce spectre « amaigri ». Ces opérations de codage - décodage ne posent aucun problème avec les ordinateurs.

37. Sur un disque compact, le signal sonore (à l'origine analogique) est stocké de manière numérique (« digital » en anglais) avec des états que l'on peut désigner par « 0 » ou « 1 » comme en informatique. Au pire, une sinusoïde $s(t)$ est numérisée sur une période T par un créneau avec « 1 » pour $s(t) > 0$ (pendant $T/2$) et « 0 » pour $s(t) < 0$ (pendant $T/2$). La fréquence d'échantillonnage doit donc être au moins le double de la fréquence la plus élevée à graver ; l'oreille humaine entend des sons jusqu'à 20 kHz, il faut donc une fréquence de 40 kHz. L'industrie du disque compact a retenu une fréquence d'échantillonnage de 44,1 kHz, à peine supérieure, pour minimiser le coût des équipements, élevé aux débuts du CD.
Pour un traitement plus complet de ce dispositif, se référer à la question **46.**.

38. Un filtre passe-bande de fréquence de résonance f_0 et de facteur de qualité Q possède une bande passante (en fréquence) $\Delta f = f_0 / Q$ d'autant plus étroite que Q

est élevé. Dans un tel filtre, l'erreur sur la fréquence f transmise, définie comme $f - f_0$ est donc de l'ordre de Δf. Ainsi, un filtre de grand facteur de qualité correspond à une fréquence f_0 d'une grande précision en sortie, également nécessaire pour réaliser des échantillonneurs de bonne facture.

Cette haute précision en fréquence est trouvée en électronique avec les quartz, qui ont révolutionné les filtres et les oscillateurs (ce sont les circuits qui fabriquent les signaux de fréquence f_0 servant de référence de fréquence ou de période, comme dans les montres par exemple).
Leur principe de fonctionnement est basé sur le phénomène de piézoélectricité, découvert par Pierre Curie au début du XXème siècle. Il s'agit d'un effet électromécanique qui transforme les vibrations en différences de potentiel entre deux faces du cristal, et inversement, avec des résonances très aiguës.

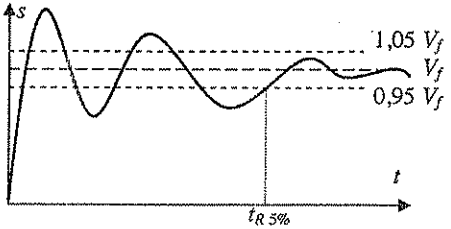
39. La hauteur (liée à la fréquence) est fixée par un oscillateur ; le timbre (lié à la superposition dosée de plusieurs harmoniques) est obtenue par un filtre (ou par filtrage) ; quant à l'intensité (liée à l'amplitude), elle est réglée par un amplificateur de gain variable.

40. Le multiplexage consiste en télécommunications, à faire passer plusieurs signaux sur un seul support, par exemple plusieurs voies téléphoniques sur une seule paire de fils. Le multiplexage fréquentiel utilise pour chaque voie une fréquence ou plus exactement une bande de fréquences différente.
En découpant le spectre des fréquences possibles sur le support en un grand nombre de bandes, il est ainsi possible de passer simultanément un grand nombre d'informations.
Sur une fibre optique, on peut ainsi utiliser plusieurs fréquences c'est-à-dire plusieurs longueurs d'onde pour la lumière, leur séparation en sortie redonne les différents signaux. Avec les dernières techniques, il est ainsi possible de faire passer sur une seule fibre de quelques micromètres de diamètre, et de longueur 7 000 km, avec 155 couleurs différentes, un débit d'information de 31.10^{12} bit/s, soit l'équivalent de 6 000 DVD par seconde !

41. Parmi tout le spectre radio, un récepteur radio doit sélectionner la fréquence voulue. Un filtre passe-bande de fréquence centrale variable et dont le coefficient de qualité soit assez élevé pour séparer les différentes stations est très difficile à réaliser. On préfère utiliser un filtre de fréquence centrale fixe f_I (la « fréquence intermédiaire ») et transposer la fréquence du signal reçu f_R, à l'aide d'un multiplieur et d'un générateur de fréquence variable f_L (dit « oscillateur local ») pour qu'elle devienne égale à la fréquence intermédiaire. La recherche d'une station se fait alors en modifiant la fréquence de l'oscillateur local : il y a accord lorsque $f_L = f_R - f_I$. Le démodulateur opère toujours à la fréquence intermédiaire, ce qui permet de le régler une fois pour toutes. Cette fréquence intermédiaire vaut 455 kHz en modulation d'amplitude et 10,4 MHz en modulation de fréquence.

42. Temps de réponse d'un système linéaire du premier ou du deuxième ordre

a) Le temps de réponse à 5% est le temps nécessaire pour que la réponse indicielle d'un système linéaire présente un écart inférieur à 5% avec sa valeur finale, de façon définitive (voir schéma ci-dessous).
Ce temps caractérise la rapidité d'évolution du système. En général on cherche à le minimiser, par exemple dans les appareils de mesure.

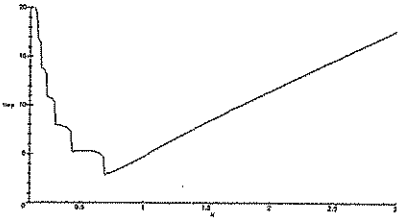


b) Pour un système d'ordre 1 dont la réponse indicielle s'écrit :

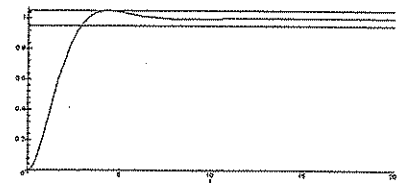
$$s(t) = H_0 E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

ce temps de réponse vaut 3τ.

c) Pour le système d'ordre 2, il faut effectuer une résolution numérique qui conduit à la courbe ci-contre, représentant le temps de réponse réduit (divisé par τ) en fonction de σ.



Le temps de réponse le plus court est obtenu pour $\sigma = 0{,}69$ et vaut $2{,}86\tau$. Cela correspond au régime pseudopériodique avec un dépassement pratiquement égal à 5% dessiné ci-contre.



43. Tripleur de fréquence

a) La formule du diviseur de tension donne immédiatement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}$$ que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + j\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}\left(\omega\sqrt{LC} - \dfrac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)}$$

simplement assimilable à la forme canonique : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

où l'on obtient directement le facteur de qualité $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et la pulsation de résonance du filtre : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ soit $\underline{\omega_0 = 5{,}0 \text{ krad/s}}$

Comme $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1{,}66$ krad/s , on voit $\boxed{\omega_0 = 3\omega}$ à la précision des données de l'énoncé.

b) Chaque terme de la série entrant dans le filtre est affecté différemment en amplitude et en phase, car module et argument de la fonction de transfert dépendent de ω. Ainsi, le terme fondamental (à la pulsation fondamentale ω) voit son amplitude multipliée par un facteur $|H(j\omega)| = G(\omega)$ et sa phase avancée de $\varphi(\omega)$ dans son passage par le filtre. On obtient en sortie (notation réelle comme demandé par l'énoncé) :

$$\boxed{\begin{aligned} v_s(t) = -\frac{8A}{\pi^2}\Big[& G(\omega)\cos\big(\omega t + \varphi(\omega)\big) + \frac{1}{9}G(3\omega)\cos\big(3\omega t + \varphi(3\omega)\big) + \ldots \\ & + \frac{1}{(2k+1)^2}G\big((2k+1)\omega\big)\cos\Big[(2k+1)\omega t + \varphi\big((2k+1)\omega\big)\Big] + \ldots \Big] \end{aligned}}$$

c) La tension de sortie se met donc sous la forme :

$$v_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\big((2k+1)\omega t + \varphi_k\big) \quad \text{avec}$$

$$A_k = -\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{8A}{\pi^2}G\big((2k+1)\omega\big) = -\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{8A}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{(2k+1)\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{(2k+1)\omega}\right)^2}}$$

$$\text{et } \varphi_k = \arg\Big[\underline{H}\big(j(2k+1)\omega\big)\Big] = -\arg\left[1 + jQ\left(\frac{(2k+1)\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{(2k+1)\omega}\right)\right]$$

d) Applications numériques :

– pulsation ω correspondant à $k = 0$:

$$A_0 = -\frac{8A}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = -\frac{80}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1+100^2\left(\dfrac{1}{3} - 3\right)^2}} = -0{,}030\,\text{V}$$

$$\varphi_0 = -\arg\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = -\arg\left[1 + j100\left(\frac{1}{3} - 3\right)\right] \approx \frac{\pi}{2}$$

– pulsation 3ω correspondant à $k = 1$:

$$A_1 = -\frac{8A}{9\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{3\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{3\omega}\right)^2}} = -\frac{80}{9\pi^2} = -0{,}90\,\text{V}$$

$$\varphi_1 = -\arg\left[1 + jQ\left(\frac{3\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{3\omega}\right)\right] = -\arg[1] = 0$$

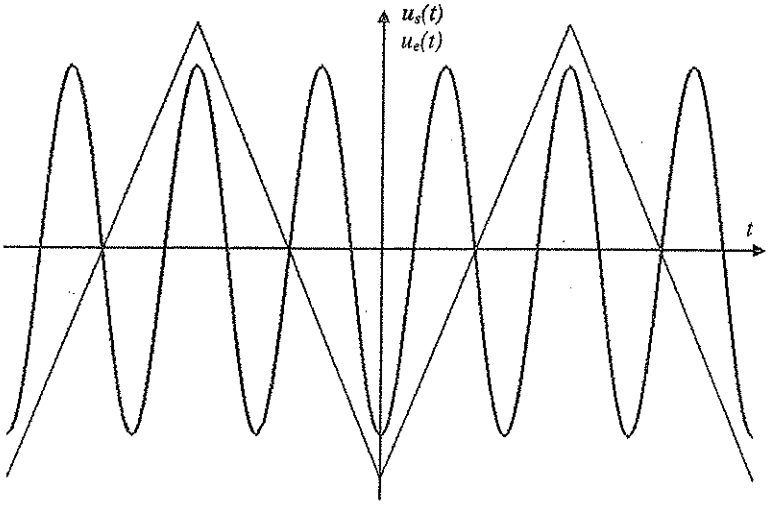
– pulsation 5ω correspondant à $k = 2$:

$$A_2 = -\frac{8A}{25\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{5\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{5\omega}\right)^2}} = -\frac{80}{25\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1+100^2\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right)^2}} = -3.10^{-3}\,\text{V}$$

Le terme largement prépondérant est l'harmonique 3 à la pulsation 3ω.
On peut faire l'approximation que les autres sont négligeables d'où :

$$\boxed{u_s(t) \approx A_1\cos(3\omega t + \varphi_1) = -0{,}90\cos(3\omega t)}$$

e) Les courbes avec une échelle différente pour les deux tensions :



f) Ce dispositif permet d'obtenir une sinusoïde de fréquence triple à partir d'un triangle. C'est donc un tripleur de fréquence.

44. Filtrage d'un signal périodique (*)

a) $T = \frac{1}{f} = 20\,\text{ms}$ et $\omega = 2\pi f = 314\,\text{rad/s}$

b) On note $\underline{Z} = \frac{1}{1/R_C + jC\omega} = \frac{R_C}{1 + jR_C C\omega}$ l'impédance du condensateur C en parallèle sur la résistance R_C. Par la formule du diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+R} = \frac{\frac{R_C}{1+jR_C C\omega}}{\frac{R_C}{1+jR_C C\omega}+R} = \frac{R_C}{R_C + R(1+jR_C C\omega)} = \frac{\frac{R_C}{R+R_C}}{1+j\frac{RR_C C\omega}{R+R_C}}$$

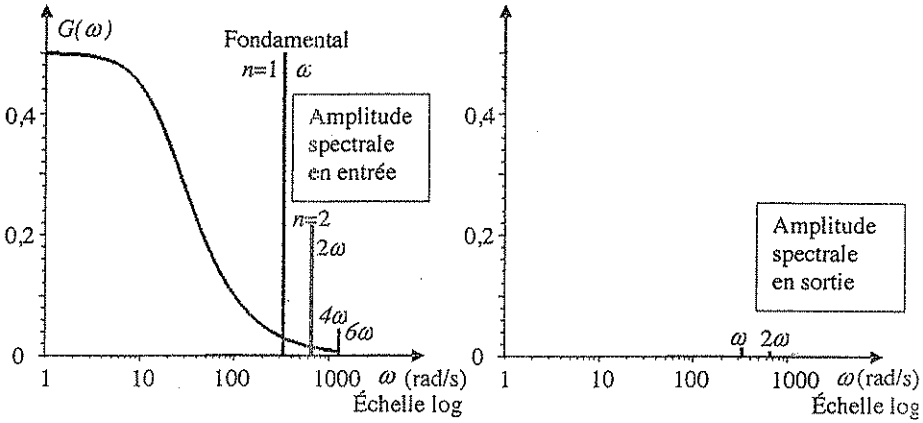
Il s'agit d'une fonction de transfert d'un passe-bas du premier ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad G_0 = \frac{R_C}{R+R_C} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R+R_C}{CRR_C}$$

Numériquement, $\underline{G_0 = 0{,}5}$ et $\underline{\omega_c = 20\ \text{rad/s}}$.

c) Chaque composante spectrale de s est affectée différemment par le filtre. Le terme continu (de pulsation nulle) subit le gain G_0 tandis que le terme à la pulsation fondamentale ω subit le gain $G(\omega) = \frac{G_0}{\sqrt{1+\omega^2/\omega_c^2}}$ et ainsi de suite ($G(2\omega), G(4\omega), \ldots$)

Pour illustrer cela, on peut tracer un graphe de l'amplitude spectrale du signal d'entrée (sans se préoccuper de la phase, termes en sinus ou cosinus) en fonction de ω et y porter l'allure du diagramme de $G(\omega)$. On ne retrouve pas ici l'allure connue du diagramme de Bode d'un passe-bas premier ordre, car l'échelle choisie en ordonnée n'est pas logarithmique. Le terme continu serait en $\omega = 0$, à l'infini à gauche, et n'apparaît donc pas sur le graphe. Les pulsations présentes dans le spectre de l'entrée sont largement hors de la bande passante et donc mal transmises par le filtre.



d) Il ne reste donc pratiquement en sortie que la composante continue de valeur $\frac{E}{\pi}$ affectée du gain G_0, donc de valeur $\frac{G_0 E}{\pi}$.

Le terme correctif est, avec un bonne approximation le terme fondamental à la pulsation ω (le terme de pulsation 2ω est à peu près cinq fois plus petit).

La partie variable du signal de sortie est donc environ : $\sin\left(\omega t + \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)\right)$ dont seule l'amplitude est demandée ici, soit :

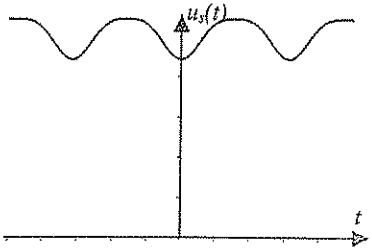
$$\frac{E}{2}G(\omega) = \frac{EG_0}{2\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \Rightarrow \tau = \frac{\frac{EG_0}{2\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}}{\frac{G_0 E}{\pi}} \text{ soit } \boxed{\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}}$$

Numériquement, $\underline{\tau = 0{,}10 = 10\ \%}$

$$v_s(t) \approx \frac{E}{\pi}\left[1+\tau\sin\left(\omega t + \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)\right)\right] \approx \frac{E}{\pi}\left[1+\tau\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{E}{\pi}\left[1-\tau\cos(\omega t)\right]$$

dont l'allure en fonction du temps est donnée ici (on a ajouté la contribution de l'harmonique 2 dans ce tracé pour plus de précision).

L'application est la production d'un courant pratiquement continu dans la résistance de charge R_C (à partir de la tension alternative redressée mono-alternance). On peut ainsi réaliser la



conversion alternatif – continu (souvent à la fréquence industrielle de 50 Hz).

Rq : Il faut utiliser un condensateur de filtrage de grande capacité pour que la fréquence de coupure du filtre ω_c soit suffisamment basse (d'autant plus que la résistance de charge est petite). Ceci justifie les valeurs numériques employées.

45. Intégration d'un créneau par un filtre passe-bande

a) La fonction de transfert du passe-bande d'ordre 2 peut s'écrire sous forme canonique : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{G_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

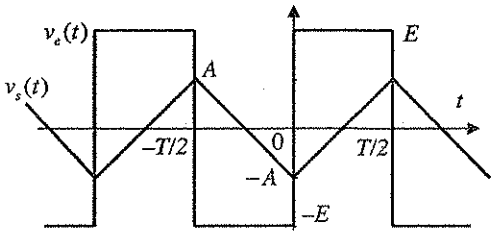
L'expression asymptotique à haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) s'obtient en conservant au dénominateur le seul terme prédominant, ici $jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}$, ce qui donne l'équivalent de la fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) \to \dfrac{1}{j\omega}\dfrac{G_0\omega_0}{Q}$.

Cette fonction de transfert est bien celle d'un intégrateur parfait, c'est-à-dire qu'elle correspond à un gain en décibels chutant à 20 dB/décade et à un déphasage de $-\dfrac{\pi}{2}$ de la sortie par rapport à l'entrée.

Sa constante de temps est : $\boxed{\tau = \dfrac{1}{\omega_0}\dfrac{Q}{G_0}}$

b) Il est important de vérifier que toutes les composantes du créneau sont bien dans le domaine de fonctionnement de l'intégrateur : c'est le cas puisque $\omega \gg \omega_0$ et donc $3\omega \gg \omega_0$, $5\omega \gg \omega_0$, etc...

Chaque composante est ainsi intégrée par le filtre, et donc l'ensemble du signal. On obtient une primitive du créneau, c'est-à-dire un triangle symétrique de même période que le créneau.



Écrivons l'équation différentielle vérifiée par l'entrée créneau et la sortie triangle (liées par l'intégrateur de constante de temps τ) : $v_s(t) = \int \frac{1}{\tau} v_e(t)\,dt$ soit en dérivant par rapport au temps : $\boxed{\frac{dv_s}{dt} = \frac{v_e}{\tau}}$

La pente du triangle vaut donc $\frac{E}{\tau}$ lorsque l'entrée vaut E (entre $t = 0$ et $t = T/2$).
Il reste à calculer l'amplitude notée A du triangle en sortie.
Sa variation crête-à-crête $2A$ correspond à l'augmentation de tension pendant cette demi-période, soit :

$$2A = \frac{E}{\tau}\frac{T}{2} \text{ et finalement, } \boxed{A = \frac{ET}{4\tau} = \frac{\pi}{2}\frac{G_0\omega_0}{Q\omega}E}$$

Rq : L'amplitude est faible, car $\omega \gg \omega_0$. Pour utiliser un tel intégrateur, il faut un filtre peu sélectif (Q pas trop grand) et un gain maximum G_0 suffisant.

Si on ajoute une composante continue au triangle, celle-ci n'est pas intégrée. En effet, le passe-bande a un gain nul en continu ($\omega = 0$). Tout se passe en sortie comme si l'« *offset* » n'existait pas, c'est-à-dire comme si le créneau avait une moyenne nulle.

46. CD et repliement du spectre

a) Chaque valeur échantillonnée correspond pour une voie à 16 bits, c'est-à-dire à deux octets. En stéréo, il faut donc 4 octets par échantillon.
Il y a 44100 échantillons à stocker par seconde, soit sur 74 minutes : $N = 44100 \times 60 \times 74 = 1{,}96.10^8$ échantillons.

Au total, il faut donc stocker $4N = 7{,}83.10^8$ octets = 783 MO dans le fichier, ce qui correspond à peu près à la capacité maximale d'un CD.
Les fichiers sont un peu plus lourds, car ils contiennent des informations supplémentaires (titre du morceau, auteur, durée totale,...).

Rq : Sur le CD, les bits sont codés avec des petits trous gravés en surface. Il faut beaucoup plus de trous que de bits, car l'information est redondante pour des questions de sécurité (pour ne pas tout perdre à cause d'une rayure par exemple). Le codage intègre aussi des procédures de corrections des erreurs.

b) Sans bruit parasite, le signal musical ne contient que des fréquences audibles, et donc sa fréquence maximale vaut : $f_{max} = 20$ kHz. On vérifie facilement la condition de Nyquist-Shannon : $44{,}1 \text{ kHz} = f_e > 2f_{max} = 40$ kHz.
Avec le bruit parasite, la situation change, puisque $f_{max} = f = 42{,}1$ kHz : la condition n'est plus du tout vérifiée.

c) À cause du phénomène de repliement (décrit en détail dans la question **20.**), il apparaît une fréquence « fantôme » $f_e - f = 2{,}0$ kHz dans le spectre du signal échantillonné.
Elle est très gênante à l'oreille à la restitution, car dans la partie la plus audible du spectre des fréquences sonores. Toutes les composantes spectrales de bruit ne sont pas aussi dérangeantes : en effet, les fréquences très élevées (au-delà de 10 kHz) sont beaucoup moins audibles.

d) Il faut utiliser un filtrage passe-bas pour rejeter toutes les fréquences inaudibles situées au-delà de 20 kHz à choisir comme fréquence de coupure.
Le filtre s'appelle un filtre anti-repliement (voir la question **21.**).

e) Les fréquences qui poseraient un problème dans le spectre du signal sont celles qui donneraient des fréquences fantômes par repliement dans le spectre du signal échantillonné, c'est-à-dire celles qui ne satisferaient pas à la condition de Nyquist-Shannon et vérifieraient ainsi : $f > f_e/2 = 22$ kHz. Il faut donc entièrement les bloquer avec le filtre qui doit avoir un gain nul à ces fréquences.
En revanche, il ne faut pas atténuer les fréquences audibles qui doivent passer avec un gain constant à travers le filtre.
Un filtre analogique qui serait parfaitement passant jusqu'à 20 kHz, puis totalement bloquant après 22 kHz n'est pas facile à réaliser ! Il faut faire des compromis dommageables à la qualité...
En pratique, les filtres laissent passer un petit peu de bruit juste au-delà de 22 kHz, et ce n'est pas trop grave, car les fréquences fantômes qui en découlent dans le spectre du signal échantillonné sont très aiguës car proches de la limite des 20 kHz, et donc peu audibles.

f) Pour résoudre ces problèmes, il n'y a pas d'autre solution que d'augmenter la fréquence d'échantillonnage des futurs CD.
Une technique tient actuellement la corde industriellement : il s'agit des Blu-ray Pure Audio où le signal est échantillonné à $f_e = 192$ kHz avec une résolution de 24 bits pour un son sans compromis et selon les mélomanes, une nouvelle expérience musicale.
Les premiers sont déjà en vente, ils peuvent être lus par tout lecteur de Blu-ray actuel et ne nécessitent donc pas un équipement dédié, mais seulement une mise à jour logicielle.

47. Ohmmètre

a) On pose $u_0(t) = U_0 \cos \omega t$.

En sortie du premier multiplieur, on a $u_1(t) = k\, u_0(t)\, u_s(t)$.

L'impédance d'entrée d'un multiplieur étant infinie, les résistances R et X sont parcourues par le même courant d'où $u_2(t)-u_1(t)=\dfrac{X}{R+X}\left(u_0(t)-u_1(t)\right)$ (diviseur de tension) soit $u_2(t)=\dfrac{Xu_0(t)+Ru_1(t)}{R+X}$.

En remplaçant $u_1(t)$ par sa valeur on obtient :

$$u_2(t)=\frac{X}{R+X}u_0(t)+\frac{R}{R+X}k\,u_0(t)u_s(t)$$

En sortie du deuxième multiplieur, on a :

$$u_A(t)=k\,u_0(t)u_2(t)=\frac{X}{R+X}k\,u_0^2(t)+\frac{R}{R+X}k^2\,u_0^2(t)u_s(t)$$

ou $u_A(t)=\dfrac{X}{R+X}k\,u_0^2(t)\left(1+\dfrac{R}{X}k\,u_s(t)\right)$

soit $u_A(t)=\dfrac{X}{R+X}k\dfrac{U_0^2}{2}\left(1+\cos(2\omega t)\right)\left(1+\dfrac{R}{X}k\,u_s(t)\right)$.

Après filtrage, le terme de pulsation 2ω disparaît et il ne reste que $u_B(t)=\dfrac{X}{R+X}k\dfrac{U_0^2}{2}\left(1+\dfrac{R}{X}k\,u_s(t)\right)$.

L'intégrateur fournit la tension $u_s(t)=\pm\alpha\displaystyle\int_0^t u_B(t)\,dt+u_s(0)$ avec α constante positive, ce qui se traduit par $\dfrac{du_s}{dt}(t)=\pm\alpha\,u_B(t)$ et donc :

$$\boxed{\frac{du_s}{dt}(t)=\pm\alpha\frac{X}{R+X}k\frac{U_0^2}{2}\left(1+\frac{R}{X}k\,u_s(t)\right)}$$

b) Pour que la solution homogène de l'équation linéaire ne diverge pas, il faut prendre le signe « – » donc un intégrateur inverseur, qui peut par exemple être fabriqué avec une résistance R' et un condensateur C', conduisant à $\alpha=\dfrac{1}{R'C'}$.

c) L'équation $\dfrac{du_s}{dt}(t)=-\alpha\dfrac{X}{R+X}k\dfrac{U_0^2}{2}\left(1+\dfrac{R}{X}k\,u_s(t)\right)$ s'écrit aussi

$$\frac{du_s}{1+\dfrac{R}{X}k\,u_s(t)}=-\alpha\frac{X}{R+X}k\frac{U_0^2}{2}dt \quad\text{ou}\quad \frac{d\left(1+\dfrac{R}{X}ku_s\right)}{1+\dfrac{R}{X}k\,u_s(t)}=-\alpha\frac{R}{R+X}k^2\frac{U_0^2}{2}dt$$

qui s'intègre en $\ln\left(1+\dfrac{R}{X}ku_s\right)=-\alpha\dfrac{R}{R+X}k^2\dfrac{U_0^2}{2}t+cte$ soit

$$1+\frac{R}{X}ku_s=Ke^{-\alpha\frac{R}{R+X}k^2\frac{U_0^2}{2}t}$$

qui tend vers zéro avec une constante de temps $\tau = 2\dfrac{R+X}{\alpha R k^2 U_0^2}$.

On a donc au bout de quelques τ, et quelle que soit la valeur de la constante K, $1+\dfrac{R}{X}ku_s = 0$ soit

$$\boxed{u_s = -\frac{1}{k}\frac{X}{R}}$$

La tension de sortie est proportionnelle à la résistance à mesurer.

Puisque $k = 0{,}1\ \mathrm{V}^{-1}$, il faut avoir R et X du même ordre de grandeur afin de mesurer une tension de l'ordre de la dizaine de volts, pour laquelle le multiplieur est le plus précis (l'erreur est d'environ 1% de la pleine échelle...).

d) Pour avoir un temps d'établissement du signal de sortie inférieur à $\tau_0 = 0{,}1\ s$ il faut que $3\tau = 6R'C'\dfrac{R+X}{R k^2 U_0^2} \leq \tau_0$ soit, en supposant R et X du même ordre de grandeur, $R'C' \leq \dfrac{\tau_0}{6}\dfrac{R k^2 U_0^2}{R+X} \approx \dfrac{\tau_0}{10}$.

On a supposé dans la question a) que le filtre coupait la composante de pulsation 2ω de fréquence 2 kHz et laissait passer $u_s(t)$. Il faut donc que les variations de $u_s(t)$ soit assez lentes. Un temps d'établissement de 0,1 s correspond à une fréquence de l'ordre de la dizaine de hertz. Un filtre dont la fréquence de coupure est d'une centaine de hertz peut alors convenir...

48. La détection synchrone

1. Principe de la détection synchrone

a) $P(t) = S(t)\cos(\omega_0 t + \varphi) = \left[\Gamma s(t)\cos\omega_0 t + b(t)\right]\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$= \Gamma s(t)\cos\omega_0 t\ \cos(\omega_0 t + \varphi) + b(t)\ \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Le deuxième terme est indépendant du signal.

b) Le moyenneur a pour but d'éliminer le deuxième terme, et donc s'affranchir du bruit. Pour atteindre cet objectif, il faut remarquer que le bruit $b(t)$ variant rapidement et aléatoirement au cours du temps, le produit $b(t)\cos(\omega_0 t + \varphi)$ varie rapidement et aléatoirement autour de zéro et possède donc une moyenne nulle sur une période du cosinus.

c) Le premier terme peut se développer en transformant le produit des cosinus :

$$\Gamma s(t)\cos\omega_0 t\ \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{\Gamma s(t)}{2}\cos(2\omega_0 t + \varphi) + \frac{\Gamma s(t)}{2}\cos\varphi$$

Par action du moyenneur le premier de ces deux nouveaux termes donne :

$$\left\langle \frac{\Gamma s(t)}{2}\cos\left(2\omega_0 t+\varphi\right)\right\rangle \approx \frac{\Gamma s(t)}{2}\left\langle \cos\left(2\omega_0 t+\varphi\right)\right\rangle = 0$$

en supposant que le signal $s(t)$ reste pratiquement constant sur la durée de la moyenne, ce qui suppose que cette durée soit assez courte à l'échelle des lentes variations de $s(t)$. Cette condition est précisée à la fin du corrigé.

Avec la même condition, le deuxième terme donne une moyenne :

$\left\langle \frac{\Gamma s(t)}{2}\cos\varphi\right\rangle \approx \frac{\Gamma s(t)}{2}\cos\varphi$ proportionnel au signal débarrassé du bruit, comme souhaité.

Pour obtenir une sortie maximale, il faut donc avoir $\cos\varphi = 1$, soit $\varphi = 0$, mais le réglage en φ n'est pas facile à ajuster puisque le cosinus varie lentement au voisinage de son maximum ; il est alors souvent préférable de rechercher le minimum de signal ($\varphi = \pm\pi/2$), puis de décaler la valeur de $\pm\pi/2$ pour être sûr d'être juste au maximum.

Dans la pratique, le moyenneur est un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure doit être choisie assez basse pour couper entièrement la pulsation ω_0, mais assez haute pour ne pas couper les lentes variations du signal $s(t)$.

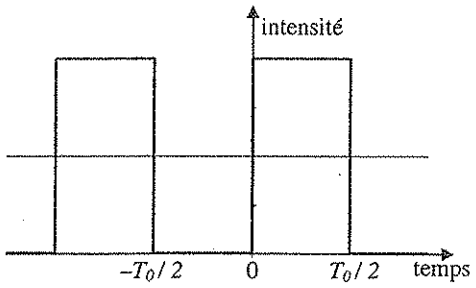
Le choix de cette fréquence de coupure résulte donc d'un compromis que l'on peut ajuster, puisqu'il est possible de sélectionner ω_0.

2. Une application avec la lumière (*)

a) Si le faisceau est assez petit en diamètre, on peut considérer que soit il passe à travers le trou, soit il est occulté par la roue.

Ainsi l'intensité en sortie est en tout ou rien, en forme de créneau.

Pour que le créneau soit symétrique, il faut que le faisceau soit occulté la moitié du temps, c'est-à-dire que la partie ajourée ait la même longueur que la partie pleine sur le rayon de la roue que rencontre le faisceau.



Attention, sur une rotation complète de la roue, le faisceau rencontre p trous, et donc la pulsation de l'intensité transmise vaut $\frac{2\pi}{T_0} = \omega_0 = p\,\omega_a$.

b) La tension utile obtenue avec le faisceau portant le signal, moyennée à zéro, sans le bruit de mesure, est elle aussi une fonction créneau proportionnelle à $u(t)$, puisque les deux faisceaux sont occultés en même temps ; elle est notée $\Gamma u(t)s(t)$ où Γ est une constante de proportionnalité.

L'introduction du bruit dans $S(t) = \Gamma u(t) s(t) + b(t)$ conduit à :

$$P(t) = S(t)\ u(t) = \left[\Gamma u(t) s(t) + b(t)\right] u(t)$$

Par ailleurs $u(t)$ est proportionnel au créneau donné pour $\omega = \omega_0$ (voir la figure) : $u(t) = \beta f(t)$ où β est une autre constante de proportionnalité, ce qui donne l'équation (1) :

$$P(t) = \left[\Gamma\beta f(t) s(t) + b(t)\right] \beta f(t) = \Gamma\beta f^2(t) s(t) + \beta\, b(t) f(t) \quad (1)$$

Le remplacement de :

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + ... + \frac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)\omega_0 t\right) + ...\right]$$

conduit à une expression similaire à celle du a) avec $\varphi = 0$, mais à la place de $\cos\omega_0 t$, apparaît une somme de sinus de pulsations $\omega_0, 3\omega_0, (2k+1)\omega_0, ...$

Tout se passe donc comme si le signal était modulé par une infinité de fonctions sinusoïdales à ces pulsations.

c) La technique demeure la même et consiste à faire agir électroniquement sur $P(t)$ un moyenneur bien choisi, avec les mêmes contraintes que précédemment. Montrons qu'il est alors possible de retrouver le signal sans le bruit.

Dans l'équation (1), le terme $\beta\, b(t) f(t)$ a une moyenne nulle, car chacun des termes sinusoïdaux se moyenne à zéro.

Le terme $\Gamma\beta f^2(t) s(t)$ donne des termes en $sin^2\,\omega_0 t, sin^2\,3\omega_0 t, sin^2\,5\omega_0 t, ...$ qui ont chacun une moyenne $1/2$, et des termes croisés comme $sin\,\omega_0 t . sin 3\omega_0 t$ qui ont tous une moyenne nulle. Finalement :

$$\left\langle \Gamma\beta f^2(t) s(t) \right\rangle \approx \Gamma\beta s(t) \left\langle f^2(t) \right\rangle = \frac{\Gamma\beta s(t)}{2}\left(\frac{4E}{\pi}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(2k+1)^2} + ...\right]$$

La série entre crochets converge vers $\frac{3\pi^2}{24}$, et la sortie vers $\Gamma\beta E^2 s(t)$.

Elle est bien proportionnelle au signal $s(t)$, débarrassé du bruit.

Rq : Pour calculer la moyenne du terme : $\Gamma\beta f^2(t) s(t)$, il est encore plus simple de constater que $f^2(t) = E^2 = Cte$, ce qui donne directement le même résultat : $\Gamma\beta E^2 s(t)$

49. Convertisseur numérique analogique (CNA)

a) Raisonnons sur un inverseur K quelconque, qu'il soit connecté au point A ou à la masse, le potentiel du bas de la résistance $2R$ est le même : c'est zéro.

Donc le courant dans la résistance $2R$ qui vaut par la loi d'Ohm $I'_k = \frac{V_k}{2R}$ est le même, ce qui implique que V_k est le même. Donc les potentiels sont tous

indépendants de la position de tous les interrupteurs, et par conséquent, tous les courants également.

b) Comme $V_A = 0$, la loi d'Ohm donne immédiatement $V_0 = 2R I'_0$ et $V_0 = 2R I_0$.

Donc : $\boxed{I_0 = I'_0 = V_0 / 2R}$

La loi des nœuds donne alors au point de potentiel V_0 :

$$I_1 = I_0 + I'_0 = 2I_0 = V_0 / R$$

Et la loi d'Ohm aux bornes de R : $V_1 - V_0 = R I_1 \Rightarrow \boxed{V_1 = 2V_0}$

c) Supposons que la propriété : $I'_k = I_k$ est vraie à l'ordre k et démontrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$:

– loi d'Ohm aux bornes de $2R$ lié au nœud k : $V_k = 2R I'_k = 2R I_k$ (1)

– loi des nœuds au nœud $k+1$: $I_{k+1} = I_k + I'_k = 2I_k$ (2)

– loi d'Ohm aux bornes de $2R$ lié au nœud $k+1$: $V_{k+1} = 2R I'_{k+1}$ (3)

– loi d'Ohm aux bornes de R entre $k+1$ et k : $V_{k+1} - V_k = R I_{k+1}$ (4)

(1) $\Rightarrow I_k = V_k / 2R$

(2) $\Rightarrow I_{k+1} = 2I_k = V_k / R$

(4) $\Rightarrow V_{k+1} = V_k + R I_{k+1} = 2V_k$

(3) $\Rightarrow I'_{k+1} = V_{k+1} / 2R = 2V_k / 2R = V_k / R = I_{k+1}$

La propriété étant vraie à l'ordre 0, elle est donc vraie pour tout k :

$\boxed{\text{Pour tout } k,\ I'_k = I_k \text{ puis } V_{k+1} = 2V_k}$

d) On en déduit $V_2 = 2V_1 = 2^2 V_0$, $V_3 = 2V_2 = 2^3 V_0$, ..., $V_k = 2^k V_0$, $V_{n-1} = 2^{n-1} V_0 = V_{réf}$

Et donc : $V_0 = \dfrac{V_{réf}}{2^{n-1}}$ puis $V_k = 2^k V_0 = \dfrac{V_{réf}}{2^{n-1}} 2^k$ et enfin :

$$I_k = V_k / 2R = \frac{V_{réf}}{R} \frac{2^{k-1}}{2^{n-1}} = \frac{V_{réf}}{R} \frac{2^k}{2^n}$$

Le courant I_s est la somme de tous les I_k pour les inverseurs fermés sur le point A, ce qui s'écrit en notant $a_k = 1$ si l'inverseur de rang k est fermé sur A, et $a_k = 0$ s'il est fermé sur la masse : $I_s = \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k I_k = \dfrac{V_{réf}}{2^n R} \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k 2^k$

Le convertisseur courant-tension délivre finalement : $\boxed{u_s = \alpha \dfrac{V_{réf}}{2^n R} \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k 2^k}$

Le CNA remplit donc fidèlement sa fonction.

La valeur minimale de u_s, atteinte si tous les inverseurs sont ouverts vaut 0.

La valeur maximale de u_s, atteinte si tous les inverseurs sont fermés vaut :

$$u_{s\max} = \alpha \frac{V_{réf}}{2^n R} \sum_{k=0}^{k=n-1} 2^k = \alpha \frac{V_{réf}}{2^n R}(2^n - 1) = \alpha \frac{V_{réf}}{R}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \text{ soit } \alpha \frac{V_{réf}}{R} \text{ à 1 LSB près.}$$

e) Le temps de réponse est un paramètre très important des CNA. Ici, il n'est limité que par le convertisseur tension-courant et le temps de commutation des inverseurs électroniques. Ce type de CNA peut donc être très rapide.

f) Il est préférable d'utiliser un raisonnement spectral, dans cette question.
Le CNA reconstruit pratiquement le signal échantillonné quantifié, dont le spectre est bien plus riche que celui du signal de départ (voir la question **19.** où ce spectre est détaillé).
Pour retrouver le signal analogique de départ (possible sans perte d'information si la condition de Nyquist-Shannon est vérifiée), il faut le traiter par un filtre passe-bas qui coupe à f_{max} (fréquence maximale du signal).
C'est ce filtre passe-bas qui réalise le « lissage » temporel de la courbe discontinue représentée. On peut l'obtenir avec un passe-bas RC d'ordre 1 par exemple, mais un filtre plus abrupt (ordre 2, 3, voire plus) est souvent conseillé pour faire disparaître totalement les hautes fréquences issues de l'échantillonnage.

50. Simulation numérique d'un oscillateur de Duffing simplifié

L'équation de l'oscillateur de Duffing est $\boxed{\ddot{x} + r\dot{x} + x + \beta x^3 = f\cos\omega t}$

a) Étude du régime libre non amorti $(f = 0, r = 0)$

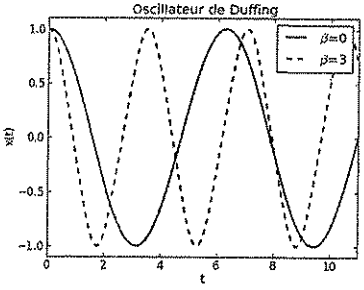
En introduisant la variable $v(t) = \dot{x}(t)$, l'équation de Duffing s'écrit sous la forme du système d'équations différentielles suivant :

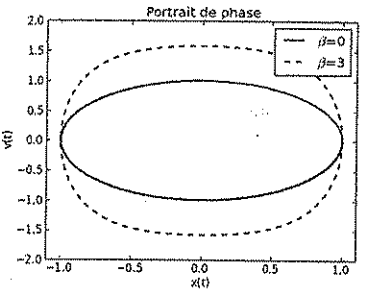
$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -rv - x - \beta x^3 \end{cases}}$$

Le code python et les tracés demandés sont rassemblés ci-dessous :

```
from math import *
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

def Duffing(X, t):
    """ Système de Dufing libre où X = [ x(t), v(t) ] """
    x_prime = X[1]
    x_seconde = -r*X[1] - X[0] - beta*X[0]**3
    return( x_prime, x_seconde )

r = 0
ts = np.linspace(0, 11, 1000)
beta = 0
```

```
xs0 = odeint( Duffing, (1., 0.), ts)
beta = 3
xs3 = odeint( Duffing, (1., 0.), ts)

plt.plot(ts, xs0[:,0],'k-',ts, xs3[:,0],'k--',lw = 2)
plt.show()

plt.plot(xs0[:,0], xs0[:,1], 'k', lw = 2 )
plt.plot(xs3[:320,0], xs3[:320,1], 'k--', lw = 2)
plt.xlabel('x(t)')
plt.ylabel('v(t)')
plt.xlim([-1.1,1.1])
plt.title('Portrait de phase')
plt.show()
```

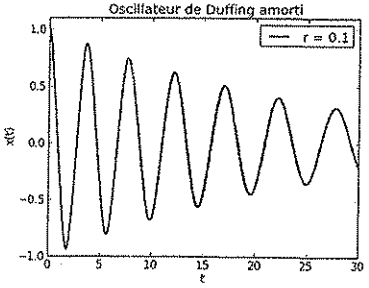


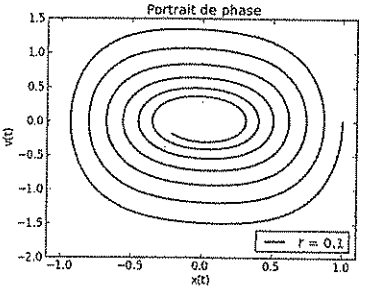


Ces tracés illustrent qu'en l'absence d'amortissement, l'oscillateur de Duffing est un système conservatif (l'amplitude des oscillations est constante, les trajectoires dans l'espace des phases sont fermées). Le portrait de phase met également clairement en évidence le caractère non linéaire du système quand $\beta = 3$. En effet, la trajectoire obtenue dans ce cas est loin d'être une ellipse !

b) Étude du régime libre amorti $(f = 0, r \neq 0)$

Le code python est le même que celui fourni plus haut et les courbes obtenues sont :





Ces tracés illustrent l'effet d'un terme d'amortissement sur les oscillations d'un système physique. L'énergie mécanique n'est plus conservée. La non linéarité du système est visible sur le tracé des variations de $x(t)$. En effet il n'y a clairement pas conservation de la pseudo-période des oscillations durant la phase d'amortissement.

Travaux pratiques

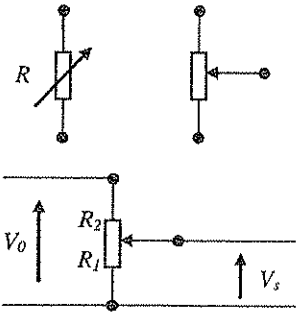
51. Quand la touche « dB » est enfoncée, la valeur affichée est $20\log\frac{V}{V_0}$ où V est la valeur efficace de la tension mesurée et V_0 une valeur de référence interne à l'appareil et dépendant du calibre choisi.
Lors du tracé du diagramme de Bode de la fonction de transfert d'un système linéaire, les mesures successives de la tension d'entrée V_E et de la tension de sortie V_S en décibels permettent d'obtenir directement le gain en décibels :

$$G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{V_S}{V_0} - 20\log\frac{V_E}{V_0} = V_{SdB} - V_{EdB}$$

Avec certains multimètres, on peut même choisir comme référence la tension d'entrée, on lit alors directement G_{dB} sur l'affichage.

52. Dans la plupart des montages électroniques étudiés en TP, les tensions valent au plus une dizaine de volts et les courants quelques mA (valeurs de saturation en tension et en courants des ALI). La loi d'Ohm montre que les résistances sont de l'ordre de quelques kΩ.

53. Oui, une résistance variable n'a que deux bornes alors qu'un potentiomètre en a trois.
Avec le potentiomètre, on peut facilement fabriquer une résistance variable en utilisant le point milieu (curseur réglable) et une autre des deux bornes.
Pour obtenir une fraction réglable d'une tension V_0 donnée, il suffit d'injecter V_0 aux bornes extrêmes du potentiomètre et d'en récupérer la fraction V_s entre le point milieu et une autre borne.
Pour que ceci fonctionne, il faut que la formule du diviseur de tension soit valable, il faut donc une sortie ouverte, c'est-à-dire pas de charge en sortie.



On a alors : $V_S = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0$ (ajustable).

En pratique, il suffit que la résistance de charge soit grande devant la résistance totale du potentiomètre.

54. Il est d'abord conseillé de balayer, en tournant le bouton des fréquences du GBF, l'ensemble du spectre pour avoir une idée du comportement global du filtre (est-ce un passe-bande, un passe-bas... ?). Il est en effet facile de voir comment évolue l'amplitude de la sortie avec la fréquence. Ensuite, on repère la (ou les) fréquence(s) donnant un gain maximum, donc une amplitude maximale puisque l'amplitude d'entrée est constante. On modifie enfin la fréquence pour que l'amplitude de sortie chute d'un facteur $\sqrt{2}$, ce qui correspond à une perte de 3 unités pour le gain en décibels (il existe des repères sur certains oscilloscopes analogiques pour voir facilement ce rapport $\sqrt{2}$). Si le filtre est un passe-bande, il y a deux fréquences (une de chaque côté de la fréquence centrale) à mesurer. Leur différence est alors la bande passante en fréquence du filtre.

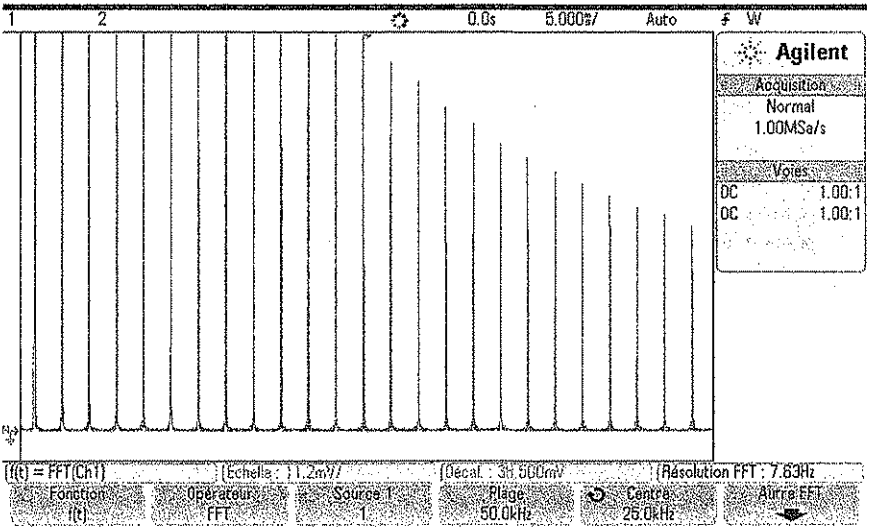
Rq : La valeur choisie pour l'amplitude d'entrée importe peu puisque, par linéarité, la sortie lui est proportionnelle. Mais attention, on doit rester dans le domaine linéaire. Un critère pour cela : la courbe de sortie doit être parfaitement sinusoïdale, sinon il y a des non-linéarités (par exemple une saturation en tension ou une triangulation (voir la question **57.**) et la mesure n'a plus de sens ; il faut alors diminuer l'amplitude d'entrée pour retrouver le régime linéaire.

Un conseil : profiter de la mesure de la fréquence de coupure pour mesurer le déphasage en ce point.

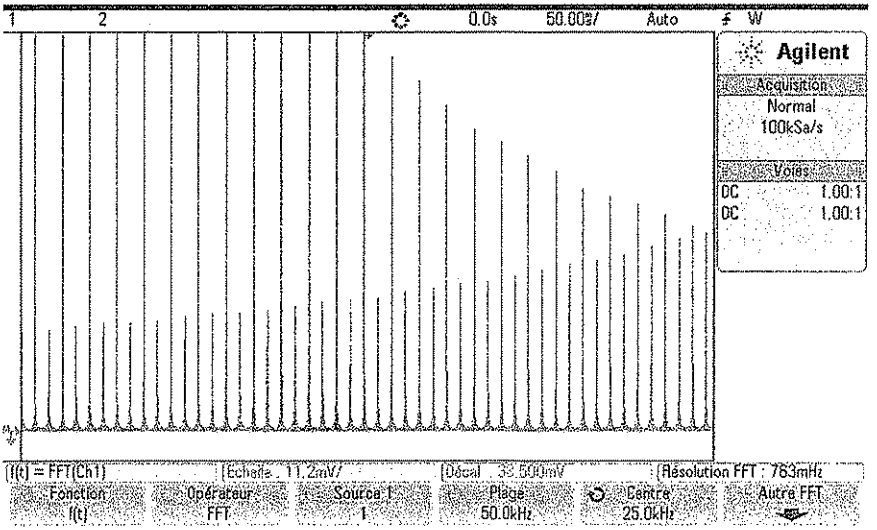
55. Pour visualiser la réponse indicielle d'un système linéaire en électricité, il faut l'alimenter à l'aide d'un signal rectangulaire de période grande devant le temps de réponse du système et afficher la sortie à l'oscilloscope, en synchronisant ce dernier sur le signal rectangulaire.

56. Si la condition de Shannon $f < f_e/2$ n'est pas respectée, il apparaît dans le spectre du signal numérisé des fréquences « fantômes » qui n'existaient pas dans le signal analogique. En fait, une composante de fréquence $f > f_e/2$ est remplacée par une composante de même amplitude, mais de fréquence $f_e - f$. Ce phénomène est particulièrement visible quand on visualise le spectre du signal à l'aide d'un oscilloscope numérique. Pour mettre le phénomène en évidence, on peut choisir un signal carré, riche en harmoniques.
À titre d'exemple, on peut comparer les deux spectres d'un même signal carré de fréquence $f = 990\,\text{Hz}$, échantillonné tout d'abord à $f_e = 10^6$ puis à $f_e = 10^5$ échantillons par seconde (1.00 M.Sa/s et 100 kSa/s ou Sa signifie *sample* soit échantillon en anglais).
Les fréquences à ne pas dépasser pour respecter la condition de Shannon sont donc $f_e/2 = 500\,\text{kHz}$ et $f_e/2 = 50\,\text{kHz}$.

Dans le premier cas, on obtient le spectre attendu, comportant les fréquences de la forme $f_n = (2n+1)f_0$ pour n compris entre 0 et 24 soit de 990 Hz à 48,51 kHz avec des amplitudes décroissantes de la gauche vers la droite (attention, l'échelle a été choisie de telle sorte que les premiers harmoniques « dépassent »).



Dans le deuxième cas (ci-dessous), les fréquences qui dépassent $f_e/2 = 50$ kHz apparaissent dans le spectre mais à la « mauvaise place » en $f_e - (2m+1) f_0$, soit « entre les précédentes ». On constate d'ailleurs que leur amplitude diminue de droite vers la gauche. Tout se passe comme si la partie du spectre supérieure à $f_e/2 = 50$ kHz avait été repliée sur la partie inférieure.



57. La vitesse de variation de la tension de sortie d'un circuit intégré est limitée à une valeur maximale $\frac{dv_s}{dt} \leq c$, cette valeur c étant de l'ordre de 10 V/μs (ou 10^7 V/s).

Les conséquences sont très aisément observables.

Dès que les signaux sinusoïdaux atteignent en sortie une amplitude *et* une fréquence suffisantes, la pente que devrait avoir $v_s(t)$ si le circuit était parfait dépasse c, et la portion de signal de sortie correspondante est remplacée par une portion de droite de pente c. Ceci se produit aussi bien à la montée qu'à la descente de $v_s(t)$, on obtient donc des portions à pentes c et des portions à pente symétrique $-c$. La sortie ressemble alors à un triangle, on dit qu'il y a triangularisation (ou triangulation) du signal.

Dans le cas où la sortie devrait basculer en un temps très court d'une valeur à une autre (par exemple de V_{sat} à $-V_{sat}$ en régime saturé), la variation se fait en réalité avec la pente c. Le passage de V_{sat} à $-V_{sat}$ prend ainsi le temps $\frac{2V_{sat}}{c}$. Là encore, apparaît une triangularisation de la sortie.

Ce défaut est une non linéarité puisqu'une entrée sinusoïdale donne avec cette triangularisation une sortie non sinusoïdale, ce qui n'arrive jamais avec un système linéaire.

On peut aussi observer que, comme la plupart des défauts non linéaires, il ne se manifeste, pour une fréquence donnée, qu'aux assez grandes amplitudes (aux basses amplitudes, la pente de la tension de sortie est plus faible et le « *slew rate* » n'intervient pas).

Chapitre 2
Les lois de l'électromagnétisme

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}
célérité de la lumière dans le vide	$c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \approx 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}
charge de l'électron	$-e$ avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}9.10^{-30}$ kg
charge ; masse du proton	e ; $m_p = 1{,}7.10^{-27}$ kg $\approx 1840\ m_e$

Conductivités électriques

Métaux : argent ; cuivre or ; fer	$\sigma_{Ag} = 6{,}3.10^7$ S.m^{-1} ; $\sigma_{Cu} = 5{,}9.10^7$ S.m^{-1} $\sigma_{Au} = 4{,}3.10^7$ S.m^{-1} ; $\sigma_{Fe} = 1{,}0.10^7$ S.m^{-1}
Non métaux : eau distillée verre ; polystyrène	$\sigma \approx 10^{-9}$ S.m^{-1} $\sigma \approx 10^{-17}$ S.m^{-1} ; $\sigma \approx 10^{-20}$ S.m^{-1}

Le cuivre

masse molaire	$M = 63{,}5$ g.mol^{-1}
masse volumique	$\rho \approx 8{,}9.10^3$ kg.m^{-3}
densité volumique de porteurs (un e^- libre par atome de Cu)	$n = \rho N_A / M \approx 10^{29}$ m^{-3}
conductivité électrique	$\sigma = ne^2\tau / m \approx 5{,}8.10^7$ S.m^{-1}
temps moyen entre deux chocs	$\tau \approx 10^{-14}$ s

Le fil électrique

section $s = 1$ mm^2 ; courant $I = 0{,}1$ A densité de courant	$j = I / s = 10^5$ A.m^{-2}
densité volumique d'électrons libres	$n \approx 10^{29}$ m^{-3}
vitesse de dérive	$v = j / ne \approx 10$ µm.s^{-1}

Un formulaire avec les opérateurs sur les champs est disponible au début du livre, page 8.

Le cours d'abord

Densités de charge et de courant

1. Pour quelle raison la charge électrique a-t-elle été introduite ? Rappeler la valeur numérique et l'unité de la charge élémentaire.

2. Rappeler la définition de la densité volumique de charge $\rho(M,t)$; pourquoi s'agit-il d'une grandeur mésoscopique ?

3. Décrire les vitesses d'agitation thermique et de dérive dans un conducteur.
À partir de quel raisonnement le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$ est-il défini ? quelle est son unité ? Que vaut son flux à travers une surface ?

4. Comment s'exprime l'équation locale de conservation de la charge ? L'établir en coordonnées cartésiennes à une dimension, puis l'illustrer en régime stationnaire.

L'opérateur « gradient »

5. Qu'appelle-t-on champ scalaire $V(M)$? donner des exemples courants.

6. On considère un point M de l'espace où un champ scalaire vaut $V(M)$; comment peut-on relier l'évolution dV de ce champ au petit déplacement vectoriel $\overrightarrow{dM}$ du point M ? Quelle interprétation en terme de champ peut-on donner de l'opérateur gradient ? Dans quel sens est-il dirigé ?
En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ en coordonnées cartésiennes.

7. Si $V(M)$ est un « potentiel », comment définir les surfaces équipotentielles ? Comment est dirigé le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ par rapport aux équipotentielles ?

Les équations de Maxwell et le champ électromagnétique

8. Comment décrit-on l'interaction entre particules chargées ? Rappeler l'expression de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ à l'aide des champs électrique et magnétique.

9. Énoncer les équations de Maxwell avec leur nom ; donner la valeur numérique (avec unité et nom) des constantes qui y interviennent. Dire pour chacune des équations quel est le contenu physique. Pourquoi parle-t-on de champ électromagnétique ?

10. Les équations de Maxwell rendent-elles compte de la conservation de la charge ? Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Que permet-il de satisfaire ?

Énergie électromagnétique

11. Donner un exemple simple où la matière utilise l'énergie cédée par le champ. Quelle est l'expression générale de la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique à la matière ?

12. Citer des exemples simples (issus de l'électrocinétique) montrant que les champs possèdent de l'énergie. Comment en vient-on alors à définir la densité volumique d'énergie u et le vecteur de Poynting $\vec{R}$?

13. Établir la relation locale qui lie la densité volumique d'énergie u au vecteur de Poynting $\vec{R}$? Que traduit-elle ?

14. À quelles expressions de $\vec{R}$ et de u les équations de Maxwell conduisent-elles ? Commentaire.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ L'électromagnétisme est une science fondamentalement vectorielle ; les flèches sur les vecteurs sont obligatoires et une égalité du genre « *vecteur = scalaire* » est à proscrire ; un effort est donc demandé sur l'exactitude et la précision des notations.

☐ En particulier le gradient est un vecteur ! Exemple : $\overrightarrow{\text{grad}}\, r = \vec{u}_r$

☐ Pour l'opérateur gradient, il est bon de connaître les expressions en coordonnées :

– cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$

– cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$

– sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$

☐ Pour les opérateurs sur les champs ($\overrightarrow{\text{grad}}$, div, $\overrightarrow{\text{rot}}$ et Δ), il est conseillé de connaître (voir formulaire en début de livre) :
- les 4 formules sur les compositions d'opérateurs
- les 4 formules sur les champs composés
- les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradsky
- les expressions des 4 opérateurs en coordonnées cartésiennes
- les expressions du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques

L'opérateur Nabla $\overrightarrow{\nabla}$ est pratique pour se remémorer les définitions et certaines formules générales ; il est utile en coordonnées cartésiennes, mais ne doit *en aucun cas* être utilisé pour une divergence, un rotationnel ou un laplacien en coordonnées cylindriques ou sphériques (qui d'ailleurs ne sont pas à connaître).

☐ Le calcul d'un rotationnel ou d'une divergence en coordonnées cylindriques ou sphériques ne nécessite pas, en général, la connaissance des expressions des opérateurs dans ces coordonnées, mais se fait souvent facilement par les formules des champs composés (voir la question **24.**).

☐ Les opérateurs, comme dérivées par rapport à une longueur, sont « dimensionnés » : $\overrightarrow{\text{grad}}$, div et $\overrightarrow{\text{rot}}$ sont en m^{-1} et Δ en m^{-2}.
Par exemple $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ a pour unité des V.m^{-1}.

☐ Il faut savoir reconnaître en $\overrightarrow{E} = E(x)\vec{u}_x$ un champ manifestement divergent (E_x dépend de x) et en $\overrightarrow{B} = B(x)\vec{u}_y$ un champ manifestement rotationnel (B_y dépend de x).

☐ Les équations de Maxwell sont des équations « locales », ce qui signifie qu'elles sont écrites en un point M donné de l'espace, contrairement aux formes « intégrales » vues ultérieurement.

☐ Il ne faut pas confondre la densité de charge totale ρ qui intervient dans l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\ \overrightarrow{E} = \rho / \varepsilon_0$ avec la densité de charge mobile ρ_m qui intervient dans la définition de la densité de courant $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ (ou plus généralement $\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$).

☐ Les équations de Maxwell font le lien entre le champ électromagnétique et les densités volumiques de charge ρ et de courant $\vec{j}$, à ne pas confondre avec les densités surfaciques de charge σ et de courant $\vec{j}_S$ qui apparaissent éventuellement dans les relations de passage des champs entre deux milieux.

☐ Attention aux unités : la densité *volumique* de courant $\vec{j}$ s'exprime en A.m^{-2} alors que la densité *surfacique* de courant $\vec{j}_S$ s'exprime en A.m^{-1} (il suffit de penser au moyen d'obtenir le courant I).

☐ Pour trouver l'équation de propagation d'un champ $\vec{X}$, il faut calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{X}$, puis appliquer d'un côté la relation $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{X} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{X} - \Delta\vec{X}$ et de l'autre écrire les équations de Maxwell en permutant les opérateurs spatiaux et temporels, et en traduisant éventuellement la relation constitutive du milieu.

☐ Le champ électrique est toujours orienté vers les potentiels décroissants ; on dit couramment « du + vers le − », conformément à $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$.

☐ Il est important de ne pas confondre la force magnétique de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui s'applique sur une particule chargée en mouvement avec la force de Laplace $I\vec{dl} \wedge \vec{B}$ qui s'exerce sur un élément de conducteur parcouru par un courant.

☐ En ARQS les champs magnétiques variables se déterminent par les mêmes expressions qu'en magnétostatique.

Applications directes du cours

Courant et conductivité

15. Quelle est la définition du vecteur densité de courant ? Quelle est son expression, y compris dans le cas de plusieurs types de porteurs ?

16. Le conducteur métallique est le cuivre, de masse volumique $\rho = 8{,}9.10^3$ kg.m^{-3} et de masse molaire $M = 63{,}5$ g.mol^{-1} dont on admet que chaque atome met en jeu un électron libre. Donner l'expression et la valeur numérique de la densité volumique d'électrons libres n.

17. Loi d'Ohm pour un conducteur et effet Joule
Dans le modèle de Drude, le métal est constitué d'un réseau fixe d'ions (par exemple Cu^+) avec des électrons libres de masse m, de vitesse d'ensemble $\vec{v}$ et responsables de la conduction électrique. Ces électrons « libres de se déplacer » sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ subissent néanmoins des interactions ou chocs sur les failles du réseau, ce qui se traduit par une force de « frottement fluide » en $-m\vec{v}/\tau$ où le temps τ caractérise la durée moyenne entre deux chocs successifs.

a) De quel effet connu en électrocinétique cette « force de frottement » permet-elle de rendre compte ?

b) Établir dans ce modèle, en régime stationnaire, la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ et en déduire l'expression de la conductivité électrique σ du métal.
Rappeler pour le cuivre l'ordre de grandeur de σ (avec son unité), de sa densité volumique d'électrons libres n, et en déduire celle de τ.

c) Sachant que la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel V est $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, faire la démonstration du passage de $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ à $U = RI$ pour un conducteur filiforme de longueur l et de section s, et établir ainsi l'expression de la résistance électrique R d'un conducteur cylindrique à conduction axiale.

d) Montrer que la puissance volumique cédée par le champ au courant permet de retrouver la loi $P = RI^2 = U^2 / R$ donnant en électrocinétique la puissance reçue par un conducteur ohmique de résistance R. Sous quelle forme cette puissance est-elle dissipée ?

18. Quelle est l'unité du système international de la conductivité électrique ? Comment cette unité s'exprime-t-elle en fonction des quatre unités fondamentales m, kg, s et A ?

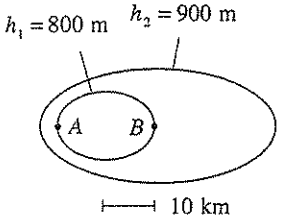
19. Estimer la résistance R d'un fil de cuivre de longueur $l = 40$ cm et de diamètre $d = 1$ mm utilisé en TP ; commentaire. Ce fil est parcouru par un courant électrique d'intensité $I = 100$ mA. Estimer la vitesse moyenne des électrons de conduction (se servir des données numériques des questions **16.** et **17.**). Quelle est la différence de potentiel U à ses extrémités ? En déduire la norme E du champ électrique qui lui est appliqué.

Opérateurs sur les champs

20. Montrer qualitativement sur l'exemple de la pression atmosphérique l'orientation attendue du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, P$.

Que vaut $\overrightarrow{\text{grad}}\, P$ en statique des fluides ?

21. Sur un terrain donné à la surface de la Terre, qu'entend-on par « gradient d'altitude » ? Le schéma de cartographe ci-contre représente deux lignes de niveaux de même altitude, respectivement $h_1 = 800$ m et $h_2 = 900$ m ; expliquer la situation en portant aux points A et B le vecteur gradient d'altitude.



22. Les forces de Van der Waals entre molécules polarisées sont radiales, attractives et en $1/r^7$. Écrire l'expression de cette force et en déduire l'énergie potentielle dont elle dérive.

23. Que valent pour les vecteurs unitaires en coordonnées cartésiennes div $\vec{u}_x$, div $\vec{u}_y$ et div $\vec{u}_z$ d'une part, et $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_x$, $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_y$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_z$ d'autre part ?

24. On se place en coordonnées polaires (cylindriques à 2 dimensions).

a) Calculer séparément div $\vec{u}_r$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_r$, et en déduire div $\vec{u}_\theta$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_\theta$.

b) On considère deux champs de vecteurs, de même norme, l'un radial et l'autre orthoradial : $\overrightarrow{K_1}(M) = K(r)\vec{u}_r$ et $\overrightarrow{K_2}(M) = K(r)\vec{u}_\theta$.

Montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{K_1} = \vec{0}$, div $\overrightarrow{K_2} = 0$ et div $\overrightarrow{K_1} = (\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{K_2}).\vec{u}_z = \dfrac{K(r)}{r} + \dfrac{dK(r)}{dr}$.

Cette dernière expression peut-elle s'annuler ?

25. Pour un solide en rotation de vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Oz dans le référentiel (R), rappeler l'expression du champ des vitesses $\vec{v}(M)_{(R)}$ pour un point M quelconque du solide. Montrer que $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v}$.

26. Dans l'équation de Maxwell-Gauss « modifiée » div $\vec{E} = \rho / \varepsilon_0 - \eta^2 V$ où V est le potentiel scalaire, en quelle unité s'exprime la constante η ?

■ Les équations de Maxwell

27. Qu'implique la linéarité des équations de Maxwell ?

28. Quelle est l'équation de Maxwell qui traduit l'induction ? Établir à partir de cette équation la loi de Faraday. Cette loi s'applique-t-elle aux deux cas d'induction ?

29. À quelles relations de passage sur les champs entre deux milieux conduisent les équations de Maxwell ?

■ Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

30. Expliquer simplement à l'aide d'un point P source et d'un point M d'observation en quoi consiste l'approximation des régimes quasi stationnaires.

31. À quelle condition sur $r = PM$ est-on en ARQS si les sources sont périodiques de période T ? Chiffrer cette inégalité dans le cas d'un circuit en TP et en déduire une évaluation de la fréquence maximale de travail.

32. Quel terme perd-on dans les équations de Maxwell lorsqu'elles sont écrites en ARQS ?

33. Comment s'écrit l'équation de conservation de la charge en ARQS ? Quelle loi connue sur le courant peut-on en déduire ? Quelle conséquence cela a-t-il sur l'évolution de l'intensité du courant le long d'un circuit ?

34. Montrer sur l'exemple simple d'un câble coaxial d'antenne de 10 m de long utilisé avec une fréquence de porteuse TV de l'ordre de 500 MHz, que la conservation de l'intensité du courant ne s'applique pas en dehors de l'ARQS.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

35. Comment, par une phrase, peut-on caractériser la « résistance électrique » d'un matériau ?

36. L'effet Joule qui accompagne le passage de tout courant à travers un matériau résistif est-il un effet souhaité ou néfaste ?

37. La section du fil électrique pour un éclairage ($I_{max} \approx 16$ A) est de 1,5 mm^2 et pour une cuisinière ($I_{max} \approx 32$ A) de 6 mm^2. Pourquoi cette différence ?

38. Comment la conductivité électrique des métaux varie-t-elle avec la température ? Et celle des semi-conducteurs ?

39. Comment peut-on justifier que seule la force de Lorentz (et pas le poids) soit à prendre en compte pour décrire le mouvement d'une particule libre dans un champ magnétique par exemple ?

40. L'expression de la force magnétique subie par une particule chargée en mouvement, $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, fait apparaître la vitesse de la particule. Par rapport à quel référentiel cette vitesse est-elle définie ?

41. Pourquoi les champs magnétiques sont-ils si utiles dans les « accélérateurs » de particules ? Et pour quelle raison les électroaimants conventionnels ont-ils été remplacés par des aimants supraconducteurs ?

42. Dans un métal, un électron de conduction parcourt en moyenne une distance $d \approx 20$ nm entre deux chocs séparés en moyenne d'un temps $\tau \approx 10^{-14}$ s. En déduire sa vitesse moyenne v_0 ; les notions de période et de rayon du cercle trajectoire conservent-elles dans ce cas encore un sens en présence d'un champ fort $B \approx 1$ T ? Justifier.

43. Comment s'interprète en termes de champ l'opérateur divergence ?

44. Comment s'interprète en termes de champ l'opérateur rotationnel ?

45. Illustrer par des dessins sur le champ de vecteur $\vec{j}$ la relation de conservation de la charge en distinguant les cas $\mathrm{div}\,\vec{j} \neq 0$ et $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$.

46. Y a-t-il une contradiction à avoir une densité de courant non nulle alors que la densité de charge est nulle ? Citer un exemple et le commenter.

47. Pourquoi, en régime temporel, parle-t-on du champ électromagnétique (au singulier) et non plus du champ électrique et du champ magnétique ? La phrase « Les charges produisent des champs électriques et les courants des champs magnétiques » est-elle exacte ?

Exercices

48. L'ampère

« L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 m l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces conducteurs une force de 2.10^{-7} N par mètre de longueur ».

Faire un schéma, expliquer l'origine et le sens de cette force et montrer avec les connaissances de première année que cette définition impose la valeur de la constante μ_0.

49. Le kilogramme

Le kilogramme est la seule unité de base aujourd'hui encore relié à un prototype, c'est-à-dire à un objet matériel particulier. On a imaginé alors que la mesure de l'intensité d'un courant d'ions dans le vide pouvait permettre d'accéder, par « comptage » et « pesée » des charges, au nombre d'ions nécessaire à un accroissement de masse donnée...

Sachant que la masse molaire de l'or est $M_{Au} = 197$ g.mol^{-1}, estimer le nombre N d'ions or Au^+ qu'il faut accumuler pour engendrer une masse minimale de $m = 1$ g.

Pour y parvenir, on se donne une période maximale de $T = 1$ an (car au-delà, il y a un problème de dérive) ; en déduire le nombre minimal d'ions qu'il faut créer par seconde ; à quel courant minimal I cela correspond-il ? Commentaires.

50. Conductivité d'une solution ionique

On modélise une cellule d'un conductimètre par deux électrodes planes de surface rectangulaire S d'axe Ox, comprise entre les plans d'équations $x = 0$ et $x = L$, contenant une solution aqueuse de sulfate de cuivre. Cette solution contient différents types d'ions A_i de charge q_i et de masse m_i ; on note n_i le nombre d'ions A_i par unité de volume. Soit U la différence de potentiel constante entre les plans $x = 0$ et $x = L$ telle que dans le cylindre règne un champ électrostatique uniforme et stationnaire $\vec{E} = \frac{U}{L}\vec{u}_x$ où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire de l'axe Ox. Les ions A_i sont alors soumis à la force électrostatique correspondante $q_i\vec{E}$ et à une force de frottement fluide de la forme $-f_i\vec{v}_i$ où $\vec{v}_i$ est leur vitesse et f_i un coefficient positif.

a) Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un ion A_i. Dans la suite, on se place en régime permanent ; montrer que $\vec{v}_i = \mu_i\vec{E}$ et exprimer le coefficient μ_i (mobilité de l'ion) en fonction de q_i et f_i.

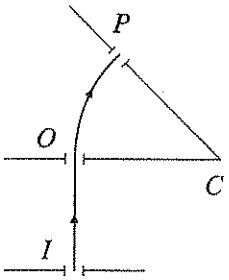
b) Quel est le nombre dN_i d'ions A_i franchissant une section d'abscisse donnée de la cellule entre les dates t et $t+dt$? Quelle charge dQ_i transportent ces ions pendant dt ? En déduire la contribution I_i des ions A_i à l'intensité I du courant

traversant la cellule en fonction de q_i, f_i, n_i, L, S et U. Vérifier que le signe de q_i n'influe pas sur le signe de l'intensité du courant.

c) En déduire que la résistance R du cylindre s'écrit $R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}$ et donner l'expression de la conductivité σ en fonction d'abord des n_i, q_i, f_i, puis des n_i, q_i, μ_i.

51. Sélecteur de masse

Des ions or Au^+ sont produits juste avant le point I avec une vitesse négligeable ; ils sont d'abord accélérés par un champ électrique uniforme $\vec{E}$ dans la zone entre I et O, puis déviés par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ dans le secteur de centre C entre O et P.



a) Quel doit être le sens du champ $\vec{E}$? Donner la valeur numérique de la vitesse v_0 des ions au passage par O, sachant que les plans équipotentiels perpendiculaires à IO sont aux potentiels $V_I = 0$ et $V_O = -46{,}3$ kV, et que la masse molaire de l'or est $M_{Au} = 197$ g.mol^{-1}.

b) Quel doit être le sens du champ $\vec{B}$ pour que les ions soient déviés comme sur la figure ? Quelle doit être la valeur de sa norme B pour que C soit le centre de la trajectoire sachant que $r_0 = CO = 0{,}5$ m ?

Il peut exister dans le jet initial, des ions de même charge que les ions Au^+, mais de masse voisine, extraits et accélérés en même temps que ces derniers. Le tableau périodique donne : ${}^{195}_{78}Pt$, ${}^{197}_{79}Au$ et ${}^{200}_{80}Hg$.

c) Expliquer en quoi ce système d'accélération et de déflexion joue le rôle de sélecteur de masse. Comment r_0 dépend-il de m ? Faire une figure avec m_1 passant en P ; de quel côté passe $m_2 < m_1$?

d) En P est placée une fente symétrique de largeur totale D. Estimer la plus grande valeur de D qui permet de ne sélectionner que les ions Au^+.

52. Divergence du champ gravitationnel

Le champ gravitationnel en coordonnées sphériques (à 3 dimensions) s'écrit pour $r > R$ où R est le rayon de l'astre de masse M : $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r$

a) Évaluer directement div $\vec{g}$ pour $r > R$.

b) Pour $r < R$, considérer une sphère Σ de rayon r et de centre O à travers laquelle il convient d'évaluer le flux de $\vec{g}$ de deux manières différentes ; en déduire div $\vec{g}(P) = -4\pi\rho(P)G$ où $\rho(P)$ est la masse volumique au point P de l'astre. À quelle équation de Maxwell faut-il comparer ce résultat ? Commenter son signe.

53. Limite conduisant à une densité surfacique de courant

Supposons que dans un demi-espace $z > 0$, la densité volumique de courant soit donnée par $\vec{j} = j_0 e^{-z/\delta} \vec{u}_x$, où δ est une constante homogène à une distance.

a) Quelle est l'intensité $I(z)$ qui traverse la surface élémentaire orientée dans le sens des x croissants de largeur l suivant Oy et de profondeur allant de $z = 0$ à z suivant Oz ?

Pour quelle valeur z_0 a-t-on $I(z_0) = 0{,}9\ I(\infty)$? Commenter ce résultat.

b) Dans quelle limite est-on confronté à une densité surfacique de courant $\vec{j}_S$? Exprimer alors $\vec{j}_S$ et commenter.

54. Nécessité du courant de déplacement

Un corps radioactif ponctuel au point O (centre d'un repère sphérique) se désintègre de façon isotrope en émettant des particules chargées. Sa charge à l'instant t est notée $Q(t)$.

a) Que vaut le vecteur densité de courant $\vec{j}$?

Vu les propriétés de symétrie des courants, le champ magnétique en un point M vaut ici $\vec{B} = \vec{0}$; le champ électrique (celui de la charge en O) est $\vec{E} = \dfrac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

b) Vérifier la compatibilité de ces résultats avec l'équation de Maxwell-Ampère.

55. Champ électrique longitudinal

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_x$$

a) En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(x,t)$.

b) Puis calculer séparément les densités de charge $\rho(x,t)$ et de courant $\vec{j}(x,t)$ et vérifier la relation qui les lie.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Densités de charge et de courant

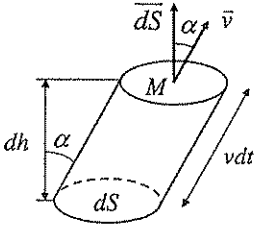
1. La charge a été introduite pour caractériser l'interaction électrique entre particules. La charge élémentaire est $e = 1{,}6.10^{-19}$ C (la charge de l'électron est $-e$).

2. Pour un élément de volume $d\tau$ autour du point M et qui contient la charge dq on a :

$$\boxed{\rho(M) = \frac{dq}{d\tau}} \quad (\text{en C.m}^{-3})$$

À cause de la structure discontinue de la matière $d\tau$ ne peut pas tendre vers zéro (il suffit d'imaginer un $d\tau$ plus petit que le volume atomique !) ; avec $d\tau$ du μm^3 au mm^3, $\rho(M)$ est une grandeur mésoscopique.

3. Soit un conducteur électrique ne possédant qu'un seul type de porteur de charge (par exemple les électrons dans le cas d'un métal). En l'absence de champ électrique, ces porteurs de charge, de par l'agitation thermique, se déplacent de façon aléatoire (chocs nombreux, directions des vitesses aléatoires dans l'espace et le temps, normes des vitesses d'agitation thermique élevées), et leur mouvement global est nul (la vitesse moyenne, en vecteur, est nulle). Lorsqu'on applique un champ électrique à ce conducteur, les électrons gagnent une vitesse d'ensemble dans la direction du champ (mais en sens opposé), créant un courant électrique : il s'agit d'une vitesse de dérive, faible en norme, mais ordonnée (c'est la vitesse moyenne, en vecteur).



La charge d^2q qui traverse à la vitesse d'ensemble $\vec{v}$ l'élément de surface dS en M pendant le temps dt est $d^2q = \rho_m \vec{v} dt.\overline{dS}$ où ρ_m est la densité de charges mobiles et $\vec{v}dt.\overline{dS}$ le volume du cylindre (incliné) de base dS et de longueur vdt (le « point » du produit scalaire soit $\cos\alpha$ est aussi le rapport entre cette longueur vdt et la hauteur dh).

L'intensité du courant à travers une surface (S) est le rapport de la charge dq la traversant pendant le temps dt :

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} = \iint_{(S)} \vec{j}.\overline{dS}}$$

Elle apparaît comme le flux du vecteur $\boxed{\vec{j} = \rho_m \vec{v}}$ (en $A.m^{-2}$) à travers la surface (S).

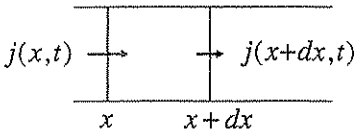
S'agissant par exemple d'électrons de conduction de densité volumique n (en m^{-3}), on a $\rho_m = (-e)n$ d'où $\vec{j} = -ne\vec{v}$.

4. À une dimension, la différence des flux de courant jS entrant en x et sortant en $x+dx$ pendant dt contribue à faire varier la charge ρSdx dans la tranche de section S et d'épaisseur dx au cours du temps pendant dt :

$$j(x,t)Sdt - j(x+dx,t)Sdt = \rho(t+dt)Sdx - \rho(t)Sdx$$

$$-\frac{\partial j}{\partial x}dx.Sdt = \frac{\partial \rho}{\partial t}dt.Sdx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$



Sur la figure, le courant entrant à gauche est plus important que le courant sortant à droite, et donc la charge dans la tranche augmente au cours du temps ; en effet d'après l'équation de conservation de la charge (dite aussi « équation de continuité »), si $j(x,t) > j(x+dx,t)$ soit $\frac{\partial j}{\partial x} < 0$ alors $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ (voir aussi la question **45.**).

Dans une géométrie quelconque et à 3 dimensions, sa généralisation s'écrit :

$$\boxed{\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

En régime stationnaire, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, et donc $\text{div}\,\vec{j} = 0$; $\vec{j}$ est dans ce cas un champ à flux conservatif, ce qui signifie que le long d'un tube de courant, l'intensité du courant (le flux de $\vec{j}$) est la même à travers toute section ; ce résultat conduit aussi à la « loi des nœuds » en électrocinétique (y compris en ARQS).

L'opérateur « gradient »

5. On appelle champ scalaire toute grandeur physique admettant en chaque point M de l'espace une valeur représentée par la fonction à trois variables $V(M)$, soit en coordonnées cartésiennes $V(x,y,z)$.

Exemples : Le champ de pression $P(M)$ dans l'atmosphère, le champ de température $T(M)$ le long d'un banc Kofler, le champ d'indice de réfraction $n(M)$ dans un milieu optique transparent non uniforme, le champ de salinité (ou de concentration en sel) $c(M)$ dans l'eau de mer,...

En général un champ dépend de une, deux ou des trois coordonnées du point M ; il est alors non uniforme et présente un gradient non nul, et on parle alors de gradient de pression, gradient de température, gradient d'indice, gradient de concentration,...

Bien sûr un champ peut être uniforme (alors V est indépendant de M) et son gradient est nul.

6. Le champ $V(M)$ est fonction du point M ; le seul moyen de relier la variation scalaire dV de $V(M)$ au déplacement vectoriel $\overrightarrow{dM}$ du point M de l'espace est d'envisager un produit scalaire par un vecteur appelé $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ tel que :

$$\boxed{dV = \overrightarrow{\text{grad}}\,V.\overrightarrow{dM}}$$

Cette définition indique clairement que le gradient est un vecteur lié à la variation dV d'un champ scalaire $V(M)$ en fonction du déplacement vectoriel $\overrightarrow{dM}$ à partir du point M.

Alors par $dV = \overrightarrow{\text{grad}}\,V.\overrightarrow{dM}$ il apparaît que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ est toujours dirigé dans le sens de l'augmentation du champ $V(M)$.

Si les coordonnées cartésiennes du point M sont x, y et z, alors la différentielle de la fonction scalaire à trois variables $V(x,y,z)$ est :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Par ailleurs, différentier $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ donne le déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

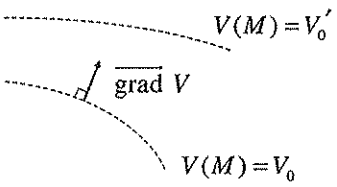
Le produit scalaire $dV = \overrightarrow{\text{grad}}\,V.\overrightarrow{dM}$ conduit alors à l'expression du gradient :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z}$$

7. Une surface équipotentielle est constituée de l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels $V(M) = cste$.

La relation $dV = \overrightarrow{\text{grad}}\,V.\overrightarrow{dM}$ a pour conséquence que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ est perpendiculaire aux équipotentielles ; en effet, en circulant sur une équipotentielle, $dV = 0$ par définition soit $\overrightarrow{\text{grad}}\,V.\overrightarrow{dM}_{équip.} = 0$ et donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,V \perp \overrightarrow{dM}_{équip.}$. Son sens est celui de l'augmentation de $V(M)$.

Sur le dessin ci-contre, $V_0' > V_0$.



■ Les équations de Maxwell et le champ électromagnétique

8. Pour décrire l'interaction entre particules chargées, par exemple la force exercée par un ensemble de charges (sources) sur une charge q (test), il faut distinguer deux situations :

- Dans le référentiel galiléen d'étude, les charges sources immobiles créent en tout point de l'espace un champ électrique, noté $\vec{E}$ et tel que la charge test subit une force $q\vec{E}$ (traduisant l'interaction entre les charges).
- Dans ce même référentiel, les charges sources mobiles (courant électrique par exemple) créent aussi, en plus du champ électrique, un champ dit magnétique noté $\vec{B}$. La force supplémentaire subie par la charge test dépend alors de son propre mouvement dans ce référentiel : $q\vec{v}\wedge\vec{B}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la charge test dans le référentiel lié aux sources du champ magnétique (circuit électrique ou aimant).

Finalement la force s'exerçant sur une particule de charge q est la force de Lorentz :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}}$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs électrique et magnétique au point où se trouve la particule et $\vec{v}$ sa vitesse dans le référentiel lié aux sources du champ magnétique.

9. (1) $\boxed{\text{div}\,\vec{B} = 0}$ Maxwell-flux (MΦ) ; le flux du champ magnétique est conservatif

(2) $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ Maxwell-Faraday (MF) ; donne la loi de Faraday de l'induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{où} \quad \Phi = \iint_{(S)} \vec{B}.\overrightarrow{dS}$$

(3) $\boxed{\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ Maxwell-Gauss (MG) ; conduit au théorème de Gauss :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int.}}^{(S)}}{\varepsilon_0} \text{ avec } \varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 \approx 8{,}85.10^{-12}\ \text{F.m}^{-1}\text{, la permittivité du vide.}$$

(4) $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ Maxwell-Ampère (MA) ;

il contient le théorème d'Ampère en ARQS : $\oint_{(C)} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enlacés}^{(C)}$

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} est la perméabilité du vide.

Les équations (2) et (4) montrent que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne varient pas de manière indépendante, mais sont couplés, d'où la notion de champ électromagnétique.

10. Oui, par $\text{div}\dfrac{(4)}{\mu_0}$: $\text{div}\dfrac{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}}{\mu_0} = 0 = \text{div}\,\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\text{div}\,\vec{E} \overset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$

En écrivant MA sous la forme $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)}$, cela définit la densité de courant de déplacement :

$$\boxed{\vec{j}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \quad \text{(en A.m}^{-2}\text{)}$$

qui permet de satisfaire l'équation de conservation de la charge en dehors de l'ARQS et qui conduit à la propagation du champ à la célérité c.

Énergie électromagnétique

11. Dans un accélérateur de particules, les particules utilisent l'énergie cédée par le champ $\vec{E}$ pour accroître leur énergie cinétique.
Plus généralement, la charge mobile $dq = \rho_m d\tau$ à la vitesse d'ensemble $\vec{v}$ (par exemple les électrons de conduction dans un conducteur) et soumise à la force de Lorentz de la part du champ électromagnétique des sources (par exemple le générateur), reçoit de leur part une puissance :

$$dP = dq(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = \vec{j}.\vec{E}\, d\tau + 0 \quad \text{où} \quad \vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

Seule la force électrique travaille, mais pas la force magnétique.
L'expression de la densité volumique de puissance cédée par le champ à la matière est :

$$\boxed{\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}} \quad (\text{en W.m}^{-3})$$

12. Dans un condensateur sous tension l'énergie emmagasinée $U_e = q^2/2C$ est due à la présence du champ $\vec{E}$ entre ses armatures. Dans une bobine parcourue par un courant l'énergie emmagasinée $U_m = Li^2/2$ est due à la présence du champ $\vec{B}$ dans le solénoïde. De la « localisation » de l'énergie, on déduit la notion de densité volumique d'énergie :

$$\boxed{u = dU/d\tau} \quad (\text{en J.m}^{-3})$$

L'énergie est là où existe le champ, la propagation du champ électromagnétique entraîne donc celle de l'énergie ; le vecteur de Poynting $\vec{R}(M,t)$ (en W.m^{-2}) est un champ de vecteur dont le flux à travers une surface $\vec{dS}$ est égal à la puissance rayonnée (en W) par le champ à travers dS :

$$\boxed{dP_r = \vec{R}.\vec{dS}}$$

13. Soit $U(t) = \iiint_{(V)} u(M,t)d\tau$ l'énergie électromagnétique dans un volume fixe (V) à l'instant t.
La puissance perdue dans ce volume à l'instant t :

$$-\frac{dU}{dt} = -\iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau$$

s'identifie (par conservation de l'énergie) à la somme de la puissance cédée par le champ à la matière dans (V),

$$\iiint_{(V)} \vec{j}.\vec{E} d\tau,$$

et de la puissance rayonnée à travers la surface (S) entourant le volume (V),

$$\oiint_{(S)} \vec{R}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \text{div}\vec{R}d\tau \quad \text{(par le th. d'Ostrogradsky)},$$

d'où l'équation bilan : $-\iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = \iiint_{(V)} \vec{j}.\vec{E}d\tau + \iiint_{(V)} \text{div}\vec{R}d\tau$, valable pour tout (V), ce qui conduit à l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\boxed{\text{div}\ \vec{R} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} = 0}$$

14. L'équation de MA multipliée par $\vec{E}$ (pour faire apparaître $\vec{j}.\vec{E}$) donne :

$$\vec{E}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.\vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation de MF multipliée par $\vec{B}$ donne :

$$\vec{B}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La différence membre à membre de ces deux équations de même dimension en vue d'utiliser

$$\text{div}\ (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}$$

conduit en divisant par μ_0 à : $\text{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) + \vec{j}.\vec{E} = 0$.

Comparée à la relation de la question précédente, on admet avec une certaine part d'arbitraire les expressions :

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{u = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}}$$

(pas de constantes car les grandeurs énergétiques sont nulles en l'absence de champ).

Pour la détermination de $\vec{R}$ à un rotationnel près, voir la question **10.** du chapitre **3**.

Applications directes du cours

Courant et conductivité

15. Soit di l'intensité du courant à travers un élément de surface dS, on appelle vecteur densité de courant le vecteur $\vec{j}$ tel que $di = \vec{j}.\overrightarrow{dS}$. Si ρ_m est la densité volumique des charges mobiles et $\vec{v}$ la vitesse d'ensemble des porteurs :

$$\boxed{\vec{j} = \rho_m \vec{v}}$$

Dans le cas de plusieurs types de porteurs : $\vec{j} = \sum_k \rho_{m,k}\vec{v}_k = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$, où n_k est la densité volumique (en m^{-3}) des porteurs de charge q_k et de vitesse d'ensemble $\vec{v}_k$.

À noter que sous l'action d'un champ électrique, des porteurs de signe différent se déplacent dans des sens opposés, mais toutes les contributions à $\vec{j}$ s'ajoutent dans le même sens (comme dans un électrolyte par exemple).
Le vecteur densité de courant, indépendant de l'élément de surface, est plus fondamental que l'intensité.

16. Il y a ρ kg de cuivre par m^3, donc ρ / M mol de cuivre par m^3, soit $\rho N_A / M$ atomes de cuivre par m^3 où N_A est la constante d'Avogadro (on peut aussi écrire de deux manières différentes la masse d'un atome de cuivre : $M / N_A = \rho / n$).
Chaque atome mettant en jeu un électron de conduction, le nombre de porteurs par unité de volume est :

$$\boxed{n = \rho N_A / M}$$

AN : $\underline{n = 8{,}5.10^{28}\ \text{m}^{-3}}$

17. Loi d'Ohm pour un conducteur et effet Joule

a) C'est lors des chocs que les électrons transfèrent au réseau leur énergie cinétique acquise dans le champ électrique qui les a accélérés, ce qui conduit à l'échauffement du conducteur connu sous le nom d'effet Joule.

b) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau} \approx \vec{0} \quad \text{en régime stationnaire, soit} \quad \vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$$

La définition du vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = -ne\vec{v}$ (où n est la densité volumique d'électrons de conduction) conduit alors à la loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}} \quad \text{où} \quad \boxed{\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

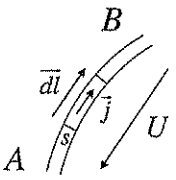
Pour le cuivre, $\sigma \approx 10^7\ \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$ et $n \approx 10^{29}\ \text{m}^{-3}$; on en déduit $\underline{\tau \approx 10^{-14}\ \text{s}}$ (pour plus de précisions, voir la question **16.**).

c) Dans un élément de circuit filiforme AB (un fil en TP) de conductivité électrique σ, un champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ engendre un courant électrique de densité volumique $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ supposée uniforme.
La circulation du vecteur $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \vec{j} / \sigma$ entre les extrémités A et B s'écrit :

$$-\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\ V\,\overrightarrow{dl} = \int_A^B \frac{\vec{j}\,\overrightarrow{dl}}{\sigma}$$

Comme $\overrightarrow{\text{grad}}\ V\,\overrightarrow{dl} = dV$, la première intégrale vaut $-(V_B - V_A) = V_A - V_B = U$.

Par ailleurs $\vec{j}$ et $I\overrightarrow{dl}$ sont colinéaires et de même sens (le sens du courant), on a donc $\vec{j}.\overrightarrow{dl} = j\,dl = \frac{I}{s}dl$ où I est l'intensité du courant électrique circulant dans le fil orienté de A vers B de section s, et la deuxième intégrale vaut $Il/\sigma s$. Finalement on aboutit à la loi d'Ohm :



$$\boxed{U = RI} \quad \text{(qui date de 1826)}$$

avec l'expression de la résistance du fil : $\boxed{R = \frac{l}{\sigma s}}$

Rq : À noter que U et I sont fléchés en sens inverse, ce qui correspond à la convention récepteur vue en électrocinétique.

d) La puissance volumique cédée par le champ au courant est $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}$.

Considérons toujours le tronçon de fil de section s et de longueur l, l'application de la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ fournit alors :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E} = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} = \frac{I^2}{s^2\sigma} \quad \text{puisque} \quad j = \frac{I}{s}$$

Cette densité volumique étant uniforme sur le volume sl du conducteur, cela conduit à la puissance :

$$P = \frac{I^2}{s^2\sigma}sl = \frac{l}{\sigma s}I^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{P = RI^2 = U^2/R}$$

Cette puissance reçue par le conducteur de la part du champ est dissipée sous forme thermique dans le conducteur suivant le mécanisme décrit dans le modèle de Drude : le conducteur s'échauffe, c'est l'effet Joule.

18. L'unité du système international de la conductivité σ (l'inverse de la résistivité ρ) est le $S.m^{-1}$ ou, ce qui est équivalent, le $\Omega^{-1}.m^{-1}$.

Partant de $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ où n est en m^{-3}, e en C, soit en A.s (penser à $i = dq/dt$), τ en s et m en kg, il apparaît que σ s'exprime en $m^{-3}.kg^{-1}.s^3.A^2$.

19. La section du fil est $s = \frac{\pi d^2}{4}$, d'où la résistance $\underline{R = \frac{4l}{\pi\sigma d^2} \approx 0{,}9.10^{-2}\,\Omega}$; ce centième d'Ohm est largement négligeable devant les résistances couramment utilisées en TP d'électrocinétique ou d'électronique, de l'ordre du kΩ.

La vitesse moyenne est donnée par $\vec{j} = \rho_m\vec{v} \Rightarrow v = \frac{j}{|\rho_m|} = \frac{I/s}{ne} = \frac{4I}{\pi d^2 ne}$

$$\text{soit} \quad \underline{v = 9{,}4\ \mu m.s^{-1} \approx 0{,}01\ mm.s^{-1}}$$

Cette vitesse de dérive est, en norme, très faible devant la vitesse d'agitation thermique (de l'ordre de 100 $km.s^{-1}$).

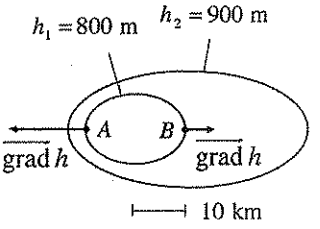
La différence de potentiel à ses bornes est donnée par $U = RI = 0{,}9$ mV, ce qui est tout à fait négligeable en TP où les tensions sont de l'ordre de quelques volts.
La norme E du champ électrique qui lui est appliqué est donnée par :

$$U = EL \quad (\text{penser à } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V) \Rightarrow \underline{E = U/L = 2{,}2.10^{-3}\ \text{V.m}^{-1}}$$

Opérateurs sur les champs

20. Dans l'atmosphère, un déplacement de 1 m suivant un plan horizontal laisse la pression atmosphérique inchangée ($\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$), alors qu'un déplacement de 1 m suivant la verticale ascendante (respectivement descendante) conduit à une diminution (respectivement une augmentation) de pression ($\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz} = -\rho g$ où l'axe Oz est suivant la verticale ascendante).
Le résultat sur la variation de pression est donc bien fonction de la direction et du sens de déplacement envisagé. Ici le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \rho \vec{g}$ est orienté suivant la verticale descendante (la pression augmente vers les profondeurs). Les surfaces isobares sont perpendiculaires au champ de pesanteur.

21. Il est d'abord possible de définir le champ d'altitude $h(M)$, qui en chaque point M d'un lieu donné attribue l'altitude en ce point. Les cartographes établissent des cartes de niveau sur lesquelles tous les points à une altitude donnée sont reliés par une ligne de niveau. Si l'étendue concernée est peu accidentée, les lignes de niveau (séparant deux altitudes données) sont très disjointes et le gradient d'altitude est faible (c'est le cas au point B où pour gagner 100 m d'altitude il faut parcourir 20 km de distance) ; en revanche si le terrain est plus accidenté, les lignes de niveau sont davantage resserrées et le lieu présente un fort gradient d'altitude (c'est le cas au point A où pour gagner les mêmes 100 m il suffit de parcourir 5 km).



Rq : Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, h$ est orthogonal aux lignes $h = cste$ et dirigé vers les h croissants.

22. Une molécule placée en $r\vec{u}_r$ (coordonnées sphériques) subit de la part d'une molécule placée en O une force d'origine électrostatique s'écrivant $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^7}\vec{u}_r$ où $\alpha > 0$ est une constante. Elle dérive d'une énergie potentielle donnée par :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r \Rightarrow dE_p = \frac{\alpha}{r^7}dr$$

d'où par intégration $E_p = -\frac{\alpha}{6r^6} + cste$, soit $\boxed{E_p = -\frac{\alpha}{6r^6}}$

en choisissant $cste = 0$ pour que l'énergie potentielle soit nulle à l'infini (il n'y a plus d'interaction pour $r \to \infty$).

23. Les champs de vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ ont la particularité d'être uniformes, c'est-à-dire que les vecteurs qui les constituent sont identiques en norme bien sûr, mais surtout en direction et sens en tout point M de l'espace ; les opérateurs de dérivation spatiale sont donc sans effet sur eux : $\text{div}\,\vec{u}_x = \text{div}\,\vec{u}_y = \text{div}\,\vec{u}_z = 0$ (zéro scalaire) et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_x = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_y = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_z = \vec{0}$ (zéro vecteur).

24. Ces calculs doivent être conduits rapidement (sans utiliser la forme explicite des opérateurs en coordonnées cylindriques et sans passer par les projections en coordonnées cartésiennes).

a)* Pour $\text{div}\,\vec{u}_r$, écrire $\vec{u}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$ et appliquer la formule de la divergence d'un opérateur composé : $\overrightarrow{\text{div}}\,(V\vec{A}) = V\overrightarrow{\text{div}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,V.\vec{A}$ soit $\text{div}\,\dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{1}{r}\text{div}\,\vec{r} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\dfrac{1}{r}.\vec{r}$

avec $\vec{r}\left|\begin{matrix} x \\ y \\ 0 \end{matrix}\right.$, on a en coordonnées cartésiennes $\text{div}\,\vec{r} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + 0 = 2$ et

$\overrightarrow{\text{grad}}\,\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\vec{u}_r}{r^2}$, d'où $\text{div}\,\dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{2}{r} - \dfrac{\vec{u}_r}{r^2}.(r\vec{u}_r) = \dfrac{1}{r} \Rightarrow \boxed{\text{div}\,\vec{u}_r = \dfrac{1}{r}}$

$\vec{u}_r$ est un champ non uniforme, divergent (à divergence positive) et le résultat est bien homogène (en m^{-1}) ; il indique que lorsque r augmente, la divergence s'atténue ce qui se conçoit aisément (loin de l'origine, les lignes de champ, des demi-droites d'origine O, sont de plus en plus parallèles).

* Pour $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_r$, remarquer que $\vec{u}_r = \overrightarrow{\text{grad}}\,r$ est un champ de gradient et donc, puisque de manière générale $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \vec{0}$: $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_r = \vec{0}}$

$\vec{u}_r$ est un champ de vecteur irrotationnel.

* Pour $\text{div}\,\vec{u}_\theta$, écrire $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$ (la base $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$ est directe dans cet ordre) et développer la divergence à l'aide de la formule :

$$\text{div}\,(\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_2.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}_1 - \vec{A}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}_2$$

$$\text{soit}\quad \text{div}\,\vec{u}_\theta = \text{div}\,(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r) = \vec{u}_r.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_z - \vec{u}_z.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_r$$

or $\vec{u}_z$ est un champ de vecteur uniforme d'où $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_z = \vec{0}$, et d'après ce qui précède $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_r = \vec{0}$, d'où $\boxed{\text{div}\,\vec{u}_\theta = 0}$; $\vec{u}_\theta$ est un champ de vecteur indivergent.

* Pour $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_\theta$, prendre la divergence de $\vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z$ comme précédemment :

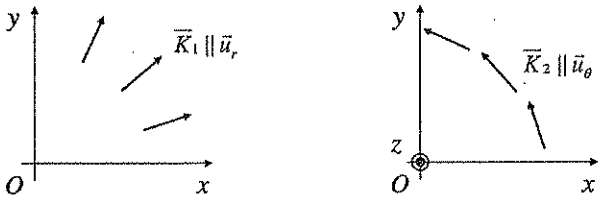
$$\text{div}\,\vec{u}_r = \text{div}\,(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z) = \vec{u}_z.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_\theta - \vec{u}_\theta.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_z \quad \text{soit d'après ce qui précède}$$

$$\frac{1}{r} = \vec{u}_z . \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_z}{r}}$$

car $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\theta$ n'a pas de composante dans le plan polaire.

$\vec{u}_\theta$ est un champ non uniforme, à rotationnel obtenu par la règle du tire-bouchon (tourner dans le sens de $\vec{u}_\theta$, et observer $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\theta$ dans le sens de l'avancement suivant $\vec{u}_z$) ; le résultat est bien homogène (en m^{-1}) ; il indique que lorsque r augmente, le rotationnel s'atténue ce qui se conçoit aisément (loin de l'origine, les lignes de champ, des cercles d'axe Oz, ont une courbure de plus en plus faible).

b)



* $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{K_1} = \overrightarrow{\text{rot}}\ (K\vec{u}_r) = K\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_r + \overrightarrow{\text{grad}}\ K \wedge \vec{u}_r$

or $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_r = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\ K = \dfrac{dK}{dr}\vec{u}_r$ d'où $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{K_1} = \vec{0}}$

* $\text{div}\ \overrightarrow{K_2} = \text{div}\ (K\vec{u}_\theta) = K\,\text{div}\ \vec{u}_\theta + \overrightarrow{\text{grad}}\ K.\vec{u}_\theta$

or $\text{div}\ \vec{u}_\theta = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\ K = \dfrac{dK}{dr}\vec{u}_r$ d'où $\boxed{\text{div}\ \overrightarrow{K_2} = 0}$

* $\text{div}\ \overrightarrow{K_1} = K\,\text{div}\ \vec{u}_r + \overrightarrow{\text{grad}}\ K.\vec{u}_r = \dfrac{K(r)}{r} + \dfrac{dK(r)}{dr}$

* $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{K_2} = K\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\theta + \overrightarrow{\text{grad}}\ K \wedge \vec{u}_\theta = \dfrac{K(r)}{r}\vec{u}_z + \dfrac{dK(r)}{dr}\vec{u}_z$

d'où le résultat : $\boxed{\text{div}\ \overrightarrow{K_1} = (\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{K_2}).\vec{u}_z = \dfrac{K(r)}{r} + \dfrac{dK(r)}{dr}}$

On écrit $\dfrac{dK}{K} + \dfrac{dr}{r} = 0$ soit $\ln K + \ln r = cste$ d'où $K(r) = \dfrac{\alpha}{r}$ et dans ce cas, malgré l'intuition, on a $\overrightarrow{K_1}(r) = \dfrac{\alpha}{r}\vec{u}_r$ indivergent (alors que $\overrightarrow{K_1}$ s'écarte du point O !) et $\overrightarrow{K_2}(r) = \dfrac{\alpha}{r}\vec{u}_\theta$ irrotationnel (alors que $\overrightarrow{K_2}$ tourne autour de l'axe Oz !) ; il s'agit donc d'être prudent, voir à ce sujet la question **43.**

25. Chaque point du solide décrit une trajectoire circulaire autour de l'axe de rotation Oz. Sa vitesse est donc orthoradiale, et en notant r est la distance de M à Oz, la vitesse s'écrit en coordonnées cylindriques : $\vec{v} = \omega r \vec{u}_\theta$.

Alors $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} = \omega \overrightarrow{\text{rot}}\ (r\vec{u}_\theta) = \omega\left[r\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\theta + \overrightarrow{\text{grad}}\ r \wedge \vec{u}_\theta\right] = \omega\left[r\frac{\vec{u}_z}{r} + \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta\right] = 2\omega\vec{u}_z$

d'où $\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v}}$

La règle du tire-bouchon appliquée à $\vec{v}$ donne la direction de $\vec{\omega}$.

26. Cette équation (dans laquelle η tient compte d'une éventuelle masse non nulle du photon !) fait apparaître que $\eta^2 V$ est homogène à div $\vec{E}$.

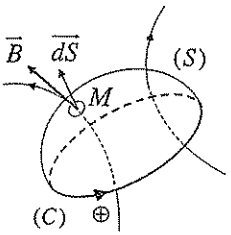
L'unité de η^2 est donc celle de $\frac{\text{div}\ \vec{E}}{V}$ en $\frac{\text{V.m}^{-2}}{\text{V}}$ et donc η s'exprime en m^{-1}.

Les équations de Maxwell

27. Les équations de Maxwell sont linéaires pour rendre compte du principe de superposition des champs par rapport aux sources (charges et courants).
Par exemple, si deux charges q_1 et q_2 créent séparément en un point M des champs électriques $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{E}_2(M)$, alors elles y créent simultanément le champ $\vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$ et de même pour les courants. Ceci n'a rien d'évident et traduit simplement que le champ d'une charge n'est pas altéré par la présence d'une autre charge dans son voisinage.
C'est cette linéarité qui rend possible l'utilisation de la notation complexe.

28. C'est l'équation de Maxwell-Faraday qui traduit l'induction : $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Elle indique qu'une variation de champ magnétique provoque l'apparition d'un champ électrique (appelé champ électromoteur) et dont la circulation est égale à la force électromotrice induite e.



Soit (S) une surface ouverte s'appuyant sur un contour fermé (C) ; rappelons que (C) est orienté dans un sens choisi indiqué par $\oplus$ et que (S) est orientée d'après la règle du tire-bouchon appliquée à $\oplus$.

$$e \overset{1}{=} \oint_{(C)} \vec{E}.\overrightarrow{dl} \overset{2}{=} \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}.\overrightarrow{dS} \overset{3}{=} -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{dS} \overset{4}{=} -\frac{d}{dt}\iint_{(S)} \vec{B}.\overrightarrow{dS} \overset{5}{=} -\frac{d\Phi}{dt}$$

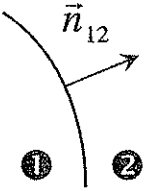
1. par définition, la circulation du champ $\vec{E}$ induit est égale à la force électromotrice e ; 2. théorème de Stokes ; 3. équation de Maxwell-Faraday ; 4. la surface (S) est fixe et l'intégrale sur l'espace ne dépend que du temps, d'où la dérivée droite ; 5. définition du flux magnétique.

d'où la loi de Faraday : $\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$

Cette loi de Faraday s'applique dans les deux types d'induction :

- comme ici, dans le cas d'un circuit immobile placé dans un champ magnétique variable, $\Phi(t)$ est le flux magnétique à l'instant t à travers une surface (S) quelconque s'appuyant sur le circuit filiforme fermé (C).
- mais aussi (et la démonstration n'est pas faite ici) dans le cas d'un circuit mobile placé dans un champ magnétique permanent, $d\Phi$ est alors la variation de flux due au déplacement ou à la déformation du circuit (C) pendant dt.

29. Le contenu de cette question n'est pas exigible, les résultats doivent être fournis.



Du point de vue mésoscopique, les champs sont continus. Une « continuité rapide » sur une épaisseur de 10 nm s'interprète du point de vue macroscopique comme une discontinuité. Les équations à div concernent les composantes normales et les équations à $\overrightarrow{\text{rot}}$ les composantes tangentielles ; la normale $\vec{n}_{12}$ est orientée du milieu 1 vers le milieu 2.

(1') $\boxed{\vec{B}_{2N} = \vec{B}_{1N}}$

(2') $\boxed{\vec{E}_{2T} = \vec{E}_{1T}}$

(3') $\boxed{\vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}}$ où σ est la densité surfacique de charge (en C.m^{-2})

(4') $\boxed{\vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}}$ où $\vec{j}_S$ est la densité surfacique de courant (en A.m^{-1})

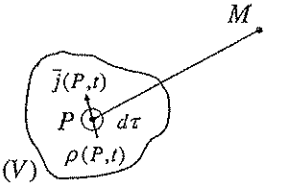
En résumé : (2') et (3') $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}}$

et (1') et (4') $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}}$

À noter que σ et $\vec{j}_S$ sont des grandeurs macroscopiques correspondant à des grandeurs $\rho \to \infty$ et $|\vec{j}| \to \infty$ sur des épaisseurs $\to 0$.

■ Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

30. Si P est un point source et M un point d'observation, le champ créé par les charges et les courants en P, et se propageant à la célérité c, met un temps PM/c pour parvenir en M (c'est le caractère non instantané des interactions électromagnétiques).



L'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) consiste à négliger ce temps de parcours lié à la propagation, et donc à considérer que le champ perçus au point M à l'instant t est celui créé au point P au même instant t, sans retard.

31. Cette approximation est valable dès lors que $\rho(P,t)$ et $\vec{j}(P,t)$ varient peu pendant la durée de propagation PM/c. En particulier si les sources sont périodiques de période T, il faut que :

$$\frac{PM}{c} \ll T \Rightarrow \frac{r}{c} \ll \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \boxed{\forall P,\ r = PM \ll \lambda}$$

Rq : Ceci correspond à l'hypothèse du champ proche alors que le rayonnement électromagnétique concerne le champ lointain.

Cela signifie qu'aucun des points P du circuit ne doit être éloigné de plus de λ du point d'observation M ; M étant quelconque, on en déduit que le circuit lui-même doit avoir des dimensions inférieures à λ (fixons $\lambda/100$) pour que l'ARQS soit vérifiée.

En TP les circuits ont une taille de l'ordre du mètre ($\lambda = 1$ m $\Rightarrow f = 300$ MHz) ; il ne faut donc pas dépasser 3 MHz (soit $f/100$), l'ARQS est donc largement vérifiée puisqu'avec les circuits étudiés, on ne dépasse généralement pas les 100 kHz (d'où la dénomination de générateur « basses fréquences »).

32. L'ARQS consiste en réalité à faire un développement limité en $1/c$, ce qui revient à négliger le terme $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère, qui est à l'origine de la propagation que justement on néglige ici.
L'équation de Maxwell-Ampère en ARQS se réduit alors à : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

Rq : En écrivant MA (sans approximation) $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$ avec $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on constate que l'ARQS consiste à négliger le courant de déplacement $\vec{j}_D$ devant le courant de conduction $\vec{j}$.

33. Il suffit de prendre la divergence des deux membres de l'équation de Maxwell-Ampère en ARQS :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}) = 0 = \mu_0 \text{div}\,\vec{j}$$

L'équation de conservation de la charge en ARQS se réduit donc à $\boxed{\text{div}\,\vec{j} = 0}$ comme en régime stationnaire (soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

Il apparaît donc qu'en ARQS $\vec{j}$ reste à flux conservatif ($\text{div}\,\vec{j} = 0$ comme en régime stationnaire) ; or le flux de $\vec{j}$ représente l'intensité du courant qui est donc conservée le long d'un tube de courant (un fil en est un cas particulier).
En fait la taille d'un circuit électrique en ARQS étant très inférieure à la longueur d'onde λ du signal électrique, l'intensité du courant est uniforme sur le circuit, donc la même en tout point du circuit.
La conservation de l'intensité du courant contient également la « loi des nœuds » qui continue de s'appliquer en électrocinétique des régimes variables basses fréquences sous la forme par exemple $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ comme vu en 1ère année.

34. Pour une fréquence de porteuse TV de l'ordre de 500 MHz, la longueur d'onde est de 60 cm (faire $\lambda = c/f$) et devient plus petite que la longueur d'un câble coaxial d'antenne de 10 m de long : les signaux électriques (tension et courant) sur une telle ligne sont alors également fonction de l'espace (en plus d'être fonction du temps). Par exemple à $\lambda/2 = 30$ cm de distance, à un instant donné, les courants sont opposés : $i(x+\lambda/2,t) = -i(x,t)$ correspondant à des mouvements d'oscillations des électrons de conduction en opposition de phase. Hors ARQS, la densité de courant $\vec{j}$ n'est plus à flux conservatif puisque l'intensité du courant, à un instant donné, n'est pas uniforme le long de la ligne (le courant change alors de sens tous les 30 cm).

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

35. La résistance électrique est la propriété physique qui caractérise l'aptitude d'un matériau soumis à une différence de potentiel à s'opposer au passage du courant électrique. Elle dépend de la nature du matériau et de sa géométrie. Les métaux, bons conducteurs, ont une faible résistivité par rapport aux isolants électriques. De manière équivalente, la résistance est le rapport entre la cause (différence de potentiel) et la conséquence (passage du courant électrique).

36. L'effet Joule est la transformation du travail électrique fourni par le générateur sous forme de transfert thermique (ou chaleur) dans le matériau. Cette production de chaleur est parfois un effet souhaité comme dans les radiateurs électriques ou sèche-cheveux (on parle de résistance chauffante), parfois un effet néfaste comme dans tout appareil électrique en fonctionnement : générateur, oscilloscope, ordinateur... qui doivent être ventilés (on parle alors de pertes Joule).

37. Plus l'intensité I demandée est élevée, plus la résistance du conducteur doit être faible pour maintenir à un niveau insignifiant son échauffement en I^2 par effet Joule dans le fil d'alimentation. Or la résistance des fils diminue lorsque leur section augmente (elle est inversement proportionnelle à sa section, voir la question **17.**) et donc pour une même intensité de courant, un gros fil s'échauffe moins qu'un fil mince.

38. Pour les métaux l'augmentation de température entraîne une augmentation de la fréquence des chocs des électrons d'où une moindre mobilité et par conséquent une diminution de la conductivité électrique. Lorsqu'un dipôle est traversé par un courant électrique, sa résistance provoque un échauffement qui peut augmenter notablement sa température et donc sa résistance. Dans la pratique, on adopte des modèles expérimentaux $R = R_0(1 + a\theta + b\theta^2)$ où θ est la température en °C (et donc R_0 la résistance à la température de 0°C), et a et b des coefficients positifs (la résistance augmente avec la température).
Pour un semi-conducteur, lorsque la température augmente, la probabilité qu'un électron de la bande de valence obtienne suffisamment d'énergie pour rejoindre la

bande de conduction augmente. En conséquence, la conductivité du semi-conducteur augmente.

39. Le rapport du poids à la force magnétique de Lorentz est, pour un électron, en prenant les applications numériques type appareil de Crookes :

$$\frac{mg}{evB} = \frac{0{,}9.10^{-30} \times 10}{1{,}6.10^{-19} \times 10^{7} \times 10^{-3}} \approx 6.10^{-15} \ll 1$$

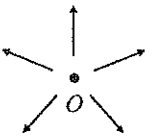
ce qui justifie que le poids est toujours négligé devant le force magnétique (ceci reste également vrai pour un proton). Il est aussi négligeable devant la force électrique pour les particules chargées.

40. Il s'agit du référentiel lié aux sources du champ $\vec{B}$ (aimant, circuit parcouru par un courant). De façon plus fondamentale, la notion même de champ magnétostatique créé par les charges en « mouvement » fait intervenir le référentiel par rapport auquel les charges sources sont en mouvement.

41. Remarquons d'abord que le champ magnétique stationnaire ne joue aucun rôle dans « l'effet d'accélération » des particules ; en effet, la force magnétique de Lorentz ne travaille pas puisque perpendiculaire à la vitesse, et ne peut donc modifier la norme de la vitesse d'une particule chargée. Ce rôle est dévolu au champ électrique.
Vu les vitesses considérables atteintes, les accélérateurs ou anneaux de stockage, ou machines de type « Tore supra » ou « Iter » pour confiner le plasma destiné à la fusion thermonucléaire, les appareils doivent être de forme circulaire, ce qui nécessite la présence de champs magnétiques pour incurver les trajectoires des particules chargées.
Dans un électroaimant conventionnel, le fil résistif dans lequel circule un puissant courant à l'origine du champ magnétique provoque une surchauffe de la bobine et l'énergie perdue est telle que le coût en énergie de l'aimant est très élevé, de plus l'intensité doit être limitée pour ne pas atteindre la fusion des fils. Alors qu'une bobine supraconductrice qui, à basse température, ne présente pas de résistance électrique, permet d'obtenir un champ magnétique élevé, et donc d'être plus efficace tout en étant moins coûteuse en énergie. L'introduction de la technologie des aimants supraconducteurs (maintenus à des températures très basses, 1,8 K, qui annulent quasiment la résistance électrique) a permis d'atteindre de très hautes énergies dans les accélérateurs circulaires, la vitesse des particules étant voisine de la vitesse de la lumière dans le vide.

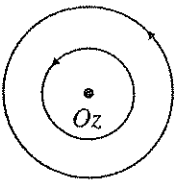
42. La vitesse moyenne entre deux chocs est $v_0 = d/\tau = 2.10^6$ m.s^{-1}, ce qui, avec un champ fort $B \approx 1$ T, conduirait à un rayon $R = mv_0/eB \approx 11$ µm et une période de rotation $T = 2\pi m/eB \approx 4.10^{-11}$ s.
Il apparaît que $T \gg \tau$ et $R \gg d$, et donc la trajectoire circulaire que tente d'imposer le champ magnétique n'a ni le temps, ni l'espace pour se réaliser, les chocs successifs l'en empêchant. C'est la raison pour laquelle il n'en est pas tenu compte lors de l'étude de l'action d'un champ magnétique sur un courant où seule la vitesse d'ensemble des porteurs est considérée.

43. Il est de coutume d'affirmer qu'un champ de vecteur est divergent lorsque les lignes de champ sont constituées de demi-droites qui divergent à partir d'un point O ; schématiquement, c'est souvent vrai. Mais il n'y a pas que la topographie des lignes de champ, mais aussi l'évolution des normes le long de ces lignes. Analytiquement « le signe de reconnaissance » d'une divergence (opérateur scalaire local) se trouve dans les expressions du type $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, c'est-à-dire lorsqu'une composante dans une direction donnée dépend de la variable suivant cette direction (voir à ce sujet la question **24.** b)).



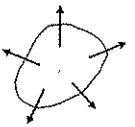
Mais attention, s'agissant du champ électrique créé par une charge ponctuelle placée en O, on a $\text{div}\,\vec{E} = 0$ partout sauf justement en O !

44. Il est de coutume d'affirmer qu'un champ de vecteur est rotationnel lorsque les lignes de champ sont constituées de cercles autour d'un axe Oz ; schématiquement, c'est souvent vrai. Mais il n'y a pas que la topographie des lignes de champ, mais aussi l'évolution des normes d'une ligne à l'autre. Analytiquement « le signe de reconnaissance » d'un rotationnel (opérateur vectoriel local) se trouve dans les expressions du type $\frac{\partial B_x}{\partial y}\vec{u}_z$, $\frac{\partial B_\theta}{\partial r}\vec{u}_z$,...c'est-à-dire lorsqu'une composante dans une direction donnée dépend de la variable suivant une direction perpendiculaire (voir à ce sujet la question **24.** b)).

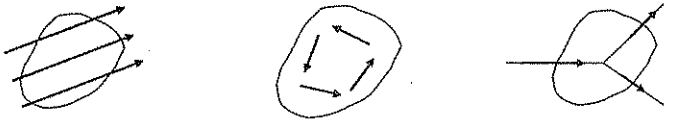


Mais attention, s'agissant du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini confondu avec Oz, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ partout sauf justement sur Oz !

45. Pour le champ de vecteur ci-contre $\text{div}\,\vec{j} > 0$ et donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ (les courants sont sortants et donc la charge dans le volume diminue).



Dans les trois cas ci-dessous $\text{div}\,\vec{j} = 0$ soit $\rho = cste$ (le troisième cas correspond à la loi des nœuds).



46. Dans un conducteur métallique, on a $\rho = 0$ car il y a à tout instant, dans un élément de volume, autant d'ions Cu^+ que d'électrons libres e^- et donc globalement le milieu est localement (et globalement) neutre ; mais les ions sont fixes et ne contribuent pas au courant contrairement aux électrons libres, et donc $\vec{j} = \rho_{e^-}\vec{v}_{e^-} + \rho_{ions}\vec{v}_{ions} = \rho_{e^-}\vec{v}_{e^-}$. La situation est analogue en surface lorsque $\sigma = 0$ et $\vec{j}_S \neq \vec{0}$.

Il en est de même dans une solution ionique ou dans un plasma neutre parcouru par une onde transversale, où le courant variable mais uniforme transversalement est essentiellement dû aux électrons libres et non aux noyaux beaucoup plus lourds. Il n'y a donc pas de contradiction à avoir une densité de courant alors que la densité de charge est nulle (c'est bien pour cela qu'il ne faut pas confondre ρ, densité de charge totale, avec ρ_m, densité de charge mobile et écrire $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ et non $\vec{j} = \rho \vec{v}$).

47. L'équation de Maxwell-Faraday montre que si $\vec{B}$ varie dans le temps, il engendre un champ $\vec{E}$ variable et l'équation de Maxwell-Ampère montre alors que $\vec{E}$ variant engendre $\vec{B}$; les équations de Maxwell sont couplées. Il n'est donc pas possible en général (sauf justement en statique) de séparer $\vec{E}$ et $\vec{B}$: ils forment le champ électromagnétique.
En régime statique, la phrase reste vraie, mais pas en régime variable (ni même en ARQS) comme cela a été signifié ci-dessus.

Exercices

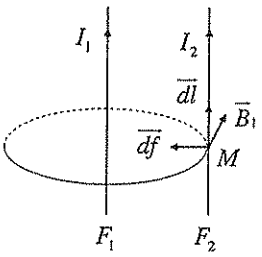
48. L'ampère

Considérons deux fils infinis et parallèles F_1 et F_2, distants de a et parcourus par des courants d'intensité I_1 et I_2.

En un point M de F_2, le courant d'intensité I_1 crée un champ magnétique $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \vec{u}_\theta$ (les vecteurs unitaires sont relatifs à un système de coordonnées cylindriques d'axe F_1).

L'élément $\overrightarrow{dl} = dl\,\vec{u}_z$, au point M de F_2, parcouru par le courant d'intensité I_2 et placé dans le champ $\vec{B}_1(M)$, subit la force élémentaire de Laplace :

$$\overrightarrow{df} = I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1(M) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl\,\vec{u}_r$$



Toutes les forces $\overrightarrow{df}$ pour les différents éléments $\overrightarrow{dl}$ sont parallèles entre elles.

La force est attractive si I_1 et I_2 sont de même signe (comme sur la figure), et répulsive sinon.

La force par unité de longueur est, en norme : $\boxed{\frac{df}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}}$

AN : Avec $df / dl = 2.10^{-7}$ N.m^{-1} par définition en prenant $a = 1$ m et $I_1 = I_2 = 1$ A, il vient $\underline{\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \text{H.m}^{-1}}$.

49. Le kilogramme

Le nombre d'ions dans 1 g est simplement $N = mN_A / M_{Au} \approx 3.10^{21}$ ions.

Accumulés sur une période aussi grande que 1 an, cela suppose un débit de production de $N/T \approx 10^{14}$ ions/s, ce qui est considérable.

Alors que le courant correspondant $I = Ne/T \approx 15$ µA est ridiculement faible, d'où les difficultés de l'expérience...non réalisable à ce jour.

50. Conductivité d'une solution ionique

a) L'équation différentielle du mouvement d'un ion A_i s'écrit :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = q_i \vec{E} - f_i \vec{v}_i$$

En régime stationnaire $\frac{d\vec{v}_i}{dt} \approx \vec{0}$, il vient $\vec{v}_i = \frac{q_i}{f_i}\vec{E}$, ce qui permet d'exprimer la mobilité des ions A_i définie par $\vec{v}_i = \mu_i \vec{E}$ sous la forme : $\boxed{\mu_i = \frac{q_i}{f_i}}$

b) Le nombre dN_i d'ions A_i franchissant une section S d'abscisse donnée de la cellule pendant dt est le nombre d'ions A_i contenus dans le cylindre de base S et de longueur $v_i dt$, soit $dN_i = n_i \times S\, v_i dt$.

Cela correspond à une charge électrique :

$$dQ_i = dN_i \times q_i = n_i S\, q_i v_i dt = n_i S \frac{q_i^2}{f_i} E\, dt$$

et à une intensité (charge mobile par unité de temps) :

$$I_i = \frac{dQ_i}{dt} = \frac{n_i q_i^2}{f_i}\frac{SU}{L}$$

Cette intensité ne dépend pas du signe de q_i, car les ions positifs (Cu^{2+} et H_3O^+ par exemple) et les ions négatifs (SO_4^{2-} et HO^-) se déplacent en sens inverse, contribuant tous à un courant de même sens.

c) L'intensité totale du courant est la contribution des intensités de chaque type d'ions :

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \frac{n_i q_i^2}{f_i}\frac{S}{L}U$$

Elle s'écrit sous la forme $I = \frac{U}{R}$ avec $R = \frac{1}{\sum_i \frac{n_i q_i^2}{f_i}}\frac{L}{S}$ du type $R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}$,

d'où la conductivité électrique, somme des conductivités de chaque ion :

$$\boxed{\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2}{f_i} = \sum_i n_i q_i \mu_i}$$

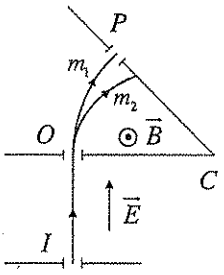
Rq : On en déduit la relation utilisée en conductimétrie $\sigma = \sum_i |z_i| c_i \Lambda_i$, où Λ_i est la conductivité molaire équivalente.

51. Sélecteur de masse

a) L'ion étant positif, il est accéléré dans le sens du champ $\vec{E}$; celui-ci doit donc être dirigé comme sur la figure de I vers O (ce qui est confirmé par des potentiels décroissants dans le même sens).
La conservation de l'énergie mécanique s'écrit pour un électron entre I et O :

$$0+0=\frac{1}{2}mv_0^2+eV_O \quad \Rightarrow \quad v_0=\sqrt{\frac{-2eV_O}{m}}$$

$$\underline{v_0}=\sqrt{\frac{-2N_A eV_O}{M_{Au}}}=\underline{210\ \text{km.s}^{-1}}\text{, vitesse non relativiste}$$



b) Le sens correct du champ $\vec{B}$ est vers l'avant du plan de figure (vérifier que la force $e\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ est bien dirigée de O vers C).

Le rayon r_0 est donné par : $m\frac{v_0^2}{r_0}=ev_0B \quad \Rightarrow \quad r_0=\frac{mv_0}{eB}$ et conduit à un champ magnétique

$$\underline{B}=\frac{M_{Au}v_0}{N_A e r_0}=\underline{0{,}87\ \text{T}}\ \text{(ce qui est un champ fort)}$$

c) Le rayon de courbure r_0 est en mv_0 et la vitesse v_0 en $\frac{1}{\sqrt{m}}$ (en effet tous les ions n'ont pas même vitesse au passage par O), d'où finalement r_0 en $\sqrt{m}$ ce qui permet d'envoyer vers des points P différents des ions ayant même charge, mais une masse différente : c'est le principe du sélecteur de masse.
Pour $m_2 < m_1$, on a $r_2 < r_1$ comme indiqué sur la figure.

Rq : Si après la phase d'accélération IO par le champ $\vec{E}$, on remplace le champ magnétique $\vec{B}$ par un autre champ électrique, dirigé suivant OC, donc perpendiculaire au précédent, la déviation qui en résulte est indépendante du rapport q/m ; ce dispositif ne pourrait donc servir de sélecteur de masse, d'où la nécessité d'utiliser un champ magnétique.

d) Comme $r_0=\alpha\sqrt{m}$ (où α est une constante), la variation de rayon δr_0 provoquée par une variation de masse δm est donnée par :

$$\frac{\delta r_0}{r_0}=\frac{1}{2}\frac{\delta m}{m}\ \text{(par dérivée logarithmique)}$$

Une largeur de fente D permet une variation maximale de rayon $\delta r_0 = \pm\frac{D}{2}$ correspondant à une variation de masse $\delta m = \pm\frac{D}{r_0}m$ par rapport à la masse m de l'ion Au^+.

Le tableau périodique donne $\left.\frac{\delta m}{m}\right|_{min} = \frac{2}{197}$ soit $\underline{D_{lim} = r_0 \left.\frac{\delta m}{m}\right|_{min}} \approx \underline{5\text{ mm}}$, réalisable sans problème.

Avec $D \leq D_{lim}$, il n'y a alors que les ions Au^+ à passer par la fente en P.

52. Divergence du champ gravitationnel

a) Pour $r > R$, écrire $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ où M est la masse totale de l'astre.

$$\text{alors } \operatorname{div}\vec{g} = -GM\left(\frac{1}{r^3}\operatorname{div}\vec{r} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \frac{1}{r^3}.\vec{r}\right) = -GM\left(\frac{1}{r^3}.3 + \frac{-3\vec{u}_r}{r^4}.r\,\vec{u}_r\right)$$

en effet, avec $\vec{r} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$, on a à 3 dimensions en coordonnées cartésiennes : $\operatorname{div}\vec{r} = 3$

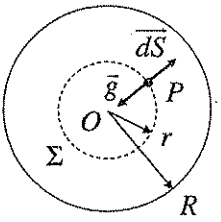
$$\text{d'où } \boxed{\operatorname{div}\vec{g} = 0}$$

Le champ gravitationnel à l'extérieur de l'astre apparaît donc indivergent ! Le calcul montre bien que l'effet d'écartement des lignes de champs (le terme en $\operatorname{div}\vec{u}_r$) est dans ce cas compensé par le fait que le champ en norme décroît avec la distance (le terme en $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \frac{1}{r^2}$).

b) Pour $r < R$, le champ gravitationnel en P est :

$$\vec{g}(P) = -\frac{GM_r}{r^2}\vec{u}_r$$

où M_r est la masse dans la sphère Σ de rayon r.



– Le flux de $\vec{g}$ à travers Σ est d'une part :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{g}(P)\,\overrightarrow{dS} = -GM_r \oiint_\Sigma \frac{\vec{u}_r\,\overrightarrow{dS}}{r^2} = -\frac{GM_r}{r^2}\oiint_\Sigma dS$$

puisque l'intégrale se fait à r constant ; la surface de la sphère étant $4\pi r^2$

$$\Phi_\Sigma = -4\pi G M_r = -4\pi G \iiint_{V_\Sigma} \rho(P)\,d\tau$$

où la masse M_r est prise sur le volume V_Σ intérieur à la sphère Σ

– et d'autre part :

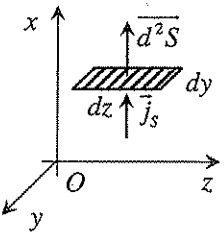
$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{g}(P).\overrightarrow{dS} = \iiint_{V_\Sigma} \operatorname{div}\vec{g}(P)\,d\tau \text{ par application du théorème d'Ostrogradsky}$$

Il résulte de ces 2 intégrales valables pour tout V_Σ que : $\boxed{\text{div}\,\vec{g}(P) = -4\pi\rho(P)G}$

Ce résultat est à rapprocher de l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E}(P) = \dfrac{\rho(P)}{\varepsilon_0}$ après avoir effectué le parallèle entre les forces gravitationnelles et de Coulomb $\left(G \leftrightarrow -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)$, toutes les deux en $\dfrac{\vec{u}_r}{r^2}$. Mais alors que deux charges de même signe se repoussent, deux masses s'attirent, d'où la différence de signe.

53. Limite conduisant à une densité surfacique de courant

a) Il est conseillé de faire un dessin. La densité volumique est invariante par translation suivant Oy mais décroît avec la profondeur z, il faut donc intégrer le long de z en prenant une surface élémentaire orientée $\overrightarrow{d^2S} = dydz\,\vec{u}_x$:



$$I(z) = \iint \vec{j}.\overrightarrow{d^2S} = j_0\int_0^l dy\int_0^z e^{-z/\delta}\,dz = j_0 l\delta(1-e^{-z/\delta})$$

$$\text{et}\quad I(\infty) = j_0 l\delta$$

Tout se passe pour le courant total $I(\infty)$ comme si la densité volumique était uniforme sur une épaisseur δ.

La condition $I(z_0) = 0{,}9\,I(\infty)$ revient à trouver la profondeur sur laquelle circule 90% du courant total :

$$j_0 l\delta(1-e^{-z_0/\delta}) = 0{,}9\,j_0 l\delta \quad\Rightarrow\quad \underline{z_0 = \delta\ln 10 \approx 2{,}3\delta}$$

Cette profondeur est du même ordre de grandeur que l'épaisseur δ qui caractérise la diminution exponentielle de la densité de courant.

b) La densité surfacique de courant $\vec{j}_S$ n'est définie que si l'épaisseur δ tend vers zéro ; la densité volumique $\vec{j}$ est alors nulle dans tout l'espace $z > 0$ et sa norme est « infinie » sur le plan $z = 0$ d'où la notion de densité surfacique.

Le courant total $I(\infty)$ traverse alors suivant la direction Ox le segment de longueur l orienté suivant Oy :

$$j_S = \frac{I(\infty)}{l} \quad\text{et vectoriellement}\quad \boxed{\vec{j}_S = j_0\delta\,\vec{u}_x}$$

résultat homogène et qui montre bien que $\delta \to 0$ conduit à $j_0 \to \infty$.

54. Nécessité du courant de déplacement

a) Soit I le courant émis, on a $I = -\dfrac{dQ}{dt}$; en effet, si $Q > 0$ diminue, cela correspond à un courant d'intensité positive. Ce courant répartit de manière

isotrope sur une sphère de surface $4\pi r^2$ conduit à une densité volumique de courant radiale $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ avec $j(r) = I / 4\pi r^2$:

$$\boxed{\vec{j} = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ}{dt}\vec{u}_r}$$

b) L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ avec les résultats fournis donne : $\vec{0} = -\dfrac{\mu_0}{4\pi r^2}\dfrac{dQ}{dt}\vec{u}_r + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{dQ}{dt}\vec{u}_r$ ce qui est vérifié.

Écrite sous la forme $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$ avec $\vec{j}_D = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, l'équation de Maxwell-Ampère montre bien ici la nécessité du courant de déplacement qui compense le courant de particules chargées afin d'assurer la nullité du champ magnétique (voir le chapitre **5** sur la Magnétostatique).

55. Champ électrique longitudinal

a) Avec $\vec{E}(x,t) = E_x(x,t)\vec{u}_x$ (la composante E_x ne dépend que de x), il apparaît immédiatement que le champ est irrotationnel $\dfrac{\partial E_x}{\partial y} = \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = 0$, mais divergent $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} \neq 0$.

D'où $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x(x,t) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; le champ $\vec{B}$ est donc statique et on peut le prendre nul en régime spatio-temporel d'onde (absence de courant permanent pour l'expliquer).

b) $\text{div}\ \vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = kE_0\sin(\omega t - kx) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho(x,t) = \varepsilon_0 kE_0\sin(\omega t - kx)$

$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \vec{0} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}(x,t) = -\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\omega E_0\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x$

On vérifie facilement que l'équation de conservation de la charge est alors satisfaite $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (soit ici $\dfrac{\partial j_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$).

Cette situation se rencontre dans un plasma (voir les questions **43.** et **85.** au chapitre **3**).

Chapitre 3
Ondes électromagnétiques

Les ordres de grandeur utiles

Constantes de la physique

perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 \approx 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}
célérité de la lumière dans le vide	$c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \approx 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}
charge ; masse de l'électron	$-e$ où $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $m_e = 0{,}91.10^{-30}$ kg
charge ; masse du proton	e ; $m_p = 1{,}7.10^{-27}$ kg $\approx 1800\ m_e$

Indices de réfraction pour milieux transparents (pour λ = 589 nm)

vide ; air	$n = 1$; $n = 1{,}00029$
eau ; verre ordinaire ; flint	$n = 1{,}33$; $n \approx 1{,}5$; $n \approx 1{,}8$

Le cuivre

masse molaire ; masse volumique	$M = 63{,}5$ g.mol^{-1} ; $\rho \approx 8{,}9.10^{3}$ kg.m^{-3}
densité volumique de porteurs (un e^- libre par atome de Cu)	$n = \rho N_A / M \approx 10^{29}$ m^{-3}
conductivité électrique	$\sigma = ne^2\tau / m \approx 5{,}8.10^{7}$ S.m^{-1}
temps entre deux chocs	$\tau \approx 10^{-14}$ s
épaisseur de peau : $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma\omega} = 1/\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}$	δ(50 Hz) $\approx$ 1 cm ; δ(50 MHz) $\approx$ 10 µm

Le plasma

densité de plasma dans l'ionosphère	$n \approx 10^{11}$ m^{-3}
dans une décharge gazeuse	$n \approx 10^{20}$ m^{-3}
pulsation de plasma pour l'ionosphère	$\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$; $f_p = \omega_p/2\pi \approx 3$ MHz

Notions sur le spectre

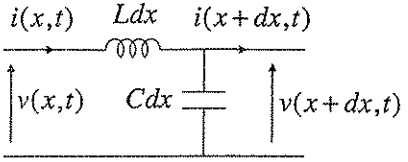
photon visible ; X ; γ	$E \approx 1$ eV ; 1 keV ; 1 MeV
ondes radio en FM	$f \approx 100$ MHz et $\lambda \approx 3$ m

Un tableau plus complet du spectre électromagnétique est proposé page 112.
Pour la téléphonie mobile, voir la question **79**..

Le cours d'abord

L'équation de d'Alembert et ses solutions sur un exemple simple

1. Une ligne coaxiale présente une capacité linéique C (en $F.m^{-1}$) et une inductance linéique L (en $H.m^{-1}$) avec $LC = 1/c^2$ si elle est parfaite (expressions montrées à la question **44.** du chapitre 5) où c est la vitesse de la lumière dans le vide.
Sur un tronçon de longueur dx, elle se modélise simplement par le schéma suivant, la tension $v(x,t)$ et le courant $i(x,t)$ étant non seulement fonction du temps (régime variable), mais aussi de l'espace :



Établir les équations donnant $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$ en fonction de $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$, et montrer, en justifiant les approximations, que cette ligne (sans perte) conduit pour la tension $v(x,t)$ à une équation aux dérivées partielles dite équation de d'Alembert.
Quelle est alors la célérité des signaux électriques qui s'y propagent ? Commentaire.

2. Écrire et caractériser l'équation de d'Alembert à une dimension x pour une grandeur scalaire $u(x,t)$. Quelle est par homogénéité la dimension de la constante c qui y intervient ?

3. Rappeler et interpréter la solution générale d'une équation de d'Alembert, d'abord en coordonnées cartésiennes (à une puis trois dimensions), puis en coordonnées sphériques pour un problème à symétrie sphérique en donnant une interprétation des variations d'amplitude.

4. Dans quel cas retient-on une solution en onde progressive ? Pour une onde progressive sinusoïdale, quelle relation existe-t-il entre la longueur d'onde λ et la période T ? L'énoncer par une formule, puis à l'aide d'une phrase.
Une diode laser pour lecture de CD émet une onde de fréquence $f = 3{,}8.10^{14}$ Hz ; quelle est sa longueur d'onde dans le vide ?

5. Dans quel cas retient-on une solution en onde stationnaire ? Quelle forme de solution choisit-on alors pour résoudre l'équation de d'Alembert ? Quelles sont les caractéristiques d'une telle onde ? Pour quelle raison apparaît-il des modes ?

Structure de l'onde plane progressive monochromatique dans le vide

6. Déduire des équations de Maxwell les équations d'onde satisfaites par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans une région sans charge ni courant. Commentaires sur la célérité.

7. Pourquoi dans le vide peut-on prendre un champ électrique complexe de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$? Que signifient ω et $\vec{k}$? Par quelle relation sont-ils liés ? Comment avec cette notation se transcrivent les opérateurs de dérivation usuels ?

8. Quelles propriétés sur $\overline{E}$ et $\overline{B}$ en déduit-on en traduisant les équations de Maxwell à divergence ? Quelles autres propriétés sur $\overline{E}$ et $\overline{B}$ en déduit-on en traduisant les équations de Maxwell à rotationnel ?

9. Rassembler les propriétés précédentes dans une représentation spatiale des champs dans le cas d'une propagation dans le sens des x croissants (suivant Ox^+).

■ Aspects énergétiques

10. Quelles sont les précautions à prendre lorsqu'on manipule des grandeurs énergétiques ? Quelles sont les expressions instantanées de la densité volumique d'énergie u et du vecteur de Poynting $\overline{R}$ pour une OPPM (se propageant suivant Ox^+) ? Commentaire sur la direction et le sens du vecteur de Poynting.

11. Comment est définie l'intensité I (utile en optique ondulatoire) d'une onde monochromatique ? Exprimer celle d'une OPPM de champ électrique $\overline{\underline{E}} = E_0 \, e^{i(\omega t - kx)} \, \vec{u}_y$.

12. Si $f(t) = f_0 \cos \omega t$ et $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$ sont deux fonctions sinusoïdales de même pulsation et déphasées, comment s'exprime simplement la moyenne temporelle de leur produit $< fg >$ à l'aide de leur représentation complexe $\underline{f}$ et $\underline{g}$? Par quels calculs simples accède-t-on directement aux moyennes temporelles $< u >$ et $< \overline{R} >$ de la densité volumique d'énergie u et du vecteur de Poynting $\overline{R}$?

■ Polarisation des ondes électromagnétiques

13. Quelle grandeur est concernée par l'étude de la polarisation d'une OPPM ? L'expliciter sur la base d'une OPPM se propageant dans le sens des x croissants.

14. Quand dit-on qu'une OPPM est polarisée rectilignement ?

15. La lumière naturelle (provenant de sources classiques telles que le Soleil ou des lampes à incandescence) est non polarisée. Que signifie ce vocabulaire ? Et quelle différence présente-t-elle avec une lumière polarisée ?

■ Dispersion ; absorption

16. Quelle est dans un milieu d'indice n la vitesse de phase des ondes lumineuses ? Rappeler et interpréter l'expérience de Newton de la dispersion de la lumière blanche par un prisme. Faire un dessin en se limitant aux deux rayons rouge et bleu.

17. Comment pour une équation d'onde quelconque (non forcément de d'Alembert) obtient-on la relation de dispersion ? Que se passe-t-il lorsque la relation de dispersion $k(\omega)$ n'est pas linéaire ? Lorsque la relation $k(\omega)$ est complexe ?

18. Définir les vitesses de phase et de groupe ; les illustrer sur la notion de paquets d'onde. Citer un cas de dispersion.

Ondes électromagnétiques dans un plasma

19. Qu'est-ce qu'un plasma ? Qu'entend-on par plasma neutre, plasma « froid », plasma peu dense ?

On souhaite y propager une onde de champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0 \, e^{i(\omega t - \underline{k} x)} \vec{u}_y$ où $\underline{k}$ est *a priori* complexe. Faire le bilan de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser lesquelles sont négligeables.

20. Déterminer, en régime forcé, le champ des vitesses $\underline{\vec{v}}(x,t)$ de l'ensemble des électrons de masse m et de charge $-e$ (considéré comme un fluide de densité particulaire notée n) en exprimant $\underline{\vec{v}}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}$.

Procéder de même pour les cations de masse M et de charge $+e$ en notant $\underline{\vec{V}}(x,t)$ leur champ des vitesses, et en déduire moyennant une approximation à préciser, la conductivité complexe $\underline{\sigma}$ du plasma définie par $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}$ en introduisant la pulsation de plasma $\omega_p = \sqrt{ne^2 / \varepsilon_0 m}$; commentaires.

21. En déduire la puissance volumique moyenne cédée par le champ au plasma ; commentaire.

22. Justifier qualitativement que dans le plasma traversé par une onde transversale, on garde $\rho = 0$, puis montrer qu'en régime forcé ce résultat est cohérent avec les équations de Maxwell. Écrire ces équations en notation complexe et en déduire la relation de dispersion entre $\underline{k}$, ω, ω_p et c ; commentaires.

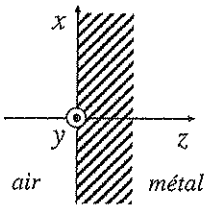
AN : Calculer f_p et λ_p correspondant pour l'ionosphère où $n \approx 10^{11}$ m^{-3}.

23. Le plasma occupe le demi-espace $x \geq 0$ et l'onde est considérée à partir de $x = 0$. Pour $\omega < \omega_p$, caractériser entièrement l'onde obtenue. Décrire qualitativement ce que devient une onde électromagnétique envoyée depuis le sol en direction de l'ionosphère.

24. Mêmes questions pour $\omega > \omega_p$. Trouver les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g et tracer les courbes en fonction de ω.

Effet de peau sur un conducteur réel (en ARQS)

25. Le plan $z = 0$ sépare l'air ($z < 0$) d'un conducteur métallique ($z > 0$) de conductivité électrique σ réelle et suivant la loi d'Ohm. Si l'onde incidente dans l'air a un champ électrique $\underline{\vec{E}}_i = E_0 \, e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_x$, justifier soigneusement le choix *a priori* du champ transmis dans le conducteur sous la forme $\underline{\vec{E}}_t = \underline{E}'_0 \, e^{i(\omega t - \underline{k} z)} \vec{u}_x$.



26. Justifier numériquement (par exemple pour le cuivre) les deux approximations faites dans l'écriture des équations de Maxwell dans le conducteur en introduisant un temps $\tau = \varepsilon_0 / \sigma$ et en précisant le domaine d'étude du spectre électromagnétique. Réécrire les équations de Maxwell avec pour seules constantes τ et c. Quelle est l'équation de propagation à laquelle satisfait le champ $\vec{E}_i$ dans le conducteur ?

27. Résoudre cette équation et donner la relation $\underline{k}(\omega)$ avec $\underline{k} \in \mathbb{C}$, en introduisant $\delta = c\sqrt{2\tau/\omega}$; commenter la solution obtenue et proposer une application numérique de δ pour le cuivre dans le cas d'une onde hertzienne de fréquence 100 MHz, puis 50 Hz ; commentaires.

■ Réflexion (sous incidence nulle) sur un conducteur plan parfait

On garde la géométrie et les notations de la question **25.**.

28. Comment est défini un conducteur parfait ? Montrer que l'onde électromagnétique n'y pénètre pas.

29. Comment se réfléchissent les champs ? Comment peut-on interpréter l'existence d'une densité surfacique de courant (à évaluer) sur le conducteur ?
On donne les relations de passage des champs :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

30. Quelles sont la structure et les propriétés énergétiques de l'onde résultante dans l'air ?

31. On place un second plan conducteur parfait, identique au premier, et parallèlement à ce dernier à une abscisse $z = -l$ (où $l > 0$). Sans calcul, pour quelles valeurs de l l'onde stationnaire dans la cavité devient-elle résonante ? Commenter.

■ Rayonnement du dipôle oscillant

32. Rappeler les hypothèses faites dans la détermination du champ rayonné à grande distance par un dipôle oscillant. Citer des exemples.

33. Dans ces conditions, si le moment électrique du dipôle variable placé en O s'écrit $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \, \vec{u}_z$, le champ électrique rayonné en un point M est, en coordonnées sphériques (α est une constante) :

$$\vec{E}(M) = \alpha \frac{\sin\theta}{r} \cos\omega(t - r/c)\vec{u}_\theta$$

Quelles sont les caractéristiques de ce champ ? À quoi ressemble-t-il localement ?

34. Expliquer sa décroissance spatiale par un argument énergétique et dire pourquoi le rayonnement est qualifié d'anisotrope.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ L'électromagnétisme est une science fondamentalement vectorielle ; les flèches sur les vecteurs sont obligatoires et une égalité du genre « *vecteur = scalaire* » est à proscrire ; un effort s'impose sur l'exactitude et la précision des notations.

☐ Dans les applications numériques, ne pas oublier le coefficient 2π intervenant entre la pulsation $\omega = 2\pi f$ (en rad.s^{-1}) et la fréquence f (en Hz).

☐ De même s'agissant de la notation complexe (qui suppose la linéarité), il est hautement souhaitable de souligner les grandeurs complexes afin de ne pas les confondre avec les grandeurs réelles correspondantes et de donner un sens à l'écriture $\vec{E} = \text{Re}\left(\underline{\vec{E}}\right)$. Il est conseillé d'en faire de même pour $\underline{k}$ lorsqu'il est complexe, cela conduit à moins d'erreurs...

☐ Rappelons que la moyenne temporelle d'un vecteur est un vecteur (et non un scalaire !).

☐ Les grandeurs énergétiques sont quadratiques (donc non linéaires) et par conséquent la notation complexe ne s'applique pas. En effet, la partie réelle d'un produit n'est pas égale au produit des parties réelles !

Aucune grandeur énergétique ne peut être complexe.

C'est le cas du vecteur de Poynting, de la densité d'énergie électromagnétique, de la densité de puissance cédée par le champ à la matière,... [les notations $\underline{\vec{R}}$, $\underline{u}$, $\underline{P_v}$, ou $\underline{\vec{E}}^2$, $<\underline{\vec{E}}^2>$ (la moyenne d'un complexe reste complexe),...sont interdites puisque les grandeurs physiques réelles qui s'y rapportent n'existent pas].

Si au cours d'un calcul où les champs sont en $e^{i(\omega t - \underline{k}.\vec{r})}$, il apparaît $e^{2i(\omega t - \underline{k}.\vec{r})}$, c'est un signe d'erreur et il faut reprendre ! En effet, une « exponentielle double » ne peut apparaître ni dans l'expression $\vec{R} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ où les champs sont réels, ni dans l'expression $<\vec{R}> = \dfrac{1}{2}\text{Re}\left(\dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$ où le produit des exponentielles complexes conjuguées donne 1 (toute autre expression est fantaisiste).

La première expression est obligatoire lorsque la valeur instantanée du vecteur de Poynting est demandée ; il est alors indispensable de d'abord passer aux champs réels. La deuxième expression est très commode lorsque seule la moyenne temporelle du vecteur de Poynting est demandée ; on peut alors travailler avec des champs complexes, mais le résultat est nécessairement réel.

☐ Bien distinguer $\left|\underline{\vec{E}}\right|^2 = \underline{E}\,\underline{E}^*$ qui est réel et intervient dans les calculs de moyenne temporelle et $\underline{E}^2 = \underline{E}\,\underline{E}$ qui est complexe et n'a pas d'existence physique.

En revanche, si le nombre d'onde est complexe, l'équation de dispersion peut donner $\underline{k}^2 = \underline{k}\,\underline{k}$, et qu'il ne faut pas confondre avec $|\underline{k}|^2 = \underline{k}\,\underline{k}^*$, grandeur inutile.

☐ Attention à la convention de signe $e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$ ou $e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$; les parties réelles sont égales, donc la grandeur physique (réelle) est inchangée, en revanche les opérateurs de dérivation spatio-temporels d'ordre un changent de signe, ainsi que les parties imaginaires de la conductivité et de l'indice. Il faut toujours prendre la convention indiquée dans un problème et s'y tenir.

☐ La propriété $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ n'est valable que pour une onde plane progressive homogène dans le vide.
Pour une onde non-plane progressive (ex : une onde sphérique), ou une onde plane non-progressive (ex : une onde stationnaire), ou une onde plane progressive non-homogène (dont l'amplitude dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation n'est pas uniforme), il faut revenir aux équations de Maxwell (Maxwell-Faraday pour obtenir $\vec{B}$ connaissant $\vec{E}$, et Maxwell-Ampère pour obtenir $\vec{E}$ connaissant $\vec{B}$).
En revanche, pour une OPPM homogène dans un milieu conducteur ou diélectrique, la relation $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, issue de Maxwell-Faraday, reste vraie.

☐ Un champ magnétique B est homogène à E/c (ou plus généralement E/v_φ).

Après utilisation de la formule $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, ne pas garder le rapport $\dfrac{k}{\omega}$, mais penser à le remplacer par $1/c$ (ou plus généralement $1/v_\varphi$).

☐ Bien faire la distinction (pour ne pas les confondre) pour un champ donné, entre sa direction de propagation (voir pour cela son terme de phase) et sa direction de polarisation (voir le vecteur unitaire qui le porte).

☐ Une erreur consiste à croire qu'un milieu isolant (comme la plupart des diélectriques) ne laisse pas passer les ondes (hertziennes par exemples). Or c'est exactement le contraire ; les diélectriques sont essentiellement transparents aux ondes hertziennes, alors que les milieux conducteurs (eau de mer, métaux) les réfléchissent et les absorbent.

☐ Pour un plasma il faut éviter dans l'équation d'onde du champ électrique de mélanger les grandeurs fréquentielles (ω intervient dans $\underline{\sigma}$) et notation temporelle ; procéder, en notation complexe, à la substitution $\partial / \partial t \rightarrow i\omega$.

Il est utile d'avoir de bonnes notions sur le spectre électromagnétique :

Type d'ondes	Production	Quelques utilisations
Électrocinétique	alternateur oscillateurs électroniques	secteur domestique 50 Hz ($\lambda = 6000$ km) électronique BF (< 100 kHz)
Ondes hertziennes	antennes conductrices à courants oscillants	téléphone fixe ($\lambda \approx$ qqs km) radio-télé (λ de 10 cm à 1 km) radio AM : 1 MHz ($\lambda \approx 300$ m) radio FM : 100 MHz ($\lambda \approx 3$ m)
Micro-ondes (hyperfréquences)	antennes conductrices à courants oscillants	téléphone GSM 900 MHz ($\lambda = 33$ cm) four μ-ondes 2,45 GHz ($\lambda = 12{,}2$ cm) radar : $\lambda \approx$ cm soit 100 GHz
Infrarouge	vibration de la matière absorption $\Rightarrow$ T augmente (sensation de chaleur)	diodes laser pour fibres optiques chauffage (radiateur, lampe IR,...) ou caméra thermique (la nuit) $\approx 10^{14}$ Hz analyse spectrométrique (OH, C=C,...)
Lumière visible	transitions électroniques des atomes (lampe spectrale, à incandescence, laser,...)	vision humaine : réactions photochimiques dans les yeux ($0{,}4 < \lambda < 0{,}8$ µm) photographie synthèse chlorophyllienne
Ultraviolet	transitions électroniques des atomes	provoque des réactions chimiques (halogénation des alcanes) stérilisation bronzage (Soleil, lampe UV) $\approx 10^{16}$ Hz présent dans les lampes Hg
Rayons X	métal bombardé par des électrons de grande énergie cinétique (tube à rayons X)	pouvoir pénétrant important (protection au Pb) : (10^{-12} m $< \lambda < 10^{-8}$ m) radiographie (du squelette) radiothérapie médicale diffraction par la matière cristalline
Rayons γ	radioactivité réactions nucléaires rayons cosmiques	très dangereux (photon $E >$ MeV) destruction de tumeurs

Applications directes du cours

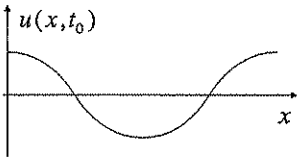
■ Les solutions de l'équation de d'Alembert

Les questions suivantes concernent une grandeur scalaire $u(x,t)$ (comme une composante de champ électromagnétique) fonction d'une variable d'espace et du temps.

35. Vérifier explicitement que $u(x,t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$ est bien solution de l'équation de d'Alembert et rappeler la signification physique des deux termes de cette solution.

36. Montrer comment la recherche d'une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme d'une fonction de variables séparées $u(x,t) = f(x).g(t)$ conduit pour $f(x)$ et $g(t)$ à des fonctions trigonométriques lorsqu'on impose par exemple les conditions aux limites du genre $f(x=0) = f(x=l) = 0$; application. Dessiner et décrire spatialement et temporellement le mode $n = 3$.

37. L'onde représentée sur le graphe $u(x,t_0)$ ci-contre représente-t-elle une onde progressive ou une onde stationnaire ? Justifier soigneusement la réponse.



38. Montrer sur des exemples simples le lien qui existe entre les solutions en ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) et les solutions en ondes stationnaires à un mode (OS) de l'équation de d'Alembert.

■ Ondes électromagnétiques dans le vide

39. Déduire des équations de Maxwell les équations d'onde satisfaites par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en gardant les densités ρ et $\vec{j}$ non nulles. Commentaires.
Écrire explicitement en coordonnées cartésiennes l'équation de d'Alembert satisfaite par la composante E_x du champ électrique dans le vide.

40. Pourquoi est-il possible pour un champ d'onde de type $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ (OPPM polarisée rectilignement) de choisir l'amplitude E_0 *a priori* réelle ?
Dans quel sens se propage une onde en $e^{i(\omega t - kz)}$? Et une onde en $e^{-i(\omega t - kz)}$?

41. Le champ électrique d'une onde dans le vide s'écrit $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$; donner les caractéristiques de ce champ, établir la relation entre k et ω, et déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ et le vecteur de Poynting $\vec{R}$ correspondants.

42. Comment l'intensité I d'une onde monochromatique est-elle reliée au flux Φ de photons (le flux de photons est le nombre de photons qui traversent un élément de surface par unité de temps) ?

43. Le champ électrique d'une onde s'écrit $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_x$; commenter cette structure particulière et proposer des analogies. Où trouve-t-on ce type d'ondes ? Déterminer le champ $\vec{B}$ en régime d'onde ; cette valeur du champ magnétique est-elle compatible avec l'existence de courants de conduction dans le milieu ?

44. Comment fonctionne un polariseur ; quel est son usage ? Établir la loi de Malus.

Étude énergétique d'une onde

45. Champ et énergie d'une onde

a) Un laser de puissance émet 400 W dans un faisceau cylindrique de 3 mm de diamètre. Quelle est l'amplitude du champ électrique associé aux ondes supposées planes progressives sinusoïdales que transporte le faisceau ?
La longueur d'onde est $\lambda = 0{,}7$ µm ; déterminer le flux φ de photons, c'est-à-dire le nombre de photons par seconde qui traverse la section du faisceau.

b) Le flux d'énergie solaire, au niveau de la Terre (en haute atmosphère), est $\Phi = 2{,}0$ cal / min.cm^2 ; convertir ce résultat en kW.m^{-2} sachant que 1 calorie $\approx 4{,}2$ J. Quelle est la puissance totale P émise par le Soleil ? En déduire l'intensité du champ électrique des ondes supposées localement planes à la surface du Soleil.

Données : distance Terre-Soleil : $a = 150.10^6$ km ; rayon du Soleil : $R_S = 7.10^8$ km.

46. Montrer qualitativement que la conservation de l'énergie impose aux champs d'une onde sphérique une décroissance en $1/r$. Qu'en est-il pour une onde progressive cylindrique ?

47. Quelle relation simple existe-t-il pour une OPPM dans le vide entre le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie ? L'interpréter physiquement.

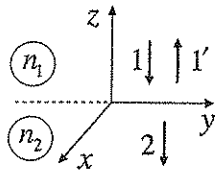
Les milieux transparents d'indice *n*

48. $k_0 = \omega / c$ est le nombre d'onde d'une onde électromagnétique dans le vide. Cette onde pénètre dans un milieu transparent d'indice n réel réels ($n = 1{,}00029$ pour l'air, $n = 1{,}33$ pour l'eau, $n = 1{,}5$ pour le verre,...) ; la pulsation ω est-elle modifiée ? Exprimer le nombre d'onde k en fonction de k_0 et n et interpréter le résultat en termes de longueurs d'onde.

49. Si le champ électrique s'écrit $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{u}_y$, quelle est l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$? De la valeur moyenne $<\vec{R}>$ du vecteur de Poynting ?

50. Interface entre deux milieux

$\underline{\vec{E}}_1 = E_0 e^{i(\omega t + k_1 z)}\vec{u}_x$ est le champ électrique de l'onde incidente.



a) Comment s'écrivent les champs électriques $\underline{\vec{E}_1}'$ et $\underline{\vec{E}_2}$ des ondes réfléchie (n_1) et transmise (n_2) à l'aide des coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ en amplitude. Et les champs magnétiques $\underline{\vec{B}_1}$, $\underline{\vec{B}_1}'$ et $\underline{\vec{B}_2}$?

b) Les champs sont continues à l'interface $z=0$, $\forall t$; en déduire l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de n_1 et n_2 ; commenter.

c) Rappeler l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ en fonction du champ $\vec{E}$ et donner les puissances moyennes $<dP_1>$, $<dP_1'>$ et $<dP_2>$ rayonnées à travers une surface dS du dioptre. En déduire l'expression des facteurs de réflexion et de transmission en énergie R et T ; commentaires.

51. Quelle est la valeur numérique du coefficient de réflexion en énergie sur une interface air / verre ? Estimer le pourcentage de l'énergie transmise à l'énergie incidente à travers une vitre.

52. Le cas d'un milieu absorbant

En optique géométrique les indices des milieux sont pris réels, cela traduit la transparence de ces milieux, c'est-à-dire le fait qu'ils n'absorbent pas la lumière. En réalité les milieux sont tous plus ou moins absorbants, ce qui est traduit par un nombre d'onde complexe $\underline{k}=k'-ik''$ où k' et k'' sont réels positifs.

Une onde dans ce milieu a pour champ électrique $\underline{\vec{E}}=E_0\,e^{i(\omega t-\underline{k}x)}\,\vec{u}_z$.

a) Écrire ce champ en fonction de k' et k'' et commenter.

b) Sans calcul, indiquer la forme de l'intensité $I(x)$ à l'abscisse x de cette onde en notant $I(x=0)=I_0$, et proposer une interprétation de la loi de Beer-Lambert utilisée en spectrométrie en chimie.

AN : Sachant que pour $\lambda=0{,}5$ µm l'intensité à la profondeur 12 m est le dixième de l'intensité près de la surface de l'eau, calculer k''.

■ Ondes électromagnétiques dans un plasma

53. Comparer la densité particulaire des électrons ou cations dans un plasma à celle des molécules d'un gaz comme l'air, ou encore à celle des électrons libres dans un métal. Où trouve-t-on des plasmas ?

54. Quelle est, dans un plasma, l'expression du champ $\underline{\vec{B}}$ correspondant au champ $\underline{\vec{E}}=E_0\,e^{i(\omega t-\underline{k}x)}\,\vec{u}_y$? Commenter.

55. Écrire la loi d'Ohm locale $\underline{\vec{j}}=\underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$ (avec $\underline{\sigma}$ imaginaire pur) avec des champs en notation réelle (en introduisant l'opérateur « dérivée temporelle »), puis établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(x,t)$ réel en conservant $\rho=0$. En déduire l'équation de dispersion dans laquelle apparaît la pulsation de plasma $\omega_p=\sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$.

56. Pourquoi l'ionosphère est-elle un plasma ? Au sol un émetteur envoie verticalement une onde hertzienne de fréquence réglable. En-dessous de 3 MHz, un récepteur situé au sol reçoit un signal 0,6 ms après l'émission. Expliquer les phénomènes observés et en déduire les valeurs numériques de quatre grandeurs. Applications.

■ Ondes électromagnétiques dans un conducteur

57. Le champ électrique d'une onde dans un conducteur réel peut s'écrire sous la forme : $\underline{\vec{E}} = E_0 \, e^{-z/\delta} \, e^{i(\omega t - z/\delta)} \, \vec{u}_x$. Quels sont les deux méthodes qui permettent d'en déduire le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$?

58. Pour établir la conductivité σ réelle d'un métal, il n'a été tenu compte que de la force électrique ; vérifier par une application numérique (pour le cuivre à 100 MHz) que la force magnétique est bien négligeable devant la force électrique.

59. Illustrer la formule utile $< f\,g > = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}.\underline{g}^*)$ sur le calcul de la puissance moyenne cédée par le champ à un conducteur, en distinguant le conducteur métallique (loi d'Ohm avec conductivité réelle) et le plasma (loi d'Ohm avec conductivité imaginaire pure) et en déduire des conséquences physiques.

Questions de réflexion □ Physique pratique

60. Pourquoi la structure des OPPM dans le vide s'étend-elle à des OPP quelconques (non forcément monochromatiques) ? Quelle sont les deux raisons pour lesquelles une OPPM ne peut pas exister en réalité ?

61. Quel temps s'écoule-t-il entre le moment où se produit une éruption solaire et le moment où elle est observable sur la Terre ?

62. Pourquoi un film polaroïd (qui sert à faire des polariseurs rectilignes) est-il un milieu anisotrope ?

63. Dans les salles de cinéma équipées, on peut voir des films en trois dimensions grâce à des lunettes spéciales remises à l'entrée de la salle. Sur quels principes d'enregistrement et de restitution fonctionne ce cinéma 3D ?

64. Qu'est-ce qui permet à un serpent crotale de chasser par une nuit obscure ?
À quoi peuvent servir des lunettes (ou caméras) à infrarouge ?
Une abeille peut aller butiner à plusieurs kilomètres à la ronde ; comment fait-elle pour retrouver sa ruche ?

65. Les signaux électriques (tension et courant) sur une ligne sont couramment fonction du temps en électrocinétique. Pourquoi lorsque la fréquence augmente au-delà d'une

certaine valeur (en donner un ordre de grandeur) deviennent-ils aussi fonction de l'espace ? Peut-on alors continuer à considérer la ligne dans son ensemble ? Comment procède-t-on ?

66. Pour illustrer la question précédente, considérons l'exemple d'un signal de télévision, destiné à reconstituer, 50 fois par seconde, une image constituée de 625 lignes de 830 points, pour lesquels trois informations sont à transporter pour les trois couleurs primaires. Quelle doit être la fréquence minimale f de cette information dont le signal est noté $s(t) = \alpha \cos 2\pi ft$? Ce signal sert à moduler légèrement la fréquence F_0 (plus élevée, avec $F_0 / f > 10$) d'une onde électromagnétique dite « porteuse », de tension $u(t) = U_0 \cos(2\pi F(t) t)$ et dont la fréquence varie au cours du temps autour de la valeur moyenne $F(t) = F_0(1 + \alpha \cos 2\pi ft)$. Quelle valeur minimale faut-il donner à F_0 ? Quelle est la longueur d'onde correspondante, à comparer à la longueur d'un câble qui relie l'antenne réceptrice du faisceau hertzien au téléviseur ?

67. Pourquoi les communications dans l'eau de mer ne se font-elles pas à l'aide d'ondes hertziennes comme dans l'air ? Quel type d'ondes est utilisé à la place ?

68. À quelle condition les résultats sur l'effet de peau montrés pour un conducteur plan restent-ils valables pour un conducteur de géométrie différente ?

69. Pour fabriquer un guide d'onde rectangulaire pour ondes centimétriques, est-il nécessaire de prendre les parois en métal plein ?
Ces parois ont une conductivité très grande, mais finie ; quelle en est la conséquence la plus importante ?

70. Dans le cas d'une onde hertzienne stationnaire (superposition d'une onde aller et d'une onde retour obtenue par réflexion sous incidence nulle sur un conducteur plan parfait), on constate que la densité d'énergie moyenne de l'onde stationnaire est le double de celle de l'onde progressive et que l'intensité de l'onde stationnaire est nulle (elle ne se propage plus). On affirme souvent que « cela est bien normal puisque l'onde stationnaire est constituée de la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens inverse ». À cela près que les grandeurs énergétiques ne sont pas linéaires, mais quadratiques (donc non additives) ; que faut-il en penser précisément ?

71. Comment protège-t-on un studio de radio des ondes électromagnétiques extérieures ?

72. Comment peut-on comprendre qualitativement la notion de pression de radiation ? Citer des exemples d'application.

73. Comment s'effectue la transmission d'une émission de radio (donc acoustique) d'un point du territoire à l'autre ?

74. En voiture, sur de longues distances, la fréquence de réception d'un poste radio varie d'un endroit à un autre ; pour quelle raison ?

75. Comment expliquer que dans une tige métallique de longueur l (donc un circuit ouvert !) servant d'antenne, il puisse circuler un courant électrique ?

76. Qu'appelle-t-on diffusion Rayleigh ? Quelles en sont les caractéristiques ? Pourquoi le ciel est-il bleu, et le Soleil au couchant rouge ? En allumant un néon on devrait le voir rouge et les murs de la pièce bleu ; pourquoi n'en est-il pas ainsi ?

77. Toute particule chargée et accélérée rayonne ; citer des exemples de ce rayonnement.

78. Les fours à micro-ondes utilisent une fréquence de 2,45 GHz. Par quoi ces ondes sont-elles créées ? Pourquoi cette fréquence est-elle si précise ? À quelle longueur d'onde correspond-elle ? Le récipient contenant un aliment chauffe-t-il également ? Dans la porte, derrière la vitre, est placée une plaque métallique, dans quel but ? Le fait qu'elle soit percée de trous (pour le contrôle visuel de la cuisson) est-il gênant ?

79. Pour la 2G, la téléphonie mobile GSM (Global System for Mobile communication) utilisait (elle est en voie de disparition) pour communiquer avec les antennes-relais des fréquences de 900 MHz (2 W), et en cas de saturation, les appareils bibandes commutaient à 1800 MHz (1 W), et pour la 3G la norme UMTS (Universal Mobile Telecommunications System) des smartphones fonctionne à 2100 MHz (0,125 W) ; à quelles longueurs d'onde cela correspond-il ?

Pourquoi la gamme des 2400 MHz correspondant aux WiFi et Bluetooth conduit-elle à des inquiétudes ?

Que signifie l'indice DAS des téléphones portables ou smartphones ?

Exercices

80. Superposition de deux ondes obliques

Une OPPM de champ $\vec{E}_1$ d'amplitude E_0, de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_z$, se propage dans le vide suivant la direction de vecteur unitaire $\vec{n}_1\left(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0\right)$.

a) Donner l'expression du champ complexe $\underline{\vec{E}}_1$ en fonction, entre autres, des coordonnées cartésiennes du point M.

On lui superpose une deuxième onde de champ $\underline{\vec{E}}_2 = -E_0 \exp i\omega\left(t-\dfrac{x+y}{\sqrt{2}c}\right)\vec{u}_z$.

b) Quel est le vecteur $\vec{n}_2$ de sa direction de propagation ? Faire un dessin avec les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, et expliquer physiquement l'existence de la deuxième onde à partir de la première à l'aide d'un plan conducteur parfait.

c) Commenter la structure du champ électrique de l'onde résultante. Que crée-t-on lorsqu'on dispose un deuxième plan conducteur parfait en $y = l$?

81. Onde cylindrique

À partir d'un fil source (l'axe Oz) est émise dans le vide une onde dont le champ électrique est donné en coordonnées cylindriques par $\underline{\vec{E}} = E(r)\mathrm{e}^{i(\omega t - kr)}\vec{u}_z$.

a) Trouver le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ correspondant. Commentaires sur les champs.

b) Déterminer le vecteur de Poynting instantané $\vec{R}$, puis sa moyenne temporelle $<\vec{R}>$.

c) Quelle est la puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h ? En déduire la dépendance $E(r)$.

d) Donner l'expression de $\underline{\vec{B}}$ à grande distance (pour $r \gg \lambda$) et commenter.

82. Équation de Klein-Gordon et masse du photon

La théorie électromagnétique étendue au cas d'un photon « de masse non nulle » dans le vide conduit à l'équation de propagation du champ électrique suivante :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \eta^2\vec{E}$$

où η est un paramètre positif lié à la masse du photon.

a) En quelle unité s'exprime η ?

On cherche des solutions de l'équation précédente sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)$.

b) Trouver la relation de dispersion entre ω, k et η, et exprimer les vitesses de phase et de groupe de ces ondes en fonction de k et η ; commentaires.

c) Sachant qu'à une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ est associé un photon d'énergie $E = \hbar\omega$ et d'impulsion (ou quantité de mouvement) $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ avec $\hbar = h/2\pi$, déterminer la masse m_γ du photon prévue dans ce cas ; pour cela on indique la relation générale pour une particule relativiste de masse m : $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.

Deux trains d'ondes de longueur d'onde λ_1 et λ_2 sont émis au même instant par une source ponctuelle située à une distance L.

d) En supposant $\eta^2\lambda_1^2 \ll 1$ et $\eta^2\lambda_2^2 \ll 1$, calculer, après avoir identifié la vitesse à considérer, la différence δt des temps de réception des deux signaux en se limitant au premier ordre en η^2.

e) L'observation de certaines étoiles doubles donne $\delta t < 10^{-3}$ s pour $\lambda_1 = 0{,}4$ µm et $\lambda_2 = 0{,}8$ µm, $L = 10^3$ années-lumière. En déduire une limite supérieure pour la masse du photon et la comparer à celle de l'électron ; commentaire.
On rappelle que $\hbar = h/2\pi$ où $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s est la constante de Planck.

83. Pression de radiation corpusculaire (*)

À une onde de fréquence ν et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$ correspond un photon d'énergie $E = h\nu$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{u}_z = \hbar\vec{k}$ (en notant $\hbar = \frac{h}{2\pi}$).

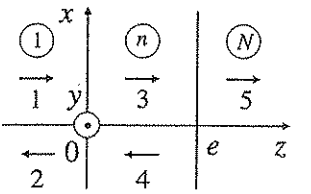
a) Un faisceau d'intensité I (suivant Oz^+) tombe normalement sur un conducteur plan parfait. À quel nombre d^2N de photons par unité de surface et de temps cela correspond-il ?

b) À partir de la quantité de mouvement transférée par un photon au conducteur (pourquoi le choc est-il élastique ?), déduire la pression P exercée par le faisceau en fonction de I et c.
Proposer une application numérique sur la base de la question 45. a) où un laser de puissance émet 400 W dans un faisceau cylindrique de 3 mm de diamètre.

c) Comment est modifié ce résultat si la surface est absorbante au lieu d'être réfléchissante ?

84. Couche antireflet

Afin de rendre antiréfléchissant un verre d'indice N $(z > e)$, ce dernier est recouvert d'une mince couche d'épaisseur e $(0 < z < e)$ et d'indice n, le tout étant placé dans l'air $(z < 0)$. Les milieux étant supposés parfaitement transparents, les indices sont pris réels.
Dans l'air arrive une onde (notée 1) de champ complexe : $\underline{\vec{E}}_1 = E_1^0 \, e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ (avec E_1^0 réel).



a) Écrire tous les champs électriques $\underline{\vec{E}}_i$ et magnétiques $\underline{\vec{B}}_i$ $(i = 1 \text{ à } 5)$, les sens de propagation pour chaque milieu étant numérotés sur la figure, en prenant, sauf pour E_1^0, des amplitudes $\underline{E}_i^0$ *a priori* complexes, en gardant k (vide) et en introduisant les indices.

b) Il y a continuité des champs aux interfaces ; en déduire les conditions de passage sur les deux dioptres en introduisant les phases $\varphi = nke$ et $\phi = Nke$.

c) On souhaite $\underline{E}_2^0 = 0$ (pas de lumière réfléchie dans l'air). Réduire les conditions de passage en donnant deux expressions de l'inconnue $r_2 = \underline{E}_4^0 / \underline{E}_3^0$ et montrer qu'elles ne sont compatibles que dans deux situations différentes conduisant chacune à des conditions à expliciter. Dans le cas de celle qui est physiquement intéressante, donner l'indice n et l'épaisseur minimale e d'un dépôt rendant antiréfléchissant un verre ordinaire d'indice $N = 1{,}5$ pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 0{,}6$ µm.

85. Oscillations et pulsation de plasma

Un plasma gazeux, globalement neutre, comprend, placés dans le vide, des ions positifs supposés fixes et des électrons de masse m et de charge $-e$ susceptibles de se déplacer. Soient n le nombre d'électrons par unité de volume du plasma au repos, supposé homogène, et $u(z,t)$ un petit déplacement d'ensemble suivant l'axe

Oz des électrons situés en z quand le plasma est au repos. L'agitation thermique et le poids sont négligés.

a) En raisonnant sur une tranche comprise entre z et $z+dz$ quand le plasma est au repos, donner la densité d'électrons n^- lors du déplacement en supposant $|\partial u/\partial z|$ petit devant 1, et en déduire la densité de charge totale ρ du plasma.

b) Montrer qu'il apparaît un champ électrique $\vec{E}$ et que sous l'action de ce champ les électrons effectuent des oscillations sinusoïdales avec la pulsation $\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$.

AN : Calculer $f_p = \omega_p/2\pi$ pour $n = 10^{11}$ m^{-3} (ionosphère) et $n = 10^{20}$ m^{-3} (décharge dans un gaz à forte densité).

86. Bilan énergétique dans un plasma (*)

Se référer aux questions de cours **19.** et **20.** pour les notations et hypothèses. Un plasma (ou gaz ionisé) est un milieu conducteur de conductivité $\underline{\sigma}$ imaginaire pure :

$$\vec{j} = \underline{\sigma}\vec{E} \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad (\text{où } \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}} \text{ est la pulsation de plasma})$$

La relation de dispersion est $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$, et on ne considère que le cas $\omega \geq \omega_p$ où la propagation d'une onde électromagnétique transversale est possible conduisant à la relation entre vitesses de phase et de groupe $v_g . v_\varphi = c^2$.

Pour simplifier les calculs sans restreindre la généralité des résultats, l'OPPM est polarisée rectilignement, soit pour le champ électrique :

$$\vec{E} = E_0 \, e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$$

a) Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à l'onde, puis calculer en moyenne temporelle les densités volumiques d'énergie de l'onde $< u_e >$ et $< u_m >$ liées aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les comparer, et en déduire la moyenne de la densité d'énergie électromagnétique totale $< u_{em} >$ en fonction, entre autre, de ω.

b) Retrouver la vitesse $\vec{v}$ d'oscillation des électrons en régime sinusoïdal forcé et calculer la moyenne de leur densité d'énergie cinétique $< u_c >$, à exprimer en fonction de $< u_e >$.

c) En déduire la moyenne de la densité d'énergie totale $< u >$. Commentaire.

d) Calculer $< \vec{R} >$ la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting, et l'exprimer en fonction de $< u >$ et de v_g.

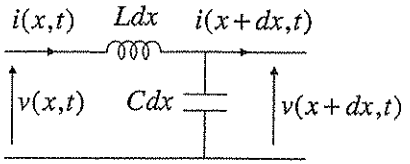
e) Montrer que la puissance volumique moyenne cédée par le champ à la matière est nulle (en régime permanent). En déduire par un raisonnement simple que l'on peut définir la vitesse de propagation de l'énergie par $\vec{v}_e = < \vec{R} > / < u >$. Donner v_e en fonction de v_g et conclure.

f) Que donnent les résultats précédents (sans faire de calculs) dans le cas $\omega < \omega_p$?

87. Câble coaxial sans perte ; impédance caractéristique

Cet exercice prend la suite de la question **1.**.

Une ligne coaxiale présente une capacité linéique C (en $F.m^{-1}$) et une inductance linéique L (en $H.m^{-1}$) avec $LC = 1/c^2$ si elle est parfaite où c est la vitesse de la lumière dans le vide.



Rappel : à la question **1.** ont été établies les relations suivantes :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

conduisant à une équation de d'Alembert (3) avec une célérité $c = 1/\sqrt{LC}$ égale à la vitesse de la lumière dans le vide.

a) Rappeler pourquoi la tension $v(x,t)$ et l'intensité du courant $i(x,t)$ sont des fonctions de l'abscisse x (en plus du temps t ce qui est habituel en régime variable) ; en déduire une justification de la taille du système étudié.

Dans la ligne est établi un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, avec $\underline{v}(x,t) = \underline{V}(x)e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(x,t) = \underline{I}(x)e^{j\omega t}$ où $\underline{V}$ et $\underline{I}$ sont des fonctions complexes de x.

b) Calculer $\frac{d\underline{V}}{dx}$, $\frac{d\underline{I}}{dx}$ et $\frac{d^2\underline{V}}{dx^2}$ en fonction de $\underline{I}$ et $\underline{V}$.

c) Justifier la recherche de $\underline{V}$ sous la forme $\underline{V}(x) = V'e^{-jkx} + V''e^{jkx}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$, et V' et V'' des constantes à interpréter.

d) En déduire $\underline{I}(x)$ en fonction de x et de $R_c = \sqrt{L/C}$, résistance caractéristique de la ligne.

AN : calculer R_c pour $L = 0{,}25\ \mu H.m^{-1}$ et $C = 44\ pF.m^{-1}$.

À l'entrée de la ligne on note $\underline{V}(x=0) = \underline{V}_0$ et $\underline{I}(x=0) = \underline{I}_0$, et à la sortie $\underline{V}(x=l) = \underline{V}_l$ et $\underline{I}(x=l) = \underline{I}_l$.

e) Traduire ces conditions, d'abord en $x = l$, puis en $x = 0$, et donner la matrice T telle que $\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \underline{V}_l \\ \underline{I}_l \end{pmatrix}$. Quel est son déterminant ? Que peut-on en déduire pour le câble ?

f) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_0$ en fonction de l'impédance de sortie $\underline{Z}_l$, de R_c et de $\tan kl$.

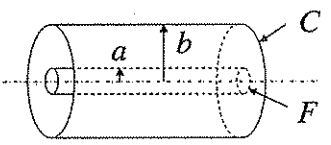
g) Comment doit-on choisir l'impédance $\underline{Z}_l$ d'un récepteur sur lequel est branchée la ligne en sortie pour que $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_l$? Donner dans ce cas les solutions $\underline{v}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$ et interpréter.

h) Sans calcul, indiquez qualitativement ce qui se passe dans chacun des deux cas suivants : la ligne est ouverte ($\underline{Z}_l = \infty$), la ligne est court-circuitée ($\underline{Z}_l = 0$).

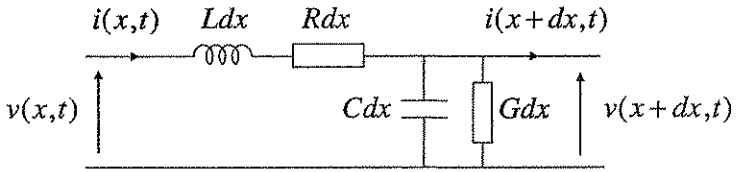
88. Câble coaxial avec faibles pertes (*)

Il est conseillé d'avoir résolu auparavant la question **1.** (ligne sans perte) et réfléchi aux question **65.** et **66.**.

Un câble coaxial est constitué d'un fil F de rayon a et d'un enroulement cylindrique tressé C de même axe Ox, de rayon b (avec $a<b$). L'espace qui sépare ces conducteurs est rempli d'un isolant en matière plastique de constante diélectrique (ou permittivité relative) ε_r. Les ondes électromagnétiques se propagent le long du câble, dans l'isolant entre C et F (à la fréquence de 10 GHz par exemple, l'épaisseur de peau d'un bon conducteur comme le cuivre est $\delta = 0{,}7$ µm ; le signal ne pénètre donc presque pas dans les conducteurs et les courants et charges sont « surfaciques »).



Un tronçon élémentaire de câble coaxial de longueur dx (très petite devant la longueur d'onde λ du signal à propager pour que les lois de l'électrocinétique soient applicables dans le cadre de l'ARQS) est représenté par le schéma ci-dessous où les quatre grandeurs L, C, R et G sont linéiques ; elles représentent respectivement l'inductance, la capacité, la résistance et la conductance linéiques du tronçon.



On donne les expressions de $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(b/a)}$ (en F.m^{-1}) et $L = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a)$ (en H.m^{-1})

a) Quelle est l'origine physique de ces quatre grandeurs ? Pour quelles raisons y a-t-il des pertes sur une ligne électrique ? Que peut-on prévoir sur l'amplitude du signal le long du câble dans le sens de la propagation ?

b) Établir l'équation (dite des télégraphistes) de la tension $v(x,t)$ sous la forme :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A\frac{\partial v}{\partial t} + Bv$$

en précisant l'expression des constantes u, A et B ; commentaires.

c) On cherche à propager des ondes progressives de la forme :

$$\underline{v}(x,t) = v_0 \exp j(\omega t - kx)$$

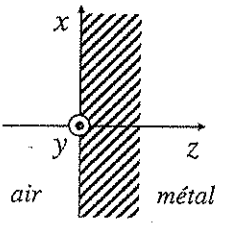
* Montrer que k est complexe et exprimer k^2 en fonction de $R + jL\omega$ et $G + jC\omega$.
* Dans le cas de faibles pertes soit $R \ll L\omega$ et $G \ll C\omega$, montrer que k se met sous la forme approchée $k = k_0 - j\alpha$ où k_0 et α sont réels (positifs), à expliciter. Réécrire la solution $\underline{v}(x,t)$ et la commenter.
* La propagation et l'amortissement sont-ils dispersifs ?

d) Exprimer de deux manières différentes l'impédance $\underline{Z} = \underline{v}/\underline{i}$ de la ligne, puis donner $\underline{Z}^2$ en fonction de $R + jL\omega$ et $G + jC\omega$. Montrer que dans le cas des faibles pertes, il est possible de la rendre réelle en imposant une condition entre les grandeurs linéiques ; commentaire.

89. Réflexion / transmission sur un conducteur réel (*)

Le demi-espace $z < 0$ est de l'air assimilé à du vide et le demi-espace $z > 0$ est occupé par un conducteur réel de type cuivre de conductivité électrique $\sigma = 0{,}57.10^8\ \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$. On pose par ailleurs $\tau = \varepsilon_0/\sigma$.

Dans le vide une OPPM polarisée rectilignement de champ électrique $\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ tombe sur le métal et y engendre une onde réfléchie et une onde transmise.



1. Les champs

a) Donner le champ magnétique $\underline{\vec{B}}_i$ de l'onde incidente.

b) Écrire les expressions des champs électrique $\underline{\vec{E}}_r$ et magnétique $\underline{\vec{B}}_r$ de l'onde réfléchie en notant $\underline{r}$ le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique.

Le champ électrique transmis est cherché sous la forme $\underline{\vec{E}}_t = \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}'z)} \vec{u}_x$ et le cours donne (à la question **27.**) $\underline{k}' = \dfrac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = c\sqrt{\dfrac{2\tau}{\omega}}$, l'épaisseur de peau.

c) Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}_t$ correspondant, où dans l'amplitude, apparaît $\underline{t}$, E_0, c et $\alpha = \sqrt{2\omega\tau}$.

2. Les coefficients de réflexion / transmission

a) Les champs sont continus en $z = 0$. En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de α (les présenter sous forme de rapports dont le dénominateur commun est $1 + \alpha - i$) ; commentaires. Vers quelles valeurs tendent-ils dans la limite du conducteur parfait ?

b) Calculer α pour le cuivre à une fréquence hertzienne $f = 320$ MHz et en déduire l'expression approchée (à l'ordre 1 en α) du coefficient de réflexion $\underline{r}$ (sous la forme $a + ib$). Quel est alors le déphasage φ de l'onde réfléchie sur l'onde incidente ? Montrer que tout se passe comme si l'onde incidente, à la célérité dans le vide, faisait un aller-retour dans le métal sur une profondeur z_p à déterminer. Interpréter. Calculer numériquement z_p.

c) Calculer les trois vecteurs de Poynting moyens $<\vec{R}_i>$, $<\vec{R}_r>$ et $<\vec{R}_t>$, puis définir et exprimer en fonction de α (sans le supposer petit) les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie. Établir et expliquer la relation simple entre R et T. Montrer que l'expression approchée de T, compte tenu du fait que $\alpha \ll 1$, s'exprime très simplement en fonction de α.
AN : Calculer T pour le cuivre à une fréquence $f = 320$ MHz et commenter.

3. Application à une cavité électromagnétique

On place un second plan conducteur, identique au premier, et parallèlement à ce dernier à une abscisse $z = -d$ (où $d > 0$).

a) Rappeler (*sans démonstration*) l'expression de la plus petite valeur de d permettant l'existence d'une onde stationnaire dans la cavité (qui devient alors résonante).

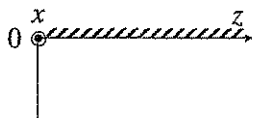
AN : calculer d_{min} pour $f = 320$ MHz. On garde $d = d_{min}$ par la suite.

b) À l'instant $t = 0$ le générateur d'ondes est coupé ; que devient le système dans la cavité ?

Estimer le nombre N de réflexions nécessaires pour que les pertes énergétiques deviennent importantes.

c) Estimer le temps t_e nécessaire pour cela. Ce résultat est-il numériquement surprenant ?

90. Étude simplifiée d'un guide d'onde



Deux plans métalliques parfaitement conducteurs en $y = 0$ et $y = l$ délimitent un « guide d'ondes » de longueur infinie suivant Oz, dans lequel règne le vide ; $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ désignent les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy, Oz.

On se propose d'étudier la propagation dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω, dont le champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \sin(k_y y)\, e^{i(\omega t - k_z z)}\, \vec{u}_x$$

a) Donner les caractéristiques du champ électrique de cette onde dans le vide.

b) À quelle équation de propagation satisfait ce champ ? En déduire la relation de dispersion (on note $k = \omega / c$ dans le vide) ? Que traduit-elle ?

c) Montrer que l'on peut obtenir une telle onde en superposant deux ondes planes progressives obliques de vecteurs d'onde $\vec{k} = \pm k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$; interpréter.

d) Le champ électrique ne rentrant pas dans les conducteurs parfaits, on admet qu'il est nul sur les plans $y = 0$ et $y = l$. Montrer que k_y est quantifié et qu'il intervient un nombre entier n non nul (supposé positif). À chaque valeur de n correspond un « mode » de propagation. Quelle analogie peut-on évoquer ? Décrire le type d'onde auquel on aboutit. Faire un schéma représentant le mode fondamental $n = 1$.

e) Exprimer k_z en fonction de ω, c, n et l, et en déduire qu'il existe une fréquence de coupure $f_{c,n}$ (dépendant du mode) en dessous de laquelle il n'y a plus propagation.

AN : Sachant que $f_{c,1} = 2{,}5$ GHz, calculer l correspondant.

f) Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g de l'onde en fonction de c et du rapport $f_{c,n} / f$ (f est la fréquence de l'onde).

AN : Calculer v_φ et v_g pour $f = 2 f_{c,1}$ lorsque $n = 1$.

g) Les ondes obliques de la question c) se propageant en zigzag à l'intérieur du guide sont inclinées d'un angle $\pm\alpha$ sur l'axe Oz. Faire un schéma et déterminer $\cos\alpha$, d'abord en fonction de k_z et k, puis à l'aide du rapport $f_{c,n}/f$. En déduire les vitesses v_g et v_φ en fonction de c et $\cos\alpha$, puis proposer une interprétation géométrique de la relation $v_g < c < v_\varphi$.

91. Effet de peau sur un conducteur cylindrique (*)

Un conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon a possède une conductivité σ réelle aux fréquences envisagées. Un générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω, parallèle à Oz et qui dans le conducteur est cherché sous la forme d'un champ non uniforme $\underline{\vec{E}} = \underline{E}(r)\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u}_z$ avec $\underline{E}(r=a) = E_0$, valeur en surface.

Le champ $\underline{\vec{E}}$ dans le conducteur vérifie l'équation de diffusion $\Delta\underline{\vec{E}} - \mu_0\sigma\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \vec{0}$ établie en ARQS à la question **26.**.

a) Montrer qu'une solution du type : $\underline{\vec{E}} = E_0\exp\left[-(1+i)(a-r)/\delta\right]\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u}_z$ convient si $r \gg \delta$, r étant la distance d'un point du conducteur à l'axe et δ une grandeur homogène à une longueur à exprimer en fonction de μ_0, σ et ω.

On donne en coordonnées cylindriques : $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$

b) Interpréter physiquement la solution proposée. Quelle signification peut-on donner à δ ? Tracer l'amplitude réelle E en fonction de r en admettant que $\underline{\vec{E}}$ est négligeable pour r de l'ordre ou inférieur à δ.

AN : Expliquer pourquoi un fil de cuivre ($\sigma = 5{,}8.10^7$ S.m^{-1}) de 1 mm de diamètre convient à la transmission de la fréquence domestique ($f = 50$ Hz) ainsi qu'à celle des basses fréquences de l'électrocinétique / électronique en TP.

Ce moyen convient-il à la transmission des fréquences radio ? Expliquer et justifier le nom d'épaisseur de peau donné à δ dans ce cas.

c) Évaluer la puissance moyenne $< P >$ dissipée par effet Joule dans un tronçon de longueur l de ce conducteur en fonction de σ, E_0, l, a et δ dans le domaine de fréquence où $\delta \ll a$; on donne $\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^{2r/\delta}\,r\,dr \approx \frac{a\delta}{2}\mathrm{e}^{2a/\delta}$ pour $\delta \ll a$. Commenter ce résultat.

d) Calculer l'intensité complexe totale $\underline{I}$ et en déduire $< I^2 >$ en fonction de σ, E_0, a et δ ; on donne $\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^{(1+i)r/\delta}\,r\,dr \approx \frac{a\delta}{1+i}\mathrm{e}^{(1+i)a/\delta}$ pour $\delta \ll a$. En déduire la résistance R de ce tronçon en fonction de δ, a et R_0, sa résistance en courant continu ; commentaire.

92. Durée de vie d'un état excité

La puissance moyenne rayonnée par un dipôle oscillant d'amplitude p_0 à la pulsation ω est donnée par $< P >= \dfrac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$.

a) Vérifier que les conditions d'application de cette formule sont satisfaites lorsqu'il s'agit d'étudier le rayonnement (émission de lumière) d'un atome et exprimer cette puissance en fonction du rayon atomique r_a.

b) Expliquer en quoi les deux points de vue de l'électrodynamique classique et de la mécanique quantique sont *a priori* contradictoires ; comment peut-on les concilier ? En déduire par un calcul simple une estimation de la durée de vie τ d'un état excité assimilée à la durée de l'émission d'un photon d'énergie $E = h\nu$.

Travaux pratiques

93. Quelle expérience simple peut-on mettre en avant pour prouver le caractère vectoriel de la lumière ?

94. Câble coaxial

L'étude théorique du câble coaxial menée aux questions **87.** et **88.** donne lieu à des manipulations simples en TP où l'on dispose d'un câble de 100 m enroulé sur une bobine, d'un générateur à impulsions (fines) dans la gamme de fréquence du MHz et d'un oscilloscope avec un balayage important (calibre 0,5 µs/div).

- Comment s'y prendre pour déterminer la résistance caractéristique R_c de la ligne ? Les mesures fournissent $R_c \approx 75\ \Omega$.
- Sur l'oscilloscope l'impulsion aller et l'impulsion retour sont séparées de 2 divisions ; quelle grandeur sur le signal électromagnétique peut-on en déduire ?
- En déduire les valeurs numériques de l'inductance linéique L, de la capacité linéique C et de la permittivité relative ε_r du diélectrique. Une mesure au palmer donne $2a \approx 0{,}80$ mm et $2b \approx 5{,}20$ mm ; ceci est-il en accord avec les résultats précédents ?

95. Émetteur d'ondes centimétriques

Un émetteur à cornet (avec diode Gun) relié à une alimentation émet des ondes électromagnétiques de fréquences 10 GHz. Cette fréquence est-elle élevée ou faible ? À quelle longueur d'onde dans le vide correspond-elle ? Un autre cornet récepteur placé dans l'axe du précédent recueille l'onde. Comment faut-il procéder pour qu'un multimètre (utilisé en TP) et branché sur le cornet récepteur détecte un signal ?

On dispose les deux cornets précédents de telle manière que leurs axes soient perpendiculaires et donc le signal s'annule ; comment le récupérer sans modifier la géométrie du système ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

L'équation de d'Alembert et ses solutions sur un exemple simple

1. L'élément en série Ldx est responsable d'une chute de tension : la loi des mailles donne $v(x,t)-v(x+dx,t)=Ldx\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}$

Un développement de Taylor à l'ordre un justifié par $dx \ll \lambda$ conduit à :

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-L\frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

L'élément en parallèle Cdx est responsable d'une fuite de courant : la loi des nœuds donne $i(x,t)-i(x+dx,t)=Cdx\dfrac{\partial v(x+dx,t)}{\partial t}$

Ici, dans le membre de droite, on écrit à l'ordre un en dx (en négligeant le terme en $(dx)^2$:

$$dx\frac{\partial v(x+dx,t)}{\partial t}\approx dx\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+dx\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}\right)\approx dx\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\text{, ce qui conduit à :}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-C\frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

$\dfrac{\partial(1)}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-L\dfrac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}=LC\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ d'après $\dfrac{\partial(2)}{\partial t}$ et le théorème de Schwarz, d'où :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0} \quad (3)$$

Ceci est une équation de d'Alembert avec une célérité $1/\sqrt{LC}=c$ égale à la vitesse de la lumière dans le vide

2. L'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ à une dimension et pour une fonction scalaire $u(x,t)$ est une équation aux dérivées partielles du second ordre aussi bien pour l'espace que pour le temps ; elle est linéaire par rapport à la grandeur u, ce qui justifie le principe de superposition (espace vectoriel). Les dérivées secondes spatiales et temporelles de l'équation de d'Alembert assurent à c la dimension d'une vitesse (d'où la notation c pour célérité) :

$$\frac{[u]}{\mathrm{m}^2}\sim\frac{1}{c^2}\frac{[u]}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow c \text{ en } \mathrm{m.s^{-1}}$$

3. La solution générale en onde progressive de l'équation de d'Alembert à une dimension est :

$$\boxed{u(x,t)=f(t-x/c)+g(t+x/c)}$$

L'écriture $u_1(x,t)=f(t-x/c)=u_1(0,t-x/c)$ signifie que le signal en x à l'instant t est le même que celui qu'il y avait en $x=0$ à l'instant antérieur $t-x/c$; il s'est donc propagé, sans se déformer, à la célérité c dans le sens des x croissants, d'où la notion d'onde progressive. Pour $u_2(x,t)=g(t+x/c)$ on a affaire à une onde progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants.

La solution générale est donc la superposition de deux ondes progressives se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants pour $u_1(x,t)$ et dans le sens des x décroissants pour $u_2(x,t)$.

À trois dimensions (dans la direction de vecteur unitaire $\vec{u}$) :

$$\boxed{u(x,t)=f(t-\vec{u}.\vec{r}/c)+g(t+\vec{u}.\vec{r}/c)}$$

En coordonnées sphériques pour un problème à symétrie sphérique :

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{r}f(t-\frac{r}{c})+\frac{1}{r}g(t+\frac{r}{c})}$$

où l'amplitude varie en $1/r$ en liaison avec la conservation de l'énergie.

4. En espace « illimité », c'est-à-dire sans obstacles. Entre la période spatiale λ et la période temporelle T (ou fréquence f) existe la relation simple :

$$\boxed{\lambda=cT=c/f}$$

traduisant que la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période.
Pour $f=3{,}8.10^{14}$ Hz, on a $\lambda=c/f\approx 790$ nm, ce qui n'est plus guère visible puisqu'au début de l'infrarouge.

5. Lorsqu'on est en espace « clos » ou « semi-clos » avec des conditions aux limites, on cherche des solutions à l'équation de d'Alembert sous la forme d'une fonction de variables séparées $u(x,t)=f(x).g(t)$ conduisant pour $f(x)$ et $g(t)$ à des fonctions trigonométriques :

$$\boxed{u(x,t)=u_0\sin(kx+\varphi)\sin(\omega t+\psi)}$$

Il n'y a alors plus de propagation de la phase, l'onde est dite stationnaire, et il apparaît spatialement une succession de ventres ($\sin(kx_p+\varphi)=\pm 1$) et de nœuds ($\sin(kx_q+\varphi)=0$). L'origine des modes est la quantification de certaines grandeurs suite aux conditions aux limites (voir la question **36.**).
La solution générale en ondes stationnaires est une superposition de tous les modes.

Structure de l'onde plane progressive monochromatique dans le vide

6. En l'absence de sources $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, les équations de Maxwell sont :

$$\text{M}\Phi \quad \text{div}\,\vec{B} = 0 \quad (1) \qquad\qquad \text{MF} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{MG} \quad \text{div}\,\vec{E} = 0 \quad (3) \qquad\qquad \text{MA} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Pour $\vec{X} = \vec{E}$ ou $\vec{B}$, calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{X} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{X} - \Delta\vec{X}$ puis appliquer les équations de Maxwell en commutant les opérateurs spatiaux et la dérivée temporelle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{E} - \Delta\vec{E} \overset{(3)}{=} -\Delta\vec{E}$$
$$\overset{(2)}{=} -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}}{\partial t} \overset{(4)}{=} -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{B} - \Delta\vec{B} \overset{(1)}{=} -\Delta\vec{B}$$
$$\overset{(4)}{=} \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}}{\partial t} \overset{(2)}{=} -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Dans une région vide de sources, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ satisfont à des équations de d'Alembert (vectorielles à trois dimensions).
Le champ électromagnétique se propage à la vitesse :

$$\boxed{c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}}$$

de la lumière dans le vide. Il n'y a pas de dispersion, c'est-à-dire que des ondes de fréquences différentes ont même vitesse de phase (c indépendante de ω). De plus, la célérité c n'est *a priori* définie par rapport à aucun référentiel particulier.

7. $\vec{E}$ est solution d'une équation de d'Alembert (linéaire comme les équations de Maxwell) ; on peut l'écrire sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ dans une direction quelconque, d'où le champ complexe de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$.
Avec cette notation les opérateurs se transcrivent en :

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv -i\vec{k}\,, \text{ et puis en } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \vec{\nabla}^2 \equiv -k^2$$

On note $k = \| \vec{k} \|$ le nombre d'onde. La solution précédente reportée dans l'équation de d'Alembert conduit à la relation de dispersion $k^2 = \omega^2 / c^2$ et dont les deux solutions $k = \pm\omega/c$ (ici des projections) rappelle que l'onde peut se propager indifféremment dans un sens ou dans l'autre.

8. $\text{div}\,\vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; -i\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \;\Rightarrow$ avec $\vec{k}$ réel, $\vec{k}.\text{Re}(\underline{\vec{B}}) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{k}.\vec{B} = 0$;
$\vec{B}$ est transversal

$\text{div}\,\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}$ est transversal (il n'a pas de composante sur la direction de propagation)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}=-i\omega\underline{\vec{B}} \Rightarrow \boxed{\vec{B}=\frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}=\frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}}$$

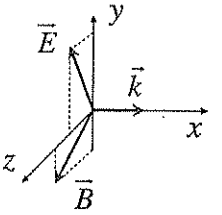
Cette « relation de structure » prouve que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase, qu'ils sont orthogonaux entre eux, $(\vec{k},\vec{E},\vec{B})$ est direct, et qu'en norme :

$$\boxed{\|\vec{B}\|=\frac{\|\vec{E}\|}{c}}$$

Cette relation issue de MF et injectée dans MA redonne la relation de dispersion $k^2=\omega^2/c^2$ (obtenue par l'équation de d'Alembert à la question précédente).

9. Suivant Ox^+, $\vec{E}\begin{vmatrix}0\\E_y\\E_z\end{vmatrix}$ et $\vec{B}=\frac{\vec{u}_x\wedge\vec{E}}{c}\begin{vmatrix}0\\B_y=-E_z/c\\B_z=E_y/c\end{vmatrix}$.

La connaissance du champ électrique d'une OPPM suffit à déterminer entièrement son champ magnétique.



Aspects énergétiques

10. Les grandeurs énergétiques sont quadratiques par rapport aux champs, la notation complexe est donc impossible si l'on souhaite leurs valeurs instantanées (la partie réelle du produit n'est pas le produit des parties réelles...) ; le retour à la notation réelle s'impose.

$$u=\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}+\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \Rightarrow \boxed{u=\varepsilon_0\vec{E}^2} \text{ car } B=\frac{E}{c}$$

Pour une OPPM se propageant suivant Ox^+, $\vec{k}=\frac{\omega}{c}\vec{u}_x$.

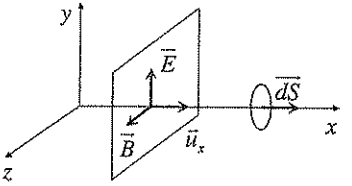
$$\vec{R}=\frac{\vec{E}}{\mu_0}\wedge\left(\frac{\vec{u}_x\wedge\vec{E}}{c}\right)=\frac{1}{\mu_0 c}\left(\vec{E}^2\vec{u}_x-(\vec{E}.\vec{u}_x)\vec{E}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{R}=\varepsilon_0 cE^2\vec{u}_x} \text{ puisque } \vec{E}.\vec{u}_x=0$$

Le fait que onde et énergie se propagent dans le même sens $(\vec{R}\,//\,\vec{u}_x)$ est évidemment satisfaisant et justifie *a posteriori* la détermination du vecteur de Poynting à la question **14.** du chapitre **2.**

L'écriture $\vec{R}=uc\vec{u}_x=u\vec{c}$ montre que la vitesse de groupe v_g vaut c, ce qui est normal en absence de dispersion (voir la question **47.**).

11. L'intensité d'une onde est définie par la moyenne temporelle de la puissance surfacique rayonnée.

La surface dS (écran) reçoit de la part de l'onde la puissance rayonnée instantanée :



$$dP_r = \vec{R}.\vec{dS} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_x.dS\,\vec{u}_x = \varepsilon_0 c E^2 dS$$

si $\vec{dS} \,//\, \vec{R}$ comme sur la figure.

Pour une OPPM de champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$, l'intensité est :

$$\boxed{I = \frac{<dP_r>}{dS} = |<\vec{R}>| = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2}$$

L'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude E_0 du champ électrique. On note également que $I = \| <\vec{R}> \|$ et s'exprime en $W.m^{-2}$.

12. Avec $f(t) = f_0 \cos \omega t$ et $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$, le produit vaut :

$$f(t)g(t) = \frac{1}{2} f_0 g_0 \left(\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\right)$$

d'où la valeur moyenne sur une période $T = 2\pi / \omega$:

$$<fg> = \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos\varphi$$

Par ailleurs $\underline{f} = f_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{g} = g_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi}$ d'où $\underline{f}\,\underline{g}^* = f_0 g_0 e^{-i\varphi}$ où $\underline{g}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{g}$, soit $\mathrm{Re}(\underline{f}.\underline{g}^*) = f_0 g_0 \cos\varphi$

D'où la relation importante :

$$\boxed{<fg> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}.\underline{g}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}^*.\underline{g})} \quad \text{et en particulier} \quad \boxed{<f^2> = \frac{1}{2}\left|\underline{f}\right|^2}$$

Application, on utilise directement les formules précédentes :

$$\boxed{<\vec{R}> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{<u> = \frac{\varepsilon_0}{4}\left|\underline{\vec{E}}\right|^2 + \frac{1}{4\mu_0}\left|\underline{\vec{B}}\right|^2}$$

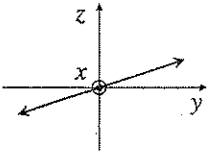
Polarisation des ondes électromagnétiques

13. Explicitons les composantes du champ de la question **9.** :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_y^0 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) = E_y^0 \cos\Phi \\ E_z = E_z^0 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) = E_z^0 \cos(\Phi + \varphi) \end{cases}$$

La polarisation de l'onde concerne l'étude de $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, différence de phase entre les deux composantes E_z et E_y. De manière générale l'extrémité du vecteur $\vec{E}(t)$ décrit au cours du temps une ellipse dans le plan Oyz.

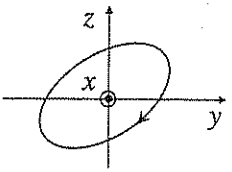
14. Si $\varphi = 0$, la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{E}(t)$ au cours du temps dans le plan Oyz est une droite et la



polarisation est dite rectiligne (les composantes E_y et E_z sont en phase, $\overline{E}$ évolue dans le premier cadran). Alors par rotation du plan Oyz autour de l'axe Ox, on peut amener Oy sur $\overline{E}$ (c'est-à-dire faire $E_z = 0$) et donc Oz sur $\overline{B}$ (c'est-à-dire faire $B_y = 0$) ; c'est l'état de polarisation représenté sur la figure de la question **11.**.

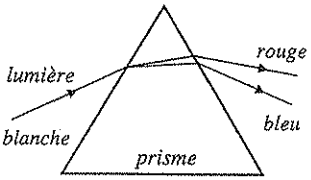
Rq : Si $\varphi = \pi$, la polarisation est également rectiligne (les composantes E_y et E_z sont en opposition de phase, $\overline{E}$ évolue dans le deuxième cadran).

15. Dans la lumière naturelle, le champ électrique a toujours deux composantes transverses, mais elles présentent un déphasage qui varie très rapidement et aléatoirement : on dit qu'elles sont incohérentes entre elles.
Dans la lumière polarisée (elliptiquement de manière générale), les deux composantes sont déphasées d'une quantité constante et mesurable $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$; lorsque $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, la polarisation est rectiligne (ellipse de petit axe nul).



■ Dispersion ; absorption

16. En optique, pour un milieu transparent, la vitesse de phase est c/n. Newton a constaté qu'un pinceau de lumière blanche qui entrait par une face du prisme ressortait « dispersé » dans un faisceau faisant apparaître les couleurs de l'arc en ciel, le bleu étant davantage dévié que le rouge. La loi de Snell-Descartes avec $n(\lambda)$ (l'indice de réfraction du verre dépend légèrement de la longueur d'onde) conduit à un angle de sortie $i(\lambda)$; la dispersion a donc lieu parce que chaque couleur a une vitesse de phase $v_\varphi = c/n(\lambda)$ différente dans le verre (le bleu va un peu moins vite que le rouge).



17. L'équation de dispersion $k(\omega)$ est obtenue lorsqu'on injecte une solution en onde progressive donnée *a priori* (du type $\underline{u}(x,t) = \underline{u}_0 e^{i(\omega t - kx)}$) dans l'équation d'onde.
Lorsque la relation $k(\omega)$ n'est pas linéaire, la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ dépend de ω et donc des ondes de fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes : alors il y a dispersion et $v_g \neq v_\varphi$.
Lorsque la relation $k(\omega)$ est complexe, alors à une pulsation ω réelle correspond un nombre d'onde k complexe, dont la partie réelle décrit la propagation de la phase et la partie imaginaire l'atténuation de l'amplitude de l'onde (absorption).

18. La vitesse de phase est $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$ et la vitesse de groupe $\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$

La vitesse de phase v_φ représente la vitesse ou célérité à laquelle se propage la phase de la composante de pulsation ω. Si v_φ est fonction de ω, donc en cas de dispersion, chaque onde d'un paquet d'ondes se propage à une vitesse différente. La vitesse de groupe v_g représente la vitesse à laquelle se déplace l'enveloppe du paquet d'ondes.
En plus des ondes lumineuses dans le prisme ci-dessus, on peut citer les ondes électromagnétiques dans un plasma, le long d'un câble coaxial réel (avec pertes) ou dans un guide d'onde (où bien que dans le vide, la dispersion apparaît à cause des conditions aux limites), les ondes hertziennes dans un conducteur réel, autant d'exemples traités dans la suite de ce chapitre.

Ondes électromagnétiques dans un plasma

19. Un plasma est un milieu ionisé, constitué d'ions positifs de charge $+e$ et d'électrons libres de charge $-e$. La densité particulaire, notée n, des cations est égale à celle des électrons (puisque les charges sont obtenues par dissociation d'atomes), assurant la neutralité électrique locale : $\rho = 0$. Dans un plasma « froid », on ignore toute agitation thermique des particules. Un plasma comme l'ionosphère est un gaz ionisé très peu dense, $n \approx 10^{11}\ \text{m}^{-3}$, ce qui permet de négliger (contrairement à ce qui se passe dans un métal où $n \approx 10^{29}\ \text{m}^{-3}$) les interactions entre électrons ou entre électrons et cations.

Inventaire des forces sur un électron libre :
- la force électrique $-e\vec{E}$,
- le poids est négligeable : $\|m\vec{g}\| \approx 10^{-29}\ \text{N} \ll \|-e\vec{E}\| \approx 10^{-23}\ \text{N}$ pour un champ faible $E \approx 10^{-4}\ \text{V.m}^{-1}$,
- la force magnétique est négligeable : $\dfrac{\|-e\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|-e\vec{E}\|} \leq \dfrac{vB}{E} = \dfrac{v}{v_\varphi} \ll 1$, car $v_\varphi \approx c$ et les électrons sont non relativistes $v \ll c$,
- les forces électromagnétiques entre électrons (ou entre électrons et cations) sont négligeables dans un plasma peu dense comme vu ci-dessus : les électrons s'y déplacent donc sans résistance.

20. Négligeant le poids et la force magnétique, la relation fondamentale appliquée à un électron donne : $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}.$$

En régime forcé par l'action du champ $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\vec{u}_y$, les électrons ont un mouvement de même pulsation $\underline{\vec{v}} = \underline{v}_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec{u}_y$; en notation complexe :

$$m(i\omega)\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{\vec{v}} = \frac{ie}{m\omega}\underline{\vec{E}}}$$

Il apparaît que champ et vitesse sont en quadrature (déphasés de $\pi/2$).

Les cations (molécules de l'atmosphère ayant perdu un électron) de charge $+e$ sont soumis à la même force, mais de masse M, d'où leur champ de vitesse :

$$\boxed{\underline{\vec{V}} = -\frac{ie}{M\omega}\underline{\vec{E}}}$$

Le vecteur densité volumique de courant est par définition la somme des contributions des électrons et des cations :

$$\underline{\vec{j}} = n(-e)\underline{\vec{v}} + n(+e)\underline{\vec{V}} = -i\frac{ne^2}{\omega}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\underline{\vec{E}}$$

Et comme $M \gg m$, la masse des cations est bien plus élevée que les électrons, les cations sont peu mobiles et de ce fait contribuent très peu à la densité de courant (on les suppose immobiles) d'où (la masse réduite est équivalente à celle de l'électron) :

$$\underline{\vec{j}} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}$$

conduisant par $\boxed{\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}}$ à une conductivité imaginaire pur :

$$\boxed{\underline{\sigma} = -i\frac{ne^2}{m\omega} = -i\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}} \quad \text{avec } \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}$$

indiquant que les champs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature.

21. La puissance cédée par le champ à la matière est $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}$; cette relation est forcément écrite en notation réelle, on ne peut donc pas simplement y traduire la loi d'Ohm locale $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}$ puisque la conductivité $\underline{\sigma}$ est imaginaire pur ($\underline{\sigma} \in i\mathbb{R}$). En revanche, en moyenne temporelle :

$$<\frac{dP}{d\tau}> = <\vec{j}.\vec{E}> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\sigma}\,|\underline{\vec{E}}|^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\sigma}\right)|\underline{\vec{E}}|^2 = 0$$

En régime forcé (une fois le régime transitoire terminé), le champ ne fournit pas d'énergie aux électrons, ce qui est conforme aux hypothèses ci-dessus puisque les électrons se déplacent sans résistance (il n'y a pas d'effet Joule dans un plasma) ; l'onde peut donc s'y propager sans s'amortir, le plasma est transparent aux ondes électromagnétiques (tout au moins pour des ondes hertziennes de fréquence suffisamment élevée).

22. Rappelons qu'au passage de l'onde, le plasma reste localement neutre $\rho = 0$; ceci est lié au type d'onde recherché $\underline{\vec{E}} = E(x,t)\vec{u}_y$, transversale, et donc sur un petit volume de plasma contenant des électrons en mouvement suivant Oy, il y a pendant un intervalle de temps donné autant d'électrons qui y rentrent par le bas que d'électrons qui en sortent par le haut, laissant le petit volume neutre. Et d'ailleurs cette forme de champ $\underline{\vec{E}} = E(x,t)\vec{u}_y$ conduit directement à $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = 0$, ce qui rend l'ensemble cohérent.

On peut s'en convaincre autrement par l'équation de conservation de la charge, $\text{div}\ \underline{\vec{j}} + \frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} = 0$, qui avec la loi d'Ohm et l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\ \underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0}$ conduit à $(\frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0} + i\omega)\underline{\rho} = i(-\frac{\omega_p^2}{\omega} + \omega)\underline{\rho} = 0$; la parenthèse ne s'annule que pour $\omega = \omega_p$, la pulsation de plasma, ce qui est exclu ici, d'où $\rho = 0$.

Les équations de Maxwell pour des champs en notation complexe de convention $e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ avec substitution directe $\partial / \partial t \to i\omega$ pour ne pas mélanger les notations temporelles et fréquentielles (dans $\underline{\sigma}$) s'écrivent :

$$\text{MΦ :}\ \text{div}\ \underline{\vec{B}} = 0 \quad (1), \quad \text{MG :}\ \text{div}\ \underline{\vec{E}} = 0 \quad (3)\ \text{(milieu localement neutre)}$$

$$\text{MF :}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad (2)$$

La relation constitutive $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}\underline{\vec{E}}$ associée à MA donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{B}} = (-i\frac{\omega_p^2}{c^2\omega} + \frac{i\omega}{c^2})\underline{\vec{E}} \quad (4)$$

Effectuons le calcul classique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{E}} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \underline{\vec{E}} - \Delta \underline{\vec{E}} \overset{(3)}{=} -(i\underline{k})^2 \underline{\vec{E}} = \underline{k}^2 \underline{\vec{E}}$$

$$\overset{(2)}{=} -i\omega \overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{B}} \overset{(4)}{=} (-\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2})\underline{\vec{E}}$$

d'où l'équation de dispersion :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$$

La relation $\underline{k}(\omega)$ n'est pas linéaire d'où la dispersion ; la condition $n = 0$ (absence de plasma), soit $\omega_p = 0$, redonne $k = \omega / c$ (le vide).

AN : Pour $n \approx 10^{11}\ \text{m}^{-3}$, on calcule $f_p = \omega_p / 2\pi \approx 3\ \text{MHz}$, soit $\lambda_p \approx 100\ \text{m}$.

23. Pour $\omega < \omega_p$, $\underline{k}^2 < 0$, $\underline{k} = -i\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ imaginaire pur, le signe – étant justifié par le fait que l'amplitude ne peut devenir infinie lorsque x augmente. En notant $\underline{k} = -ik''$ avec k'' réel positif, on a $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0\, e^{-k''x} \cos \omega t\ \vec{u}_y$.

Cette onde ne se propage pas (elle n'est pas progressive) ; elle fait du « sur place » et n'est pas stationnaire au sens habituel du terme (ni nœuds ni ventres) ; on dit qu'elle est évanescente et son amplitude diminue sur une distance caractéristique $\delta(\omega) = 1 / k''$ (soit en $e^{-x/\delta}$).

Son champ magnétique (obtenu par Maxwell-Faraday) est :

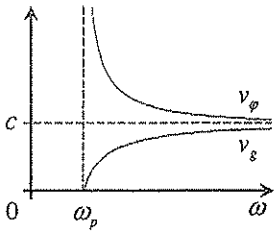
$\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}\ .e^{-k'x} \sin \omega t\ \vec{u}_z$, en quadrature avec $\vec{E}$ ce qui assure un vecteur de Poynting moyen $<\vec{R}> = \vec{0}$; en moyenne l'onde évanescente ne transporte pas d'énergie.

Envoyée depuis le sol, une OPPM ne peut pénétrer dans l'ionosphère si sa fréquence est trop faible ($f < f_p$) ; elle s'y réfléchit comme sur un miroir (question **56.**).

24. Pour $\omega > \omega_p$, $\underline{k}^2 > 0$, $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ réel choisi positif pour assurer une propagation vers les x croissants. On a cette fois une véritable OPPM :

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - k(\omega)x)\ \vec{u}_y$$

vitesse de phase : $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} > c}$



vitesse de groupe, différentier $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$,

$$2k\,dk = 2\omega d\omega / c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} < c}$$

À haute fréquence ($\omega \gg \omega_p$), $v_\varphi \approx v_g$ et la dispersion disparaît ; en effet, l'inertie des électrons fait qu'ils ne bougent plus et le milieu se comporte alors comme du vide.

Envoyée depuis le sol, une OPPM peut pénétrer dans l'ionosphère (si sa fréquence est suffisante $f > f_p$) qui devient alors transparente (voir la question **56.**) et se comporte globalement comme un filtre passe-haut.

Effet de peau sur un conducteur réel (en ARQS)

25. On peut chercher le champ transmis dans le conducteur sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{E}'_0\, e^{i(\omega t - \underline{k} z)}\ \vec{u}_x$$

- même pulsation ω que l'onde incidente car les relations de passage sont vraies $\forall t$,
- le changement de milieu, donc de vitesse de phase et de longueur d'onde, conduit à $\underline{k} \neq k_0$; par ailleurs la dissipation d'énergie (par effet Joule des courants induits dans le conducteur) amène à prévoir $\underline{k}$ complexe,
- la transmission air / métal peut s'accompagner d'une amplitude $\underline{E}'_0$ différente et *a priori* complexe à cause d'un éventuel déphasage,
- même état de polarisation car le métal est homogène isotrope.

26. * La loi d'Ohm s'écrit dans le conducteur : $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = \sigma \operatorname{div} \vec{E}_t$; l'équation de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss donnent alors :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ soit } \rho(t) = \rho_0 \, e^{-t/\tau} \text{ avec } \underline{\tau = \varepsilon_0 / \sigma \approx 10^{-19} \text{ s}} \text{ pour le cuivre}$$

Ceci signifie qu'un supplément de charge ρ_0 en un point donné du métal s'écoule en un temps caractéristique τ (en fait ce temps doit être ramené à 10^{-14} s car en deçà, la loi d'Ohm n'est plus applicable). On peut donc poser $\rho = 0$ (ce qui est compatible avec le fait que $\vec{E}_t$ soit transverse). Il est possible aussi de faire un raisonnement en régime sinusoïdal forcé comme en **22.**).

* Le rapport du courant de déplacement au courant de conduction dans l'équation de Maxwell-Ampère est :

$$\frac{\| \vec{j}_D \|}{\| \vec{j} \|} = \frac{\varepsilon_0 \| \partial \vec{E}_t / \partial t \|}{\sigma \| \vec{E}_t \|} = \frac{\varepsilon_0 \| i\omega \underline{\vec{E}}'_0 \|}{\sigma \| \underline{\vec{E}}'_0 \|} = \omega\tau \ll 1$$

pour $\omega \ll 10^{14}$ rad.s^{-1} (ondes hertziennes) ;
ceci constitue l'approximation des régimes quasi stationnaires notée ARQS.

Les équations de Maxwell avec la loi d'Ohm se réduisent alors dans le conducteur à :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B}_t = 0}, \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}}, \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{E}_t = 0} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{B}_t = \frac{1}{\tau c^2} \vec{E}_t}$$

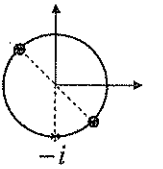
Le calcul de $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E}_t = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{E}_t - \Delta \vec{E}_t$ conduit ensuite à :

$$\boxed{\Delta \vec{E}_t - \frac{1}{\tau c^2} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} = \vec{0}}$$

Cette équation à la dérivée partielle temporelle première n'est pas une équation de d'Alembert, mais une équation de type « diffusion » (étudiée au chapitre **10**).

27. La relation de dispersion est obtenue en injectant $\vec{E}_t = \underline{\vec{E}}'_0 e^{i(\omega t - \underline{k} z)} \vec{u}_x$ dans cette équation : $-\underline{k}^2 - \frac{i\omega}{\tau c^2} = 0 \Rightarrow \underline{k} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\tau c^2}}$;

Pour les racines de $-i$, on peut passer par les exponentielles complexes ; sur la figure, il apparaît clairement qu'il s'agit des deux points sur le cercle trigonométrique et la 2e bissectrice !



On choisit $\operatorname{Re}(\underline{k}) > 0$ pour avoir une propagation vers les z croissants, alors :

$$\boxed{\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}} \text{ avec } \boxed{\delta = c\sqrt{\frac{2\tau}{\omega}}}$$

Le champ s'écrit aussi :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_t = \underline{\vec{E}}'_0 \, e^{-z/\delta} \, e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x}$$

C'est celui d'une onde progressive dont l'amplitude s'amortit d'un facteur e sur une profondeur δ de ce fait appelé « profondeur de pénétration ».

Rq : Le choix de $\underline{k} = -\dfrac{1-i}{\delta}$ ne correspond pas à une onde « amplifiée », mais à une onde atténuée se propageant dans l'autre sens !

La vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{k})} = \omega\delta$ soit $\boxed{v_\varphi = \sqrt{2\omega\tau}\, c}$ dépend de ω ; il y a dispersion, c'est-à-dire que le conducteur n'a pas le même comportement vis-à-vis d'ondes de fréquences différentes.

Pour 100 MHz (fréquence des ondes radio dans la bande FM), $\delta \approx 6$ µm appelé « épaisseur de peau » ; par ailleurs $\lambda_0 = 3$ m, soit $\delta/\lambda_0 \approx 2.10^{-6}$ et le rapport des vitesses $\alpha = v_\varphi / c \approx 10^{-5}$: l'onde se propage « lentement » et s'amortit « vite ». Le coefficient de transmission en énergie (voir la question **89.**) est très faible ($T \approx 3.10^{-5}$), le métal se comporte donc comme un excellent réflecteur pour les ondes hertziennes.
Pour 50 Hz (la fréquence du secteur), $\delta \approx 1$ cm, ce qui explique l'uniformité de la densité volumique de courant sur la section d'un fil électrique.

Réflexion (sous incidence nulle) sur un conducteur plan parfait

28. Un conducteur parfait est un conducteur dont l'épaisseur de peau δ tend vers zéro ; dans le domaine des ondes hertziennes, $\delta/\lambda_0 \ll 1$ est assuré pour des conductivités σ (très grandes) des métaux ordinaires ; l'hypothèse du métal parfait consiste alors à supposer sa conductivité électrique infinie. Les champs n'ayant d'existence que sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ, ne pénètrent donc pas dans le métal : macroscopiquement $\vec{E}_t = \vec{0}$ et $\vec{B}_t = \vec{0}$.

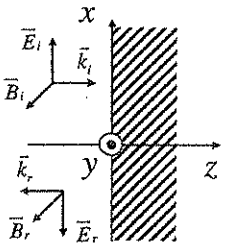
29. Le plan $z = 0$ sépare l'air ($z < 0$) du conducteur parfait ($z > 0$). Si l'onde incidente a un champ électrique $\underline{\vec{E}}_i = E_0 \, e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$, l'onde réfléchie un champ $\underline{\vec{E}}_r = \underline{r} E_0 \, e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$, la continuité $\forall t$ de la composante tangentielle en $z = 0$ donne avec $\vec{E}_t = \vec{0}$:

$$\underline{\vec{E}}_i(0,t) + \underline{\vec{E}}_r(0,t) = \underline{\vec{E}}_t(0,t) \;\Rightarrow\; \underline{r} = -1 :$$

le champ électrique se réfléchit totalement en opposition de phase en $z = 0$.
On note que $\sigma = 0$, pas de densité superficielle de charge, le conducteur reste localement neutre.

Alors $\underline{\vec{B}}_i = \dfrac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_i}{c} = \dfrac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$ et $\underline{\vec{B}}_r = \dfrac{-\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_i}{c} = \dfrac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$ montrent que le champ magnétique se réfléchit totalement en phase en $z = 0$.

La figure ci-contre représente les champs en $z=0$.



La discontinuité en $z=0$ de la composante tangentielle du champ magnétique rend compte de l'apparition d'un courant surfacique de densité $\vec{j}_S$ donnée par :

$$\vec{0}-\left(\underline{\vec{B}}_i(0,t)+\underline{\vec{B}}_r(0,t)\right)=\mu_0\underline{\vec{j}}_S\wedge\vec{u}_z \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\underline{\vec{j}}_S(t)=2\varepsilon_0 cE_0\,e^{i\omega t}\,\vec{u}_x}$$

Bien sûr $\vec{j}_S \,//\, \vec{E}_i$, en effet c'est le champ électrique incident qui met les électrons libres de la surface du conducteur en mouvement suivant Ox. Cette nappe de courant harmonique engendre à son tour, par rayonnement, une onde plane qui est justement l'onde réfléchie.

30. L'onde résultante pour $z<0$ est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie : $\underline{\vec{E}}(z,t)=\underline{\vec{E}}_i(z,t)+\underline{\vec{E}}_r(z,t)$ et $\underline{\vec{B}}(z,t)=\underline{\vec{B}}_i(z,t)+\underline{\vec{B}}_r(z,t)$

Après calcul puis passage en notation réelle :

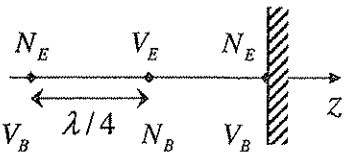
$$\boxed{\vec{E}(z,t)=2E_0\sin kz\sin\omega t\,\vec{u}_x} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(z,t)=\frac{2E_0}{c}\cos kz\cos\omega t\,\vec{u}_y}$$

L'onde résultante, comme superposition de deux OPPM de même amplitude et se propageant en sens inverse, a une structure d'onde stationnaire, avec une succession de nœuds et de ventre.

Les nœuds du champ électrique (endroits où le champ est nul $\forall t$) sont positionnés aux points d'abscisse z_p donnés par $\sin kz_p=0$ soit $z_p=-p\dfrac{\lambda}{2}$ ($p\in\mathbb{N}$) car $z<0$ et $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$; ils sont distants de $\dfrac{\lambda}{2}$ à partir de la surface $z=0$ du métal.

Les ventres du champ électrique (endroits où l'amplitude du champ est maximale) sont donnés par $\sin kz'_p=\pm1$ ce qui les positionne entre les nœuds.

- à t fixé, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature spatiale et donc les nœuds de $\vec{E}$ (N_E) distant de $\lambda/2$ correspondent aux ventres de $\vec{B}$ (V_B) et inversement.
- à z fixé, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature temporelle et non plus en phase comme pour une OPP.



La densité d'énergie électromagnétique $u=\varepsilon_0\vec{E}^2/2+\vec{B}^2/2\mu_0$ de l'onde résultante a pour moyenne temporelle $<u>=\varepsilon_0E_0^2$; elle est indépendante du point considéré et vaut le double de celle d'une OPPM.

Le vecteur de Poynting $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0 = \varepsilon_0 c E_0^2 \sin 2kz \sin 2\omega t \, \vec{u}_z$ a pour moyenne temporelle $<\vec{R}> = \vec{0}$ (les champs sont en quadrature) ; globalement l'énergie ne se propage plus (voir les précisions à la question **70.**).

31. Pour respecter les conditions aux limites du champ électrique (nul sur un conducteur parfait), la position $z = -l$ du second plan doit coïncider avec un nœud de champ électrique, les deux miroirs doivent donc être distants d'un multiple entier de demi-longueurs d'onde ; on peut écrire indifféremment :

$$\boxed{l_n = n\frac{\lambda}{2}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

si λ est imposée alors l est ajustée et ne peut prendre que certaines valeurs discrètes l_n, ou bien

$$\boxed{l = n\frac{\lambda_n}{2}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

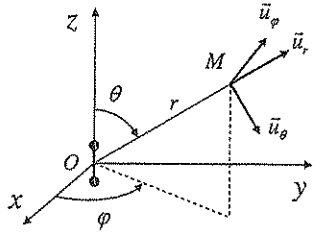
si l est imposée alors λ est ajustée et ne peut prendre que certaines valeurs discrètes λ_n.

Les ventres de l'onde stationnaire ont dans ces cas une amplitude maximale, on dit que l'onde stationnaire devient résonante et on parle des modes de la cavité pour les différentes valeurs de n comme sur une corde vibrante fixée aux deux extrémités.
Si cette condition n'est pas vérifiée, la superposition des ondes issues des rapides allers et retours d'une onde entre les deux plans conduit à une résultante quasi nulle.

Rayonnement du dipôle oscillant

32. Hypothèse 1 : Le point M d'observation est très éloigné du centre O du dipôle variable $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \, \vec{u}_z$ vis-à-vis de la taille a de ce dernier (les charges opposées sont en $z = \pm a/2$) :

$$\boxed{OM = r \gg a}$$



C'est l'hypothèse dipolaire classique qui justifie les développements limités en a/r.

Hypothèse 2 : La longueur d'onde λ du rayonnement émis (le dipôle oscillant est périodique de période T avec $\lambda = cT$) est très grande devant la taille a du dipôle :

$$\boxed{\lambda \gg a}$$

Cette hypothèse est une conséquence de la faible vitesse devant c des charges mobiles du dipôle oscillant. Elle entraîne que sur la longueur a du conducteur le courant variable I est uniforme, c'est-à-dire indépendant du point source P.

Les hypothèses précédentes ne concernent pas λ et r entre eux, il faut ici tenir compte de la propagation (négligeable seulement en ARQS lorsque $r \ll \lambda$, en

champ proche). À grande distance (champ lointain), on a en revanche $r \gg \lambda$, d'où finalement la double inégalité entre les trois échelles de longueur :

$$\boxed{a \ll \lambda \ll r}$$

On peut citer :

- un atome d'une lampe spectrale émettant dans le visible comme en TP où le dipôle variable est constitué du doublet dynamique proton-électron :
$$a \approx 0{,}1 \text{ nm} \ll \lambda \approx 0{,}5 \text{ µm} \ll r \approx 30 \text{ cm}$$
- une petite antenne émettant des ondes hertziennes où le dipôle variable est constitué de l'excédent et du déficit de charge aux extrémités d'une tige métallique (l'antenne) parcourue par un courant alternatif de haute fréquence :
$$a \approx 1 \text{ cm} \ll \lambda \approx 1 \text{ m} \ll r \approx 100 \text{ m}$$

33. Le champ rayonné en un point M est, en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \alpha \frac{\sin\theta}{r} \cos\omega(t - r/c)\vec{u}_\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\alpha}{c}\frac{\sin\theta}{r}\cos\omega(t - r/c)\vec{u}_\varphi = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}}$$

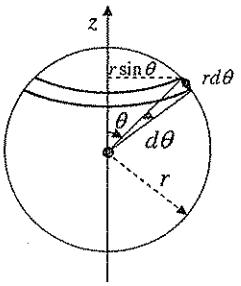
où le coefficient α est proportionnel à p_0 et ω^2 ($\alpha = -\mu_0 p_0 \omega^2 / 4\pi$). Il s'agit d'une onde sphérique progressive, les champs décroissent en $1/r$ (pour le dipôle électrostatique en $1/r^3$!), de célérité c, se propageant $\forall M$ le long de la direction radiale $\vec{u}_r$.

Elle a une structure transversale, est polarisée rectilignement, $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.

Les champs sont orthogonaux, varient en phase et $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ comme une onde plane progressive (OPP) dans le vide : l'onde a localement une structure d'OPP.

34. Le vecteur de Poynting moyen est :

$$<\vec{R}> = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\alpha^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{u}_r$$



La puissance moyenne totale est celle rayonnée à travers une sphère de rayon r :
$<P> = \iint <\vec{R}>.\overrightarrow{dS}$ soit avec $dS = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ (une couronne d'axe Oz, de rayon $r\sin\theta$ et d'épaisseur $rd\theta$), $<P> = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0 c\alpha^2$

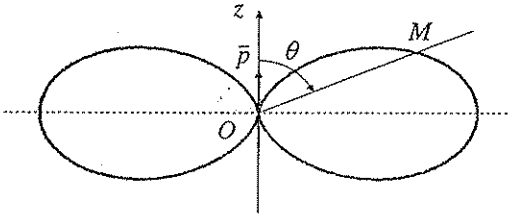
le coefficient numérique venant de $\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) d(-\cos\theta) = \frac{4}{3}$

d'où $\boxed{<P> = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}}$

Cette puissance est conservée lors de la propagation, en l'absence d'absorption, elle ne dépend pas de r : c'est l'interprétation énergétique de la décroissance des champs en $1/r$.

Le facteur $\sin^2\theta$ dans $<\overline{R}>$ traduit la directivité de l'émission du dipôle oscillant : le long de l'axe polaire $\theta = 0$ il n'y a pas de champ rayonné et il est maximal dans la direction perpendiculaire $\theta = \pi/2$; le rayonnement est qualifié d'anisotrope (différent dans des directions différentes).

Le diagramme (ou indicatrice) de rayonnement est la courbe $|<\overline{R}>| = \lambda \sin^2\theta$ en coordonnées polaires :



Applications directes du cours

Les solutions de l'équation de d'Alembert

35. La solution générale en onde progressive de l'équation de d'Alembert à une dimension est :

$$\boxed{u(x,t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)}$$

La vérification pour $u_1(x,t) = f(t - x/c)$ se fait en posant $p = t - x/c$; à l'aide des dérivées composées :

$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{df}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{df}{dp}$ et $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2 f}{dp^2}$; de même $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{df}{dp}$ et $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{dp^2}$

Attention à bien mettre une dérivée droite à $\frac{df}{dp}$ car f n'est fonction que de p.

L'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0$ est alors vérifiée sans peine et ceci pour toute fonction $f(p)$, bien sûr continue et deux fois dérivable.

La démonstration est analogue pour $u_2(x,t) = g(t + x/c)$ en posant $q = t + x/c$.

La solution générale est la superposition de deux ondes progressives se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants pour $u_1(x,t)$ et dans le sens des x décroissants pour $u_2(x,t)$.

36. Avec $u(x,t) = f(x).g(t)$, l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ s'écrit :

$$g.\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v^2} f.\frac{d^2 g}{dt^2} = 0 \quad \text{soit} \quad v^2 \frac{f''}{f} = \frac{g''}{g}$$

après avoir divisé par le produit $f.g \neq 0$:

Le membre de gauche est une fonction de x seulement et le membre de droite une fonction de t seulement ; ceci n'est possible $\forall x$ et $\forall t$ que si chaque membre est constant.
Cette constante ne peut être positive car une solution en exponentielles ne satisferait pas pour $f(x)$ les conditions aux limites $f(x=0)=f(x=l)=0$, ni pour $g(t)$ les conditions d'un régime permanent par l'existence de deux exponentielles, l'une tendant vers zéro, l'autre vers l'infini.

Avec $\frac{g''}{g}=-\omega^2$ et $\frac{f''}{f}=-\frac{\omega^2}{v^2}=-k^2$, $g(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω et $f(x)$ une fonction sinusoïdale de pulsation $k=\omega/v$ d'où :

$$\boxed{u(x,t)=u_0\sin(kx+\varphi)\sin(\omega t+\psi)}$$

Il n'y a alors plus de propagation de la phase et il apparaît spatialement une succession de ventres ($\sin(kx_p+\varphi)=\pm 1$) et de nœuds ($\sin(kx_q+\varphi)=0$).

La traduction des conditions aux limites $f(x=0)=f(x=l)=0$ conduit à :

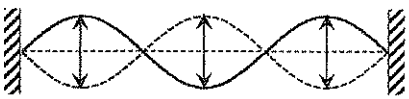
$$\varphi=0 \quad \text{et} \quad \boxed{k_n=\frac{n\pi}{l}}$$

L'origine des modes $n\in\mathbb{N}^*$ est la quantification de certaines grandeurs suite aux conditions aux limites. La solution générale en ondes stationnaires est une superposition de tous les modes.

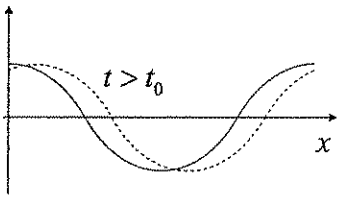
Application : Si u représente la composante tangentielle E du champ électrique, le calcul précédent avec $E(0)=E(l)=0$ correspond à celui d'une onde électromagnétique entre deux plans métalliques parfaits comme vu à la question **31.** (en remplaçant ici x par z, et l par d).

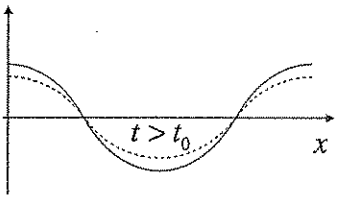
La condition précédente avec $k_n=\frac{2\pi}{\lambda_n}$ permet de retrouver $\boxed{l=n\frac{\lambda_n}{2}}$

Pour $n=3$ $(l=3\lambda_3/2)$, entre les 2 nœuds aux extrémités se trouvent 3 ventres qui oscillent en faisant du « sur place » et sont séparés par 2 nœuds fixes.



37. Sans autre précision, cette question n'a guère de sens. En effet, une onde est un phénomène spatio-temporel et le graphe donné représente $u(x,t_0)$ en fonction de la variable spatiale x, mais à un instant t_0 fixé. Il faut donc se poser la question de savoir comment évolue ce graphe à un instant ultérieur mais proche $t>t_0$.





Sur les graphes ci-dessus, la courbe d'origine (à l'instant t_0) est représentée en trait plein et la courbe marquant l'évolution (à l'instant $t > t_0$) en trait pointillé. Il apparaît alors clairement que sur le graphe de gauche, on a affaire à une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants et sur le graphe de droite, à une onde stationnaire, qui fait du « surplace » avec nœuds et ventres.

38. Prendre une onde stationnaire (OS)à un mode $u(x,t) = A\cos(kx+\varphi)\cos(\omega t+\psi)$ et transformer ce produit en somme :

$$u(x,t) = \frac{A}{2}\cos(\omega t - kx + \psi - \varphi) + \frac{A}{2}\cos(\omega t + kx + \psi + \varphi)$$

L'OS peut être considérée comme la superposition de deux OPPS de même pulsation et de même amplitude se propageant en sens inverse (cette description est fréquente pour une onde réfléchie se superposant à l'onde incidente).

Inversement, prendre une OPPS et développer le cosinus :

$$u(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi) = A\cos(kx - \varphi)\cos(\omega t) + A\sin(kx - \varphi)\sin(\omega t)$$

Elle peut ainsi être considérée comme la superposition de deux OS en quadrature spatiale et temporelle (cette description n'est pratiquement jamais utilisée ici, mais elle sert dans le cours de physique quantique où, de la superposition de deux états stationnaires donc d'énergie différentes, résulte une onde progressive.).

Ondes électromagnétiques dans le vide

39. Comme à la question **6.**, pour $\vec{X} = \vec{E}$ ou $\vec{B}$, calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{X} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\,\vec{X} - \Delta\vec{X}$ puis appliquer les équations de Maxwell en commutant les opérateurs spatiaux et la dérivée temporelle :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j}}$$

On peut faire ici l'analogie avec l'équation différentielle d'un circuit *RLC*, en régime libre lorsque le second membre est nul (donc en l'absence de générateur dans le circuit), et en régime forcé lorsqu'au second membre intervient la tension d'un générateur en série avec le dipôle.
Lorsqu'une équation différentielle (ou aux dérivées partielles) n'est pas homogène (au sens mathématique du terme), alors le second membre constitue « les termes de sources ». Il apparaît ici que les densités de charges ρ et de courants $\vec{j}$ constituent les sources du champ électromagnétique. Comme en magnétostatique et ARQS, les courants créent le champ magnétique, mais contrairement à l'électrostatique, il n'y a pas que les charges qui créent le champ électrique, mais aussi les courants variables.

Bien sûr, dans une région de l'espace où $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ satisfont aux équations de d'Alembert (vectorielles à trois dimensions) :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Équation satisfaite par la composante E_x : $\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0$.

40. C'est le choix sur l'origine de t qui le permet (car en général $z=0$ est imposé).
Les deux se propagent dans le sens des z croissants car la phase est en $\omega(t-z/c)$.

41. Il s'agit du champ d'une OPPM polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$ et se propageant suivant Oz^- (dans le sens des z décroissants) pour $k>0$. Il est solution de l'équation de d'Alembert, ce qui donne $-k^2-\dfrac{1}{c^2}(-\omega^2)=0$ soit $k=\dfrac{\omega}{c}$.

Le champ magnétique est donné par $\underline{\vec{B}}=\dfrac{-\vec{u}_z\wedge\underline{\vec{E}}}{c}=-\dfrac{E_0}{c}e^{i(\omega t+kz)}\vec{u}_y$.

L'obtention du vecteur de Poynting instantané suppose le passage en notation réelle $\vec{R}=\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}=-\varepsilon_0 cE_0^2\cos^2(\omega t+kz)\vec{u}_z$ dans le même sens que l'onde.

42. Le flux de photons est le nombre d^2N de photons qui traversent l'élément de surface dS par unité de temps dt :

$$\Phi=\frac{d^2N}{dSdt}$$

L'énergie d'un photon correspondant à une onde de fréquence ν étant donnée par la relation $E=h\nu$, l'énergie transportée par l'ensemble des d^2N photons est $d^2E=d^2N\times h\nu$; l'énergie transportée par un faisceau par unité de surface et par unité de temps est par définition l'intensité :

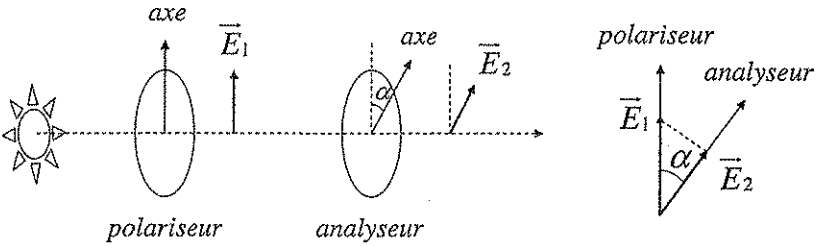
$$I=\frac{d^2E}{dSdt}=\frac{d^2N\times h\nu}{dSdt}\quad\text{soit}\quad\boxed{I=\Phi h\nu}$$

43. Il s'agit ici d'une onde longitudinale, la direction de propagation Ox^+ coïncidant avec la direction $\vec{u}_x$ du champ ; des ondes longitudinales ont été vues parmi les ondes mécaniques (par exemple pour les ondes acoustiques alors que les ondes sur une corde vibrante sont transversales).

L'unique composante E_x du champ ne dépend que de x d'où $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}=\vec{0}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; le champ $\vec{B}$ est donc statique et on peut le prendre nul en régime spatio-temporel d'onde (par inexistence d'un courant continu engendrant un champ statique).
On trouve ces ondes dans les plasmas où une perturbation longitudinale se propage à la pulsation de plasma $\omega=\omega_p$ (voir la question **85.**). Il y a alors bien un courant de conduction $\vec{j}$ (lié essentiellement au mouvement des électrons) et qui crée un champ magnétique, mais il est exactement compensé par celui créé par le courant de déplacement $\vec{j}_D=\varepsilon_0\partial\vec{E}/\partial t$ comme le montre l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\vec{j}_D)=\vec{0}$. Le champ magnétique total est bien nul (voir également la question **55.** du chapitre **2** pour $\text{div}\,\vec{E}\neq 0$).

44. Un polariseur ne transmet que les champs électriques parallèles à son axe de transmission et arrête les champs perpendiculaires à cet axe. Il transforme ainsi toute vibration lumineuse en vibration polarisée rectilignement et ceci parallèlement à son axe de transmission appelé direction de polarisation : c'est un polariseur rectiligne.
En disposant une 2ème lame (l'analyseur) derrière la 1ère (le polariseur), leurs axes faisant un angle α, et en notant $\vec{E}_1$ le champ sortant du polariseur et $\vec{E}_2$ celui sortant de l'analyseur, on a en norme $E_2 = E_1 \cos\alpha$ soit en intensité lumineuse :

$$\boxed{I_2 = I_1 \cos^2\alpha}$$ appelée loi de Malus.



Si $\alpha = \pm\pi/2$, $I_2 = 0$ il y a extinction du faisceau ; polariseur et analyseur sont dits croisés.

Étude énergétique d'une onde

45. Champ et énergie d'une onde

a) Pour une onde plane progressive le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{R} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_x$. Si l'onde est sinusoïdale d'amplitude E_0, sa valeur moyenne est en norme $< R > = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$, d'où la puissance moyenne transportée par l'onde :

$$P_r = < R > \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{8P_r}{\pi\varepsilon_0 c d^2}} \text{ soit } \underline{E_0 \approx 2.10^5 \text{ V.m}^{-1}}, \text{ ce qui est énorme.}$$

L'énergie d'un photon est $E = hc/\lambda = 2{,}8.10^{-19}$ J (= 1,8 eV) ; P_r est la puissance sur la section du faisceau d'où le flux de photons :

$$\varphi = \frac{P_r}{E} = \underline{1{,}4.10^{21}} \text{ photons par seconde, tout aussi énorme...}$$

b) $\Phi = 2{,}0 \times 4{,}2 \times \frac{10^4}{60} = 1{,}4 \text{ kW.m}^{-2}$ (c'est la norme du vecteur de Poynting au niveau de la Terre), d'où la puissance émise par le Soleil :

$$P = \Phi 4\pi a^2 \approx 4.10^{23} \text{ kW}$$

Cette puissance totale moyenne étant conservée lors de la propagation (par absence de phénomènes dissipatifs dans un espace quasi vide), elle correspond à un vecteur de Poynting moyen au niveau du Soleil :

$$R = \frac{P}{4\pi R_S^2} = \frac{a^2}{R_S^2}\Phi = 6{,}4.10^4 \text{ kW.m}^{-2}$$

Avec, comme au a), en valeur moyenne pour une onde localement plane d'amplitude E_0 au niveau du Soleil :

$$R = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{E_0 \approx 2.10^5 \text{ V.m}^{-1}}$$

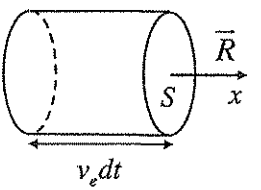
valeur aussi importante que pour le laser de puissance de la question a) !

46. Le vecteur de Poynting est en $E^2(r)$ (r est la distance au point source pris comme origine), la sphère de rayon r a une surface en r^2 ; et donc la puissance totale rayonnée est en $E^2(r).r^2$. Or dans le vide cette puissance est conservée (il n'y a pas d'absorption), elle est indépendante de r, ce qui donne pour $E(r)$ et $B(r)$ une décroissance en $1/r$.

Pour une onde cylindrique le vecteur de Poynting est toujours en $E^2(r)$ (r est la distance à l'axe source pris comme origine), mais le cylindre de rayon r (et de hauteur h constante) a une surface en rh, et donc la puissance totale rayonnée est en $E^2(r).r$ toujours indépendante de r, ce qui donne pour $E(r)$ et $B(r)$ une décroissance en $1/\sqrt{r}$ (voir aussi la question **80.**).

47. La question **10.** donne pour une OPPM dans le vide $u = \varepsilon_0 \vec{E}^2$ et $\vec{R} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_x$, d'où la relation simple $\vec{R} = uc\vec{u}_x$.

Déterminons la vitesse v_e à laquelle se propage l'énergie comme suit : l'énergie rayonnée pendant dt à travers une surface S perpendiculaire à Ox est celle contenue dans un cylindre de base S et de longueur $v_e dt$ suivant Ox, soit $RSdt = uSv_e dt$ ce qui montre que $v_e = c = v_g$, résultat attendu en absence de dispersion (égalité des vitesses de phase et de groupe).



■ Les milieux transparents d'indice n

48. La pulsation ω est conservée car les relations de passage à l'interface doivent être réalisées $\forall t$. Si $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ est la norme du vecteur d'onde dans le vide, alors dans un milieu d'indice n réel, on a simplement $k = \dfrac{\omega}{v_\varphi} = \dfrac{\omega}{c/n} = nk_0$. Ceci conduit à une modification de la longueur d'onde $\dfrac{2\pi}{\lambda} = n\dfrac{2\pi}{\lambda_0}$ soit $\lambda = \lambda_0 / n$; rappelons que la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période, cette dernière étant inchangée et la célérité dans un milieu étant plus faible ($n > 1$), on a forcément $\lambda < \lambda_0$.

Rq : En optique, la longueur d'onde λ dans le milieu n'est pratiquement jamais utilisée ; pour le terme « longueur d'onde » sans plus de précision, il faut donc entendre λ_0 même si la propagation ne se fait pas dans le vide.

49. L'équation de Maxwell-Faraday (identique dans tous les milieux) conduit à la relation de structure $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$; mais ici $\vec{k} = n\dfrac{\omega}{c}\vec{u}_x$ d'où $\underline{\vec{B}} = n\dfrac{E_0}{c}e^{i(\omega t - kx)}\vec{u}_z$.

Le vecteur de Poynting (en notation réelle) reste $\vec{R} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ soit :

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \left(n\frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} \right) = n\varepsilon_0 c\vec{E}^2\vec{u}_x \quad \text{car } \vec{E} \perp \vec{u}_x$$

En valeur moyenne $<\vec{R}> = \dfrac{1}{2}n\varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_x$, ou directement $<\vec{R}> = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right)$.

50. Interface entre deux milieux

a) Onde incidente : $\underline{\vec{E}_1} = E_0 e^{i(\omega t + k_1 z)}\vec{u}_x$ et $\underline{\vec{B}_1} = n_1\dfrac{-\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_1}}{c} = -n_1\dfrac{E_0}{c}e^{i(\omega t + k_1 z)}\vec{u}_y$

Onde réfléchie : $\underline{\vec{E}_1}' = \underline{r}E_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}\vec{u}_x$ et $\underline{\vec{B}_1}' = n_1\dfrac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_1}'}{c} = n_1\underline{r}\dfrac{E_0}{c}e^{i(\omega t - k_1 z)}\vec{u}_y$

Onde transmise : $\underline{\vec{E}_2} = \underline{t}E_0 e^{i(\omega t + k_2 z)}\vec{u}_x$ et $\underline{\vec{B}_2} = n_2\dfrac{-\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_2}}{c} = -n_2\underline{t}\dfrac{E_0}{c}e^{i(\omega t + k_2 z)}\vec{u}_y$

b) La continuité de $\vec{E}$ (ici composante tangentielle) en $z = 0$, $\forall t$, donne :

$$\underline{\vec{E}_1}(0,t) + \underline{\vec{E}_1}'(0,t) = \underline{\vec{E}_2}(0,t) \quad \Rightarrow \quad 1 + \underline{r} = \underline{t}$$

La continuité de $\vec{B}$ (ici composante tangentielle) en $z = 0$, $\forall t$, donne :

$$\underline{\vec{B}_1}(0,t) + \underline{\vec{B}_1}'(0,t) = \underline{\vec{B}_2}(0,t) \quad \Rightarrow \quad 1 - \underline{r} = \frac{n_2}{n_1}\underline{t}$$

D'où les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique :

$$\boxed{\underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$

$\underline{t} = t$ est réel positif : il n'y a pas de déphasage à la transmission.

$\underline{r} = r$ est réel : positif si $n_1 > n_2$; $\vec{E}$ se réfléchit en phase.

négatif si $n_1 < n_2$; l'onde réfléchie et l'onde incidente sont en opposition de phase ; c'est la réflexion vitreuse (interface air / verre).

c) Pour une direction de propagation de vecteur unitaire $\vec{u}$, la question **49.** donne :

$$\vec{R} = n\varepsilon_0 c\vec{E}^2\vec{u} \quad \text{car } \vec{E} \perp \vec{u}$$

La puissance moyenne rayonnée à travers une surface $\overline{dS} = -dS\,\vec{u}_z$ est :

$< dP > = < \overline{R} > . \overline{dS}$ avec $< \overline{R} > = \frac{1}{2} n \varepsilon_0 c\, |\underline{\vec{E}}|^2 \vec{u}$, d'où :

$< dP_1 > = \frac{1}{2} n_1 \varepsilon_0 c E_0^2 dS$, $< dP_1{}' > = -\frac{1}{2} n_1 \varepsilon_0 c\, r^2 E_0^2 dS$ et $< dP_2 > = \frac{1}{2} n_2 \varepsilon_0 c\, t^2 E_0^2 dS$

Pour une surface placée en $z = 0$ (le dioptre), les facteurs de réflexion et de transmission en énergie R et T sont :

$$\boxed{R = \frac{|< dP_1{}' >|}{< dP_1 >} = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{< dP_2 >}{< dP_1 >} = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}}$$

On constate que $R + T = 1$ lié à la conservation du flux d'énergie à la traversée du dioptre. Par ailleurs il y a réflexion dès lors qu'il y a discontinuité des propriétés de la matière $(n_1 \neq n_2)$.

L'échange des indices 1 et 2 laisse les expressions de R et T invariantes, preuve que ces coefficients ne dépendent pas de l'ordre des milieux.

51. $R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = 0{,}04$ pour $n_1 = 1$ et $n_2 = 1{,}5$; l'essentiel de la lumière est transmis quel que soit l'ordre des milieux.

Une vitre est constituée de deux dioptres inverses (air / verre puis verre / air) de même coefficient R. Le raisonnement rapide « chaque dioptre réfléchit 4 % de l'énergie, donc les deux en réfléchissent 8 % » n'est pas tout à fait juste, mais donne le bon résultat, environ 8 % réfléchi et donc 92 % transmis.

En fait, il y a des réflexions multiples entre les dioptres, mais le premier rayon transmis porte pratiquement la totalité de l'énergie (0,92, puis successivement $1{,}5.10^{-3}$, 2.10^{-6}, ...). En réflexion, ce sont les deux premiers rayons qui véhiculent la plus grande fraction d'énergie (successivement 0,04 et 0,037, puis 6.10^{-5},...).

52. Le cas d'un milieu absorbant

a) Le champ électrique s'écrit : $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-k'' x} e^{i(\omega t - k' x)} \vec{u}_z$. Il apparaît que $k' = \mathrm{Re}(\underline{k})$ est lié à la propagation de la phase avec $v_\varphi = \omega / k'$, et que $k'' = -\mathrm{Im}(\underline{k})$ décrit l'absorption de l'onde par le milieu dans le sens de la propagation suivant Ox^+.

b) L'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ, d'où :

$$\boxed{I(x) = I_0 e^{-2k'' x}}$$

C'est la loi de Beer-Lambert pour un milieu absorbant dont le coefficient d'amortissement est $2k''$ (fonction de la longueur d'onde).

AN : $k'' = -\frac{1}{2x} \ln \frac{I(x)}{I_0} = 0{,}10\ \mathrm{m}^{-1}$; avec $I(x) = I_0 e^{-x/\delta}$, $\underline{\delta = 1/2k'' = 5\ \mathrm{m}}$.

Ondes électromagnétiques dans un plasma

53. Un plasma comme l'ionosphère est un gaz ionisé peu dense, $n \approx 10^{11}$ m^{-3}, alors que pour un plasma de synthèse on peut atteindre $n \approx 10^{20}$ m^{-3}, à comparer à $n \approx 10^{25}$ m^{-3} pour les molécules dans l'air (à 20°C sous 1 atm) et $n \approx 10^{29}$ m^{-3} pour les électrons libres dans un métal.

Dans l'univers 99% de la matière est constituée de plasma ; sur Terre, on peut citer les éclairs, le plasma dans les lampes à néon, celui qui est créé et guidé dans les machines à fusion thermonucléaire (Tore Supra ou le futur Iter),...

54. L'équation de MF $\overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$ conduit à la relation de structure $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, soit :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k}}{\omega} e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_z$$

Attention, si $\underline{k}$ est complexe, alors les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont plus en phase comme dans le vide, et bien sûr dans le plasma, $\underline{k} \neq \omega / c$! En réalité pour $\omega > \omega_p$, $\underline{k}$ est réel et alors $k = \omega / v_\varphi$.

55. Pour chercher la relation temporelle entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$, dérivons la relation $\vec{j} = -ne\vec{v}$ en tenant compte de l'équation de la mécanique ; il vient :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E} \quad (1)$$

Cette relation pouvait aussi s'obtenir par la loi d'Ohm complexe avec $i\omega \rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}$.

Par ailleurs rappelons qu'au passage de l'onde, le plasma reste neutre $\rho = 0$; ceci est compatible avec le type d'onde recherché $\vec{E} = E(x,t)\vec{u}_y$, transversale, vérifiant directement div $\vec{E} = 0$.

La relation constitutive (1) associée aux équations de Maxwell :

$$\text{div}\ \vec{B} = 0, \quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div}\ \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

conduit en évaluant $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}$, à l'équation du champ électrique :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\vec{E}} \quad \text{où} \quad \boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}}$$

Il s'agit d'une équation de d'Alembert « généralisée » (dans ce cas c n'est pas la célérité des ondes). En y injectant le champ $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\vec{u}_y$, on retrouve l'équation de dispersion :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$$

La relation $\underline{k}(\omega)$ n'est pas linéaire d'où la dispersion ; la condition $n=0$ (absence de plasma), soit $\omega_p = 0$, redonne $k = \omega/c$ (le vide).

Rq : Il est déconseillé d'établir l'équation en $\overline{E}$ à partir de $\overline{\text{rot}}\ \overline{\text{rot}}\ \overline{E}$ en gardant sans précaution « $\vec{j} = \sigma \overline{E}$ » car cela conduit à $\Delta \overline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$ mélangeant grandeurs fréquentielles (σ) et notation temporelle ; le second membre est réel puisque à la fois $\underline{\sigma}$ et $\partial/\partial t \to i\omega$ sont imaginaires purs. Il est néanmoins possible de le faire avec $\underline{\overline{E}}$ et la substitution $\partial/\partial t \to i\omega$...

56. Dans la haute atmosphère (où la pression est très faible), les couches d'air sont plus ou moins fortement ionisées par les rayonnements ultraviolets et corpusculaires du Soleil. Ces couches conduisent à un plasma peu dense ($n \approx 10^{11}$ m^{-3} le jour et $n \approx 10^{9}$ m^{-3} la nuit) appelé ionosphère et constitué d'électrons et d'ions O_2^+, NO^+ et O^+.

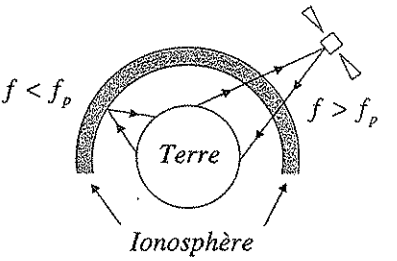
- L'ionosphère se comporte pour les ondes électromagnétiques comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure (la pulsation de plasma) $\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$ où m et e sont la masse et la charge de l'électron. L'énoncé donne $\underline{f_p \approx 3 \text{ MHz}}$ (soit $\lambda_p \approx 100$ m) la fréquence en-dessous de laquelle l'ionosphère se comporte comme une sorte de miroir réfléchissant vers le sol les ondes hertziennes de fréquence $f < f_p$.
- On déduit de cette fréquence de coupure la densité électronique $\underline{n \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}}$.
- Si h est l'altitude de l'ionosphère, alors le retard $\tau = 0{,}6$ ms correspond au temps que met l'onde à effectuer l'aller et le retour dans l'air : $2h = c\tau$ d'où $\underline{h \approx 90 \text{ km}}$.
- La question **23.** donne la profondeur de pénétration de l'onde évanescente :

$$\delta = \frac{1}{k''} = \frac{1}{\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} \approx \frac{c}{\omega_p} = \frac{\lambda_p}{2\pi} \approx 16 \text{ m} \quad \text{soit} \quad \underline{\delta \approx 16 \text{ m}}$$

l'approximation $\omega^2 \ll \omega_p^2$ est valable dès que $\omega < \omega_p/10$; cette profondeur de pénétration est faible devant l'épaisseur de la couche ionosphérique.

L'application concerne les moyens de propagation des ondes hertziennes sur Terre :

- Pour $f < f_p$ (les « grandes ondes »), on utilise de jour la réflexion ionosphérique (les ondes ne rentrent pas dans l'ionosphère) pour transmettre les ondes radio d'un endroit de la Terre à un autre.
- Pour $f > f_p$ (la « bande FM » en particulier vers 100 MHz), on utilise la transparence ionosphérique (les



ondes traversent l'ionosphère sans absorption) pour communiquer avec les satellites (en orbite au-delà de l'ionosphère) pour les transmissions téléphone, radio, Internet, GPS,...

Ondes électromagnétiques dans un conducteur

57. La méthode la plus prudente consiste à revenir à l'équation de Maxwell-Faraday (les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ sont sans effet sur le champ, fonction de z seulement) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{E}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_0\, e^{-z/\delta}\, e^{i(\omega t - z/\delta)} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0\left(-1/\delta - i/\delta\right) e^{-z/\delta}\, e^{i(\omega t - z/\delta)} \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

soit (constante d'intégration nulle en régime d'onde) : $\underline{\vec{B}} = \frac{1-i}{\omega\delta} E_0\, e^{-z/\delta}\, e^{i(\omega t - z/\delta)}\, \vec{u}_y$.

On peut aussi écrire $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - \underline{k} z)}\, \vec{u}_x$ avec $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\, \vec{u}_z$ et $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$ complexe ; alors $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$ donne le résultat directement.

58. Le rapport des forces est : $\frac{\| -e\vec{v} \wedge \vec{B} \|}{\| -e\vec{E} \|} \leq \frac{vB}{E} = \frac{v}{\omega\delta} = \frac{v}{c\sqrt{2\omega\tau}} = \frac{v}{v_\varphi}$ d'après la question précédente, puis l'expression de δ.

L'application numérique de la question **27.** conduisait à $v_\varphi / c \approx 10^{-5}$ soit $v_\varphi = 3.10^3$ m.s^{-1} (notablement réduite), mais on a toujours $v \ll v_\varphi$ ...

59. La puissance cédée par le champ à la matière est $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}$ soit en moyenne temporelle :

$$< \frac{dP}{d\tau} > = < \vec{j}.\vec{E} > = \frac{1}{2}\text{Re}\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2}\text{Re}\left(\underline{\sigma}\,|\underline{\vec{E}}|^2\right) = \frac{1}{2}\text{Re}\left(\underline{\sigma}\right)|\underline{\vec{E}}|^2$$

en appliquant la loi d'Ohm locale $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}$ caractéristique du milieu.

- pour un conducteur métallique, la conductivité σ est réelle et donc les champs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en phase : alors $< \frac{dP}{d\tau} > = \frac{1}{2}\sigma |\underline{\vec{E}}|^2 > 0$, le métal reçoit bien une puissance de la part du champ, c'est la puissance Joule (l'énergie du champ est transformée en énergie cinétique des électrons de conduction, répartie à l'ensemble du réseau par chocs d'où l'échauffement). On en déduit donc que la partie de l'onde hertzienne qui rentre dans le métal s'y amortit rapidement.
- pour un plasma (milieu conducteur), la conductivité $\underline{\sigma}$ est imaginaire pure et donc les champs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature temporelle (déphasage de $\pi/2$) : alors

$<\frac{dP}{d\tau}>=0$, le plasma n'absorbe pas l'énergie de l'onde qui peut donc s'y propager sans s'amortir (le plasma est transparent pour des ondes hertziennes de fréquence suffisamment élevée).

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

60. Par décomposition en série de Fourier d'une OPP en OPPM, la structure des OPPM dans le vide se généralise à celle des OPP quelconques ; en particulier les relations $\overrightarrow{B}=\frac{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{E}}{c}$, $u=\varepsilon_0\overrightarrow{E}^2$ et $\overrightarrow{R}=\varepsilon_0 cE^2\overrightarrow{u}_x$ restent vraies pour une OPP dans le vide.

L'OPPM, « onde éternelle et remplissant tout l'espace », est avant tout très commode pour faire des calculs ! En réalité une onde n'est jamais parfaitement monochromatique et n'existe pas temporellement de $t=-\infty$ à $t=+\infty$; ces deux points sont d'ailleurs reliés car si τ_0 est la durée du train d'onde et $\Delta\nu$ la largeur spectrale de la raie d'émission, on a $\tau_0\Delta\nu\approx 1$ (résultat utile en optique physique).

Par ailleurs une amplitude E_0 indépendante de x et y pour une OPPM se propageant suivant Oz lui donnerait également une étendue spatiale infinie. Il suffit de penser à un faisceau laser dont l'étendue transversale se limite à quelques millimètres pour voir que l'OPPM se propageant suivant Oz est inhomogène et doit s'écrire avec une amplitude $E_0(x,y)$.

61. Pour parcourir 150 millions de km à la vitesse de 300 000 km.s^{-1}, il faut à la lumière environ 8 min 20 s ; c'est le retard lié au temps de propagation.

62. Un film polaroïd est en matière plastique ; lors de la solidification par refroidissement de la matière organique, les longues chaînes de macromolécules s'orientent toutes parallèlement suite à l'effort de traction opéré sur le film favorisant l'apparition d'une direction privilégiée (au niveau de l'alignement des orbitales).

63. Lors du tournage, ce n'est pas un film qui est enregistré, mais deux films simultanément avec deux caméras proches (pour simuler la vision binoculaire seule responsable du relief) ayant deux points de vue voisins mais pas identiques. Lors de la projection sur écran un polariseur vertical est placé devant l'un des projecteurs et un polariseur horizontal est placé devant l'autre projecteur (synchrone). Les lunettes distribuées contiennent deux simples polaroïds à angle droit fonctionnant en analyseurs ; par exemple le « verre » droit est un polariseur vertical et le gauche un polariseur horizontal. En regardant sans lunettes, l'œil n'étant pas sensible à la polarisation de la lumière, il voit les deux films superposés et décalés donc une image floue. Mais en chaussant ces lunettes spéciales, alors l'œil droit ne voit que l'image polarisée verticalement et l'œil gauche que l'image polarisée horizontalement, d'où l'impression de stéréovision restituée permettant la troisième dimension.

64. Les serpents de type crotales, mais aussi les boas ou pythons disposent de récepteurs sensibles à l'infrarouge, rayonnement (par chaleur) émis par les animaux à sang chaud. Ces serpents étant nocturnes, ils perçoivent par nuit noire le plus léger changement de température et donc la présence de petits rongeurs (en sommeil à ce moment-là !) et qui deviennent ainsi des proies faciles.
Le corps humain, à la température de 37 °C, émet également dans l'infrarouge un rayonnement dont la longueur d'onde est d'environ 10 µm et donc invisible aux yeux humains. Les lunettes à infrarouge (mises au point initialement par les militaires) permettent aux hommes d'apercevoir de nuit des êtres humains, ou de repérer par hélicoptère les fuites thermiques des habitations dans le but de proposer une meilleure isolation.

La lumière solaire, par sa diffusion à la traversée de l'atmosphère, est faiblement et partiellement polarisée. La structure alvéolaire des yeux des abeilles leur permet de détecter ce degré de polarisation de la lumière atmosphérique et donc de se repérer par rapport au Soleil.

65. En TP où les fréquences utilisées ne dépassent pas 100 kHz, la longueur d'onde minimale est donc de 3 km (faire $\lambda = c/f$ avec $c = 3.10^8$ m.s^{-1}), très grande devant la taille des circuits : l'approximation des régimes quasi stationnaires s'applique. Pour des fréquences radio de l'ordre de 100 MHz la longueur d'onde tombe à 3 m et devient plus petite que la longueur d'un câble de 10 m de long par exemple : les signaux électriques (tension et courant) sur une ligne sont alors également fonction de l'espace. Cette non uniformité amène à considérer un tronçon élémentaire de ligne de longueur $dx \ll \lambda$, d'inductance Ldx en série et de capacité Cdx en parallèle (penser aux champs magnétique et électrique entre les deux conducteurs) et pour lequel les lois de l'électrocinétique continuent de s'appliquer localement.

66. Le calcul est simple ; la fréquence minimale du signal est :

$$f = 50 \times 625 \times 830 \times 3 \approx 78 \text{ MHz}$$

L'onde porteuse doit avoir une fréquence $F_0 > 10f \approx 1$ GHz.

La longueur d'onde correspondante est $\lambda = c/F_0 = 30$ cm (rappelons que pour la fréquence 50 Hz du secteur, la longueur d'onde est de 6000 km !) ; elle est donc effectivement plus petite que la dizaine de mètres du câble qui relie l'antenne réceptrice du faisceau hertzien au téléviseur.

67. L'eau de mer, de par sa salinité, est un milieu conducteur qui absorbe les ondes hertziennes par dissipation Joule, comme un métal. On utilise le domaine ultrasonore (ondes mécaniques), les émetteurs étant des sonars.

68. Il suffit que le rayon de courbure du conducteur non plan soit grand devant la profondeur de pénétration δ de l'onde (ou épaisseur de peau en haute fréquence) : il apparaît alors localement plan (voir également la question **91.**).

69. Pour une fréquence de l'ordre de 10 GHz (soit $\lambda = 3$ cm), l'épaisseur de peau pour un conducteur comme le cuivre est de $\delta \approx 1$ µm. L'onde ne pénétrant dans le métal (un excellent réflecteur) que sur une profondeur de quelques δ, il est inutile de fabriquer les parois du guide en métal plein ; le dépôt sur un support autre (et donc moins cher) d'une fine couche de métal de l'ordre de quelques δ est suffisant.
L'onde électromagnétique hertzienne pénètre un peu dans le conducteur réel, et la densité de courant qui en résulte conduit à une dissipation d'énergie par effet Joule ; il s'ensuit une atténuation de l'amplitude de l'onde le long du guide, ce qui limite la distance sur laquelle cette onde peut être guidée.

70. Le métal parfaitement conducteur occupe le demi-espace $z > 0$. Dans le vide, du côté $z < 0$, l'onde incidente est $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$ et $\vec{B}_i = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$.

Rappelons que le champ électrique se réfléchit en opposition de phase et le champ magnétique en phase d'où $\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u}_x$ et $\vec{B}_r = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t + kz)\vec{u}_y$.

La densité d'énergie totale :

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\vec{E}_i + \vec{E}_r\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{B}_i + \vec{B}_r\right)^2 = u_i + u_r + \varepsilon_0 \vec{E}_i.\vec{E}_r + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_i.\vec{B}_r$$

s'écrit effectivement $\boxed{u = u_i + u_r}$ en valeur instantanée car $\vec{B}_i.\vec{B}_r = -\frac{\vec{E}_i.\vec{E}_r}{c^2}$.

Le vecteur de Poynting total :

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}_i + \vec{E}_r\right) \wedge \left(\vec{B}_i + \vec{B}_r\right) = \vec{R}_i + \vec{R}_r + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r + \vec{E}_r \wedge \vec{B}_i\right)$$

se réduit lui aussi à $\boxed{\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{R}_r}$ en valeur instantanée car $\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r = -\vec{E}_r \wedge \vec{B}_i$.

Dans ce cas on peut affirmer qu'il n'y a pas d'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie.

Alors effectivement, $< u > = 2 < u_i >$ et même $u = 2u_i$, $< \vec{R} > = \vec{0}$ alors que $\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{R}_r \neq \vec{0}$.

71. Par un grillage métallique entourant le studio, et dont la maille peut atteindre plusieurs centimètres ce qui reste faible donc « invisible » devant la longueur d'onde $\lambda \approx 3$ m pour une fréquence de 100 MHz. En effet, rappelons le principe du « filet de pêche » : plus on veut attraper des poissons de petite taille (voir des détails fins), plus la maille du filet de pêche doit être resserrée (plus la longueur doit être faible). On ne peut pas attraper des poissons plus petits que la maille du filet de pêche signifie « on ne peut pas voir des détails plus petits que la longueur d'onde ».

72. D'un point de vue électromagnétique il faut invoquer l'interaction (forces volumiques de Laplace) entre la densité de courant et la champ magnétique dans le conducteur. Mais d'un point de vue corpusculaire (un photon d'énergie $E = h\nu$ possède une quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u} = \hbar\vec{k}$), la pression de radiation se

conçoit « mécaniquement » comme en thermodynamique, par l'effet des chocs (élastiques) des photons sur le conducteur (voir la question **83.**).
Comme exemples d'application on peut citer la navigation à voile solaire (force répulsive en $1/r^2$), l'orientation de la queue des comètes (toujours dans l'axe Soleil-comète), la lévitation laser de petits objets légers,...

73. Les ondes sonores de fréquence moyenne autour de 1 kHz (les fréquences audibles vont de 20 Hz à 20 kHz) ne sont évidemment pas transportées directement : elles sont lentes et bruyantes ! La conversion en ondes électromagnétiques de même fréquence (rapides et discrètes) n'est pas une solution car elles se propagent mal dans l'air et nécessiteraient des antennes d'émission trop grandes (de l'ordre de $\lambda/2$, soit 150 km pour 1 kHz !). La solution pour émettre sur quelques centaines de km consiste à moduler une onde électromagnétique haute fréquence appelée « porteuse » par un signal électrique de la fréquence de l'onde sonore. En modulation d'amplitude, la fréquence de l'onde porteuse est d'environ 1 MHz (simplicité de mise en œuvre, grande portée des émetteurs) et en modulation de fréquence, la fréquence de l'onde porteuse est d'environ 100 MHz (qualité des transmissions, peu sensibles au bruit). À la réception, une démodulation s'impose.

74. La structure d'onde sphérique des ondes hertziennes émises par une antenne confère aux champs une décroissance « naturelle » en $1/r$; pour des transmissions radio ou télé sur de longues distances, il est alors indispensable de disposer de relais amplificateurs. Réémettre une onde hertzienne amplifiée à exactement la même fréquence que l'onde captée (environ 100 MHz à combien près ?) est une opération techniquement difficile. La moindre différence donne lieu dans la zone de superposition des deux ondes de fréquences voisines à des battements préjudiciables (il suffit d'écrire $\cos\omega t+\cos(\omega+\delta\omega)t \approx 2\cos(\delta\omega t/2)\cos\omega t$). On préfère de ce fait réémettre à une fréquence suffisamment différente pour éviter cela, d'où l'utilité du RDS sur un autoradio qui recherche automatiquement la fréquence de plus grande amplitude d'une station de radio.

75. Certes un circuit ouvert ne peut être parcouru par un courant continu, mais dans le cas présent, le courant envisagé est alternatif à une haute fréquence (celle de l'onde émise) ; pour un petit dipôle (de taille petite par rapport à la longueur d'onde), ce courant $I(t)$ est uniforme ce qui explique la création de charges variables $\pm q(t)$ aux extrémités du conducteur par accumulation et déficit de charges avec $I(t)=dq/dt$; pour une antenne demi-onde, soit $l=\lambda/2$, ce courant $I(P,t)$ est celui d'une onde stationnaire, donc non uniforme puisque nul aux extrémités et maximum au centre.

76. Le rayonnement solaire interagit avec les molécules de l'atmosphère qui se comportent alors comme des dipôles électriques induits (en régime forcé) qui rayonnent à leur tour des ondes électromagnétiques dans toutes les directions : la lumière du Soleil est diffusée. L'inégalité double $a \ll \lambda \ll r$ est vérifiée ; cette diffusion est celle de Rayleigh. Le rayonnement est partiellement polarisé et sa puissance diffusée par les molécules de l'air en $\left(\omega/\omega_0\right)^4$, donc effectivement de l'ordre de 8 fois plus importante pour le bleu (en réalité le violet mais l'œil y est peu

sensible) que pour le rouge si l'on admet $\omega_{bleu} / \omega_{rouge} \approx 750/450 \approx 1{,}7$; or cette diffusion est très peu importante car ω_0 est dans l'ultraviolet et donc $\omega_{visible} / \omega_0 \ll 1$.

Une distance de quelques mètres dans une pièce est largement insuffisante pour observer le phénomène qui, pour être visible, nécessite une épaisseur d'air de quelques centaines de kilomètres, uniquement observable de ce fait à travers la couche atmosphérique, d'où le bleu du ciel. Au coucher, lorsque les rayons rentrent tangentiellement dans l'atmosphère, l'épaisseur d'air traversé est encore beaucoup plus importante ; alors la quasi-totalité de la lumière bleue est diffusée et le Soleil apparaît rouge.

77. Il y a le rayonnement émis par les particules chargées freinées (le Bremsstrahlung) comme pour la production des rayons X (métal bombardé par des électrons de grande énergie cinétique), ou plus simplement le rayonnement d'un écran de télévision ou d'ordinateur à tube cathodique, le rayonnement infrarouge par agitation thermique, le rayonnement synchrotron des particules dans un accélérateur,...

78. Ces ondes sont créées à l'aide d'un magnétron suivi d'un guide d'onde qui sélectionne la fréquence et d'un brasseur qui les répand dans la cavité du four (pour modifier au cours du temps la position des nœuds et des ventres des ondes stationnaires qui se forment afin d'avoir une cuisson homogène). La fréquence d'utilisation est précise car elle correspond à la fréquence d'excitation d'un mode (quantifié) de rotation des molécules d'eau, l'énergie transmise par l'onde à la matière permettant l'augmentation de température par accroissement de l'agitation thermique. La longueur d'onde dans le vide est $\lambda = 12{,}2$ cm.

Un récipient en porcelaine, verre ou céramique (très pauvres en molécules d'eau) ne chauffe pas directement sous l'effet des micro-ondes, mais par contact prolongé avec les aliments chauffés (le café peut être brûlant alors que le bol reste froid...).

La plaque métallique a pour rôle de réfléchir les ondes afin qu'elles restent dans le four (les normes sont très précises : les fuites ne doivent pas excéder 5 mW/cm^2 à 5 cm de la porte). La taille des trous (de l'ordre du millimètre) percés dans la plaque est très petite devant la longueur d'onde ; l'onde ne les « voit » donc pas et la réflexion se fait comme si la plaque était pleine.

79. La longueur d'onde correspondant à 900 MHz est de 33,3 cm, celle à 1 800 MHz est de 16,7 cm, et celle à 2 100 MHz est de 14,3 cm. À noter que la 4G fonctionne à 2 600 MHz, soit 11,5 cm.

La fréquence de 2400 MHz = 2,40 GHz du WiFi et Bluetooth à 12,5 cm (pour les accès aux bornes Wifi ou pour relier sans fil un téléphone portable, un assistant personnel ou une oreillette à son ordinateur) est très proche de celle (2,45 GHz) utilisée dans les fours à micro-ondes (voir la question précédente) ; certes les puissances utilisées sont bien moindres (la Wifi pour les appareils communicants est limitée à 0,1 W et 900 W pour le micro-ondes) et la bande passante d'excitation des molécules d'eau étroite, il n'empêche que les inquiétudes demeurent.

L'indice DAS (pour Débit d'Absorption Spécifique), donne une mesure du niveau maximal de radiofréquences émises par un appareil connecté à un réseau mobile et susceptible d'être absorbées par le corps humain. La grandeur est exprimée en watt par kilogramme de matière qui absorbe (W/kg) et est établie quand l'appareil fonctionne à pleine puissance. Actuellement, cet indice est généralement compris entre 0,5 et 1,0 $W.kg^{-1}$ pour les téléphones mobiles (0,2 pour les meilleurs et 1,8 pour les moins bons), la limite imposée étant de 2,0 $W.kg^{-1}$ pour 10 g de tissus. Il faut rapprocher cette puissance massique de la puissance volumique cédée par le champ émis par le téléphone au cerveau proche de l'oreille ($dP/d\tau = \vec{j}.\vec{E}$).

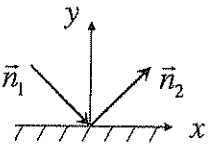
Exercices

80. Superposition de deux ondes obliques

a) Le champ complexe de l'OPPM s'écrit $\underline{\vec{E}}_1 = E_0 \exp i(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r})\vec{u}_z$ avec $\vec{k}_1 = \frac{\omega}{c}\vec{n}_1$ dans le vide soit $\vec{k}_1.\vec{r} = \frac{\omega}{\sqrt{2}c}(x-y)$ d'où $\underline{\vec{E}}_1 = E_0 \exp i\omega\left(t - \frac{x-y}{\sqrt{2}c}\right)\vec{u}_z$.

b) Le champ $\underline{\vec{E}}_2 = -E_0 \exp i\omega\left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c}\right)\vec{u}_z$ se propage suivant la direction de vecteur unitaire $\vec{n}_2\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$.

La deuxième onde est obtenue à partir de la première par réflexion sur un plan conducteur parfait placé en $y = 0$ et respectant les lois de Descartes (on note que sur ce plan, les deux champs $\underline{\vec{E}}_1$ et $\underline{\vec{E}}_2$ sont en opposition de phase $\forall t$ et $\forall x$, leur résultante est nulle).



c) Le champ électrique résultant, $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2$, est :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = 2iE_0 \sin\left(\frac{\omega y}{\sqrt{2}c}\right).\exp i\omega\left(t - \frac{x}{\sqrt{2}c}\right)\vec{u}_z}$$

Cette onde est polarisée suivant Oz, est progressive suivant Ox (elle se propage le long du conducteur) et stationnaire suivant Oy (avec un nœud de champ électrique sur le plan $y = 0$).

Un second plan conducteur en $y = l$ permet à des ondes de fréquence donnée (ω est quantifiée par la condition $\underline{\vec{E}}(y = l, t) = \vec{0}$) d'être guidées entre les deux plans métalliques. Pour une étude plus complète, voir la question **90.**.

81. Onde cylindrique

a) Il est indispensable de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$ pour déterminer le champ magnétique. D'après la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\vec{E}} = \left(E(r)\mathrm{e}^{i(\omega t - kr)}\right)\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_z + \overrightarrow{\text{grad}}\ \left(E(r)\mathrm{e}^{i(\omega t - kr)}\right) \wedge \vec{u}_z = \vec{0} + \left(\frac{dE}{dr} - ikE\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kr)}\,\vec{u}_r \wedge \vec{u}_z$$

car $\vec{u}_z$ est un champ de vecteur uniforme et donc $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_z = \vec{0}$.

Alors de $-\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{B}} = -\left(\dfrac{dE}{dr} - ikE\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kr)}\,\vec{u}_\theta$ car $\vec{B}$ varie à la même pulsation,

on déduit $\boxed{\underline{\vec{B}} = \dfrac{1}{i\omega}\left(\dfrac{dE}{dr} - ikE\right)\mathrm{e}^{i(\omega t - kr)}\,\vec{u}_\theta}$

La direction de propagation en tout point est $\vec{u}_r$; le champ $\vec{E} = E(r)\vec{u}_z$ est transverse (donc respecte div $\vec{E} = 0$), et il en est de même du champ $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$ (avec div $\vec{B} = 0$).

b) Pour déterminer la valeur instantanée du vecteur de Poynting, il est indispensable de revenir à l'expression réelle des champs :

$$\vec{E} = E(r)\cos(\omega t - kr)\,\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega}\frac{dE}{dr}\sin(\omega t - kr)\,\vec{u}_\theta - \frac{E(r)}{c}\cos(\omega t - kr)\,\vec{u}_\theta$$

car l'onde se propageant dans le vide, $k = \dfrac{\omega}{c}$

d'où $\vec{R} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\dfrac{1}{2\mu_0\omega}E(r)\dfrac{dE}{dr}\sin 2(\omega t - kr)\,\vec{u}_r + \dfrac{E^2(r)}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kr)\,\vec{u}_r$,

et en moyenne temporelle : $\boxed{<\vec{R}> = \dfrac{E^2(r)}{2\mu_0 c}\vec{u}_r}$ dans le sens de la propagation.

À noter que ce dernier résultat est donné directement par $<\vec{R}> = \dfrac{1}{2}\text{Re}\left(\dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$.

Il apparaît clairement que le terme en dE/dr du champ magnétique, en quadrature par rapport au champ électrique, ne contribue pas à la propagation moyenne de l'énergie. Seul le terme en E du champ magnétique, en phase avec le champ électrique, y contribue.

c) La puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$<P> = \oiint <\vec{R}>.\overrightarrow{dS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{<P> = \frac{E^2(r)}{2\mu_0 c}2\pi r h}$$

car $<\overrightarrow{R}>$ et $\overrightarrow{dS}$ sont tous deux colinéaires à $\vec{u}_r$ et $E(r)$ est uniforme sur le cylindre.
En l'absence d'absorption (il n'y a pas de phénomène dissipatif dans le vide), cette puissance est conservée lors de la propagation : $<P>$ est donc indépendante de r, ce qui conduit à un champ électrique $E(r)$ en $\alpha/\sqrt{r}$.

d) Les deux termes $\frac{dE}{dr}$ et $-ikE$ du champ magnétique sont alors dans un rapport $\frac{1}{ikE}\frac{dE}{dr} = \frac{i\lambda}{4\pi r}$ puisque $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, d'où le champ à grande distance ($r \gg \lambda$) :

$$\boxed{\overrightarrow{B} \approx -\frac{E(r)}{c} e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_r \wedge \overrightarrow{E}}{c}}$$

qui s'identifie localement à celui d'une onde plane progressive monochromatique.

82. Équation de Klein-Gordon et masse du photon

a) L'équation fournie par l'énoncé, une « équation de d'Alembert » avec second membre (un régime forcé par le champ lui-même) $\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \eta^2 \overrightarrow{E}$ indique que $\Delta\overrightarrow{E}$ et $\eta^2\overrightarrow{E}$ ont même dimension ; comme Δ est en m^{-2}, il en est de même de η^2 et donc η s'exprime en m^{-1}.

b) Une solution de la forme $\overrightarrow{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E_0} \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ injectée dans l'équation $\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \eta^2 \overrightarrow{E}$ avec $\Delta \equiv -k^2$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2$ conduit immédiatement à la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \quad (1)$$

Cette relation $k(\omega)$ étant non-linéaire, il y a dispersion, c'est-à-dire que des ondes de fréquences différentes vont se propager à des vitesses différentes.

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ soit d'après (1) : $\boxed{v_\varphi = c\sqrt{1+\eta^2/k^2}}$

La vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ soit en différentiant la relation (1) :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \quad \Rightarrow \quad v_g = c^2\frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_g = \frac{c}{\sqrt{1+\eta^2/k^2}}}$$

On note que $v_\varphi > c$ (ce qui n'est pas gênant pour une vitesse de phase) et $v_g < c$ (puisqu'ici $v_g v_\varphi = c^2$) ; pour le photon de masse nulle de l'électromagnétisme

classique, soit $\eta = 0$, on retrouve $v_g = v_\varphi = c$, vitesse de la lumière dans le vide et une absence de dispersion.

c) L'équation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2$ avec $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ et $E = \hbar\omega$ s'écrit :

$$\frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{E^2}{c^2\hbar^2} - \eta^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = p^2c^2 + \eta^2\hbar^2c^2$$

Cette relation est du type $E^2 = p^2c^2 + m_\gamma^2c^4$ donnant le lien entre l'énergie et l'impulsion d'une particule relativiste de masse m_γ avec :

$$\boxed{m_\gamma = \frac{\eta\hbar}{c}}$$

Pour le photon de masse nulle, soit $m_\gamma = 0$ et donc $\eta = 0$, l'équation du champ $\vec{E}$ de l'énoncé redevient une équation de d'Alembert classique.

d) La vitesse (relativiste) du photon massique qui transporte l'énergie (celle du signal détecté) s'identifie à la vitesse de groupe de l'onde, inférieure à c (et non à la vitesse de phase), d'où :

$$\delta t = \frac{L}{v_{g2}} - \frac{L}{v_{g1}} = \frac{L}{c}\left(\sqrt{1+\eta^2/k_2^2} - \sqrt{1+\eta^2/k_1^2}\right) \approx \frac{L\eta^2}{2c}\left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2}\right)$$

et avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\boxed{\delta t = \frac{L\eta^2}{8\pi^2 c}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right)}$

e) 1 année-lumière $= 9{,}47.10^{15}$ m (c'est cT où $T = 1$ an)

AN : $\eta \leq 2{,}3\ \text{m}^{-1}$ et $m_\gamma \leq 8.10^{-43}$ kg

$m_\gamma / m_e = 9.10^{-13}$, ce qui est suffisamment faible pour ne pas être mesurable avant longtemps…

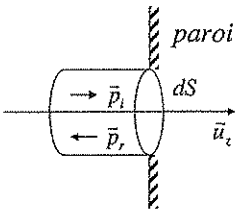
83. Pression de radiation corpusculaire (*)

a) Par définition de l'intensité (énergie par unité de surface et par unité de temps) :

$$I = \|<\vec{R}>\| = \frac{d^2E}{dSdt} = \frac{d^2N.h\nu}{dSdt} \quad \Rightarrow \quad d^2N = \frac{I}{h\nu}dSdt$$

sachant que les d^2N photons ont chacun une énergie $h\nu$.

b) La réflexion sur un conducteur parfait étant totale, le choc du photon est élastique, et donc un photon incident de quantité de mouvement $\vec{p}_i = p\vec{u}_z$ engendre un photon réfléchi de quantité de mouvement $\vec{p}_r = -p\vec{u}_z$; la réflexion d'un photon transfère donc



au conducteur parfait une quantité de mouvement $2p\vec{u}_z = -(\vec{p}_r - \vec{p}_i)$ opposée à la variation de la sienne.

Les d^2N photons transfèrent au conducteur une quantité de mouvement totale élémentaire :

$$d^2\vec{p} = 2\frac{h\nu}{c}d^2N\vec{u}_z = 2\frac{I\,dS\,dt}{c}\vec{u}_z$$

correspondant à une pression :

$$P = \frac{\|d\vec{f}\|}{dS} = \frac{\|d^2\vec{p}\|}{dS\,dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{P = \frac{2I}{c}}$$

AN : $I = <R> = 4P_r / \pi d^2 = 5{,}7.10^7$ W.m^{-2} d'où $\underline{P = 0{,}4 \text{ Pa}}$ ce qui est très faible.

c) Si la surface est absorbante, alors le photon n'est pas restitué (choc mou) soit $P = I/c$ seulement.

84. Couche antireflet

a) Rappelons que les grandeurs qui interviennent sur un même dioptre évoluent à la même fréquence. Par ailleurs dans le milieu d'indice n_i, $k_i = \dfrac{\omega}{c/n_i} = n_i k$.

$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{E}_1^0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_1 = \frac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_1}{c} = \frac{\underline{E}_1^0}{c}e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{E}_2^0 e^{i(\omega t + kz)}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_2 = \frac{-\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_2}{c} = -\frac{\underline{E}_2^0}{c}e^{i(\omega t + kz)}\vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{E}}_3 = \underline{E}_3^0 e^{i(\omega t - nkz)}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_3 = \frac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_3}{c/n} = n\frac{\underline{E}_3^0}{c}e^{i(\omega t - nkz)}\vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{E}}_4 = \underline{E}_4^0 e^{i(\omega t + nkz)}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_4 = \frac{-\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_4}{c/n} = -n\frac{\underline{E}_4^0}{c}e^{i(\omega t + nkz)}\vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{E}}_5 = \underline{E}_5^0 e^{i(\omega t - Nkz)}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_5 = \frac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_5}{c/N} = N\frac{\underline{E}_5^0}{c}e^{i(\omega t - Nkz)}\vec{u}_y$$

b) La composante (tangentielle) du champ $\vec{E}$ est continue :

en $z = 0$: $E_1^0 + \underline{E}_2^0 = \underline{E}_3^0 + \underline{E}_4^0$ (1) et en $z = e$: $\underline{E}_3^0 e^{-i\varphi} + \underline{E}_4^0 e^{i\varphi} = \underline{E}_5^0 e^{-i\varphi}$ (2)

La composante (tangentielle) du champ $\vec{B}$ est continue ici :

en $z = 0$: $E_1^0 - \underline{E}_2^0 = n(\underline{E}_3^0 - \underline{E}_4^0)$ (3) et en $z = e$: $n(\underline{E}_3^0 e^{-i\varphi} - \underline{E}_4^0 e^{i\varphi}) = N\underline{E}_5^0 e^{-i\phi}$ (4)

c) Le système d'équations homogènes (1) à (4) permet de trouver les quatre inconnues $\underline{E}_2^0$ à $\underline{E}_5^0$ (E_1^0 est une donnée). En imposant la condition $\underline{E}_2^0 = 0$, il demeure trois inconnues pour quatre équations qui ne sont donc compatibles que sous certaines conditions.

Les équations (1) et (3) conduisent alors en éliminant E_1^0 à : $r_2 = \dfrac{n-1}{n+1}$

Les équations (2) et (4) conduisent en éliminant $\underline{E}_S^0 e^{-i\varphi}$ à : $r_2 = \dfrac{n/N-1}{n/N+1} e^{-2i\varphi}$

Ces deux expressions de r_2 supposent $e^{-2i\varphi} = \pm 1$ réel :

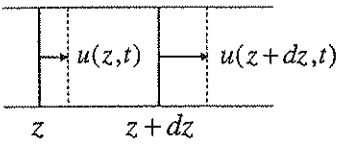
– le cas $e^{-2i\varphi} = +1$ conduit à $n = 0$ (impossible) ou $N = 1$ (inintéressant ici)

– le cas $e^{-2i\varphi} = -1$ conduit à $\boxed{n^2 = N}$ et $\boxed{e_p = \left(p + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda_0}{2n}}$ ce qui impose l'épaisseur et l'indice de la couche antireflet.

AN : $\underline{n = \sqrt{N} = 1{,}22}$ et $\underline{e = \lambda_0 / 4n = 0{,}12\ \mu\text{m}}$

85. Oscillations et pulsation de plasma

a) La conservation du nombre d'électrons compris au repos dans la tranche de section S entre z et $z+dz$ (en trait plein) et au cours du mouvement dans la tranche en pointillé s'écrit :



$$n^- S\left[dz + u(z+dz,t) - u(z,t)\right] = nS\,dz$$

d'où $n^-\left(1 + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = n$, et à l'ordre 1 puisque $\left|\dfrac{\partial u}{\partial z}\right| \ll 1$, $n^- \approx n\left(1 - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$

Rq : Si comme sur la figure, u augmente avec z à t fixé soit $\dfrac{\partial u}{\partial z} > 0$, alors le même nombre d'électrons est réparti dans un volume plus grand et donc leur densité diminue, c'est bien ce que donne le résultat $n^- < n$.

Les ions étant fixes (car beaucoup plus inertes que les électrons), leur densité n'a pas varié soit $n^+ = n$, d'où la densité de charge totale :

$$\rho = n^+ e + n^- e \ \Rightarrow\ \boxed{\rho(z,t) = ne\frac{\partial u}{\partial z}}$$

b) Les propriétés de symétrie (tout plan contenant Oz est plan de symétrie) et d'invariance (par translation dans un plan perpendiculaire à Oz) du système de charges conduisent à un champ électrique résultant porté par l'axe Oz et dont la seule composante ne dépend que de z et de t : $\vec{E} = E(z,t)\vec{u}_z$, champ manifestement divergent (puisque E_z dépend de z) et longitudinal.

L'équation de Maxwell-Gauss, $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, s'écrit alors :

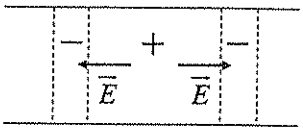
$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{ne}{\varepsilon_0}\frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{E}(z,t) = \frac{ne}{\varepsilon_0}u(z,t)\,\vec{u}_z}$$

le champ résultant étant nul dans un plasma au repos ($u = 0 \ \Rightarrow\ \vec{E} = \vec{0}$).

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au « fluide » d'électrons de la tranche s'écrit au premier ordre et après simplification par $n^- Sdz$:

$$m\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -e\vec{E} = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0}\vec{u}$$

d'où un mouvement oscillatoire de pulsation $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}}$



Rq : L'équation montre que l'action du champ électrique créé par une perturbation mécanique initiale est équivalente à une force de rappel ce qui se comprend aisément ; le champ électrique est dirigé des tranches dilatées (globalement positives) vers les tranches comprimées (globalement négatives), et donc provoque le retour des électrons (penser à $\vec{F} = -e\vec{E}$). En fait, en l'absence de frottement, mouvement (terme d'inertie) et champ (terme de rappel) s'entretiennent mutuellement (c'est l'équivalent d'un système masse-ressort).

AN : $n = 10^{11}$ m^{-3} $\Rightarrow$ $\underline{f_p \approx 2{,}9 \text{ MHz}}$ ($\lambda_p \approx 100$ m)

$n = 10^{20}$ m^{-3} $\Rightarrow$ $\underline{f_p \approx 90 \text{ GHz}}$ ($\lambda_p \approx 3$ mm).

86. Bilan énergétique dans un plasma (*)

a) L'équation de Maxwell-Faraday donne $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -(i\omega\underline{\vec{B}})$ soit $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, et avec $\vec{k} = k\vec{u}_z$ et $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v_\varphi} = \frac{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}}{c}$ pour $\omega > \omega_p$:

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{v_\varphi} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y}$$

Rappel : si f est une fonction sinusoïdale du temps, $< f^2 > = \frac{1}{2} |\underline{f}|^2$.

$$< u_e > = < \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} > = \frac{1}{4}\varepsilon_0 |\underline{\vec{E}}|^2 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$

$$< u_m > = < \frac{B^2}{2\mu_0} > = \frac{1}{4\mu_0} |\underline{\vec{B}}|^2 = \frac{E_0^2}{4\mu_0 v_\varphi^2}$$

Le rapport vaut : $\frac{< u_e >}{< u_m >} = \varepsilon_0 \mu_0 v_\varphi^2 = \frac{v_\varphi^2}{c^2} = \frac{1}{1-\omega_p^2/\omega^2} > 1$

Alors que dans le vide ($\omega_p = 0$) elles sont égales, dans le plasma la densité d'énergie électrique est supérieure à la densité d'énergie magnétique.

Au total : $\boxed{< u_{em} > = < u_e > + < u_m > = \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}}$

b) La relation fondamentale de la dynamique pour un électron s'écrit :

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$, et en régime forcé de pulsation ω : $m(i\omega \underline{\vec{v}}) = -e\underline{\vec{E}}$

$$\underline{\vec{v}} = \frac{ie}{m\omega} \underline{\vec{E}} \quad (\vec{v} \text{ et } \vec{E} \text{ sont en quadrature})$$

La densité d'énergie cinétique est $u_c = n \times \frac{1}{2} m v^2$

d'où $< u_c > = \frac{1}{4} n m |\underline{v}|^2 = \frac{n e^2 E_0^2}{4 m \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{< u_c > = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < u_e >}$

c) La moyenne de la densité d'énergie totale est :

$$< u > = < u_{em} > + < u_c > = \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{< u > = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}}$$

Cette densité d'énergie est celle de l'OPPM d'amplitude E_0 dans le vide, avant d'arriver sur le plasma. Pendant la phase de régime transitoire (où $\vec{j}$ et $\vec{E}$ ne sont pas encore en quadrature), cette onde qui pénètre dans le plasma lui cède de l'énergie en mettant les électrons initialement immobiles en mouvement. Lorsque le régime permanent (régime sinusoïdal forcé) est atteint (fin du transfert d'énergie), la somme de cette énergie cinétique et de l'énergie « restante » de l'onde redonne l'énergie électromagnétique de l'onde incidente par conservation de l'énergie.

On note que si $\omega \gg \omega_p$, alors $< u_c > \to 0$ et $< u_{em} > \to \varepsilon_0 E_0^2 / 2$ comme dans le vide ; en hautes fréquences, le plasma devient transparent aux ondes électromagnétiques (d'ailleurs on retrouve $k = \omega / c$).

Par ailleurs, si $\omega \to \omega_p$, alors $< u_c > \to \varepsilon_0 E_0^2 / 2$ et $< u_{em} > \to 0$; l'onde a transmis intégralement son énergie au plasma et ne peut plus se propager.

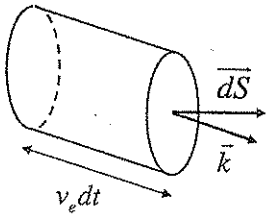
d) $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ donne en valeur moyenne $< \vec{R} > = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 v_\varphi} \vec{u}_z$

puisque $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ et $\underline{\vec{B}}^* = \frac{E_0}{v_\varphi} e^{-i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$.

ou encore $< \vec{R} > = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} . \frac{c^2}{v_\varphi} \vec{u}_z$ soit $\boxed{< \vec{R} > = < u > v_g \vec{u}_z}$

e) Rappelons que $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$ avec $\underline{\sigma}$ imaginaire pur ; $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature donc la puissance volumique moyenne $< \vec{j}(t).\vec{E}(t) > = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\sigma})E_0^2 = 0$; en moyenne les charges en mouvement ne reçoivent pas d'énergie de la part du champ : il n'y a donc pas d'énergie électromagnétique dissipée lors de la propagation.

L'énergie électromagnétique qui en dt traverse une surface $\overrightarrow{dS}$ est donc, par conservation de l'énergie, celle contenue dans un cylindre de longueur $v_e dt$ orienté dans le sens de $\vec{k}$:



$$< d^2E > = < u > (\vec{v}_e dt).\overrightarrow{dS}$$

puis $\frac{< d^2E >}{dt} = < dP > = < \vec{R} > .\overrightarrow{dS}$,

et comme $\vec{R} // \vec{v}_e$, il vient :

$$\boxed{< \vec{R} > = < u > \vec{v}_e}$$

Or à la question d), on a aussi montré $< \vec{R} > = < u > \vec{v}_g$, d'où l'on déduit :

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{v}_g}$$

La vitesse de l'énergie correspond à la vitesse de groupe.

f) Pour $\omega < \omega_p$, on a $\underline{k}^2 < 0$ et donc $\underline{k}$ est imaginaire pur ; alors $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature d'où $< \vec{R} > = \vec{0}$ et par conséquent $\vec{v}_e = \vec{0}$; l'onde est évanescente et l'énergie ne se propage plus.

87. Câble coaxial sans perte ; impédance caractéristique

a) En haute fréquence, la longueur d'onde λ du signal est plus petite que la longueur l de la ligne, et donc à un instant donné, les grandeurs électriques varient d'un point de la ligne à un autre. Toute étude en régime quasi stationnaire est donc exclue. Comme pour la corde vibrante, on ne peut donc pas considérer comme système l'ensemble de la ligne (puisque les grandeurs ne sont pas uniformes), mais uniquement un tronçon de longueur $dx \ll \lambda$; c'est ce que représente la figure.

b) (1) s'écrit $\frac{\partial \underline{v}}{\partial x} = -L\frac{\partial \underline{i}}{\partial t}$ soit en remplaçant $\frac{d\underline{V}}{dx} = -jL\omega\underline{I}$ (1')

(2) s'écrit $\frac{\partial \underline{i}}{\partial x} = -C\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ soit en remplaçant $\frac{d\underline{I}}{dx} = -jC\omega\underline{V}$ (2')

En dérivant (1') et à l'aide de (2'), ou directement par l'équation de d'Alembert (3), il vient :

$$\boxed{\frac{d^2\underline{V}}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\underline{V}} \quad (3')$$

c) L'équation différentielle classique (3') du second ordre admet des solutions sous forme de fonctions trigonométriques, mais $\underline{V}$ étant *a priori* complexe, on préfère l'écrire sous la somme de deux exponentielles complexes :

$$\boxed{\underline{V}(x) = V' e^{-jkx} + V'' e^{jkx}} \quad (4) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Alors $\underline{v}(x,t) = \underline{V}(x) e^{j\omega t}$ s'écrit :

$$\underline{v}(x,t) = V' e^{j\omega(t-x/c)} + V'' e^{j\omega(t+x/c)}$$

On retrouve ainsi la forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω ; les constantes d'intégration V' et V'' (en volt) représentent donc respectivement l'amplitude en tension de l'onde aller et de l'onde retour.

d) (1') donne directement $\underline{I}(x)$ connaissant $\underline{V}(x)$:

$$\underline{I} = -\frac{1}{jL\omega}\frac{d\underline{V}}{dx} = \frac{V'}{Lc} e^{-jkx} - \frac{V''}{Lc} e^{jkx}$$

avec $\frac{1}{Lc} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \frac{1}{R_c}$, il vient : $\boxed{\underline{I}(x) = \frac{V'}{R_c} e^{-jkx} - \frac{V''}{R_c} e^{jkx}}$ (5)

Cette relation est homogène (R_c est une résistance) ; on constate (changement de signe devant le terme en V'') que si l'onde de tension se réfléchit en phase, alors l'onde de courant se réfléchit en opposition de phase et inversement.

AN : $\underline{R_c = 75\ \Omega}$

e) En $\underline{x = l}$, (4) $\Rightarrow$ $\underline{V}_l = V' e^{-jkl} + V'' e^{jkl}$ et (5) $\Rightarrow$ $\underline{I}_l = \frac{1}{R_c}(V' e^{-jkl} - V'' e^{jkl})$

on en déduit $V' = \frac{1}{2}(\underline{V}_l + R_c \underline{I}_l) e^{jkl}$ (6') et $V'' = \frac{1}{2}(\underline{V}_l - R_c \underline{I}_l) e^{-jkl}$ (6'')

En $\underline{x = 0}$, (4) $\Rightarrow$ $\underline{V}_0 = V' + V'' \overset{(6)}{=} \underline{V}_l(\cos kl) + R_c \underline{I}_l(j \sin kl)$ (7')

et (5) $\Rightarrow$ $\underline{I}_0 = \frac{V' - V''}{R_c} \overset{(6)}{=} \frac{\underline{V}_l}{R_c}(j \sin kl) + \underline{I}_l(\cos kl)$ (7'')

On en déduit que $\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \underline{V}_l \\ \underline{I}_l \end{pmatrix}$ avec $\boxed{T = \begin{pmatrix} \cos kl & jR_c \sin kl \\ \frac{j \sin kl}{R_c} & \cos kl \end{pmatrix}}$ (7)

Le déterminant est : $\underline{\det(T) = 1,\ \forall kl}$

La matrice T est donc inversible $\forall k = \omega/c$ et $\forall l$, ce qui signifie simplement que le câble coaxial peut être retourné (ou inversé) entre la source et le récepteur, et ceci quelles que soient sa longueur et la fréquence d'utilisation.

f) L'impédance d'entrée $\underline{Z}_0$ se détermine par (7) :

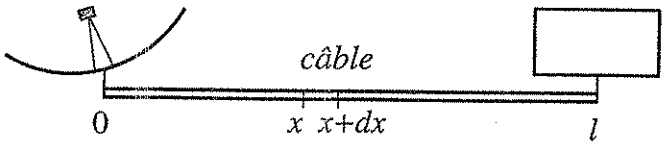
$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_0} = \frac{\cos kl.\underline{V}_l + jR_c \sin kl.\underline{I}_l}{j\frac{\sin kl}{R_c}\underline{V}_l + \cos kl.\underline{I}_l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{Z}_0 = \frac{\underline{Z}_l + jR_c \tan kl}{1 + j\frac{\tan kl}{R_c}\underline{Z}_l}} \quad (8)$$

en ayant divisé numérateur et dénominateur par $\cos kl.\underline{I}_l$ et en ayant introduit l'impédance de sortie $\underline{Z}_l = \frac{\underline{V}_l}{\underline{I}_l}$.

g) On branche sur la ligne (en sortie) un récepteur d'impédance $\underline{Z}_l$, par exemple un téléviseur ; l'entrée du câble recueille le signal à transmettre d'une antenne.

On souhaite que $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_l$ soit $\underline{Z}_l + j\frac{\tan kl}{R_c}\underline{Z}_l^2 = \underline{Z}_l + jR_c \tan kl \Rightarrow \underline{Z}_l^2 = R_c^2$ de solution physique : $\boxed{\underline{Z}_0 = \underline{Z}_l = R_c}$

Pour ramener à l'entrée la même impédance que celle mise en sortie, il suffit de brancher la ligne sur une impédance égale à son impédance caractéristique : c'est l'adaptation d'impédance. Ce résultat est indépendant de kl, il est donc vrai $\forall k = \omega/c$ et $\forall l$, c'est-à-dire quelle que soit la chaîne regardée (par ω) et quelle que soit la longueur du câble.



Dans ces conditions, la relation (6'') donne $V'' = \frac{1}{2}(\underline{V}_l - \underline{Z}_l\underline{I}_l)e^{-jkl} = 0$ (pas d'onde retour), et alors (7') donne $V' = \underline{V}_0$.

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} \underline{V}(x) = \underline{V}_0 e^{-jkx} \\ \underline{I}(x) = \frac{\underline{V}_0}{R_c} e^{-jkx} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \underline{v}(x,t) = \underline{V}_0 e^{j\omega(t-x/c)} \\ \underline{i}(x,t) = \frac{\underline{V}_0}{R_c} e^{j\omega(t-x/c)} \end{cases}}$$

Ceci correspond à la propagation de l'onde aller, sans réflexion en $x = l$ car l'onde y « voit » une impédance $\underline{Z}_l$ égale à l'impédance caractéristique du câble (pas de discontinuité) ; de ce fait $\underline{v}(x,t)/\underline{i}(x,t) = R_c \ \forall x, \forall t$, tout se passe comme si le système était illimité.

Alors quelle que soit la longueur l de la ligne et quelle que soit la chaîne regardée (ce qui impose ω), le transfert de l'antenne au câble en $x = 0$, puis du câble au téléviseur en $x = l$, est optimal, ce qui est le but recherché. L'adaptation d'impédance empêche les réflexions.

h) Si la ligne est ouverte, $\underline{Z}_l = \infty$ (ce qui revient à débrancher le téléviseur), alors nécessairement $\underline{I}_l = 0$, soit d'après (5), $|V'| = |V''|$.

Si la ligne est court-circuitée, $\underline{Z}_l = 0$ (le poste est débranché et le cœur (ou l'âme) et la gaine du câble sont reliés par un fil conducteur), alors nécessairement $\underline{V}_l = 0$, soit d'après (4), $|V'| = |V''|$.

Dans les deux cas l'amplitude de l'onde retour est égale à celle de l'onde aller, ce qui conduit à un système d'ondes stationnaires. L'onde retour est engendrée sur l'extrémité par réflexion totale de l'onde aller liée à une très forte discontinuité d'impédance (passage de R_c à $\underline{Z}_l$) ; dans le 1er cas, l'extrémité correspond à un nœud d'intensité (et donc un ventre de tension), et dans le 2nd, à un nœud de tension (donc à un ventre d'intensité).

Rq : D'après (8), dans le cas $\underline{Z}_l = \infty$, $\underline{Z}_0 = -jR_c \operatorname{cotan} kl$, et dans le cas $\underline{Z}_l = 0$, $\underline{Z}_0 = jR_c \tan kl$; dans les deux cas, l'impédance ramenée $\underline{Z}_0$ (qui dépend alors de kl !) n'est plus adaptée à celle de l'antenne et donc déjà le transfert d'énergie se fait mal en début de câble... (le fait que $\underline{Z}_0$ soit alors imaginaire pur signifie que tension et courant sont en quadrature, d'où une puissance moyenne transférée nulle).

88. Câble coaxial avec faibles pertes (*)

a) Les caractéristiques de la ligne réelle sont :

- la capacité Cdx avec $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(b/a)}$ (en $\mathrm{F.m^{-1}}$) traduit l'existence du champ électrique radial (existence de charges opposées sur les conducteurs),
- l'inductance Ldx avec $L = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a)$ (en $\mathrm{H.m^{-1}}$) traduit l'existence du champ magnétique orthoradial (existence de courants opposés sur les conducteurs),
  (les expressions de L et C sont établies à la question **44.** du chapitre **5**)
- la résistance Rdx avec R (en $\Omega.\mathrm{m^{-1}}$) ; la faible résistivité du conducteur métallique (l'épaisseur de peau n'est pas tout à fait nulle et l'onde pénètre très légèrement dans le conducteur et y dissipe de l'énergie) explique que la tension s'atténue le long de la ligne,
- la conductance Gdx avec G (en $\Omega^{-1}.\mathrm{m^{-1}}$) : le diélectrique entre les deux conducteurs n'est jamais totalement parfait, d'où l'équivalent d'un faible courant de fuite qui explique que le courant s'atténue le long de la ligne.

Les deux premières caractéristiques sont fondamentales et à l'origine de la propagation. Les deux dernières concernent « les pertes » et sont à l'origine de la décroissance de l'amplitude du signal le long du câble dans le sens de la propagation.

b) Les éléments en série sont responsables d'une chute de tension : la loi des mailles donne $v(x,t)-v(x+dx,t)=Rdxi(x,t)+Ldx\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}$

Un développement de Taylor à l'ordre un, justifié par $dx \ll \lambda$, conduit à :

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-Ri-L\frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

Les éléments en parallèle sont responsables d'une fuite de courant : la loi des nœuds donne $i(x,t)-i(x+dx,t)=Gdx.v(x+dx,t)+Cdx\dfrac{\partial v(x+dx,t)}{\partial t}$

Ici, dans le membre de gauche, on écrit à l'ordre un en dx :

$$dx\frac{\partial v(x+dx,t)}{\partial t}\approx dx\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+dx\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}\right)\approx dx\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

et de même $dx.v(x+dx,t)\approx dx.v(x,t)$, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-Gv-C\frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

L'élimination de $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}$ par $\dfrac{\partial(1)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(2)}{\partial t}$ amène à l'équation de télégraphistes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=(RC+LG)\frac{\partial v}{\partial t}+RGv} \quad (3)$$

d'où $\boxed{u=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}$, $\boxed{A=RC+LG}$ et $\boxed{B=RG}$

À noter que l'équation en $i(x,t)$ est identique, et que si l'on réalise $R=0$ et $G=0$ (absence de pertes) dans (3), on retrouve l'équation de d'Alembert conduisant à des ondes non amorties. Par ailleurs cette équation (3) comporte une dérivée temporelle impaire (d'ordre 1) qui rend l'équation de dispersion complexe et permet de rendre compte des pertes.

c) * Des solutions de la forme $\underline{v}(x,t)=v_0\exp j(\omega t-kx)$ injectées dans l'équation (3) conduisent à une équation de dispersion complexe :

$$-k^2-LC(-\omega^2)=(RC+LG)j\omega+RG$$

et sous forme factorisée : $\boxed{k^2=-(R+jL\omega)(G+jC\omega)}$ (4)

avec ici ω réel positif et k complexe.

À noter que $R=0$ et $G=0$ (absence de pertes) redonne l'équation classique $k^2=LC\omega^2=\omega^2/u^2$ où $u=c/\sqrt{\varepsilon_r}$ est la vitesse de phase, avec k réel et sans dispersion (en supposant ε_r réel et indépendant de ω).

* Les pertes étant faibles, il convient de mettre en facteur les termes prépondérants dans (4) :

$$k^2 = -jL\omega\left(1+\frac{R}{jL\omega}\right).jC\omega\left(1+\frac{G}{jC\omega}\right) \approx LC\omega^2\left[1-\frac{j}{\omega}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)\right]$$

après développement limité à l'ordre 1 en $R/L\omega \ll 1$ et $G/C\omega \ll 1$.

soit $k \approx \pm\sqrt{LC}\,\omega\left[1-\frac{j}{2\omega}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)\right]$ du type $k = k_0 - j\alpha$ avec

$$\boxed{k_0 = \sqrt{LC}\,\omega = \frac{\omega}{u} > 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha = \frac{\sqrt{LC}}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) > 0}$$

k_0 correspond, à cet ordre d'approximation, au nombre d'onde sur la ligne sans perte, déterminé par L et C (le choix de $k_0 > 0$ est lié au souhait d'une propagation dans le sens des x croissants).
α est le coefficient d'atténuation lié aux facteurs dissipatifs R et G.

Alors l'onde progressive de tension s'écrit $\boxed{\underline{v}(x,t) = v_0 e^{-\alpha x}\exp j(\omega t - k_0 x)}$

prouvant que le signal est amorti dans le sens de la propagation.
Plus généralement $\mathrm{Re}(k) = k_0$ est lié à la propagation et $\mathrm{Im}(k) = -\alpha$ à l'atténuation.

* À l'ordre 1 du développement en $R/L\omega$ et $G/C\omega$, les grandeurs k_0/ω et α sont indépendantes de ω, et donc la propagation et l'amortissement sont non dispersifs (c'est-à-dire identiques pour toutes les fréquences).

d) (1) $\Rightarrow$ $jk\underline{v} = R\underline{i} + jL\omega\underline{i}$ soit $\underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{jk}$

(2) $\Rightarrow$ $jk\underline{i} = G\underline{v} + jC\omega\underline{v}$ soit $\underline{Z} = \frac{jk}{G + jC\omega}$

Par produit membre à membre, il vient : $\boxed{\underline{Z}^2 = \frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}}$

Pour de faibles pertes : $\underline{Z}^2 = \frac{jL\omega(1 + R/jL\omega)}{jC\omega(1 + G/jC\omega)} \approx \frac{L}{C}\left[1 + \frac{j}{\omega}\left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L}\right)\right]$

À cet ordre, l'impédance peut être choisie réelle en imposant $\frac{G}{C} - \frac{R}{L} = 0$ soit :

$\boxed{GL = RC}$ (appelée condition de Heaviside)

Rq : Dans la pratique cette condition n'est pas réalisée ; pour la satisfaire, on rajoute à distance régulière une impédance localisée…

Alors $\underline{Z} = \sqrt{L/C} = R_c = \frac{\mu_0 u \ln(b/a)}{2\pi}$, résistance caractéristique de la ligne, indépendante de ω.

Rq : Cet exercice peut être utilement complété par les applications numériques obtenues expérimentalement à la question **94.**.

89. Réflexion / transmission sur un conducteur réel (*)

1. Les champs

a) Pour une OPPM dans le vide, $\overline{B}_i = \dfrac{\vec{u}_z \wedge \overline{E}_i}{c}$ soit $\overline{B}_i = \dfrac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$.

b) Le champ électrique de l'onde réfléchie est pris sous la forme $\overline{E}_r = \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$;

alors le champ magnétique est $\overline{B}_r = \dfrac{-\vec{u}_z \wedge \overline{E}_r}{c}$ soit $\overline{B}_r = -\dfrac{\underline{r} E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$.

c) Vu le caractère amorti de l'onde, il est prudent de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday (voir aussi la question 57.) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overline{E}_t = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}' z)} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -i\underline{k}' \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}' z)} \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \overline{B}_t}{\partial t} = -i\omega \overline{B}_t$$

d'où $\overline{B}_t = \dfrac{\underline{k}'}{\omega} \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}' z)} \vec{u}_y$ soit avec $\dfrac{\underline{k}'}{\omega} = \dfrac{1-i}{\delta\omega} = \dfrac{1-i}{\alpha c}$:

$$\boxed{\overline{B}_t = \frac{1-i}{\alpha c} \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}' z)} \vec{u}_y}$$

2. Les coefficients de réflexion / transmission

a) Continuité de la composante tangentielle de $\overline{E}$ (soit ici E_x) en $z = 0$, $\forall t$:

$$1 + \underline{r} = \underline{t} \quad (1)$$

Continuité de la composante tangentielle de $\overline{B}$ (soit ici B_y) en $z = 0$, $\forall t$:

$$1 - \underline{r} = \frac{1-i}{\alpha} \underline{t} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) conduisent au résultat demandé :

$$\boxed{\underline{r} = -\frac{1-\alpha-i}{1+\alpha-i}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{t} = \frac{2\alpha}{1+\alpha-i}}$$

Ces coefficients, par α, dépendent de la fréquence de l'onde et de la conductivité du métal ; le fait qu'ils soient complexes signifie que l'onde réfléchie et l'onde transmise sont déphasées au niveau de l'interface sur l'onde incidente.

Le conducteur parfait ($\sigma \to \infty$) correspond à la limite $\alpha = \sqrt{2\omega\tau} = \sqrt{2\varepsilon_0 \omega/\sigma} \to 0$, d'où $\underline{r} \to -1$ et $\underline{t} \to 0$; on retrouve la réflexion totale en opposition de phase du champ électrique (et l'absence d'onde transmise).

b) AN : $\alpha = 2{,}5.10^{-5}$ soit $\alpha \ll 1$: l'onde se propage « lentement » dans le métal et s'amortit « vite ».

On écrit :

$$\underline{r} = -\frac{(1-i)-\alpha}{(1-i)+\alpha} = -\frac{1-\alpha/(1-i)}{1+\alpha/(1-i)} \approx -\left(1-\frac{2\alpha}{1-i}\right) = -\left(1-\frac{2\alpha(1+i)}{2}\right) = -(1-\alpha)+\alpha i$$

Le déphasage φ de l'onde réfléchie sur l'onde incidente est donné par :

$$\tan\varphi = \frac{\alpha}{-1+\alpha} \approx -\alpha \quad \text{à l'ordre 1 en } \alpha \quad \text{soit} \quad \varphi \approx \pi - \alpha$$

(alors qu'on a $\varphi = \pi$ sur un conducteur parfait).

Le terme de phase de l'onde incidente est $\exp i(\omega t - kz)$.

La profondeur z_p (compté à partir de la surface du conducteur $z=0$) qui par un aller-retour dans le vide conduirait au même déphasage supplémentaire est donnée par :

$$-k(2z_p) = -\alpha \;\Rightarrow\; z_p = \frac{c\alpha}{2\omega} = \frac{c}{2\omega}\sqrt{2\omega\tau} = c\sqrt{\frac{\tau}{2\omega}} = \frac{\delta}{2}$$

Sur un conducteur parfait, l'onde se réfléchit en $z=0$. Sur un conducteur réel, tout se passe du point de vue de la phase comme si l'onde se réfléchissait sur un conducteur parfait placé en z_p, et donc parcourrait une distance supplémentaire $2z_p = \delta$, l'épaisseur de peau.

AN : $\delta = 3{,}7$ µm d'où $\underline{z_p = \delta/2 \approx 1{,}9 \text{ µm}}$

Rq : Dans le conducteur, l'onde se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\mathrm{Re}(\underline{k}')}{\omega} = \alpha c$; à noter que l'on retrouve alors $\delta = 2z_p = \frac{c\alpha}{\omega} = \frac{v_\varphi}{\omega} = \frac{1}{\mathrm{Re}(\underline{k}')} = \frac{\lambda'}{2\pi}$, à savoir que l'aller-retour supplémentaire représente au coefficient 2π près (ce que l'on savait pour l'épaisseur de peau) une longueur d'onde λ' dans le milieu…

c) Pour évaluer les vecteurs de Poynting moyens en $z=0$, on utilise la formule :

$$<\vec{R}> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right), \text{ d'où } <\vec{R}_i> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_z \;;\; <\vec{R}_r> = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}|\underline{r}|^2\vec{u}_z$$

$$\text{et } <\vec{R}_t> = \frac{E_0^2}{2\mu_0\alpha c}\mathrm{Re}\left[\underline{t}(1+i)\underline{t}^*\right]\vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0\alpha c}|\underline{t}|^2\vec{u}_z$$

Soit $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}_z$ un élément de surface orientée de l'interface en $z=0$; les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie sont définis par le rapport des puissances moyennes rayonnées à travers $\overrightarrow{dS}$:

$$R = \frac{|<\vec{R}_r>.\overrightarrow{dS}|}{<\vec{R}_i>.\overrightarrow{dS}} = |\underline{r}|^2 \;\Rightarrow\; \boxed{R = \frac{(1-\alpha)^2+1}{(1+\alpha)^2+1}}$$

$$T = \frac{<\vec{R}_i>.\vec{dS}}{<\vec{R}_i>.\vec{dS}} = \frac{|\underline{t}|^2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{T = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2+1}}$$

Il apparaît que $R+T=1$ ce qui traduit la conservation du flux d'énergie au niveau de l'interface.

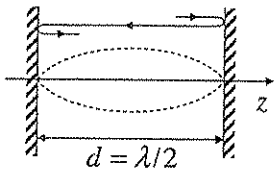
Avec $\alpha \ll 1$, on a $\boxed{R \approx 1-2\alpha}$ et $\boxed{T \approx 2\alpha}$

AN : $\underline{T = 5.10^{-5}}$

Très peu d'énergie électromagnétique pénètre dans le métal qui se comporte comme un excellent réflecteur ; il sert d'écran aux ondes radio.

3. Application à une cavité électromagnétique

a) Les conditions aux limites donnent pratiquement des nœuds de champ $\vec{E}$ sur les deux conducteurs réels (comme une corde fixée aux deux extrémités) ; la distance minimale des deux surfaces est donc $\underline{d = \lambda/2 = c/2f = 46{,}9 \text{ cm}}$ (cavité résonante demi-onde).



Rq : D'après la question **2.b**), cette distance devrait être $\frac{\lambda}{2} + 2.z_p$, mais $\delta \ll \lambda$ ...

b) L'onde fait des allers et retours dans la cavité, mais lorsque la source d'énergie extérieure cesse, les pertes dans les parois ne sont plus compensées et l'énergie dissipée par effet Joule dans les conducteurs réels est prélevée sur l'énergie de l'onde stationnaire, dont l'amplitude au cours du temps décroît donc.

Sachant que 50 millionièmes ($T = 1-R = 5.10^{-5}$) de l'énergie est dissipé à chaque réflexion, la perte devient notable au bout de $N \approx 1/T = 20\,000$ réflexions.

c) Pour parcourir une distance totale Nd dans la cavité, il faut à l'onde progressive un temps :

$$\underline{t_e = Nd/c = 1/2Tf \approx 31 \text{ µs}}$$

L'extinction du signal après la coupure est donc quasi immédiate, ou du moins en un temps très court à l'échelle humaine. Ce résultat peut paraître surprenant puisque individuellement le conducteur métallique est un excellent réflecteur. Cependant l'onde va très vite (300 000 km.s^{-1}), ce qui explique le temps t_e très court pour effectuer les 20 000 allers et retours.

90. Étude simplifiée d'un guide d'onde

a) L'onde est polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$, elle est progressive suivant Oz (elle se propage suivant Oz^+), mais n'est pas homogène (son amplitude dépend de y et n'est donc pas uniforme dans un plan $z = cste$) ; en fait elle est stationnaire suivant la direction Oy.

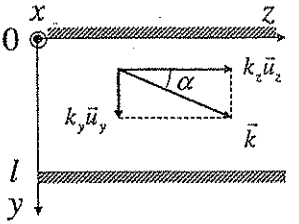
b) La relation de dispersion s'obtient en projetant sur Ox l'équation de d'Alembert écrite pour ce champ :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}=0 \quad \Rightarrow \quad -k_y^2-k_z^2-\frac{1}{c^2}(-\omega^2)=0$$

$$\text{soit} \quad \boxed{k^2=\frac{\omega^2}{c^2}=k_y^2+k_z^2} \quad (1)$$

Elle traduit simplement le théorème de Pythagore $k^2=k_y^2+k_z^2$ pour des OPPM « obliques » de vecteur d'onde $\vec{k}=\pm k_y\vec{u}_y+k_z\vec{u}_z$.

c) Il est alors facile de vérifier en écrivant $\sin(k_y y)=\dfrac{e^{ik_y y}-e^{-ik_y y}}{2i}$ que l'onde en question s'obtient par superposition des deux OPPM obliques, de même amplitude $E_0/2$ et déphasées de π sur le plan $y=0$ (plan de réflexion sur un conducteur parfait où le champ réfléchi et le champ incident sont en opposition de phase afin que le champ total dans le conducteur soit nul) :



$$\underline{\vec{E}}=\frac{E_0}{2i}\exp i\left[\omega t-(-k_y y+k_z z)\right]\vec{u}_x-\frac{E_0}{2i}\exp i\left[\omega t-(k_y y+k_z z)\right]\vec{u}_x$$

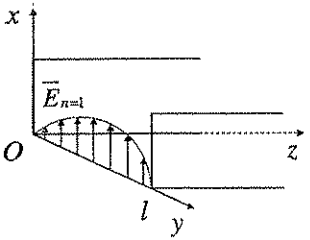
(pour s'en convaincre, identifier les phases à $\omega t-\vec{k}.\vec{r}$)

Ces ondes se propageant en zigzag dans le vide intérieur au guide, où $k=\omega/c$, avec réflexions totales sur des parois $y=0$ et $y=l$, chacune est obtenue par réflexion de l'autre.
Ainsi l'onde incidente et l'onde réfléchie sur la paroi donnent suivant Oz une onde progressive par superposition de deux ondes progressives se propageant dans le même sens et suivant Oy une onde stationnaire par superposition de deux ondes progressives (de même amplitude) mais se propageant en sens inverse.

d) Comme pour la corde vibrante fixée aux deux bouts, la nullité du champ électrique sur les deux parois conduit à la condition $\sin(k_y l)=0$ (celle en $y=0$ est déjà satisfaite), d'où la quantification avec $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{k_y^n=\frac{n\pi}{l}} \quad (2)$$

Ci-contre la structure stationnaire du champ électrique (polarisé suivant $\vec{u}_x$) entre les plans $y=0$ et $y=l$ pour le mode $n=1$ (un seul ventre en $y=l/2$ entre deux nœuds aux extrémités).



Rq : Le champ électrique s'écrit alors :

$$\underline{\vec{E}}_n = E_{0n} \sin\frac{n\pi y}{l} e^{i(\omega t - k_z z)} \vec{u}_x$$

ce qui confirme le caractère hybride de l'onde : progressive suivant Oz et stationnaire suivant Oy (le champ électrique étant polarisé suivant Ox).

e) La relation (1) avec (2) : $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ conduit à $k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{n\pi c}{l\omega}\right)^2}$

Cette écriture où $k_z \geq 0$ suppose $\omega \geq \omega_{c,n} = \frac{n\pi c}{l}$ d'où une fréquence de coupure :

$$\boxed{f_{c,n} = n\frac{c}{2l}}$$

dépendant du mode n. On écrit alors : $\boxed{k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(f_{c,n}/f\right)^2}}$ (1')

AN : La fréquence la plus basse est obtenue pour $n = 1$ d'où $\underline{l = c/2f_{c,1} = 6\text{ cm}}$

f) La phase de l'onde donnée est $\omega t - k_z z$; la vitesse de phase est donc $v_\varphi = \frac{\omega}{k_z}$, soit d'après la relation (1') :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\left(f_{c,n}/f\right)^2}} > c}$$

Cette vitesse de phase est fonction de la fréquence (il y a dispersion) ce qui n'est pas étonnant puisque la relation de dispersion (1) entre k_z et ω n'est pas linéaire.

La vitesse de groupe est définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk_z}$; en différentiant la relation (1) $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, il vient :

$$2k_z dk_z = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{c^2 k_z}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} \quad \text{ou encore} \quad v_\varphi v_g = c^2$$

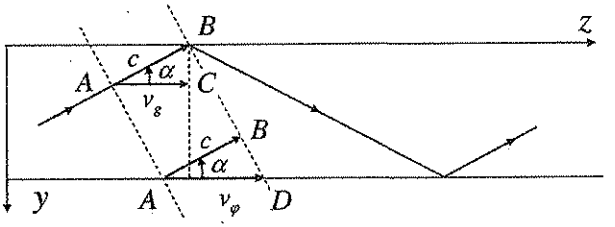
d'où $\boxed{v_g = c\sqrt{1-\left(f_{c,n}/f\right)^2} < c}$

AN : $\underline{v_\varphi = 3{,}46.10^8\text{ m.s}^{-1}}$ et $\underline{v_g = 2{,}60.10^8\text{ m.s}^{-1}}$.

g) En notant d'après la figure du c) :

$$\cos\alpha = \frac{k_x}{k} = \frac{\omega/v_\varphi}{\omega/c} = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{v_g}{c} \quad \text{puisque } v_\varphi v_g = c^2\text{, on a alors simplement :}$$

$$\boxed{v_g = c\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{v_\varphi = c/\cos\alpha} \quad (3)$$



Lorsque l'onde oblique se propage dans le vide de A à B à la vitesse c, alors dans le même temps l'information liée au transport d'énergie avance de A à C à la vitesse de groupe v_g ; la construction montre qu'alors $v_g = c\cos\alpha < c$, vrai d'après la relation (3).
En revanche, dans le même temps, le plan d'onde progresse le long de l'axe Oz de A à D à la vitesse de phase v_φ ; la construction montre qu'alors $v_\varphi = c/\cos\alpha > c$, vrai d'après la relation (3).

91. Effet de peau sur un conducteur cylindrique (*)

a) L'équation du champ $\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0\sigma\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$ s'écrit en projection sur l'axe Oz :

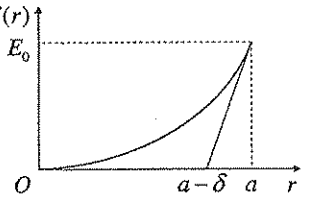
$$\Delta\underline{E}_z = \mu_0\sigma i\omega\underline{E}_z \quad \text{et} \quad \Delta\underline{E}_z = e^{i\omega t}\Delta\underline{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\underline{E}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\underline{E}}{dr} = i\mu_0\sigma\omega\underline{E}$$

Avec la solution proposée : $\underline{E} = E_0\exp\left[-(1+i)(a-r)/\delta\right]$,

on a $\dfrac{d\underline{E}}{dr} = \dfrac{1+i}{\delta}\underline{E}$ et $\dfrac{d^2\underline{E}}{dr^2} = \dfrac{2i}{\delta^2}\underline{E}$, soit $\dfrac{2i}{\delta^2}\left(1+\dfrac{1-i}{2}.\dfrac{\delta}{r}\right)\underline{E} = i\mu_0\sigma\omega\underline{E}$

qui admet comme solution pour $r \gg \delta$: $\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma\omega}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}}}$

b) Le champ électrique s'écrit alors : $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-(a-r)/\delta}\exp i\left(\omega t - (a-r)/\delta\right)\vec{u}_z$, ce qui correspond à un champ polarisé suivant $\vec{u}_z$ et se propageant radialement avec une amplitude qui décroît vers l'intérieur du conducteur (champ non uniforme).



L'amplitude réelle du champ est :

$$E(r) = E_0 e^{-(a-r)/\delta}$$

Courant et champ sont essentiellement localisés dans une épaisseur δ comptée à partir de la surface (entre $a-\delta$ et a) et sont très faibles au centre.

AN : * pour $f = 50$ Hz, $\delta = 9{,}3$ mm $\gg a = 0{,}5$ mm ce qui ne correspond pas au cas précédemment décrit ($r \gg \delta$) ; la fréquence est trop faible et tout se passe comme pour $f = 0$: champ et courant sont quasi uniformes sur toute la section du fil.

* pour $f = 100$ kHz, $\delta = 0{,}2$ mm du même ordre de grandeur que a, ce qui fixe la limite de l'uniformité.

* pour $f = 100$ MHz, $\delta = 6{,}6$ µm $\ll a$; le courant circule alors sur une très faible épaisseur du conducteur, « l'épaisseur de peau », ce qui augmente considérablement la résistance du fil et rend la propagation très atténuée le long de l'axe ; les fréquences hertziennes sont transmises dans l'air et pas dans les conducteurs.

c) La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est donnée par :

$$\frac{<dP>}{d\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2}\sigma|\underline{\vec{E}}|^2 \quad \text{puisque} \quad \underline{\vec{j}} = \sigma\underline{\vec{E}} \quad \text{avec } \sigma \text{ réel}$$

Et puisque $\underline{\vec{E}} = E_0\,\mathrm{e}^{-(a-r)/\delta}\exp i\varphi\,\vec{u}_z$ avec $\varphi(t)$ réel, il vient :

$$\frac{<dP>}{d\tau} = \frac{1}{2}\sigma E_0^2\,\mathrm{e}^{-2(a-r)/\delta}$$

grandeur inhomogène essentiellement non nulle près de la surface $r = a$ sur une épaisseur de l'ordre de δ.

Avec un élément de volume $d\tau = 2\pi r dr l$, l'intégrale sur le tronçon de conducteur s'écrit :

$$<P> = \frac{1}{2}\sigma E_0^2 2\pi l\,\mathrm{e}^{-2a/\delta}\int_0^a \mathrm{e}^{2r/\delta}\,r dr$$

L'intégrale se calcule par parties et vaut $\frac{a\delta}{2}\mathrm{e}^{2a/\delta} - \frac{\delta^2}{4}\left(\mathrm{e}^{2a/\delta} - 1\right)$

et en négligeant le second terme devant le premier puisque $\delta \ll a$,

$$\boxed{<P> \approx \frac{1}{2}\sigma E_0^2 \pi a\delta l}$$

L'élément de volume écrit sous la forme $2\pi a(\delta/2)l$ indique que tout se passe si le champ et la densité de courant étaient uniformes sur un anneau de rayon a et d'épaisseur $\delta/2$, confirmant la notion d'épaisseur de peau.

d) Évaluons d'abord le courant complexe :

$$\underline{I}(t) = \iint_{(S)} \underline{\vec{j}}(r,t).\overrightarrow{dS} = \sigma E_0\,\mathrm{e}^{-a/\delta}\exp i(\omega t - a/\delta).2\pi\int_0^a \mathrm{e}^{(1+i)r/\delta}\,r dr$$

Comme précédemment, l'intégrale vaut $\frac{a\delta}{1+i}\mathrm{e}^{(1+i)a/\delta} - \left(\frac{\delta}{1+i}\right)^2\left(\mathrm{e}^{(1+i)a/\delta} - 1\right)$ et sa valeur principale pour $\delta \ll a$ est $\frac{a\delta}{1+i}\mathrm{e}^{(1+i)a/\delta}$, d'où :

$$\underline{I}(t) = \frac{2\pi\sigma E_0 a\delta}{1+i}\mathrm{e}^{i\omega t} \quad \text{et} \quad <I^2> = \frac{1}{2}|\underline{I}|^2 = \pi^2\sigma^2 E_0^2 a^2\delta^2$$

Pour accéder à la résistance qu'on ne peut plus définir par U/I, il est alors commode de passer par une définition énergétique :

$$\boxed{R = \frac{<P>}{<I^2>} = \frac{l}{2\pi\sigma a\delta} = \frac{a}{2\delta}R_0}$$

car en régime continu, lorsque le champ électrique et la densité de courant sont uniformes, $R_0 = l/\sigma\pi a^2$.

Bien sûr plus la fréquence augmente, plus le courant diminue puisque cantonné dans une couronne d'épaisseur δ faible, et donc plus la résistance augmente.

Rq : Écrite sous la forme $R = l/\sigma s$ avec $s = 2\pi a(\delta)$, tout se passe comme si l'épaisseur utile était δ, l'épaisseur de peau. Le cas $f = 0$, soit $\delta \to \infty$, ne redonne pas $R = R_0$ à cause de l'hypothèse $\delta \ll a$ qui n'est plus valable.

Pour transporter des courants hautes fréquences dans des conducteurs cylindriques, il est alors inutile que ces conducteurs soient pleins. Puisque les courants circulent en surface extérieure à cause de l'effet de peau, une mince couronne cylindrique creuse suffit, ce qui allège considérablement la masse et le coût de l'objet : cette structure creuse ressemble alors à s'y méprendre à un guide d'onde comme celui de la question **90.**. Ces guides, à section circulaire ou rectangulaire sont très utilisés en pratique à haute fréquence.

92. Durée de vie d'un état excité

a) Il s'agit des hypothèses de la question **32.** et de la condition du champ lointain, soit la double inégalité : $r_a \approx 0{,}1\ \text{nm} \ll \lambda \approx 0{,}5\ \mu\text{m} \ll r \approx$ qqs 10 cm ou plus, où r_a est le rayon atomique (la taille du dipôle), λ la longueur d'onde émise et r la distance d'observation.

Avec $\vec{p} = -e\vec{r}_a$, soit $p_0 = er_a$, il vient : $\boxed{<P> = \frac{e^2 r_a^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}}$

b) L'électrodynamique classique prévoit le rayonnement de l'atome (le système électron / proton -dans le noyau- forme un dipôle tournant donc variable) et donc son instabilité par désintégration de la matière. La mécanique quantique prévoit au contraire pour l'atome l'existence d'états stationnaires (les solutions quantifiées de l'équation de Schrödinger) avec émission possible d'un photon d'énergie $h\nu = E_2 - E_1$ lors de la transition électronique d'un état stationnaire d'énergie E_2 à un autre d'énergie E_1 moindre, d'où la contradiction.

En fait, dans un état stationnaire, un atome ne rayonne pas, mais entre deux états d'énergie stationnaire, le rayonnement permis par la mécanique quantique correspond à celui prévu par l'électrodynamique classique.

Assimilons la puissance moyenne (sur une période) $<P>$ rayonnée, supposée constante au cours de la transition, au rapport de l'énergie ΔE émise sur la durée d'émission τ :

$$< P > = \frac{\Delta E}{\tau} = \frac{h\nu}{\tau} = \frac{h\omega}{2\pi\tau} = \frac{e^2 r_a^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{3h\varepsilon_0 \lambda^3}{4\pi^3 e^2 r_a^2}}$$

AN : $\tau \approx 3.10^{-9}$ s en prenant $\lambda \approx 0{,}5$ µm et $r_a \approx 0{,}5$ nm .

Cette durée τ conditionne la largeur naturelle de la raie d'émission, faible devant la largeur Doppler aux températures usuelles (paramètres importants en optique ondulatoire).

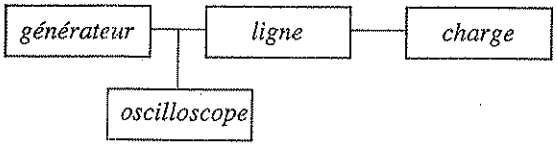
Travaux pratiques

93. Si l'on dispose l'un derrière l'autre deux polariseurs dont les axes font entre eux un angle α, on obtient à la sortie du 2ème polariseur (appelé analyseur) un faisceau dont l'intensité I est reliée à l'intensité I_0 du faisceau ayant franchi le 1er polariseur par la relation $I = I_0 \cos^2 \alpha$ (loi de Malus, vue à la question **44.**). Les variations de l'éclairement de l'écran par rotation de l'analyseur sont une preuve du caractère vectoriel de la lumière.

À noter que polariseurs et analyseurs fonctionnent pour toute longueur d'onde, et donc en lumière blanche.

94. Câble coaxial

Le schéma de principe est le suivant :



- Un générateur envoie des impulsions très brèves à fréquence élevée sur la ligne (câble coaxial de $l = 100$ m de long) et sur l'oscilloscope. L'extrémité de la ligne est chargée par une résistance variable R' (boîtes $\times 10\ \Omega$ et $\times 1\ \Omega$) qui renvoie le signal avec un coefficient de réflexion fonction du rapport R'/R_c (la réflexion est totale pour une ligne ouverte $R' = \infty$ ou en court-circuit $R' = 0$). L'absence de signal retour est obtenu pour $R' = R_c$ (adaptation d'impédance). Les mesures fournissent $R_c \approx 75\ \Omega$.
- Sur l'oscilloscope, le décalage $\tau = 1$ µs du signal retour sur le signal aller pour 200 m donne accès à la vitesse du signal électromagnétique le long du câble est : $v = 200\ 000$ km.s^{-1} (en réalité, on mesure une vitesse de groupe dans le diélectrique de permittivité relative ε_r qui sépare le cœur de la gaine du câble).
- Sachant que $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$, il vient $L = \frac{R_c}{v}$ et $C = \frac{1}{R_c v}$

AN : $L \approx 0{,}4$ µH.m^{-1} et $C \approx 70$ pF.m^{-1}

À partir de l'expression de $L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a)$, on a $\frac{b}{a} = \exp\left(\frac{2\pi R_c}{\mu_0 \mu}\right)$ soit $\frac{b}{a} \approx 6{,}5$ conforme à la mesure directe faite au palmer.

Rq 1 : À noter qu'ici $l \approx \lambda_0$, ce qui place l'expérience en dehors de l'ARQS.

Rq 2 : Avec $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{c^2}{u^2} \approx 2{,}3$; dans C il faut remplacer ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$.

95. Émetteur d'ondes centimétriques

Cette question n'est pas pertinente ! Une fréquence de 10 GHz (correspondant à $\lambda_0 = 3$ cm, ondes dites centimétriques) est certes faible par rapport aux fréquences des ondes lumineuses, de l'ordre de 10^{14} à 10^{15} Hz, mais reste très élevée par rapport aux fréquences utilisées en TP dans les circuits électrocinétiques (inférieures à 1 MHz) et même par rapport aux ondes hertziennes (radio en MF à environ 100 MHz).

Aucun multimètre utilisé couramment en TP n'est sensible à une fréquence aussi élevée. Il est alors nécessaire de moduler le signal fourni par l'alimentation de l'émetteur, par exemple à la fréquence de 50 Hz du secteur. L'onde hyperfréquence (de 10 GHz) sert alors de porteuse et le multimètre sur calibre mV AC détecte seulement la modulation à 50 Hz, preuve néanmoins de la transmission du signal originel.

Ces ondes sont entièrement réfléchies par une plaque métallique, qu'il suffit de placer à 45 ° des axes (à la façon d'un « miroir ») pour retrouver le signal.

Chapitre 4
■ Électrostatique ■

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} $1/4\pi\varepsilon_0 = 9{,}0.10^{9}$ F^{-1}.m
célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}
charge de l'électron	$-e$ avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}9.10^{-30}$ kg ($m_e c^2 = 0{,}51$ MeV)
charge ; masse du proton	e ; $m_p = 1{,}7.10^{-27}$ kg $\approx 1850\ m_e$

Le cours d'abord

■ L'équation de Maxwell-Faraday

Revoir les propriétés de l'opérateur « gradient » aux questions **5.** à **7.** du chapitre **2.**

1. Comment s'écrit l'équation locale de Maxwell-Faraday en électrostatique et quelle est sa forme intégrale ?

2. Par quelle relation le potentiel scalaire V est-il défini ? Comment la différence de potentiel est-elle reliée à la circulation du champ électrique ? Cas d'un circuit fermé.

3. Comment sont définies les surfaces équipotentielles, les lignes de champ ? Comment se déterminent ces dernières ? Dans quel sens est orienté le champ électrique ? Que peut-on dire des lignes de champ par rapport aux équipotentielles ?

4. Montrer que la force électrique de Lorentz dérive d'une énergie potentielle E_p à exprimer. Donner son travail $W_{M_1 \to M_2}$ sur une charge q en introduisant la différence de potentiel $V_1 - V_2$.

■ L'équation de Maxwell-Gauss

5. La forme locale de l'équation locale de Maxwell-Gauss est-elle modifiée en électrostatique ? Quelle est la forme intégrale qui s'y rapporte ?

6. Cas particulier du théorème de Gauss pour un volume vide de charges. En déduire l'évolution de la norme du champ électrique le long d'un tube de champ.

7. Appliquer le théorème de Gauss à une charge ponctuelle q placée en O pour déterminer le champ $\vec{E}$ qu'elle crée en un point M donné par $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. En déduire le potentiel $V(M)$ créé par cette charge au point M. Dessiner les lignes de champs (en trait plein et orientées) et les équipotentielles (en pointillé) en distinguant le cas $q > 0$ du cas $q < 0$.

8. Déduire de la question précédente les intégrales qui donnent le champ et le potentiel créés par une distribution quelconque de charges.

9. Déduire de la question 7. la loi de Coulomb entre deux charges électriques ponctuelles ; commentaire.

L'équation de Poisson

10. Établir l'équation de Poisson du potentiel scalaire en électrostatique ; que regroupe-t-elle ? Par quoi faut-il la compléter ?

Propriétés de symétrie, d'invariance

11. Qu'appelle-t-on plan de symétrie / d'antisymétrie pour une distribution de charges ? Montrer par une figure simple (dans le cas de 2 charges par exemple) les propriétés que cela induit sur la direction du champ $\vec{E}(M)$ en un point M d'un tel plan.

12. Quels renseignements sur le champ peut-on déduire des propriétés d'invariance par translation ou par rotation d'une distribution de charges ?

13. À quoi reconnaît-on une carte de lignes de champ électrostatique ? En particulier, comment repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe, comment passer des lignes de champ aux surfaces équipotentielles et inversement ?

Potentiel et champ électrostatiques créés par quelques distributions

14. Le fil infini uniformément chargé

Calculer le champ électrostatique créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ, en tout point de l'espace.

15. Le cylindre infini uniformément chargé

Un cylindre d'axe Oz et de rayon a est uniformément chargée avec une densité volumique ρ.

Déterminer en un point M dont la distance à l'axe est r, en fonction de ρ, a et r, le champ électrostatique en distinguant les deux cas $r > a$ et $r < a$. Comment retrouver le cas du fil infini de la question précédente ?

16. Le plan infini uniformément chargé

Calculer le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ, en tout point de l'espace.

17. La boule uniformément chargée

Une sphère S de centre O et de rayon R est uniformément chargée avec une densité volumique ρ.

Déterminer en un point M tel que $OM = r$, en fonction de ρ, R et r, le champ et le potentiel en distinguant les deux cas $r > R$ et $r < R$. Tracer les graphes $E(r)$ et $V(r)$ et les commenter.

Le condensateur plan

18. On considère l'association de deux plans infinis parallèles distant de e et portant l'un P_1, en $z = 0$, une densité de charge surfacique constante $+\sigma$ et l'autre P_2, en $z = e$, une densité de charge surfacique constante $-\sigma$. Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace ; comment varie le potentiel $V(z)$ dans l'espace compris entre les deux plans ?

19. En déduire la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les deux plans. Expliquer pourquoi la distribution précédente de charge modélise un condensateur plan. Exprimer sa capacité C. Comment cette capacité est-elle modifiée lorsque l'espace entre les armatures est remplie d'un diélectrique isolant de permittivité relative ε_r ?

20. Partir de l'une ou de l'autre des expressions vues en électrocinétique de l'énergie d'un condensateur chargé et, en négligeant les effets de bord (en quoi cela consiste-t-il ?), déduire la densité volumique d'énergie électrique u_e dans le condensateur en fonction du champ électrique $\vec{E}$.

Le dipôle électrostatique

21. Donner la définition d'un dipôle électrostatique, de moment dipolaire $\vec{p}$, ainsi que la condition de l'approximation dipolaire.

22. Calculer le potentiel créé par un dipôle et en déduire les composantes du champ électrostatique créé.

23. En déduire l'équation des lignes de champ et les représenter.

24. Quelles actions (somme des forces et moment des forces) subit un dipôle placé dans un champ extérieur $\vec{E}$ uniforme ? Que peut-on dire si $\vec{E}$ est non uniforme ?

25. Quelle est l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}$? Quelles sont les positions d'équilibre de ce dipôle dans ce champ extérieur ?

Le champ gravitationnel

26. À partir de l'analogie champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q et champ de gravitation $\vec{A}$ créé par une masse ponctuelle m, énoncer le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel ; que vaut div $\vec{A}$?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ L'électrostatique est une science fondamentalement vectorielle ; les flèches sur les vecteurs sont obligatoires et une égalité du genre « *vecteur = scalaire* » est à proscrire ; un effort est donc demandé sur l'exactitude et la précision des notations.

☐ Tout calcul de champ doit absolument être précédé par une recherche des symétries et des invariances, qui par ailleurs déterminent le choix des coordonnées (cartésiennes, cylindriques ou sphériques) ; les symétries permettent de déterminer la direction du champ électrique, et les invariances, les variables dont ne dépend pas sa norme.

☐ Lorsqu'on cherche la direction du champ $\vec{E}(M)$ en un point M donné, il faut considérer des plans de symétrie ou d'antisymétrie **passant obligatoirement par ce point M**. Il existe souvent d'autres plans de symétrie, mais qui ne contiennent pas le point M, et ne sont donc pas utiles dans un premier temps. Ils permettent cependant souvent de simplifier l'étude, par exemple, si la distribution admet le plan $z=0$ comme plan de symétrie, alors $E_z(-z)=-E_z(z)$ et $V(-z)=V(z)$, ce qui permet de limiter l'étude à $z\geq 0$.

☐ En règle générale, il faut d'abord calculer le potentiel V (grandeur scalaire) et en déduire $\vec{E}$ par $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V$; cela évite pour un calcul direct du champ $\vec{E}$ les « intégrales vectorielles » souvent malcommodes à calculer lorsque varient à la fois les normes et les directions des champs élémentaires.
Exceptions notables, si les propriétés de symétrie sont suffisantes pour pouvoir utiliser le théorème de Gauss et déterminer directement le champ $\vec{E}$, ou s'il y a des charges à l'infini.

☐ L'application du théorème de Gauss suppose une réflexion préliminaire sur le choix de la « bonne » surface fermée (toujours orientée vers l'extérieur) qu'il est toujours conseillé de choisir en s'inspirant des équipotentielles.

☐ Lorsqu'il s'agit de faire la somme vectorielle de plusieurs champs, rappelons que la norme de la somme n'est pas égale à la somme des normes ! (sauf s'ils sont tous parallèles et de même sens) ; il faut bien sûr effectuer la somme des projections sur la direction résultante. Que la somme soit discrète ou qu'il s'agisse d'une intégrale, il faut toujours projeter *avant* de sommer !

☐ Le potentiel électrostatique est défini à une constante additive près que l'on choisit souvent nulle avec $V = 0$ à l'infini, sauf lorsqu'il existe des charges à l'infini, auquel cas il faut fixer la référence des potentiels en un autre endroit. Se rappeler que le potentiel est toujours une fonction continue (afin que le champ donné par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ ne soit pas infini...).

☐ Lorsqu'un système de charges est constitué de plusieurs sous-systèmes, il est toujours intéressant d'appliquer le théorème de superposition, en particulier pour le potentiel (et pour le théorème de Gauss), pour dire que le potentiel de l'ensemble est la somme des potentiels de chaque partie.

☐ Le champ électrique est toujours orienté vers les potentiels décroissants ; on dit couramment « du + vers le − ».

☐ Le potentiel et le champ électrostatiques créés par une distribution volumique de charges sont définis et continus en tout point de l'espace.
Le potentiel électrostatique créé par une distribution surfacique de charges est défini et continu en tout point de l'espace. En revanche, le champ électrostatique créé par une distribution surfacique de charges subit une discontinuité à la traversée de la surface chargée.
Le potentiel et le champ électrostatiques créés par une distribution linéique de charges ne sont pas définis sur la courbe chargée.

☐ Pour déterminer les lignes de champ (lignes dont les tangentes sont colinéaires au champ), il suffit de traduire que les deux vecteurs $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dM}$ sont parallèles lorsque leurs composantes sont proportionnelles :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \text{ en cartésiennes, ou } \frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \text{ en polaires.}$$

☐ Prendre l'habitude d'orienter les lignes de champ et de les tracer en trait plein ; pour éviter les confusions, on peut convenir de représenter les équipotentielles en trait pointillé.

☐ Il faut toujours bien faire la distinction entre le champ créé par une charge (charge source) et le champ extérieur dans lequel elle se trouve (elle est alors qualifiée de charge test). Le champ crée par une charge ponctuelle n'est pas défini au point où elle se trouve.

☐ Le potentiel d'une charge est en $1/r$ et le champ en $1/r^2$. Bien noter que le potentiel d'un dipôle est en $1/r^2$ et le champ en $1/r^3$.

☐ Les équations de Maxwell sont des équations « locales », ce qui signifie qu'elles sont écrites en un point M donné de l'espace, alors que le théorème de Gauss qui y est rattaché représente la forme « intégrale » car il faut prendre le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée.

☐ En électrostatique lorsque l'énoncé fournit la distribution volumique de charge ρ, alors il faut parfois penser à écrire l'équation locale de Maxwell-Gauss $\text{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ pour déterminer le champ électrique (après étude des propriétés de symétrie et d'invariance), plutôt que de revenir au théorème de Gauss. Le potentiel se déduit alors de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

☐ Ne pas oublier que l'équation de Poisson en électrostatique $\Delta V + \rho/\varepsilon_0 = 0$ traduit les deux équations de Maxwell (Faraday et Gauss). Cette équation possède une solution unique si les conditions aux limites sont bien définies.

☐ Un flux calculé à travers une sphère (donc à $r = cste$ en coordonnées sphériques) pour un champ de vecteur radial qui ne dépend que de la variable spatiale r ($\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$) et qui est donc constant sur la surface envisagée donne $\iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S = E(r).4\pi r^2$. Il est donc totalement inutile de chercher à exprimer l'élément de surface dS qui ne peut en aucun cas contenir dr (à $r = cste$!) ; l'expression $dS = 8\pi r dr$, issue sans réflexion de $S = 4\pi r^2$, est particulièrement affligeante. Même remarque en symétrie cylindrique.

Applications directes du cours

Champ et potentiel électrostatiques

27. Quelle est l'unité de la norme de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$? Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\,r$, quel est l'unité de sa norme ?

28. Par quelles intégrales sont donnés les champs et les potentiels créés par une distribution volumique, surfacique ou linéique de charges ?

29. Quelle est l'énergie potentielle E_p d'une charge ponctuelle q placée en un endroit de l'espace où le potentiel est V ?

30. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction U d'un système de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 distante de r.

31. Le modèle classique de l'atome d'hydrogène

Le modèle est doublement classique, non relativiste et non quantique. L'électron, de charge $-e$ et de masse m est en orbite circulaire uniforme de rayon $r_0 = 53$ pm autour du proton de charge $+e$ supposé fixe en O.

a) Donner la valeur numérique du champ électrique E et du potentiel V créés par le proton au niveau de l'électron dans un atome d'hydrogène. En déduire les valeurs numériques de la force électrique F exercée par le proton sur l'électron et de l'énergie potentielle E_p de l'électron dans le champ du proton.

b) Calculer en fonction de r_0, ε_0, e et m, puis numériquement, la vitesse v et l'accélération a de l'électron.

c) Même question pour l'énergie mécanique E_m, à exprimer d'abord en J puis en eV.

d) Même question pour la période T du mouvement. Dans quel domaine se situe un rayonnement électromagnétique de cette fréquence ?

■ Potentiel et champ créés par quelques distributions

32. Le disque uniformément chargé sur son axe

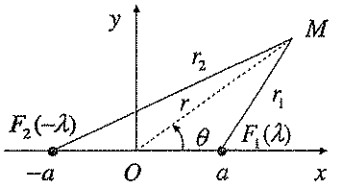
Calculer le potentiel puis le champ électrostatique créé par un disque uniformément chargé en surface, en tout point de son axe. Traiter le cas $R \to \infty$.

33. Charges au sommet d'un carré

Quatre charges identiques q occupent les sommets d'un carré dans le plan xOy aux points de coordonnées $(\pm a, 0, 0)$ et $(0, \pm a, 0)$. Quel est (proposer deux méthodes) le champ sur l'axe en un point M de coordonnées $(0,0,z)$?

34. Deux fils parallèles avec des charges linéiques opposées

Deux fils infinis, parallèles à Oz, sont distants de $2a$ et portent des charges linéiques uniformes $+\lambda$ et $-\lambda$. Un point M du plan Oxy perpendiculaire aux fils est repéré par ses coordonnées polaires r et θ ; de plus, on note $F_1M = r_1$ et $F_2M = r_2$.



a) Donner l'expression du potentiel $V(M)$ en tout point M du plan xOy en convenant de choisir $V = 0$ dans le plan médiateur $x = 0$.

b) Établir l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ pour tout point M de l'axe Oy en utilisant la coordonnée y.

c) Le point M est loin de O ; se placer en coordonnées polaires et définir l'approximation dipolaire. Trouver l'expression simplifiée de $V(r,\theta)$ et en déduire l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{E}(M)$.

35. Le rayon de l'électron !

L'électron de charge $-e$ est modélisé par une sphère S de centre O et de rayon R uniformément chargée dans son volume.

a) Déterminer en un point M tel que $OM = r$, en fonction de ε_0, e, R et r, le champ électrostatique créé par cette boule en distinguant les deux cas $r > R$ et $r < R$.

b) Évaluer l'énergie électrique U_e d'un électron isolé liée à la seule présence du champ électrostatique qu'il crée en fonction de ε_0, e et R.

c) En assimilant cette énergie à l'énergie de repos $E = mc^2$ prévue par la relativité, déterminer le rayon R_e de l'électron ; commentaire. Pourquoi cette méthode peut-elle encore moins s'appliquer au proton ?

Le condensateur plan

36. Que signifient q et V dans la relation $q = CV$ qui, en électrostatique, définit la capacité C d'un condensateur ? S'identifie-t-elle à l'expression utilisée en électrocinétique ? Retrouver alors l'expression de l'énergie U_e de l'énergie emmagasinée à partir de la puissance reçue par le condensateur qui se charge.

37. Deux plans conducteurs et parallèles A et B, de grande taille (devant leur distance), sont maintenus aux potentiels $V_A = 0$ et $V_B = 1{,}8.10^5$ V ; leurs abscisses sont $x_A = 0$ et $x_B = 20$ cm. Que peut-on dire du champ $\vec{E}$ (orienter les lignes de champs), des équipotentielles ? Quelle est la valeur du potentiel au point d'abscisse $x = 12$ cm ?

38. La question **20.** se proposait d'établir l'expression de la densité volumique d'énergie électrique dans le cas particulier du condensateur plan connaissant l'expression de sa capacité.

Dans cette question est examinée la démarche inverse. Rappeler l'expression de l'énergie électrostatique d'une distribution de charges ; commentaires. L'appliquer au champ entre deux plaques et retrouver l'expression de la capacité du condensateur plan.

39. Le condensateur cylindrique

Deux cylindres métalliques C_1 et C_2 de même axe Oz, de même hauteur h et de rayon R_1 et $R_2 > R_1$ portent des charges réparties uniformément en surface $Q_1 = +Q$ (à l'extérieur de C_1) et $Q_2 = -Q$ (à l'intérieur de C_2). Déterminer $\vec{E}(M)$ et $V(M)$ entre les deux cylindres par les méthodes classiques de l'électrostatique en indiquant les équations de Maxwell sous-jacentes, et en déduire la capacité C de ce condensateur cylindrique.

Le dipôle électrostatique

40. On se propose de trouver plus rapidement qu'à la question **22.** le potentiel créé à grande distance par un dipôle. Reprendre les notations de cette question en estimant géométriquement à l'ordre 1 en r/a les distances PM et NM (sans passer par la formule d'Al Kashi).

41. Vérifier que l'expression vectorielle dite intrinsèque du champ électrique créé par un dipôle de moment $\vec{p}$:

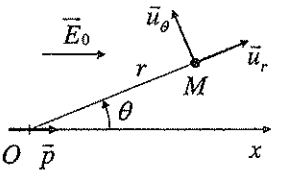
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right)$$

conduit aux bonnes composantes du champ en coordonnées sphériques.

42. On considère une charge q et un dipôle de moment $\vec{p}$. Quelle est l'énergie potentielle électrostatique de la charge dans le champ du dipôle ? Quelle est l'énergie potentielle électrostatique du dipôle dans le champ de la charge ? Conclusion.

43. Dipôle placé dans un champ uniforme

Il règne dans l'espace un champ $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_x$ uniforme et un point M est repéré par ses coordonnées polaires. Au point O où le potentiel électrostatique vaut V_0, est placé un dipôle électrostatique de moment $\vec{p} = p\vec{u}_x$ de même sens que $\vec{E}_0$.



a) Déterminer en tout point M éloigné de O le potentiel électrostatique V, puis le champ électrique $\vec{E}$.

b) Montrer que l'équipotentielle $V = V_0$ est constituée de deux surfaces orthogonales à déterminer. Que peut-on dire du champ électrostatique $\vec{E}$ à l'intersection de ces deux surfaces ? Le vérifier directement.

44. Position d'équilibre d'un dipôle dans un champ non uniforme

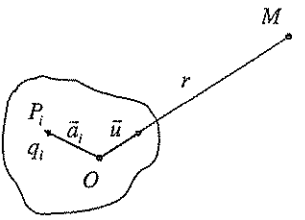
Un cercle de centre O, d'axe Ox et de rayon R, possède une charge Q uniformément répartie (densité linéique de charge uniforme).

a) Calculer le champ électrique créé en un point M d'abscisse x de l'axe.

b) Un dipôle électrostatique de moment $\vec{p}$ est placé en M. Étudier les positions d'équilibre et leur stabilité.

45. Généralisation à une distribution quelconque de charges

On considère une distribution de charges ponctuelles q_i placées aux points P_i à l'intérieur d'un volume d'extension finie. O étant un point quelconque, on note $\overrightarrow{OP_i} = \vec{a}_i$ et $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$, où M est le point d'observation ; l'approximation



dipolaire (M éloigné) signifie $\forall i, \frac{a_i}{r} \ll 1$. On montre alors (avec un calcul semblable à celui de la question **74.**) que le potentiel au point M s'écrit sous la forme du développement limité suivant :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left\| \vec{r} - \vec{a}_i \right\|} = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\left(\sum_i q_i \vec{a}_i \right).\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\sum_i q_i \left(3(\vec{u}.\vec{a}_i)^2 - a_i^2 \right)}{8\pi\varepsilon_0 r^3} + \ldots$$

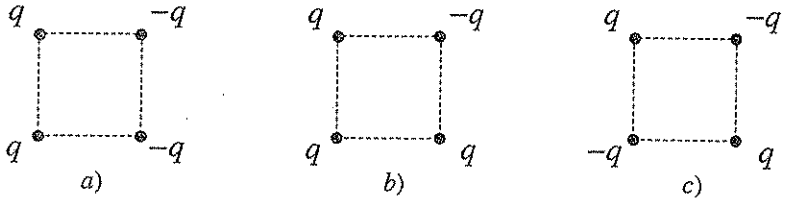
Distinguer les trois cas suivants, dire à quoi est équivalent le système, donner le terme principal de $V(r)$ ainsi qu'un exemple dans le domaine de la chimie :

a) $Q = \sum_i q_i \neq 0$; où a-t-on intérêt à choisir O pour annuler le terme en $1/r^2$?

b) $Q = 0$ et $\sum_i q_i \vec{a}_i \neq \vec{0}$; montrer que le système se comporte comme un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{a}_i = q\overrightarrow{NP}$ où N et P sont les barycentres des charges négatives et positives et q la somme des charges positives.

c) $Q = 0$ et $\sum_i q_i \vec{a}_i = \vec{0}$

46. Dans les situations suivantes, quatre charges se trouvent au sommet d'un carré. Sans calcul, prévoir dans chaque cas la dépendance en r du potentiel à grande distance :

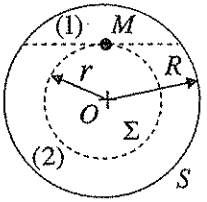


Questions de réflexion ☐ Physique pratique

47. Au point M, une charge q_1 seule dans l'espace crée un champ électrique $\overrightarrow{E_1}(M)$; de même, une charge q_2 seule y crée un champ électrique $\overrightarrow{E_2}(M)$. Qu'appelle-t-on principe d'additivité des champs ? Va-t-il de soi ?

48. Les lignes de champ du dipôle tracées à la question **23.** donnent l'impression qu'elles se referment en O ! Qu'en est-il exactement près des charges du dipôle ? Montrer que dans un circuit en électrocinétique on a un comportement similaire.

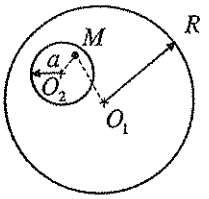
49. Considérer une boule S de centre O et de rayon R, uniformément chargée en volume, et un point M placé à l'intérieur à une distance $r < R$ du centre. On note Σ, la sphère de centre O passant par M ; le plan tangent à Σ passant par M découpe la couche sphérique $S-\Sigma$ extérieure à Σ en deux parties notées (1) et (2). Que signifie le théorème de Gauss en terme de champ créé en M par les charges contenues dans $S-\Sigma$? Que peut-on en déduire pour les champs créés par (1) et (2) en M ?



50. Si en tout point d'une surface de Gauss le champ est nul, que peut-on en déduire quant à la charge contenue à l'intérieur ? La réciproque est-elle vraie ?

51. Exploiter l'analogie interaction coulombienne / interaction newtonienne et se servir des résultats sur la sphère uniformément chargée (voir la question **35.**) pour donner le champ de gravitation $\vec{A}(M)$ (intérieur et extérieur) d'une sphère de masse volumique ρ uniforme.

Application. Un modèle de Terre de centre O_1 et de rayon R possède une masse volumique uniforme sauf dans une petite cavité (vide) de centre O_2 et de rayon $a < R$. Déterminer le champ de gravitation en tout point M à l'intérieur de la cavité en fonction de ρ, de la constante de gravitation universelle G, et du vecteur $\overrightarrow{O_2O_1}$. Quelle particularité possède ce champ ?



52. La molécule d'ammoniac NH_3 a la forme d'une pyramide de sommet l'atome N et de base un triangle équilatéral de sommets les trois atomes H. L'azote étant plus électronégatif que l'hydrogène, chaque atome H porte une charge $+\delta e$ et l'atome N une charge $-3\delta e$ (avec $0 < \delta < 1$). On note a et z les distances du barycentre O de la base de la pyramide aux atomes H et N. Que peut-on déduire de la force exercée par les 3 H sur N ? Considérer le cas $|z| \ll a$.

53. La question **16.** a montré que le champ créé par un plan infini était uniforme dans un demi-espace donné ; expliquer qualitativement comment cela est compatible avec le fait que le champ diminue lorsque l'on s'éloigne des charges.

54. Comment peut-on créer un champ électrique uniforme ? Quelle relation existe-t-il alors entre champ et différence de potentiel ?

55. Pourquoi une règle en plastique frottée contre un tissu attire-t-elle les petits morceaux de papier ?

56. Quelle est l'importance de la notion de dipôle ?

57. Pourquoi les cristaux de sel (de cuisine) se dissolvent-ils facilement dans l'eau et pas dans le benzène ?

58. Pourquoi l'expression « condenser des charges » est-elle *a priori* anti-physique ?

59. Qu'appelle-t-on champ disruptif ? Tension de claquage d'un condensateur ?

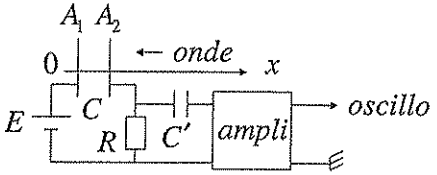
60. À quoi servent les condensateurs dans un circuit électrique ? Citer quelques types de condensateurs.

61. Comparer le poids d'un électron à la force électrique subie dans un champ électrostatique faible de $E = 10\ \text{V.m}^{-1}$ et conclure.

62. Quelle est la vitesse acquise par un électron (initialement de vitesse négligeable) accéléré sous une différence de potentiel de 250 kV ? Commentaire.

63. Comment dans un oscilloscope (analogique), les faisceaux d'électrons arrivent-ils sur l'écran ? Comment sont-ils déviés ?

64. Un microphone électrostatique est composé d'un condensateur plan dont l'une des armatures A_1 est fixe, tandis que l'autre A_2 réagit aux variations de pression dues à une onde acoustique par un déplacement supposé plan le long d'un axe Ox. Ce condensateur de capacité C est relié par une résistance R à un générateur continu de tension E.



Expliquer brièvement et sans calcul le fonctionnement du dispositif, le rôle du condensateur de capacité C' et le type de tension observée à l'oscilloscope lorsque l'onde acoustique est sinusoïdale.

65. Les écrans tactiles capacitifs sont d'une utilisation courante pour les smartphones et tablettes ; quel est le principe de fonctionnement de cette technologie ?

Exercices

66. Potentiel de Yukawa

On considère le potentiel $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/a}$ d'une distribution de charge où $q > 0$ et $a = cste > 0$, constitué du produit d'un facteur coulombien $q/4\pi\varepsilon_0 r$ et d'un terme correctif $e^{-r/a}$ dont il s'agit de trouver l'interprétation.

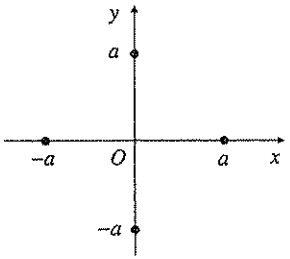
a) Déterminer le champ $\vec{E}(r)$ et le flux $\Phi_\Sigma(r)$ à travers Σ, une sphère de rayon r centrée sur O. Interpréter les cas limites $r \to 0$ et $r \to \infty$.

b) En déduire $\forall r \neq 0$ la densité volumique de charge $\rho(r)$. La limite pour $r \to 0$ pose-t-elle un problème ? Que système est-il modélisé par cette étude ?

c) Quel est le potentiel $V(O)$ créé au centre par la charge répartie ? En déduire la signification de a.

67. Champ électrostatique au voisinage du centre d'un carré

Quatre charges q sont placées dans le plan xOy au sommet d'un carré de diamètre $2a$ comme sur la figure ci-contre. On s'intéresse aux propriétés électrostatiques en un point M au voisinage de l'origine O (avec $z \neq 0$, donc M n'est pas forcément dans le plan de la figure).



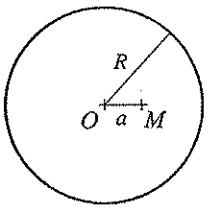
a) Justifier la recherche du développement limité du potentiel $V(M)$ près de l'origine sous la forme ci-dessous et déterminer les 10 constantes de cette expression en traduisant les propriétés de symétrie de V puis l'équation à laquelle satisfait V :

$$V(x,y,z) = V_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z + a'x^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + f zx$$

b) En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$; commentaire.

68. Champ au voisinage du centre (*)

Un cercle de centre O et de rayon R porte une charge avec une densité linéique constante λ. Que vaut le champ électrique au centre O ? Déterminer par une méthode au choix le champ $\vec{E}$ en un point M du plan du cercle, au voisinage de O à une distance $OM = a \ll R$.



69. Champ créé par un disque chargé au voisinage de son axe

On reprend le disque chargé de la question **32.** et on cherche le champ créé en un point très voisin de l'axe, à une distance r de celui-ci.

a) Montrer qu'en ce point le champ s'écrit : $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_z \vec{u}_z$.

b) Justifier que la composante axiale $E_z \vec{u}_z$ a pratiquement la valeur calculée sur l'axe. Déterminer, en appliquant le théorème de Gauss à une surface fermée convenablement choisie, la composante radiale $E_r \vec{u}_r$.

70. Modèle de Thomson de l'atome et polarisabilité

Dans un atome, le noyau P de charge Ze coïncide avec le centre N du nuage électronique, de charge totale $-Ze$ supposée répartie dans une sphère de rayon a avec une densité volumique de charge ρ uniforme.

a) Cette sous-question est uniquement qualitative.
Faire un dessin qui indique dans quel sens se déplacent (faiblement) P et N lorsqu'on applique un champ extérieur $\vec{E}$ (le nuage électronique reste sphérique). En déduire l'apparition d'un dipôle induit ; dans quel sens est dirigé son moment dipolaire $\vec{p}$? Comment est définie la polarisabilité électronique α ? Quelle est sa dimension et à quelle grandeur est-elle proportionnelle ? Dans quels domaines intervient la polarisation ?

b) Calculer le champ $\overrightarrow{E'}(P)$ créé par le nuage électronique en P, puis traduire l'équilibre du noyau. En déduire l'expression du moment dipolaire induit $\vec{p}$ sous la forme $\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \overrightarrow{E}$ et exprimer la polarisabilité électronique α en fonction de a.

AN : Estimer la « taille » NP du dipôle induit dans le cas d'un atome d'hélium placé dans un champ fort $E = 10^4$ V.m^{-1}.

71. Distribution volumique entre deux plans (*)

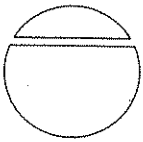
Des charges sont réparties de manière uniforme, avec une densité volumique ρ, entre deux plans infinis d'abscisse $x = \pm a$.

a) Déterminer le champ et le potentiel dans tout l'espace et tracer les courbes de variation en fonction de x (poser $V = 0$ sur le plan médian $x = 0$).

b) Montrer que dans le cas limite où l'épaisseur $2a \to 0$ à charge constante, il est possible de définir un modèle de répartition surfacique dans le plan $x = 0$ avec une densité superficielle σ à déterminer ; comment se comporte la composante normale du champ électrique à la traversée de cette surface chargée ?

72. Oscillateur harmonique et périodicité

La Terre est supposée homogène et le référentiel terrestre galiléen. Un tunnel rectiligne la traverse intégralement dans un plan méridien (on suppose que ce tunnel très étroit ne perturbe pas le champ gravitationnel créé par la planète à symétrie sphérique, aussi bien pour les points à l'extérieur qu'à l'intérieur). Un wagonnet, sur des rails sans frottements, y est lâché à la surface de la Terre avec une vitesse initiale nulle.



a) Montrer que son mouvement est périodique et donner l'expression de cette période T en fonction de la masse volumique ρ et de la constante de gravitation G.

b) Montrer que cette période est la même que celle, dans le référentiel géocentrique, d'un satellite en orbite basse autour de la Terre.

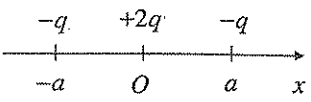
c) Que se passe-t-il si la vitesse initiale du wagonnet n'est pas nulle ?

73. Force de van der Waals

Un atome (ou une molécule) ne possédant pas de moment dipolaire permanent, lorsqu'il est placé dans un champ $\overrightarrow{E}$, se polarise et il apparaît un dipôle induit de moment $\vec{p}_i = \varepsilon_0 \alpha \overrightarrow{E}$ où α est la polarisabilité (voir la question **70.**). On place cet atome au point M et on considère que le champ extérieur envisagé est celui créé par un dipôle permanent de moment $\vec{p}$ placé en O. On admet alors que leur interaction dérive d'une énergie potentielle $U_p = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \alpha E^2$. Caractériser la force entre O et M, et donner sa valeur moyenne lorsque l'orientation de $\vec{p}$ varie.

74. Potentiel d'un quadripôle

Trois charges ponctuelles sont disposées sur un axe Ox comme sur la figure ci-contre :



a) Donner sans étude préalable le graphe du potentiel $V(x)$ en un point quelconque de l'axe.

b) Que peut-on prévoir pour le potentiel créé à grande distance par cette distribution ? Déterminer en coordonnées polaires, dans un plan à préciser, le potentiel $V(r,\theta)$ en un point M quelconque mais très éloigné $(OM = r \gg a)$.

On rappelle pour $\varepsilon \ll 1$ le développement limité $(1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2$.

75. Mouvement d'une particule chargée dans le champ d'un dipôle (*)

Un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p}$ est placé en O de telle sorte que $\vec{p} = p\vec{u}_x$, avec $p > 0$. Une particule ponctuelle de masse m, de charge électrique q (de signe indéterminé), se déplace dans le plan xOy sous la seule action de ce dipôle et loin de lui. Elle est repérée par ses coordonnées polaires r et $\theta = (\vec{u}_x, \vec{r})$.

On pose $k = \frac{pq}{4\pi\varepsilon_0 m}$ et on note E l'énergie mécanique de la particule.

Les conditions initiales (à $t = 0$) sont : $r = r_0$, $\theta = 0$; $\dot{r} = 0$, $r\dot{\theta} = v_0 > 0$.

a) Écrire la relation fondamentale de la dynamique et la conservation de l'énergie. Combien y a-t-il d'équations, pour combien d'inconnues ? Commenter.

b) En déduire une équation ne concernant que r et ses dérivées. Intégrer cette équation et donner l'expression de r en fonction de r_0, E, m et t. Discuter suivant le signe de E et interpréter physiquement.

c) Dans le cas particulier de la « trajectoire circulaire », décrire le mouvement de la particule et exprimer sa période T en fonction de v_0, r_0 et de l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$.

76. Champ et potentiel au voisinage d'un plan chargé ; pression électrostatique

Un conducteur occupant le demi-espace infini $x > 0$ est caractérisé par une distribution de charge de densité volumique $\rho(x) = \rho_0 e^{-x/a}$, alors que le demi-espace $x < 0$ est vide ($\rho = 0$). La surface de séparation est le plan yOz ; a est une distance très petite de l'ordre de la dizaine de nm.

a) Justifier la direction du vecteur champ électrique en tout point de l'espace ; de quelle(s) variable(s) dépend sa norme ? Déterminer son expression $\vec{E}$ pour $x > 0$ et $x < 0$ en admettant que le milieu lui impose d'être nul lorsque $x > 0$ tend vers l'infini. En déduire l'expression du potentiel $V(x)$ en tout point M de l'espace en fixant $V(x = 0) = 0$.

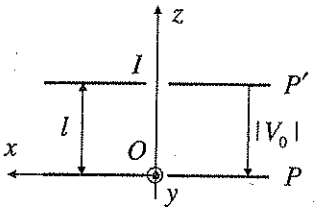
b) Tracer avec soin sur des graphes séparés les courbes de variation de $E_x = \vec{E}.\vec{u}_x$ et de $V(x)$. Comment se déforment ces courbes lorsque $a \to 0$ en supposant que le produit $\rho_0 a$ reste constant (refaire les graphes) ? Montrer que le système est alors équivalent à un modèle de répartition surfacique dans le plan $x = 0$ avec une densité surfacique σ à déterminer.

c) Quelle est la force électrique $\overrightarrow{dF_S}$ à laquelle est soumis un élément de volume $d\tau$ entourant un point M du demi-espace $x>0$? En déduire la résultante des forces $\vec{F}_S$ qui s'exerce sur un tube de section S et de hauteur infinie depuis $x=0$ jusqu'à $x\to\infty$; quel est sa direction et son sens ?

d) Que représente la quantité $|F_S|/S$ et vers quelle limite tend cette valeur lorsque $a\to 0$, le produit $\rho_0 a$ restant constant ? Exprimer le résultat obtenu en fonction de ε_0 et σ, puis en fonction de ε_0 et $E(0)$, valeur du champ électrique au voisinage de la surface $x=0$. Commentaire.

77. Effet d'une charge d'espace (*)

Un faisceau d'ions or Au^+ (de charge e et de masse m_{Au} chacun) créé dans la zone $z<0$ pénètre à vitesse négligeable dans la zone $z>0$ vide, à travers une plaque P percée en O et portée au potentiel nul dans le plan xOy. Une autre plaque P', parallèle à P, placée en $z=l>0$ et percée au point $I(0,0,l)$, est portée au potentiel $V_0<0$.



Toutes les propriétés du système sont invariantes par translation dans le plan xOy et on considère uniquement les mouvements de charges dans la direction Oz en régime permanent (indépendant du temps).

Pour des jets intenses il n'est pas possible de négliger les effets d'influence électrostatique entre les différents ions présents entre les plaques, où réside une charge d'espace. On appelle respectivement $\rho(z)$, $V(z)$ et $v(z)$ la densité volumique de charge, le potentiel électrostatique et la valeur du champ des vitesses des ions à la distance z du plan xOy.

a) Pourquoi le produit $\rho(z)v(z)$ est-il indépendant de z ? Écrire le théorème de l'énergie cinétique et l'équation de Poisson pour obtenir deux autres relations devant être vérifiées par $\rho(z)$, $V(z)$ et $v(z)$, et en déduire l'équation différentielle satisfaite par $V(z)$.

b) Résoudre cette équation en cherchant pour $V(z)$ une solution variant en $(z/l)^\gamma$, où γ est une constante numérique à déterminer, et en déduire la relation de Child-Langmuir donnant la densité de courant j_z :

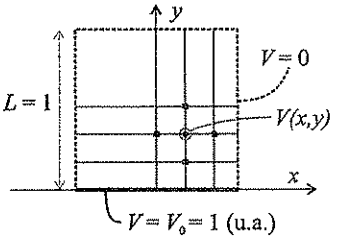
$$j_z=\frac{4}{9}\varepsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m_{Au}}}\frac{(-V_0)^{3/2}}{l^2}$$

c) On souhaite obtenir un courant $I=15{,}5$ µA avec une distance d'accélération de $l=10$ cm et un faisceau supposé d'intensité homogène sur une section droite de surface $s=4$ mm^2. Quelle valeur faut-il donner à la tension accélératrice V_0 sachant que la masse molaire de l'or est $M_{Au}=197$ g.mol^{-1} ? Quelle est alors la vitesse v_I des ions au passage en I sachant que leur vitesse en O est négligeable ?

78. Résolution numérique de l'équation de Laplace en dimension deux

Il s'agit de résoudre numériquement l'équation $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$ à l'intérieur d'un domaine bidimensionnel D, limité par un contour Γ, quand la valeur numérique du potentiel électrostatique est imposée en tout point de Γ (problème de Dirichlet).
Toutes les grandeurs physiques ont été normalisées et sont données dans la suite en unité arbitraire (u.a.) non spécifiée.

Le domaine d'étude est un carré de côté $L=1$ (u.a.) dont trois bords sont maintenus au potentiel nul et le dernier porté au potentiel $V=V_0=1$ (u.a.). Un maillage régulier $n\times n$ de ce domaine permet de représenter le potentiel par un tableau $n\times n$ de nombres flottants qui correspondent aux valeurs prises par le potentiel électrostatique aux nœuds de la grille.



a) Justifier que la valeur $V_{[i,j]}$ du potentiel du nœud (i,j) de la grille est reliée aux valeurs des potentiels des plus proches voisins par la relation approchée :

$$\boxed{V_{[i,j]}=\frac{1}{4}\left(V_{[i+1,j]}+V_{[i-1,j]}+V_{[i,j+1]}+V_{[i,j-1]}\right)}$$

b) La méthode de résolution, dite de relaxation, consiste à évaluer à la $k^{\text{ème}}$ itération la valeur du potentiel $V_{[i,j]}$ en fonction des valeurs précédentes des potentiels des nœuds voisins. La formule de calcul de proche en proche est alors :

$$\boxed{V_{[i+1,j]}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(V_{[i+1,j]}^{(k)}+V_{[i-1,j]}^{(k)}+V_{[i,j+1]}^{(k)}+V_{[i,j-1]}^{(k)}\right)}$$

Écrire une fonction *Dirichlet*(n) qui renvoie un tableau $n\times n$ de nombres flottants vérifiant les conditions aux limites décrites ci-dessus, l'intérieur du tableau étant rempli de nombres aléatoires tirés dans l'intervalle $[0,1]$.

Écrire une procédure *Laplace*(V,N) qui prend en argument un tableau $n\times n$ de nombres flottants, vérifiant les conditions aux limites décrites ci-dessus, et qui effectue N itérations de la méthode de relaxation pour calculer les potentiels des nœuds intérieurs au domaine. Utiliser ces fonctions avec $n=51$ et $N=100\,000$, pour obtenir un tableau de valeurs approchées du potentiel électrostatique aux nœuds de la grille.

c) Écrire le script permettant de réaliser le tracé des équipotentielles à l'intérieur du domaine D, à partir du tableau précédent.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

L'équation de Maxwell-Faraday

1. En statique, $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$, l'équation locale de Maxwell-Faraday se réduit à :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0}}$$

Le champ électrostatique est irrotationnel.

Sa forme intégrale est liée à la conservation de la circulation du champ $\vec{E}$. Par le théorème de Stokes sur un contour (C) fermé avec une surface (S) quelconque s'appuyant dessus :

$$\oint_{(C)} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \iint_{(S)} (\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}).\overrightarrow{dS} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint_{(C)} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0}$$

Le champ électrostatique est à circulation conservative.

2. Le rotationnel d'un gradient étant nul, $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0}$ signifie aussi que $\vec{E}$ est un champ de gradient ; il existe une fonction $V(M)$, définie à une constante près, telle que (c'est la relation de définition du potentiel, le signe – y compris) :

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V(M)}$$

$V(M)$ est le potentiel scalaire électrique.

Cette relation s'écrit également :

$$\boxed{dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dM}}$$

La circulation du champ $\vec{E}$ d'un point A à un point B s'écrit :

$$C_{AB} = \int_{AB} \vec{E}(M).\overrightarrow{dM} = -\int_{AB} \overrightarrow{\text{grad}}\ V(M).\overrightarrow{dM} = -\int_A^B dV(M) = -(V_B - V_A)$$

d'où $\boxed{\int_{AB} \vec{E}(M).\overrightarrow{dM} = V_A - V_B}$

La circulation du champ électrique est donc indépendante du chemin suivi et ne dépend que de la différence de potentiel entre les deux points.

En particulier sur un contour fermé, on retrouve : $\oint \vec{E}(M).\overrightarrow{dM} = V_A - V_A = 0$.

3. Les surfaces équipotentielles sont données par les équations $V(M) = V_0$.

Les lignes de champ sont les lignes dont les tangentes sont colinéaires en tout point au champ électrique. Pour les déterminer, il suffit de traduire que les deux vecteurs $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dM}$ sont parallèles lorsque leurs composantes sont proportionnelles :

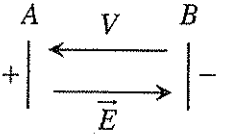
en cartésiennes $\boxed{\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z}}$, ou en cylindriques $\boxed{\frac{dr}{E_r}=\frac{rd\theta}{E_\theta}=\frac{dz}{E_z}}$

La relation $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, ou encore $dV=-\vec{E}.\overrightarrow{dM}$, a pour conséquences :

* le sens du champ $\vec{E}$ est celui des potentiels décroissants : en effet, en circulant le long d'une ligne de champ dans le sens de $\vec{E}$, on a $\vec{E}.\overrightarrow{dM}_{champ}>0$ soit $dV<0$.

Le champ électrique $\vec{E}$ est orienté du + vers le –

Dans l'exemple ci-contre $V_A>V_B$, la flèche du haut indique la différence de potentiel $V=V_A-V_B>0$ et celle du bas le sens du champ électrique $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.



* les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles ; en effet, en circulant sur une équipotentielle, $dV=0$ soit $\vec{E}.\overrightarrow{dM}_{équip.}=0$ et donc $\vec{E}\perp\overrightarrow{dM}_{équip.}$.
* le potentiel $V(M)$ est une fonction continue (puisque ses dérivées sont liées au champ), y compris à la traversée de deux milieux (mais *a priori* en dehors des points où se trouvent les charges sources).

4. La force de Lorentz qu'exerce le champ $\vec{E}$ sur une particule de charge q est :

$$\vec{F}=q\vec{E}=-q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V=-\overrightarrow{\text{grad}}\,(qV)$$

Sous la forme $\vec{F}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p$, elle apparaît comme un champ de force conservatif, et dérive de l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_p=qV+\text{cste}}$$

où V est le potentiel électrique au point où se trouve la charge q.

La force électrique travaille et son travail est :

$$\boxed{W_{M_1\to M_2}=-(E_{p2}-E_{P1})=q(V_1-V_2)}$$

L'équation de Maxwell-Gauss

5. L'équation de Maxwell-Gauss garde la même expression en électrostatique qu'en régime variable :

$$\boxed{\text{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Sa forme intégrale conduit au théorème de Gauss. Soit une surface fermée Σ pour laquelle la normale en tout point est, par convention, orientée vers l'extérieur. Le

flux du champ $\overrightarrow{E}$ à travers la surface fermée Σ est, d'après le théorème d'Ostrograsky :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \text{div}\ \overrightarrow{E}.d\tau = \iiint_{(V)} \frac{\rho d\tau}{\varepsilon_0} = \frac{q_\Sigma^{int.}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_\Sigma = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{q_\Sigma^{int.}}{\varepsilon_0}}$$

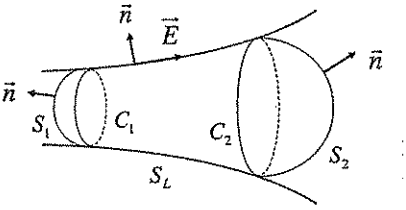
Le flux du champ $\overrightarrow{E}$ à travers la surface fermée Σ est égal à la charge intérieure à Σ divisée par ε_0 : c'est le théorème de Gauss (il reste vrai en régime variable).

6. S'il n'y a pas de charges à l'intérieur de la surface fermée ($\text{div}\ \overrightarrow{E} = 0$), alors le flux de $\overrightarrow{E}$ est conservatif. Cela signifie que si S_1 et S_2 sont deux surfaces s'appuyant sur un même tube de champ du champ électrique, alors $\Phi_1 = \Phi_2$. Et si $S_2 > S_1$ comme sur la figure ci-dessous, alors on en déduit $E_2 < E_1$ soit :

$\|\overrightarrow{E}\|$ **diminue lorsque les lignes de champ s'évasent et inversement**

Des lignes de champ parallèles entre elles décrivent un champ $\overrightarrow{E}$ uniforme.

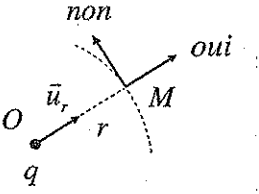
En effet, considérons une surface fermée S vide de charge dont la surface latérale S_L est constituée d'un tube de champ (ensemble de lignes de champ s'appuyant sur les contours C_1 et C_2) et qui est fermée à ses extrémités par deux surfaces ouvertes S_1 et S_2 s'appuyant sur ces contours ; alors $\Phi_S = 0$ d'après le théorème de Gauss et par additivité du flux :



$$\Phi_S = \Phi_{S_L} + \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0 - \Phi_1 + \Phi_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_1 = \Phi_2}$$

$\Phi_{S_L} = 0$ car sur le tube $\vec{n} \perp \overrightarrow{E}$; par ailleurs, on note $\Phi_2 = \Phi_{S_2}$ et $\Phi_1 = -\Phi_{S_1}$ les flux pris dans le sens du champ (alors que la normale $\vec{n}$ est partout extérieure).

7. Le champ $\overrightarrow{E}$ est à divergence non nulle, mais son rotationnel est nul ; cherchons-le colinéaire à $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. De plus pour des raisons d'invariance « par rotation » de la charge, la norme $\|\overrightarrow{E}\|$ ne dépend que de la distance $r = OM$, d'où $\overrightarrow{E} = E(r)\,\vec{u}_r$ (coordonnées sphériques).



Le théorème de Gauss appliqué à une sphère Σ de centre O et de rayon r donne :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_{(\Sigma)} E(r).dS = E.S = E(r).4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

d'où le champ créé en M par la charge q en O :

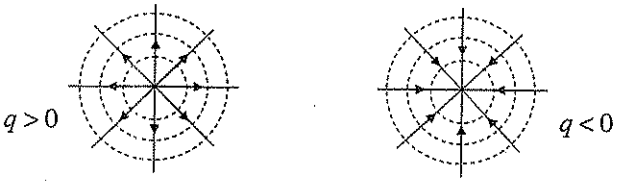
$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r} \quad \text{(unité : V.m}^{-1}\text{)}$$

Par $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{\text{grad}}_M\, V(M)$ soit $E=E_r=-\dfrac{dV}{dr}$ puisque V ne dépend que de r :

$$\boxed{V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \quad \text{(unité : V)}$$

en ayant pris le potentiel nul à l'infini (choix de la constante nulle).

Si $q>0$, alors $\text{div}\,\vec{E}>0$ et si $q<0$, alors $\text{div}\,\vec{E}<0$; les lignes de champ électrique (en trait plein) sont des demi-droites qui divergent à partir d'une charge positive et convergent vers une charge négative ; les équipotentielles (en pointillé) sont des sphères centrées sur la charge.



8. Dans le cas d'une distribution quelconque de charges, notons M le point d'observation où sont calculés $V(M)$ et $\vec{E}(M)$, et P les points sources où se trouvent les charges responsables du potentiel et du champ, $r=PM$ et $\vec{u}_r=\overrightarrow{PM}/r$. Les intégrales par lesquelles sont donnés le champ et le potentiel d'une distribution d'extension finie de charges sont alors, par principe de superposition (voir la question **47.**) et en généralisant le résultat de la question précédente :

$$\boxed{V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r}$$

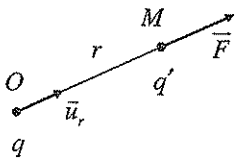
où l'intégrale, triple, double ou simple, porte sur l'étendue des sources avec $dq=\rho(P)d\tau$ pour une distribution volumique, $dq=\sigma(P)dS$ pour une distribution surfacique, et $dq=\lambda(P)dl$ pour une distribution linéique.

Pour un ensemble de charges ponctuelles q_i en P_i : $V(M)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\dfrac{q_i}{r_i}$ où $r_i=P_iM$.

9. Si au point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{r}=r\vec{u}_r$, on place une charge q' dans le champ $\vec{E}(M)$ de q placée en O, alors cette charge q' subit la force électrostatique de Coulomb :

$$\boxed{\vec{F}=q'\vec{E}(M)=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r} \quad \text{ou encore} \quad \vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\vec{r}$$

avec $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8{,}99.10^9$ F^{-1}.m ou $\varepsilon_0=8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}



appelée permittivité diélectrique du vide.
(sur le schéma q et q' sont de même signe).

De manière plus générale, si deux charges q_1 et q_2 sont placées en deux points M_1 et M_2, la force de 1 sur 2 est $\overrightarrow{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\| M_1 M_2 \|^3} \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Cette force vérifie le principe de l'action et de la réaction.

L'équation de Poisson

10. L'équation de Poisson du potentiel scalaire regroupe les deux équations de Maxwell de l'électrostatique :

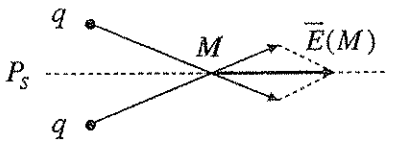
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{div}\left(-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

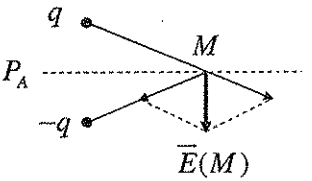
La résolution de cette équation à dérivées partielles du second ordre n'est en général pas aisée (sauf dans les cas à géométrie simple où elle est très utile car elle permet en une équation de traduire l'ensemble des deux équations de Maxwell concernées) ; elle doit être complétée par les conditions sur V aux limites du domaine d'intégration.

Propriétés de symétrie, d'invariance

11. P_S est un plan de symétrie pour une distribution de charges si à toute charge d'un côté du plan correspond une charge de l'autre côté, disposée de manière symétrique par rapport au plan, de même valeur et de même signe. Le dessin de gauche montre clairement qu'en tout point M de ce plan, le champ $\overrightarrow{E}(M)$ est alors contenu dans le plan de symétrie.

P_A est un plan d'antisymétrie pour une distribution de charges si à toute charge d'un côté du plan correspond une charge de l'autre côté, disposée de manière symétrique par rapport au plan, de même valeur absolue mais de signe opposé. Le dessin de droite montre clairement qu'en tout point M de ce plan, le champ $\overrightarrow{E}(M)$ est alors orthogonal au plan d'antisymétrie.





12. Lorsque la distribution de charges est invariante par translation le long d'un axe Oz (ce qui suppose la distribution infinie dans cette direction), alors la norme du champ ne dépend pas de la variable z.

Lorsque la distribution de charges est invariante par translation le long d'un plan xOy (ce qui suppose la distribution infinie dans ces directions), alors la norme du champ ne dépend pas des variables x et y.

Lorsque la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe Oz, alors la norme du champ ne dépend pas de la variable θ (variable angulaire autour de cet axe).

Ces propriétés traduisent le principe de Curie selon lequel les symétries et invariances des causes se retrouvent dans les effets produits.

13. Pour qu'il y ait champ électrique il faut qu'il y ait des sources, donc des distributions de charges (ponctuelles, linéiques ou surfaciques), or les lignes de champ divergent à partir d'une charge positive et convergent vers une charge négative comme cela a été vu à la question **7.** (équation de Maxwell-Gauss).

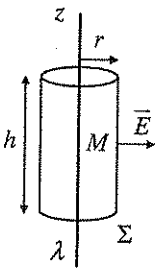
Par ailleurs comme le potentiel décroît le long des lignes de champ (équation de Maxwell-Faraday), ces dernières ne se referment pas (voir la question **48.**).

Enfin rappelons que les lignes de champ s'évasent lorsque la norme du champ diminue (M.G.) et inversement, et que les surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ (M.F.). Par exemple un conducteur en équilibre est équipotentiel et donc les lignes de champ qui partent ou arrivent sur ce conducteur sont orthogonales à la surface du conducteur.

Potentiel et champ électrostatiques créés par quelques distributions

14. Le fil infini uniformément chargé

Le point M est repéré par ses coordonnées cylindriques d'axe Oz supportant la ligne chargée. Le plan contenant la ligne et le point M est un plan de symétrie, ainsi que le plan passant par M et auquel Oz est perpendiculaire. Le champ créé en M appartenant à l'intersection des deux est donc suivant $\overrightarrow{OM}$, soit $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$. La distribution est invariante par rotation autour de l'axe Oz et par translation parallèlement à Oz, $\| \vec{E} \|$ est indépendante de θ et de z, d'où :



$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

On choisit comme surface de Gauss Σ une surface cylindrique d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h, fermée par deux disques de section S.

$\Phi_\Sigma = \Phi_{S_L} + \Phi_{S_+} + \Phi_{S_-}$ avec à travers les surfaces de base $\Phi_{S_+} = \Phi_{S_-} = 0$ car $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$, à travers la surface latérale $\Phi_{S_L} = E(r) 2\pi r h$.

Le théorème de Gauss donne $\Phi_\Sigma = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0}$, finalement : $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r}$

$\vec{E}$ n'est pas défini sur la ligne chargée.

Par $dV = -E(r)dr$ on déduit le potentiel $V(r) = -(\lambda / 2\pi r)\ln r + cste$ qui n'est pas accessible par calcul direct pour cause de charges à l'infini...

15. Le cylindre infini uniformément chargé

Les propriétés de symétries et d'invariance de la distribution de charge sont celles du fil infini de la question précédente, d'où la recherche d'un champ sous la forme :

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

On choisit également comme surface de Gauss Σ une surface cylindrique d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h, fermée par deux disques de section S.

Comme précédemment le flux à travers les surfaces de base est nul et il reste que le flux à travers la surface latérale, et d'après le théorème de Gauss :

$$\Phi_\Sigma = E(r)2\pi r h = \frac{Q_\Sigma^{int.}}{\varepsilon_0}$$

- $r < a$, la charge intérieure à Σ est $Q_\Sigma^{int.} = \rho\pi r^2 h$, d'où $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{u}_r}$
- $r > a$, la charge intérieure à Σ est $Q_\Sigma^{int.} = \rho\pi a^2 h$, d'où $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r}$

On constate que le champ est continu en $r = a$, à la surface du cylindre.

Lorsque le rayon a du cylindre tend vers 0 tout en conservant la même charge à l'intérieur, ce qui suppose que la densité volumique ρ tende vers l'infini, alors la distribution volumique limite tend vers la distribution linéique de la question précédente ; si λ est sa densité linéique, alors la charge commune sur une hauteur h des deux types de distribution permet d'écrire :

$$\rho\pi a^2 h \equiv \lambda h \quad \text{soit} \quad \boxed{\lambda = \rho\pi a^2}$$

montrant bien que si $a \to 0$ alors $\rho \to \infty$.

Avec cette substitution, le champ $(r > a)$ $\vec{E}(M) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$ s'écrit $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

et redonne le champ de la question précédente.

16. Le plan infini uniformément chargé

Le plan P considéré est le plan xOy défini par $z = 0$; pour un point M quelconque, les plans xMz ou yMz sont plans de symétrie pour la distribution de charges ; le champ électrique appartenant à ces deux plans est dirigé suivant leur intersection, il est donc suivant $\vec{u}_z$. Par ailleurs, la distribution de charges est invariante par translation le long d'un plan xOy et donc la norme du champ ne dépend pas des variables x et y.

Ceci conduit à chercher un champ $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ (un champ qui diverge !) avec en plus $E(-z) = -E(z)$ car le plan P est lui-même un plan de symétrie pour la distribution (le champ n'est pas défini sur P).

Choisissons comme surface de Gauss Σ un cylindre d'axe Mz, symétrique par rapport au plan P, et de surface de base S ; le théorème de Gauss donne $\Phi_\Sigma = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$.

La surface fermée est orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Par ailleurs $\Phi_\Sigma = \Phi_{S_L} + \Phi_{S_+} + \Phi_{S_-}$ avec à travers la surface latérale $\Phi_{S_L} = 0$ car $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_L$ et à travers les surfaces de base $\Phi_{S_+} = E(z)S$, avec $E(z)$ algébrique et S arithmétique, et $\Phi_{S_-} = -E(-z)S = E(z)S$, d'où :

$$\boxed{\vec{E}(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E}(z<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z}$$

Ce champ s'avère uniforme dans chaque demi-espace (indépendant de la distance au plan), voir la question **53.** à ce sujet. Ce calcul théorique, conduit avec le théorème de Gauss, est cohérent avec les résultats de la question **32.** ; il correspond au « passage à la limite » suivant modélisant une situation réelle : point M infiniment proche d'une surface chargée.

17. La boule uniformément chargée

Pour un point M donné, tout plan passant par M et O est plan de symétrie ; le champ $\vec{E}(M)$ appartenant à leur intersection est donc radial, avec une norme indépendante de θ et φ par invariance de la distribution par rotation autour de O suivant un parallèle ou un méridien ; en coordonnées sphériques : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ (ce qui correspond bien à un champ divergent).

La surface de Gauss Σ indiquée est une sphère de centre O et de rayon r ; le champ est partout colinéaire aux vecteurs surfaces élémentaires (la sphère Σ est une équipotentielle) et est uniforme (on intègre une constante) sur cette surface ; le flux est :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_\Sigma E(r).dS = E(r).S = E(r).4\pi r^2$$

Rq : $E(r)$ est algébrique, à savoir $E(r) > 0$ si $\rho > 0$ et $E(r) < 0$ si $\rho < 0$.

Pour appliquer le théorème de Gauss, $\Phi_\Sigma = \frac{Q_\Sigma^{int.}}{\varepsilon_0}$, il faut distinguer deux cas :

* $r > R$, la charge intérieure à Σ est la charge contenue dans S : $Q_\Sigma^{int.} = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

d'où $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$

comme si toute la charge $Q_\Sigma^{int.}$ était ponctuelle, placée en O.

Le potentiel correspondant et donné par $E_r = -\frac{dV}{dr}$ soit $V(r) = -\int E(r)dr$ d'où

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}}$$

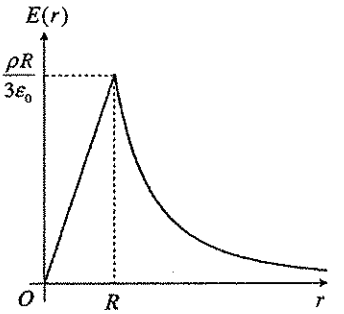
en prenant le potentiel nul à l'infini.

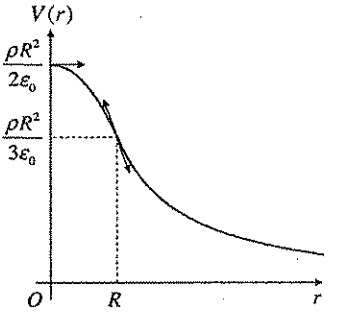
* $r < R$, la charge intérieure à Σ est une fraction de la charge contenue dans S :

$$Q_{\Sigma}^{int.} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \text{, d'où } \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}}$$

Le potentiel est $V(r) = -\int E(r)dr = V_0 - \dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$, la constante V_0 est déterminée pour que la fonction potentiel soit continue en $r = R$, d'où $V_0 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$ et

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)}$$

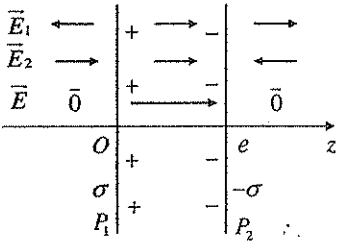




On constate que le champ est continu en $r = R$, à la surface de la sphère ; il en est donc de même de la pente du potentiel en ce point.

■ Le condensateur plan

18. Le plan de la question **16.**, en $z = 0$ avec une charge surfacique $+\sigma$, est désigné par l'indice 1 ; un second plan, en $z = e$ avec une charge surfacique $-\sigma$, est désigné par l'indice 2.
La figure représente la superposition des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$; elle montre que les champs s'annulent en dehors du dispositif pour $z < 0$ et $z > e$ et que le champ, « doublé » entre les plans, est uniforme :



$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z}$$

Le potentiel entre les deux plans est alors donné par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow \frac{dV}{dz} = -E = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ soit } \boxed{V(z) = V_1 - \frac{\sigma z}{\varepsilon_0}}$$

Il s'agit d'une fonction linéairement décroissante de z (V_1, potentiel du plan P_1, est une constante arbitraire).

19. La différence de potentiel entre les deux plans est :

$$V_1 - V_2 = V(z=0) - V(z=e) = V_1 - (V_1 - \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

Ces plans infinis sont un modèle pour deux surfaces équipotentielles finies de grande taille par rapport à leur distance e, ce qui correspond à la définition d'un condensateur.

La charge q_1 de l'armature 1 de surface S est $q_1 = \sigma S$ (2)

L'élimination de σ entre (1) et (2) conduit à

$$\boxed{q_1 = C(V_1 - V_2)} \text{ avec } \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

C est la capacité du condensateur (en Farad, et dans la pratique, a la dimension de $\varepsilon_0 \times longueur$), elle augmente quand S augmente et quand e diminue.

Lorsque l'air entre les armatures est remplacé par un diélectrique, alors la capacité est augmentée ; plus précisément il faut remplacer la permittivité ε_0 du vide par celle du milieu, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ où $\varepsilon_r > 1$ est la permittivité relative : $\varepsilon_r = 1$ pour l'air, $\varepsilon_r = 2$ pour le papier, $\varepsilon_r = 6$ pour le verre...

20. On note $\tau = S \times e$ le volume entre les deux armatures du condensateur de surface finie S chacune et distantes de e. Négliger les effets de bord consiste à prendre le champ électrique uniforme entre les plaques et nul à l'extérieur, ce qui est acceptable dans l'hypothèse où l'épaisseur e entre les plaques est faible devant la dimension caractéristique $\sqrt{S}$ de chacune d'entre elles.

On peut partir de l'une ou l'autre des expressions connues (voir la question **36.**) :

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma S)^2}{\varepsilon_0 S / e} = \frac{1}{2} S e . \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \tau . \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$$

$$U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e}(\vec{E}e)^2 = \tau . \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$$

La densité volumique d'énergie électrique $u_e = dU_e / d\tau = U_e / \tau$ ici puisqu'elle est uniforme s'écrit :

$$\boxed{u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2}$$

Il s'agit d'une grandeur positive, quadratique par rapport au champ.

Le dipôle électrostatique

21. Un dipôle est un doublet de deux charges opposées $-q$ en N et $+q$ en P, et séparées d'une distance a. Cette association est caractérisée par son moment dipolaire :

$$\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{NP} = qa\,\vec{u}_x}$$

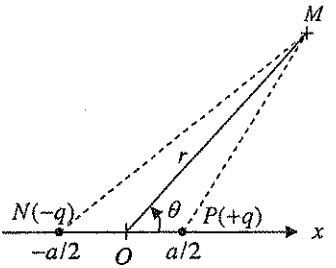
La condition d'étude consiste à observer le potentiel et le champ de ce dipôle (actif) en un point M éloigné du dipôle vis-à-vis de sa taille. Plus précisément, si O est le milieu de NP, l'approximation dipolaire est satisfaite avec la condition $r = OM \gg a$.

22. En M le potentiel est :

$$V(M) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 NM}$$

Pour PM, en élevant au carré $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$, il vient $PM^2 = r^2 - ra\cos\theta + a^2/4$

d'où $\dfrac{1}{PM} = \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{a}{r}\cos\theta + \dfrac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}$



Sachant que $\dfrac{a}{r} \ll 1$, on effectue un développement limité au premier ordre en appliquant :

$$(1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} \;:\; \frac{1}{PM} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

Pour trouver $\dfrac{1}{NM}$, inutile de reprendre, il suffit de remplacer a par $-a$ dans $\dfrac{1}{PM}$:

$$\frac{1}{NM} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

$$V(M) \approx +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Avec $p = qa$ et $\vec{p}.\vec{u}_r = p\cos\theta$, on retient :

$$\boxed{V(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}.\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

Ce potentiel en $1/r^2$ décroît donc bien plus vite que celui d'une charge en $1/r$.
En coordonnées sphériques d'axe Ox, l'angle φ autour de Ox n'intervient pas à cause de l'invariance par rotation du dipôle autour de Ox.
$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ donne les trois composantes en coordonnées sphériques :

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}, \quad \boxed{E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}} \text{ et } \boxed{E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0}$$

Ce qui se résume en :

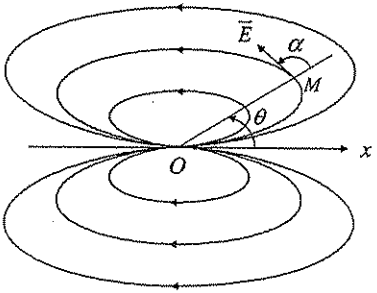
$$\boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{vmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}}$$

Rq : Le plan PNM est un plan de symétrie, donc $\vec{E}$ appartient à ce plan et tout se passe comme si on y utilisait les coordonnées polaires dans ce plan.

23. L'équation des lignes de champ est donnée par : $\dfrac{dr}{E_r} = \dfrac{rd\theta}{E_\theta}$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} = 2\frac{d\sin\theta}{\sin\theta}$$

soit $\boxed{r = r_0 \sin^2\theta}$ où $r_0 = r(\theta = \pi/2)$

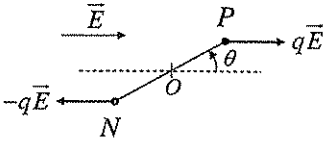


La représentation est valable loin de O ; les lignes de champ vont de $+q$ à $-q$ (elles ne se referment pas en O ...).

Propriétés : L'angle α entre le champ $\vec{E}$ et le rayon vecteur est $\tan\alpha = \dfrac{E_\theta}{E_r} = \dfrac{1}{2}\tan\theta$.

24. La résultante des forces sur le dipôle (passif) est la somme des forces sur chacune des deux charges :

$$\vec{F} = q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N)$$



* si $\vec{E}$ est uniforme soit $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$, alors

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0}}$$

* si $\vec{E}$ est non uniforme, alors $\vec{F} \neq \vec{0}$ et qualitativement, le dipôle est attiré du côté où le champ est le plus fort, indépendamment de son sens.

Le moment qui s'exerce (effet tournevis) sur le dipôle est, en champ uniforme :

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E} + \overrightarrow{ON} \wedge (-q\vec{E}) = q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

Il s'agit d'un couple, de moment indépendant du point O.

En champ non uniforme (s'il ne varie « pas trop »), on garde la même expression de $\vec{M}$ avec $\vec{E} = \vec{E}(O)$.

25. L'énergie potentielle du dipôle est, en notant $V(M)$ le potentiel associé au seul champ extérieur $\vec{E}$: $E_p = qV(P) - qV(N)$ (ceci exclut l'énergie d'interaction d'une charge dans le champ de l'autre qui, pour un dipôle rigide, reste constante dans tout déplacement).

Pour un déplacement $d\vec{r}$ autour du point M, le potentiel varie de $dV = -\vec{E}.d\vec{r}$ (issu de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$), soit $V(P) - V(N) = -\vec{E}.\overrightarrow{NP}$, d'où

$$E_p = -q\overrightarrow{NP}.\vec{E} \Rightarrow \boxed{E_p = -\vec{p}.\vec{E}}$$

Comme précédemment, en champ non uniforme, on garde la même expression avec $\vec{E} \approx \vec{E}(O)$ (à l'ordre le plus bas, car à l'échelle du dipôle, le champ varie peu).

Dans les positions d'équilibre, le moment $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ est nul, ce qui signifie que le dipôle s'aligne sur le champ extérieur. L'énergie potentielle du dipôle $E_p = -\vec{p}.\vec{E}$ montre que la situation où $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont de sens opposé est instable (E_p maximale), alors que la situation où $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont de même sens est stable (E_p minimale). Ce résultat montre aussi qu'en champ inhomogène, le dipôle subit bien une force puisque, lorsqu'il s'est orienté, il est attiré par les champs forts (qui minimisent davantage E_p) et qu'on peut évaluer par $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = \overrightarrow{\text{grad}}\, (\vec{p}.\vec{E})$.

Le champ gravitationnel

26. Le champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle : $\vec{A}(M) = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r$ est newtonien comme le champ électrostatique. Le théorème de Gauss s'applique avec les équivalences : $m \leftrightarrow q$ et $-G \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, soit :

$$\boxed{\oiint_\Sigma \vec{A}.\overrightarrow{dS} = -4\pi G\, m_\Sigma^{int.}}$$

où $m_\Sigma^{int.}$ est la masse contenue dans le volume intérieur à la sphère Σ.

L'équation de Maxwell-Gauss pour le champ électrique $\text{div}\, \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ où ρ est la densité volumique de charge s'écrit avec la même équivalence pour le champ gravitationnel :

$$\boxed{\text{div}\, \vec{A} = -4\pi\rho G}$$

où ρ est cette fois-ci la masse volumique (ou densité volumique de masse).

La différence de signe traduit le fait que deux masses s'attirent alors que deux charges de même signe se repoussent.

Applications directes du cours

Champ et potentiel électrostatiques

27. L'opérateur gradient, comme dérivée par rapport à une longueur, est « dimensionné » : la norme de $\overrightarrow{\text{grad}}$ est en m^{-1}.

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ a une norme en V.m^{-1} ; $\overrightarrow{\text{grad}}\, r = \vec{u}_r$, une norme sans dimension.

28. Notons M le point d'observation où sont calculés $V(M)$ et $\vec{E}(M)$, et P les points sources où se trouvent les charges responsables du potentiel et du champ, $r = PM$ et $\vec{u}_r = \overrightarrow{PM} / r$.

distribution volumique : $V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(P)d\tau}{r}$ et $\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(P)d\tau}{r^2}\vec{u}_r$

distribution surfacique : $V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma(P)dS}{r}$ et $\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma(P)dS}{r^2}\vec{u}_r$

distribution linéique : $V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda(P)dl}{r}$ et $\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda(P)dl}{r^2}\vec{u}_r$

De manière générale, il convient de retenir, avec $r=PM$, les intégrales « génériques » portant sur une distribution finie de charges :

$$\boxed{V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r}$$

29. Une charge test ponctuelle q est située en $\vec{r}$ dans un champ électrique extérieur $\vec{E}$ créé par des charges sources quelconques et dérivant du potentiel V. Lors d'un déplacement $d\vec{r}$, la force électrostatique $q\vec{E}$ effectue le travail :

$\delta W_{élec.}=q\vec{E}.d\vec{r}=-qdV$ en ayant traduit $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ soit $dV=-\vec{E}.d\vec{r}$

Ce travail est une différentielle notée : $\delta W_{élec.}=-dE_p$ avec $\boxed{E_p=qV}$

La force électrostatique dérive donc d'une énergie potentielle E_p, et dans un déplacement fini, son travail $W_{élec.}=q(V_i-V_f)$ ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions initiale et finale.

Une charge ponctuelle q placée en un endroit de l'espace où le potentiel est V possède l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_p=qV}$$

30. La force exercée par q_1 sur q_2 : $\vec{F}_{1/2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_{12}$, dérive de l'énergie potentielle U telle que $\vec{F}_{12}=-\overrightarrow{grad}\,U$; $U=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, avec $U=0$ pour $r\to\infty$.

On peut aussi appliquer $E_p=q_1V_2$ avec $V_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ en considérant que la charge q_1 est placée dans le potentiel créé par la charge q_2 (ou inversement).

31. Le modèle classique de l'atome d'hydrogène

a) Le champ est en norme $E=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$; avec $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9.10^9$ F^{-1}.m, $e=1{,}6.10^{-19}$ C, et $r_0=53.10^{-12}$ m le rayon de l'atome d'hydrogène, il vient $\underline{E=5.10^{11}\text{ V.m}^{-1}}$, ce qui est énorme.

Le potentiel est $V=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$ soit $\underline{V=27\text{ V}}$.

Alors la force attractive, radiale, en norme, et l'énergie potentielle sont $F = eE$ et $E_p = -eV$, soit $F = 8.10^{-8}$ N (très grande devant la force gravitationnelle) et $E_p = -4,3.10^{-18}$ J $= -27,1$ eV.

b) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron, $m\vec{a} = \vec{F}$, s'écrit en projection sur $\vec{u}_r$:

$$-m\frac{v^2}{r_0} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r_0}}}$$

AN : $v = 2,2.10^6$ m.s^{-1} ; cette vitesse, $v \approx 2200$ km.s^{-1}, est énorme pour une particule matérielle (on a $v/c = 1/137$ la constante dite de structure fine).

On en déduit l'accélération $a = \frac{v^2}{r_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r_0^2}}$

AN : $a = 9,0.10^{22}$ m.s^{-2}, une accélération colossale !

c) L'énergie cinétique de l'électron est $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$

Son énergie potentielle est donnée soit par $E_p = -eV$, soit par $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$:

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -2E_c$$

d'où l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p = E_c - 2E_c = -E_c$, soit :

$$\boxed{E_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}}$$

S'agissant d'un état lié pour une force attractive, on a $E_m < 0$.

AN : $E_m = -2,17.10^{-18}$ J $= -13,6$ eV

Rq : On retrouve la valeur de l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, $E_i = |E_m| = 13,6$ eV, correspondant à l'énergie qu'il faut fournir à l'atome pour arracher (ou libérer) l'électron du proton.

d) La période de révolution est donnée par $T = \frac{2\pi r_0}{v}$ soit $\boxed{T = \frac{2\pi}{e}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m}\, r_0^{3/2}}$

$T^2 / r_0^3 = cste$ redonne la 3^e loi de Kepler.

AN : $T = 1,5.10^{-16}$ s

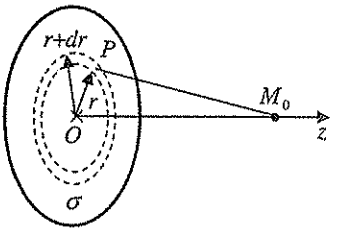
La longueur d'onde du rayonnement électromagnétique correspondant à cette période est $\lambda = cT = 0,045$ µm, ce qui se situe dans le domaine de l'ultraviolet. On ne peut donc pas espérer ioniser un atome d'hydrogène avec un photon dans le domaine visible.

■ Potentiel et champ créés par quelques distributions

32. Le disque uniformément chargé sur son axe

Tout plan contenant l'axe OM_0 étant plan de symétrie, le champ $\vec{E}(M_0)$ est porté par l'axe Oz.

Passons ici par une détermination préalable du potentiel en M_0 ; l'ensemble des points source P du plan à égale distance de M_0 constitue une couronne élémentaire de centre O ; gardons r comme variable d'intégration.



Le potentiel élémentaire créé par la couronne de surface $2\pi r dr$ est :

$$dV(M_0)=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM_0}=\frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}$$

d'où par intégration sur le disque : $V(M_0)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right)$

$z>0$: $\boxed{V(M_0)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)}$ et $z<0$: $\boxed{V(M_0)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}+z\right)}$

Pour $z=0$, $\boxed{V(O)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$, le potentiel est continu à la traversée de la surface chargée.

Les symétries montrent que le champ est suivant Oz, soit $\vec{E}(M_0)=-\frac{dV(M_0)}{dz}\vec{u}_z$.

$z>0$, $\boxed{\vec{E}(M_0)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{u}_z}$; $z<0$, $\boxed{\vec{E}(M_0)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{u}_z}$

Pour $z\to 0^+$, on a $\vec{E}\to\vec{E}_+=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$, et pour $z\to 0^-$, on a $\vec{E}\to\vec{E}_-=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$. Le champ est discontinu à la traversée du disque chargé en surface, la discontinuité est :

$$\boxed{\vec{E}_+-\vec{E}_-=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z}$$

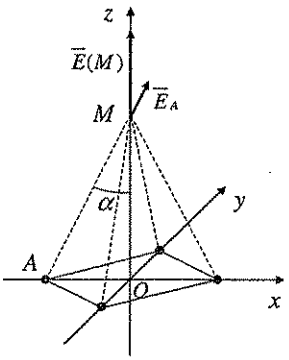
Rq : Si $R\to\infty$, le disque se comporte comme un plan infini uniformément chargé, le champ est uniforme de part et d'autre (voir la question **16.**) :

$$\text{si } z>0,\ \vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z\ ;\text{si } z<0,\ \vec{E}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z.$$

Résultat cohérent avec le fait que le plan du disque soit plan de symétrie.

33. Charges au sommet d'un carré

Les plans xOz et yOz contenant le point M sont des plans de symétrie des charges ; la champ $\vec{E}(M)$ appartenant à leur intersection est donc porté par l'axe Oz : $\vec{E}(M) = E\,\vec{u}_z$. Dans un cas simple comme ici, la détermination directe du champ est possible ; la méthode par le potentiel est, elle, toujours indiquée.



* Les quatre champs ont même norme $E_A = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)}$ et sont inclinés sur l'axe Oz d'un angle α tel que $\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}$; la somme des projections est :

$$E = 4E_A\cos\alpha = 4\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)}\times\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

et finalement :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{4qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}}\,\vec{u}_z}$$

résultat valable pour $z \geq 0$ et $z \leq 0$ puisque $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$.

* Les charges étant à égale distance du point M y créent toutes le même potentiel d'où le potentiel total en M : $V(M) = 4\times V_A = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}$; on en déduit la composante du champ sur l'axe par : $E = -\dfrac{dV}{dz} = \dfrac{4qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}}$, car par symétrie $\vec{E}(M)$ est porté par Oz, d'où $\vec{E}(M) = E\,\vec{u}_z$.

34. Deux fils parallèles avec des charges linéiques opposées

a) On considère d'abord un fil infini unique de champ $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r$ (voir la question **14.**).

Le potentiel correspondant donné par $E_r = -\dfrac{dV}{dr}$ est

$$V(r) = -\int E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + V_0$$

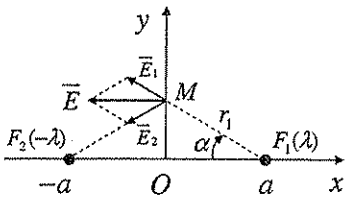
Pour l'ensemble des deux fils, par somme :

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_2 + V_0'$$

et pour $r_1 = r_2$ (plan yOz), on veut $V(M) = 0$ soit $V_0' = 0$, d'où

$$\boxed{V(M)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

b) On vient de voir que le plan yOz est équipotentiel et correspond à $V(M)=0$; le champ y est donc perpendiculaire (soit colinéaire à $\vec{u}_x$), ce que l'on obtient directement en faisant remarquer que le plan yOz est un plan d'antisymétrie. La méthode consistant à écrire $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ n'est pas facile ici car il faut d'abord dériver, puis faire $r_1=r_2$ et non l'inverse !



La figure ci-contre montre que l'on a directement :

$$E=2\times\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\times\cos\alpha \quad \text{avec} \quad \cos\alpha=\frac{a}{r_1}=\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

d'où $\boxed{\vec{E}(y)=-\frac{\lambda a}{\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)}\vec{u}_x}$

c) L'approximation dipolaire $OM=r\gg a$ (on parle ici de dipôle cylindrique) permet d'écrire à l'ordre 1 comme à la question **22.**, $r_1\approx r-a\cos\theta$ et $r_2\approx r+a\cos\theta$.

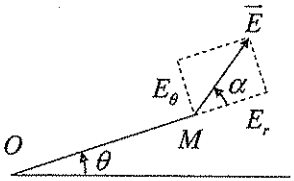
Alors $V(M)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\frac{a}{r}\cos\theta}{1-\frac{a}{r}\cos\theta}\approx\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a}{r}\cos\theta\right)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(r,\theta)=\frac{\lambda a\cos\theta}{\pi\varepsilon_0 r}}$$

Or $\vec{E}(M)$, par symétrie, appartient au plan xOy donc les composantes du champ sont :

$$\boxed{E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\lambda a\cos\theta}{\pi\varepsilon_0 r^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{\lambda a\sin\theta}{\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Il se produit ce qui a été vu dans le passage de la charge (champ en $1/r^2$) au dipôle (champ en $1/r^3$) ; ici, le champ d'un fil est en $1/r$, celui des deux fils de densité opposée décroît d'une puissance plus vite, en $1/r^2$.



L'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{E}(M)$ est donné par

$$\tan\alpha=\frac{E_\theta}{E_r}=\tan\theta, \text{ soit } \boxed{\alpha=\theta}$$

35. Le rayon de l'électron !

a) La méthode de détermination du champ créé par une sphère uniformément chargée est celle développée à la question **17.**

Vu les propriétés de symétrie et d'invariance, le champ électrique est radial et s'écrit en coordonnées sphériques : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ (ce qui correspond bien à un champ divergent).

La surface de Gauss Σ indiquée est une sphère de centre O et de rayon r ; le champ est partout colinéaire aux vecteurs surfaces élémentaires (la sphère Σ est une équipotentielle) et est uniforme (on intègre une constante) sur cette surface ; le flux est :

$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_\Sigma E(r).dS = E(r).S = E(r).4\pi r^2$$

Pour appliquer le théorème de Gauss, $\Phi_\Sigma = \dfrac{Q_\Sigma^{int.}}{\varepsilon_0}$, il faut distinguer deux cas :

* $r > R$, la charge intérieure à Σ est la charge de l'électron : $Q_\Sigma^{int.} = -e$

d'où $\boxed{\vec{E}_{ext}(M) = -\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$

comme si l'électron était ponctuel, placé en O.

* $r < R$, la charge intérieure à Σ est une fraction de la charge contenue dans S :

$$Q_\Sigma^{int.} = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = -e\frac{r^3}{R^3}, \text{ d'où } \boxed{\vec{E}_{int}(M) = -\frac{er}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{u}_r}$$

b) La densité volumique d'énergie est $u_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2$ d'où $U_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_{espace} E^2 d\tau$.

Comme $E(r)$ n'est fonction que de r, on choisit comme élément de volume (en coordonnées sphériques) le volume d'une couronne comprise entre les sphères de rayons r et $r+dr$, de surface $4\pi r^2$ et d'épaisseur dr : $d\tau = 4\pi r^2 dr$

$$U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2(r).4\pi r^2 dr$$

Il faut donc distinguer la contribution intérieure ($r < R$) et la contribution extérieure ($r > R$) :

$r < R$, $U_e^{int} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\int_0^R\left(-\dfrac{er}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr = \dfrac{e^2}{40\pi\varepsilon_0 R}$ (pas de problème à l'origine)

$r > R$, $U_e^{ext} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^\infty\left(-\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ (pas de problème à l'infini)

Au total : $\boxed{U_e = U_e^{int} + U_e^{ext} = \dfrac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{3}{5}\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

c) L'identification de cette énergie électrostatique à mc^2 conduit à une évaluation du rayon R_e de l'électron :

$$\boxed{R_e = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 mc^2} = \frac{3\mu_0 e^2}{20\pi m}}$$

AN : $R_e = 1{,}7.10^{-15}$ m

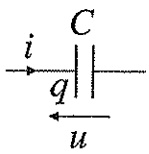
Cette valeur n'a pas une grande réalité physique car le modèle classique ne tient pas compte de la mécanique quantique. Elle est largement surestimée et des expériences récentes ont prouvé que le rayon d'un électron, s'il a un sens, est inférieur à 10^{-22} m.

S'agissant du proton, la formule précédente indique que sa masse étant environ 2 000 fois plus importante que celle de l'électron, son rayon serait environ 2 000 fois plus petit, ce qui est absurde. Le rayon du proton est estimé à $0{,}8.10^{-15}$ m. Par ailleurs l'hypothèse d'une densité volumique de charge uniforme ne s'applique pas au proton, constitué de trois quarks, deux « up » de charge $2e/3$ et d'un quark « down » de charge $-e/3$. De plus deux des charges élémentaires qui le constituent sont de même signe et devraient donc se repousser ! La stabilité du proton est expliquée par une interaction forte attractive entre quarks.

Le condensateur plan

36. Notons 1 l'armature positive et 2 l'armature négative du condensateur. Alors $q = q_1 > 0$ représente la charge de l'armature positive et $V = V_1 - V_2 > 0$ la différence de potentiel entre l'armature positive et l'armature négative.

La relation $q = CV$ qui, en électrostatique, définit la capacité C d'un condensateur est bien sûr la même que celle qui a été utilisée en électrocinétique : en notant i le courant de charge et $u = V$ la différence de potentiel (y compris en régime variable) en convention récepteur, il vient $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$.



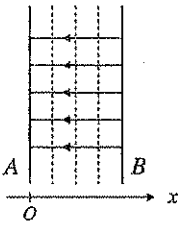
La puissance électrocinétique reçue par ce dipôle est, en convention récepteur :

$$P = ui = uC\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2C}\right)$$

L'énergie électrique (ainsi appelée par la présence d'un champ électrique entre les armatures lorsque le condensateur est mis sous tension, ici variable) emmagasinée durant la charge depuis l'instant initial où $q(t=0) = 0$ soit $u(t=0) = 0$ et l'instant actuel où $q(t) = q$ soit $u(t) = u$, est :

$$U_e = \int_0^t P dt = \left[\frac{u^2}{2C}\right]_0^t = \frac{u(t)^2}{2C} - \frac{u(t=0)^2}{2C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_e = \frac{1}{2}\frac{u(t)^2}{C} = \frac{1}{2}Cu(t)^2}$$

37. Le système forme un condensateur plan ; le champ y est uniforme dirigé de B vers A (dans le sens des potentiels décroissants) et les équipotentielles sont des plans parallèles à A et B. Le potentiel augmente linéairement avec x selon la loi :



$$V(x) = V_A + (V_B - V_A)\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = V_B \frac{x}{x_B}$$

d'où $\underline{V(x = 12\text{ cm}) = 1{,}1.10^5\text{ V}}$ qui est bien inférieur à V_B.

38. Si $\vec{E}(M)$ est le champ électrostatique créé par une distribution de charges en un point M, la densité volumique d'énergie électrostatique y est alors (résultat établi à la question **15.** du chapitre **2** à partir des équations de Maxwell) :

$$u_e(M) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2(M)$$

L'énergie électrostatique de la distribution responsable du champ est :

$$\boxed{U_e = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 d\tau}$$

Cette intégrale est étendue à tout l'espace où existe un champ lié à cette distribution de charges. U_e est une grandeur toujours positive, quadratique par rapport au champ, donc non linéaire (l'énergie totale de deux distributions n'est pas la somme des énergies de chacune d'entre elles...).

Le condensateur plan est constitué de deux armatures planes de surface S chacune et séparées d'une distance e. Lorsque l'armature positive porte une charge $Q = \sigma S$ (et donc l'armature négative la charge opposée), le champ qui règne entre les armatures est uniforme et vaut $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{u}_z$. L'énergie électrostatique limitée au volume concerné est :

$$U_e = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 Se = \frac{1}{2}\frac{e}{\varepsilon_0 S}Q^2$$

Ce résultat comparé à celui établi en électrocinétique : $U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ permet de retrouver l'expression de la capacité d'un condensateur plan :

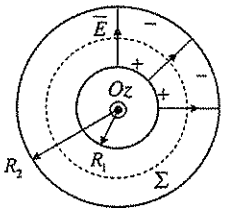
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

On vérifie toujours l'homogénéité en $\varepsilon_0 \times$ *longueur*, ainsi que l'augmentation de la capacité C lorsque la distance entre les armatures diminue.

39. Le condensateur cylindrique

Soit V_1 le potentiel de C_1 et V_2 le potentiel de C_2 (les conducteurs sont équipotentiels). La géométrie et les propriétés de symétrie du système conduisent à

des surfaces équipotentielles qui sont des cylindres d'axe Oz et de rayon compris entre R_1 et R_2, et un champ électrique radial, dirigé comme sur la figure de C_1 vers C_2 si $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$ (soit $V_1 > V_2$).



Avec $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, le théorème de Gauss (lié à l'équation de Maxwell-Gauss) à travers le cylindre équipotentiel Σ de rayon r (fermé sur les bases où le flux du champ est nul) s'écrit :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 + \iint_{S_{lat.}} E(r).dS = E(r).2\pi rh = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 rh}\vec{u}_r}$$

Ce champ est inhomogène entre les deux armatures (il décroît lorsque r augmente, ce qui est conforme au fait que les lignes de champ s'écartent).

Alors $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ (équation de Maxwell-Faraday) conduit à $\frac{dV}{dr} = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 rh}$ soit par intégration et en traduisant la condition en $r = R_1$: $\boxed{V(M) = V_1 - \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{r}{R_1}}$

Rq : L'utilisation simultanée des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday sous la forme de l'équation de Poisson, soit en l'absence de charges d'espace et en coordonnées cylindriques $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$, donne directement la dépendance $V(r)$.

La différence de potentiel entre les deux armatures est alors :

$$V_1 - V_2 = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

La capacité C est le rapport de la charge de l'armature positive $Q_1 = +Q$ à la différence de potentiel positive entre les deux armatures $V_1 - V_2$ (de manière générale $Q = CV$), soit ici :

$$\boxed{C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln R_2 / R_1}}$$

Ce résultat est bien homogène à $\varepsilon_0 \times$ *longueur*, et la capacité C est d'autant plus importante que la hauteur h est grande et que les armatures sont proches ($R_2 \to R_1$). Il peut aussi être établi à partir par une méthode énergétique comme à la question précédente.

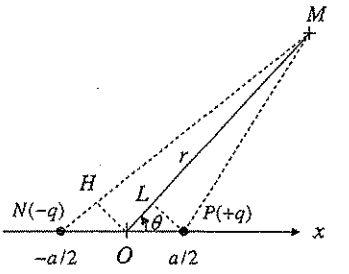
Rq : Cette expression de la capacité linéique C/h (ainsi que celle de l'inductance linéique) d'un câble coaxial a été utilisée à la question **88.** du chapitre **3**. En effet, le cœur et la gaine métalliques du câble coaxial constituent un condensateur cylindrique.

Le dipôle électrostatique

40. En M le potentiel est :

$$V(M) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 NM}$$

Comme $r = OM \gg a$, les arcs de cercle PL et OH de centre M sont assimilables à des segments de droite qui délimitent les triangles quasi rectangles PLO et OHN ; à l'ordre un, les distances sont :



$$PM = OM - OL \approx r - \frac{a}{2}\cos\theta$$

$$\text{et } NM = OM + NH \approx r + \frac{a}{2}\cos\theta .$$

Comme $\dfrac{1}{r \pm \dfrac{a}{2}\cos\theta} = \dfrac{1}{r}\left(1 \pm \dfrac{a}{2r}\cos\theta\right)^{-1} \approx \dfrac{1}{r}\left(1 \mp \dfrac{a}{2r}\cos\theta\right)$, il vient rapidement :

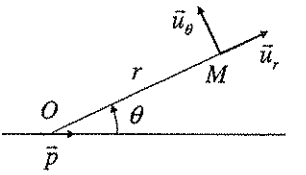
$$V(M) \approx +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{avec } p = qa .$$

41. Avec $\vec{r} = r\vec{u}_r$, l'expression donnée se transforme en :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3(\vec{p}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}\right)$$

Il suffit d'écrire $\vec{p} = p\vec{u}_x = p(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$ et de développer l'expression :

$$3(\vec{p}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p} = 3p\cos\theta\,\vec{u}_r - (p\cos\theta\,\vec{u}_r - p\sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$
$$= 2p\cos\theta\,\vec{u}_r + p\sin\theta\,\vec{u}_\theta$$



pour retrouver les composantes du champ :

$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \text{ et } E_\varphi = 0$$

42. Si l'on place le dipôle de moment $\vec{p}$ en O, orienté suivant l'axe Ox, il crée au point $M(r,\theta)$ un potentiel $V(M) = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; la charge q placée en M y possède l'énergie potentielle $U_p = qV(M) = \dfrac{pq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

À présent la charge q en M crée au point O le champ électrique $\vec{E}(O) = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ (le signe – est lié au fait que l'on garde le même vecteur $\vec{u}_r$). Le

dipôle de moment $\vec{p}$ placé en O y possède l'énergie potentielle $U'_p = -\vec{p}.\vec{E}(O) = \dfrac{pq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = U_p$ (il suffit de décomposer $\vec{p} = p\cos\theta\,\vec{u}_r - p\sin\theta\,\vec{u}_\theta$).

Les deux énergies sont bien sûr identiques.

43. Dipôle placé dans un champ uniforme

a) Le potentiel résultant est la somme des potentiels dus :

– au champ uniforme : $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V_1 \Rightarrow V_1 = V_0 - E_0 x = V_0 - E_0 r\cos\theta$

– au dipôle en O : $V_2 = \dfrac{\vec{p}.\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$V(M) = V_1 + V_2 \Rightarrow \boxed{V(M) = V_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Les composantes du champ, qui appartient au plan $(\vec{p}, \overrightarrow{OM})$ sont :

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_0\cos\theta + \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -E_0\sin\theta + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

b) L'équipotentielle $V = V_0$ suppose $E_0 r\cos\theta = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ qui admet comme solutions :

– soit $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\pi/2$; il s'agit du plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{E}_0$

– soit $\cos\theta \neq 0$ et alors $r = r_0 = \left(\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$; il s'agit d'une sphère de centre O et de rayon r_0

La sphère et le plan se coupent orthogonalement selon un cercle de centre O et de rayon r_0. Le champ électrique $\vec{E}$ devant être simultanément normal à chacune de ces deux nappes équipotentielles est forcément nul sur leur intersection.

On vérifie aisément $E_r(\cos\theta = 0) = 0$ et $E_\theta(r = r_0) = 0$, d'où $\boxed{\vec{E}(r_0, \pm\pi/2) = \vec{0}}$

44. Position d'équilibre d'un dipôle dans un champ non uniforme

a) Le potentiel créé par les charges du cercle en un point M d'abscisse x (sachant qu'elles sont toutes à la même distance $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ de M) est :

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

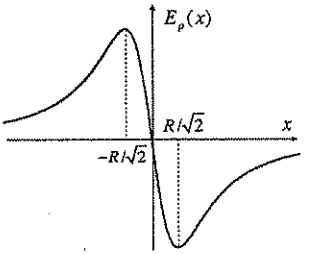
d'où le champ créé sur l'axe Ox, car par symétrie $\vec{E}(M) \parallel \vec{u}_x$:

$$\vec{E}(x) = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}\vec{u}_x$$

(que l'on peut aussi déterminer directement en sommant les projections).

b) Si l'orientation du dipôle est quelconque, il commence par s'aligner sur le champ : $\vec{p} = p\vec{u}_x$; son énergie potentielle est fonction de sa position (le champ est inhomogène) :

$$E_p(x) = -\vec{p}.\vec{E} = -\frac{pQx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$



La courbe ci-contre se place dans la situation $pQ > 0$; les extrema de E_p (soit $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$) sont obtenus pour deux positions symétriques par rapport au plan du cercle $x_e = \pm R/\sqrt{2}$; il apparaît une position d'équilibre stable pour $x_e = R/\sqrt{2}$ (E_p minimale) et une position d'équilibre instable pour $x_e = -R/\sqrt{2}$ (E_p maximale). Bien sûr le dipôle s'aligne spontanément dans le sens de $\vec{E}$.

45. Généralisation à une distribution quelconque de charges

a) $Q = \sum_i q_i \neq 0$ (la somme des charges est non nulle) ; le système est un monopôle et à grande distance il se comporte comme une charge ponctuelle :

$$\boxed{V(M) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Exemple : l'ion SO_4^{2-} (l'ensemble est chargé)

Rq : Le calcul apporte une précision intéressante, si on choisit O au barycentre des charges : $\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$. Donc $V(M) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ est valable au troisième ordre près et non au deuxième comme on pouvait s'y attendre.

b) $Q = 0$ et $\sum_i q_i \vec{a}_i \neq \vec{0}$; le système se comporte comme un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{a}_i$. Ceci s'interprète en séparant les charges positives q_j et les charges négatives q_k, il vient $\sum_j q_j = \sum_k -q_k = q$. Soit alors le barycentre des charges positives P tel que $q\overrightarrow{OP} = \sum_j q_j \vec{a}_j$ et le barycentre des charges négatives N tel que $-q\overrightarrow{ON} = \sum_k q_k \vec{a}_k$. Le moment dipolaire s'écrit :

$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{a}_i = \sum_j q_j \vec{a}_j + \sum_k q_k \vec{a}_k = q\overrightarrow{OP} - q\overrightarrow{ON} = q\overrightarrow{NP}$ généralisant ainsi la notion de dipôle électrique.

Le potentiel à grande distance est d'après le développement : $\boxed{V(M) \approx \frac{\vec{p}.\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

il décroît beaucoup plus vite que celui d'une charge.

Exemple : les molécules polaires H_2O, HCl,...(avec pour unité le debye : $1\,\mathrm{D} = 0{,}33.10^{-29}$ C.m).

c) $Q = 0$ et $\sum_i q_i \vec{a}_i = \vec{0}$ (la charge globale est nulle et les barycentres des charges positives et négatives sont confondus). Les deux premiers termes du développement sont nuls, le potentiel en M est alors en $1/r^3$: on a affaire à un quadripôle.

Exemple : la molécule CO_2

46. Situation a) : la somme des charges est nulle et le barycentre des charges positives est distinct du barycentre des charges négatives ; le système est un dipôle et le potentiel au loin est en $1/r^2$.

Situation b) : la somme des charges est non nulle ; le système est un monopôle et le potentiel au loin est en $1/r$.

Situation c) : la somme des charges est nulle et le barycentre des charges positives est confondu au centre du carré avec le barycentre des charges négatives ; le système est un quadripôle et le potentiel au loin est en $1/r^3$.

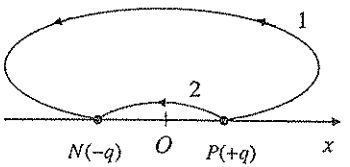
Cette simple analyse permet, avant de démarrer un calcul de potentiel, de prévoir à quel ordre il faut effectuer le développement limité.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

47. Lorsque les deux charges sont en présence l'une de l'autre, le principe de superposition des champs consiste à dire que le champ total en un point M est la somme des champs : $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E_1}(M) + \overrightarrow{E_2}(M)$. Il résulte du principe d'additivité des forces subies par une charge q placée en M : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = q\overrightarrow{E_1} + q\overrightarrow{E_2}$ à identifier à $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$. Cela suppose cependant que le champ $\overrightarrow{E_1}(M)$ créé par la charge q_1 lorsqu'elle est seule dans l'espace, ne soit pas modifié en présence de la charge q_2 et réciproquement, ce qui *a priori* n'a rien d'évident puisque les deux charges étant en interaction, ne s'ignorent pas.

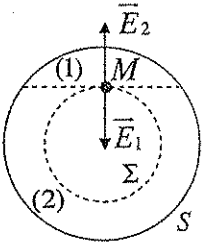
L'expérience ne contredit pas le principe de superposition des champs.

48. Le calcul effectué dans l'approximation dipolaire cesse d'être valable au voisinage des charges. Ainsi la ligne 1, semblable à une ligne de dipôle au loin, va en réalité de la charge positive P à la charge négative N sans passer par O. Près de O (où l'approximation dipolaire n'est plus valable, on peut affirmer qu'une autre ligne,



comme la 2, rejoint P à N. L'ensemble des deux lignes forme un contour fermé ! Mais en parcourant ce contour dans le sens $P1N2P$, on se rend compte que le champ $\vec{E}$ change de sens à la traversée de N : le potentiel décroît d'abord sur $P1N$ puis recroît sur $N2P$...
Il en est de même le long d'un circuit électrocinétique : en sortant du générateur, borne +, le potentiel est élevé et décroît le long de la ligne jusqu'à la borne – du générateur ; ensuite, et toujours dans le même sens, à l'intérieur du générateur, le potentiel croît de la borne – à la borne + pour revenir à sa valeur initiale.
Une ligne de champ peut donc donner l'impression de se refermer à condition que le sens du champ s'inverse sur les deux tronçons qui la composent.

49. Le théorème de Gauss affirme que le champ électrique au point M est uniquement dû aux charges contenues à l'intérieur de Σ. Il faut donc en déduire que les charges extérieures à Σ, c'est-à-dire celles contenues dans la couronne $S-\Sigma$, créent au point M un champ globalement nul.



Cela est effectivement le cas : les charges (supposées positives ici) dans la partie (1) créent par symétrie au point M le champ $\vec{E}_1$ comme indiqué sur la figure et celles de la partie (2) créent le champ $\vec{E}_2$. Le fait que ces deux champs soient de direction opposée se comprend bien (du fait des plans de symétries) ; en revanche, ce qui est extraordinaire (et donne toute sa beauté au théorème de Gauss), c'est qu'ils aient même norme et ceci quelle que soit la distance $r < R$ du point M au centre O.
À r donné, cela se comprend qualitativement de la manière suivante : les charges de (1) sont en moyenne plus proches de M que celles de (2) ; elles créent donc individuellement des champs plus importants ; mais elles sont moins nombreuses et la proximité avec M fait que ces champs sont davantage inclinés sur l'axe OM réduisant ainsi l'effet global sur celui de charges de (2), en moyenne plus éloignées de M, donc avec des champs individuels plus faibles, mais qui sont plus nombreuses avec des directions moins inclinées sur l'axe OM.

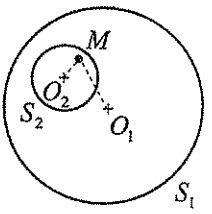
50. Si le champ est nul en tout point de la surface, le flux à travers la surface de Gauss étant nul, cela signifie que la charge intérieure est nulle. La réciproque n'est pas vraie, par exemple le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée entourant un dipôle est nul, le champ ne l'est pas.

51. Comme il a été vu à la question **26.**, le théorème de Gauss s'applique au champ de gravitation. Il suffit de remplacer dans les résultats de la question **35.**, $1/4\pi\varepsilon_0$ par $-G$ (ou encore ρ/ε_0 par $-4\pi\rho G$), en gardant la lettre ρ pour la masse volumique. Le champ de gravitation d'une sphère de masse volumique uniforme est alors :

$$r > R : \vec{A}(M) = -\frac{4\pi G\rho R^3}{3r^2}\vec{u}_r \quad \text{et} \quad r < R : \vec{A}(M) = -\frac{4\pi G\rho r}{3}\vec{u}_r = -\frac{4\pi G\rho}{3}\vec{r}$$

Application. Le système cavité « vide » à l'intérieur de la Terre peut être obtenue par superposition d'une sphère S_1 de masse volumique $+\rho$ uniforme et d'une

sphère S_2 de masse volumique $-\rho$; le champ gravitationnel en M, intérieur aux deux sphères, est alors la somme de :

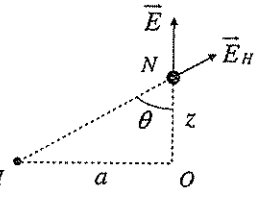


$$\vec{A}_1(M) = -\frac{4\pi G\rho}{3}\overrightarrow{O_1M} \quad \text{et de} \quad \vec{A}_2(M) = +\frac{4\pi G\rho}{3}\overrightarrow{O_2M},$$

soit $\boxed{\vec{A}(M) = \frac{4\pi G\rho}{3}\overrightarrow{O_2O_1}}$

Ce champ, indépendant du point M, est uniforme dans la cavité.

52. Chaque atome H de charge $+\delta e$ crée en N un champ électrique $\vec{E}_H = \frac{\delta e}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)}\vec{u}_r$; la résultante des trois champs en N est :



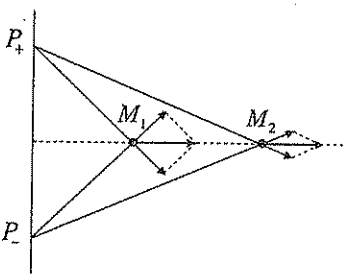
$$\vec{E} = 3\,\|\vec{E}_H\|\cos\theta\,\vec{u}_z = \frac{3\delta ez}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z$$

L'atome d'azote de charge $-3\delta e$ subit donc la force

$$\vec{F} = -\frac{(3\delta e)^2 z}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z \approx -\frac{9(\delta e)^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}z\,\vec{u}_z \quad \text{pour une pyramide aplatie } (z^2 \ll a^2)$$

Cette force de rappel explique en partie les oscillations de la molécule NH_3 (du plan des $3H$ et de N autour du centre de masse G). L'hypothèse $z^2 \ll a^2$ est discutable, et il faut tenir compte de toutes les forces électrostatiques entre noyaux et électrons ; la mécanique quantique donne une fréquence d'oscillation de 24 GHz, à la base du fonctionnement du MASER à ammoniac.

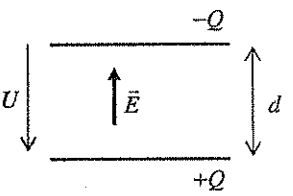
53. À la question **16.** les études de symétrie et d'invariance ont donné $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$, structure non compatible avec $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, sauf si $E(z)$ indépendant de z, ce qui est le cas puisque $E(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



La figure ci-contre montre qualitativement comment il est possible que le champ soit indépendant de la distance au plan. On considère deux points d'observation M_1 et M_2 sur la même normale au plan chargé et, pour simplifier, deux points source P_+ et P_- symétriques par rapport à cette normale. En M_1, plus proche, les champs de P_+ et P_- sont plus importants en norme, mais leur inclinaison plus forte sur l'axe réduit le champ résultant. En M_2, plus éloigné, les champs de P_+ et P_- sont moins importants en norme, mais leur inclinaison réduite sur l'axe renforce le champ résultant.

Avec un plan « infini », la distance au plan pouvait-elle jouer un rôle…?

54. Un champ électrique uniforme peut être créé entre deux plaques chargées, avec des charges respectives $+Q$ et $-Q$, très proches l'une de l'autre et dans la partie centrale, ce qui définit un « condensateur ». Le champ $\vec{E}$ est orthogonal aux plaques, dirigé vers la plaque de plus faible potentiel (chargée –) et sa norme est liée à la différence de potentiel entre les plaques qui maintient les charges du condensateur : $U = V_+ - V_- = \| \vec{E} \| d$.



55. Lorsque la règle est frottée contre un tissu, des électrons sont arrachés, la règle se charge légèrement et un champ électrique apparaît à son extrémité. Ce champ polarise la matière des petits morceaux de papier (en y faisant apparaître des petits dipôles d'après le processus vu à la question **70.**) ; les dipôles induits sont attirés (le champ est non uniforme) par les champs forts, donc ils viennent se coller sur la règle.

56. La notion de dipôle permet de traiter, dans le cadre de l'approximation dipolaire, le cas des distributions quelconques de charges (sans symétrie). Elle est aussi très utile au niveau microscopique où son importance est double :

– beaucoup de molécules possèdent un moment dipolaire permanent (H_2O, NH_3, HCl,…) ce qui permet par exemple à l'eau de dissocier un cristal comme $NaCl$; par ailleurs pour les molécules non polaires, la polarisabilité d'une liaison conditionne la réactivité chimique comme dans l'halogénation des alcanes, l'addition du brome sur les alcènes…

– l'interaction entre les ondes électromagnétiques et la matière est traduite en terme de polarisation, c'est-à-dire en nombre de dipôles induits par unité de volume ; comme vu à la question **70.**, la polarisation électronique concerne l'apparition d'un dipôle induit par déformation du nuage électronique d'un atome (ou d'une molécule) non polaire placé dans le champ électrique d'une onde ; c'est ce phénomène qui, associé au rayonnement du dipôle variable, conduit par exemple à l'indice optique d'un milieu…

57. La molécule d'eau est une molécule polaire ($\mu = 1{,}85$ D), ce qui explique la valeur élevée $\varepsilon_r = 80$ de la constante diélectrique. La force électrostatique entre deux ions (Na^+ et Cl^- par exemple), qui dans l'air vaut $F_0 = qq'/4\pi\varepsilon_0 r^2$, assure la cohésion du cristal. Dans l'eau, elle est réduite à la valeur $F = qq'/4\pi\varepsilon r^2 = F_0/\varepsilon_r$ trop faible pour maintenir le cristal qui se dissout. La dissolution est suivie de la dispersion et de la solvatation.

Le benzène est une molécule non polaire ; l'absence de moments électriques permanents explique la faible valeur de la constante diélectrique $\varepsilon_r = 2$; le sel ne s'y dissout pas.

58. Des charges positives (ou négatives) sur une seule armature se repousseraient spontanément. Deux armatures en regard subissent l'influence l'une de l'autre dans la mesure où les charges positives de l'une attirent les charges négatives de l'autre et inversement, aidé en cela par la tension appliquée aux bornes. Ainsi la propriété principale d'un « condensateur » est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures.

59. Le champ disruptif d'un diélectrique représente la valeur maximale du champ électrique que le diélectrique disposé entre les armatures peut supporter avant qu'une étincelle ne jaillisse (mise en court-circuit) qui provoque la décharge du condensateur et le plus souvent sa détérioration. La valeur maximale de la tension électrique appliquée à ses bornes est appelée tension de claquage du condensateur.

Dans le cas de l'air, sous de fortes tensions, les électrons qui composent les atomes des molécules de l'air sont littéralement arrachés à leur orbite de valence pour participer à la conduction électrique (c'est également le cas pendant un orage lorsque la foudre traverse alors l'atmosphère). La valeur du champ disruptif de l'air sec (elle est plus basse lorsque l'air est humide) est :

$$E_{dis.} = 3.10^6 \text{ V.m}^{-1} = 30\,000 \text{ V.cm}^{-1}$$

Cela signifie qu'il faut une différence de potentiel de 36 000 V pour produire une étincelle entre deux électrodes planes distantes de 1 cm.
Pour le verre, $E_{dis.} = 100\,000 \text{ V.cm}^{-1}$.

L'isolant joue donc un rôle capital car pour augmenter la capacité, il faut rapprocher les plaques, ce qui augmente également le champ électrique (à tension donnée, puisque $E = V / e$). Ainsi le champ dans un condensateur soumis à seulement 10 V et dont les plaques sont distantes de 10 µm est de 10^6 V.m^{-1}.

60. Dans les circuits électrocinétiques ou électroniques, on peut citer :
- le filtrage de signaux périodiques
- la stabilisation d'une alimentation électrique (le condensateur se décharge lors des chutes de tension et se charge lors des pics de tension)
- la séparation du courant alternatif et du courant continu (ce dernier étant bloqué par le condensateur)
- le stockage de l'énergie

Les condensateurs (de faible taille) utilisés habituellement en électronique sont, suivant le but et les propriétés recherchés, en céramique, en mica, au tantale ou à isolant plastique (matériaux issus de synthèse chimique).

61. Le rapport du poids à la force électrique est $\frac{mg}{eE} = \frac{0{,}9.10^{-30} \times 10}{1{,}6.10^{-19} \times 10} \approx 10^{-11} \ll 1$ ce qui justifie que le poids soit toujours négligé devant le force électrique, même pour un proton de masse $m_p \approx 2\,000\, m_e$.

62. Par le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

L'électron atteindrait la vitesse de la lumière c et aurait une vitesse encore pour grande pour $U > 250$ kV ! En réalité ceci n'est pas possible car la mécanique classique (de Newton) ne s'applique plus dès lors que les particules deviennent relativistes...

63. Les électrons émis par une cathode chauffée sont d'abord accélérés jusqu'à l'anode (tension de l'ordre de 2 kV). Ensuite viennent deux systèmes de plaques de déflexion, chacune pouvant dévier le faisceau précédent dans une des deux directions perpendiculaires afin d'obtenir un spot mobile sur un écran à deux dimensions.

64. Les variations de pression provoquent une variation similaire d'épaisseur du condensateur, d'où une capacité $C(t) = \varepsilon_{(0)} S / e(t)$ variable et qui, sous une tension E constante, conduit à un faible courant variable. La tension aux bornes de R est filtrée par la capacité C' afin que seule la tension alternative, similaire à la pression acoustique, soit amplifiée.

65. La surface en verre de l'écran est parcourue par une grille électriquement chargée et invisible à l'œil nu. Quand le doigt, conducteur d'électricité (parce qu'il est humide, cela ne fonctionne pas avec un stylet isolant, et l'écran n'est pas sensible à la pression), touche l'écran, des charges électriques lui sont transférées. Cette faible perte de charge modifie localement la capacité (d'où la dénomination) qu'il faut ensuite localiser grâce à un système de mesure placé aux quatre coins de l'écran pour traiter l'information (point d'impact, sens du mouvement) et agir en conséquence, c'est-à-dire faire le rapport avec ce qui est affiché à l'écran à ce moment-là, un peu comme le fait une souris sur un écran « normal ».

Exercices

66. Potentiel de Yukawa

a) Le potentiel ne dépend que de r (coordonnées sphériques), et donc le champ n'a qu'une composante, la composante radiale E_r ($E_\theta = E_\varphi = 0$) donnée par :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e^{-r/a}\left(1 + \frac{r}{a}\right) \text{ ; le champ est } \vec{E}(r) = E_r \vec{u}_r$$

Le flux $\Phi(r)$ à travers Σ, une sphère de rayon r centrée sur O et sur laquelle la norme du champ est uniforme avec $\vec{E} // \vec{dS}$ vaut :

$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}.\vec{dS} = \iint_\Sigma E(r).dS = E(r).4\pi r^2$$

$$\Rightarrow\; \Phi_\Sigma(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} e^{-r/a}\left(1 + \frac{r}{a}\right) \equiv \frac{Q_\Sigma^{int.}}{\varepsilon_0} \text{ (th. de Gauss)}$$

* $r \to 0$, on a $E \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ et $\Phi_\Sigma \approx \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, résultats caractéristiques d'une charge ponctuelle q placée en O.
* $r \to \infty$, on a $E \to 0$ et $\Phi_\Sigma \to 0$; le flux montre que la charge totale dans tout l'espace (lorsque $r \to \infty$) est nulle, et donc à la charge ponctuelle $+q$ placée en O s'ajoute une charge $-q$ répartie continûment dans l'espace (car le flux diminue progressivement), mais pas à l'infini puisque le champ y est nul.

b) La charge totale dans la sphère de rayon r est :

$$Q_\Sigma^{int.}(r) = \varepsilon_0 \Phi_\Sigma(r) = q\,e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right)$$

Dans la sphère de rayon $r+dr$, elle vaut $Q_\Sigma^{int.}(r+dr) = \varepsilon_0 \Phi_\Sigma(r+dr)$, la différence (qui élimine la charge q à l'origine) représente la charge $dQ_\Sigma^{int.}(r) = \varepsilon_0 d\Phi_\Sigma(r)$ dans la couche sphérique de volume $dV = 4\pi r^2 dr$, d'où la densité volumique de charge :

$$\rho(r) = \frac{dQ_\Sigma^{int.}}{dV} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi r^2}\frac{d\Phi_\Sigma}{dr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r}e^{-r/a}}$$

Autre raisonnement (plus rapide) : le théorème de Gauss donne

$$\Phi_\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 dr'\right)$$

en dérivant par rapport à r : $\rho(r) = \dfrac{\varepsilon_0}{4\pi r^2}\dfrac{d\Phi_\Sigma}{dr}$

Cette expression de $\rho(r)$ est bien homogène (une charge q divisée par un volume $a^2 r$ car a est une longueur), elle est négative comme prévu et correspond à une charge répartie nulle à l'infini. Le fait que $\rho(r) \to \infty$ pour $r \to 0$ n'est pas gênant car la charge répartie correspondante dans un petit volume en r^3 autour de l'origine est en r^2 donc nulle.
Cette étude peut représenter un atome (d'hydrogène par exemple) avec au centre le noyau de charge $+q$ et tout autour avec une symétrie sphérique (l'orbitale $1s$ de la mécanique quantique) le nuage électronique réparti avec une densité négative et de charge totale $-q$.

c) La charge répartie $\rho(r)d\tau$ dans la couche sphérique de volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$ crée en O le potentiel élémentaire : $dV(O) = \dfrac{\rho(r)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}$

et par intégration sur tout l'espace :

$$V(O) = \int_0^\infty -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}e^{-r/a}dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(O) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}}$$

Ce résultat, classique en apparence, montre que vu du point O, tout se passe comme si la charge répartie se trouvait à une distance moyenne a de l'origine

(c'est le modèle de Bohr avec un électron ponctuel sur une orbite circulaire de rayon a).

67. Champ électrostatique au voisinage du centre d'un carré

a) Par symétrie, le champ $\vec{E}$ au centre O est nul. Comme il est obtenu par dérivée du potentiel V, le développement limité de ce dernier en un point M voisin de O doit contenir les termes du second ordre :

$$V(x,y,z) = V_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z + a'x^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + f zx \quad (1)$$

* le changement de x en $-x$, ou de y en $-y$ ou encore de z en $-z$ laisse le potentiel invariant, par symétrie par rapport aux plans passant par O et contenant les axes, d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $d = e = f = 0$.
* le changement de x en y (ou de y en x) laisse le potentiel invariant par symétrie de la distribution de charge par rapport à la première bissectrice, d'où $a' = b$

Il reste de (1) : $V(x,y,z) = V_0 + b(x^2 + y^2) + cz^2$

L'équation de Poisson en M, où $\rho = 0$, soit $\Delta V = 0$, qui traduit les deux équations de Maxwell de l'électrostatique, donne alors :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \text{ soit } c = -2b \text{ d'où } V(x,y,z) = V_0 + b(x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (2)$$

Pour trouver b (car V_0, potentiel en O des quatre charges est immédiat), on place le point M sur l'axe Oz (soit $x = y = 0$) ; alors M est à égale distance des quatre charges dont le potentiel en M vaut d'après Pythagore :

$$V(0,0,z) = 4 \times \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{z^2}{2a^2}\right) \quad (3)$$

puisque $z/a \ll 1$.

La comparaison entre (2) et (3) conduit à $V_0 = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ et $b = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

d'où finalement : $\boxed{V(x,y,z) = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(x^2 + y^2 - 2z^2)}$

b) Le champ en M est donné par $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M) = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\begin{vmatrix} x \\ y \\ -2z \end{vmatrix}$

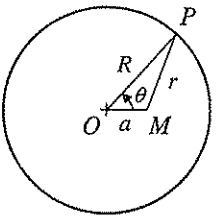
Si l'on place une particule libre, de charge q', en M, son mouvement, s'il est stable dans le plan xOy, ne l'est pas suivant l'axe Oz, et inversement.

68. Champ au voisinage du centre (*)

Comme il a été vu à la question **44.**, le champ en tout point de l'axe, donc en O, est porté par l'axe. Le plan du cercle est plan de symétrie pour la distribution de charge, d'où $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$, soit $\vec{E}(O) = \vec{0}$ (ou plus directement : à chaque point P est associé un point P' diamétralement opposé et la somme de leurs champ en O est nulle, il en est donc de même pour l'ensemble du cercle en O).

Le plan du cercle et le plan perpendiculaire au cercle et contenant OM sont deux plans de symétrie pour la distribution ; $\vec{E}(M)$ appartenant à l'intersection de ces plans est donc colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

La méthode consistant à calculer directement le champ par l'intégrale est déconseillée car au point M, tout point source P produit un champ élémentaire différent en norme et en direction.



méthode 1 : évaluer le potentiel $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_{cercle} \frac{dq}{r}$

avec choix d'une variable angulaire pour effectuer l'intégrale : $dq = \lambda R d\theta$

Pour $r = MP$, en élevant au carré $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}$, il vient $r^2 = R^2 - 2aR\cos\theta + a^2$

$$\text{d'où } \frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{R^2}\right)^{-1/2}$$

Sachant que $\dfrac{a}{R} \ll 1$, on effectue un développement limité, mais comme $\vec{E}(O) = \vec{0}$, il faut aller à l'ordre 2 pour le potentiel.

rappel : $(1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{3}{8}\varepsilon^2$ et il apparaît donc deux termes en $\dfrac{a^2}{R^2}$

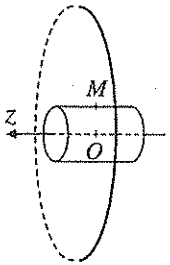
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{R^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{2R^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right)$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{2R^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right)d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\pi + 0 + \frac{a^2}{2R^2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)2\pi\right)$$

d'où $V(a) = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\lambda a^2}{8\varepsilon_0 R^2}$ et finalement $\vec{E}(a) = -\dfrac{dV}{da}\vec{u}_r = -\dfrac{\lambda a}{4\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_r$ ou encore

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\frac{\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}\overrightarrow{OM}}$$

méthode 2 : par le théorème de Gauss en calculant le flux à travers un petit cylindre d'axe Oz de rayon $a \ll R$ (donc passant par M) et de longueur $2z$ $(0 < z \ll R)$; ceci permet de relier le champ axial E_z, facile à calculer, au champ radial E_r demandé.



On considère, au premier ordre le même E_r en tout point de la surface latérale, et le même E_z en tout point de chaque base. Par symétrie, le flux à travers les deux bases est le même, et il n'y a pas de charges à l'intérieur de la surface fermée Σ :

$$\Phi_\Sigma = E_r\, 2\pi a\, 2z + 2\times E_z\, \pi a^2 = 0 \;\Rightarrow\; E_r = -\frac{a}{2z}E_z$$

Or E_z est obtenu par projection ($\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$) du champ créé par les charges du cercle, toutes équidistantes de l'axe :

$$E_z = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}\times\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \approx \frac{\lambda z}{2\varepsilon_0 R^2} \quad \text{à l'ordre 1 en } z/R\,,$$

d'où $E_r = -\dfrac{\lambda a}{4\varepsilon_0 R^2}$ et sous forme vectorielle : $\boxed{\vec{E}(M) = -\dfrac{\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}\overrightarrow{OM}}$

méthode 3 : celle de l'exercice **66.** consistant, sachant que le champ $\vec{E}$ est nul au centre, à chercher un développement limité du potentiel $V(M)$ au second ordre. Cette recherche peut se faire en coordonnées cartésiennes, en prenant soin d'y inclure $z \neq 0$ (le point M en dehors du plan) quitte à faire $z = 0$ à la fin (après dérivation !) :

$$V(x,y,z) = V_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z + ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$$

Les propriétés de symétrie et $\Delta V = 0$ conduisent à $V(x,y,z) = V_0 + a(x^2+y^2-2z^2)$

Le potentiel sur l'axe est donné directement par :

$$V(0,0,z) = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z^2}{2R^2}\right) \text{ puisque } \frac{z}{R} \ll 1$$

$$\text{d'où } V_0 = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \text{ et } b = \frac{\lambda}{8\varepsilon_0 R^2}$$

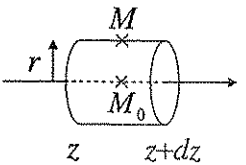
Alors $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M) = -\begin{vmatrix} 2ax \\ 2ay \\ -4az \end{vmatrix}$, et dans le plan du disque $(z=0)$,

$$\vec{E}(M) = -2a\overrightarrow{OM} \text{ soit } \boxed{\vec{E}(M) = -\frac{\lambda}{4\varepsilon_0 R^2}\overrightarrow{OM}}$$

69. Champ d'un disque chargé sur l'axe et au voisinage

a) Au point M en dehors de l'axe, le plan passant par Oz et M est plan de symétrie de la distribution de charge ; le champ appartenant à ce plan s'écrit alors $\vec{E} = E_z\vec{u}_z + E_r\vec{u}_r$. Il apparaît cette fois une composante radiale du champ notée $\vec{E}_r = E_r(r,z)\,\vec{u}_r$.

b) Au premier ordre, très près de l'axe, la composante axiale est pratiquement celle sur l'axe. On considère comme surface de Gauss Σ un petit cylindre d'axe



Oz, centré sur M_0, de bases en z et $z+dz$, et dont la surface latérale passe par le point M (le rayon du cylindre est r). En l'absence de charges dans cette surface fermée, le théorème de Gauss donne un flux nul : $\Phi_\Sigma = 0$.

Comme d'habitude les normales sont orientées vers l'extérieur et les champs sont supposés uniformes sur les surfaces ; sur les bases, seule la composante $E_z(0,z)\vec{u}_z$ contribue au flux et sur la surface latérale, seule la composante $E_r(r,z)\vec{u}_r$ contribue au flux :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = -\pi r^2 E_z(z) + \pi r^2 E_z(z+dz) + 2\pi r dz E_r = 0$$

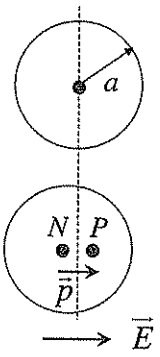
ce qui avec $E_z(z+dz) - E_z(z) = \dfrac{\partial E_z}{\partial z} dz$ (Taylor à l'ordre 1) conduit à :

$$\boxed{E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

Tout calcul fait : $\boxed{\vec{E}_r(r,z) = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}\dfrac{R^2 r}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\vec{u}_r}$ composante s'écartant de l'axe.

70. Modèle de Thomson de l'atome et polarisabilité

a) En l'absence de champ électrique, P (pour Positif) et N (pour Négatif, centre du nuage électronique), sont confondus.



En appliquant un champ $\vec{E}$, P et N se déplacent légèrement en sens inverse, et les barycentres des charges + et − ne coïncident plus : pour un atome de numéro atomique Z, il y a création d'un moment dipolaire $\vec{p} = Ze\overrightarrow{NP}$ de même sens que $\vec{E}$.

Pour des champs électriques pas trop intenses, le moment induit $\vec{p}$ est proportionnel au champ extérieur $\vec{E}$ suivant la relation :

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$$

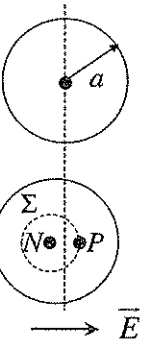
où α est la polarisabilité électronique de l'atome.

Unité : p est en C.m, ε_0 en F.m^{-1} et E en V. m^{-1} ; d'après la relation $q = Cv$, C et F.V représentent la même unité, on en déduit que α s'exprime en m^3, un volume comme établi au b).

Applications :

- La notion de polarisabilité est essentielle à la compréhension de la réactivité chimique puisque plus une liaison est polarisable, plus elle est apte à se déformer et donc à se rompre.
- La polarisation électronique à très haute fréquence des atomes ou molécules sous l'action du champ électrique d'une onde électromagnétique (dans le domaine visible par exemple) permet de comprendre la propagation de ces ondes dans les milieux transparents (appelés diélectriques).

b) Le champ $\vec{E}'(P)$ se calcule par le théorème de Gauss (la perturbation est très faible) appliqué à la sphère Σ centrée sur N et passant par P.



La question **35.** rappelle que $\vec{E}'(P) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{NP}$, et avec une densité $\rho = -\dfrac{Ze}{4\pi a^3/3}$, on a un champ $\vec{E}'(P) = -\dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\overrightarrow{NP}$ opposé à $\vec{E}$.

L'équilibre du noyau dans les deux champs se traduit par :

$$\vec{E}'(P) + \vec{E} = \vec{0}\text{, d'où l'on déduit } \overrightarrow{NP} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{Ze}\vec{E}.$$

Le moment dipolaire induit vaut alors $\boxed{\vec{p} = Ze\overrightarrow{NP} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \vec{E}}$

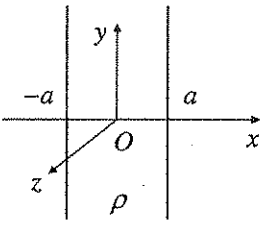
Il est bien proportionnel au champ extérieur $\vec{E}$.

Sous la forme $\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$, la polarisabilité électronique $\boxed{\alpha = 4\pi a^3}$ apparaît proportionnelle au volume de l'atome, mais indépendante de Z.

AN : $NP = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{Ze}E$ avec $Z = 2$ et $a \approx 10^{-10}$ m, on a $\underline{NP \approx 3.10^{-18}\text{ m}}$; on constate que $NP \ll a$.

71. Distribution volumique entre deux plans (*)

a) Soit M un point quelconque. Les plans Mxy et Mxz sont des plans de symétrie pour la distribution de charge ; on en déduit que $\vec{E}(M)$ appartenant simultanément à ces plans est porté par $\vec{u}_x$. L'invariance par translation de la distribution suivant Oy ou Oz fait que $\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$. De plus, comme yOz est un plan de symétrie, on a $E(-x) = -E(x)$ et $V(-x) = V(x)$, ce qui permet de limiter l'étude à $x \geq 0$.



Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre Σ d'axe Ox, symétrique par rapport à yOz, de surface de base S et de hauteur $2h$. Le flux à travers la surface latérale est nul et les flux à travers les deux surfaces de base sont identiques :

$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 + 2E(h).S = \frac{Q_\Sigma^{int.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(h) = \frac{Q_\Sigma^{int.}}{2\varepsilon_0 S}$$

* si $h < a$ soit $0 \leq x \leq a$, $Q_\Sigma^{int.} = \rho S.2h \Rightarrow \boxed{\vec{E}(x) = \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}\vec{u}_x}$

$$\frac{dV}{dx} = -E = -\frac{\rho x}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}} \text{ avec } V(x=0) = 0$$

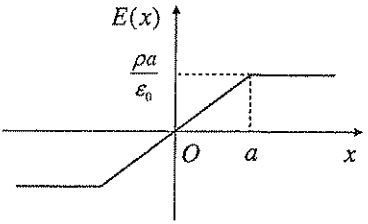
* si $h > a$ soit $x \geq a$, $Q_\Sigma^{int.} = \rho S.2a \Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(x) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\vec{u}_x}$

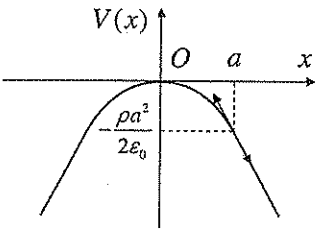
$$\frac{dV}{dx} = -E = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} \Rightarrow V(x) = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}x + C$$

La continuité du potentiel en $x = a$ donne la valeur de la constante $C = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$ et

donc : pour $x \geq a$, $\boxed{V(x) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{2x}{a}\right)}$

Les graphes sont complétés pour la partie $x \leq 0$ en se souvenant que les fonctions $E(x)$ et $V(x)$ sont respectivement impaire et paire.





On constate que le champ est continu en $x = a$, à la limite du domaine ; il en est donc de même de la pente du potentiel en ce point.

b) Dans un cylindre d'axe Ox, de base dS et de hauteur $2a$, l'épaisseur de la distribution, la charge est $dq = \rho 2a dS \equiv \sigma dS$ lorsque $2a \to 0$, ce qui définit une répartition surfacique de densité :

$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS} = 2\rho a}$$

À noter qu'à charge constante lorsque $2a \to 0$, on a nécessairement $\rho \to \infty$.

Les expressions et graphes ci-dessus montrent alors (avec $\rho a = \sigma/2$) que la composante normale du champ subit une discontinuité à la traversée du plan chargé (on retrouve bien sûr les résultats de la question **16.** sur le plan chargé infini) :

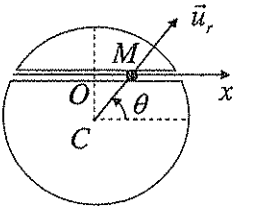
$$\vec{E}(x > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

Le potentiel, toujours continu, admet cette fois en $x = 0$ un point anguleux.

72. Oscillateur harmonique et périodicité

a) Soit $r = CM$ la distance du wagonnet au centre de la Terre. D'après le théorème de Gauss, l'attraction gravitationnelle ressentie par M est la même que celle due

à un point matériel en C et dont la masse $M_r = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ est celle contenue dans la sphère de centre C et de rayon r (sa surface passe par M), soit $\overline{F} = -G\frac{M_r m}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{4}{3}\pi\rho G m r\vec{u}_r$.



Projetée sur Ox, la RFD appliquée au wagonnet de masse m donne (en l'absence de frottement) :

$$m\ddot{x} = -\frac{4}{3}\pi\rho G m r\cos\theta = -\frac{4}{3}\pi\rho G m x \quad \text{puisque} \quad x = r\cos\theta \ ;$$

équation différentielle du type $\ddot{x} = -\omega^2 x$, avec solution sinusoïdale de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}}$$

b) La période d'un satellite en orbite basse autour de la Terre, dans le référentiel géocentrique, se détermine par la 3e loi de Kepler :

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ avec $a = R_T$ et $M_T = \rho\frac{4}{3}\pi R_T^3$, ce qui redonne le même résultat.

c) Si la vitesse à l'entrée du tunnel n'est pas nulle, l'amplitude du mouvement dépasse la moitié de la longueur du tunnel, le wagonnet ressort de l'autre côté, son mouvement correspond alors à un tir balistique. Il ne peut pas revenir dans le tunnel. C'est un exemple d'oscillateur harmonique dont le mouvement réel correspondant à moins d'une période, n'apparaît pas périodique.

73. Force de van der Waals

Remarquons d'abord que le dipôle induit n'étant pas rigide, son énergie potentielle dans le champ extérieur n'est pas $U_p = -\vec{p}_i.\overline{E}$, mais on peut montrer qu'elle vaut $U_p = -\frac{1}{2}\vec{p}_i.\overline{E} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\alpha E^2$.

Le champ $\overline{E}$ est celui d'un dipôle permanent de moment $\vec{p}$ et placé en O :

$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \ , \quad E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad E_\varphi = 0$$

$$\text{d'où après calcul : } U_p(r,\theta) = -\frac{\alpha p^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^6}\left(3\cos^2\theta + 1\right)$$

La force sur l'atome au point M est alors donnée par $\overline{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ U_p$ soit :

$$F_r = -\frac{\partial U_p}{\partial r} = -\frac{3\alpha p^2}{16\pi^2\varepsilon_0 r^7}\left(3\cos^2\theta + 1\right) \quad \text{et} \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U_p}{\partial\theta} = -\frac{3\alpha p^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^7}\sin 2\theta$$

En moyennant sur l'angle θ avec $<\cos^2\theta> = \frac{1}{2}$ et $<\sin 2\theta> = 0$, il vient :

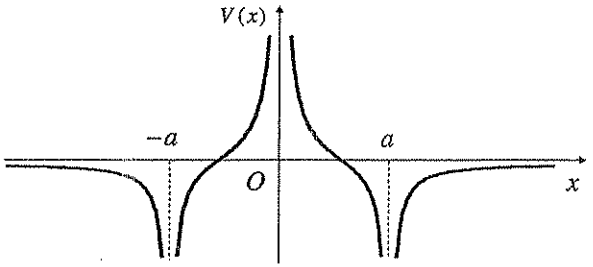
$$\boxed{<\vec{F}>=-\frac{15\alpha p^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^7}\,\vec{u}_r}$$ une force centrale, attractive, en $1/r^7$.

Cette interaction *dipôle permanent – dipôle induit* est appelé de Debye : une molécule polaire (créant un champ électrique) induit un dipôle dans une molécule polarisable voisine à cause de la déformation du nuage électronique. Le dipôle induit interagit alors avec la molécule polaire et les deux molécules s'attirent.

L'exercice suivant concerne l'interaction *dipôle permanent – dipôle permanent* dite de Keesom : deux molécules polaires interagissent de façon attractive avec une énergie potentielle également en $-1/r^6$.

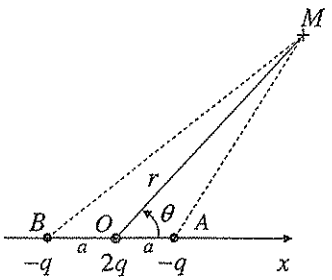
74. Potentiel d'un quadripôle

a) Le potentiel d'une charge ponctuelle est en $1/r$ (où r est une distance, grandeur positive) ; il n'est donc pas défini à l'endroit même où se trouve la charge, ou plus précisément, il tend vers $+\infty$ lorsque la charge est positive et vers $-\infty$ lorsque la charge est négative. En un point donné de l'axe les trois potentiels s'ajoutent, il suffit donc de tracer les trois potentiels séparément (avec leurs branches infinies), puis d'en déduire la somme graphiquement.
Attention, la variable ici étant x (grandeur algébrique), il conviendrait d'écrire :
$V(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{|x+a|}+\frac{2}{|x|}+\frac{-1}{|x-a|}\right)$ (ce qui n'est pas utile pour tracer le graphe).



On note qu'il existe deux endroits entre O et $\pm a$ où le potentiel s'annule.

b) Dans cette distribution la somme des charges est nulle et le barycentre des charges négatives est confondu en O avec la charge positive. On a affaire à un quadripôle et le terme principal du développement du potentiel en M est alors en $1/r^3$ (voir la question **45.**) ; sachant que $1/r$ est en facteur, cela amène à faire le développement limité jusqu'au terme en a^2/r^2.



Le potentiel en M est, avec $OM = r$:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} + \frac{2}{OM}\right)$$

Pour AM, en élevant au carré $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, il vient

$$AM^2 = r^2 - 2ra\cos\theta + a^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{AM} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Sachant que $\frac{a}{r} \ll 1$, on effectue le développement limité en appliquant :

$(1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2$, et il apparaît donc deux termes en $\frac{a^2}{r^2}$:

$$\frac{1}{AM} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{2r^2}\left(1 - 3\cos^2\theta\right)\right)$$

Pour trouver $\frac{1}{BM}$, inutile de reprendre, il suffit de remplacer a par $-a$ dans $\frac{1}{AM}$:

$$\frac{1}{BM} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{2r^2}\left(1 - 3\cos^2\theta\right)\right)$$

Comme prévu, dans la somme, les termes en $1/r$ (monopôle) et en $1/r^2$ (dipôle) s'éliminent, d'où le résultat :

$$\boxed{V(r,\theta) = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3}}$$

75. Mouvement d'une particule chargée dans le champ d'un dipôle (*)

a) La charge q n'est soumise qu'à la force électrique $q\vec{E}$ du dipôle et la relation fondamentale de la dynamique s'écrit simplement dans le référentiel galiléen (R) du laboratoire :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = q\vec{E}(M)$$

Le champ créé par le dipôle placé en O au point M où se trouve la charge est donné dans le plan par ses composantes en polaires :

$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

L'accélération est également projetée sur la base polaire (tournante), d'où les deux équations en posant $k = pq/4\pi\varepsilon_0 m$:

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{2k\cos\theta}{r^3}} \quad (1) \quad \text{et} \quad \boxed{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{k\sin\theta}{r^3}} \quad (2)$$

L'énergie mécanique est : $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(M)_{(R)} + qV(M)$

avec $\vec{v}^2(M)_{(R)} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ et $V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, il vient :

$$\boxed{E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{mk\cos\theta}{r^2}} \quad (3)$$

Par conservation, elle vaut aussi $E=\frac{1}{2}m\left(v_0^2+\frac{2k}{r_0^2}\right)$ (3')

Cela conduit à trois équations pour seulement deux inconnues r et θ ! En réalité les équations ne sont pas indépendantes puisque la conservation de l'énergie est une intégrale première des équations du mouvement. L'avantage de l'équation (3) sur les équations (1) et (2) est évidemment de ne contenir que des dérivées premières...

b) Éliminons le terme $\frac{k\cos\theta}{r^2}$ entre (1) et (3) ; « par chance », le terme en $r^2\dot{\theta}^2$ s'élimine également, ce qui permet d'obtenir l'équation en r :

$$r\ddot{r}+\dot{r}^2=\frac{2E}{m}=\frac{d}{dt}(r\dot{r}) \;\Rightarrow\; r\dot{r}=\frac{2E}{m}t+0=\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} \;\Rightarrow\; r^2=\frac{2E}{m}t^2+r_0^2$$

En effet, ces équations ne sont pas linéaires, mais les membres de gauche apparaissent comme des dérivées temporelles et les constantes sont déterminées à l'aide des conditions initiales ; on écrit finalement :

$$\boxed{r=r_0\sqrt{1+\frac{2E}{mr_0^2}t^2}}$$

L'énoncé suppose $p>0$, mais le signe de q est indéterminé.

* si $E>0$, r augmente et la charge part à l'infini ; ceci est en particulier le cas si $q>0$ (et donc $k>0$) car alors la charge q est davantage repoussée par la charge positive du dipôle (car elle en est plus proche) qu'elle n'est attirée par sa charge négative, ou encore quel que soit le signe de q pour une grande énergie cinétique initiale car alors c'est l'inertie qui l'emporte.
* si $E=0$, alors $r=r_0$; la charge reste à égale distance du dipôle (ce cas est traité à la question c)).
* si $E<0$, r diminue ; ceci suppose forcément $q<0$ avec une énergie cinétique initiale pas trop grande, on comprend alors que l'effet attracteur de la charge positive du dipôle l'emporte. Mais on ne peut pas affirmer que le dipôle capte la charge, car trop près de O, lorsque l'approximation dipolaire n'est plus possible, il faut réécrire les équations...

c) Pour la « trajectoire circulaire », $r=r_0$ et $E=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} 2k=-r_0^2v_0^2$

ce qui suppose $q<0$ pour $p>0$.

L'équation (1) se réécrit alors :

$$\dot{\theta}^2=-\frac{2k\cos\theta}{r_0^4}=\frac{v_0^2}{r_0^2}\cos\theta \quad (1')$$

ce qui limite le mouvement à $\cos\theta\geq 0$ soit $-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2$; la particule oscille donc sur un demi-cercle, dans un mouvement périodique non uniforme ($\dot{\theta}$

dépend de θ), où pour $\theta = \pm\pi/2$, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ s'annule pour changer de signe.

De (1') on tire $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v_0}{r_0}\sqrt{\cos\theta}$, positif sur le premier quart de période, d'où la période :

$$T = 4\int_0^{\pi/2} dt = 4\frac{r_0}{v_0}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} \quad \text{et finalement} \quad \boxed{T = 4\frac{r_0}{v_0} I}$$

76. Champ et potentiel au voisinage d'un plan infini ; pression électrostatique

a) Par symétrie axiale autour de Mx (tout plan contenant Mx est plan de symétrie), le champ en M est porté par Ox ; par invariance par translation suivant yOz, il ne dépend que de x, d'où $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$, ce qui en fait un champ divergent.

Pour $x \geq 0$, div $\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \dfrac{dE}{dx} = \dfrac{\rho_0 e^{-x/a}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} e^{-x/a}\vec{u}_x}$

vérifiant $E(x \to \infty) \to 0$

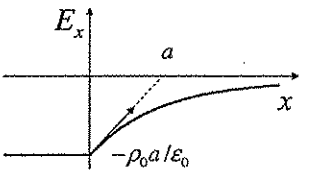
Pour $x \leq 0$, div $\vec{E} = \dfrac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \overrightarrow{cste}$; or le champ est continu en $x = 0$, d'où

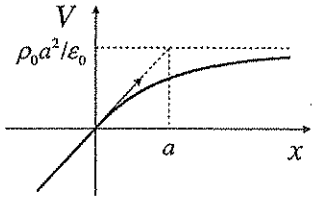
$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$

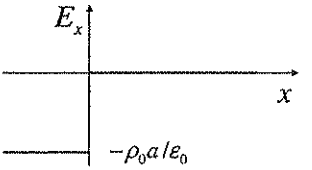
Le potentiel est alors donné par $E = -\dfrac{dV}{dx}$, et en imposant $V(x=0) = 0$:

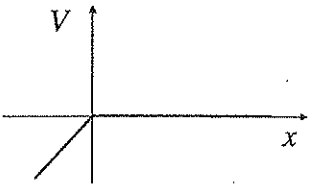
$x \geq 0$, $\boxed{V(x) = \dfrac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(1 - e^{-x/a}\right)}$ et $x \leq 0$, $\boxed{V(x) = \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} x}$

b)









Les premiers graphes concernent $a \neq 0$, la continuité de E_x entraîne celle de dV/dx, la pente à l'origine de $V(x)$.

Les suivants donnent la limite pour $a \to 0$ en supposant que le produit $\rho_0 a$ reste constant ; alors E_x (la composante normale du champ) et donc dV/dx sont discontinus au passage par le plan $x = 0$. Le système peut être décrit par une répartition surfacique dans le plan $x = 0$ de densité surfacique donnée par :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x \text{ d'où } \boxed{\sigma = \rho_0 a}$$

Ce résultat suppose $\rho_0 \to \infty$ lorsque $a \to 0$.

c) L'élément de volume $d\tau$ en M contient la charge $dq = \rho d\tau$ placée dans le champ $\vec{E}$; il est soumis à la force :

$$d\vec{F}_S = \rho d\tau \vec{E} = -\frac{\rho_0^2 a}{\varepsilon_0} e^{-2x/a} S dx \vec{u}_x$$

d'où la résultante : $\vec{F}_S = -\frac{\rho_0^2 a}{\varepsilon_0} S \left(\int_0^\infty e^{-2x/a} dx \right) \vec{u}_x \Rightarrow \boxed{\vec{F}_S = -\frac{\rho_0^2 a^2 S}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x}$

Cette force, normale à la surface, est dirigée vers l'extérieur du conducteur.

d) La grandeur $\| \vec{F}_S \| / S$ représente la pression électrostatique qui s'exerce sur un conducteur chargé (les charges de même signe à la surface du conducteur se repoussent) ; il vient :

$$\boxed{P = \frac{\| \vec{F}_S \|}{S} = \frac{\rho_0^2 a^2}{2\varepsilon_0} \xrightarrow[a \to 0]{} P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \varepsilon_0 \frac{E^2(0)}{2}}$$

La pression électrostatique s'exprime comme la densité volumique d'énergie électrique.

Cette dernière expression est en fait indépendante de la distribution $\rho(x)$ et $E(x)$ pourvu qu'elle tende vers zéro pour $x \to \infty$ (en réalité au-delà de quelques a). En effet le calcul de la question c) donne avec l'équation de Maxwell-Gauss :

$$d\vec{F}_S = \rho d\tau \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{dE(x)}{dx} E(x) S dx \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_S = \varepsilon_0 S \left(\int_0^\infty E dE \right) \vec{u}_x = -\varepsilon_0 S \frac{E^2(0)}{2}\vec{u}_x$$

avec $E(\infty) = 0$.

77. Effet d'une charge d'espace (*)

a) En régime stationnaire $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ soit $\frac{dj_z}{dz} = 0$ et donc

$$j_z = \rho(z) v(z) \quad (1) \text{ est indépendant de } z$$

La conservation de l'énergie mécanique d'un ion s'écrit entre z et $z = 0$:

$$\frac{1}{2}m_{Au}v^2(z)+eV(z)=0+0 \;\Rightarrow\; v^2(z)=-\frac{2e}{m_{Au}}V(z) \quad (2)$$

avec $V(z)<0$ (les ions positifs sont attirés par les potentiels négatifs).

Enfin l'équation de Poisson donne : $\dfrac{d^2V(z)}{dz^2}+\dfrac{\rho(z)}{\varepsilon_0}=0$ (3)

$$(3)\text{ et }(1) \;\Rightarrow\; \frac{d^2V(z)}{dz^2}+\frac{j_z}{\varepsilon_0 v(z)}=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{d^2V(z)}{dz^2}+\frac{j_z}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m_{Au}}{-2eV(z)}}=0} \quad (3')$$

b) Chercher une solution de la forme $V(z)=V_0(z/l)^\gamma$ signifie (pour $\gamma\neq 1$) que le potentiel n'évolue pas de manière linéaire entre les deux plaques (et donc que le champ $\vec{E}$ n'y est pas uniforme).

$$(3') \;\Rightarrow\; V_0\frac{\gamma(\gamma-1)}{l^\gamma}z^{\gamma-2}+\frac{j_z}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m_{Au}l^\gamma}{-2eV_0z^\gamma}}=0$$

Cette relation, vraie $\forall z$, suppose :

* $z^{\gamma-2}+z^{-\gamma/2}=0 \;\Rightarrow\; \gamma=\dfrac{4}{3}$

* $\dfrac{9}{4}\dfrac{V_0}{l^{4/3}}+\dfrac{j_z}{\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{m_{Au}}{-2eV_0}}l^{2/3}=0$ d'où la formule demandée :

$$\boxed{j_z=\frac{4}{9}\varepsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m_{Au}}}\frac{(-V_0)^{3/2}}{l^2}} \quad (4)$$

c) Avec par définition $j_z=\dfrac{I}{s}=3{,}9\text{ A.m}^{-2}$, l'expression (4) conduit à la valeur :

$$\underline{V_0=-46{,}3\text{ kV}}$$

(les valeurs numériques de ε_0, e et N_A sont à connaître)

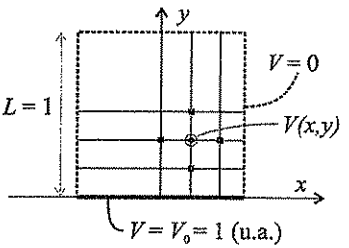
L'équation (2) écrite en $z=l$, soit $v_l^2=-\dfrac{2eV_0}{m_{Au}}$ donne alors $\underline{v_l=210\text{ km.s}^{-1}}$, ce qui reste une vitesse non relativiste ($v_l \ll c$).

Rq : Ce phénomène de charge d'espace se rencontre également pour les électrons entre cathode et anode d'une diode (ampoule en verre cylindrique sous vide).

78. Résolution numérique de l'équation de Laplace en dimension deux

À l'intérieur du domaine D, le potentiel électrostatique $V(x,y)$ est solution, en l'absence de charges volumiques, de l'équation de Laplace $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial y^2}=0$.

a) En notant a le pas du maillage, les coordonnées des plus proches voisins d'un point $M(x,y)$ sont $(x+a,y)$, $(x-a,y)$, $(x,y+a)$ et $(x,y-a)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre deux conduit alors aux égalités :



$$V_1 = V(x+a,y) = V(x,y) + a\times\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_M + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_M + o(a^3)$$

$$V_2 = V(x-a,y) = V(x,y) - a\times\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_M + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_M + o(a^3)$$

$$V_3 = V(x,y+a) = V(x,y) + a\times\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_M + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_M + o(a^3)$$

$$V_4 = V(x,y-a) = V(x,y) - a\times\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_M + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_M + o(a^3)$$

En sommant ces quatre égalités il vient :

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 4\times V(x,y) + a^2\underbrace{\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_M + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_M\right]}_{\Delta V} + o(a^3)$$

d'où l'on tire l'expression approchée du laplacien :

$$\Delta V = \frac{1}{a^2}\left[V(x+a,y) + V(x-a,y) + V(x,y+a) + V(x,y-a) - 4\times V(x,y)\right]$$

Le potentiel électrostatique étant solution de $\Delta V = 0$, il vient :

$$V(x,y) = \frac{1}{4}\left[V(x+a,y) + V(x-a,y) + V(x,y+a) + V(x,y-a)\right]$$

qui s'écrit bien sous la forme demandée :

$$\boxed{V_{[i,j]} = \frac{1}{4}\left(V_{[i+1,j]} + V_{[i-1,j]} + V_{[i,j+1]} + V_{[i,j-1]}\right)}$$

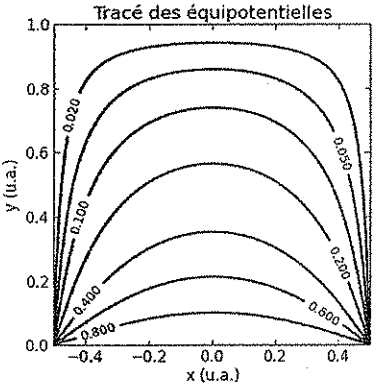
b) Le code python est indiqué ci-dessous :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

n = 51
N = 100000
```

```
def Dirichlet(n):
    V = np.zeros((n, n))
    for i in range(1, n-1):
        V[0, i] = 1.0
        for j in range(1, n-1):
            V[i, j] = rd.random()
    return(V)

def Laplace(V, N):
    for k in range(N):
        V[1:-1,1:-1] = 0.25*(  V[1:-1,:-2] + V[1:-1,2:] + \
                               V[:-2,1:-1] + V[2:,1:-1]     )

V = Dirichlet(n)
Laplace(V, N)
```

c) Le script permettant de réaliser le tracé des équipotentielles à l'intérieur du domaine D, à partir du tableau précédent est :

```
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-0.5, 0.5, n)
y = np.linspace(0, 1, n)

X, Y = np.meshgrid(x, y)
levels = np.array([0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8])

CS = plt.contour(X, Y, V, levels, linewidths = 2, colors = 'k')
plt.title('Tracé des équipotentielles')
plt.xlabel('x (u.a.)')
plt.ylabel('y (u.a.)')
plt.clabel(CS, inline = 1, fontsize = 10)
plt.show()
```



Cette description convient également aux lignes de température en régime stationnaire d'une plaque dont trois côtés sont maintenus à la même température.

Chapitre 5
■ Magnétostatique ■

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
charge de l'électron	$-e$ avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}91.10^{-30}$ kg
constante de Planck	$h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s

Champs magnétiques

à une distance de 1cm d'un fil parcouru par un courant de 1A	$B = \mu_0 I / 2\pi r = 2.10^{-5}$ T
composante horizontale du champ magnétique terrestre	$B = 2.10^{-5}$ T
d'un appareil électroménager : rasoir électrique à 1 cm sèche-cheveux à 15 cm four à micro-ondes, aspirateur, téléviseur, machine à laver à 1 m	$B \approx 800\,\mu$T $B \approx 30\,\mu T = 3.10^{-5}$ T $\approx B_{Terre}$ $B \approx 0{,}1$ à $1\,\mu$T
d'un appareil d'investigation médicale de type IRM (champ statique)	$B \approx 0{,}5$ à 3 T

Moments magnétiques

de l'électron autour du proton (magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar / 2m$)	$\mu_B = 0{,}92.10^{-23}$ A.m^2
d'un aimant usuel	$\mathcal{M} \approx 0{,}1$ à 10 A.m^2
de la Terre	$\mathcal{M} = 8{,}3.10^{22}$ A.m^2

Le cours d'abord

■ L'équation de Maxwell-flux

1. Rappeler la forme locale de l'équation locale de Maxwell-flux ; est-elle spécifique de la magnétostatique ? Les lignes de champ magnétique peuvent-elles diverger à partir d'un point ? Que traduit ce résultat ? Quelle est la forme intégrale (en termes de surface fermée) qui se rapporte à l'équation de Maxwell-flux ?

2. Rappeler comment sont définies les lignes de champ ; comment peut-on les obtenir ? Établir la conservation du flux magnétique le long d'un tube de champ et en déduire l'évolution de la norme du champ magnétique le long d'un tel tube. Le flux à travers une surface ouverte dépend-il de cette surface ?

L'équation de Maxwell-Ampère

3. Comment s'écrit l'équation locale de Maxwell-Ampère en magnétostatique ; reste-elle valable en ARQS ? Conséquence sur l'expression des champs magnétiques.

4. Quelle est la forme intégrale de l'équation locale de Maxwell-Ampère ? Quel est son intérêt ? Expliquer à l'aide d'un dessin comment le signe est attribué aux intensités algébriques.

Propriétés de symétrie, d'invariance

5. Qu'appelle-t-on plan de symétrie / d'antisymétrie pour une distribution de courants ? Montrer par une figure simple les propriétés que cela induit sur la direction du champ $\vec{B}(M)$ en un point M d'un tel plan.

6. Quels renseignements sur le champ peut-on déduire des propriétés d'invariance par translation ou par rotation d'une distribution de courants ?

7. À quoi reconnaît-on une carte de lignes de champ magnétique ? En particulier, comment repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe/sens ?

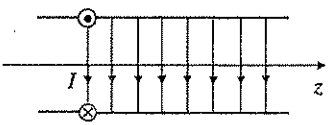
Champ magnétique créé par quelques distributions

8. **Le fil rectiligne infini**
Quel est le champ magnétique créé par un fil rectiligne illimité parcouru par un courant d'intensité I ?
Calculer la valeur du champ B à $r = 1$ cm du fil parcouru par un courant d'intensité $I = 1$ A ; comparer cette valeur à celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre et commenter.

9. **Le câble rectiligne infini**
Un câble rectiligne illimité est modélisé par un cylindre, de section circulaire de rayon a, dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe Oz. Il est parcouru par un courant continu d'intensité I (la densité volumique de courant y est supposée uniforme sur une section). Quelle est l'expression du champ $\vec{B}$ créé en un point quelconque, intérieur ou extérieur au câble, à une distance r de l'axe.
Tracer la courbe $B(r)$; le champ est-il continu en $r = a$?

10. Le solénoïde infiniment long

Une bobine (ou solénoïde) « infinie » d'axe Oz est constitué d'un bobinage serré modélisé par n spires circulaires planes par unité de longueur et parcourues par un courant d'intensité I.



a) Traduire les propriétés de symétrie et d'invariance et en déduire la forme sous laquelle il convient *a priori* de chercher le champ.

b) Montrer que les champs magnétiques intérieur $\vec{B}_i$ et extérieur $\vec{B}_e$ au solénoïde infiniment long sont en réalité uniformes.

c) On admet qu'à l'extérieur d'un solénoïde infiniment long le champ magnétique est nul : $\vec{B}_e = \vec{0}$; en déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_i$ en un point intérieur au solénoïde infiniment long. Que constate-t-on à la traversée de la nappe de courant ? Dessiner les lignes de champ. Que doit valoir n si l'on souhaite un champ B_i de l'ordre de 10 fois le champ terrestre avec $I = 0{,}1$ A ?

■ Le dipôle magnétique

11. Donner la définition d'un dipôle magnétique, du moment dipolaire $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, ainsi que la condition de l'approximation dipolaire.

12. Par analogie avec le dipôle électrique, donner les composantes du champ magnétique créé par un dipôle magnétique en coordonnées sphériques ; propriétés. Dessiner les lignes de champ d'un dipôle magnétique.

13. Sans calcul et par analogie avec le dipôle électrique, indiquer les actions (somme des forces et moment des forces) subies par un dipôle magnétique placé dans un champ extérieur $\vec{B}$ uniforme ; que peut-on dire si $\vec{B}$ est non uniforme ?

Quelle est l'énergie potentielle d'un dipôle dans le champ extérieur $\vec{B}$? Quelles sont les positions d'équilibre d'un dipôle dans un champ extérieur ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ La magnétostatique est une science fondamentalement vectorielle ; les flèches sur les vecteurs sont obligatoires et une égalité du genre « $\overrightarrow{vecteur} = scalaire$ » est à proscrire ; un effort est donc demandé sur l'exactitude et la précision des notations.

☐ Tout calcul de champ doit absolument être précédé par une recherche des symétries et des invariances, qui par ailleurs déterminent le choix des coordonnées (cartésiennes, cylindriques ou sphériques) ; les symétries permettent de déterminer la direction du champ magnétique et les invariances, les variables dont ne dépend pas sa norme.

☐ Lorsqu'on cherche des propriétés du champ $\vec{B}(M)$ en un point M donné, il faut considérer des plans de symétrie ou d'antisymétrie passant obligatoirement par ce point M. Il existe souvent d'autres plans de symétrie, mais qui ne contiennent pas le point M, ils ne sont donc pas utiles dans un premier temps. Ils permettent cependant souvent de simplifier l'étude, par exemple, si la distribution admet le plan $z=0$ comme plan de symétrie, alors $B_z(-z)=B_z(z)$, ce qui permet de limiter l'étude à $z\geq 0$.

☐ L'application du théorème d'Ampère suppose des propriétés de symétrie et d'invariance suffisantes pour déterminer préalablement la direction du champ $\vec{B}$; ensuite une réflexion s'impose sur le choix du « bon » contour fermé. Mais en règle générale, d'autres techniques (hors programme) par des « intégrales vectorielles » sont nécessaires pour calculer directement un champ $\vec{B}$.

☐ De manière générale, il faut orienter le contour avant de calculer la circulation le long du contour (ou le flux à travers une surface ouverte) ; des deux sens envisageables, choisir lorsque cela est possible, celui conduisant à une circulation positive (ou un flux positif). La normale $\vec{n}$ d'une surface quelconque ouverte S s'appuyant sur le contour C est orientée à partir de l'orientation du contour par la « règle du tire-bouchon » (en le tournant dans le sens de l'orientation, il avance dans le sens de $\vec{n}$).

☐ Lorsqu'un système de courants peut se ramener à la superposition de circuits plus simples pour lesquels le résultat est connu, il est toujours intéressant d'appliquer le théorème de superposition, et dire que le champ de l'ensemble est la somme des champs de chaque partie.
Attention dans une décomposition, le théorème d'Ampère s'applique au champ créé par le circuit complet, jamais à une contribution au champ total créé par un morceau de circuit.

☐ Lorsqu'il s'agit de faire la somme vectorielle de plusieurs champs, rappelons que la norme de la somme n'est pas égale à la somme des normes ! (sauf s'ils sont tous parallèles et de même sens) ; il faut bien sûr effectuer la somme des projections sur la direction résultante.

☐ Les lignes de champ magnétique se referment toujours (même à l'infini) et sont orientées suivant la règle du tire-bouchon appliquée au courant électrique dans le cas d'un circuit, ou depuis la face Nord vers la face Sud pour un aimant à l'extérieur de celui-ci. Prendre l'habitude d'orienter les lignes de champ, si le sens du courant est connu et de les tracer en trait plein. Elles ne peuvent pas se croiser.

☐ Pour déterminer les lignes de champ (lignes dont les tangentes sont colinéaires au champ), il suffit de traduire que les deux vecteurs $\vec{B}$ et $\overrightarrow{dM}$ sont parallèles lorsque leurs composantes sont proportionnelles :

en cartésiennes $\frac{dx}{B_x}=\frac{dy}{B_y}$, ou en polaires $\frac{dr}{B_r}=\frac{rd\theta}{B_\theta}$.

☐ Il faut toujours bien faire la distinction entre le champ propre créé par un dipôle et le champ magnétique extérieur dans lequel il est placé (et qui est souvent plus important).

☐ Le champ magnétique créé par un fil infini est en $1/r$, celui du dipôle en $1/r^3$.

☐ Les équations de Maxwell sont des équations « locales », ce qui signifie qu'elles sont écrites en un point M donné de l'espace, alors que le théorème d'Ampère qui y est rattaché représente la forme « intégrale » car il faut prendre la circulation de $\vec{B}$ sur un contour fermé.

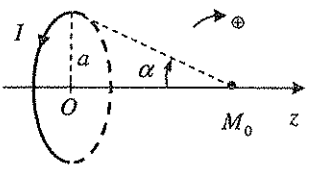
☐ Les champs magnétiques produits par des circuits parcourus par des courants variables se calculent par les mêmes expressions qu'en statique.

Applications directes du cours

Champs magnétiques

14. Au cours d'un orage, un éclair peut être assimilé à un fil rectiligne de rayon $a=10$ cm et parcouru par un courant d'intensité $I=10^5$ A. À moins de quelle distance du point de chute de l'éclair, l'aiguille d'une boussole risque-t-elle d'être désaimantée sachant que cela se produit lorsqu'elle est placée dans un champ supérieur à $B_L=2.10^{-3}$ T ?

15. Une spire circulaire de centre O, d'axe Oz et de rayon a est parcourue par un courant d'intensité I. Dessiner les lignes de champ dans un plan médian.
Quelle est la direction du champ magnétique $\vec{B}(M_0)$?



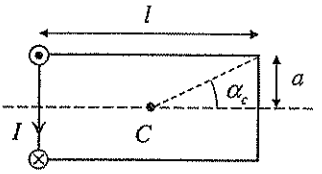
Le champ créé sur l'axe est $\vec{B}_0(\alpha)=\frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z$ où α est le demi-angle, orienté, sous lequel la spire est vue à partir d'un point M_0 de son axe.
Quelle est l'expression du champ au centre $B(O)$?

Déterminer et tracer la courbe $B_0(z)$ de l'intensité du champ en un point M_0 de l'axe. Commenter.

16. Les bobines de Helmholtz

On dispose deux spires identiques à celle de la question précédente sur le même axe Oz en $z = \pm d/2$ (dispositif appelé bobines de Helmholtz). Elles sont parcourues par le même courant d'intensité I dans le même sens. À l'aide d'arguments graphiques nécessitant un minimum de calculs, déterminer la distance d, à exprimer en fonction du rayon a, à laquelle il faut placer les spires pour obtenir le champ le plus uniforme possible dans le voisinage du centre O. Sans faire de calcul, prédire de quel ordre en z est alors le premier terme non nul du développement $B_T(z) - B_T(0)$ pour z petit où B_T est le champ total.

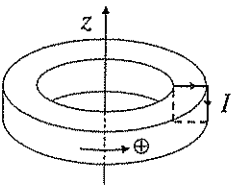
17. Une bobine (ou solénoïde de longueur finie) de rayon a, de longueur l et comportant n spires par unité de longueur, est parcourue par un courant d'intensité I.



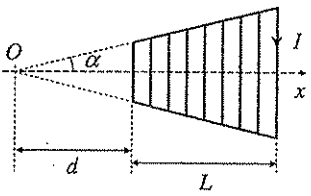
Montrer que le champ magnétique en un point quelconque de l'axe est dirigé suivant cet axe.

La valeur du champ au centre C de la bobine est $B_c = \mu_0 n I \cos\alpha_c$ où l'angle α_c est défini sur la figure. Pour quelles valeurs du rapport $l/2a$ peut-on considérer que le champ au centre d'un solénoïde de longueur finie diffère de moins de 1% de celui du solénoïde infiniment long ?

18. Une bobine torique de section carrée de côté a est constituée de N spires jointives planes et régulièrement enroulées sur un tore de révolution d'axe Oz et de rayon moyen R. Elle est parcourue par un courant d'intensité I comme indiqué sur la figure. Déterminer le champ $\vec{B}(M)$ produit en tout point M de l'espace. Commentaires.



19. Une bobine tronconique d'angle α est constituée de n spires jointives par unité de longueur. Sa longueur est L et elle est placée à une distance d du point de concours O.



Déterminer le champ magnétique qu'elle crée en O lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité I.

On rappelle l'expression du champ magnétique en un point de l'axe d'une spire circulaire de rayon a parcourue par un courant d'intensité I à partir duquel elle est vue sous un angle 2α :

$$\vec{B}(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3\alpha \, \vec{u}_z$$

Inductance d'une bobine

20. Montrer qu'un dipôle électrocinétique constitué d'une inductance L parcourue par un courant i emmagasine l'énergie $U_m = \frac{Li^2}{2}$; pourquoi cette énergie est-elle appelée énergie magnétique ?
Qu'est ce qui interdit les discontinuités de courant dans un circuit électrique ?

21. Rappeler l'expression, en fonction de $\vec{B}$, de la densité volumique d'énergie magnétique u_m. L'appliquer au champ dans une bobine de longueur l, de section S et comportant N spires, et assimilée à un tronçon de solénoïde suffisamment long pour trouver son énergie magnétique U_m liée au courant I qui la traverse. En déduire l'expression de l'inductance propre L de la bobine en fonction de μ_0, N, S et l.
AN : Estimer L pour une bobine de TP à peu près cubique de côté 10 cm et comportant 300 spires.
On double le nombre de spires (en gardant inchangées les autres caractéristiques) de la bobine ; comment est modifiée son inductance L ?

Dipôle magnétique

22. Une spire circulaire de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I. Son rayon est vu sous un angle α à partir d'un point M de son axe, placé à la distance d du centre O. Pour quelles valeurs de l'angle α le champ au point M sur l'axe de la spire diffère-t-il de moins de 1% de celui du dipôle magnétique équivalent ? Pour cela établir le rapport $B_{sp.}/B_{dip.}$ au point M en fonction de α, puis donner en degrés la valeur numérique de l'angle maximal α_m.

23. Pour un dipôle magnétique, déterminer la variation de l'intensité du champ magnétique $B(\theta) = \|\vec{B}\|$ en fonction de θ le long d'une ligne de champ (on rappelle que les lignes de champ sont données par $r(\theta) = r_0 \sin^2\theta$). Commenter les variations de la fonction $B(\theta)$.

24. Vérifier que l'expression vectorielle dite intrinsèque du champ magnétique créé par un dipôle de moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3(\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \overrightarrow{\mathfrak{M}}\right)$$

conduit aux bonnes composantes du champ en coordonnées sphériques.

25. Tracer les lignes de champ d'une bobine (ou solénoïde de longueur finie) parcourue par un courant d'intensité I. Que constate-t-on si on les compare à celles d'un aimant droit ? Par quelle analogie peut-on associer à un aimant un moment magnétique ?

26. Moment magnétique orbital d'un atome

En prenant, dans le cadre du modèle classique de Bohr, un électron de charge $-e$ et de masse m en orbite circulaire autour d'un noyau ponctuel fixe, montrer qu'entre le moment cinétique $\vec{\sigma}$ de l'électron par rapport au noyau et le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ associé à son mouvement orbital existe la relation $\vec{\mathfrak{M}} = \gamma \vec{\sigma}$ et donner l'expression du coefficient γ appelé rapport gyromagnétique.

27. Magnéton de Bohr

Déduire de la question précédente que la quantification du moment cinétique, $\sigma = n\hbar$ où $\hbar = h/2\pi$ et $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s est la constante de Planck, conduit à définir un moment magnétique élémentaire appelé magnéton de Bohr μ_B ; donner son expression et sa valeur numérique. Commentaire.

28. Quelle est l'importance de la notion de dipôle magnétique au niveau macroscopique ? au niveau microscopique ?

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

29. Décrire l'expérience historique d'Oersted qui a fait apparaître le rapport insoupçonné entre l'électricité et le magnétisme. Qui a élaboré la théorie de la magnétostatique ?

30. Donner des exemples de sources du champ magnétique.

31. Quels dispositifs simples permettent de réaliser dans une zone donnée un champ magnétique quasi uniforme ?

32. Qu'a voulu prouver Rowland par l'expérience où il fait tourner autour de son axe un disque non conducteur (pourquoi ?) uniformément chargé ? (voir la question **43.**).

33. Pourquoi l'aiguille aimantée d'une boussole s'oriente-t-elle spontanément ? Comment sont définis ses pôles Nord et Sud ? Dans quel sens est orienté son moment magnétique ?

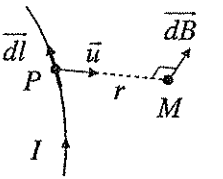
34. Quelle est l'origine du champ magnétique terrestre ? Par quel modèle simple peut-il être représenté ? Où se trouvent les Pôles Nord et Sud magnétiques ? Quelles sont les caractéristiques de l'orientation du champ magnétique en France ? Quelle est l'importance du champ magnétique pour la Terre ?

35. Un aimant (ou une spire parcourue par un courant) ne subit aucune force (au sens où la résultante des forces de Laplace est nulle) lorsqu'il est placé dans un champ magnétique uniforme. Pourquoi alors deux aimants s'attirent-ils ?

36. Pourquoi les champs magnétiques sont-ils si utiles dans les « accélérateurs » de particules ? Et pour quelle raison les électroaimants conventionnels ont-ils été remplacés par des aimants supraconducteurs ?
Au CERN (Centre Européen pour la Recherche Nucléaire) à Genève, les accélérateurs ont des diamètres de plus en plus grands (le plus grand, à cheval sur la France et la Suisse, a un rayon de 4,3 km , soit une circonférence de 27 km) ; dans quel but ? Pourquoi les expériences ont-elles souvent lieu de nuit ?

37. Quel est l'ordre de grandeur de l'intensité du champ magnétique créé par les appareils électroménagers ?

38. Un élément $\overrightarrow{dl}$ d'un conducteur filiforme parcouru par un courant électrique d'intensité I est placé en un point P de l'espace. En posant $\vec{r} = \overrightarrow{PM} = r\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, la contribution $\overrightarrow{dB}(M)$ au champ magnétique total, créée par cet élément en un point d'observation M (loi de Biot et Savart) est :



$$\boxed{\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}} \quad \text{avec } r = PM \text{ et } \vec{u} = \vec{u}_{PM}$$

Sur le schéma on a le cas $I > 0$.
Comparer cette situation à celle d'un champ électrique créé par une charge élémentaire, puis relier ces résultats aux équations de Maxwell et faire ressortir, à un niveau formel, la différence qui caractérise les lois de l'électrostatique et les lois de la magnétostatique.

39. Les résultats de magnétostatique des questions **1.** à **4.** restent-ils valables lorsque le courant électrique, source du champ magnétique, est variable dans le temps ? Le cas échéant, préciser les domaines éventuels de fréquence permettant de conserver ces lois. Donner un exemple.

40. Le spin est le moment cinétique propre ou intrinsèque d'une particule ; il est caractéristique de cette particule. Quelle analogie classique peut-on proposer pour l'électron atomique ?
La relation entre moment cinétique de spin $\vec{s}$ de l'électron et moment magnétique de spin $\overrightarrow{\mathfrak{M}_s}$ qui en résulte reste $\overrightarrow{\mathfrak{M}_s} = \gamma\vec{s}$ comme vu à la question **26.** pour le mouvement orbital.
La théorie quantique affecte aux projections s_z du moment cinétique de spin $\vec{s}$ de l'électron (particule de spin 1/2), les deux seules valeurs $\pm\hbar/2$ où $\hbar = h/2\pi$ ainsi qu'une valeur du rapport gyromagnétique double de celle prévue par le mouvement orbital soit ici pour l'électron $\gamma = -e/m$.
Quelles sont (y compris numériquement), les valeurs possibles des projections $\mathfrak{M}_{sz}$ du moment magnétique de spin $\overrightarrow{\mathfrak{M}_s}$ de l'électron ?
Que peut-on dire du moment magnétique de spin d'un atome à plusieurs électrons ?
Quelle est l'importance pratique de ces notions ?

Exercices

41. Éclair et tonnerre

Au cours d'un orage, un éclair peut être assimilé à un conduit cylindrique rectiligne de rayon $a = 10$ cm et parcouru par un courant d'intensité $I = 10^5$ A.

a) Faire un schéma et expliquer pourquoi un électron de ce courant est soumis à une force magnétique de Lorentz ; quel est son sens ?

b) Montrer que les charges mobiles d'un élément de volume $d\tau$ de l'éclair subissent la force volumique $\frac{d\vec{f}_m}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ où $\vec{j}$ est la densité volumique de courant dans l'éclair.

c) Estimer j puis B au niveau du bord du conduit et exprimer la norme de cette force magnétique par unité de volume en fonction de I et a.

d) Faire l'application numérique de cette force et la comparer au poids volumique de l'air ; conclusion.

e) Quelle conséquence (sonore) déduit-on de ce phénomène ?

42. Champ créé, en dehors de l'axe, par une spire circulaire (*)

Reprendre la spire circulaire de la question **15.**. Un point M voisin de M_0 se trouve à la même abscisse z, mais à une distance r de l'axe.

a) À quels résultats conduit l'examen des propriétés de symétrie et d'invariance ?

b) On note $B_0(z) = B_z(r = 0, z)$. Montrer à partir de la conservation du flux à travers un petit cylindre centré sur M_0 et passant par M, que si r est suffisamment petit par rapport à a, la composante radiale du champ en M s'écrit :

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}$$

c) Le signe de $B_r(r,z)$ était-il prévisible ? Esquisser et orienter les lignes de champ magnétique autour de la spire, et de son axe.

43. Le disque chargé en rotation

Un disque non conducteur de rayon R, uniformément électrisé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$, tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ autour de son axe Oz. Pour cette étude, il est judicieux de décomposer le disque en un ensemble de couronnes de rayons r et d'épaisseur dr assimilables chacune à une spire circulaire créant en M où elles sont vues sous un angle α un champ $\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 dI}{2r}\sin^3\alpha \vec{u}_z$.

a) Faire un schéma et exprimer simplement l'intensité dI du courant qui circule dans une telle couronne en fonction de σ, ω et r.

b) Déterminer le champ magnétique total $\vec{B}$ produit en un point M de l'axe à partir duquel le disque est vu sous un demi-angle au sommet θ (α est variable de 0 à θ) en fonction de μ_0, σ, R, θ et $\vec{\omega}$.

c) Calculer, également par intégration, le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ associé au disque chargé en rotation.

d) Préciser les conditions de l'approximation dipolaire, puis vérifier que le champ précédemment calculé s'identifie bien à celui du dipôle sur l'axe.

44. Caractéristiques d'un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres conducteurs de rayons R_1 et R_2 sur lesquels circulent, en surface, des courants d'intensité I et de sens opposés.

a) Déterminer le champ $\vec{B}$, l'énergie magnétique U_m sur une longueur h et en déduire l'inductance L_h par unité de longueur.

b) Les deux cylindres portent également des charges opposées. Reprendre les calculs pour le champ $\vec{E}$, l'énergie électrique U_e sur une longueur h et en déduire la capacité C_h par unité de longueur.

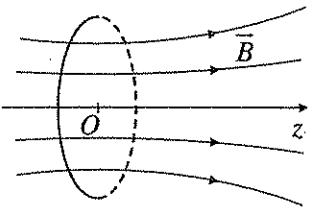
c) Quelle relation simple retrouve-t-on entre L_h et C_h ?

45. Cerceau chargé et mobile dans un champ magnétique inhomogène (*)

Dans une zone de l'espace située au voisinage du point O règne un champ magnétique à symétrie cylindrique d'axe Oz. En un point M de coordonnées (ρ,θ,z), les composantes de $\vec{B}$ valent $B_z = B_0\left(1-\dfrac{z^2}{a^2}\right)$, $B_\rho = B_0\dfrac{\rho z}{a^2}$ et $B_\theta = 0$.

Un cerceau isolant filiforme de rayon R, de masse m porte une charge Q uniformément répartie. Situé initialement dans le plan $z=0$, ce cerceau est animé à cette date d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{u}_z$.

Dans tout le problème, on néglige l'action du champ de pesanteur.



a) Sachant qu'en coordonnées cylindriques, $\operatorname{div}\vec{X} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho X_\rho)}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial X_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z}$, vérifier que le champ donné satisfait l'équation de Maxwell-flux.

b) On souhaite montrer que le cerceau se met à tourner autour de l'axe Oz tout en lui restant perpendiculaire. Calculer la force de Lorentz élémentaire $\overrightarrow{dF}$ s'exerçant sur un élément du cerceau en tenant compte à la fois de son mouvement de translation et d'une éventuelle rotation. En déduire le moment résultant M_{Oz} pour l'ensemble du cerceau.

c) Écrire le théorème du moment cinétique scalaire sur Oz appliqué au cerceau dont le moment d'inertie par rapport à son axe est $J_{Oz} = mR^2$, puis relier sa vitesse angulaire de rotation $\omega(t)$ au déplacement $z(t)$ de son centre.

d) Justifier la conservation de l'énergie mécanique du cerceau et en déduire l'évolution de la vitesse $\dot{z}$ du centre du cerceau. Expliciter l'amplitude maximale z_M du mouvement en fonction des données de l'énoncé.

e) Déterminer la période T du mouvement, d'abord à l'aide de v_0, z_M et de $\alpha = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \approx 1{,}31$, puis en fonction des données de l'énoncé.

46. Simulation d'un « monopôle » magnétique

On montre qu'un solénoïde de très petites dimensions transversales, d'axe Oz et semi-infini de $z = -\infty$ à $z = 0$, présente à son extrémité O un champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi r^2} \vec{u}_r$$

où r est la distance d'un point par rapport à O (coordonnée sphérique) et λ une constante.

a) Commenter l'expression de ce champ ; a-t-on div $\vec{B} = 0$? En s'appuyant sur une analogie dipolaire avec l'électrostatique, indiquer ce que simule l'extrémité de ce solénoïde (appelé corde de Dirac).

b) Trouver l'expression de la constante λ par examen du flux magnétique à travers une sphère de centre O et de rayon r en distinguant bien les deux contributions. Donner λ en introduisant la section S du solénoïde, son nombre n de spires par unité de longueur et l'intensité I du courant qui le traverse.

47. Champ magnétique produit à l'extrémité d'un aimant.

On propose une évaluation de la norme B du champ magnétique produit à l'extrémité d'un aimant à partir de la force F nécessaire pour décoller cet aimant d'une surface en fer.

a) Quel est le travail fourni par la force F ayant permis de décoller l'aimant d'une distance ε de la surface en fer suffisamment petite pour que F puisse être considérée comme constante dans l'opération ?

b) La petitesse de la distance ε permet également de considérer que dans tout le volume situé entre l'aimant et le fer (surface de contact S), le champ magnétique est uniforme et égal à B, valeur du champ à la surface de l'aimant. Quelle est l'énergie magnétique U_m présente dans ce volume ?

c) D'où provient cette énergie ? En déduire l'expression de la force F en fonction du champ B.

AN : Un aimant permanent en forme de barreau cylindrique de 2 cm de diamètre a une « force d'adhérence de 2 kg » ; expliquer cette notion puis estimer le champ magnétique à proximité de son extrémité.

48. Estimation de la taille du noyau terrestre

Le magnétisme terrestre est assimilé à celui d'un aimant géant situé au centre de la Terre (le noyau terrestre interne solide).

a) On note $\mathcal{M}$ le moment magnétique de l'aimant terrestre ; quel est en ordre de grandeur l'expression du champ magnétique B_T créé par ce dipôle à la surface de la Terre de rayon R_T ?

AN : Estimer $\mathcal{M}$ sachant que $R_T \approx 6400$ km et $B_T \approx 4.10^{-5}$ T (composante totale du champ).

b) En déduire le nombre N d'atomes de la matière « aimantée » constituant le noyau terrestre sachant que chaque atome concerné porte un moment magnétique de l'ordre du magnéton de Bohr :

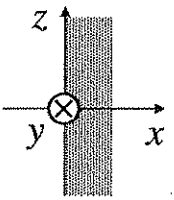
$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \approx 10^{-23} \text{ A.m}^2$$

c) En prenant des valeurs « moyennes » pour la masse molaire (mélange de fer et de nickel) $M \approx 57$ g.mol^{-1} et la masse volumique $\rho \approx 8$ kg.L^{-1}, estimer le volume V concerné par la matière aimantée.

d) En déduire le rayon R du noyau terrestre interne supposé sphérique ; commenter le résultat et discuter le modèle.

49. Effet Meissner et pression sur un supraconducteur plan

Un matériau supraconducteur vérifiant l'équation de London $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j} = -\vec{B}/\mu_0\lambda^2$ occupe tout le demi-espace défini par $x \geq 0$. Le trièdre orthonormé $Oxyz$ est choisi de telle sorte que le champ magnétique statique régnant dans le vide extérieur $(x < 0)$ n'ait de composante tangentielle que suivant Oz (c'est-à-dire $B_y = 0$) sur le plan $x = 0$. La norme du champ sur la frontière est B_0 et les deux composantes B_x et B_z sont indépendantes de y et z. La question étant traitée à l'échelle mésoscopique, le champ est pris continu à la frontière.



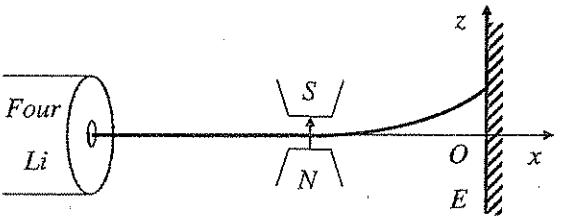
a) Établir l'équation vérifiée par le champ $\vec{B}$ dans le supraconducteur et donner sa solution détaillée. Qu'en déduit-on pour le champ extérieur au supraconducteur ?

b) Proposer une interprétation de λ.
AN : Pour l'aluminium, $\lambda = 16$ nm.
Calculer le rapport $B(x)/B_0$ pour $x = 0{,}1$ µm ; conclusion.

c) Déduire du champ magnétique la densité de courant à l'intérieur du supraconducteur et montrer qu'il exerce une force magnétique par unité de surface à caractériser par sa direction et son sens et la pression correspondante. Application concrète ?

50. L'expérience de Stern et Gerlach

Un four contient des atomes de lithium porteurs de moments dipolaires magnétiques. Un jet monocinétique de ces atomes sort par un petit trou pratiqué dans la paroi du four (tous les atomes de lithium sont animés de la même vitesse parallèle à l'axe Ox). L'expérience est réalisée dans le vide.



Les atomes de lithium pénètrent dans une région de l'espace, l'entrefer d'un électroaimant, symétrique par rapport au plan Oxz dans laquelle règne un champ magnétique $\overline{B}$ non uniforme suivant Oz (la composante B_z varie grandement avec z).

Le jet atomique est reçu sur un écran E situé en arrière de la zone dans laquelle règne le champ magnétique.

a) Expliquer qualitativement pourquoi et dans quelle direction le jet atomique est dévié par la traversée du champ magnétique agissant sur ces dipôles magnétiques de moment $\overline{\mathfrak{M}}$.

b) Que devrait-on observer dans une théorie classique ?

c) En réalité l'observation de l'écran permet de distinguer sur Oz deux taches symétriques par rapport à l'axe Ox. Commenter ce résultat. Quelle grandeur physique peut-on déduire de ces mesures ?

d) Déduire de la configuration électronique du lithium ($Z = 3$), la nature orbitale ou de spin du moment magnétique mesuré.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

L'équation de Maxwell-flux

1. L'équation locale de Maxwell-flux, $\boxed{\text{div}\,\vec{B}=0}$, est valable pour tous les champs magnétiques, statiques ou non.
Les lignes de champ magnétique ne divergent donc jamais à partir d'un point (contrairement au cas de l'électrostatique). Ce résultat traduit notamment l'inexistence des « charges magnétiques ».

Le théorème d'Ostrogradsky indique que le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée S est nul :

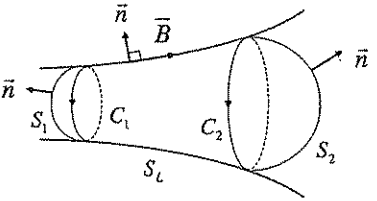
$$\oiint_{(S)} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \text{div}\,\vec{B}\,d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_S = \oiint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0}$$

2. Rappelons que les lignes de champ sont les lignes dont les tangentes sont colinéaires en tout point au champ magnétique. Pour les déterminer, il suffit de traduire que les deux vecteurs $\vec{B}$ et $\overrightarrow{dM}$ sont parallèles lorsque leurs composantes sont proportionnelles :

en cartésiennes $\boxed{\dfrac{dx}{B_x}=\dfrac{dy}{B_y}=\dfrac{dz}{B_z}}$, ou en cylindriques $\boxed{\dfrac{dr}{B_r}=\dfrac{rd\theta}{B_\theta}=\dfrac{dz}{B_z}}$

Du résultat de la question **1.** on déduit que le flux de $\vec{B}$ est conservatif : le long d'un tube de champ, le flux magnétique se conserve. Cela signifie que si S_1 et S_2 sont deux surfaces s'appuyant sur un même tube de champ du champ magnétique, alors $\Phi_1 = \Phi_2$.

En effet, considérons une surface fermée S dont la surface latérale S_L est constituée d'un tube de champ (ensemble de lignes de champ s'appuyant sur les contours C_1 et C_2) et qui est fermée à ses extrémités par deux surfaces ouvertes S_1 et S_2 s'appuyant sur ces contours ; alors $\Phi_S = 0$ et par additivité du flux :



$$\Phi_S = \Phi_{S_L} + \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0 - \Phi_1 + \Phi_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_1 = \Phi_2}$$

$\Phi_{S_L} = 0$ car sur le tube $\vec{n} \perp \vec{B}$; par ailleurs, on note $\Phi_2 = \Phi_{S_2}$ et $\Phi_1 = -\Phi_{S_1}$ les flux pris par exemple dans le sens du champ, par orientation de C_1 et C_2 (alors que la normale $\vec{n}$ est partout extérieure). $\vec{B}$ **est un champ à flux conservatif.**

Et si $S_2 > S_1$ comme sur la figure, alors on en déduit $B_2 < B_1$ soit : $\|\vec{B}\|$ diminue lorsque les lignes de champ s'évasent (et inversement).
Des lignes de champ parallèles entre elles décrivent un champ $\vec{B}$ uniforme.

Si l'on fait $C_1 = C_2 = C$ (ce qui entraîne $S_L = 0$ mais toujours $S_1 \neq S_2$), alors $\Phi_1 = \Phi_2$ montre que le flux à travers une surface ouverte ne dépend pas de cette surface, mais uniquement du contour C sur lequel elle s'appuie.

Les lignes de champ magnétiques se referment toujours.

L'équation de Maxwell-Ampère

3. L'équation locale de Maxwell-Ampère s'écrit en magnétostatique : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

C'est aussi sa forme en ARQS lorsque le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ dans l'équation de Maxwell-Ampère, sans être nul, est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j}$. Les champs magnétiques variables en ARQS sont donc donnés par les mêmes expressions que les champs magnétostatiques.

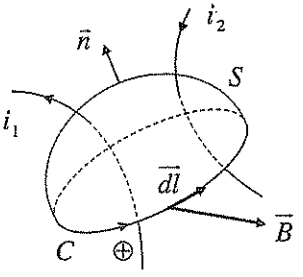
4. Sa forme intégrale, par le théorème de Stokes, conduit au théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C)} \vec{B}.\vec{dl} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}.\vec{dS} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j}.\vec{dS} = \mu_0 I_C^{enlacés} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint_{(C)} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_C^{enl.}}$$

La circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé C est égale à $\mu_0 I_C^{enl.}$, $I_C^{enl.}$ étant « l'intensité enlacée par C ».

Comme vu à la question **3.**, le théorème d'Ampère établi en magnétostatique reste vrai en ARQS (incluant le régime variable en Travaux Pratiques jusqu'au MHz).

Il reste à préciser les conventions d'orientation. De manière générale, il faut orienter le contour C avant de calculer la circulation ; des deux sens envisageables, choisir lorsque cela est possible, celui conduisant à une circulation positive et l'indiquer sur la figure par une flèche marquée du signe $\oplus$. Alors la normale $\vec{n}$ d'une surface quelconque ouverte S s'appuyant sur le contour C est orientée à partir de $\oplus$ par la « règle du tire-bouchon » (en le tournant dans le sens de $\oplus$, il avance dans la direction $\vec{n}$).



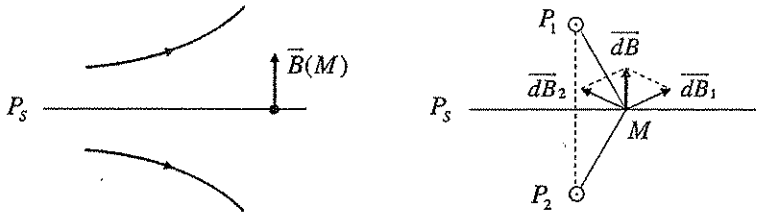
Et dans $\boxed{I_C^{ent.} = \sum i_k}$, somme algébrique des intensités des courants qui traversent la surface S, compté positivement si i_k est dans le sens de $\vec{n}$ et négativement s'il est dans le sens opposé à $\vec{n}$. Ainsi sur la figure : $I_C^{ent.} = i_1 - i_2$.

Si le même fil recoupe plusieurs fois la surface, il faut le compter à chaque fois, en tenant compte du sens de traversée.

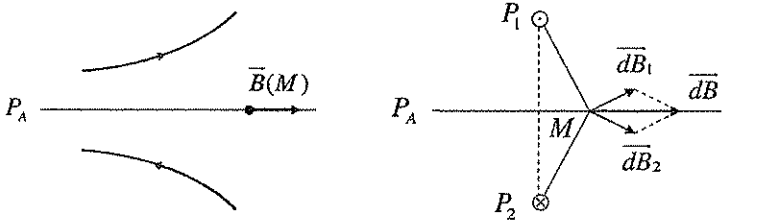
Ce théorème est facile d'application ; cependant, il ne convient que dans des cas simples où $\vec{B} // \vec{dl}$ ou $\|\vec{B}\|$ uniforme.

■ Propriétés de symétrie, d'invariance

5. P_S est un plan de symétrie pour une distribution de courants si à tout circuit d'un côté du plan correspond un circuit de l'autre côté, disposé de manière symétrique par rapport au plan, les courants dans les deux circuits étant égaux et de même sens. Le dessin de gauche donne le résultat et celui de droite (vue perpendiculaire) montre clairement qu'en tout point M de ce plan, le champ $\vec{B}(M)$ est alors orthogonal au plan de symétrie (sur les schémas, les intensités sont choisies positives).



P_A est un plan d'antisymétrie pour une distribution de courants si à tout circuit d'un côté du plan correspond un circuit de l'autre côté, disposé de manière symétrique par rapport au plan, les courants dans les deux circuits étant de même valeur mais de sens contraire (ou plus simplement à des courants de sens contraires dans des circuits symétriques). Pour retrouver la distribution de départ, il faut en plus de la symétrie géométrique effectuer un changement de sens des courants. Le dessin de gauche donne le résultat et celui de droite (vue perpendiculaire) montre clairement qu'en tout point M de ce plan, le champ $\vec{B}(M)$ est alors contenu dans le plan d'antisymétrie (sur les schémas, les intensités sont choisies positives).



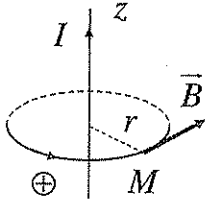
6. Lorsque la distribution de courants est invariante par translation le long d'un axe Oz (ce qui suppose la distribution infinie dans cette direction), alors la norme du champ ne dépend pas de la variable z.
Lorsque la distribution de courants est invariante par translation le long d'un plan xOy (ce qui suppose la distribution infinie dans ces directions), alors la norme du champ ne dépend pas des variables x et y.
Lorsque la distribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe Oz, alors la norme du champ ne dépend pas de la variable θ (variable angulaire autour de cet axe).
Ces propriétés traduisent le principe de Curie selon lequel les symétries et invariances des causes se retrouvent dans les effets produits.

7. Les lignes de champ magnétique sont fermées, y compris « à l'infini » si elles sont parallèles. Pour qu'il y ait champ magnétique il faut qu'il y ait des sources, donc des distributions de courants. Et donc l'emplacement des sources est indiqué par un enlacement serré de lignes de champ. Par ailleurs $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (M.A.) indique qu'en tournant dans les sens de $\vec{B}$, la règle du tire-bouchon permet de trouver le sens du courant à l'origine de ce champ.
Enfin rappelons que les lignes de champ s'évasent lorsque la norme du champ diminue (Maxwell flux) et inversement.

Champ magnétique créé par quelques distributions

8. Le fil rectiligne infini
Un fil (donc de section négligeable) d'axe Oz est parcouru par un courant d'intensité I. Tout plan contenant le fil est plan de symétrie pour la distribution de courant ; le champ $\vec{B}$ perpendiculaire à tous ces plans n'a donc qu'une composante orthoradiale suivant $\vec{u}_\theta$. Par invariances par translation le long de Oz et par rotation autour de Oz, cette composante ne dépend ni de z, ni de θ, mais seulement de r, distance au fil :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$



ce qui est bien la marque d'un champ rotationnel.
Les lignes de champ sont donc des cercles d'axe Oz. Soit C un tel contour orienté positivement suivant $\vec{u}_\theta$, d'où $\vec{dl} = dl\,\vec{u}_\theta$.
Le théorème d'Ampère s'écrit sur C :

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \oint_C B(r).dl = B(r).2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta}$$

expression dans laquelle il ne faut pas faire tendre r vers zéro (voir la question **9.**).
L'orientation positive du contour fixe $I_{enl} = I$ avec $I > 0$ si le courant est suivant Oz^+ et $I < 0$ si le courant est suivant Oz^-. Le sens de $\vec{B}$ est donc lié au sens réel du courant par la règle du tire-bouchon.

AN : $B = 2.10^{-5}$ T , autant que la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, qui apparaît donc comme un champ beaucoup plus important (et donc difficile à éliminer) que ceux produits par l'électrocinétique à courants plus faibles et observés à distances plus grandes.

9. Le câble rectiligne infini

Comme pour le fil rectiligne illimité de « section nulle » de la question précédente), il faut rechercher un champ de la forme $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$, mais il faut ici distinguer les deux cas où le contour C choisi pour l'application du théorème d'Ampère est à l'extérieur ou à l'intérieur du fil, l'orientation du cylindre est la même que celle du fil de la question **8.** :

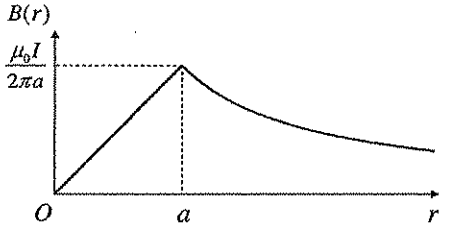
$r > a$, l'intensité enlacée par C est l'intensité totale et la situation est inchangée :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta}$$

$r < a$, l'intensité enlacée par C est une fraction de l'intensité totale I ; la densité de courant étant uniforme, le courant est proportionnel à la surface considérée : $I_C^{enl.} = +\frac{r^2}{a^2} I$ (faire $I_C^{enl.} = \vec{j}.\vec{S} = jS = \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = \frac{r^2}{a^2} I$), d'où :

$$B(r).2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I\, r}{2\pi a^2}\vec{u}_\theta}$$

Ce modèle de câble avec épaisseur évite le champ infini sur le fil de section nulle.



En $r = a$, les deux expressions conduisent à la valeur commune $B = \mu_0 I / 2\pi a$,

10. Le solénoïde infiniment long

a) Pour le solénoïde infiniment long, tout plan perpendiculaire à l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de courant ; le champ en tout point est donc colinéaire à $\vec{u}_z$. Par ailleurs, l'invariance par translation le long de l'axe et par rotation autour de l'axe font que sa norme ne dépend ni de z ni de θ (coordonnées cylindriques d'axe Oz), et donc *a priori* $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$.

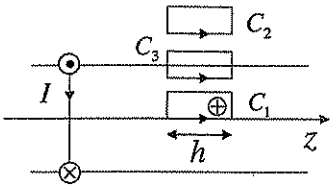
b) Considérons des petits contours orientés comme indiqué sur la figure et appliquons-leur le théorème d'Ampère :

Pour C_i intérieur au solénoïde, la variable étant r , distance à l'axe :

$$B_i(0)h - B_i(r)h + 0 = 0$$

En effet, sachant que le champ n'a pas de composante radiale, la circulation est nulle sur les côtés latéraux et B_i représente la composante axiale du champ ; par ailleurs il n'y a pas de courants enlacés d'où :

$$\forall r < a\ ,\ B_i(r) = B_i(0)$$



Le champ à l'intérieur du solénoïde infiniment long est donc uniforme, dirigé suivant l'axe, les lignes de champ sont donc des droites parallèles entre elles.

Pour C_2 extérieur au solénoïde, le raisonnement est le même et le champ $\vec{B}_e$ est également uniforme.

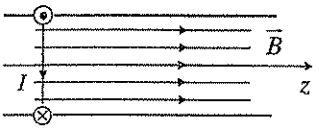
c) Pour C_3 à cheval sur la surface cylindrique comportant des courants, sur une longueur h, il y a nh spires correspondant à un courant enlacé $+nhI$: le théorème d'Ampère donne :

$$B_i h - B_e h + 0 = \mu_0(nhI) \quad \Rightarrow \quad B_i = B_e + \mu_0 nI$$

Sachant que $\boxed{\vec{B}_e = \vec{0}}$, on en déduit $\boxed{\vec{B}_i = \mu_0 nI\,\vec{u}_z}$

À la traversée de la nappe surfacique de courant on constate la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique.

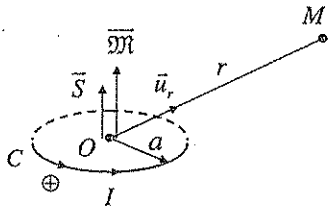
Les lignes de champ se referment à l'infini.
Le sens du champ $\vec{B}$ est obtenu en appliquant la règle du tire-bouchon au sens réel du courant. L'orientation des spires et de l'axe Oz sont liés. Dans la formule I est algébrique.



AN : $n \approx 1600$ spires.m^{-1} soit 160 spires pour une bobine de TP de 10 cm.

Le dipôle magnétique

11. Soit C une boucle circulaire plane de rayon a, filiforme, de centre O, orientée et parcourue par un courant d'intensité I. Le point d'observation est M tel que $OM = r$.
L'approximation dipolaire consiste à se placer loin de la spire, à savoir $r \gg a$. Les effets magnétiques de la spire sont alors ceux d'une entité appelée dipôle magnétique et caractérisée par un vecteur nommé moment dipolaire :

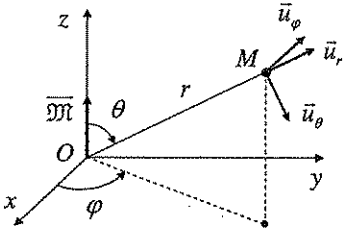


$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}} \quad \text{(en A.m}^2\text{)}$$

où $\vec{S}$ est le vecteur surface de la spire, direction : orthogonale au plan de la spire, norme : l'aire du disque s'appuyant sur la spire, sens : imposé par l'orientation $\oplus$ du contour. Sur le schéma on a choisi $I > 0$.

Il est facile de vérifier que le sens de $\overline{\mathfrak{M}}$ est indépendant de l'orientation (avec l'autre orientation et pour le même courant, $I<0$ et $\vec{S}$ est inversée). En réalité le sens de $\overline{\mathfrak{M}}$ est obtenu par la règle du tire-bouchon appliquée au sens réel du courant électrique.

12. Les composantes en coordonnées sphériques du champ magnétique créé au point M par un dipôle magnétique placé en O et de moment $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\vec{u}_z$ sont données par les expressions :



$$\boxed{B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathfrak{M}\cos\theta}{r^3}} \quad , \quad \boxed{B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}\sin\theta}{r^3}}$$

et $\boxed{B_\varphi = 0}$

Le plan passant par M et par Oz étant plan d'antisymétrie pour la distribution de courant, il est normal que $\overline{B}(M)$ appartienne à ce plan, soit $B_\varphi = 0$.

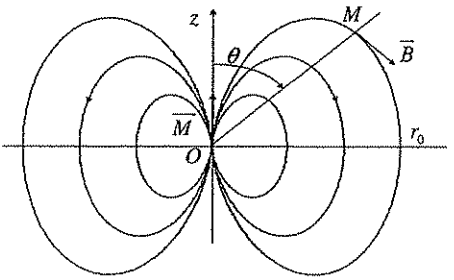
Ce qui se résume en :

$$\boxed{\overline{B} = \frac{\mu_0\mathfrak{M}}{4\pi r^3}\begin{vmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}}$$

Les lignes de champ sont données par : $\dfrac{dr}{B_r} = \dfrac{rd\theta}{B_\theta}$, et comme pour le dipôle électrique :

$$\boxed{r = r_0\sin^2\theta} \quad \text{où } r_0 = r(\theta = \pi/2).$$

La représentation des lignes de champ est valable loin de O. Près de O, ce ne sont plus des dipôles, mais des boucles (magnétiques), et les lignes de champ ne coïncident plus (les lignes de $\overline{B}$ se referment près de O).



13. En champ $\overline{B}$ uniforme la résultante des forces sur le dipôle magnétique est nulle :

$$\boxed{\overline{F} = \overline{0}}$$

Le moment de force qui s'exerce sur le dipôle est :

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \overrightarrow{B}}$$

Il est indépendant du point O.

Rq : Si $\overrightarrow{B}$ est non uniforme, alors $\overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{0}$ et qualitativement, le dipôle est attiré du côté où le champ est le plus fort (après s'être orienté en rotation dans la position d'équilibre stable).

L'énergie potentielle du dipôle magnétique dans le champ $\overrightarrow{B}$ extérieur est :

$$\boxed{E_p = -\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\overrightarrow{B}}$$

Dans les positions d'équilibre, le moment de force est nul, ce qui signifie que le dipôle s'aligne sur le champ extérieur. L'énergie potentielle du dipôle montre que la situation où $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et $\overrightarrow{B}$ sont de même sens est stable (E_p minimale).

Applications directes du cours

Champs magnétiques

14. À l'extérieur de l'éclair, le champ produit est celui d'un fil rectiligne : $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\text{La condition } \frac{\mu_0 I}{2\pi r} > B_L \text{ conduit à } \underline{r < 10 \text{ m}}.$$

Il s'agit d'un simple ordre de grandeur avec les données de l'énoncé.

15. Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant ; le champ en M_0 appartenant à l'intersection de tous ces plans obtenus par rotation autour de Oz, est donc dirigé suivant l'axe Oz. Son sens est obtenu en appliquant la règle du tire-bouchon sur le sens réel du courant. La formule donne donc le sens de $\overrightarrow{B}$ avec I algébrique.

Le champ au centre de la spire ($\alpha = \pi/2$) est :

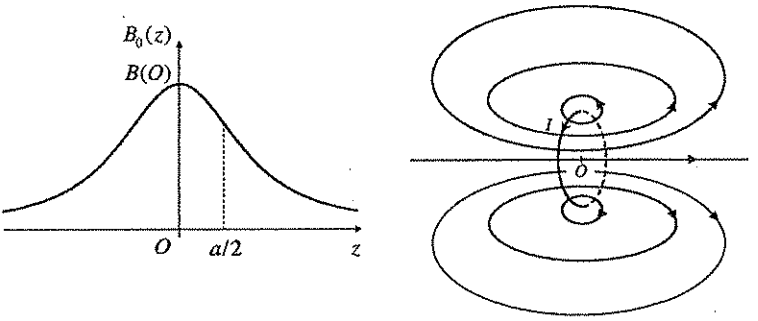
$$\boxed{B(O) = \frac{\mu_0 I}{2a}}$$

Sur l'axe, en exprimant $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}$ en fonction de $OM_0 = z$, il vient :

$$\boxed{B_0(z) = B(O)\frac{a^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}}}$$

À noter sur la courbe la position du point d'inflexion en $z = a/2$.
On constate que le champ magnétique diminue en s'éloignant des sources (le courant est dans le plan $z = 0$) ; on en déduit que les lignes de champ s'écartent de

l'axe du côté $z>0$, contournent la spire avant de se refermer du côté $z<0$. Sur le schéma, l'orientation des lignes de champ correspond à $I>0$.

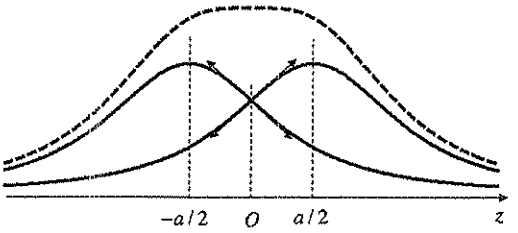


16. Les bobines de Helmholtz

Soit $\vec{B}_1$ le champ créé par la spire placée en $z=-d/2$ et $\vec{B}_2$ le champ créé par la spire placée en $z=+d/2$. Le champ total $\vec{B}_T=\vec{B}_1+\vec{B}_2$ est le plus uniforme possible dans le voisinage du centre O si la projection $B_T(z)$ dépend le moins possible de z pour $z\approx 0$, ce qui revient à y annuler le plus grand nombre possible de dérivées...

- au centre O, les deux champs sont parallèles et de même sens, et égaux en norme ($B_1(d/2)=B_2(-d/2)$ puisque $B(z)$ est paire) et ceci quelle que soit d ; le champ total est $B_T(O)$.
- le champ total possède en O un extremum puisque les deux courbes y admettent des pentes opposées ($B_1'(d/2)=-B_2'(-d/2)$ puisque B' est impaire) et ceci quelle que soit d.
- la dérivée seconde B'' étant paire, la somme $B_T''=B_1''+B_2''$ n'est nulle que si $B_1''=B_2''=0$ en O ; ceci est possible si les deux graphes de B_1 et B_2 se coupent au niveau de leur point d'inflexion, ce qui suppose que $\frac{d}{2}=\frac{a}{2}$ soit $\boxed{d=a}$
- la dérivée troisième $B^{(3)}$ étant impaire (comme toute les dérivées d'ordre impair), la somme $B_T^{(3)}$ est nulle en O.
- la dérivée quatrième $B^{(4)}$ est paire sans être nulle en O, ce qui constitue le premier écart par rapport à $B_T(O)$; le premier terme du développement en série est donc $B_T(z)-B_T(0)=-\lambda z^4$ où $\lambda>0$.

La figure ci-dessous où la somme $B_T=B_1+B_2$ est représentée en pointillé explique la situation ; les bobines de Helmholtz sont utiles lorsqu'on a besoin d'un champ magnétique uniforme.



17. Tout plan contenant l'axe de la bobine est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant ; le champ en un point de cet axe appartenant à l'intersection de tous ces plans obtenus par rotation autour de l'axe, est donc dirigé suivant l'axe.

Pour un solénoïde infiniment long, $\alpha_c = 0$, on retrouve en norme $B_\infty = \mu_0 nI$.

Au centre d'un solénoïde de rayon a et de longueur l, le champ magnétique est en norme $B_c = \mu_0 nI\cos\alpha_c$; il est égal à moins de 1% près à celui du solénoïde infiniment long si

$$\cos\alpha_c = \frac{l/2}{\sqrt{l^2/4+a^2}} \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{l}{2a} \geq 7}$$

c'est-à-dire si sa longueur est au moins égale à sept fois son diamètre.

18. Le plan passant par M et contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour la distribution de courant donc $\vec{B}(M) // \vec{u}_\theta$ (lignes de champ circulaires d'axe Oz) ; l'invariance du tore par rotation autour de l'axe limite la dépendance à deux variables :

$$\vec{B}(M) = B(r,z)\vec{u}_\theta$$

La forme de ce champ fait donc qu'il possède *a priori* un rotationnel non nul.

Appliquons le théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_C^{enl.}$

– la circulation du champ le long d'un cercle C d'axe Oz et de rayon r (passant par M) et orienté positivement suivant $\vec{u}_\theta$ est $2\pi r.B(r,z)$

– la somme des intensités enlacées par le contour C dépend de son rayon :

si $r < R - a/2$, aucun courant ne traverse le contour : $I_C^{enl.} = 0$

si $R - a/2 < r < R + a/2$, on compte N intensités I dans le sens Oz^+ donc : $I_C^{enl.} = NI$

si $r > R + a/2$, le contour est traversé par N intensités I dans le sens Oz^+ et N intensités I dans le sens Oz^- : $I_C^{enl.} = NI - NI = 0$

Finalement $\boxed{\vec{B}(M) = \vec{0}}$ si M est à l'extérieur du tore et $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{u}_\theta}$ si M est à l'intérieur du tore.

Le champ magnétique subit donc une discontinuité à la traversée des nappes de courant en $r = R - a/2$ et $r = R + a/2$.

On peut remarquer que dans le tore, le champ est en $1/r$ (donc non uniforme), qu'il ne dépend pas de la forme de la section du tore (carrée, circulaire ou autre), et qu'il s'avère être indépendant de z.
Par ailleurs, comme $r \approx R$, en posant $n = N/2\pi R$ le nombre de spires par unité de longueur, on a $\vec{B}(M) \approx \mu_0 n I \vec{u}_\theta$ par analogie au solénoïde infini refermé sur lui-même.
On note que le champ magnétique subit également une discontinuité à la traversée des nappes de courant en $z = \pm a/2$, prouvant qu'il dépend finalement bien de z.

19. Les propriétés de symétrie et l'orientation du courant conduisent à un champ magnétique :

$$\vec{B}(O) = B\,\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad B > 0 \quad \text{si} \quad I > 0$$

Une tranche d'épaisseur dx crée un champ élémentaire :

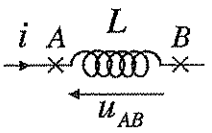
$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 dI}{2r}\sin^3\alpha\,\vec{u}_x = \frac{\mu_0 n I dx}{2x\tan\alpha}\sin^3\alpha\,\vec{u}_x$$

d'où par intégration :

$$\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 n I}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)\vec{u}_x}$$

Inductance d'une bobine

20. La puissance électrocinétique reçue par le dipôle AB sur le schéma ci-contre est, avec $u_{AB} = L\dfrac{di}{dt}$:



$$P = u_{AB}\,i = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

L'énergie magnétique (ainsi appelée par la présence d'un champ magnétique dans la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant, ici variable) emmagasinée entre l'instant initial où $i(t=0) = 0$ et l'instant actuel où $i(t) = i$ est :

$$U_m = \int_0^t P\,dt = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^t = \frac{1}{2}Li(t)^2 - \frac{1}{2}Li(t=0)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_m = \frac{1}{2}Li(t)^2}$$

Cette énergie stockée dans la bobine interdit les discontinuités de courant car une discontinuité de i entraînerait celle de U_m conduisant à une puissance infinie, non physique. Remarquons que tout circuit électrique fermé forme une « boucle » et présente donc une inductance, même très faible.

21. Si $\vec{B}(M,t)$ est le champ magnétique créé par une distribution de courants en un point M, la densité volumique d'énergie magnétique y est alors (résultat établi à la question **14.** du chapitre **2** à partir des équations de Maxwell) :

$$u_m(M,t) = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(M,t)$$

Le champ magnétique dans un solénoïde infini d'axe Oz et parcouru par un courant d'intensité I est uniforme et vaut $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$ où n est le nombre de spires par unité de longueur (il est nul à l'extérieur). Pour un tronçon de longueur l de ce solénoïde de section S, pour lequel le nombre de spires est $N = nl$, l'énergie magnétique limitée au volume concerné est :

$$U_m = \iiint \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 Sl = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S N^2}{l} I^2$$

Ce résultat comparé à celui établi en électrocinétique $U_m = \frac{1}{2} L I^2$ permet de trouver l'expression de l'inductance d'une bobine (ou tronçon de solénoïde) :

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 S N^2}{l}}$$

Rappelons que L s'exprime en henry (H) ou de manière plus pratique comme le produit $\mu_0 \times longueur$, vérifié sur l'expression ci-dessus.

AN : $\underline{L \approx 11 \text{ mH}}$ ce qui est tout à fait le bon ordre de grandeur.

L'inductance L est proportionnelle au carré du nombre de spires, en doublant le nombre de spires, L n'est pas multipliée par 2, mais par 4.

Dipôle magnétique

22. Le champ d'une spire d'axe Oz est, au point M sur cet axe : $B_{sp.} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$

Un dipôle magnétique placé en O, de moment $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I \vec{u}_z$, crée en un point de coordonnées (r, θ), un champ de composantes :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin\theta}{r^3}$$

Sur l'axe Oz ($\theta = 0$), au point M ($r = d$), ce champ apparaît axial ($B_r \equiv B_z$ et $B_\theta \equiv 0$) et vaut : $B_{dip.} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{d^3} = \frac{\mu_0 I}{2R} \tan^3 \alpha$ puisque $\tan\alpha = \frac{R}{d}$

Le rapport vaut : $\boxed{\frac{B_{sp.}}{B_{dip.}} = \cos^3 \alpha}$ (toujours < 1)

AN : L'identification de la spire à un dipôle à mieux que 1% près suppose $\cos^3 \alpha \geq 0{,}99$ soit $\alpha < \alpha_m = 4{,}7°$; alors le coefficient $R/d = \tan\alpha_m = 0{,}082$ (ou encore $d \approx 12R$) intervenant dans l'approximation dipolaire est effectivement petit devant l'unité.

23. Rappelons l'expression des composantes $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos\theta}{r^3}$ et $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin\theta}{r^3}$

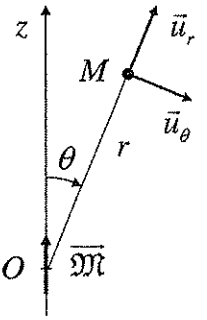
La norme du champ est donnée par $B(\theta) = \| \overrightarrow{B} \| = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \dfrac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$

Le long d'un ligne de champ, $r(\theta) = r_0 \sin^2\theta$, d'où $\boxed{B(\theta) = \dfrac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi r_0^3}\dfrac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{\sin^6\theta}}$

Il est facile de voir que de $\theta = 0$ à $\theta = \pi/2$ la fonction $B(\theta)$ diminue ; c'est ce que prévoit la conservation du flux conformément au fait que lorsque les lignes de champ s'écartent, la norme du champ diminue (voir la figure de la question **12.**).

24. Avec $\overrightarrow{r} = r\,\vec{u}_r$, l'expression donnée se transforme en :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3(\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\overrightarrow{r})\overrightarrow{r}}{r^2} - \overrightarrow{\mathfrak{M}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3(\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \overrightarrow{\mathfrak{M}}\right)$$



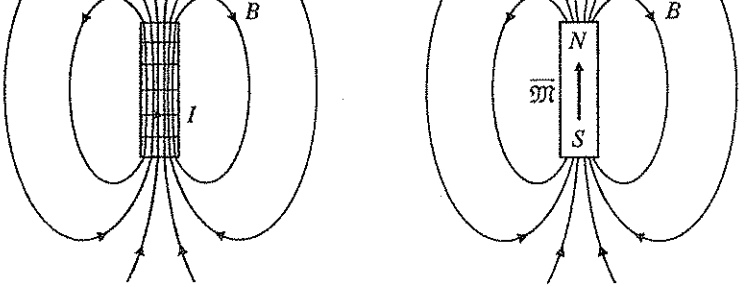
Il suffit d'écrire $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\,\vec{u}_z = \mathfrak{M}(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$ et de développer l'expression :

$$\begin{aligned} 3(\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \overrightarrow{\mathfrak{M}} &= 3\mathfrak{M}\cos\theta\,\vec{u}_r - \mathfrak{M}(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta) \\ &= 2\mathfrak{M}\cos\theta\,\vec{u}_r + \mathfrak{M}\sin\theta\,\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

pour retrouver les composantes du champ :

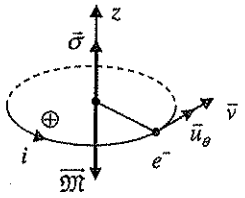
$$B_r = \frac{2\mu_0\mathfrak{M}\cos\theta}{4\pi r^3},\ B_\theta = \frac{\mu_0\mathfrak{M}\sin\theta}{4\pi r^3} \text{ et } B_\varphi = 0$$

25. Expérimentalement on constate que les lignes de champ d'une bobine (ou solénoïde) de longueur finie parcourue par un courant d'intensité I (figure de gauche, avec $I > 0$) sont les mêmes que celles d'un aimant droit (figure de droite). Pour ce dernier les lignes de champ vont, à l'extérieur de l'aimant, du pôle Nord au pôle Sud.



La bobine étant constituée d'un ensemble de spires ayant chacune un moment magnétique, il en est de même de la bobine entière, et par analogie de l'aimant.

26. Moment magnétique orbital d'un atome



On se place en coordonnées cylindriques avec $\vec{u}_\theta$ suivant la vitesse $\vec{v}$ de l'électron, soit $v>0$.

Le moment cinétique lié au mouvement de l'électron est, par rapport au centre :

$$\vec{\sigma}=\vec{r}\wedge m\vec{v}=mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z=2m\frac{S}{T}\vec{u}_z \quad (1)$$

La force est centrale, la constante des aires est :

$C=r^2\dot{\theta}=2\dfrac{S}{T}$ où S est l'aire du disque balayé pendant la période T du mouvement (avec $\dot{\theta}>0$).

Le système est équivalent à une spire circulaire parcourue par un courant et donc, de loin, à un dipôle magnétique ; le contour étant orienté par $\vec{u}_\theta$, le déplacement de l'électron correspond à un courant d'intensité négative $i=-\dfrac{e}{T}$ puisqu'à un endroit donné de la trajectoire passe une charge $-e$ toutes les périodes T.

Le moment magnétique correspondant est : $\vec{\mathfrak{M}}=i\vec{S}=-\dfrac{e}{T}S\vec{u}_z$ (2)

(on vérifie une fois de plus que le sens du moment magnétique est donné par la règle du tire-bouchon appliqué au sens réel $-\vec{u}_\theta$ du courant)

Les expressions (1) et (2) conduisent à la relation : $\boxed{\vec{\mathfrak{M}}=-\dfrac{e}{2m}\vec{\sigma}}$

Cette relation est du type $\vec{\mathfrak{M}}=\gamma\vec{\sigma}$ avec un rapport gyromagnétique $\gamma=-\dfrac{e}{2m}$ ici négatif comme la figure le laisse apercevoir.

En fait cette relation ne dépend pas de la nature de la trajectoire de l'électron et reste valable en mécanique quantique.

27. Magnéton de Bohr

La boucle de courant (donc un moment magnétique) que constitue la trajectoire ordonnée d'un électron autour d'un noyau a permis d'établir la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique : $\vec{\mathfrak{M}}=-\dfrac{e}{2m}\vec{\sigma}$; le moment cinétique étant quantifié avec une valeur élémentaire $\hbar$, le moment magnétique est lui-même quantifié avec une valeur élémentaire notée :

$$\boxed{\mu_B=\frac{e\hbar}{2m}}$$ appelé magnéton de Bohr

AN : $\mu_B=0{,}92.10^{-23}$ A.m^2

Commentaire : si dans la matière, chaque atome présente un magnéton de Bohr et qu'ils sont tous alignées comme dans un aimant, alors le moment magnétique résultant pour une mole de matière $\mathfrak{M}=N_A\mu_B$ est de l'ordre de l'unité en A.m^2.

Ceci permet de retrouver les valeurs données pour les aimants dans le tableau « Ordres de grandeurs » au début du chapitre partie questions.

28. La notion de dipôle au niveau macroscopique permet souvent l'interprétation des interactions entre les courants ou entre les courants et les aimants. L'attribution d'un moment magnétique (mesurable) à un aimant, comme une boussole, permet de comprendre son orientation dans un champ magnétique extérieur.

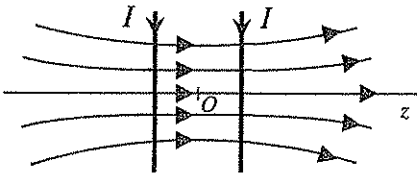
Le dipôle magnétique a une grande importance théorique au niveau microscopique. Contrairement à l'électrostatique, il n'existe pas en magnétostatique de monopôle ou charge magnétique et donc le dipôle magnétique y constitue la plus petite « entité élémentaire ».
Chaque atome se comporte, du fait du mouvement électronique, comme une petite boucle de courant (hypothèse proposée par Ampère dès 1820). Dans la matière, les mouvements de ces électrons atomiques ne font apparaître aucune direction privilégiée et annulent statistiquement leurs effets. Lorsque cette annulation n'est pas totale et qu'il apparaît à l'échelle macroscopique un certain effet, on dit que la matière est aimantée (fer, cobalt, nickel,...). De plus, le dipôle magnétique, à cause de diverses quantifications, n'est correctement décrit que par la mécanique quantique ; il se trouve au cœur des phénomènes d'aimantation de la matière avec ses nombreuses applications (disque dur, carte magnétique, ticket de métro,...).
Aux moments magnétiques orbitaux des électrons (multiples du magnéton de Bohr μ_B, voir les question **26.** et **27.**), il faut ajouter les moments magnétiques de spin des électrons (dont le rôle est essentiel dans la matière aimantée), mais également des nucléons ; ces derniers, bien que plus faibles à cause de la masse plus élevée, conduisent à des méthodes d'investigation basées sur la résonance magnétique nucléaire (R.M.N.) utilisée dans le domaine médical dans l'imagerie par résonance magnétique (I.R.M.)...

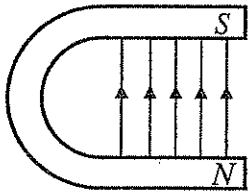
Questions de réflexion ☐ Physique pratique

29. Oersted observe vers 1819 qu'une aiguille aimantée placée au voisinage d'un fil électrique est déviée par le passage du courant. Cette découverte, qui fit très rapidement sensation dans toute l'Europe, est capitale car elle fait apparaître des rapports insoupçonnés entre l'électricité et le magnétisme. Dès lors expériences et théories se succèdent à un rythme inconnu en physique. En effet durant l'année 1820, Biot et Savart étudient l'expérience d'Oersted et Laplace déduit de leurs expériences la loi portant leurs noms. La même année 1820, Ampère achève la théorie des champs magnétiques engendrés par des courants continus !

30. Ce sont les courants électriques qui sont à l'origine des champs magnétiques, qu'ils s'agissent au niveau macroscopique de courants électrocinétiques dans les conducteurs ou au niveau microscopique de courants liés au mouvement des électrons dans les atomes. Les particules chargées libres en mouvement sont également source de champs magnétiques.
Exemples : les courants dans les bobines placées sous une plaque à induction, les courants dans une antenne de télécommunication, les courants dans la couche de fer liquide dans la Terre, les courants microscopiques dans un aimant,...

31. Outre l'intérieur de la bobine infinie (mais peu facilement accessible), on peut créer une zone de champ quasi uniforme :
- dans un dispositif appelé bobines de Helmholtz (figure de gauche) où deux spires identiques sont placées sur le même axe Oz ; en choisissant de les mettre à une distance égale au rayon de chaque spire, et en les faisant parcourir par le même courant d'intensité I dans le même sens, alors le champ est le plus uniforme possible dans le voisinage du centre O (voir la question **16.**).
- dans l'entrefer d'un aimant en fer à cheval (figure de droite) :



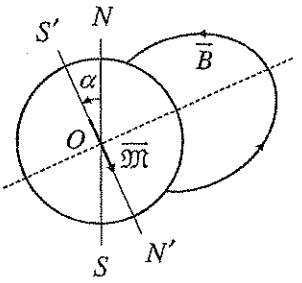


32. Rowland, physicien américain, réalise à Berlin vers 1875 l'expérience suivante : il produit un champ magnétique (certes faible) par des charges électriques statiques déposées sur un disque tournant à grande vitesse. Il montre ainsi que les courants de convection (charges immobiles par rapport à un support en mouvement) créent des champs magnétiques au même titre que les courants de conduction (charges mobiles dans un support fixe) et en déduit ainsi l'identité entre les charges électrostatiques et les charges circulant dans les courants électriques.
Le disque doit être isolant pour permettre aux charges de rester immobile par rapport à lui, sinon aux courants de convection se rajouteraient des courants de conduction (par inertie) qui modifieraient la répartition des charges.

33. L'aiguille aimantée d'une boussole s'oriente spontanément dans le champ magnétique terrestre. L'extrémité qui se dirige vers le nord géographique est appelé pôle Nord de l'aimant, et celle qui se dirige à l'opposé, vers le sud géographique, est appelée pôle Sud.
La position d'équilibre stable de l'aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ dans le champ magnétique terrestre $\vec{B}$ correspond à un moment de force $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$ nul (d'où $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ colinéaires afin que la boussole ne tourne plus) et une énergie potentielle $E_p = -\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\vec{B}$ minimale, ce qui signifie que le dipôle s'aligne sur le champ extérieur dans la situation où $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ sont de même sens : le moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ de l'aimant de la boussole est donc dirigé de son pôle Sud vers son pôle Nord.

34. Le noyau solide de la Terre est le siège d'une radioactivité naturelle dont l'énergie dégagée permet au fer d'une couronne concentrique de se maintenir à l'état liquide. Le mécanisme est alors complexe : des courants électriques dans cette couche de fluide conducteur et le champ magnétique s'auto-entretiennent par des phénomènes d'induction et d'inertie liés à la rotation de la Terre (principe de la dynamo où le courant est à l'origine du champ et où l'action du champ sur le conducteur en mouvement crée le courant).

Le champ géomagnétique est en première approximation celui d'un dipôle magnétique (macroscopique) placé au centre O de la Terre, de moment dipolaire de valeur $\mathfrak{M} = 8{,}3.10^{22}$ A.m^2, et dont l'axe $S'N'$ présente une inclinaison $\alpha = 11°$ par rapport à l'axe de rotation terrestre SN, les polarités magnétiques et géographiques étant inversées : une boussole présente son pôle Nord au pôle Sud de « l'aimant terrestre ».



Le pôle Sud S' (abusivement appelé pôle Nord magnétique) se situe dans l'extrémité Nord du Canada, dans les Elizabeth Islands, et le pôle Nord N' se situe près de la base Dumont d'Urville en Terre Adélie en Antarctique.

L'intersection avec la ligne de champ et la surface terrestre montre deux choses :

- une petite aiguille aimantée indique la direction de S' et non de N, soit en France, suivant l'endroit, une déclinaison comprise entre 3° et 9° vers l'Ouest par rapport au Nord géographique
- l'aiguille aimantée doit être équilibrée sinon elle piquerait du nez vers le sol ! Les lignes de champ sont inclinées sur l'horizontale vers le sol de 64° à Paris (ainsi la norme du champ y vaut en moyenne actuellement $B_0 = 4{,}7.10^{-5}$ T et la composante horizontale y est de $B_h = 2{,}3.10^{-5}$ T).

Si on veut se servir d'une boussole pour s'orienter, il faut disposer d'une carte actualisée des déclinaisons, car elles varient, lentement, avec le temps (comme d'ailleurs $\| \vec{B} \|$). Actuellement le pôle Nord magnétique se déplace d'environ 40 km/an. La première carte de déclinaisons a été réalisée par Halley (celui de la comète) en 1701.

Les protons et électrons d'origine solaire (principales particules chargées des vents solaires, également responsables des aurores boréales) sont piégés par le champ magnétique terrestre et constituent, au voisinage de l'équateur magnétique (en pointillé sur la figure) les fameuses ceintures de van Allen découvertes à la fin des années 1950 avec le lancement des premiers satellites. Ce « bouclier magnétique » constitue une protection efficace pour les êtres vivants car il empêche une partie importante des vents solaires de parvenir à la surface terrestre.

35. Un aimant (ou une spire parcourue par un courant) ne subit de force (au sens où la résultante des forces de Laplace est non nulle) que lorsqu'il est placé dans un champ magnétique non uniforme. Ceci est précisément le cas à l'extrémité d'un aimant (puisque les lignes de champ s'écartent ou convergent). Voilà pourquoi deux aimants s'attirent ou se repoussent suivant que l'on présente des polarités opposées ou identiques.

36. Remarquons d'abord que le champ magnétique stationnaire ne joue aucun rôle dans l'effet d'accélération des particules ; en effet, la force magnétique de Lorentz ne travaille pas puisque perpendiculaire à la vitesse, et ne peut donc modifier la norme de la vitesse d'une particule chargée. Ce rôle est dévolu au champ électrique.

Vu les vitesses considérables atteintes dans les accélérateurs ou anneaux de stockage, dans les machines de type « Tore supra » ou « Iter » pour confiner le plasma destiné à la fusion thermonucléaire, ces appareils doivent être de forme circulaire, ce qui nécessite la présence de champs magnétiques importants pour incurver les trajectoires des particules chargées.
Dans un électroaimant conventionnel, le fil résistif dans lequel circule un puissant courant à l'origine du champ magnétique provoque une surchauffe de la bobine et l'énergie perdue est telle que le coût en énergie de l'aimant est très élevé, de plus l'intensité doit être limitée pour ne pas atteindre la fusion des fils. Alors qu'une bobine supraconductrice qui, à basse température, ne présente pas de résistance électrique, permet d'obtenir un champ magnétique élevé, et donc d'être plus efficace tout en étant moins coûteuse en énergie. L'introduction de la technologie des aimants supraconducteurs (maintenus à des températures très basses, 1,8 K, qui annulent quasiment la résistance électrique) a permis d'atteindre de très hautes énergies dans les accélérateurs circulaires, la vitesse des particules étant voisines de la vitesse de la lumière dans le vide.
Plus le rayon de la trajectoire est grand, plus il est facile de maintenir la particule (dont la vitesse est proche de c) sur une trajectoire circulaire car moins les aimants de courbure ont à être puissants ; cela permet donc d'obtenir des énergies de plus en plus grandes et de réduire le rayonnement synchrotron (toute particule chargée et accélérée rayonne), donc le coût énergétique de l'opération, encore moins onéreuse de nuit lorsque le coût de l'électricité est moindre.

37. Cela dépend de l'appareil envisagé bien sûr, mais est surtout fonction de sa distance à l'utilisateur. Pour un rasoir électrique à 1 cm : $B \approx 800\ \mu T$; un sèche-cheveux à 15 cm : $B \approx 30\ \mu T$ (de l'ordre du champ terrestre) ; un four à micro-ondes, un aspirateur, un téléviseur ou une machine à laver à 1 m : $B \approx 0{,}1$ à $1\ \mu T$; ces champs sont alternatifs sinusoïdaux.

38. En électrostatique les charges créent le champ électrique par :

$$\text{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ avec } \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0}$$

En magnétostatique (et ARQS) les courants créent le champ magnétique par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \text{ avec } \text{div}\ \vec{B} = 0$$

Les opérateurs divergence et rotationnel interviennent donc de manière « inverse » dans le lien entre les champs et les sources ρ et $\vec{j}$. C'est exactement ce que font transparaître les expressions des lois de Coulomb et de Biot et Savart :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I\,\overrightarrow{dl}}{4\pi r^2} \wedge \vec{u}_r$$

La présence de $\boxed{.\vec{u}_r}$ étant typique d'une divergence (champ radial) et la présence de $\boxed{\wedge\ \vec{u}_r}$ étant typique d'un rotationnel (champ orthoradial).

L'électrostatique est donc à la magnétostatique ce que « le point » est « au chapeau » !

C'est également ce qui explique la différence des propriétés de symétrie des champs électriques et magnétiques : le champ électrique est qualifié de « vecteur polaire » et le champ magnétique de « vecteur axial ».

39. La conservation du flux (questions **1.** et **2.**) est indépendante du type de régime, elle reste donc vraie en régime variable.

Négliger le terme de déplacement $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ de l'équation de Maxwell-Ampère (question **3.**) suppose de se placer en ARQS (approximation des régimes quasi stationnaires). Le théorème d'Ampère (question **4.**) est donc valable au-delà de la magnétostatique pour les régimes variables de l'électrocinétique et en induction électromagnétique jusqu'à des fréquences de l'ordre du MHz. Il cesse d'être applicable en très haute fréquence ($f \gg 1$ MHz, ondes hertziennes, infrarouge, optique,...) lorsque le courant de déplacements lié à la variation rapide du champ électrique devient lui-même source de champ magnétique.

Concrètement, dans l'exemple d'une spire parcourue par un courant $I(t)$ engendré par un GBF (générateur basses fréquences), le champ magnétique variable produit s'exprime par la même expression qu'en régime stationnaire :

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2a}\sin^3\alpha\ \vec{u}_z$$

40. Comme la Terre qui tourne autour du Soleil et en plus sur elle-même, l'idée classique et simpliste de spin consiste à rajouter au mouvement de révolution de l'électron autour du noyau, un mouvement de rotation sur lui-même ; le moment cinétique associé à cette rotation propre est appelé le spin.

La relation entre moment cinétique de spin $\vec{s}$ et le moment magnétique de spin $\vec{\mathcal{M}}_s$ de l'électron, $\vec{\mathcal{M}}_s = \gamma\vec{s}$, donne en projection sur Oz :

$$\mathcal{M}_{sz} = \gamma s_z = -\frac{e}{m}\left(\pm\frac{\hbar}{2}\right) = \mp\mu_B \quad \text{où} \quad \boxed{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}} \quad \text{appelé magnéton de Bohr}$$

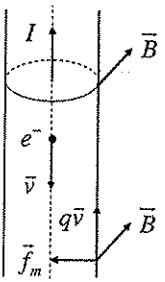
La quantification du spin entraîne celle du moment magnétique de spin avec une valeur élémentaire $\mu_B = 0{,}92.10^{-23}$ A.m^2.

Le moment cinétique de spin d'un couple d'électrons appariés dans une case est nul ($\sum s_z = +\hbar/2 - \hbar/2 = 0$). On en déduit qu'un atome n'aura de moment magnétique de spin total que si sa configuration électronique conduit à des électrons célibataires.

Le ferromagnétisme est dû à un magnétisme de spin lorsque tous les moments s'alignent dans un sens donné et qu'une résultante macroscopique prend naissance : c'est le cas dans les barreaux aimantés.

41. Éclair et tonnerre

a) Assimilons donc un éclair à un conduit rectiligne cylindrique. Le courant électrique dans le conduit est lié à un déplacement axial d'électrons de sens opposé à celui du courant ; il crée un champ magnétique $\vec{B}$ orthoradial comme indiqué sur la figure.



L'ensemble des charges mobiles subit donc la force magnétique de Lorentz $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ radiale et dirigée vers l'intérieur quel que soit le sens du courant. Corrélativement le diamètre du conduit cylindrique se réduit.

b) Un élément de volume $d\tau$ comportant une charge mobile $dq = \rho_m d\tau$ subit la force élémentaire $d\vec{f}_m = \rho_m d\tau \vec{v} \wedge \vec{B}$, soit en introduisant la densité volumique de courant $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{f}_m}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}} \quad \text{et en norme} \quad \boxed{\frac{|d\vec{f}_m|}{d\tau} = jB}$$

c) En supposant j uniforme sur la section du conduit : $j = \dfrac{I}{\pi a^2}$,

et en prenant le champ magnétique sur le bord du conduit (là où il est le plus important), donc assimilable à celui d'un fil infini : $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$,

il vient la force magnétique par unité de volume : $\boxed{\dfrac{|d\vec{f}_m|}{d\tau} = \dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^3}}$

À noter qu'elle est quadratique en I, puisque à la fois la densité volumique de courant et le champ magnétique sont proportionnels à l'intensité I.

Rq : Numériquement $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} = 0{,}2$ T est bien supérieur au champ magnétique terrestre qui a été négligé pour cette raison.

d) AN : $\dfrac{|d\vec{f}_m|}{d\tau} = \dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^3} \approx 6.10^5$ N.m^{-3}

Pour se rendre compte de l'énormité de ce résultat, on peut le comparer au poids volumique de l'air : $\rho g \approx 12$ N.m^{-3} (en prenant $\rho = 1{,}2$ kg.m^{-3}), pour constater qu'il lui est en gros 50 000 fois supérieur.

e) La violence du phénomène et la forte contraction du conduit qui s'ensuit provoque l'émission d'un bruit appelé tonnerre, de la même manière que le déplacement de la membrane d'un haut-parleur engendre un son. D'autres

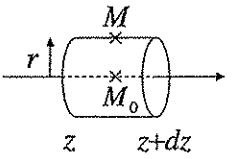
phénomènes, comme l'échauffement du conduit entraînant une dilatation de l'air, participent au tonnerre.

42. Champ créé, en dehors de l'axe, par une spire circulaire (*)

a) Seul le plan contenant l'axe Oz et le point M en dehors de l'axe est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant ; le champ magnétique en M, contenu dans ce plan (donc $B_\theta(M)=0$ en coordonnées cylindriques), possède donc *a priori*, en plus de sa composante axiale $B_z(M)$, une composante radiale notée $B_r(M)$.

Par ailleurs, l'invariance par rotation de la spire autour de Oz fait que B_z et B_r ne sont fonction que de r et z, d'où $\underline{\vec{B}_r = B_r(r,z)\vec{u}_r}$.

b) Le flux du champ $\vec{B}$ à travers un petit cylindre S fermé, d'axe Oz, centré sur M_0, de bases en z et $z+dz$, et dont la surface latérale passe par le point M (le rayon du cylindre est r), est nul : $\Phi_S = 0$.



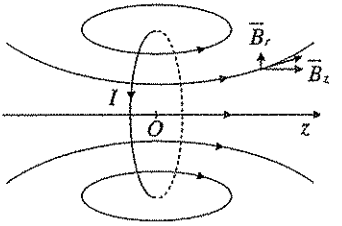
À travers la surface latérale, seul intervient le flux de $B_r(r,z)\vec{u}_r$ en r et à z ; à travers les bases intervient seulement le flux de $B_z(r,z)\vec{u}_z$, faiblement fonction de r, et donc pour r suffisamment faible, on assimile $B_z(r,z)$ à $B_z(r=0,z)=B_0(z)$, d'où avec les normales orientées vers l'extérieur :

$$\Phi_S = \iint_S \vec{B}\,d\vec{S} = -B_0(z)\pi r^2 + B_0(z+dz)\pi r^2 + B_r 2\pi r dz = 0$$

ce qui avec $B_0(z+dz) - B_0(z) = \dfrac{dB_0}{dz}dz$ (Taylor à l'ordre 1) conduit à :

$$\boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}}$$

c) Et comme dans le cas $I>0$, $B_0>0$, $\dfrac{dB_0}{dz}<0$ (le champ sur l'axe diminue avec la distance à la spire), on a $B_r(r,z)>0$: les lignes de champ s'écartent de l'axe car la norme du champ diminue avec l'éloignement à la spire ; elles se referment par des contours qui englobent la spire de courant.

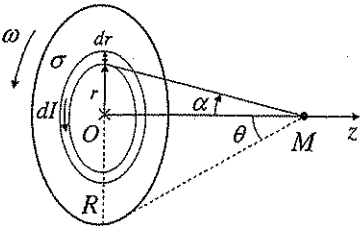


Tout calcul fait avec $B_0(z) = B(O)\dfrac{a^3}{(a^2+z^2)^{3/2}}$ (voir la question **15.**) :

$$\boxed{\vec{B}_r(r,z) = B(O)\frac{3a^3rz}{2\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\,\vec{u}_r}$$

43. Le disque chargé en rotation

a) Du fait de sa rotation et parce qu'il est isolant, le disque contraint les charges déposées en surface à suivre son mouvement, ce qui crée des courants circulaires.



Décomposons le disque en un ensemble de couronnes de rayons r et d'épaisseur dr assimilables chacune à une spire circulaire créant en M où elles sont vues sous un angle α un champ $\overrightarrow{dB}(M)=\frac{\mu_0 dI}{2r}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z$ porté par l'axe. Le champ total est donc porté par $\vec{u}_z$ comme le montre l'étude directe des propriétés de symétrie (tout plan contenant l'axe OMz est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant).

Le courant d'intensité dI circulant dans la spire considérée est le rapport de la charge qui traverse une section donnée de la spire par unité de temps ; or pendant une période $T=2\pi/\omega$, la charge correspondante est celle contenue sur la couronne dont la surface est $2\pi r dr$ (circonférence × épaisseur) et vaut $dq=\sigma 2\pi r dr$, d'où

$$dI=\frac{dq}{T}=\frac{\sigma 2\pi r dr}{2\pi/\omega}\quad\Rightarrow\quad \boxed{dI=\sigma\omega r dr}$$

b) Alors sur $\vec{u}_z$: $dB(M)=\frac{\mu_0 dI}{2r}\sin^3\alpha=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\sin^3\alpha dr$

Évidemment r et α sont liés ; éliminons r sachant que l'intégrale angulaire (en α) est plus commode que l'intégrale en r :

Avec $r=z\tan\alpha$ où $z=OM$ est fixe, il vient $dr=z\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$\text{et}\quad dB(M)=\frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\frac{\sin^2\alpha.\sin\alpha d\alpha}{\cos^2\alpha}=-\frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\frac{(1-\cos^2\alpha).d\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\text{d'où}\quad B(M)=\frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\left[\frac{1}{\cos\alpha}+\cos\alpha\right]_0^{\theta}=\frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos\theta}$$

Et en éliminant z par $R/\tan\theta$ et avec $\omega\vec{u}_z=\vec{\omega}$, il vient

$$\boxed{\vec{B}(M)=\frac{\mu_0\sigma R}{2}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}\vec{\omega}}$$

c) Le moment magnétique $\overrightarrow{d\mathfrak{M}}$ de l'anneau de rayon r parcouru par le courant d'intensité dI est $\overrightarrow{d\mathfrak{M}}=\pi r^2 dI\,\vec{u}_z$; or $dI=\sigma\omega r dr$ d'où $\overrightarrow{d\mathfrak{M}}=\pi\sigma\omega r^3 dr\vec{u}_z$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\mathfrak{M}}=\frac{\pi\sigma R^4}{4}\vec{\omega}}$$

d) Sur l'axe (avec $z>0$), l'approximation dipolaire est satisfaite pour $z \gg R$.
Dans ces conditions le champ du dipôle sur l'axe (faire $r=z$ et $\theta=0$ dans l'expression générale) est :

$$B_{dip.} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathfrak{M}}{z^3} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{8z^3}$$

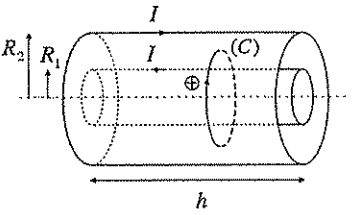
Celui du disque pour θ petit et en particulier $1-\cos\theta \approx \theta^2/2$, $\sin\theta \approx \theta$ et $\tan\theta = R/z \approx \theta$, est donc à l'ordre 2 :

$$B \approx \frac{\mu_0 \sigma R\omega}{2}\frac{\theta^3}{4} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{8z^3}$$

Il s'identifie donc bien à celui du dipôle sur l'axe.

44. Caractéristiques d'un câble coaxial

a) Le champ $\vec{B}$ est nul pour $R<R_1$ (pas de courant) et $R>R_2$ (somme de courants nulle) ; entre les conducteurs, $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$ est donné par le théorème d'Ampère sur le contour orienté (C) : $B(r).2\pi r = \mu_0 I$ soit $B(r)$ non uniforme.



$$U_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r dr\, h$$

$$U_m = \frac{\mu_0 h}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} I^2 \equiv \frac{1}{2}LI^2$$, d'où par unité de longueur : $\boxed{L_h = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}}$

b) Les deux conducteurs forment également un condensateur cylindrique ; le théorème de Gauss à travers un cylindrique fermé de rayon $R_1<r<R_2$ avec $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ donne : $E.2\pi r h = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ où Q est la charge portée par l'armature interne.

$$U_e = \iiint \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r h}\right)^2 2\pi r dr\, h = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1} \equiv \frac{Q^2}{2C}$$

d'où par unité de longueur : $\boxed{C_h = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln R_2/R_1}}$

résultat déjà établi par « $Q=CV$ » à la question **39.** du chapitre **4**.

c) On retrouve la relation simple $\boxed{L_h C_h = 1/c^2}$, utilisée aux questions **1.**, **87.** et **88.** du chapitre **3**.

45. Cerceau chargé dans un champ magnétique inhomogène (*)

a) On calcule div $\vec{B} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{2B_0\rho z}{a^2}\right) + 0 + \left(-\frac{2B_0 z}{a^2}\right) = 0$, résultat attendu.

b) Le système présente une invariance par rotation autour de l'axe Oz, ce qui assure l'orthogonalité du cerceau et de l'axe à tout instant et est compatible avec un mouvement de rotation autour de Oz.
Considérons un élément du cerceau de longueur $Rd\theta$. Sa vitesse à l'instant t possède deux composantes, $\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta + v_z\vec{u}_z$. Dans le référentiel du laboratoire, la force de Lorentz élémentaire $\overrightarrow{dF} = dq\vec{v} \wedge \vec{B}$ sur la charge $dq = Qd\theta/2\pi$ vaut alors, sachant que $\vec{B} = B_\rho\vec{u}_\rho + B_z\vec{u}_z$:

$$\overrightarrow{dF} = \frac{Qd\theta}{2\pi}\left(R\omega B_z\vec{u}_\rho + v_z B_\rho\vec{u}_\theta - R\omega B_\rho\vec{u}_z\right)$$

et le moment de cette force suivant Oz est non nul :

$$dM_{Oz} = \left(R\vec{u}_\rho \wedge \overrightarrow{dF}\right).\vec{u}_z = Q\frac{d\theta}{2\pi}Rv_z B_\rho \quad \text{et pour } \rho = R,\ dM_{Oz} = Q\frac{d\theta}{2\pi}B_0\frac{R^2 z}{a^2}\frac{dz}{dt}$$

Pour l'ensemble du cerceau : $\boxed{M_{Oz} = QB_0\frac{R^2 z}{a^2}\frac{dz}{dt}}$

c) Le théorème du moment cinétique scalaire sur Oz appliqué au cerceau dont le moment d'inertie par rapport à son axe est $J_{Oz} = mR^2$, donne :

$$mR^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{QB_0R^2}{a^2}z\frac{dz}{dt}$$

Par intégration, avec $z(t=0) = 0$ et $\omega(t=0) = 0$, on en tire la vitesse angulaire du cerceau à l'instant t :

$$\boxed{\omega = \frac{QB_0z^2}{2ma^2}} \quad (1)$$

d) Pour étudier le mouvement du centre du cerceau, on peut exploiter directement la conservation de l'énergie mécanique du cerceau sachant que la puissance de la force magnétique de Lorentz est nulle : $dP = \overrightarrow{dF}.\vec{v} = (dq\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = 0$.
On obtient ainsi en sommant les énergies cinétiques de translation et de rotation :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2$$

soit à l'aide du résultat (1) : $v_0^2 = \dot{z}^2 + \frac{Q^2B_0^2R^2z^4}{4m^2a^4}$ (2)

L'amplitude du mouvement découle directement de l'annulation de la dérivée $\dot{z}$:

$$\boxed{z_M^4 = \frac{4m^2a^4v_0^2}{Q^2B_0^2R^2}} \quad (3)$$

Rq : L'équation différentielle vérifiée par la fonction $z(t)$ s'obtient par dérivation de l'équation de conservation de l'énergie : elle est non linéaire.

e) L'équation (2) se réécrit avec l'expression (3) de z_M : $\dot{z}^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v_0^2 - v_0^2 \frac{z^4}{z_M^4}$

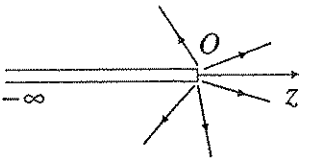
et dans le premier quart du mouvement où $\dot{z} > 0$: $\frac{dz}{\sqrt{1-(z/z_M)^4}} = v_0 dt$

d'où la période : $T = 4\frac{z_M}{v_0}\int_0^{z_M} \frac{d(z/z_M)}{\sqrt{1-(z/z_M)^4}} = 4\alpha\frac{z_M}{v_0}$

En remplaçant z_M par son expression, il vient : $\boxed{T = 4\alpha\sqrt{\frac{2ma^2}{QB_0Rv_0}}}$

46. Simulation d'une « monopôle » magnétique

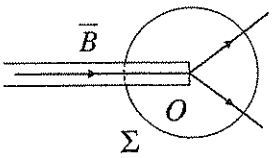
a) Le champ $\vec{B}$ n'est pas défini en O (c'est normal, il s'y trouve un courant) et les lignes de champ sont des demi-droites issues de O.



Ce champ magnétique en $\frac{\vec{u}_r}{r^2}$ est inhabituel car radial ; il est à l'image du champ électrique créé par une charge ponctuelle placée en O. Par conséquent sa divergence est nulle partout sauf à l'origine (par analogie avec div $\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$), ce qui peut se vérifier directement en développant div $\frac{\vec{r}}{r^3}$. Se pose donc le problème de la valeur de div $\vec{B}$ en O.

En fait chaque petite spire du solénoïde est assimilable à un dipôle magnétique et tout se passe comme s'il existait en O un « monopôle magnétique ». Une analogie électrostatique permet de comprendre ceci : en associant des dipôles électrostatiques élémentaires (doublets de charges $-q$ et $+q$) sur tout le demi-axe Oz, les charges intermédiaires « se neutralisent » et il reste une charge $-q$ en $-\infty$ et une charge $+q$ en O. Pour une association de dipôles magnétiques (l'expression du champ est analogue), il reste globalement deux « monopôles » ou « charges magnétiques », l'un en $-\infty$ donc inintéressant et l'autre en O et qui est l'objet de cette étude.
Expérimentalement, une « charge magnétique » est donc parfaitement bien simulée par l'extrémité d'un long solénoïde fin appelé corde de Dirac.

b) Le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée Σ de centre O (et orientée vers l'extérieur) est nul ; ce flux se décompose en deux parties :



– le flux sortant (positif) du champ $\vec{B} = \frac{\mu_0\lambda}{4\pi r^2}\vec{u}_r$

valable à l'extérieur du solénoïde ; ce dernier très fin, se calcule sur une sphère quasi complète, de surface $4\pi r^2$ est $\Phi_+ = +\mu_0\lambda$

– le flux rentrant (négatif) du champ $\vec{B} = \mu_0 nI\vec{u}_z$ à l'intérieur du solénoïde et qui coupe la sphère Σ sur la petite section S du solénoïde : $\Phi_- = -\mu_0 nIS$

La condition $\Phi_+ + \Phi_- = 0$ conduit à $\boxed{\lambda = nIS}$

47. Champ magnétique produit à l'extrémité d'un aimant.

a) La force F diminue rapidement avec la distance de l'aimant à la surface en fer, mais la distance ε est suffisamment petite pour que F puisse être considérée comme constante dans l'opération :

$$W \approx F\varepsilon$$

b) La densité volumique d'énergie magnétique est : $u_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$

Uniforme dans le volume $S\varepsilon$, l'énergie magnétique U_m dans ce volume est :

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} S\varepsilon$$

c) Le travail de l'opérateur ayant décroché l'aimant de manière quasi statique (sans lui fournir d'énergie cinétique) est intégralement affecté à la création de l'énergie magnétique entre l'aimant et la surface :

$$W = U_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{B^2}{2\mu_0} S}$$

AN : Une « force d'adhérence de 2 kg » correspond à $F = 20$ N ; par ailleurs $S = \pi d^2/4 = 3{,}1.10^{-4}$ m^2, d'où $\underline{B \approx 0{,}16\ \text{T}}$, une valeur importante.

48. Estimation de la taille du noyau terrestre

a) Sans tenir compte de la co-latitude θ, le champ total B_T créé par le moment magnétique $\mathfrak{M}$ à la distance R_T est celui du dipôle magnétique :

$$B_T \approx \frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi R_T^3} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M} \approx \frac{4\pi B_T R_T^3}{\mu_0} \approx 10^{23}\ \text{A.m}^2$$

b) Si l'on suppose que tous les moments magnétiques élémentaires portés par les atomes sont alignés, le moment résultant est :

$$\mathfrak{M} = N\mu_B \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\mathfrak{M}}{\mu_B} \approx 10^{46}\ \text{atomes}$$

c) La masse d'un atome s'écrit indifféremment :

$$\frac{M}{N_A} = \frac{\rho V}{N} \quad \text{d'où} \quad V = \frac{NM}{N_A \rho} \approx \frac{10^{46} \times 57.10^{-3}}{6.10^{23} \times 8.10^3} \approx 1{,}2.10^{17}\ \text{m}^3$$

d) Avec $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ on a $R=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}\approx 3.10^5$ m soit $\underline{R\approx 300\text{ km}}$.

Ce rayon est sous-estimé pour la raison suivante : à cause de la température élevée dans le noyau terrestre, l'agitation thermique contrarie l'ordre magnétique et on ne peut donc pas affirmer que tous les moments magnétiques élémentaires sont alignés ; pour obtenir la même aimantation, il faut en réalité considérer un volume plus grand. Les géologues admettent que le rayon du noyau interne de la Terre est de l'ordre de 1 200 km, l'ordre de grandeur calculé est donc néanmoins satisfaisant.

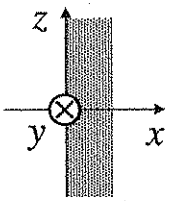
Problème : Le noyau interne, constitué de fer et de nickel, et solide, ne constitue pas l'origine du champ terrestre. Comme vu à la question **34.**, ce noyau interne est entouré d'un noyau externe, qui s'étend de 1 200 km à 3 500 km de rayon, liquide, dans lequel des mécanismes liés à des courants induits macroscopiques existent... L'exercice concerne donc une planète imaginaire dont le magnétisme serait dû à son seul noyau interne.

49. Effet Meissner et pression sur un supraconducteur plan

a) Pour établir l'équation du champ $\vec{B}$ dans le supraconducteur, on calcule $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}=\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{B}-\Delta\vec{B}$ avec $\text{div}\ \vec{B}=0$

$$=\mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j}=-\frac{1}{\lambda^2}\vec{B}$$

d'où $\boxed{\Delta\vec{B}=\frac{1}{\lambda^2}\vec{B}}$



L'invariance par translation dans le plan yOz amène à chercher une solution de la seule variable x :

$$\frac{d^2\vec{B}}{dx^2}=\frac{1}{\lambda^2}\vec{B}\quad\text{de solution}\quad\vec{B}(x)=\vec{a}\,e^{x/\lambda}+\vec{b}\,e^{-x/\lambda}$$

* Pour éviter un champ infini lorsque x croît (solution non physique), il faut $\vec{a}=\vec{0}$.
* $\text{div}\ \vec{B}=0\ \Rightarrow\ b_x=0$ et donc $B_x=0$ à l'intérieur mais aussi sur la surface par continuité. Le champ magnétique ne peut donc pas posséder de composante normale (sur le supraconducteur, les lignes de champ lui sont tangentes).
* La continuité sur Oy entraîne $b_y=0$.
* Il ne reste que la composante suivant Oz, d'amplitude en $x=0$ notée B_0, d'où :

$$\boxed{\vec{B}(x)=B_0\,e^{-x/\lambda}\,\vec{u}_z}$$

Rq : B_0 est la somme du champ extérieur imposé et du champ créé par les courants du supraconducteur.

b) λ est la « profondeur de pénétration » : le champ s'atténue d'un facteur $e = 2{,}71$ sur une distance λ. Comme λ est petit, on conclut que le champ n'a d'existence physique (non nulle) qu'au voisinage immédiat de la surface.
AN : En $x = 0{,}1$ µm, $B/B_0 \approx 2.10^{-3}$.

D'un point de vue macroscopique, il apparaît que le champ à l'intérieur du supraconducteur est nul : c'est l'effet Meissner. Les courants sont alors surfaciques entraînant la discontinuité de la composante tangentielle du champ à l'interface.

c) L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} d/dx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0\,e^{-x/\lambda} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{j}(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda}e^{-x/\lambda}\vec{u}_y$$

Ce courant suit les mêmes variations spatiales que le champ ; il est donc essentiellement limité aux abords de la surface $x = 0$.
Par unité de volume $d^2\tau = dSdx$ du matériau, la force de Laplace $\vec{j}d^2\tau \wedge \vec{B}$ s'écrit :

$$d^2\vec{f} = dSdx\frac{B_0^2}{\mu_0\lambda}e^{-2x/\lambda}\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z$$

et par unité de surface dS intégrée sur toute la profondeur du conducteur :

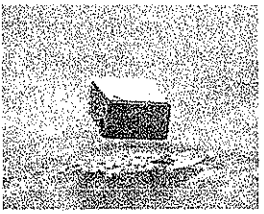
$$\frac{d\vec{f}}{dS} = \int_0^\infty \frac{B_0^2}{\mu_0\lambda}e^{-2x/\lambda}\,dx\,\vec{u}_x \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{f}}{dS} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\vec{u}_x}$$

Cette force est dirigée vers l'intérieur du conducteur et correspond à une pression magnétique $P = \frac{|d\vec{f}|}{dS} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$ égale à la densité d'énergie volumique.

Rq : Ce résultat est comparable à $P = \varepsilon_0\frac{E^2(0)}{2}$, pression électrostatique sur un conducteur chargé en équilibre (avec une différence de taille : le sens de la force est inversé) vue à la question **76.** d) du chapitre **4**. Et là non plus, ce résultat ne dépend pas de la forme explicite de $B(x)$.

Application : Le supraconducteur est donc, grâce aux courants surfaciques, repoussé par la source extérieure de champ magnétique. Lorsque cette source est un aimant, la répulsion entre aimant et supraconducteur peut avoir des effets spectaculaires de lévitation : la répulsion compense alors le poids d'un des deux objets, et l'équilibre peut être stable.

Photo d'un petit aimant en lévitation au-dessus d'un matériau refroidi à très basse température (présence de glace à sa surface) devenu supra-conducteur.



50. L'expérience de Stern et Gerlach

a) Le plan Oxz étant plan de symétrie du système, les trajectoires des atomes appartiennent à ce plan.

Les moments magnétiques $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ des atomes de lithium placés dans un champ magnétique extérieur $\vec{B} \approx B_z \vec{u}_z$ possèdent l'énergie potentielle :

$$E_p = -\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\vec{B} = -\mathfrak{M}_z B_z$$

Ce champ étant non uniforme, ils subissent la force de composante :

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = \mathfrak{M}_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Soumis à une force suivant Oz les atomes sont déviés suivant cette direction, et ceci dans les deux sens (car la projection $\mathfrak{M}_z$ peut être positive ou négative).

b) En théorie classique la projection $\mathfrak{M}_z$ est susceptible de prendre toutes les valeurs entre $-\|\overrightarrow{\mathfrak{M}}\|$ et $+\|\overrightarrow{\mathfrak{M}}\|$, ce qui conduirait à l'observation d'un segment continu d'impacts sur l'écran, dirigé suivant Oz et symétrique par rapport à Ox.

c) L'observation effective infirme cette prévision. L'existence de deux taches symétriques prouve la quantification du moment magnétique qui ne peut, dans ce cas, prendre que deux valeurs discrètes $\pm\mathfrak{M}_z$.

Stern et Gerlach, qui ont fait l'expérience avec des atomes d'argent, ont mesuré la valeur du moment magnétique et ont trouvé une valeur proche du magnéton de Bohr : $\mathfrak{M}_z = \pm\mu_B$ avec $\mu_B \approx 10^{-23}$ A.m^2.

d) Cette expérience confirme l'existence d'un moment cinétique de spin 1/2, lié à l'existence d'un électron célibataire dans la configuration électronique des atomes de lithium ($Z = 3$) : $1s^2 2s$.

Rq : Il ne s'agit pas ici de moment cinétique orbital puisque pour les orbitales s, il y a symétrie sphérique (le nombre quantique $l = 0$).

Le spin s est le moment cinétique propre (ou intrinsèque) de l'électron ; sa projection sur la direction Oz du champ est quantifiée et vaut pour une particule de spin 1/2 : $s_z = \pm\hbar/2$.

Il lui correspond un moment magnétique propre ou moment magnétique de spin comme vu à la question **40.** :

$$\mathfrak{M}_{sz} = \gamma s_z = -\frac{e}{m}\left(\pm\frac{\hbar}{2}\right) = \mp\mu_B$$

La quantification du spin entraîne celle du moment magnétique de spin avec une valeur élémentaire $\mu_B = 0{,}92.10^{-23}$ A.m^2.

Le moment cinétique de spin du couple d'électrons appariés dans $1s^2$ est nul ($\sum s_z = +\hbar/2 - \hbar/2 = 0$). Seul intervient ici le moment magnétique de spin de l'électron célibataire $2s$.
L'expérience de Stern et Gerlach (1922) est antérieure à la proposition de Uhlenbeck et Goudsmit (1925) sur l'existence d'un spin, justifiée par Dirac en mécanique quantique (1928).

Chapitre 6
Optique physique

Les ordres de grandeur utiles

La lumière

vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00.10^{8}\ m.s^{-1}$
constante de Planck	$h = 6{,}62.10^{-34}\ J.s$
longueur d'onde (visible)	$400\ nm < \lambda < 800\ nm$
fréquence (visible)	$4.10^{14}\ Hz < \nu = c/\lambda < 8.10^{14}\ Hz$
énergie du photon (visible)	$1{,}5\ eV < E = h\nu < 3\ eV$

Les couleurs du spectre visible (λ en nm)

violet	390 – 455	≈ 400
bleu	455 – 492	≈ 450
vert	492 – 577	≈ 500
jaune	577 – 597	≈ 550
orange	597 – 622	≈ 600
rouge	622 – 780	≈ 650

Indices de réfraction

vide ; air	$n = 1$; $n = 1{,}00029$ $(n - 1 \approx 3.10^{-4})$
eau ; verre ordinaire (crown) ; flint	$n = 1{,}33$; $n \approx 1{,}5$; $n \approx 1{,}8$

Les longueurs d'onde dans l'air des doublets jaunes

doublet jaune du sodium	$\lambda_1 = 589{,}0\ nm$ et $\lambda_2 = 589{,}6\ nm$ $\Delta\lambda = 0{,}6\ nm$
doublet jaune du mercure	$\lambda_1 = 577{,}0\ nm$ et $\lambda_2 = 579{,}1\ nm$ $\Delta\lambda = 2{,}1\ nm$

Largeur spectrale, temps et longueur de cohérence (en ordres de grandeur)

	$\Delta\nu$	$\Delta\lambda$	τ_0	$L_c = c\tau_0$
lumière blanche	4.10^{14} Hz	400 nm	2.10^{-15} s	1 µm
doublet jaune Na	5.10^{11} Hz	0,6 nm	2.10^{-12} s	0,5 mm
raie de lampe spectrale (Doppler)	10^{11} Hz	0,1 nm	0,01 ns	3 mm
laser TP	10^{10} Hz	0,01 nm	0,1 ns	3 cm

L'œil

pouvoir séparateur	$\varepsilon \approx 1' \approx 3.10^{-4}$ rad (soit 1 mm à 3 m de distance)
temps de réponse	$\approx 0{,}1$ s

Laser He-Ne de TP

longueur d'onde ; longueur de cohérence	$\lambda = 632{,}8$ nm ; > 1 m
diamètre ; divergence angulaire	$d \approx 1$ mm ; $\alpha \approx \lambda/d \approx 10^{-3}$ rad (diffract.)
puissance ; puissance surfacique	$P \approx 1$ mW ; $R \approx P/d^2 \approx 10^3$ W.m^{-2}
champ électrique ; magnétique	$E \approx \sqrt{\frac{2R}{\varepsilon_0 c}} \approx 10^3$ V.m^{-1} ; $B \approx \frac{E}{c} \approx 10^{-6}$ T

en TP

précision du goniomètre	1 minute d'arc $= 2{,}9.10^{-4}$ rad
précision du palmer du Michelson	1 centième de millimètre $= 10$ µm

Le cours d'abord

Modèle scalaire des ondes lumineuses

1. En quoi consiste l'approximation scalaire de la grandeur lumineuse ?

2. À partir de la phase d'une onde plane $e^{i(\omega t - kz)}$ (ou sphérique $e^{i(\omega t - kr)}$) se propageant dans un milieu d'indice n entre A (en z_A) et B (en $z_B > z_A$), relier le retard de phase φ au chemin optique (AB) et à la longueur d'onde λ_0 dans le vide. Comment s'exprime simplement le chemin optique entre les deux points A et B ?

3. Comment est définie une surface d'onde à partir d'un point source ? Que peut-on dire du chemin optique entre deux surfaces d'onde ? Que dit le théorème de Malus ? L'illustrer dans le cas d'une onde plane et d'une onde sphérique. Comment peut-on alors interpréter en termes d'ondes la convergence au foyer image F' d'un faisceau de lumière parallèle à l'axe d'une lentille convergente ?

4. Un système optique stigmatique donne d'un point objet A une image A' ; comment s'exprime la notion de stigmatisme en termes de chemin optique (AA') sur les rayons ? Exemple.

5. Qu'appelle-t-on temps de cohérence et longueur de cohérence d'une source lumineuse ? Donner quelques ordres de grandeurs. Comment le temps de cohérence est-il relié à la largeur spectrale ?

6. À quoi sont sensibles les récepteurs usuels ? Quels sont leurs temps de réponse ? Justifier l'obtention de l'intensité I (ou éclairement E) à partir de l'amplitude complexe $\underline{A}$ (ou vibration $\underline{s}$).

Rappels de quelques résultats sur la diffraction

7. Quelle inégalité faut-il respecter pour être dans le cadre de l'optique géométrique ? Est-elle vérifiée dans le cas des systèmes optiques usuels ?
De manière générale quand dit-on qu'il y a diffraction ? Comment peut-on comprendre qualitativement ce phénomène sur la base d'une description ondulatoire (prendre l'exemple d'une fente fine) ?

8. L'ouverture est une fente rectangulaire de centre C (une fente fine de TP) de largeur $a \approx 0{,}1$ mm suivant l'axe CX et de hauteur $b \approx 2$ cm suivant l'axe CY, éclairée sous incidence nulle par un pinceau lumineux de longueur d'onde $\lambda \approx 0{,}5$ µm. Faire un dessin et décrire le phénomène observé suivant l'axe Ox de l'écran E placé en arrière (et parallèle à CX).
Donner l'expression du demi-angle θ_0 au sommet du cône dans lequel est essentiellement envoyée la lumière. Quelle est alors la largeur de la tache de diffraction sur l'écran placé à une distance $D = 1$ m du plan de la fente ?

9. L'ouverture est circulaire de diamètre d. Donner l'ordre de grandeur de d pour une diffraction perceptible. Qu'observe-t-on ? Dans quelle ouverture angulaire θ_0 est essentiellement envoyée la lumière ? Quelle est l'importance pratique des ouvertures circulaires ?

10. Redessiner le montage des questions précédentes (pour une ouverture quelconque) sous la forme d'un montage dit de Fraunhofer (qui est aussi celui du goniomètre) avec une lentille convergente d'entrée L_1 (pour le collimateur) et une lentille convergente de sortie L_2 (pour l'objectif la lunette) et l'expliquer.

Conditions d'interférences

11. À quelles conditions sur la fréquence et la polarisation la superposition de deux vibrations lumineuses peut-elle donner des interférences ?

12. S_1 et S_2 sont deux sources ponctuelles et monochromatiques d'amplitudes a_1 et a_2, et vérifiant les hypothèses de la question **11.** Pourquoi la différence de phase $\varphi(M,t)$ entre les deux ondes arrivant en un point d'observation M fixe dépend-elle de M ? Pourquoi dépend-elle du temps t ? Déduire alors l'intensité $I(M)$ en fonction des intensités I_1 et I_2 de chaque onde prise séparément et de la moyenne temporelle $<\cos\varphi>$; commentaire.

13. Que vaut en général $<\cos\varphi>$? Quand dit-on que deux sources sont cohérentes ? Qu'en déduit-on expérimentalement sur les sources S_1 et S_2 ?
Quand doit-on additionner les amplitudes complexes ? Quand peut-on sommer les intensités ?

La formule des interférences

14. Comment établir le plus simplement la formule des interférences donnant l'intensité résultante $I(M)$ en un point M entre deux sources ponctuelles S_1 et S_2, monochromatiques et cohérentes entre elles, en prenant les deux ondes de même intensité I_0 ?

Comment s'y exprime la différence de phase φ en fonction de la différence de marche δ ? Définir l'ordre d'interférences p en un point.

Expliquer qualitativement les extrema de l'intensité résultante I au point M.

15. Interpréter par une phrase le phénomène d'interférence, d'abord en termes d'intensité, puis en termes de phase.

Quel commentaire peut-on faire sur la phase de l'onde résultante en M ?

Des trous d'Young aux fentes d'Young

16. Décrire le dispositif des trous d'Young ; de quand date-t-il ? Pourquoi les franges sont-elles dites « non localisées » ?

Établir l'expression de la différence de marche δ en fonction de $a = S_1S_2$, D la distance des trous à l'écran E et x l'abscisse du point M d'observation par rapport à l'axe médiateur. Décrire le système de franges.

17. Quelle est l'expression de l'interfrange i ? Réécrire la formule des interférences à l'aide de i, tracer la courbe donnant $I(x)$ et la commenter.

Les franges sont facilement observables à l'œil nu dès que $i \geq 1$ mm ; en déduire une inégalité sur a sachant que $D = 1$ m et $\lambda = 0{,}5$ µm ; commentaire.

Qu'appelle-t-on frange centrale, et que peut-on en dire ?

18. Pour quelle raison dans un montage réel choisit-on de remplacer les trous par des fentes ? Comment est modifiée la figure d'interférences ? Faire une figure avec des lentilles convergentes L_1 en entrée et L_2 en sortie et expliquer leur rôle ; comment cette dernière modifie-t-elle la différence de marche δ ?

19. Dans l'expérience des fentes d'Young, on place sur le trajet issu de S_1 une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n ; que se passe-t-il ? Établir l'expression de la variation induite Δp de l'ordre d'interférences en un point quelconque de l'écran, en faisant l'approximation que les rayons sont normaux à la lame.

Faire l'application numérique de l'épaisseur e de la lame et de la translation Δx sur l'écran sachant que $|\Delta p| = 4$, $a = S_1S_2 = 0{,}5$ mm, $D = 1$ m, $\lambda = 0{,}5$ µm et $n = 1{,}5$.

Notions de cohérence spatiale et temporelle

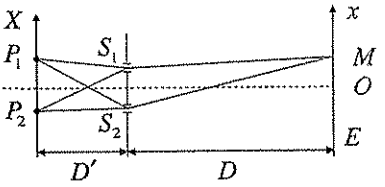
20. Qu'appelle-t-on visibilité des franges ? Comment est défini le contraste ? Comment évolue la courbe d'interférences $I(x)$ lorsque le contraste diminue ?

Quelles sont physiquement les deux causes d'affaiblissement du contraste ?

Dans les questions **21.** à **24.**, les sous-questions b) sont en marge du programme et peuvent être traitées comme des exercices.

21. Cas de 2 sources quasi ponctuelles

Avec le dispositif des trous d'Young, la source est à présent formée de deux sources primaires (c'est-à-dire lumineuses par elles-mêmes) quasi ponctuelles P_1 et P_2, d'abscisses X_1 et X_2, sur un axe parallèle à celui de S_1S_2 à une distance D'.



a) Expliquer qualitativement la situation et montrer d'abord sans grand calcul que le contraste est périodique en fonction de la distance P_1P_2.

b) Comment confirmer ce résultat par un calcul d'intensité ? Tracer le graphe du contraste $C(P_1P_2)$ avec $\lambda = 0{,}5$ µm, $a = S_1S_2 = 0{,}5$ mm et $D' = 1$ m.

22. Cas d'une fente source (étendue spatiale)

La source est une fente unique de largeur l et de hauteur h placée à une distance D' des fentes d'Young.

a) Reprendre la question précédente avec la source P_1 désaxée de X_1. À quelle variation Δp de l'ordre d'interférence cela correspond-il par rapport à la source sur l'axe ? Transposer ce résultat à une source étendue de largeur $l = 2X_1$, énoncer un critère semi-quantitatif du brouillage des franges et indiquer la valeur minimale de l, soit l_{min} en fonction de λ, D' et a pour laquelle il se produit.

b) Proposer un calcul d'intensité sur la fente conduisant à la variation du contraste avec la largeur l. Comparer à la question a).
Proposer une application numérique définissant une fente source « fine ».

23. Cas d'un doublet jaune

La source quasi ponctuelle est à présent constituée de deux raies, par exemple le doublet jaune du sodium de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm dans l'air.

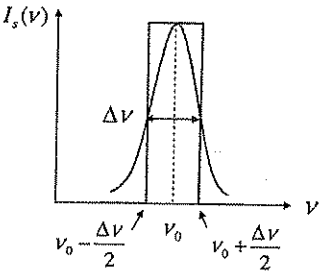
a) Expliquer qualitativement la situation et évaluer d'abord sans grand calcul l'abscisse x_0 où se produit le premier brouillage de franges ; à combien de franges depuis $x = 0$ cela correspond-il ? Est-ce observable avec un système de type fentes d'Young ? Quel dispositif permet de le voir facilement ?

b) Comment confirmer ce résultat par un calcul ? Que vaut le contraste ? Tracer le graphe de $I(x)$.

24. Cas d'une raie (étendue spectrale)

Une raie n'est jamais parfaitement monochromatique car un atome qui émet un train d'onde pendant un temps τ_0 au voisinage de la fréquence centrale ν_0 donne lieu à une raie de largeur à mi-hauteur $\Delta\nu \approx 1/\tau_0$.

On modélise l'intensité spectrale $I_s(\nu)$ de la raie par un profil rectangulaire comme sur le graphe ci-contre avec une intensité spectrale uniforme I_s entre $\nu_0 \pm \Delta\nu/2$ et nulle en dehors de cet intervalle.



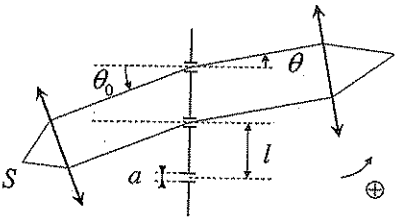
a) S'inspirer de la question précédente. Indiquer si, en un point de l'écran, la différence de marche varie lorsque la longueur d'onde change ; en déduire la variation Δp de l'ordre d'interférences en ce point lorsque la fréquence ν_0 varie de $\Delta\nu/2$. Transposer ce résultat à présent à la source de largeur spectrale $\Delta\nu$, donner un critère semi-quantitatif du brouillage des franges et indiquer la valeur de $\Delta\nu_{min}$ en fonction de c et $\delta(x)$, puis celle de $\Delta\lambda_{min}$ pour laquelle il se produit.

b) Comment confirmer ce résultat par un calcul (garder la variable ν) ? Déterminer le contraste observé (il est conseillé de noter $\tau(M) = \delta(M)/c$). Commentaires. Tracer le graphe de l'intensité $I(\tau)$. Comparer à la question a).
Pourquoi une diminution notable du contraste avec la raie verte du mercure n'est-elle pas observable avec un système de type fentes d'Young ? Quel dispositif permet de le voir facilement ?

c) Faire un dessin, toujours sur la base de l'expérience des trous d'Young, et faire comprendre qualitativement la notion de cohérence temporelle à partir de la longueur des trains d'onde. Commentaire.

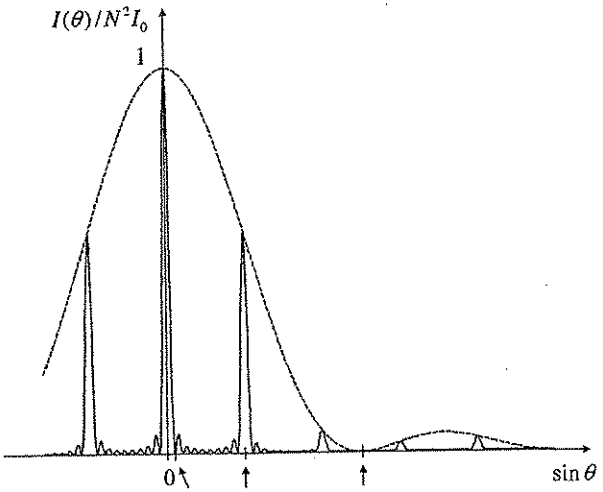
Le réseau ou interférences à N ondes

25. Qu'est-ce qu'un réseau plan ?
S'appuyer sur la figure ci-contre pour obtenir (sans calcul) la formule du réseau donnant θ_K, l'angle d'émergence dans la direction pour laquelle est obtenu le maximum de lumière d'ordre K pour la longueur d'onde λ.
Un réseau de $n = 600$ traits/mm est éclairé sous incidence nulle avec $\lambda = 0{,}6$ µm ; combien peut-on voir d'ordres ?



26. Principe des interférences à N ondes
Un faisceau collimaté éclaire une partie d'un réseau comme celui de la question précédente et cela concerne N fentes. Donner un ordre de grandeur de N.
On note $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$ la différence de phase entre les ondes issues de deux fentes successives. Utiliser la représentation de Fresnel pour retrouver la condition d'interférences constructives et pour estimer la demi-largeur à la base des franges brillantes. En déduire l'intérêt des interférences à N ondes sur les interférences à 2 ondes.

27. La courbe qui donne l'intensité relative $I(\theta)/N^2I_0$ en fonction de $\sin\theta$ (on a pris ici $\theta_0 = 0$) est donnée par le graphe ci-dessous (I_0 est l'intensité d'une onde seule).



Commenter cette courbe et en particulier donner les 3 abscisses indiquées par des flèches ; en déduire l'importance de chacune des trois longueurs a, l et $L = Nl$.

28. Pourquoi le réseau est-il un appareil disperseur ? Pourquoi se pose-t-il un problème de résolution ? Estimer en fonction de K, N et λ, la plus petite différence $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \ll \lambda$ de deux longueurs d'onde voisines justes séparées d'après le critère de Rayleigh. Proposer une application numérique et la commenter.

■ L'interféromètre de Michelson

29. Décrire sommairement l'interféromètre de Michelson. Faire le schéma lors d'une utilisation en « lame d'air » d'épaisseur e et en donner les caractéristiques (on note i l'angle que fait le rayon incident avec l'axe du miroir translatable M_1).

Quelle est dans ce cas la différence de marche $\delta(i)$? Quelle est la forme des franges ? Quel lien existe-t-il entre la taille de la source et la localisation des franges ?

30. Déterminer le rayon r_k du $k^{ième}$ anneau brillant compté à partir du centre (que l'on suppose brillant aussi) en fonction de k, λ, e, et f', la distance focale de la lentille de projection, et commenter le résultat.

31. Faire le schéma de l'interféromètre de Michelson lors d'une utilisation en « coin d'air » d'angle α éclairé par une source quasi ponctuelle.

Quelle est dans ce cas la différence de marche $\delta(x)$ où x est l'abscisse par rapport à l'arête des deux miroirs ? Quelle est la forme des franges ? Quel lien existe-t-il entre la taille de la source et la localisation des franges ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Même si historiquement la théorie ondulatoire de la lumière s'est développée au début du XIXe siècle (les trous d'Young datent de 1807), donc bien avant l'électromagnétisme des régimes variables (les équations de Maxwell datent de 1864 et la production d'ondes électromagnétiques de 1887), il ne faut pas oublier le caractère vectoriel de la lumière en optique ondulatoire. L'introduction des photons et la quantification de l'énergie émise par les atomes datent du début du XXe siècle.

☐ Autre point à ne pas oublier : les phénomènes décrits par l'optique ondulatoire sont vus à travers des yeux humains dont les caractéristiques physiologiques (un peu comme les oreilles en acoustique) agissent comme un filtre, sont sensibles à l'intensité (et pas au champ) et présentent un temps de réponse de $\approx 0{,}1$ s sur lequel ils moyennent les informations ; ils donnent une perception partielle et altérée de la réalité physique.

☐ Se rappeler que la période T (et la fréquence $\nu = 1/T$) sont caractéristiques de l'onde (donc indépendantes du milieu), alors que la longueur d'onde $\lambda = vT$ dépend du milieu par $v = c/n$ (c'est pour cette raison que l'on préfère raisonner sur la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = cT$ soit $\lambda = \lambda_0 / n$).

☐ Les spectres émis par les atomes excités lors des transitions entre niveaux électroniques quantifiés sont des spectres de raies. En TP d'optique sur le goniomètre, les lampes spectrales Na ou Hg donnent sur fond noir un ensemble discret de raies de couleurs différentes. C'est également le cas avec un laser qui donne une seule raie très monochromatique (lumière cohérente). Alors que le spectre émis par un corps chaud (par exemple une lampe à incandescence ou le Soleil) est un spectre continu.

☐ Il est important de se rendre compte qu'il n'est pas facile d'obtenir des interférences entre deux ondes ou de faire diffracter la lumière autour de l'image géométrique car les conditions d'obtention sont strictes. Par ailleurs il est capital de se familiariser rapidement avec les ordres de grandeur si spécifiques de l'optique ondulatoire.

Diffraction

☐ Il est souvent conseillé sur un schéma de diffraction à l'infini (de Fraunhofer) de faire figurer deux lentilles, l'une L_1 permettant à partir de la source S d'avoir un faisceau de lumière parallèle et l'autre L_2 ramenant l'observation à l'infini dans son plan focal image. C'est d'ailleurs le rôle du collimateur d'un goniomètre et de l'objectif de sa lunette.

☐ La « variable naturelle » d'une amplitude diffractée à l'infini est une variable angulaire car il s'agit de l'amplitude diffractée dans une direction donnée.

☐ Les valeurs intéressantes de la variable angulaire de diffraction θ sont toujours du type λ/l où l est la taille de l'objet diffractant (la diffraction est d'autant plus importante que l'objet diffractant est petit) ; ne pas perdre de vue que $\lambda/l \ll 1$ (ce qui permet les approximations $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$), que le phénomène est chromatique (il dépend de λ) et que plus l'objet est grand, moins la diffraction est importante.

☐ Il est faux de croire que la diffraction (par une fente de largeur a par exemple) n'est observable qu'à partir du moment où la taille de l'objet diffractant est de l'ordre de la longueur d'onde ! (voir les questions **8.** et **37.** pour les applications numériques prouvant le contraire) ; d'ailleurs à ce moment-là $\sin\theta_0 = \lambda/a$ serait voisin de 1 et même supérieur à 1 (une diffraction à 90° !, alors qu'elle doit être proche de l'axe soit $a \geq 100\lambda$) ; pire, d'un point de vue purement expérimental, la quantité de lumière qui traverse une fente aussi « régulièrement » étroite n'est plus visible à l'œil tellement elle est faible...

☐ Il est vrai cependant que pour un réseau à 600 traits/mm, le pas est de l'ordre de quelques λ. Mais c'est le phénomène d'interférences constructives entre fentes successives (et non la diffraction) qui dicte les directions d'observation du signal, alors forcément important en amplitude vu le nombre élevé d'éléments diffractants. Il serait donc plus approprié de parler de « l'ordre d'interférences » plutôt que de « l'ordre de diffraction ».

Les interférences

☐ Lorsque deux ondes sont cohérentes entre elles (ne pas omettre de le signaler) et se superposent, elles interfèrent : la somme de leurs intensités n'est pas l'intensité de leur superposition, et pour calculer celle-ci il faut d'abord faire la somme des amplitudes ; préciser s'il s'agit d'interférences à ondes sphériques ou à ondes planes, d'interférences à division du front d'onde (les fentes d'Young,..), en général non localisées mais peu lumineuses, ou d'interférences à division d'amplitude (le Michelson,...), en général localisées et plus lumineuses.
Lorsque deux ondes sont incohérentes entre elles (ne pas omettre de le signaler), l'intensité de leur superposition est la somme de leurs intensités.

☐ Pour les schémas de montage (toujours recommandés), il faut commencer par soigner l'optique géométrique d'abord, trouver les sources secondaires, hachurer ou colorier les deux faisceaux (il ne suffit pas de dessiner un rayon !) de manière différente, puis montrer leur intersection qui est (par définition) le champ d'interférences.

☐ Dans un milieu homogène d'indice n, $(AB) = n\,AB$, le chemin optique (AB) sur un rayon allant de A à B est le produit de l'indice par la longueur AB de ce rayon. La connaissance de l'optique géométrique est essentielle ici, et il faut faire l'effort de ne pas seulement raisonner avec des rayons, mais aussi en terme de surfaces d'onde pour la détermination des différences de marche. Le théorème de Malus indique que quel que soit le nombre de réflexions ou de réfractions subies par un rayon, il reste orthogonal aux surfaces d'onde.

☐ Dans le cas d'interférences entre ondes sphériques où l'écran est placé perpendiculairement à la médiatrice des sources, aucun calcul n'est nécessaire puisque alors les résultats sur les trous d'Young s'appliquent directement.

☐ Pour calculer une différence de marche entre deux rayons différents (notés 1 et 2) allant d'un point source S à un point d'observation M (dans la zone d'interférences), commencer par tracer les deux trajets SS_1M et SS_2M pour bien définir la différence de marche $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$. Réduire les calculs en supprimant les tronçons compris entre deux surfaces d'onde (car entre deux surfaces d'onde le chemin optique est indépendant du chemin géométrique suivi) même après réflexion (sur un miroir plan par exemple) ou réfraction (à la traversée d'une lentille convergente par exemple) en commençant par celles qui passent par S et M. Faire apparaître si possible la partie géométrique de la différence de marche δ pour bien la visualiser. Ne jamais « inventer » une origine sur une lentille (la face avant ? le plan médian ? la face arrière ?). Ne pas oublier que $(AB) = nAB$ et que le calcul en général n'est pas unique, ce qui signifie qu'il y a toujours une méthode plus rapide et simple.

☐ La différence de marche est une grandeur algébrique et l'ordre dans la définition retenue $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$ est indifférent puisque dans la formule des interférences il intervient $\cos(2\pi\delta/\lambda)$. En revanche, si comme c'est souvent le cas, elle est constituée de termes d'origines différentes, le signe relatif de ces termes est capital ! Pour des trous d'Young, on a $\delta = ax/D \pm (n-1)e$ suivant qu'une lame d'épaisseur e et d'indice n est placée sur le trajet S_2M ou sur le trajet S_1M.

☐ Se rappeler qu'il y a un déphasage de π lors d'une réflexion vitreuse avec $n_2 > n_1$, ou sur un miroir (conducteur parfait), ou lors du passage au point de convergence d'un faisceau (comme au foyer d'une lentille).

☐ La frange centrale n'est pas la frange au centre de l'écran (sauf exception de symétrie) ! C'est la frange définie par une différence de marche nulle : $\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = 0$.

☐ Il convient toujours de bien préciser où est prise l'origine des phases des ondes arrivant au point d'observation M. Lorsque la figure présente une symétrie (une fente unique, 3 fentes parallèles et équidistantes,...), il est judicieux de choisir cette origine sur le rayon provenant du centre géométrique, en vertu du résultat qui veut que du point de vue de la phase, tout se passe comme si l'onde résultante provenait du milieu de la figure. Exceptions notables pour le choix de l'origine : le cas de deux fentes d'Young, du réseau,...

☐ L'utilisation des amplitudes complexes est hautement recommandée car non seulement cela évite la manipulation des formules de trigonométrie, mais surtout cela permet de ne pas considérer le terme temporel (dont on sait qu'il s'élimine par $e^{i\omega t}.e^{-i\omega t}=1$) pour se concentrer sur l'essentiel : l'amplitude et le déphasage spatial.
Bien calculer l'intensité I à partir de l'amplitude complexe $\underline{A}$ par l'expression $I=k\underline{A}.\underline{A}^*$ de préférence à $I=k|\underline{A}|^2$ qui, bien que mathématiquement équivalente, conduit bien souvent à des calculs plus longs.

☐ Bien se souvenir que pour obtenir ou observer des franges (correspondant à une intensité $I(\varphi)$ variable), il faut une phase φ fonction d'un paramètre spatial variable.

☐ Dans les problèmes traitant de cohérence spatiale ou temporelle, les différents éclairements incohérents s'ajoutent (qu'ils proviennent de points sources différents ou qu'il s'agisse de fréquences différentes). Dans l'utilisation de formules de trigonométrie du genre :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2} \quad \text{ou} \quad \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

il est recommandé au second membre de commencer par le facteur comportant la différence (et qui s'identifie à la visibilité) et de finir par le facteur comportant la somme (et qui s'identifie au terme de phase habituel) dans la formule des interférences :

$$I(M)=2I_0\left(1+V\cos\varphi(M)\right)$$

Applications directes du cours

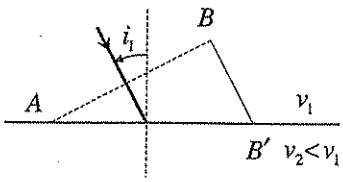
L'optique géométrique en terme ondulatoire

32. Le théorème de Malus

Pourquoi les surfaces d'onde sont-elles également appelées surfaces équiphase ?

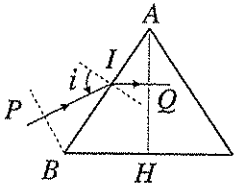
Pour une onde plane progressive monochromatique, exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de la phase $\Phi(\vec{r},t)$ et en déduire le théorème de Malus.

33. La loi de Snell-Descartes



Un dioptre plan AB' sépare deux milieux dans lesquels les célérités sont v_1 et $v_2 < v_1$. Sur le schéma ci-contre AB est un plan d'onde dans le milieu 1 à l'instant t (A est sur le dioptre). Représenter le plan d'onde correspondant $A'B'$ dans le milieu 2 à l'instant $t+\Delta t$ (B' est sur le dioptre) en appliquant le théorème de Malus. Montrer que cela permet de retrouver la loi de Snell-Descartes sur la réfraction ; commentaire.

34. La section droite d'un prisme d'indice n a la forme d'un triangle équilatéral de côté a ; le rayon incident est PI sur la face d'entrée AB.

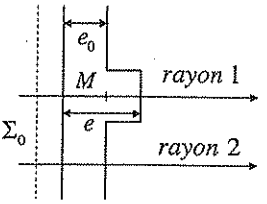


a) Quel est l'angle d'incidence i pour lequel le rayon réfracté IQ est perpendiculaire à la hauteur AH ?

b) On pose $IA = x$. Calculer le chemin optique (PIQ), où le point P appartient au plan perpendiculaire au rayon et passant par B. Commentaires.

35. Comment peut-on comprendre qualitativement qu'une lentille (prendre une lentille convergente) puisse être approximativement stigmatique alors que l'épaisseur de verre traversée dépend du rayon choisi pour aller de l'objet à l'image ?

36. Objet de phase



Une lame de verre parfaitement transparente, à faces parallèles, d'indice de réfraction n et de faible épaisseur e_0, comporte « un petit accident d'épaisseur », localisé en M, où l'épaisseur totale devient e. Cette lame est éclairée par un faisceau de lumière parallèle de longueur d'onde λ dans le vide.

a) Déterminer la différence de phase φ créée par l'irrégularité entre les ondes suivant les rayons 1 et 2. Σ_0 représente une surface d'onde avant traversée de la lame ; dessiner une surface d'onde Σ après la traversée de la lame.

b) On forme sur un écran l'image de cette lame (assimilée à un objet plan) par une lentille convergente ; le défaut d'épaisseur est-il visible sur l'écran ?

c) En est-il de même si on place la lame contre le miroir M_1 d'un interféromètre de Michelson réglé au contact optique ?

Rappels sur la diffraction

37. Écrans complémentaires

a) Dans l'expérience simple (sans lentilles), un laser *He-Ne* ($\lambda = 632{,}8$ nm) éclaire une fente fine de largeur a. Pour quelle valeur de a, la tache centrale de

diffraction sur un écran placé à $D = 1{,}50$ m de la fente vaut-elle $100a$, critère pour une diffraction importante et bien visible ? Comparer alors a à λ.

b) Quand deux écrans par transmission sont-ils complémentaires ? Donner un exemple. Justifier qu'en dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par deux écrans complémentaires sont identiques (théorème de Babinet). Un cheveu placé dans le même faisceau donne, toujours à $D = 1{,}50$ m, une tache centrale de largeur $\Delta x = 3{,}8$ cm ; que peut-on en déduire ?

38. L'intensité diffractée dans la direction d'angle θ par une fente fine de largeur a éclairée sous incidence nulle par une lumière de longueur d'onde λ est donnée par $I(u) = I_M \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ où $u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$ et I_M l'intensité (maximale) du pic central.

Rappeler ce qu'est une fente fine (de hauteur b et de largeur a), tracer le graphe de $I(u)/I_M$, en donner ses caractéristiques essentielles en indiquant en particulier l'angle θ_0 de la direction de la 1ère annulation. Puis estimer l'intensité des deux premiers maxima secondaires de chaque côté de $\theta = 0$; commentaire.

39. Considérer la diffraction par une ouverture rectangulaire comme à la question précédente, mais où b est du même ordre de grandeur que a (on n'a plus $b \gg a$). Dire qualitativement ce que l'on observe et représenter schématiquement l'intensité diffractée dans le plan Oxy.

Retrouve-t-on le résultat de la fente fine en faisant $b \to \infty$?

40. Estimer la divergence angulaire d'un faisceau laser, liée à la diffraction par sa propre ouverture ; commentaires.

■ Interférences

41. Que représente physiquement I_0 dans la formule des interférences dans les trois écritures suivantes :

a) $I = 2I_0(1+\cos\varphi)$; b) $I = I_0(1+\cos\varphi)$; c) $I = \frac{I_0}{2}(1+\cos\varphi)$?

42. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir d'interférences entre deux ondes de fréquences différentes (même voisines) ? Le justifier par une application numérique lors du passage à la moyenne temporelle dans la superposition de deux ondes de pulsation ω_1 et ω_2.

43. Pourquoi dans la plupart des cas fait-on interférer deux ondes cohérentes *de même amplitude* ? Pour répondre quantitativement à cette question, déterminer le contraste $C(r)$ des franges observées entre deux ondes cohérentes d'amplitude $a_1 = a$ et $a_2 = ra$ $(0 < r \leq 1)$ lorsqu'elles passent en S_1 et S_2, tracer son graphe et le commenter pour $r \geq 0{,}5$.

44. Dans l'expérience des fentes d'Young, avec une fente source S fine et monochromatique, les sources secondaires sont distantes de $a = S_1S_2 = 1$ mm et la distance des fentes à l'écran est $D = 1$ m. Sur l'écran E, la distance entre les franges brillantes d'ordre –3 et 3 est $\Delta x = 3$ mm ; que peut-on en déduire ?

On place à présent sur S_1 une lame de verre d'épaisseur $e = 20$ µm et d'indice $n = 1{,}5$; que se passe-t-il ? Comment faut-il agir sur la fente source pour que la figure d'interférences revienne dans son état initial (la distance de S à la droite S_1S_2 est $D' = 0{,}2$ m) ?

45. Franges des fentes d'Young compte tenu de la diffraction

On revient sur l'expérience des fentes d'Young en tenant compte de la diffraction de Fraunhofer : faire un schéma explicatif avec deux lentilles. λ est la longueur d'onde, f' la distance focale de la lentille de projection, $a = 0{,}1$ mm la largeur des fentes et $l = 0{,}5$ mm la distance entre les axes des deux fentes.

a) Évaluer simplement le nombre N de franges d'interférences à l'intérieur de la tache centrale de diffraction. Qu'observerait-on avec deux trous d'Young ?

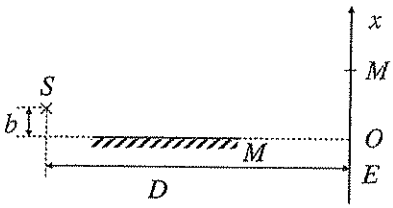
b) Toujours pour l'expérience des fentes d'Young, rétablir simplement la formule des interférences donnant $I(x)$ sur l'écran compte tenu de la diffraction.

NB : Dans ce calcul, l'amplitude diffractée par une fente est donnée et notée

$$A_d(u) = A_0 \frac{\sin u}{u} \quad \text{où} \quad u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}.$$

46. Miroir de Lloyd

Dans un dispositif interférentiel, on éclaire un miroir plan M par une source quasi ponctuelle S émettant une lumière de largeur spectrale négligeable, de longueur d'onde λ, et située à une distance b du plan du miroir.



a) Faire un dessin et montrer que l'on observe des interférences au point M d'un écran E situé dans un plan perpendiculaire au miroir à une distance $D (\gg b)$ de S. Y a-t-il une frange visible en O ?

b) Préciser la forme des franges obtenues et donner la valeur de l'interfrange i en fonction de b, λ et D.

AN : $b = 0{,}6$ mm, $\lambda = 0{,}6$ µm et $D = 80$ cm.

c) Exprimer l'intensité lumineuse $I(x)$ observée sur la partie concernée de l'écran sachant que la réflexion sur le miroir entraîne un déphasage de π.

47. Interférences à 3 fentes

Trois fentes d'Young, équidistantes et de même largeur (petite devant $S_1S_2 = S_2S_3 = a$), sont éclairées sous incidence nulle par une source ponctuelle monochromatique placée au foyer d'une lentille. Soit $\varphi(x)$ la différence de phase en un point M de l'écran de coordonnée x entre les ondes issues de S_1 et S_2.

a) Donner l'éclairement $I(\varphi)$ de l'écran et tracer soigneusement la fonction $I(\varphi)/I_0$ pour φ de 0 à 2π (I_0 est l'intensité d'une onde) ; commentaire.

b) Même question si la fente centrale possède une largeur double et si en plus on place sur sa face une lame transparente déphasant de $\pi/2$ pour la longueur d'onde utilisée (on garde les notations précédentes) ; graphe et commentaire.

48. Une lame à face parallèle de verre d'indice n et d'épaisseur e est placée dans le vide. Par réflexions multiples sur les dioptres, un rayon incident incliné sur la normale donne lieu à une infinité de rayons transmis (de même que réfléchis). Si i est l'angle que font avec la normale les rayons à l'intérieur de la lame, exprimer, en fonction de n, e et i, la différence de marche δ entre deux rayons transmis successifs, de leur source jusqu'à l'infini.

■ Notions de cohérence

49. Largeur naturelle et largeur Doppler

a) Quelle est la fréquence centrale ν_0 d'une raie correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0{,}5$ µm ? Quelle est sa couleur ? La longueur de cohérence d'une telle raie de lampe spectrale liée à la seule largeur naturelle serait de $L_c \approx 3$ m. Expliquer cette notion et en déduire la durée τ_0 des trains d'onde émis ainsi que la largeur spectrale naturelle $\Delta\nu$ de la raie à l'aide de la relation $2\pi\tau_0\Delta\nu \approx 1$. Quel est son facteur de qualité ? Quelle est la largeur spectrale naturelle en $\Delta\lambda$ de la raie ?

b) En réalité, en raison de l'agitation thermique des molécules émettrices, la fréquence perçue est $\nu = \nu_0\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$ où v est leur vitesse radiale et le signe $\pm$ lié au sens de leur mouvement vis-à-vis de l'observateur (c'est l'effet Doppler). Quelle est la largeur Doppler $\Delta\nu'$ de la raie si on assimile la vitesse v à la vitesse quadratique moyenne lorsque la température est $T = 320$ K pour un gaz de masse molaire $M = 44$ g.mol^{-1} (CO_2) ? Quels sont alors le temps τ' ainsi que la longueur de cohérence L_c' réelle ? Quelle est la largeur spectrale Doppler $\Delta\lambda'$ de la raie ?

50. Distance angulaire d'un système d'étoiles doubles

Pour déterminer l'écart angulaire α d'un système d'étoiles doubles, on place devant le tube d'un télescope un système de fentes d'Young de distance a réglable ($a_{max} = 50$ cm) ainsi qu'un filtre ne laissant passer que la lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}5$ µm. Sachant que le contraste des franges diminue lorsque a augmente et s'annule pour la première fois pour $a = a_{max}$, déduire l'angle minimal α_{min} (exprimé en secondes d'arc) mesurable avec ce procédé.

51. Superposition de deux modes voisins

a) Deux ondes planes cohérentes et de même amplitude font un angle $+\theta$ et $-\theta$ avec à la normale à l'écran (plan xOy) au point M. Elles sont en phase en O ($x=0$) ; quelle est leur différence de marche en M d'abscisse x ?

b) En fait, chacune des deux ondes comporte deux modes voisins, de même amplitude, et de fréquences $\nu_1=\nu+\delta\nu$ et $\nu_2=\nu-\delta\nu$ avec $\delta\nu \ll \nu$. Exprimer le contraste $C(x)$ des franges en fonction des données ; par quel moyen est-il possible d'accéder à $\delta\nu$?

L'interféromètre de Michelson

52. Mesure de l'épaisseur d'une lame

On interpose sur le trajet du miroir M_1 d'un Michelson réglé en lame d'air une très mince lame transparente d'indice $n=1{,}52$ et d'épaisseur l inconnue, et ce parallèlement au miroir. On observe un défilement de 36 franges avec la raie verte du cadmium à $\lambda=509$ nm. Que vaut l ? Estimer la précision de la mesure.

53. Observation des anneaux sur un écran

Un interféromètre de Michelson est réglé en « lame d'air » avec la raie verte du mercure ($\lambda\approx 0{,}55$ µm). La source est au foyer objet de la lentille d'entrée de distance focale $f_1'=10$ cm et l'écran dans le plan focal image de la lentille de projection de distance focale $f_2'=100$ cm.

a) La source S est quasi ponctuelle ; qu'observe-t-on sur l'écran E en déplaçant l'un des miroirs ?

b) La source est un disque de diamètre $d=2$ cm et l'épaisseur de la lame d'air est réglée à $e=2$ mm ; combien observe-t-on d'anneaux ? Quel est le rayon du plus grand d'entre eux ?

54. Mesure d'une longueur d'onde

Un interféromètre de Michelson est réglé pour donner des anneaux ; il est éclairé avec une lampe à vapeur de mercure et un filtre pour ne sélectionner que la raie verte. Le miroir M_1 est mobile et la vitesse de son chariot est $v=0{,}80$ mm.s^{-1} (ce qui est très rapide à l'échelle de la longueur d'onde) ; dans sa position initiale ($t=0$, $x=0$), l'ordre d'interférences au foyer image F_2' de la lentille L_2 est nul.

a) Qu'observe-t-on en F_2' ? Y donner, lorsque le miroir M_1 a été translaté de $x(t)$, l'expression de l'intensité vibratoire $I(t)$ en fonction du temps.

b) La période T_0 du signal (à exprimer en fonction de λ et v) vaut $T_0=0{,}341$ ms. Est-ce observable ? Est-ce mesurable ? En déduire la valeur de λ.

Le réseau ou interférences à N ondes

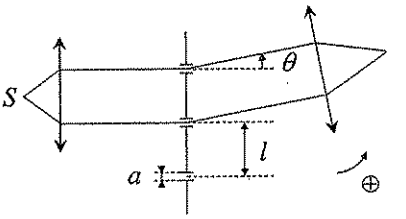
55. Un réseau de $n = 500$ traits/mm est éclairé par un faisceau parallèle de lumière blanche. Quelle valeur faut-il donner à l'angle d'incidence i de ce faisceau sur le réseau pour observer une lumière diffractée autour de $\lambda_0 = 0{,}5$ µm dans le spectre d'ordre $K = 2$ et ceci dans la direction perpendiculaire au plan du réseau ?

56. Un réseau éclairé normalement avec la raie verte du mercure ($\lambda = 546{,}1$ nm) donne des maxima pour les deux premiers ordres $K = 1$ et $K = 2$ dans les directions $\theta_1 = 17°23'$ et $\theta_2 = 36°40'$. Quel est le nombre n de traits au mm de ce réseau ? Combien est-il possible de voir d'ordres ? Avec une raie bleue, on relève que pour $K = 2$, $\theta_2' = 32°33'$; quelle est sa longueur d'onde λ' ?

57. Le spectre des radiations visibles du mercure est limité par les raies violettes ($\lambda_v = 400$ nm) et rouge ($\lambda_r = 700$ nm). Déterminer les ordres observables, sous une incidence de 30°, pour ces deux raies et avec un réseau de pas $p = 2$ µm. Combien voit-on d'ordre dans chaque cas ? À partir de quel ordre (positif) se produit le recouvrement des spectres ?

58. Calcul de l'intensité des N ondes

Un réseau de n traits/mm est éclairé en incidence nulle (cas particulier $\theta_0 = 0$ par rapport à la question **25.**) avec une longueur d'onde λ par un faisceau couvrant N fentes. Les fentes de même largeur a sont régulièrement espacées d'une distance l appelée le pas du réseau.



On pose $u = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$, la variable intervenant dans l'amplitude $A_d(\theta) = A_0 \dfrac{\sin u}{u}$ diffractée par chaque fente.

a) Rappeler l'expression du déphasage φ entre les ondes issues de deux fentes successives qui interfèrent dans la direction θ, puis justifier et faire le calcul de l'amplitude complexe totale $\underline{A}(\theta)$ des N ondes issues du réseau qui vont interférer dans la direction de l'angle θ ; ne faire apparaître dans cette amplitude qu'une seule exponentielle complexe.

b) En déduire l'expression de l'intensité $I(\theta)$ obtenue par interférences des N ondes dans la direction θ compte tenu de la diffraction, en notant I_0 l'intensité correspondant à l'amplitude A_0.

c) La courbe qui donne l'intensité relative $I(\theta)/N^2 I_0$ en fonction de $\sin\theta$ est celle donnée à la question **27.**. Justifier à partir de l'expression de l'intensité calculée le rôle et l'importance de chacune des trois longueurs a, l et $L = Nl$; commentaire.

59. En quoi, pour « l'homme de la rue », le phénomène d'interférence ou de diffraction paraît-il paradoxal ? Pour quelles raisons les lois de l'optique géométrique sont-elles impuissantes à les expliquer ?

60. Citer des cas d'observation courante de diffraction de la lumière. Et pour d'autres types d'ondes ?

61. Quel est l'ordre de grandeur de la puissance et de la longueur d'onde de la diode laser utilisée dans un lecteur de CD ou dans une imprimante laser ?
Quel est l'avantage des diodes bleues utilisées pour les « blu-ray » sur les diodes rouges utilisées pour lire les informations stockées sur des DVD ?

62. Quelles sont les deux causes principales qui limitent le pouvoir de résolution d'un télescope ? Comment fait-on dans la pratique pour réduire leurs effets ?

63. On observe une étoile supposée ponctuelle à l'aide d'un télescope visant verticalement à l'équateur. Devant le télescope est disposé un système de fentes d'Young ainsi qu'un filtre ne laissant passer qu'une longueur d'onde. Pourquoi les franges défilent-elles ? Estimer la période de ce défilement.

64. Les franges obtenues par division du front d'onde sont-elles généralement localisées ? Que se passe-t-il si l'on augmente la taille de la source ? Quel est l'intérêt des dispositifs interférentiels à division d'amplitude ?

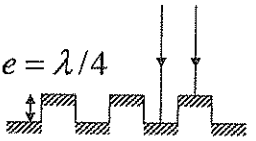
65. On dispose devant chacun des miroirs d'un interféromètre de Michelson un polariseur rectiligne de telle sorte que les deux ondes qui interfèrent aient des champs électriques faisant un angle α entre eux. Déterminer le facteur de visibilité du système de franges.

66. Quelle doit être l'erreur maximale sur l'épaisseur d'une lame pour qu'elle puisse être qualifiée de « lame à faces parallèles » dans les expériences d'optique ondulatoire ?

67. Pourquoi les bulles de savon sont-elles colorées ? Pourquoi certains verres de lunettes présentent-ils des reflets violacés ?

68. En radioastronomie une des longueurs d'onde utilisée est $\lambda = 21$ cm (correspondant à une raie hyperfine du spectre de l'hydrogène) ; pour des télescopes de diamètre identique, comparer la résolution en ondes radio et en ondes lumineuses ; quel est alors l'intérêt des observations en ondes radio ? Comment est-il possible d'améliorer cette résolution ?

69. Le dispositif ci-contre est un réseau par réflexion composé de deux rangées décalées de minuscules facettes de miroirs. Lorsqu'il est éclairé normalement par une raie de longueur d'onde λ et que la différence



des niveaux est $e = \lambda/4$, le maximum de lumière est-il renvoyé dans la direction prévue par l'optique géométrique ?

70. Pour simplifier la théorie, le réseau a été supposé illimité dans son plan ; commenter. En s'appuyant sur l'étude du réseau et celui de la diffraction, donner qualitativement la largeur dans le plan focal d'une lentille de projection des ordres diffractés par le réseau.

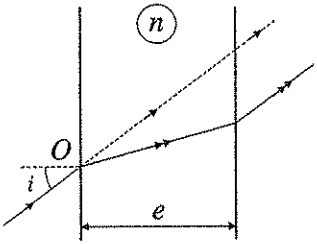
71. Que se passe-t-il si le pas a d'un réseau est tel que $a = \lambda$ où λ est la longueur d'onde de l'onde incidente sur le réseau ? En déduire la limite de résolution d'un microscope à champ lointain.
Et dans le cas où $a < \lambda$? Application.

72. Les phénomènes d'interférences et de diffraction sont-ils utiles ou gênants ?

Exercices

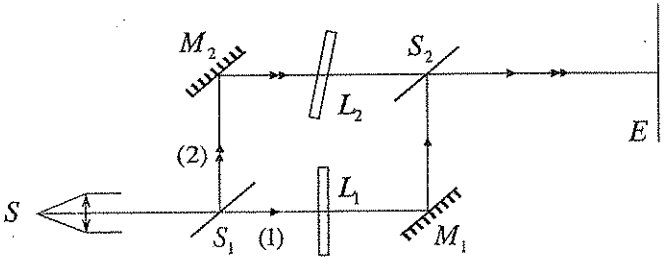
73. Influence de l'incidence sur une lame à faces parallèles (*)

On interpose sur le trajet d'un rayon lumineux une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n. L'inclinaison du rayon sur la lame est noté i (angle pas forcément petit). Calculer rigoureusement la variation $\Delta\delta$ de la différence de marche introduite par les réfractions dans la lame sur le trajet rectiligne dans l'air en fonction de n, i et e. Que retrouve-t-on pour $i = 0$? Donner, pour i petit, le premier terme non nul par rapport à $\Delta\delta(i = 0)$.



74. Interféromètre de Mach-Zendher

Dans le dispositif ci-dessous un faisceau de lumière émis par une source S quasi ponctuelle et monochromatique ($\lambda = 0{,}55$ µm) est rendu parallèle par une lentille d'entrée.



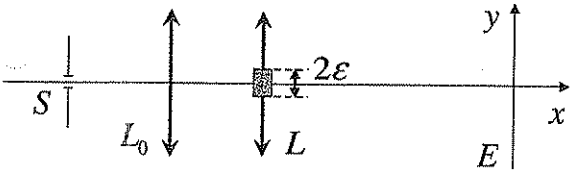
Il est ensuite divisé en deux faisceaux (1) et (2) de même intensité par la lame semi-réfléchissante S_1 ; après réflexion sur les miroirs M_1 et M_2 placés à 45° des axes, ils sont recombinés à la sortie de la lame semi-réfléchissante S_2.

On interpose sur le trajet (1) une lame à face parallèle L_1 d'épaisseur $e = 2$ mm, d'indice $n = 1{,}5$ et perpendiculaire à (1). Sur le trajet (2) une lame L_2 identique à L_1 est inclinée sur (2) d'un petit angle i réglable.

Comment varie l'éclairement sur l'écran E lorsque, à partir de $i = 0$, on augmente progressivement l'angle i (se servir du résultat de l'exercice précédent) ? Pour quelles valeurs de i cet éclairement est-il nul ?

75. Bilentilles à obturation

Une fente source S fine, monochromatique ($\lambda = 589{,}3$ nm) est placée dans le plan focal d'une lentille convergente L_0. Un peu plus loin sont placées les deux moitiés d'une lentille convergente L de distance focale $f = 25$ cm. Cette lentille a été sciée en deux suivant un diamètre ; les deux moitiés sont écartées symétriquement d'une distance $2\varepsilon = 2$ mm. L'intervalle ainsi créé entre les demi-lentilles est obturé par un cache opaque (parallèle à la fente S). On observe dans un plan de front yEz situé à la distance $d = 50$ cm de L.



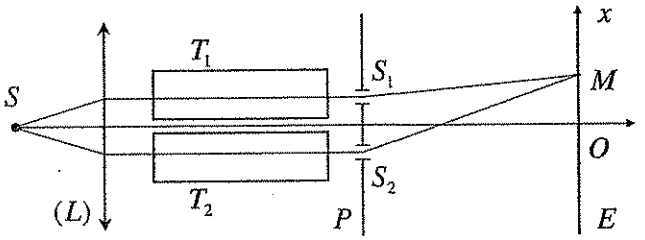
a) Réaliser une figure claire, l'expliquer et se ramener à un système de trous d'Young à localiser. Décrire le système de franges et déterminer la largeur du champ d'interférences sur l'axe Ey. Quelle est l'intensité lumineuse en un point M du champ ? Combien y a-t-il de franges brillantes visibles ?

b) La source émet en réalité un doublet : $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm. Au bout de combien de franges les deux systèmes peuvent-ils se brouiller ? Conclusion.

c) On place entre les deux lentilles, sur la partie droite de l'axe Sx dans le sens de la lumière et perpendiculairement à cet axe, une lame à faces parallèles d'un verre d'indice $n = 1{,}52$. Déterminer son épaisseur e permettant de « visualiser » au centre de l'écran la première anticoïncidence de la question b). Qu'observe-t-on alors sur l'écran ?

76. Mesure de l'indice de l'air par méthode interférentielle

Le dispositif de Rayleigh est constitué d'une fente source S disposée sur l'axe optique dans le plan focal objet d'une lentille convergente (L). La source quasi ponctuelle émet une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 577$ nm. P est un plan percé de deux fentes fines S_1 et S_2. E est l'écran d'observation et T_1 et T_2 deux tubes remplis d'air normal et de même longueur $l = 20{,}0$ cm interposés sur chacun des trajets.



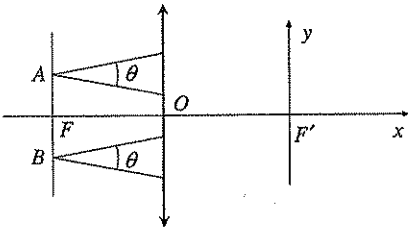
a) Sans toucher au tube T_2 dont l'air a pour indice $n_2 = n$, on pompe un petit peu d'air dans le tube T_1, l'indice de l'air qu'il renferme diminuant alors à la valeur $n_1 = n - \Delta n$. Montrer que le système de franges sur l'écran défile ; dans quel sens ?

b) Quelle différence d'indice minimale Δn peut-on détecter sachant que l'on apprécie sans difficulté le déplacement d'une seule frange sur l'écran ?

c) Le tube T_2 restant rempli d'air, T_1 est progressivement vidé jusqu'à ce que la pression y soit quasi nulle. Sachant que pendant cette opération 101 franges ont défilé en O (situé sur le plan de symétrie du montage initial) et qu'à la fin on observe en O une frange sombre, donner la valeur numérique de l'indice n de l'air normal.

77. Vélocimétrie laser

Un interféromètre, représenté sur la figure ci-contre, est composé de deux sources monochromatiques A et B ($\lambda = 630$ nm), cohérentes entre elles et placées dans le plan focal objet d'une lentille L de foyers F et F'. A et B sont symétriques par rapport à F et on prend $AB = a = 1$ cm et $f' = \overline{OF'} = 50$ cm. Chaque source émet un faisceau d'ouverture angulaire $\theta = 1°$ dans une direction moyenne parallèle à l'axe $FOF'x$ du système.



a) Compléter la figure et faire apparaître la zone d'interférences. Quelle est l'angle α entre la direction des faisceaux émergeant de la lentille et celle de l'axe optique ? Estimer les dimensions suivant les axes x et y de la zone d'interférences et indiquer l'orientation des franges.

b) Sachant que A et B sont en phase, montrer que le déphasage des deux ondes est nul en F'. Déterminer le déphasage $\varphi(M)$ des deux ondes en un point M de coordonnées x et y du champ d'interférence. En déduire l'expression de l'intensité $I(x, y)$ en précisant notamment la valeur de l'interfrange i.

c) Un fluide est en écoulement à la vitesse v suivant l'axe $F'y$; une particule diffusante y est mise en vue de traverser la zone d'interférences. Sachant qu'elle réfléchit une portion $I' = KI$ de l'intensité, à quelle condition sur sa taille le signal reçu par un détecteur est-il une réplique temporelle des franges spatiales ? Le signal observé a pour fréquence $f = 950$ Hz ; en déduire la vitesse v recherchée.

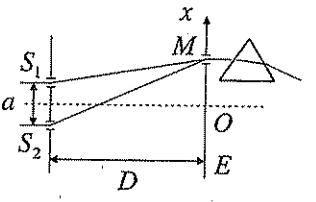
d) Pour augmenter l'éclairement, on répartit de manière aléatoire dans le fluide un nombre important N de particules diffusantes. Que dire alors du signal détecté ?

78. Interférences en lumière blanche ; cannelures

On réalise en lumière blanche une expérience de fentes d'Young classique.

a) Qu'observe-t-on sur l'écran E ?

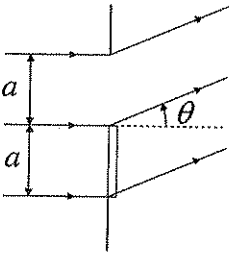
On perce au point M dans l'écran à $x = 5$ mm du plan médiateur de S_1S_2 une petite fente (parallèle aux fentes d'Young) derrière laquelle on place un prisme disperseur.



b) Combien peut-on observer de raies sombres, appelées cannelures, dans le spectre formé derrière le prisme sachant que $a = 1{,}5$ mm et $D = 1{,}5$ m ?

79. Interférences entre deux fentes « accolées » (*)

Deux fentes fines, chacune de largeur a, sont accolées et éclairées sous incidence normale par un faisceau parallèle de largeur spectrale négligeable, de longueur d'onde λ dans l'air. Sur celle du bas (sur le schéma) est placée une lame transparente très mince dont le seul effet est de créer un retard de phase φ supplémentaire.



On pose $u = \pi a \sin\theta / \lambda$ et on rappelle que l'amplitude diffractée par une fente seule (celle du haut sur le schéma) est :

$$A_d(u) = A_0 \frac{\sin u}{u}$$

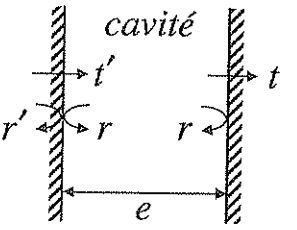
l'origine des phase étant prise sur le rayon issu du milieu de la fente.

a) Avec peu de calculs, établir l'expression de l'intensité totale $I(u)$ diffractée en fonction de I_0, u et φ suite aux interférences entre les ondes diffractées par les deux fentes. Vérifier le résultat pour $\varphi = 0$.

b) La lame est telle que $\varphi = \pi$; tracer la courbe $I_{\varphi=\pi}(u)$ et la comparer à $I_{\varphi=0}(u)$.

80. Les modes fins d'une cavité optique

Un interféromètre de Fabry-Perot est constitué de deux miroirs plans, identiques, parallèles, distants de e ; cette cavité est rempli d'air (d'indice 1).



Dans la mesure où il n'intervient que le seul coefficient de réflexion en énergie R, on peut simplifier le problème et considérer que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique sont réels : r et t sont ceux de l'interface air/miroir, et r' et t' ceux de l'interface miroir/air ; on donne les relations :

$$\text{(avec } R' = R \text{ et } T' = T\text{)} : \quad R = r^2 \quad \text{et} \quad T = t't = 1 - R$$

a) Monter qu'au bout de deux réflexions internes l'amplitude est multipliée par R et qu'au bout de deux transmissions « inverses » elle est multipliée par T.
En déduire les amplitudes complexes des rayons successifs transmis à travers un tel dispositif en notant A_0 l'amplitude de l'onde incidente (arrivant de gauche sous incidence nulle) et φ le déphasage, à déterminer, entre deux ondes émergeantes successives. Que peut-on dire des possibilités d'interférences ?

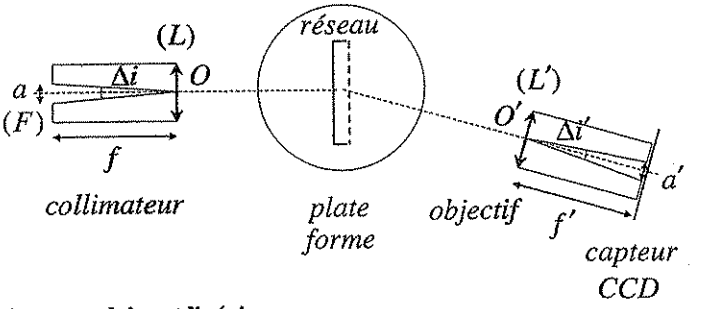
b) Montrer que l'expression de l'intensité transmise $I(\varphi)$ (fonction d'Airy) est $I(\varphi)=\dfrac{I_0}{1+m\sin^2(\varphi/2)}$ où I_0 est l'intensité de l'onde incidente ; exprimer le coefficient m en fonction de R.

c) Les miroirs sont d'excellents réflecteurs, faire l'application numérique de m dans le cas où $R=0{,}90$, puis $R=0{,}99$; quel est l'intérêt de ce dispositif ? Calculer dans ce cas les intensités maximale I_{max} et minimale I_{min}, puis tracer et commenter la courbe $I(\varphi)/I_0$ en fonction de φ.

d) Quel est l'intérêt des interférences à ondes multiples ? Quelle quantification retrouve-t-on ?

81. Dispersion et résolution d'un spectrographe à réseau

Un goniomètre comporte un réseau par transmission de pas $p=2$ µm. Le faisceau sortant du collimateur éclaire le réseau sous une incidence moyenne $i=0$. Le spectre obtenu est, au niveau de la lunette, projeté à l'aide de l'objectif sur un capteur CCD situé dans le plan focal image de la lentille (L') de distance focale $f'=100$ cm.



1. Dispersions angulaire et linéaire

On note θ_k l'angle de diffraction dans l'ordre k pour la longueur d'onde λ.

a) Pour deux radiations (de longueurs d'onde λ et $\lambda+d\lambda$) incidentes sur le réseau, exprimer à partir de la formule du réseau la dispersion angulaire $\dfrac{d\theta_k}{d\lambda}$ en fonction de k, p et θ_k.

b) En déduire la dispersion linéaire $\dfrac{dX_k}{d\lambda}$ sur le capteur CCD perpendiculairement à la direction moyenne des rayons diffractés dans l'ordre k ; commenter.

c) Calculer la valeur de $\frac{dX_k}{d\lambda}$, exprimée en mm.nm^{-1}, dans l'ordre 1, pour la longueur d'onde moyenne $\lambda = 578$ nm.

2. Résolution des doublets jaunes dans les spectres d'ordre 1

On admet que la limite de résolution du spectrographe est imposée par la largeur a de la fente d'entrée (F), uniformément éclairée par une lampe spectrale. Son image géométrique, sur le capteur CCD, a une largeur a'. Les ouvertures Δi et $\Delta i'$ mentionnées sur la figure sont les variations des angles d'incidence et d'émergence, d'un bord à l'autre de la fente et de son image.

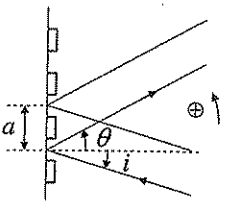
a) Déterminer a' en fonction de a, f (focale du collimateur) et f'.

AN : $a = 70$ µm ; $f = 20$ cm et $f' = 100$ cm

b) Déterminer, dans les spectres d'ordre 1, les distances ΔX_{Na} et ΔX_{Hg}, sur le capteur CCD, entre chacune des images de la fente source donnée par le doublet du sodium ($\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm) et le doublet du mercure ($\lambda_1' = 577{,}0$ nm et $\lambda_2' = 579{,}1$ nm). Le spectroscope à réseau permet-il de résoudre (c'est-à-dire séparer visuellement) ces doublets ?

82. Le CD comme exemple de réseau par réflexion

La structure mécanique de la surface d'un disque compact permet de l'assimiler à un réseau par réflexion (avec des facettes se comportant comme des miroirs) et explique son aptitude à décomposer la lumière blanche. Suivant un rayon du disque, le pas du réseau est a, et l'on note i l'angle d'incidence et θ l'angle de diffraction pour l'ordre considéré (le sens positif des angles est indiqué sur la figure).



a) Montrer que la relation fondamentale des réseaux par réflexion est, en notant k l'ordre d'interférences lié à la diffraction :

$$\sin\theta + \sin i = k\lambda / a$$

et la commenter.

AN : $a = 1{,}6$ µm, $i = -10°$; calculer, pour l'ordre $k = 1$ les deux valeurs extrêmes θ_{min} et θ_{max} correspondants aux longueurs d'onde extrêmes du spectre visible.

b) Le faisceau incident de lumière blanche, parallèle et suffisamment large pour éclairer complètement un segment radial du disque, est toujours orienté tel que $i = -10°$. La largeur de la partie gravée d'un CD est $l = 33$ mm. À quelle distance minimale D_m faut-il approcher le disque de son œil pour commencer à voir l'ensemble du spectre visible d'ordre 1 ? (il est conseillé de faire un dessin clair).

Travaux pratiques

83. À quelles couleurs correspondent les longueurs d'onde suivantes : 0,4 µm ; 0,55 µm ; 0,7 µm ? Quelle est l'origine des abréviations *Na* et *Hg* marquées sur les lampes spectrales ? Rappeler en nm les longueurs d'onde des deux raies jaune du sodium ; que vaut l'écart spectral du doublet jaune du mercure ? Quelle est la longueur d'onde de la raie rouge du laser *He-Ne* ?

84. Avec un système de type fentes d'Young justifier les ordres de grandeur utilisés pour la largeur de chacune des fentes ainsi que leur distance. Combien typiquement cela permet-il d'observer de franges d'interférences ?
Indiquer avec précision comment est modifiée la figure produite lorsque :
– on élargit de la même quantité les deux fentes en conservant leur distance ;
– on écarte les deux fentes en conservant leur largeur ;
– on translate le système parallèlement à son plan (sans sortir du faisceau incident) ;
– on fait subir au système une rotation dans son plan (autour de l'axe optique) ;
– le système, au lieu d'être éclairé normalement, est éclairé par un faisceau oblique ?

85. Quel est le rôle de la lame séparatrice dans un interféromètre de Michelson ? Montrer par un schéma que la moitié du flux incident est renvoyée à peu près en direction de la source. Quel est le rôle de la lame compensatrice ? Ne suffirait-il pas de reculer le miroir M_2 pour compenser la différence de chemin optique ?

86. En quoi consiste le réglage « d'optique géométrique » d'un interféromètre de Michelson ? Quelles sont les deux raisons pour lesquelles l'angle α entre les deux miroirs doit être très petit dès le départ ? Pourquoi voit-on des images parasites ?

87. Quels sont le nom et la forme des franges obtenues avec un interféromètre de Michelson réglé en « coin d'air » ? Comment doit-on éclairer les miroirs pour les obtenir ? Où sont-elles localisées ? Quel effort faut-il faire pour les observer directement à l'œil ? Et en projection sur un écran ? La taille de la source est-elle un problème ? Que vaut l'interfrange ? En déduire une valeur maximale de l'angle α.
Malgré toutes ces précautions elles n'apparaissent pas « du premier coup » en général ; pour quelle raison ? Que faut-il régler alors pour les voir ? Comment, lorsqu'on travaille avec une lampe à vapeur de mercure, repère-t-on la frange centrale ? Serait-il facile de la trouver avec une lampe à vapeur de sodium ou avec une lampe blanche ? Justifier la réponse dans chacun de deux cas.

88. Quelle est la forme et le nom des franges obtenues avec un interféromètre de Michelson réglé en « lame d'air » ? Comment doit-on éclairer les miroirs pour les obtenir ? Où sont-elles localisées ? Faut-il faire un effort pour les observer directement à l'œil ? Et en projection sur un écran ? La taille de la source est-elle un problème ? Quels sont les paramètres qui définissent les caractéristiques des franges ? Comment procède-t-on pour les faire apparaître ? Les voit-on « du premier coup » en général ? Quelle « retouche » faut-il apporter au réglage lorsque les franges apparaissent déformées ? Quelle « retouche » faut-il apporter au réglage

lorsque les franges défilent lors d'un petit mouvement de tête horizontal ou vertical ? Que se passe-t-il lorsqu'on déplace le miroir M_1 ?

Évaluer l'ordre de grandeur du nombre d'anneaux qui défilent lorsqu'on déplace le miroir mobile d'une seule de la plus petite graduation permise par le palmer.

89. Lors du déplacement du chariot d'un Michelson éclairé en lame d'air avec une lampe à vapeur de sodium, on observe deux annulations successives du contraste (dites « anticoïncidences ») pour les valeurs suivantes repérant la position du miroir M_1 grâce au palmer : $e_1 = 13{,}24$ mm et $e_2 = 13{,}53$ mm. En déduire la valeur expérimentale $\Delta\lambda$ de l'écart en longueur d'onde du doublet jaune.

90. On utilise un laser *He-Ne* avec un Michelson en lame d'air ; que voit-on sur l'écran lorsque l'on déplace le miroir M_1 ? Proposer une application à la mesure de la longueur d'onde du laser.

91. En spectrométrie, le réseau est-il éclairé sous incidence nulle ? Pourquoi utilise-t-on le minimum de déviation ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

■ Modèle scalaire des ondes lumineuses

1. L'optique physique s'appuie sur la nature ondulatoire de la lumière qui n'est représentée correctement que par le champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$. Il suffit néanmoins de considérer une seule des composantes cartésiennes du champ électrique (comme si le champ était polarisée rectilignement). Cette fonction scalaire qui donne l'amplitude de la vibration est appelée « la grandeur lumineuse ».

2. L'onde en A a pour phase est $\Phi_A = \omega t - kz_A$; au même instant, en B, sa phase est $\Phi_B = \omega t - kz_B = \Phi_A - k(z_B - z_A)$. Le retard de phase est $\varphi = k(z_B - z_A)$.

Avec $k = \dfrac{\omega}{v_\varphi} = \dfrac{\omega}{c/n} = k_0 n = \dfrac{2\pi}{\lambda_0} n$, il vient $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0} n(z_B - z_A)$ écrit sous la forme :

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi(AB)}{\lambda_0}} \quad \text{où} \quad \boxed{(AB) = n(z_B - z_A) = nAB}$$

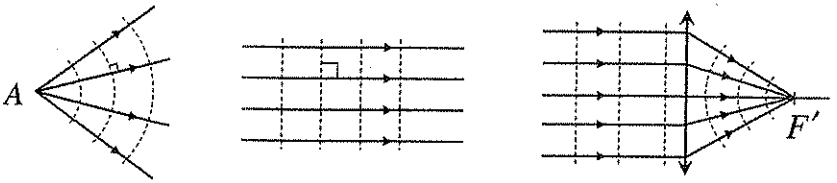
est le chemin optique, égal dans un milieu homogène, à n fois le chemin géométrique AB parcouru par l'onde, φ est le retard de phase et λ_0 la longueur d'onde dans le vide.

3. Soit un faisceau de rayons lumineux (les lignes de champ de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting) issus du même point A. On appelle surface d'onde, le lieu des points M situés à un même chemin optique de A : $\{ M \mid (AM) = cste \}$.

On en déduit la propriété importante suivante :
« Entre deux surfaces d'onde, le chemin optique est constant, c'est-à-dire indépendant du chemin géométrique suivi ».

Théorème de Malus : Les rayons lumineux issus d'un même point (source ponctuelle) sont normaux aux surfaces d'onde et ce après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.

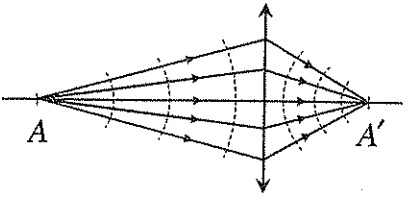
Sur les schémas ci-dessous, les rayons (optique géométrique) sont tracés en trait plein et les surfaces d'onde (optique ondulatoire) en pointillé. À distance finie d'une source ponctuelle A, on observe des ondes sphériques divergentes (dessin de gauche) et à grande distance (l'objet est à l'infini), on parle d'ondes planes (dessin du centre).



Une lentille convergente (dessin de droite) fait converger un faisceau de rayons parallèles à l'axe vers le foyer image F' ; il est alors équivalent de raisonner en terme d'ondes et de dire qu'une lentille convergente transforme une onde plane en une onde sphérique convergente.

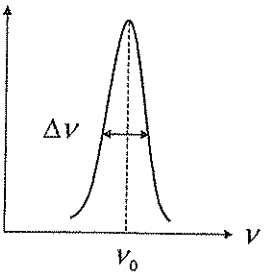
4. Un système optique est stigmatique pour le couple de point A et A' si tout rayon passant par A avant traversée du système repasse par A' après cette traversée. Cela signifie que le chemin optique entre les points conjugués est le même pour tous les rayons :

$$\boxed{(AA') = cste}$$



On peut penser à une lentille convergente qui transforme une onde sphérique divergente (issue du point objet A) en une onde sphérique convergente (de centre le point image A').
Le stigmatisme rigoureux est une propriété très rare ; rappelons que dans la pratique, le stigmatisme est très bien approché en se plaçant dans les conditions de Gauss.

5. La lumière est émise lors d'une transition électronique dans un atome. Le passage d'un électron d'un état stationnaire d'énergie E_2 à un état stationnaire d'énergie E_1 moindre (les niveaux d'énergie sont quantifiés) s'effectue avec l'émission d'un photon d'énergie $h\nu = E_2 - E_1$. La durée d'émission τ_0 finie, de l'ordre de 10^{-8} s à 10^{-9} s, fait que le train d'onde émis a un début et une fin, et la longueur spatiale du train d'onde est appelée longueur de cohérence, soit $L_c = c\tau_0$ de l'ordre de 30 cm à 3 m.



Le graphe ci-contre représente l'intensité spectrale en fonction de la fréquence ν. Une raie n'est jamais parfaitement monochromatique car un atome qui émet un train d'onde pendant un temps τ_0 au voisinage de la fréquence centrale ν_0 donne lieu à une raie de largeur à mi-hauteur $\Delta\nu \approx 1/\tau_0$: c'est la largeur spectrale de la raie (la durée d'émission conditionne la largeur naturelle de la raie). La partie « Les ordres de grandeur utiles » donne quelques valeurs de largeurs spectrales, temps et longueurs de

cohérence, en utilisant la relation $\tau_0 \Delta\nu \approx 1$.

En réalité, la largeur Doppler aux températures usuelles (voir la question **49.**) est bien plus importante que la largeur naturelle considérée ici, ce qui a pour conséquence de limiter en TP la longueur de cohérence d'une raie à quelques mm.

6. Les récepteurs (œil, plaque photo, photomultiplicateur, photodiode, capteur CCD,...) ne sont pas sensibles à un champ, mais à une énergie, c'est-à-dire au carré du champ. De plus l'œil a un temps de réponse de l'ordre de 0,1 s (les meilleurs appareils de 10^{-9} s), or les fréquences lumineuses vont de 10^{14} à 10^{15} Hz ; il est donc sensible à un éclairement moyen.

De la même manière qu'en électromagnétisme, un champ $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ conduit à un éclairement moyen $I = <\vec{R}> = \dfrac{<dP>}{dS} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$ (puissance par unité de surface), en optique physique, l'amplitude complexe $\underline{A}$ conduit à une intensité :

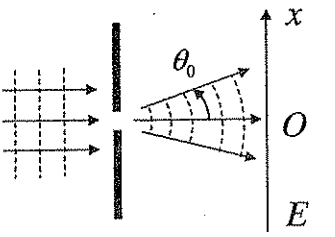
$$\boxed{I = K\underline{A}.\underline{A}^*} \quad \text{où } K \text{ est une constante}$$

Rappels de quelques résultats sur la diffraction

7. Pour être dans le cadre de l'optique géométrique, il faut que les dimensions des systèmes étudiés soient très grandes devant la longueur d'onde de la lumière ($\lambda \approx 0{,}5$ µm) soit typiquement $d \geq 1\,000\lambda \approx 0{,}5$ mm ; c'est le cas des systèmes optiques usuels (lentille, diaphragme, prisme, miroirs,...) qui mesurent toujours plusieurs centimètres.

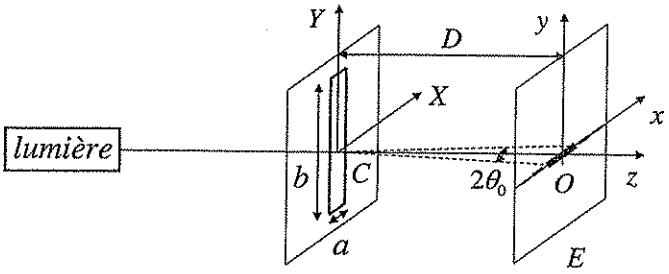
Il y a diffraction chaque fois que le trajet des rayons s'écarte de celui prévu par l'optique géométrique. Lorsqu'il s'agit de la répartition de la lumière observée derrière une ouverture dans un cache, alors on peut associer les phénomènes de diffraction à des effets de bords.

Une ouverture dans un écran opaque (en gras sur la figure) est éclairée en incidence nulle par des rayons parallèles. L'onde plane incidente se transforme à travers la petite ouverture en une onde quasi sphérique dans un cône restreint ; l'optique géométrique n'est plus suivie et les rayons émergents ne sont plus parallèles. Sur l'écran E placé derrière, la tache lumineuse s'étend sur une distance plus grande que celle prévue par l'optique géométrique.



8. L'expérience décrite se limite aux rayons diffractés au voisinage de l'axe Oz du pinceau.

La hauteur de la fente $b \approx 2$ cm est trop grande vis-à-vis de la longueur d'onde (et même de la largeur du pinceau) : il n'y a pas de diffraction dans le plan CzY. En revanche, la largeur $a \approx 0{,}1$ mm est étroite (bien que grande aussi vis-à-vis de $\lambda \approx 0{,}5$ µm), et la lumière se répartit dans le plan CzX.



Le schéma (ainsi que celui de la question précédente, en vue de dessus) indique que la lumière s'ouvre essentiellement dans un cône aplati dont le demi-angle au sommet θ_0 est donné par la formule :

$$\boxed{\sin\theta_0 \approx \theta_0 = \frac{\lambda}{a}}$$

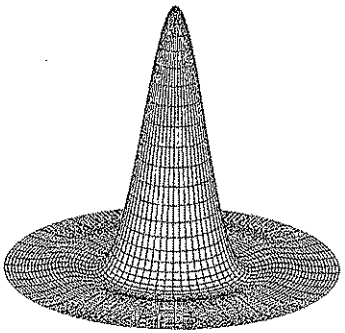
On observe sur l'écran E dans la direction Ox, c'est-à-dire perpendiculairement à la direction CY de la fente, une tache centrale obtenue autour de O, c'est-à-dire dans la direction de l'optique géométrique telle que $\theta = 0$ (l'angle θ est compté par rapport à l'axe CO).
Cette formule montre que la diffraction est d'autant plus importante (θ_0 élevé) que la fente est fine (largeur a petite, tout en restant très supérieure à λ).

Si l'écran est placé à une distance $D = 1$ m du plan de la fente, alors la largeur de la tache sur l'écran est, sachant que $\sin\theta_0 \approx \tan\theta_0 = x_0 / D$:

$$2x_0 \approx 2D\theta_0 = 2D\frac{\lambda}{a} = 1 \text{ cm} \quad \text{soit} \quad 100 \text{ fois supérieure à la largeur de la fente !}$$

À côté de cette tache centrale existent des taches latérales, deux fois moins larges et très peu lumineuses comme l'indique le graphe d'intensité de la question **38.**.

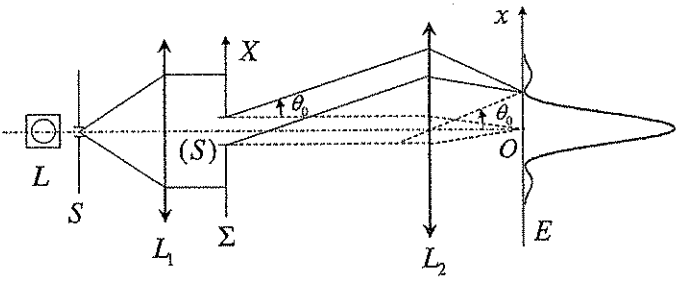
9. Pour une ouverture circulaire, le phénomène est bien visible pour un trou de diamètre $d \leq 0{,}1$ mm (avec toujours $d \gg \lambda$). Vu la symétrie de révolution autour de Cz, on observe au centre O de l'écran (la direction de l'optique géométrique) une tache brillante appelée tache d'Airy (entourée d'anneaux alternativement sombres et clairs mais très peu lumineux).
L'allure de la répartition de l'intensité lumineuse $I(\theta)/I_M$ ressemble à celle de la question **8.** ; la direction θ_0 correspondant au bord de la tache centrale est donnée par :



$$\boxed{\theta_0 \approx 1{,}22\frac{\lambda}{d}}$$

où d est le diamètre de l'ouverture.
Ce type d'ouverture correspond à des cas pratiques importants : diaphragmes, lentilles, télescope,...
La représentation spatiale ci-dessus de l'intensité diffractée par un trou montre que le phénomène est très peu lumineux au-delà de θ_0.

10. Sur la figure ci-dessous, L est la lampe spectrale utilisée en TP, S la fente source du collimateur dans le plan focal objet de la lentille L_1 permettant d'obtenir un faisceau de lumière parallèle. (S) désigne l'ouverture dans le plan diffractant Σ et L_2 l'objectif de la lunette permettent une observation (dite à l'infini) dans son plan focal image où est placé l'écran E (à noter que O est conjugué de S par rapport à $L_1 \cup L_2$).

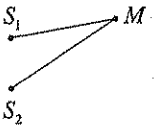


L'angle θ_0 qui donne la première annulation de la figure de diffraction est le demi-angle au sommet du cône de lumière.

Conditions d'interférences

11. Deux ondes ne peuvent interférer que si elles ont la même fréquence (voir la question **42.**) et si leurs polarisations ne sont pas orthogonales (voir la question **65.**). On suppose donc, conformément à l'approximation scalaire, que leurs champs électriques sont colinéaires.

12. Pour S_1 et S_2 ponctuelles fixées, la différence de marche $\delta = (S_2M) - (S_1M)$ dépend du point M d'observation ; il en est donc de même de la différence de phase φ (ou déphasage) entre les deux ondes arrivant au point M.



Par ailleurs l'émission de lumière relève de la physique atomique ; les atomes en S_1 et S_2 émettent des trains d'onde d'une durée de l'ordre de 10^{-8} s, ce qui est très court vis-à-vis des 0,1 s d'intégration de l'œil, mais comportant tout de même 10^7 périodes de 10^{-15} s. Dans une source, chaque atome se comporte de manière indépendante quant à sa désexcitation. Les différentes émissions s'enchaînent avec des « changements de phase » aléatoires. Et donc la différence de phase entre les deux amplitudes issues des deux sources est également une fonction du temps.

Les amplitudes complexes au point M des vibrations lumineuses issues de S_1 et S_2 sont, en choisissant l'origine des phases sur celle due à S_1 :

$$\underline{A}_1(M) = a_1 \quad \text{et} \quad \underline{A}_2(M) = a_2 e^{-i\varphi} \quad \text{en notant } \varphi = \varphi(M,t)$$

Rq : L'intensité de chaque onde seule est $I_1 = ka_1^2$ et $I_2 = k(a_2 e^{-i\varphi}).(a_2 e^{+i\varphi}) = ka_2^2$; le calcul de I_2 est instructif car il montre que l'information sur la phase est perdue lorsqu'on se limite à une seule onde.

L'amplitude totale en M est : $\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) + \underline{A}_2(M) = a_1 + a_2 e^{-i\varphi}$

Elle correspond à une intensité : $I(M) = k\underline{A}.\underline{A}^* = k(a_1 + a_2 e^{-i\varphi}).(a_1 + a_2 e^{+i\varphi})$

Après développement du second membre $ka_1^2 + ka_2^2 + 2ka_1a_2\cos\varphi$, et en n'oubliant pas que le passage de $\underline{A}$ à I fait prendre la moyenne temporelle :

$$\boxed{I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} < \cos\varphi(M,t) >}$$

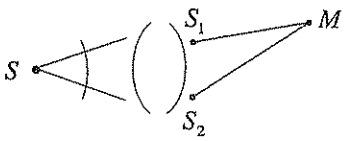
En superposant une onde d'intensité I_1 et une onde d'intensité I_2, il peut se faire que l'on n'ait pas une onde d'intensité $I_1 + I_2$, mais I qui peut varier entre :

$$I = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} \pm \sqrt{I_2}\right)^2 = k(a_1 \pm a_2)^2$$

ce qui se comprend puisque les amplitudes peuvent s'ajouter (lorsque les ondes sont en phase en M) ou se retrancher (lorsqu'elles sont en opposition de phase en M).

13. Si S_1 et S_2 sont deux sources distinctes, elles vont émettre des radiations avec entre elles une différence de phase aléatoire dans le temps : $\cos\varphi$ varie de -1 à $+1$ et ceci jusqu'à 10^7 fois en 0,1 s et donc en général $< \cos\varphi > = 0$. Dans ce cas les deux sources sont incohérentes entre elles et il n'y a pas d'interférence : $I = I_1 + I_2$ (situation de la vie courante).

Pour interférer, les ondes issues de S_1 et S_2 doivent provenir de la même source S (désexcitation du même atome). Alors les variations aléatoires de phase au cours du temps à l'émission en S affectent S_1 et S_2 de la même manière et la différence de phase φ entre les deux ondes issues des deux voies est alors constante dans le temps. S_1 et S_2 doivent être les images d'une source unique S (souvent au moyen d'un dispositif d'optique géométrique), les ondes parcourent simplement des chemins différents, mais sont émises par le même point S. On dit alors que les deux sources secondaires S_1 et S_2 sont cohérentes entre elles.



Conclusion : Pour des sources non cohérentes, il suffit d'ajouter les intensités.
Pour des sources cohérentes, il faut ajouter les amplitudes complexes.

La formule des interférences

14. Avec deux sources donnant en M deux ondes cohérentes entre elles de même amplitude, $\underline{A}_1(M) = a$ et $\underline{A}_2(M) = a\,e^{-i\varphi(M)}$, et en choisissant l'origine des phases sur celle issue de S_1, l'amplitude totale en M est :

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) + \underline{A}_2(M) = a(1 + e^{-i\varphi})$$

Il lui correspond une intensité : $I(M) = ka^2(1 + e^{-i\varphi}).(1 + e^{+i\varphi})$

En notant $I_0 = ka^2$, l'intensité de chacune des ondes, il vient la formule des interférences (dite formule de Fresnel) :

$$\boxed{I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\varphi(M)\right)}$$

Avec $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$ la différence de marche entre les deux rayons issus de S et arrivant en M, la différence de phase est donnée à la question **2.**, en notant λ_0 la longueur d'onde dans le vide :

$$\boxed{\varphi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}}$$

On définit l'ordre d'interférences au point M par : $\boxed{p(M) = \dfrac{\varphi(M)}{2\pi} = \dfrac{\delta(M)}{\lambda_0}}$

montrant que le déphasage est à 2π ce que la différence de marche est à λ_0.

Ces grandeurs dépendent du milieu par l'indice n puisque $(AB) = n\,AB$.

Aux points où la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde, $\delta(M) = p(M)\lambda_0$, les deux champs vibrent en phase, l'amplitude est double et l'intensité quadruple, $I(M) = 4I_0$, on a « lumière + lumière = 4× lumière » et en M on observe une frange brillante : les interférences sont dites constructives.

Aux points où la différence de marche est un multiple demi-entier de la longueur d'onde, $\delta(M) = \left(p(M) + 1/2\right)\lambda_0$, les champs vibrent en opposition de phase, l'amplitude et l'intensité sont nulles, $I(M) = 0$, on a « lumière + lumière = obscurité » et en M on observe une frange sombre : les interférences sont dites destructives.

Conclusion : Aux points M correspondant à un ordre d'interférence p entier, un maximum d'intensité est observé ; de même pour p demi-entier avec un minimum de I. L'ordre d'interférence p numérote les franges d'interférence dans le champ d'observation.

15. D'après ce qui précède, il y a interférence entre deux ondes lorsque l'intensité ne correspond pas à la somme des intensités des deux ondes (qui constitue néanmoins l'intensité moyenne sur l'écran).

La phase n'est pas une grandeur « visible » pour une onde seule ; elle disparaît dans le passage de l'amplitude à l'intensité puisque $e^{-i\varphi}.e^{+i\varphi} = 1$. En revanche, par superposition de deux ondes cohérentes, le déphasage $\varphi(M)$ vient affecter

l'amplitude par le terme $\cos\varphi(M)$ dans la formule des interférences ; l'information sur la phase est cette fois conservée (au signe près et modulo 2π) donc peut « s'observer » par le biais de l'intensité.

Rq : C'est le principe de l'holographie où la phase traduit la profondeur ou dimension axiale de l'objet, ce qui, rajouté aux deux dimensions transversales habituelles en photographie, permet la restitution de l'objet en 3D.

Reprenons le calcul de l'amplitude totale de la question **14.** :

$$\underline{A}(M)=\underline{A}_1(M)+\underline{A}_2(M)=a(1+\mathrm{e}^{-i\varphi})=a\,\mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{+i\frac{\varphi}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)=2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}}$$

La phase de l'onde résultante en M est $+\varphi/2$; et donc tout se passe du point de vue de la phase comme si l'onde provenait du centre C de S_1S_2.

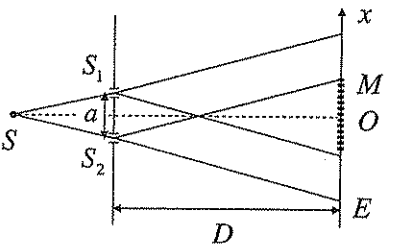
L'intensité s'écrit alors : $I(M)=4I_0\cos^2\dfrac{\varphi(M)}{2}=2I_0\left(1+\cos\varphi(M)\right)$.

Des trous d'Young aux fentes d'Young

16. Vers 1807 Thomas Young perce un cache opaque de deux trous S_1 et S_2 ; en l'éclairant par une source S, il constate que la répartition de la lumière derrière le cache présente des franges et n'est celle prévue par l'optique géométrique.

S est sur la médiatrice de S_1S_2 ; les trous étant petits, il y a diffraction et chaque trou envoie de la lumière dans un cône.

Les sources S_1 et S_2, obtenues par division du front d'onde, sont cohérentes. Dans la zone de recouvrement des deux faisceaux, on observe des interférences « non localisées » ; la position de l'écran E à la distance D n'est donc pas imposée.



Dans le dispositif, on réalise $SS_1=SS_2$ afin qu'il n'y ait pas de déphasage entre les ondes émises par S_1 et S_2, et donc $\delta(M)=(SS_2M)-(SS_1M)=n(S_2M-S_1M)$ où $n\approx 1$ est l'indice de l'air.

Avec l'origine des coordonnées au centre C de S_1S_2 et l'axe z suivant SO, on a :

$$S_1\begin{vmatrix}a/2\\0\\0\end{vmatrix},\ S_2\begin{vmatrix}-a/2\\0\\0\end{vmatrix}\ \text{et}\ M\begin{vmatrix}x\\y\\D\end{vmatrix}$$

$$S_1M=\left((x-a/2)^2+y^2+D^2\right)^{1/2}=D\left(1+\frac{(x-a/2)^2+y^2}{D^2}\right)^{1/2}\ \text{et comme}\ OM\ll D,$$

$$S_1M\approx D+\frac{(x-a/2)^2+y^2}{2D},\ \text{et de même}\ S_2M\approx D+\frac{(x+a/2)^2+y^2}{2D}$$

$$\boxed{\delta(M) = S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}}$$

À cet ordre de calcul, δ ne dépend pas de y ; les franges, lieu d'égale intensité, sont données par $\delta(M) = cste$; il s'agit donc ici de franges rectilignes ($x = cste$ sur l'écran E) perpendiculaires à l'axe S_1S_2 des trous (en réalité il s'agit des segments tangents aux sommets vraies franges qui sont des hyperboles $S_2M - S_1M = cste$).

17. Les franges brillantes où l'intensité est maximale ($I_{max} = 4I_0$) sont données par :

$\delta = \frac{ax}{D} = p\lambda$ (avec $n = 1$, on a $\lambda_0 = \lambda$) correspondant à $x_p = p\frac{\lambda D}{a}$, p entier

L'interfrange i est la distance séparant deux maxima consécutifs :

$$i = x_{p+1} - x_p \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

À noter que l'interfrange dépend de λ ; chaque couleur du spectre visible donne donc son propre système de franges.

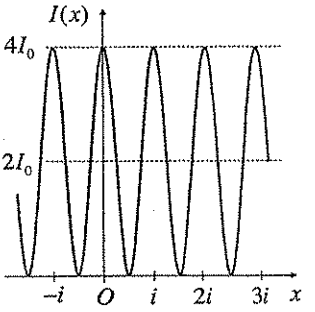
La formule des interférences s'écrit alors :

$$I(x) = 2I_0\left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i}\right)$$

L'ordre d'interférences est aussi $p = x/i$; les maxima, en abscisse, sont donnés par pi.

On obtient le long de Ox des franges parallèles à Oy où les franges claires ($I = 4I_0$) alternent avec les franges sombres ($I = 0$).

Sur l'écran, la moyenne spatiale de l'intensité le long de Ox est $2I_0$ comme pour des ondes non cohérentes.



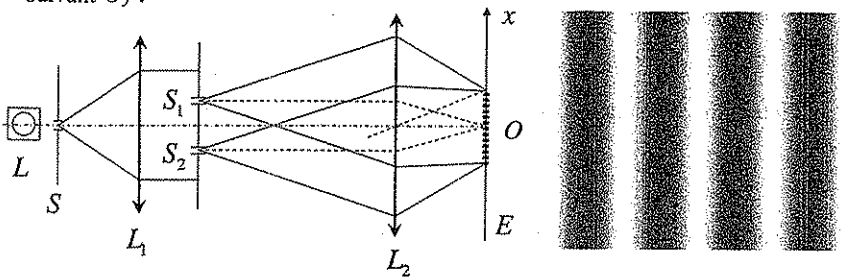
AN : Pour que $i \geq 1$ mm, il faut $a = \frac{\lambda D}{i} \leq 0{,}5$ mm, donc des sources très voisines.

Ceci montre la difficulté liée à l'observation de franges ; il n'y a pas d'interférences entre deux sources non cohérentes (par exemple deux lampes de poche), et même si cela était possible, l'interfrange serait tellement faible avec $a \approx 10$ cm que le système de franges serait invisible à l'œil nu.

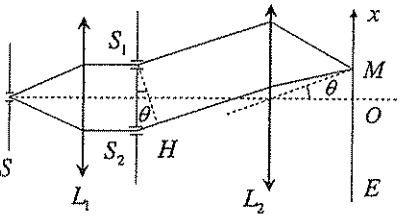
La frange centrale est celle pour laquelle la différence de marche est nulle : elle est définie par $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = 0$; elle est brillante puisqu'elle correspond au cas $\delta = p\lambda$ où $p = 0$ et ceci pour toute longueur d'onde. Dans le cas des trous d'Young, elle se trouve (mais ceci est un cas particulier) au centre $x = 0$ de l'écran.

18. Dans le montage précédent (celui de la question **16.**) la source S est ponctuelle et les trous S_1 et S_2 très petits ; on a donc très peu de lumière et le système de franges est difficilement visible.

De plus, sur l'écran, les centres géométriques des deux cônes sont distincts. Pour remédier à cela, on remplace la source ponctuelle par une fente source éclairée par la lampe L et les trous d'Young par des fentes d'Young (perpendiculaires au plan de la figure et parallèles à la fente source) et on utilise deux lentilles : S est au foyer objet de L_1 et donne un faisceau émergent parallèle, et E dans le plan focal image de L_2, ce qui permet de faire coïncider les centres des cônes de diffraction en O, conjugué de S à travers les deux lentilles. Le système est alors plus lumineux et par invariance par translation suivant Oy, on observe de grandes franges rectilignes suivant Oy.



À noter que ce montage est celui utilisé en TP avec le goniomètre puisqu'à gauche apparaît le collimateur, à droite l'objectif de la lunette, le système de fentes étant posé sur la plate-forme (c'est aussi le montage de Fraunhofer de la question **10.**).



La figure ci-contre indique les trajets suivis de S à M. La différence de marche entre eux est :

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + S_2H + (HM) - (SS_1) - (S_1M)$$

où H est la projection orthogonale de S_1 sur le rayon issu de S_2

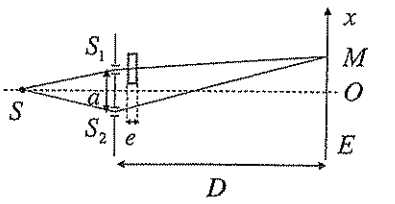
$$\text{or } (SS_2) = (SS_1) \text{ et } (HM) = (S_1M)$$

car entre un point et une surface d'onde qu'il engendre (S_1S_2 associée à S d'une part, et S_1H à M d'après la loi du retour inverse de la lumière d'autre part), le chemin optique sur les rayons est indépendant du rayon suivi. On peut également invoquer le stigmatisme des lentilles (leur présence oblige à considérer les chemins optiques liés à la traversée du verre).

Il reste : $\delta(M) = S_2H = a\sin\theta \approx a\tan\theta = ax / f_2'$

$$\boxed{\delta(M) = a\frac{x}{f_2'}}$$

19. Pour retrouver la position de la frange centrale (en O avant introduction de la lame), on peut raisonner qualitativement :



le rayon issu de S_1 est ralenti au passage par la lame ($c_{verre} \approx 200\,000$ km.s^{-1}) ; il faut donc, pour compenser (la frange centrale est donnée par une différence de phase nulle), que la longueur du trajet issu de S_2 soit supérieure à celle du trajet issu de S_1, d'où une translation de la figure d'interférence vers les x croissants (décalage vers le haut de la figure).

En un point M donné, suite à l'introduction de la lame, la différence de marche $\delta = (SS_2M) - (SS_1M)$ subit la variation suivante (l'angle étant petit, tout se passe comme si la lame était traversée en incidence normale) :

$$\Delta\delta = -(n-1)e$$

Attention aux signes : en effet, là où le chemin optique est ne à la traversée de la lame sur le trajet S_1M, il n'est que de e sur le trajet correspondant de S_2M.
Si au point M on avait un ordre d'interférence p donné par $\delta = p\lambda$, alors ce dernier subit une variation donnée par $\Delta\delta = \Delta p\lambda$ soit :

$$\Delta p = -\frac{(n-1)e}{\lambda} = -4$$

et donc l'endroit sur l'écran où initialement il y avait la frange d'ordre 4 va recueillir la frange centrale.
Cette mesure peut être mise à profit pour déterminer la faible épaisseur e de la lame (inaccessible par des moyens mécaniques) : $\underline{e = 4\ \mu\text{m}}$.
Et comme l'interfrange est $i = \lambda D / a = 1$ mm, cela correspond à une translation $\Delta x = |\Delta p|\, i = 4$ mm (de formule littérale $\Delta x = \dfrac{(n-1)eD}{a}$).

Rq : La faible incidence sur la lame est négligée (voir la question **73.**) ; pour s'en affranchir, il suffit d'éclairer les fentes en lumière parallèle (en plaçant S au foyer d'une lentille convergente) et de disposer la lame avant la fente S_1...

■ Notions de cohérence spatiale et temporelle

20. Dans la réalité, au lieu de trouver $I(M) = 2I_0\left(1+\cos\varphi(M)\right)$, on trouve en général :

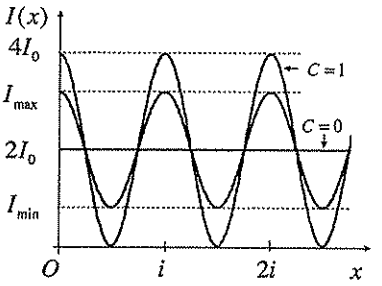
$$\boxed{I(M) = 2I_0\left(1+V\cos\varphi(M)\right)} \quad \text{où } V \text{ est le facteur de visibilité } (|V| \le 1)$$

Le contraste des franges est défini par : $\boxed{C = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}}$

on a $C = |V|$, soit $\boxed{0 \le C \le 1}$

Lorsque C varie, toutes choses égales par ailleurs donc sans modifier $\varphi(M)$, la nouvelle distribution d'intensité garde le même interfrange, seule l'amplitude d'oscillation de I autour de la valeur moyenne $2I_0$ varie. Dans le cas où $0 < C < 1$ (le graphe concerne $C = 0{,}6$), des franges de plus faible amplitude ($I_{max} < 4I_0$)

s'ajoutent sur un fond uniforme ($I_{min} \neq 0$). Ces franges sont donc d'autant moins visibles, moins contrastées, que C est faible. $C = 0$ correspond à un écran uniforme.

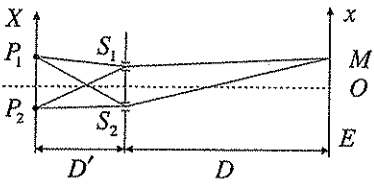


Le contraste C est lié au facteur de cohérence des ondes, qui mesure leur capacité de pouvoir interférer. Les causes d'affaiblissement du contraste sont le fait que :

- la source primaire S n'est pas ponctuelle, mais possède une certaine étendue dans l'espace ; en un point M de l'écran, l'ordre d'interférences varie suivant le point P considéré de la source et les franges se brouillent. Si le contraste reste bon, on dit qu'il y a « cohérence spatiale » (le cas des « petites » sources).
- la source S n'est pas monochromatique, mais émet dans un certain domaine spectral, de λ_1 à λ_2. Chaque longueur d'onde donne son propre système de franges car $i = \lambda D / a$ et ils se brouillent en se superposant. Si le contraste reste bon, on dit qu'il y a « cohérence temporelle » (le cas des spectres « étroits »).

21. Cas de 2 sources ponctuelles

a) La source P_1 n'est pas sur la médiatrice de S_1S_2 et donc $P_1S_1 \neq P_1S_2$; il y a donc déjà une différence de marche entre les rayons issus de P_1 et arrivant en S_1 et en S_2 :



$$\delta_{tot}(P_1M) = (P_1S_2M) - (P_1S_1M)$$
$$= \underbrace{(P_1S_2) - (P_1S_1)}_{\delta(P_1)} + \underbrace{(S_2M) - (S_1M)}_{\delta(M)}$$

$\delta(P_1)$ se calcule exactement comme $\delta(M)$ en remplaçant x par X_1 et D par D'.

$\delta_{tot}(P_1M) = \dfrac{aX_1}{D'} + \dfrac{ax}{D}$ et de même pour P_2 : $\delta_{tot}(P_2M) = \delta(P_2) + \delta(M) = \dfrac{aX_2}{D'} + \dfrac{ax}{D}$

Rq : La frange centrale de la figure d'interférences donnée par P_1, n'est pas au centre O, mais à une abscisse $x_c = -X_1 D / D'$ issue de $\delta_{tot}(P_1M_c) = 0$ et donnée par l'intersection de E et de droite P_1C où C est le milieu de S_1S_2. Par rapport à la figure d'interférences donnée par un point source sur l'axe, l'interfrange est conservé mais le système de franges se translate vers le bas.

P_1 et P_2 sont deux points sources distincts, donc les lumières qu'ils émettent ne sont pas cohérentes entre elles : leurs systèmes de franges se superposent (celui de P_1 est translaté vers le bas et celui de P_2 vers le haut) et il suffit d'additionner les intensités.

Raisonnement qualitatif : le contraste est maximal, $C=1$, si le système de franges issu de P_1 vient coïncider avec celui issu de P_2 soit :

$$\delta_{tot}(P_1M)-\delta_{tot}(P_2M)=K\lambda \;\Rightarrow\; \frac{a(X_1-X_2)}{D'}=\frac{aP_1P_2}{D'}=K\lambda \text{ soit } \boxed{P_1P_2=K\frac{\lambda D'}{a}}$$

Le contraste vaut donc périodiquement 1 ($K\in\mathbb{N}^*$) quand la distance P_1P_2 varie.

b) Par le calcul : les intensités (systèmes de franges) dues à P_1 et P_2 sont, au point M de l'écran, en supposant identiques leurs intensités I_0 :

$$I_1(M)=2I_0\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\delta(P_1)+\delta(M)\right)\right] \text{ et } I_2(M)=2I_0\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\delta(P_2)+\delta(M)\right)\right]$$

Par incohérence, leur somme est, en utilisant $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$

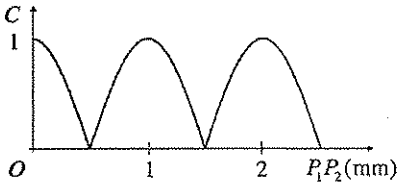
$$I(M)=I_1(M)+I_2(M)=4I_0\left[1+\cos\frac{\pi}{\lambda}\left(\delta(P_1)-\delta(P_2)\right).\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\delta(P_1)+\delta(P_2)}{2}+\delta(M)\right)\right]$$

Le second cosinus contient l'information sur le point M et donne les franges ; le premier correspond au facteur de visibilité, d'où le contraste :

$$\boxed{C=\left|\cos\frac{\pi}{\lambda}\left(\delta(P_1)-\delta(P_2)\right)\right|=\left|\cos\frac{\pi}{\lambda}\frac{aP_1P_2}{D'}\right|}$$

On retrouve que $C=1$ régulièrement pour $P_1P_2=K\frac{\lambda D'}{a}$ (K entier) et $C=0$ pour $P_1P_2=(K'+1/2)\frac{\lambda D'}{a}$.

AN : $K=1$; $P_1P_2=\frac{\lambda D'}{a}=1$ mm

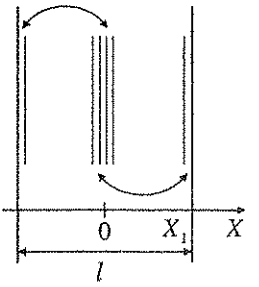


À noter que dans ce cas le contraste ne dépend pas du point M, et donc pour P_1P_2 fixé, il est uniforme sur tout l'écran.

22. Cas d'une fente source (étendue spatiale)

a) Rappelons que la source P_1 n'étant pas sur le plan médiateur de S_1S_2, la frange centrale de la figure d'interférences ne passe pas par le centre O, mais se trouve à une abscisse $x_c=-X_1D/D'$ (d'après $\delta_{tot}(P_1M_c)=aX_1/D'+ax_c/D=0$). En un point M fixé, la variation de l'ordre d'interférences p avec la position du point source est donc $\Delta p=-x_c/i=X_1a/\lambda D'$ (le système de franges se translate vers le bas).

Pour une source étendue de largeur $l=2X_1$ placée entre $-X_1$ et X_1, cette variation $\Delta p=X_1a/\lambda D'$ sur

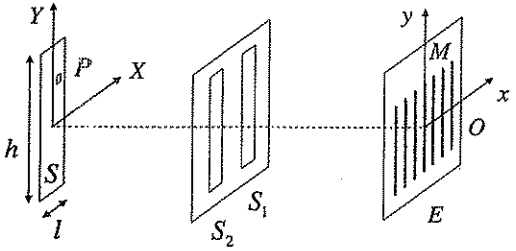


la demi-fente (on passe du centre en P_1) conduit à un brouillage des franges dès lors que $|\Delta p| = 1/2$ (principe des fentes élémentaires complémentaires, associées 2 à 2, distantes de $l/2$, et qui produisent en M fixé l'une une frange claire et l'autre une frange obscure, d'où un contraste nul) ce qui fixe la valeur minimale de la largeur de la fente à $\underline{l_{min} = 2X_1 = \lambda D'/a}$ pour qu'il y ait brouillage des franges. Dans la pratique, il s'agit d'une largeur de fente à ne pas dépasser pour éviter un faible contraste des franges.

b) La petite surface $d^2S = dXdY$ au point P de la source donne au point M de l'écran, après passage par S_1 et S_2, un éclairement :

$$d^2I(M) = 2I_S d^2S\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\delta(P)+\delta(M))\right] \text{ où } \delta(P) = \frac{aX}{D'} \text{ et } \delta(M) = \frac{ax}{D}$$

I_S est l'intensité due à la source par unité de surface de celle-ci, supposée uniforme et donc indépendante du point P sur la fente source.



Suivant OY (grande hauteur h), le système est invariant par translation (la diffraction se fait dans le plan horizontal) ; on obtient de grandes franges lumineuses suivant Oy en sommant les intensités produites par les différentes surfaces d^2S puisqu'elles sont incohérentes entre elles.

$$I(M) = 2I_S h\int_{-l/2}^{l/2}\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{aX}{D'}+\delta(M)\right)\right]dX$$

Pour les variations de la primitive il faut utiliser $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$

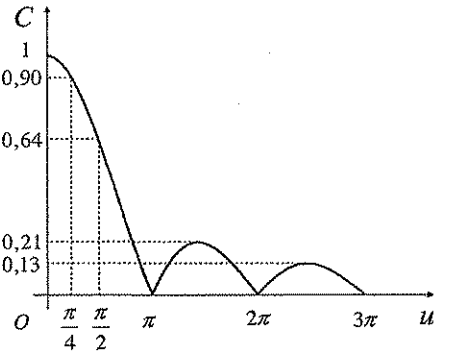
$$\text{d'où } I(M) = 2I_0\left[1+\frac{\sin(\pi al/\lambda D')}{\pi al/\lambda D'}\cos\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda}\right]$$

du type $I(M) = 2I_0(1+V\cos\varphi(M))$ avec $I_0 = I_S hl$ et $V = \frac{\sin(\pi al/\lambda D')}{\pi al/\lambda D'}$

Le contraste est :

$$\boxed{C = \left|\frac{\sin u}{u}\right|} \text{ en notant } \boxed{u = \frac{\pi al}{\lambda D'}}$$

On peut définir une fente fine par l'obtention d'un très bon contraste $C \geq 0{,}9$ soit $u = \pi a l / \lambda D' \leq \pi / 4$; avec les valeurs numériques de la question précédente, on obtient $l \leq 0{,}25$ mm, ce qui est réalisable avec la fente d'entrée d'un collimateur et explique la faible luminosité des franges d'interférences à fentes d'Young.



Le premier brouillage des franges (soit $C = 0$) se produit pour $u = \pi a l / \lambda D' = \pi$, on retrouve $l = \lambda D' / a$. On peut aussi écrire $a l / D' = \lambda$, ce qui montre que le contraste s'annule lorsque la variation de différence de marche d'un bord de la fente à l'autre est λ (et donc de $\lambda / 2$ pour deux fentes complémentaires de la question a) d'où un effet global nul).

23. Cas d'un doublet jaune

a) L'interfrange valant $i = \lambda D / a$, chaque longueur d'onde donne son propre système de franges. Les deux systèmes se superposent sans interférer puisque deux longueurs d'onde différentes donnent des éclairements incohérents qu'il suffit d'additionner. La différence de marche $\delta(M) = S_2M - S_1M = ax / D$ est inchangée et en particulier, $\delta(O) = 0 \ \forall \lambda$: au centre O de l'écran, il y a une frange claire pour toutes les longueurs d'onde. Le système de franges ne subit pas de translation d'ensemble, mais l'interfrange augmente avec la longueur d'onde.

Raisonnement qualitatif : le contraste s'annule pour la première fois, $C = 0$, en un point M_0 où une frange claire du système donné par λ_1 correspond à une frange sombre du système donné par λ_2 :

$$p(M_0, \lambda_1) = p(M_0, \lambda_2) + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{\lambda_1 D / a} = \frac{x_0}{\lambda_2 D / a} + \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 \approx \frac{D\lambda^2}{2a\Delta\lambda}$$

Par rapport à $x = 0$, ceci se produit au bout d'un nombre de franges égal à :

$$p_0 = \frac{x_0 - 0}{i} = \frac{D\lambda^2 / 2a\Delta\lambda}{\lambda D / a} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda} = 491 \text{ franges}$$

Ceci est énorme et ne joue pas avec un système de type fentes d'Young où, à cause de la diffraction des fentes, on voit au maximum 5 franges de chaque côté de O (voir la question **45.**) ; le contraste n'est donc pas limité par le doublet. En revanche, le phénomène est facilement visible avec un interféromètre de Michelson (voir la question **89.**).

b) Par le calcul : les intensités (systèmes de franges) dues à λ_1 et λ_2 sont, au point M de l'écran, en supposant les intensités I_0 identiques ;

$$I_1(x) = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi ax}{\lambda_1 D}\right) \quad \text{et} \quad I_2(x) = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi ax}{\lambda_2 D}\right)$$

Par incohérence, leur somme est, en utilisant $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$

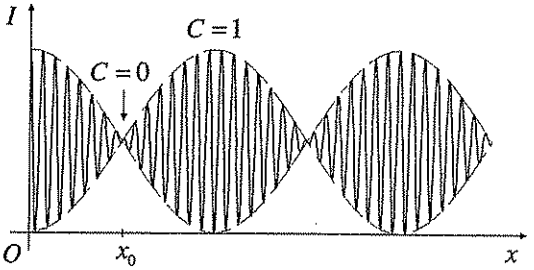
$$I(x) = 4I_0\left[1+\cos\frac{\pi a\Delta\lambda x}{\lambda^2 D}\cos\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right]$$

où $\lambda \approx \lambda_1 \approx \lambda_2$ car $\Delta\lambda \ll \lambda$.

Le second cosinus contient le terme de phase habituel $2\pi\delta/\lambda$ et donne les franges ; le premier, de variation beaucoup plus lente car $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ correspond au facteur de visibilité, d'où le contraste qui dépend cette fois de x donc de l'endroit sur l'écran :

$$\boxed{C(x) = \left|\cos\frac{\pi a\Delta\lambda x}{\lambda^2 D}\right|}$$

Il s'annule la 1ère fois pour $\frac{\pi a\Delta\lambda x_0}{\lambda^2 D} = \frac{\pi}{2}$, ce qui redonne la valeur de la question précédente.



Le graphe ci-dessus donne une idée de l'allure des franges, mais les rapports ne sont évidemment pas respectés.

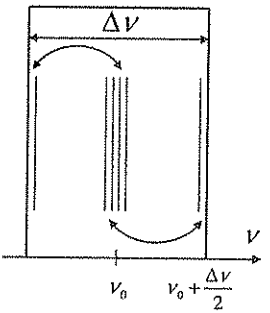
Dans un fuseau (entre deux annulations successives du contraste), on compte $2p_0 = 982$ franges, qui sont faciles à faire défiler avec un interféromètre de Michelson (un déplacement du miroir de $e = 0{,}29$ mm suffit).

24. Cas d'une raie (étendue spectrale)

a) La différence de marche $\delta(x) = ax/D$ est indépendante de la longueur d'onde λ ; en revanche, à une abscisse x de l'écran, avec la fréquence centrale ν_0, l'ordre d'interférence est donné par $\delta = p\lambda_0 = p\frac{c}{\nu_0} \Rightarrow p(x,\nu_0) = \frac{\delta(x)\nu_0}{c}$; il dépend de la fréquence et du point d'observation.

Au même point, avec $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$ (la moitié de la raie de largeur $\Delta\nu$), cet ordre a varié de Δp avec $\Delta p = \frac{\delta(x)}{c}\Delta\nu/2$.

Cette variation sur la demi-largeur de la raie conduit à un brouillage des franges dès lors que $|\Delta p| = 1/2$ (principe des bandes élémentaires complémentaires, associées 2 à 2, distantes de $\Delta\nu/2$, et qui produisent l'une une frange claire et l'autre une frange obscure, d'où un contraste nul)



ce qui fixe la largeur minimale de la largeur spectrale à $\underline{\Delta\nu = c/\delta(x)}$ pour qu'il y ait brouillage des franges.

Avec $\nu = \frac{c}{\lambda}$ autour de la valeur centrale (sans tenir compte du signe dans la variation), $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{c}{\delta(x)} \Rightarrow \underline{\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\delta(x)}}$

Dans la pratique, il s'agit d'une largeur spectrale à ne pas dépasser pour éviter la disparition des franges. On constate que plus la raie est fine ($\Delta\nu$ petit), plus la différence de marche $\delta(x)$ accessible est élevée.

b) Une petite largeur $d\nu$ du spectre donne sur l'écran, après interférence par passage à travers S_1 et S_2, l'intensité :

$$dI(M) = 2\underbrace{I_s d\nu}_{dI_0}\left(1+\cos\varphi(M,\nu)\right) \quad \text{avec} \quad \varphi(M,\nu) = \frac{2\pi\delta(M)\nu}{c} = 2\pi\tau(M)\nu$$

où $\tau(M) = \frac{\delta(M)}{c} = \frac{S_2M}{c} - \frac{S_1M}{c}$ est la différence des temps de propagation.

Il y a incohérence entre les différentes bandes de largeur $d\nu$, il suffit donc de sommer les intensités sur le profil rectangulaire.

$$I(M) = 2I_s\int_{\nu_0-\Delta\nu/2}^{\nu_0+\Delta\nu/2}\left(1+\cos(2\pi\tau(M)\nu)\right)d\nu$$

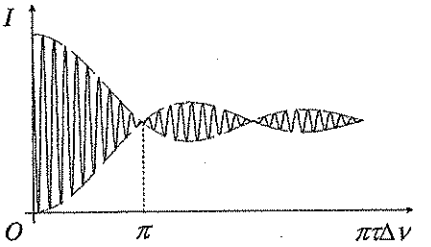
Pour les variations de la primitive il faut utiliser $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$

$$\text{d'où } I(M) = 2I_0\left[1+\frac{\sin\pi\tau(M)\Delta\nu}{\pi\tau(M)\Delta\nu}.\cos\left(\varphi(M)\nu_0\right)\right] \text{ avec } I_0 = I_s\Delta\nu$$

Le contraste est :

$$\boxed{C(M) = \left|\frac{\sin u}{u}\right|}$$

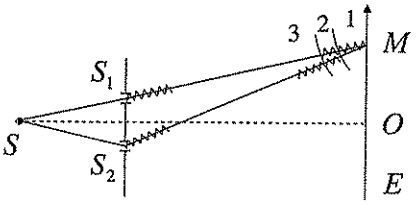
en notant $\boxed{u = \pi\tau(M)\Delta\nu}$



Il dépend du point M et diminue lorsque x augmente.
On constate que le contraste ne s'annule pas tant que $\pi\tau\Delta\nu \le \pi$ soit $\tau = \frac{\delta}{c} \le \frac{1}{\Delta\nu} = \tau_0$ ou encore $\delta \le c\tau_0$, c'est-à-dire tant que la différence de marche est inférieure à la longueur spatiale du train d'onde (ou longueur de cohérence) ; on retrouve le résultat de la question a).
En réalité avec un dispositif à fentes d'Young, δ ne dépasse guère quelques λ et n'atteint pas $c\tau_0 \approx 5$ cm ; de telles différences de marche sont accessibles avec un interféromètre de Michelson.
Par ailleurs, au-delà de π, le contraste doit rester très faible ; les « pieds » du sinus cardinal, conséquence de la modélisation par un profil rectangulaire de

l'intensité spectrale, n'ont pas lieu d'être, comme pourrait le montrer une modélisation plus fine.

c) Pour qu'il y ait interférence en M, les deux ondes doivent provenir du même train d'onde car alors seulement il y a cohérence. Cela suppose que la différence de marche soit inférieure à la longueur spatiale du train d'onde, dite longueur de cohérence, soit :



$$\delta \leq c\tau_0 = L_c$$

Plus le point M est éloigné de O, moins le recouvrement des trains d'onde est important et plus le contraste est faible.

Au point M, au cours du temps, on peut en effet distinguer 3 phases :

1. le début du train d'onde issu de S_1 arrive seul en M ; l'éclairement est uniforme,
2. la fin du train d'onde issu de S_1 et le début du train d'onde issu de S_2 arrivent simultanément et il y a interférence,
3. la fin du train d'onde issu de S_2 arrive seule en M ; l'éclairement est uniforme.

En moyenne temporelle l'œil perçoit donc des interférences sur un fond uniforme, ce qui est exactement la définition d'une perte de contraste. En réalité avec un tel dispositif, à cause de la diffraction limitée angulairement, δ ne dépasse guère quelques λ et n'atteint pas L_c ; il faut un interféromètre de Michelson pour obtenir de grands δ...

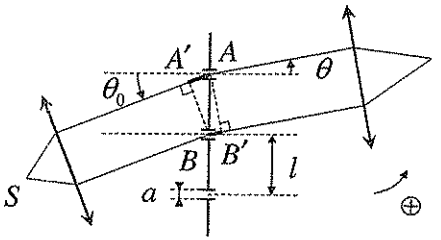
Le réseau ou interférences à N ondes

25. Un réseau plan par transmission est un objet dont le coefficient de transmission est modulé spatialement de manière périodique ; on peut l'obtenir par holographie (anciennement il s'agissait souvent d'une plaque de verre sur laquelle étaient gravés des sillons). Cela revient à considérer N fentes parallèles, équidistantes (le pas est l) et de même largeur a.

À l'arrivée sur le réseau le rayon en B est en avance sur le rayon en A de $A'A = l\sin\theta_0 > 0$ (l'angle θ_0 est donné). Au départ du réseau, le rayon issu de B accuse un retard de $BB' = l\sin\theta > 0$ (l'angle θ est la variable) sur celui issu de A.

La différence de marche entre deux rayons successifs est donc :

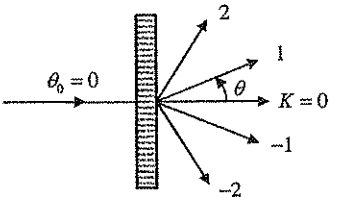
$$\delta = l(\sin\theta - \sin\theta_0)$$



On obtient des maxima d'interférence dans les directions pour lesquelles les ondes diffractées par les fentes successives sont en phase soit $\delta = K\lambda$ (K entier), d'où la formule du réseau :

$$\boxed{\sin\theta_K = \sin\theta_0 + K\frac{\lambda}{l}}$$

AN :
$\theta_0 = 0$; $l = 1/n = 1/600$ mm et $\lambda = 0{,}6$ µm ; il faut traduire $|\sin\theta_K| \leq 1$ soit $|K| \leq 2{,}8$, on peut donc voir les 5 ordres -2, -1, 0, 1 et 2.



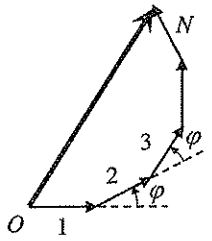
26. Principe des interférences à N ondes

Typiquement, un réseau de TP comporte $n \approx 500$ traits/mm et est éclairé sur une largeur $L \approx 2$ cm (le diamètre du faisceau sortant du collimateur d'un goniomètre), l'ordre de grandeur du nombre de fentes concerné par l'expérience est :

$$N = nL \approx 10\,000$$

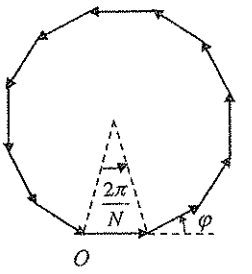
La régularité du réseau (les fentes sont de même largeur et sont équidistantes) assure que se superposent à l'infini, issues des N fentes successives, N ondes quasi monochromatiques, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique (le déphasage entre deux ondes successives est noté $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$). Les ondes étant cohérentes entre elles par division du front d'onde, il faut sommer les amplitudes complexes avant de passer à l'éclairement.

Le principe de la représentation de Fresnel est illustré sur le schéma ci-contre : les amplitudes complexes sont représentées par un vecteur dont la norme est proportionnelle à l'amplitude de l'onde et l'angle d'inclinaison sur l'axe Ox de référence proportionnel à la phase de l'onde.
Partant de O, l'origine des phases est prise sur l'onde 1, ensuite 2 est déphasée de φ sur 1, 3 est déphasée de φ sur 2,... La résultante (en trait gras) est évidemment fonction du nombre N d'ondes et du déphasage φ.



La représentation de Fresnel indique que :

- les franges brillantes sont obtenues lorsque les N ondes qui interfèrent sont en phase soit si $\varphi = 2K\pi$ (K entier, les vecteurs sont tous colinéaires) ; alors l'amplitude totale est NA_0 et l'intensité $N^2 I_0$ (où A_0 et I_0 sont l'amplitude et l'intensité de chaque onde) ; c'est le cas dans les directions θ_K données par le formule du réseau avec $\delta = K\lambda$.
- dans le cas particulier où $\varphi = 2\pi/N$, soit un angle très petit (sur le schéma on se limite à $N = 12$), l'amplitude résultante est rigoureusement nulle (les phases sont alors celles des racines $N^{ièmes}$ de l'unité). Ce résultat est important car il indique que la demi-largeur des pics de la courbe d'intensité $I(\varphi)$ est $2\pi/N$; en effet, partant de $\varphi = 0$ (l'ordre $K = 0$ lumineux), l'intensité diminue très



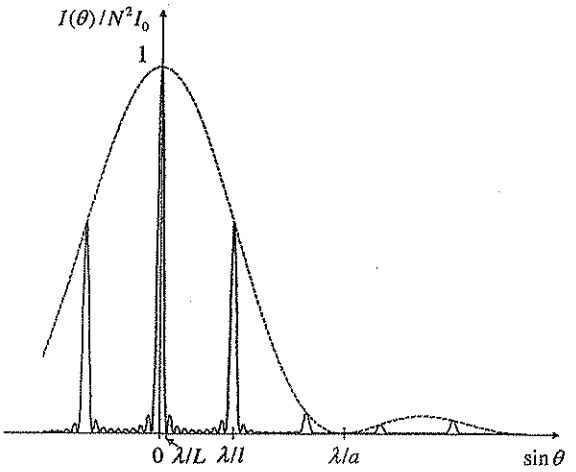
rapidement jusqu'à $\varphi = \pm 2\pi / N$ où elle s'annule, soit $2\pi / N$ pour la demi-largeur du pic.

- si φ augmente encore en étant quelconque, alors la superposition de $N \approx 10\,000$ amplitudes complexes de même amplitude et de phase 0, φ, 2φ,...,$(N-1)\varphi$ donne une résultante quasi nulle (les N phases sont presque uniformément réparties entre 0 et 2π et la résultante est insignifiante) et ceci dès lors que φ est non nul, même très petit, au-delà de $2\pi / N$.

27. La courbe de l'intensité $I(\theta)$ observée en fonction de la direction θ fait apparaître :

- l'intensité maximale (N sources cohérentes d'intensité I_0 donnent $N^2 I_0$),
- la courbe de diffraction de chaque fente (cette diffraction est importante car il y a 500 fentes par mm) et qui apparaît en pointillé sur le graphe (elle coiffe la courbe d'interférence) et qui s'annule comme on s'y attend pour λ / a où a est la largeur d'une fente,
- la fonction décrivant les interférences des N ondes (le cas $N = 3$ est traité à la question **47.**) donne des pics de lumière pour $\sin\theta_K = K\lambda / l$, ce qui correspond aux ordres de la formule du réseau ; d'après ce qui précède, ces pics ont une largeur de $\lambda / Nl = \lambda / L$ où $L = Nl$ est la largeur totale éclairée du réseau.

Rq : Entre deux pics principaux, on a $N-1$ minima nuls et $N-2$ maxima secondaires en gros en $1/N^2$ par rapport au pic de l'ordre zéro, donc invisibles. Noter que la figure est faite pour $N = 10$, mais dans la pratique, $N \approx 10\,000$ ou plus.



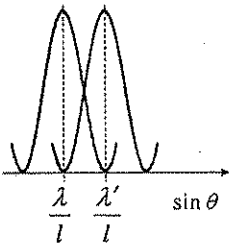
Chacune des trois longueurs $a < l < L$ a donc son rôle spécifique.

Plus N est grand, plus les pics sont lumineux et fins (angulairement), et moins les pics secondaires se manifestent, c'est-à-dire plus on concentre d'énergie lumineuse dans des directions étroites régulièrement espacées. Ceci augmente la résolution, c'est-à-dire la précision maximale avec laquelle on peut faire un pointé.

On note que les fréquences spatiales (en m^{-1}) $1/a > 1/l > 1/L$ sont d'autant plus importantes que les grandeurs concernées sont petites $a < l < L$.

28. La formule du réseau $\sin\theta = \sin\theta_0 + K\lambda/l$ montre que pour θ_0 donné, θ dépend de λ pour chaque ordre, soit $\theta_K(\lambda)$; c'est l'effet de dispersion, à savoir être capable (sauf pour l'ordre $K=0$ de l'optique géométrique) d'envoyer dans des directions différentes des lumières de longueurs d'onde différentes. θ est d'autant plus grand que λ est grand (le rouge est davantage dévié que le bleu, alors que c'est l'inverse pour un prisme). La dispersion augmente avec l'ordre et aussi avec le nombre de traits par mm, mais à cause de la diffraction des fentes, on dispose de moins en moins de lumière...

Le graphe ci-contre (pour l'ordre $K=1$ et $\theta_0 = 0$) rappelle que les directions des maxima de deux longueurs d'onde λ et λ' ne coïncident pas à cause de la dispersion, d'où un problème de résolution.



On note $\Delta\lambda$ la plus petite valeur positive de $\lambda' - \lambda$ pour laquelle les pics de deux longueurs d'onde voisines sont perçus séparés ; d'après le critère de Rayleigh, c'est lorsque le centre de l'un coïncide avec le bord de l'autre :

* la demi-largeur angulaire à la base d'un pic est donné d'après la question précédente par : $\Delta(\sin\theta) = \lambda/Nl$
* l'écart angulaire entre les pics de longueurs d'onde différentes est obtenue par la formule du réseau : $\sin\theta = 0 + K\lambda/l \Rightarrow \Delta(\sin\theta) = K\Delta\lambda/l$

$$\text{À la limite de séparation : } \frac{\lambda}{Nl} = K\frac{\Delta\lambda}{l} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda}{KN}}$$

Cette résolution est dite **intrinsèque** car liée à une propriété fondamentale de la lumière : la diffraction due à la limitation spatiale du faisceau incident sur une largeur L ($\sin\theta$ en $\lambda/L = \lambda/Nl$).

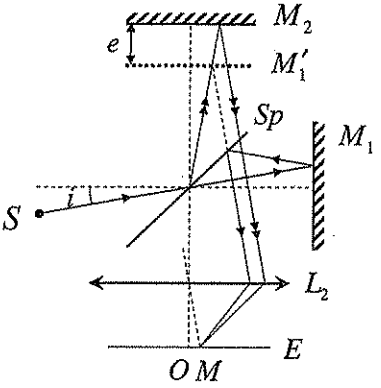
AN : $N = 10\,000$ (500 traits/mm sur 2 cm) dans l'ordre $K=1$, si $\lambda = 0{,}5$ µm, cela permet de distinguer $\Delta\lambda = 0{,}05$ nm.

En réalité, d'autres causes, de type instrumental, limite le pouvoir séparateur : citons la largeur de la fente d'entrée du spectromètre ; en TP, c'est elle qui impose la résolution, le $\Delta\lambda$ résolu est donc plus grand que celui calculé (voir la question **81.**).

■ L'interféromètre de Michelson

29. L'interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs plans M_1 (mobile) et M_2 (fixe) et d'une lame semi-réfléchissante appelée séparatrice Sp qui, à partir d'une onde incidente donne naissance à deux ondes d'éclairements voisins : $\rightarrow$ se réfléchit sur M_1 et $\twoheadrightarrow$ sur M_2. Sur le schéma M_1 et M_2 sont perpendiculaires, mais il est plus commode de raisonner sur M_1', symétrique de M_1 par rapport à Sp : alors M_1' et M_2 sont parallèles et constituent une « lame d'air » d'épaisseur e.

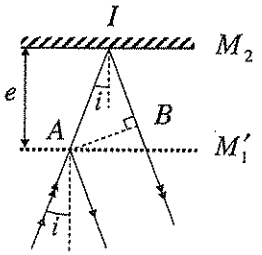
Si la différence de marche entre les deux rayons allant de S à M est (en valeur absolue) inférieure à la longueur de cohérence, alors en M les deux ondes dues à S et ressortant du dispositif sont cohérentes entre elles et interfèrent donc (interférences à deux ondes) ; on parle d'interférences par division d'amplitude grâce à S_p, capable de produire deux faisceaux émergents à partir d'un faisceau incident sur elle. Les ondes qui interfèrent en un point donné à l'infini (ou dans le plan focal image de la lentille, comme M) ont une égale inclinaison i sur l'axe.



Un agrandissement de la figure précédente permet d'évaluer la différence de marche $\delta(i)$ de la façon suivante :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1$$
$$= \cancel{(SA)} + AI + IB + \cancel{(BM)} - \left[\cancel{(SA)} + \cancel{(AM)}\right]$$

car entre la surface d'onde AB et le point M, le chemin optique est indépendant du rayon suivi (ou stigmatisme de la lentille).



$$\delta(i) = AI + IB = \frac{e}{\cos i} + \frac{e}{\cos i}\cos 2i = \frac{e}{\cos i} 2\cos^2 i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta(i) = 2e\cos i}$$

Les franges ($\delta = cste$) sont données par $i = cste$ (égale inclinaison) ; il s'agit donc d'anneaux centrés sur O (ce qui est lié à la symétrie de révolution).

Lorsque la source S est quasi ponctuelle, les franges ne sont pas localisées (on peut les voir dans tout l'espace), mais elles sont très peu lumineuses. À $e = cste$ fixée ici, pour qu'il y ait des franges sur E, il faut i variable (de 0 à i_{max}), d'où l'emploi d'une source étendue sans problème de cohérence spatiale car la différence de marche sur E est indépendante du point S choisi dans la source étendue. Néanmoins chaque point de la source donne son propre système de franges ; l'ensemble se brouille presque partout sauf à l'infini d'où la localisation des franges à l'infini (l'endroit de la localisation est le lieu des intersections de deux rayons émergents issus d'un même incident).

Les anneaux, alors lumineux (la source est étendue) sont soit observés sur l'écran E à distance finie dans le plan focal image d'une lentille L_2, soit directement à l'œil qui regarde à l'infini (sans accommoder) dans la direction de M_2 (c'est alors le système optique de l'œil qui joue le rôle de L_2, et sa rétine qui joue le rôle de E).

30. La frange au centre de l'écran correspond à un ordre d'interférence :

$$p_0 = \frac{\delta(i=0)}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda}$$

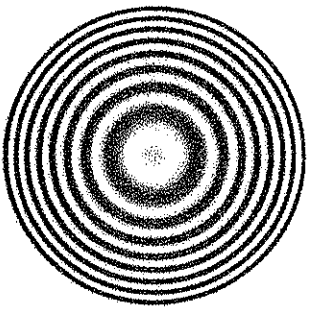
Supposons p_0 entier (anneau brillant au centre). Le $k^{ième}$ anneau brillant (associé à l'inclinaison i_k) compté à partir du centre correspond à l'ordre $p = p_0 - k$ car l'ordre p décroît lorsque i augmente (l'ordre est maximal au centre).

$$\left.\begin{aligned} 2e &= p_0\lambda \\ 2e\cos i &= p\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2e(1-\cos i) = (p_0 - p)\lambda \Rightarrow 2e\frac{i_k^2}{2} \approx k\lambda$$

car l'angle i est petit (on travaille dans les conditions de Gauss).

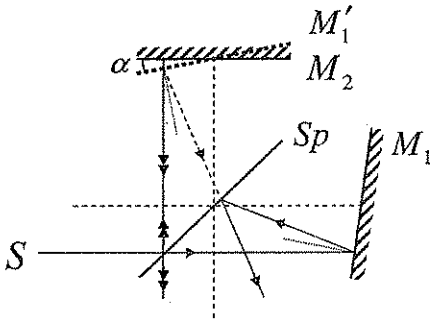
D'où le rayon de l'anneau : $r_k = f' \tan i_k \approx f' i_k$ soit $\boxed{r_k = f'\sqrt{\frac{k\lambda}{e}}}$

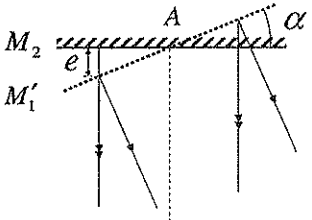
- r_k est en $\sqrt{k}$: les anneaux sont de plus en plus serrés lorsque k augmente,
- r_k est en $1/\sqrt{e}$: lorsque e augmente, les rayons diminuent et pour un champ donné, on voit de plus en plus d'anneaux serrés. Au contact optique $e = 0$, on a la teinte plate, c'est-à-dire un éclairement uniforme,
- r_k est en $\sqrt{\lambda}$: chaque longueur d'onde donne son propre système de franges, d'où un problème de cohérence temporelle.



31. Le miroir M_1 (et M_1') est incliné d'un faible angle α sur la normale au dispositif. Ici $e = M_1'M_2 = 0$ mais $\alpha = \widehat{M_1'M_2} \neq 0$. M_1' et M_2 constituent un « coin d'air ». Pour simplifier, on se limite à l'incidence normale. Le rayon $\rightarrow\!\!-$ réfléchi sur M_1 (ou son symétrique M_1' par rapport à Sp) et le rayon $\rightarrow\!\!\rightarrow$ réfléchi sur M_2 semblent tous les deux provenir d'une région de l'espace au voisinage du miroir M_2.

Un système optique (éventuellement un œil), non représenté sur les figures, permet de faire se croiser les rayons émergents issus d'un même incident ; on produit ainsi des interférences sur le lieu d'intersection, donc au voisinage de l'image réelle du coin d'air (éventuellement sur la rétine de l'observateur).





Les deux ondes dues à S et ressortant du dispositif sont cohérentes entre elles et interfèrent donc (interférences à deux ondes) ; on parle toujours d'interférences par division d'amplitude.

L'agrandissement (figure de droite) permet d'évaluer la différence de marche $\delta(x)$ de la façon suivante : si $e(x)$ est l'épaisseur algébrique du coin à l'abscisse x de l'arête, alors la différence de marche entre les deux rayons est :

$$\delta(x) \approx 2e(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta(x) \approx 2\alpha x}$$

en se limitant au terme du 1er ordre en α.
Les franges données par $\delta(x) = cste$, d'où le nom de frange d'égale épaisseur (celle du coin d'air), soit $x = cste$, sont des segments parallèles à l'arête du coin d'air (les franges sont rectilignes et la figure d'interférences ressemble à celle donnée par les trous d'Young).
La frange brillante d'ordre p se trouve en x_p tel que :

$$\delta = 2\alpha x_p = p\lambda \quad \Rightarrow \quad x_p = p\frac{\lambda}{2\alpha}$$

Les franges claires sont équidistantes et l'interfrange vaut : $\boxed{i = \frac{\lambda}{2\alpha}}$

- ceci montre, avec λ en µm et i au moins en mm pour être visible, que l'angle α doit être très petit, de l'ordre de 10^{-3} rad,
- l'interfrange augmente lorsque l'angle diminue,
- i étant proportionnel à λ, chaque longueur d'onde donne son propre système de franges, d'où un problème de cohérence temporelle, sauf au voisinage de l'arête où $\delta = 0$, $\forall\lambda$.

Quand la source S est quasi ponctuelle, les franges ne sont pas localisées (on peut les voir dans tout l'espace), mais elles sont très peu lumineuses. L'emploi d'une source étendue permet d'y remédier. À α fixé, pour qu'il ait franges, il faut x variable ce qui est atteint avec un faisceau qui couvre les miroirs, et ceci sous incidence nulle. La source étendue (sans problème de cohérence spatiale sur l'image du coin car la différence de marche y est quasi indépendante du point S choisi sur cette source) est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente L_1, de sorte que le faisceau éclairant l'interféromètre et dû à un point « central » de cette source éclaire M_2 par un faisceau collimaté, en incidence normale. Néanmoins chaque point de la source donne son propre système de franges ; l'ensemble se brouille presque partout sauf au voisinage du coin d'air (ou de son image) d'où la localisation des franges (l'endroit de la localisation est l'intersection de deux émergents issus d'un même incident).
Les franges rectilignes, alors lumineuses (la source est étendue) sont soit observées sur un écran à l'aide d'une lentille L_2 qui conjugue le coin d'air et cet écran, soit directement à l'œil qui accommode sur le coin d'air.

L'optique géométrique en terme ondulatoire

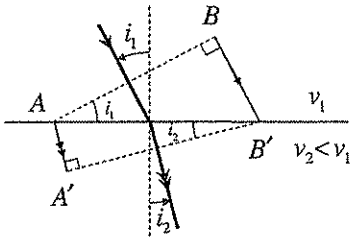
32. Le théorème de Malus

On note Φ la phase d'une onde progressive monochromatique.
Une surface équiphase est l'ensemble des points de même phase à un instant t donné : $\Phi = cste$ à t fixé.
Si la phase s'écrit $\Phi(r,t) = \omega t - k\,r + \varphi$, $\Phi(r,t) = cste$ à t fixé donne $r = cste$ ce qui décrit une onde sphérique.
Si la phase s'écrit $\Phi(z,t) = \omega t - k\,z + \varphi$, $\Phi(z,t) = cste$ à t fixé donne $z = cste$ ce qui décrit une onde plane.
Dans tous les cas, les surfaces équiphase correspondent aux surfaces d'onde.

Pour une onde plane progressive monochromatique de phase $\Phi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi$, on peut écrire $\vec{k} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi(\vec{r},t)$, ce qui prouve que $\vec{k}$ est normal aux surfaces d'onde (s'appuyer sur l'analogie avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ où $\vec{E}$ est normal aux équipotentielles) ; c'est le théorème de Malus.

33. La loi de Snell-Descartes

La réfraction des rayons lumineux entraîne celle des plans d'onde (qui leur sont toujours orthogonaux d'après le théorème de Malus). Dans l'hypothèse $v_2 < v_1$, le rayon se réfracte en se rapprochant de la normale ; soit A' le point tel que $A'B'$ constitue un plan d'onde perpendiculaire au rayon dans le milieu 2. Ainsi les segments BB' et AA' peuvent être considéré comme des rayons respectivement dans les milieux 1 et 2 (BB' est parallèle au rayon incident et AA' est parallèle au rayon réfracté). Entre les surfaces d'onde AB à l'instant t et $A'B'$ à l'instant $t + \Delta t$, la propagation permet d'écrire :



$$\Delta t = \frac{BB'}{v_1} = \frac{AA'}{v_2} \quad \text{soit} \quad \frac{AB'\sin i_1}{v_1} = \frac{AB'\sin i_2}{v_2}, \text{ d'où la relation } \boxed{\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}}$$

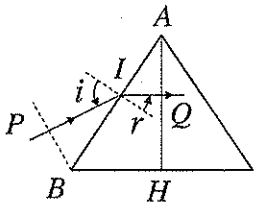
En optique où $v_i = c / n_i$, on retrouve la loi de réfraction de Descartes-Snell :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Cela correspond aussi, après multiplication par AB', à l'égalité des chemins optiques sur tous les rayons entre deux surfaces d'onde.
Mais le résultat encadré est plus général et s'applique à tout type d'onde (par exemple les ondes acoustiques).

34. a) Le triangle étant équilatéral (angle au sommet 60°), l'angle de réfraction r en I vaut 30°. La loi de Descartes en I, $\sin i = n \sin r$, assure alors :

$$\boxed{\sin i = \frac{n}{2}}$$



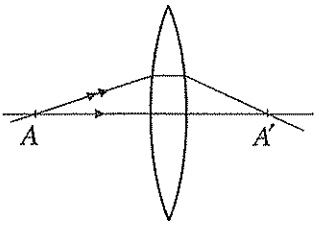
b) Le chemin optique est :

$$(PIQ) = PI + nIQ = (a-x)\sin i + n\frac{x}{2}$$

soit $\boxed{(PIQ) = \frac{na}{2}}$ d'après le résultat du a).

Il apparaît qu'il est indépendant de x. En fait, les plans PB et AQH sont deux plans d'onde (surfaces orthogonales aux rayons) et le résultat suivant établi ici est général : entre deux surfaces d'onde, le chemin optique est indépendant du chemin géométrique suivi (s'en convaincre facilement en prenant I en A ou B).

35. Considérons deux trajets entre A et A', le trajet 1 direct par l'axe optique (qui sert toujours de support à un rayon) et le trajet 2 s'écartant de l'axe. La trajet 1 est géométriquement le plus court, mais le rayon est ralenti (dans le verre, $v = 200\,000$ km/s) sur une certaine épaisseur de verre. Le trajet 2 est géométriquement plus long, mais le rayon est ralenti sur une plus faible épaisseur de verre. On peut comprendre qualitativement que les temps de parcours puissent être approximativement les mêmes, ce qui revient à dire que le chemin optique est indépendant du chemin géométrique suivi.



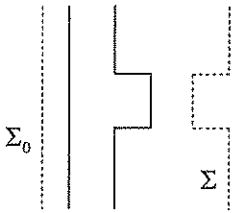
36. Objet de phase

a) La différence de marche $\delta = (rayon\ 1) - (rayon\ 2)$ évaluée sur la même épaisseur e est :

$$\delta = ne - \left[ne_0 + (e - e_0)\right], \text{ et comme } \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)(e-e_0)}$$

Une surface d'onde Σ après la traversée de la lame correspondant au plan d'onde Σ_0 avant traversée est discontinue puisque la lumière est davantage retardée à travers l'irrégularité qu'à travers la lame plus mince.



b) L'objet est totalement transparent (il est dit « objet de phase ») et donc le défaut n'est pas visible dans un montage d'optique géométrique car son intensité n'est pas altérée (et $e^{-i\varphi}.e^{+i\varphi} = 1$!).

c) Au contact optique ($e = 0$ et $\alpha = 0$) il n'y a pas de franges et l'éclairement donné par l'interféromètre de Michelson est uniforme et maximal. En plaçant la lame précédente contre le miroir M_1, le faisceau 1 à travers le défaut est déphasé de

2φ (φ à l'aller et φ au retour) par rapport au faisceau 2, ce qui correspond à un éclairement différent (à condition que $2\varphi \neq 2p\pi$ et que $2ne$ soit inférieur à la longueur de cohérence) et donc le défaut devient visible. (voir à ce sujet la question **15.**)

■ Rappels sur la diffraction

37. Écrans complémentaires

a) Il suffit d'écrire que $\sin\theta_0 = \frac{\lambda}{a} \approx \tan\theta_0 = \frac{50a}{D} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\lambda D}{50}} \approx 0{,}14$ mm .

Alors $a \approx 220\lambda$, ce qui assure bien θ_0 petit.

(Une idée couramment répandue voudrait que la diffraction ne soit correctement observable qu'à partir du moment où $a \approx \lambda$, ce qui est manifestement faux !).

Rq : Dans ces conditions $D = 1{,}5 \text{ m} \gg \frac{a^2}{4\lambda} \approx 1$ cm qui est le critère retenu pour se trouver, sans lentille de projection, dans les conditions de Fraunhofer.

b) Deux écrans sont complémentaires si la partie opaque de l'un correspond à la partie transparente de l'autre, par exemple une fente et un fil (même si dans la pratique, ceci ne concerne qu'une zone limitée, ne serait-ce que par la taille finie du faisceau lumineux). Bien sûr le fil laissera passer plus de lumière que la fente, l'image dans la direction de l'optique géométrique y sera plus lumineuse.

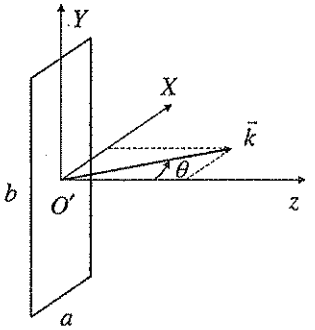
Deux écrans complémentaires présentent les mêmes bords ; et donc les effets de bord, à savoir les figures de diffraction, sont identiques sur l'écran d'observation.

Alors pour un cheveu de diamètre a :

$$\sin\theta_0 = \frac{\lambda}{a} \approx \tan\theta_0 = \frac{\Delta x}{2D} \Rightarrow a = \frac{2\lambda D}{\Delta x} \text{ soit } \underline{a \approx 50 \text{ µm}}$$

38. Une fente fine est telle que $b \gg a \gg \lambda$, avec typiquement les ordres de grandeur suivants : $b \approx 2$ cm , $a \approx 0{,}1$ mm et $\lambda \approx 0{,}5$ µm .

On peut donc négliger la diffraction dans la direction $O'Y$ pour ne considérer que les vecteurs d'onde $\vec{k}$ dans le plan $XO'z$ (angle θ). L'intensité diffractée dans la direction d'angle θ est donnée par :

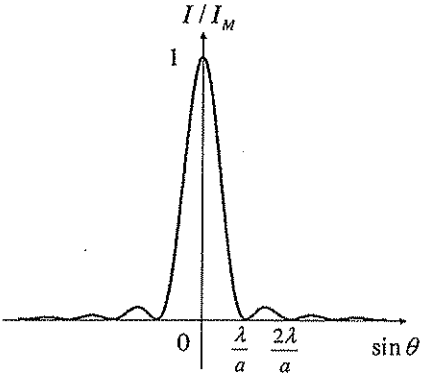


$$\boxed{I(\theta) = I_M \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2}$$

où $I_M = I(\theta = 0)$ est l'intensité maximale et $u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$.

La figure de diffraction est obtenue sur l'axe Ox de l'écran perpendiculaire à la direction $O'Y$ de la fente (le montage a été vu à la question 8.). Le maximum d'intensité est obtenu pour $\theta = 0$, c'est-à-dire dans la direction de l'optique géométrique.
La tache centrale est deux fois plus large que les taches latérales, peu lumineuses.
La première annulation s'obtient pour :

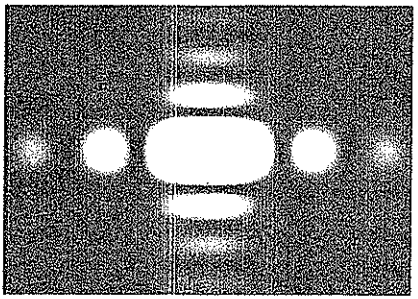
$$\boxed{\sin\theta_0 \approx \theta_0 = \lambda / a}$$

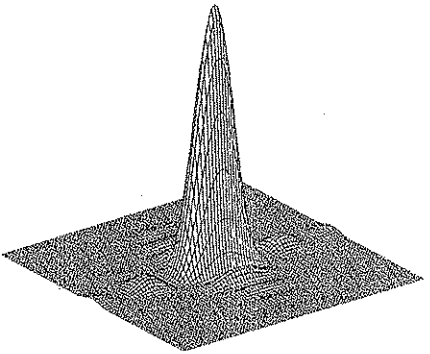


et montre que la diffraction est d'autant plus importante (θ_0 élevé) que la fente est fine (largeur a petite, tout en restant très supérieure à λ).

Le pic central est obtenu pour $u = 0$ (soit $\theta = 0$) et les annulations pour $u = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ (soit $\sin\theta = \frac{\lambda}{a}, \frac{2\lambda}{a}, \frac{3\lambda}{a}, \ldots$). Une estimation de la position des deux premiers maxima secondaires est $u_1 \approx \frac{3\pi}{2}$ et $u_2 \approx \frac{5\pi}{2}$, ce qui correspond à des intensités relatives : $\frac{I_1}{I_M} \approx \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 = 0{,}045$ et $\frac{I_2}{I_M} \approx \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 = 0{,}016$ très faibles.
En réalité, le premier maximum secondaire, en $1{,}43\,\lambda/a$, vaut $I/I_M = 0{,}047 \approx 1/20$.

39. Comme à la question précédente, a étant suffisamment petit, on a une diffraction suivant la direction de Ox sur l'écran. Et comme b est du même ordre de grandeur, on a cette fois-ci également une diffraction suivant la direction Oy de l'écran. Les taches en dehors des axes sont très faiblement lumineuses.
La tache centrale est la plus large dans la direction où l'ouverture est la plus étroite (et donc ci-dessous la direction de Ox car $a < b$).





Si b grandit, les taches secondaires sur la direction Oy se resserrent et il n'y a alors plus de lumière que sur l'axe Ox, ce qui redonne le résultat de la fente fine.

40. À l'endroit le plus étroit (appelé le col ou *waist*) le diamètre du faisceau laser vaut $d \approx 2$ mm ; avec une longueur d'onde $\lambda \approx 0{,}6$ µm, l'auto-diffraction se fait dans un cône de demi-angle au sommet $\theta = 1{,}22\dfrac{\lambda}{d}$ soit $\underline{\theta = 3{,}7.10^{-4} \text{ rad} \approx 1{,}3'}$

Rappel : la conversion des minutes d'arc (symbole : 1 minute = 1') en radians (pour le goniomètre, ou l'inverse comme ici) s'opère comme suit :
Sachant qu'il y a 60' dans un 1° et 180° dans π rad, il vient :

$$1' = \frac{\pi}{180 \times 60} = 2{,}9.10^{-4} \approx 3.10^{-4} \text{rad}$$

Cette valeur peut sembler très faible et est peu perceptible en TP, mais en l'état, l'impact sur la Lune, à 380 000 km, serait une tache circulaire d'environ 300 km de diamètre. Étendre le faisceau avec une lentille le fait diverger moins, mais il y a néanmoins peu de lumière réfléchie par les dispositifs mis en place sur la Lune pour les mesures de distance Terre-Lune.

Interférences

41. a) I_0 est l'intensité de chaque faisceau s'il était seul (I varie entre 0 et $4I_0$) ;

b) I_0 est l'intensité moyenne (au sens spatial) sur l'écran (I varie entre 0 et $2I_0$) ;

c) I_0 est l'intensité maximale, celle d'une frange brillante (I varie entre 0 et I_0).

42. Superposons deux ondes de pulsations ω_1 et ω_2 ; l'amplitude résultante est :

$$A = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

où φ est le déphasage spatial au point d'observation M.

Dans A^2, remplaçons le produit des cosinus par une somme :

$$A^2 = a_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + a_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi) + a_1 a_2 \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi\right) + a_1 a_2 \cos\left((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi\right)$$

Le passage à la valeur moyenne temporelle donne :

$$< A^2 > = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + a_1 a_2 < \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi\right) > + 0$$

En effet, cette valeur moyenne est effectuée sur une durée de l'ordre de $T \approx 0{,}1$ s qui est le temps d'acquisition de l'œil alors que les fréquences ν_1, ν_2 et $\nu_1 + \nu_2$ sont de l'ordre de 10^{15} Hz.

En revanche, si l'on imagine $\nu_1 - \nu_2 < 1/T = 10$ Hz, alors la valeur moyenne $< \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi\right) > \neq 0$ (c'est la moyenne d'un cosinus sur une durée inférieure à sa période). Mais ceci n'est pas réalisable. Prenons deux raies très voisines comme celle du doublet jaune du sodium :

$\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm $\Rightarrow$ $\nu_1 = 5{,}093.10^{14}$ Hz et $\nu_2 = 5{,}088.10^{14}$ Hz

soit $\Delta\nu = 5.10^{11}$ Hz $\gg 10$ Hz !

Même la largeur d'une raie de laser ($\Delta\nu = 10^6$ Hz) est très supérieure à l'écart maximal de 10 Hz entre deux raies pour qu'elles interfèrent.

De $<\cos\left((\omega_1-\omega_2)t-\varphi\right)>=0$, on déduit $<A^2>=\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{2}$ soit $I=I_1+I_2$.

Il n'y a pas d'interférences entre deux ondes de fréquences différentes.

43. Au point M d'observation où les deux ondes cohérentes entre elles sont déphasées de φ, leurs amplitudes complexes sont : $\underline{A}_1(M)=a$ et $\underline{A}_2(M)=ra\,e^{-i\varphi(M)}$ correspondant à des intensités respectives $I_1=ka^2=I_0$ et $I_2=kr^2a^2=r^2I_0$.

L'amplitude totale au point M est $\underline{A}(M)=\underline{A}_1(M)+\underline{A}_2(M)=a(1+r\,e^{-i\varphi(M)})$ d'où l'éclairement :

$$I(M)=ka^2(1+r\,e^{-i\varphi(M)}).(1+r\,e^{+i\varphi(M)})=I_0\left(1+r^2+2r\cos\varphi(M)\right)$$

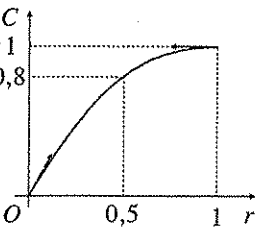
$$\text{ou mieux : } I(M)=(I_1+I_2)\left(1+\frac{2r}{1+r^2}\cos\varphi(M)\right)$$

Sous cette forme, le contraste des franges s'écrit directement : $\boxed{C=\frac{2r}{1+r^2}}$

Pour $r=0,5$ (le 2e faisceau est 4 fois moins lumineux que le 1er !), on a toujours $C=0,8$, ce qui est un excellent contraste.

Et pour $r\geq 0,5$, on a $C\geq 0,8$.

On fait interférer de préférence des ondes d'amplitudes égales pour maximiser le contraste, mais le réglage de cette égalité n'est pas critique (par exemple lorsque deux fentes d'Young ne sont pas tout à fait de la même largeur).

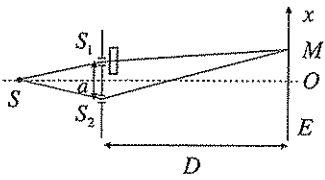


44. L'interfrange est $i=\Delta x/6=0,5$ mm, et comme $i=\lambda D/a$, on en déduit la longueur d'onde $\lambda=ai/D=0,5$ µm (couleur vert-bleu).

La différence de marche $\delta=(SS_2M)-(SS_1M)=(S_2M)-(S_1M)$ vaut à présent :

$$\delta=\frac{ax}{D}-(n-1)e \quad \text{(attention aux signes)}$$

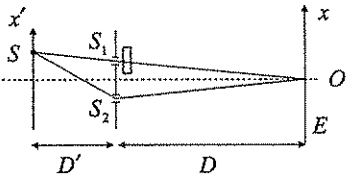
Il apparaît que la frange centrale définie par $\delta=0$ n'est plus au centre de l'écran comme précédemment, mais en $x_c=\frac{(n-1)eD}{a}=1$ cm ; l'ensemble du système de franges s'est donc translaté sur l'écran de 1 cm du côté de S_1.



Qualitativement, le rayon S_1M a été ralenti au passage par la lame ($c_{verre}\approx 200\,000$ km.s^{-1}) ; il faut donc, pour compenser, augmenter la longueur géométrique S_2M, d'où un décalage de S vers le haut de la figure.

Pour retrouver la figure d'interférences initiale, il suffit de désaxer la fente source S du côté de S_1 de telle manière à rallonger cette fois le chemin optique sur les rayons passant par S_2 en imposant

$$(SS_2)-(SS_1)=(S_2O)-(S_1O)$$

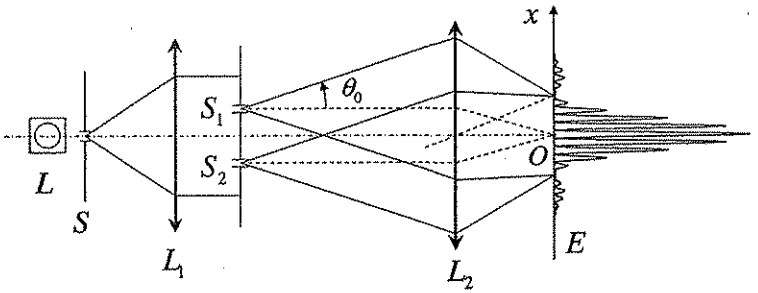


puisqu'on souhaite le retour de la frange centrale en O ; S doit donc être déplacée d'une quantité x' donnée par :

$$\frac{ax'}{D'}=(n-1)e \implies x'=\frac{(n-1)eD'}{a}=2 \text{ mm}$$

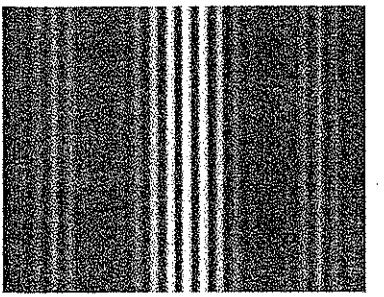
45. Franges des fentes d'Young compte tenu de la diffraction

a) Sur la figure ci-dessous, L est la lampe spectrale, S la fente source dans le plan focal objet de la lentille L_1, S_1 et S_2 les fentes diffractantes d'Young, L_2 la lentille de projection et E l'écran d'observation dans son plan focal image.



Chaque fente présente une figure de diffraction ; l'angle $\theta_0 \approx \lambda / a$ qui donne la première annulation est le demi-angle au sommet du cône de lumière.
Le maximum d'intensité de la figure de diffraction (tache centrale) de chaque fente se trouve dans la direction de l'optique géométrique, donc en O, grâce à L_2.

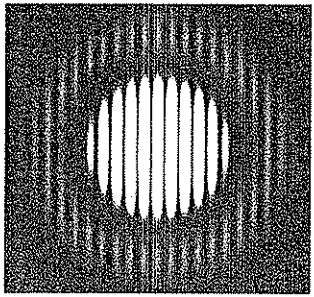
* Largeur totale de la tache centrale de diffraction sur l'écran :
  $\Delta x \approx 2\theta_0 f' = \frac{2\lambda f'}{a}$ où a est la largeur des fentes.
* L'interfrange est : $i=\frac{\lambda f'}{l}$ où l est la distance entre les deux sources S_1S_2 (avec $l > a$).



D'où le nombre de franges d'interférences à l'intérieur du pic central de diffraction :

$$N = \frac{\Delta x}{i} = \frac{2l}{a} = 10 \text{ franges}$$

(plus précisément $N = 1 + 2\mathrm{E}\left(\frac{\Delta x/2}{i}\right) = 9$, un nombre impair puisque la frange du centre est claire ; expérimentalement, en apparaissent moins car les voisinages des franges noires dues à la diffraction en rognent une sur chaque bord...).

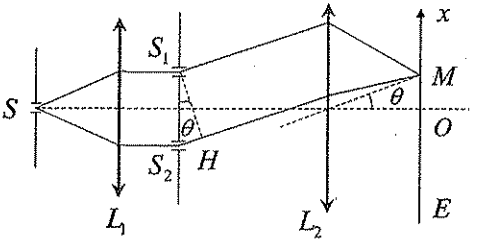


Dans l'expérience des trous d'Young, les franges d'interférences rectilignes (perpendiculaires à l'axe des trous) s'inscrivent dans la figure de diffraction des trous, et pour la partie la plus visible (même avec un laser) dans le disque central de la tache d'Airy (figure ci-contre).

b) Choisissons l'origine des phases sur l'onde provenant du centre de S_1 ; alors les amplitudes diffractées par S_1 et S_2 s'écrivent :

$$\underline{A}_1 = A_d(u) \quad \text{et} \quad \underline{A}_2 = A_d(u)\mathrm{e}^{-i\varphi}$$

où $u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} \approx \frac{\pi a x}{\lambda f'}$ est la variable de diffraction (on a fait $\sin\theta \approx \tan\theta$) et $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi l \sin\theta}{\lambda} \approx \frac{2\pi l x}{\lambda f'}$ le déphasage entre les deux ondes arrivant en M ; en effet $\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = S_2H = l\sin\theta$ car $(SS_2) = (SS_1)$ et $(HM) = (S_1M)$



L'amplitude totale diffractée par le système dans la direction θ est alors :

$$\underline{A}(x) = A_d\left(1 + \mathrm{e}^{-i\varphi}\right) \quad \text{avec} \quad A_d = A_0\frac{\sin u}{u}$$

d'où l'intensité : $\boxed{I(x) = 2I_d(x)\left(1 + \cos\varphi(x)\right)}$

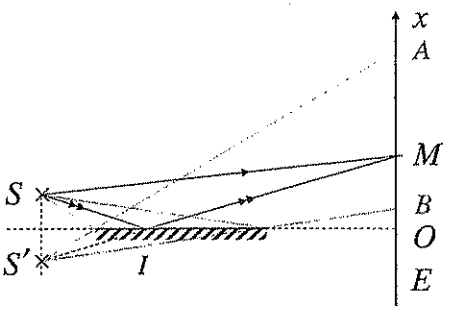
en notant $I_d = k\,A_d^2$, l'intensité diffractée par une fente, ce qui est la formule des interférences compte tenu de la diffraction (la courbe apparaît sur la figure de la question a)).

46. Miroir de Lloyd

a) Au point M de l'écran peuvent parvenir deux rayons issus de la source S : le rayon direct SM (une flèche) et le rayon SIM après réflexion sur le miroir (deux flèches) ; ce dernier semble provenir de S', symétrique de S par rapport au miroir.

S et S' sont deux sources ponctuelles, monochromatiques, et cohérentes entre elles : il y a donc possibilité d'interférences au point M de l'écran.

En pointillé fin les rayons issus de S et se réfléchissant sur les deux extrémités du miroir ; ils délimitent sur l'écran un segment AB limitant la zone d'interférences. Aucun rayon issu de S et se réfléchissant sur le miroir ne peut aboutir à O ; il n'y a donc pas de frange visible en ce point.



b) Le dispositif est alors équivalent à celui de deux trous d'Young S et S' distants de $a = SS' = 2b$. Et comme $D \gg b$, les franges sur l'écran E sont rectilignes, perpendiculaires au plan de la figure.

Aucun calcul n'est nécessaire, la formule donnant l'interfrange $i = \dfrac{\lambda D}{a}$ s'adapte en

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{2b}}$$

AN : $\underline{i = 0{,}4 \text{ mm}}$, toujours très petit.

c) Au déphasage géométrique $2\pi\dfrac{\delta}{\lambda} = 2\pi\dfrac{2bx}{\lambda D} = 2\pi\dfrac{x}{i}$, il faut ajouter le déphasage physique de π lié à la réflexion en I. La formule des interférences s'applique directement :

$$I(M) = 2I_0\left(1+\cos(2\pi\frac{x}{i}+\pi)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I(M) = 2I_0\left(1-\cos(2\pi\frac{x}{i})\right)}$$

Rq : S'il y avait une frange en O (en dehors du champ) elle ne serait pas brillante, mais sombre.

47. Interférences à 3 fentes

a) Les trois fentes étant de même largeur, les ondes qui en sont issues ont même amplitude A_0 ; et comme elles sont équidistantes, le déphasage $\varphi(x)$ de S_2 sur S_1 est le même que celui de S_3 sur S_2. Choisissons l'origine des phases sur l'onde arrivant au point M et issue de la fente S_2 du milieu ; alors les amplitudes complexes au point M sont :

$$\underline{A}_1(M) = A_0\,e^{i\varphi(M)} \;;\; \underline{A}_2(M) = A_0 \;;\; \underline{A}_3(M) = A_0\,e^{-i\varphi(M)}$$

(l'onde issue de S_3 est en retard sur celle issue de S_2, mais l'onde issue de S_1 est en avance sur celle issue de S_2).

Les trois ondes diffractées étant cohérentes entre elles, il faut sommer les amplitudes complexes :

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) + \underline{A}_2(M) + \underline{A}_3(M) = A_0(1 + 2\cos\varphi(M))$$

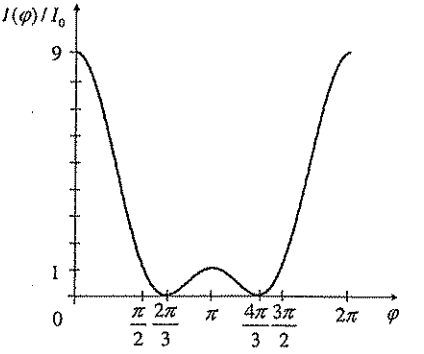
Cette amplitude complexe résultante est réelle.

L'éclairement est alors : $\boxed{I(M) = I_0\left(1 + 2\cos\varphi(M)\right)^2}$

où $I_0 = kA_0^2$ est l'éclairement de chacune des trois ondes si elle était seule.

Les valeurs remarquables de la fonction $I(\varphi)/I_0$ sont :

- pour $\varphi = 0$ (ou $\varphi = 2\pi$), les 3 ondes sont en phase en M ; l'amplitude est alors multipliée par 3 et donc l'intensité par 9.
- pour $\varphi = \pi/2$ (ou $\varphi = 3\pi/2$), les ondes issues de S_1 et S_3 sont en opposition de phase (déphasage de $2\varphi = \pi$) et se compensent, il reste une seule onde d'où l'intensité I_0.
- pour $\varphi = 2\pi/3$ (ou $\varphi = 4\pi/3$), les 3 ondes se compensent (la somme des racines cubiques de l'unité), et donc l'éclairement au point M est nul.
- pour $\varphi = \pi$, les ondes issues de S_1 et S_2 sont en opposition de phase et se compensent, il reste une seule onde d'où l'intensité I_0.



Voir la possible généralisation à N fentes à la question **58.**.

b) On a toujours des interférences par division du front d'onde ; l'amplitude complexe résultante est :

$$\underline{A}(M) = A_0\,e^{i\varphi(M)} + 2A_0\,e^{-i\pi/2} + A_0\,e^{-i\varphi(M)} = 2A_0(\cos\varphi - i)$$

en gardant l'origine des phases sur l'onde arrivant au point M et issue de la fente S_2 sur la face « avant » la lame dont le retard ($\pi/2$ correspond à une différence de marche de $\lambda/4$ puisque 2π correspond à λ) sur S_1 est de même signe que celui de S_3 sur S_1.

L'éclairement est alors :

$$I(\varphi) = 4I_0\left(\cos^2\varphi + 1\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{I(\varphi) = 6I_0\left(1 + \frac{1}{3}\cos 2\varphi\right)}$$

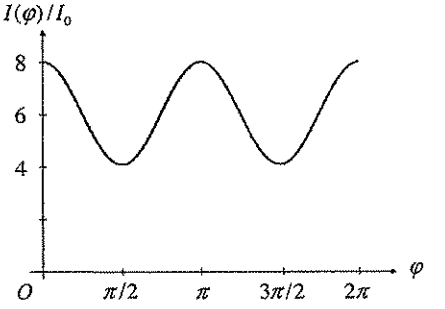
I_0 est l'intensité due à une fente extrême et φ la différence de phase géométrique entre deux fentes successives (sans compter l'effet de la lame).

Le contraste des franges est :

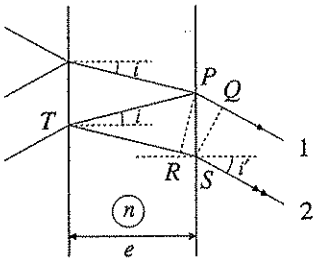
$$\boxed{C = \frac{1}{3}}$$

inutile de faire $C = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ puisque l'intensité est sous la forme $I(\varphi) = I'_0\left(1 + V\cos 2\varphi\right)$.

Ceci donne des franges d'amplitude $4I_0$ sur un fond uniforme d'intensité $4I_0$.



48. P est le « point de partage » des deux rayons marqués $\rightarrow$ et $\twoheadrightarrow$; il faut calculer $\varphi = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda_0}$ où δ est la différence de marche, c'est-à-dire la différence de chemin optique entre les deux rayons entre P (car il n'y en a pas avant) et M_∞ un point « à l'infini » puisque les deux rayons émergents étant parallèles, ils se coupent à l'infini (ou plus précisément dans le plan focal d'une lentille convergente) :



$$\delta = (PM_\infty)_2 - (PM_\infty)_1$$

À noter que les grandeurs $(PM_\infty)_i$ ne sont pas calculables, mais leur différence l'est, et le calcul n'est pas unique ; décomposons le calcul de δ :

$$\delta = n(PT + TR + RS) + (SM_\infty)_2 - \left[PQ + (QM_\infty)_1\right]$$

Or entre deux surfaces d'onde (perpendiculaires aux rayons d'après le théorème de Malus), le chemin optique est indépendant du chemin géométrique suivi, d'où :

$(SM_\infty)_2 = (QM_\infty)_1$ et aussi $nRS = PQ$ (le plan d'onde RP se réfracte en SQ)

il reste $\delta = n(PT + TR) = n\left(\dfrac{e}{\cos i} + \dfrac{e}{\cos i}\cos 2i\right) = \dfrac{ne}{\cos i}(2\cos^2 i)$

et finalement $\boxed{\delta = 2ne\cos i}$

Rq : Le choix du plan SQ plutôt que RP est moins judicieux, il conduit à écrire la loi de la réfraction $n\sin i = \sin i'$ ...

Notions de cohérence

49. Largeur naturelle et largeur Doppler

a) $\lambda_0 = 0{,}5$ µm correspond à du vert (un peu bleu) ; $\nu_0 = c/\lambda_0 = 6.10^{14}$ Hz.

L'émission de lumière lors d'une transition électronique dans un atome est un phénomène de durée limitée. Si τ_0 est la durée des trains d'onde émis, la longueur de cohérence liée à la largeur naturelle est la longueur spatiale de ce train d'onde soit $L_c = c\tau_0$ d'où $\tau_0 = 10^{-8}$ s = 10 ns.

La largeur spectrale naturelle $\Delta\nu$ à mi-hauteur de la raie (non totalement monochromatique) est liée à τ_0 par la relation $2\pi\tau_0\Delta\nu = 1$ soit $\Delta\nu = 10^8$ Hz = 0,1 GHz. Son facteur de qualité est $Q = \nu_0/\Delta\nu \approx 6.10^6$, ce qui considérable (la raie est très fine !).

Avec $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu_0}$, on a au signe près, $\Delta\lambda = \dfrac{c\Delta\nu}{\nu_0^2} = \dfrac{\lambda_0^2\Delta\nu}{c} \approx 10^{-13}$ m $\ll \lambda$.

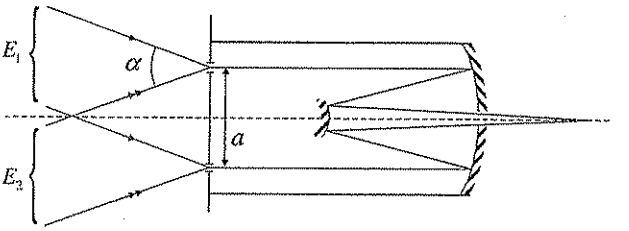
b) La vitesse quadratique moyenne u d'une molécule de masse m est donnée par :

$\dfrac{1}{2}mu^2 = \dfrac{3}{2}k_BT$, soit puisque $N_Ak_B = R$ et $N_Am = M$: $u = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}} \approx 430$ m.s^{-1}

La largeur Doppler est alors $\Delta\nu' = \nu_0\left(1+\dfrac{u}{c}\right) - \nu_0\left(1-\dfrac{u}{c}\right) = 2\dfrac{u}{c}\nu_0 \approx 1{,}7$ GHz ; on note qu'elle est bien supérieure à la largeur naturelle : $\Delta\nu' \approx 17\Delta\nu$ d'où une diminution du facteur de qualité à $Q' = 4.10^5$ (tout de même !).

On en déduit $\tau' = 1/2\pi\Delta\nu' \approx 0{,}1$ ns et $L_c' = c\tau' \approx 3$ cm, ce qui est déjà beaucoup. En tenant compte des collisions, on trouve plutôt quelques mm ce qui est bien l'ordre de grandeur de la différence de marche sur laquelle l'affaiblissement du contraste avec un interféromètre de Michelson est notable. Par ailleurs $\Delta\lambda' \approx 17\Delta\lambda \approx 10^{-12}$ m.

50. Distance angulaire d'un système d'étoiles doubles



Chaque étoile est considérée comme une source quasi ponctuelle ; ces deux sources primaires E_1 et E_2 émettent des lumières incohérentes entre elles et chacune donne à travers les fentes d'Young son propre système de franges. Les deux systèmes se recouvrent bien car α est très petit. La première annulation de contraste $C = 0$ est

cependant obtenue (voir la question **21.** pour le raisonnement et les notations) lorsque $\alpha \approx \frac{E_1E_2}{D'} = \frac{\lambda}{2a}$. Sachant que la distance a des fentes est variable, la plus petite valeur mesurable de α est donnée par :

$$\alpha_{min} = \frac{\lambda}{2a_{max}} = 5.10^{-7} \text{ rad} = 0{,}1'' \text{ (seconde d'arc)}$$

51. Superposition de deux modes voisins

a) Les ondes marquées 1 et 2 sont en phase en O.

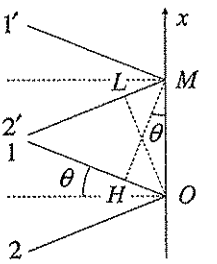
L'onde 1' en M est en avance sur l'onde 1 en O de $HO = x\sin\theta$, soit $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} x\sin\theta$

L'onde 2' en M est en retard sur l'onde 2 en O de $LM = x\sin\theta$, soit $\varphi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} x\sin\theta$

d'où la différence de phase entre les ondes 1' et 2' arrivant en M :

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} 2x\sin\theta$$

(une autre méthode est développée à la question **76.**)



b) Le mode de fréquence ν_1 donne sur l'écran une figure d'interférences d'intensité :

$$I_1(M) = 2I_0\left(1+\cos\frac{4\pi}{c}\nu_1 x\sin\theta\right)$$

Le mode de fréquence ν_2 donne sur l'écran une figure d'interférences d'intensité :

$$I_2(M) = 2I_0\left(1+\cos\frac{4\pi}{c}\nu_2 x\sin\theta\right) \text{ (le même } I_0)$$

Il n'y a pas cohérence entre ondes de fréquences différentes, d'où l'intensité résultante :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) = 4I_0\left(1+\cos\frac{4\pi}{c}\delta\nu x\sin\theta.\cos\frac{4\pi}{c}\nu x\sin\theta\right)$$

Tout se passe comme si on avait la figure d'interférence d'une onde de mode unique de fréquence ν (de franges perpendiculaires au plan de la figure) et dont le contraste varie lentement (car $\delta\nu \ll \nu$) en fonction de x suivant la loi :

$$C(x) = \left|\cos\frac{4\pi}{c}\delta\nu x\sin\theta\right|$$

La première annulation du contraste se produit à une abscisse x_0 telle que $\frac{4\pi}{c}\delta\nu x_0\sin\theta = \frac{\pi}{2}$. La mesure expérimentale de x_0 conduit alors à :

$$\boxed{\delta\nu = \frac{c}{8x_0\sin\theta}}$$

Sans calcul, ce résultat s'établit comme suit : les déphasages pour chaque système de franges sont $\varphi_i = \frac{4\pi}{c} \nu_i x \sin\theta$. En les superposant, la première annulation de contraste est obtenue au point d'abscisse x_0 lorsqu'une frange claire de l'un correspond à une frange sombre de l'autre :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi = \frac{4\pi}{c}(\nu_1 - \nu_2) x_0 \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \delta\nu = \frac{c}{8 x_0 \sin\theta}$$

L'interféromètre de Michelson

52. Mesure de l'épaisseur d'une lame

Dans cette opération la différence de marche δ varie de $\Delta\delta = 2(n-1)l$, l'indice de l'air étant assimilé à 1, le facteur 2 étant dû à l'aller-retour de la lumière.

L'ordre d'interférence p varie de $\Delta p = \frac{\Delta\delta}{\lambda} = \frac{2(n-1)l}{\lambda}$ d'où $l = \frac{\Delta p.\lambda}{2(n-1)} = \underline{17{,}6\ \mu\text{m}}$.

La précision d'une demi-frange, soit $\delta\Delta p = 1/2$, conduit à une incertitude sur l de $\delta l = \frac{\delta\Delta p.\lambda}{2(n-1)} = 0{,}2\ \mu\text{m}$, ce qui est remarquable puisque de l'ordre de la longueur d'onde. À noter qu'avec un palmer (instrument mécanique), la précision n'excède pas 1/100 ème de mm soit 10 µm.

53. Observation des anneaux sur un écran

a) La source étant quasi ponctuelle, l'interféromètre est éclairé sous une incidence $i = 0$ unique (en lumière parallèle). La différence de marche $\delta = 2e$ est uniforme à un instant donné d'où une absence de franges sur l'écran E. Lorsque e varie au cours du temps, le point concerné de l'écran est alternativement brillant (lorsque $\delta = 2e = p\lambda$) et sombre (lorsque $\delta = 2e = (p' + 1/2)\lambda$).

b) L'inclinaison maximale i_{max} des rayons arrivant sur le système est donnée par $\tan i_{max} = d / 2f_1'$ (soit $i_{max} = 5{,}7°$).

L'éclairement sur l'écran a la forme d'un disque (image de la source par l'optique géométrique) de rayon $R = f_2' \tan i_{max} = \frac{df_2'}{2f_1'} = 10\ \text{cm}$ qui s'identifie au rayon du plus grand anneau visible.

L'angle (petit) sous lequel on a le $k^{ième}$ anneau (en supposant que le centre est clair) est donné par $i_k \approx \sqrt{k\lambda / e}$ (voir à la question **30.**) ; la condition $i_{k_{max}} = i_{max}$ conduit à $k_{max} \approx 36$, il y a donc en gros 36 anneaux visibles.

54. Mesure d'une longueur d'onde

a) En F_2' on observe un point qui « clignote » car les anneaux s'y engouffrent ou y naissent et donc le centre est alternativement clair ou sombre.

$I(x) = 2I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta(x)}{\lambda}\right)$ avec $\delta(x) = 2x$ et $x = vt$ d'où :

$$\boxed{I(t) = 2I_0\left(1+\cos\frac{4\pi\nu t}{\lambda}\right)}$$

b) En écrivant $I(t) = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi t}{T_0}\right)$, on en déduit la période $T_0 = \frac{\lambda}{2\nu}$ qui dépend de la longueur d'onde et est d'autant plus petite (le centre clignote rapidement) que la vitesse du chariot est grande.

$T_0 = 0{,}341$ ms n'est pas observable (bien plus petit que le temps de réponse de l'œil), mais mesurable avec un fréquencemètre ($f_0 = 1/T_0 = 2{,}93$ kHz) ou un logiciel adapté sur ordinateur et recevant le signal électrique délivré par une photodiode ou un photomultiplicateur éclairé en F_2'.

On en déduit $\underline{\lambda = 2\nu T_0 = 546 \text{ nm}}$ (raie verte du mercure)

■ Le réseau ou interférences à N ondes

55. La formule du réseau par transmission est : $\sin\theta = \sin\theta_0 + Kn\lambda$.

Ici l'angle d'incidence est $\theta_0 = i$ et l'angle de transmission $\theta = 0$ pour $\lambda = \lambda_0$ dans l'ordre $K = 2$, d'où $\underline{i = 30°}$.

56. La formule du réseau $\sin\theta = \sin\theta_0 + Kn\lambda$ avec $\theta_0 = 0$ donne $n = \frac{\sin\theta}{K\lambda}$. Il faut convertir les angles en degrés décimaux d'où $\underline{n = 547 \text{ traits/mm}}$.

En traduisant $\sin\theta \leq 1$, il vient $K \leq 3{,}3$, ce qui permet de voir les 7 ordres suivants : -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3.

Pour la raie bleue, écrire la formule pour le même ordre $K = 2$ que le vert, d'où sans passer par n : $\underline{\lambda' = \lambda\sin\theta_2' / \sin\theta_2 = 492 \text{ nm}}$.

57. NB : Un réseau de pas $p = 2$ µm correspond à un nombre de traits par unité de longueur de $n = 1/p = 500$ traits/mm.

Avec $-1 \leq \sin\theta_k \leq 1$, la formule du réseau $\sin\theta_k = \sin\theta_0 + k\lambda/p$ conduit à :

$$(-1-\sin\theta_0)\frac{p}{\lambda} \leq k \leq (1-\sin\theta_0)\frac{p}{\lambda}$$

AN : $\lambda_v = 400$ nm : $-7{,}5 \leq k \leq 2{,}5$ soit $-7 \leq k \leq 2$ et donc au total 10 ordres ;

$\lambda_r = 700$ nm : $-4{,}3 \leq k \leq 1{,}4$ soit $-4 \leq k \leq 1$ et donc au total 6 ordres.

Le rouge, davantage dispersé que le violet, présente moins d'ordre.

Le recouvrement entre le spectre d'ordre $k > 0$ et celui d'ordre $k+1$ apparaît lorsque $\sin\theta_k(\text{rouge}) > \sin\theta_{k+1}(\text{violet})$ conduisant à

$$k > \frac{\lambda_v}{\lambda_r - \lambda_v} = 1{,}3 \text{ soit } k = 2$$

il y a donc recouvrement à partir de l'ordre 2 (pour le rouge) et 3 (pour le violet).

58. Calcul de l'intensité des N ondes

a) Les ondes issues des différentes fentes sont cohérentes entre elles : il faut donc sommer les amplitudes complexes avant de passer à l'éclairement.

Chaque fente diffracte $A_d(\theta) = A_0 \dfrac{\sin u}{u}$ avec $u = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$ et le même A_0 car les fentes sont de même largeur.

Le déphasage $\varphi = \dfrac{2\pi l \sin\theta}{\lambda}$ d'une fente à la suivante, et qui s'obtient comme à la question **25.**, est constant car les fentes sont équidistantes, d'où l'amplitude totale :

$$\underline{A}(\theta) = A_d\left(1 + e^{-i\varphi} + e^{-2i\varphi} + ... + e^{-(N-1)i\varphi}\right) = A_d \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}$$

En mettant la phase moitié en facteur au numérateur et au dénominateur et en multipliant et divisant par N, il vient :

$$\underline{A}(\theta) = N A_d \, e^{-i\frac{N-1}{2}\varphi} \frac{\sin N\varphi/2}{N \sin\varphi/2}$$

Rq : L'onde résultante semble par sa phase provenir du centre du réseau : $\dfrac{N-1}{2} l$

b) D'où l'intensité observée dans la direction θ : $I(\theta) = K\,|\underline{A}(\theta)|^2$, et en posant $I_0 = K A_0^2$:

$$\boxed{I(\theta) = N^2 I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin N\varphi/2}{N \sin\varphi/2}\right)^2}$$

c) Sous cette forme, la fonction $I(\theta)$ fait apparaître le produit de :

- l'intensité maximale (N sources cohérentes d'intensité I_0 donnent $N^2 I_0$),
- la fonction sinus cardinal de diffraction de chaque fente (cette diffraction est importante, car à 500 traits/mm, la largeur d'une fente est inférieure à 2 µm ; c'est la courbe en pointillé sur le graphe (qui coiffe la courbe d'interférence) et qui s'annule comme on s'y attend pour λ / a,
- la fonction décrivant l'interférence des N ondes (on retrouve pour $N = 1$ ou 2 des résultats bien connus, et le cas $N = 3$ est traité à la question **47.**). Elle donne des pics de lumière pour $\sin\theta_K = K\lambda / l$ (la périodicité du dénominateur), ce qui correspond aux ordres de la formule du réseau ; ces pics ont une largeur de $\lambda / Nl = \lambda / L$ (1ère annulation du numérateur qui varie N fois plus vite) où $L = Nl$ est la largeur totale éclairée du réseau.

La courbe avec les commentaires est tracée dans la réponse de la question **27.**.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

59. Le résultat « lumière + lumière = 4× lumière » (frange brillante) et surtout le résultat « lumière + lumière = obscurité » (frange sombre) sont surprenants et peu fréquents dans la vie quotidienne où les lumières qui se superposent ne sont pas cohérentes entre elles (et donc simplement « lumière + lumière = 2× lumière »). De même la taille des objets courants (très grande devant la longueur d'onde) favorise l'application des lois de l'optique géométrique et en particulier du principe de propagation rectiligne de la lumière dans les milieux homogènes, et donc tout phénomène de diffraction paraît paradoxal. L'optique géométrique, fondée sur la notion de rayons lumineux, est impuissante à les expliquer.
Attention à l'utilisation abusive courante du mot « interférence » ; ainsi, en montant dans un avion, on s'entend dire : « Veuillez éteindre vos téléphones portables qui risquent « d'interférer » avec les appareils de commande à bord ». Cela signifie simplement que des signaux se superposent ; ils se parasitent mutuellement mais sans interférer au sens physique du terme puisqu'ils ne sont pas cohérents entre eux...

60. Diffraction de la lumière.
* En fermant presque complètement les yeux, les bords des deux paupières délimitent une fente ; une source de lumière quasi ponctuelle regardée de la sorte semble alors s'étirer perpendiculairement à cette fente, ce dont on se rend compte en inclinant la tête.
* Une source de lumière observée au travers de l'interstice entre deux doigts voisins fait apparaître des franges liées à la diffraction des bords.
* Les hologrammes sur les timbres postes, les billets de banques ou pendentifs fantaisies, qui en ayant enregistré (par interférence) la phase liée à la profondeur d'un objet, permettent par diffraction sa restitution colorée et en trois dimensions.
* La dispersion de la lumière par un disque compact (ou certaines étoiles de Noël) est liée à la diffraction d'une micro-structure en forme de réseau et invisible à l'œil nu.

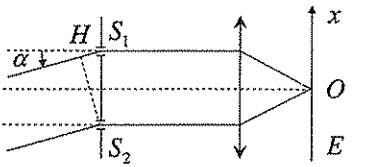
Diffraction d'autres types d'ondes. (chacun ayant sa propre échelle de longueur d'onde)
* Les ondes hertziennes en GO ($\lambda \approx 1$ km) sont bien mieux diffractées par une colline que les ondes hertziennes en MF ($\lambda \approx 1$ m) et donc mieux captées par un poste sur le versant arrière de cette colline...
* Les rayons X ($\lambda \approx 10^{-10}$ m) sont diffractés par la matière cristalline (qui se comporte comme un réseau tridimensionnel).
* Le son émis au niveau des cordes vocales est diaphragmé par la bouche. Une longueur d'onde de 34 cm dans l'air (fréquence vocale de 1 000 Hz) étant grande devant la taille de la bouche, une diffraction importante du son émis se produit et répartit l'intensité sonore dans une grande ouverture autour de la tête.
* D'une pièce à l'autre, on peut parfaitement entendre, à travers une porte ouverte, une personne sans la voir car les longueurs d'onde acoustiques (plus grandes que l'ouverture de la porte) sont diffractées de manière importante alors que les longueurs d'onde optiques sont trop petites pour l'être.

* Les vagues (arrivant en ondes planes) sont diffractées en ondes hémisphériques dans le passage entre les extrémités de deux digues protégeant l'entrée d'un port.

61. Dans les deux cas, la puissance de la diode laser utilisée est de l'ordre de 5 mW et la longueur d'onde se situe dans la fourchette de 770 à 810 nm, ce qui n'est plus guère visible puisqu'au début de l'infrarouge.
Les diodes bleues émettent une lumière de longueur d'onde en gros moitié de celle des diodes précédentes ; la diffraction est donc deux fois moindre, et comme il s'agit d'un problème bidimensionnel (un faisceau doit lire les informations sur la surface d'un disque gravé), la finesse de lecture avec une diode bleue est quatre fois supérieure à celle d'une diode rouge classique, ce qui permet aux « blu-ray » (HD pour Haute Définition) de stocker quatre fois plus d'informations sur une même aire qu'un DVD classique.

62. Il y a la diffraction produite par l'ouverture ; elle est d'autant plus réduite que le diamètre est grand (meilleure résolution angulaire), ce qui est par ailleurs souhaitable pour collecter plus de lumière (meilleure sensibilité). Il y a également, plus important, le problème de la turbulence atmosphérique, qui même par nuit noire et ciel dégagé, dégrade les images et réduit la résolution. L'optique adaptative permet de la compenser fortement en déformant les miroirs du télescope, de manière calculée en temps réel par des systèmes informatiques analysant la turbulence. On peut aussi s'en affranchir en satellisant le télescope au-dessus de l'atmosphère (tel le télescope spatial Hubble, qui n'est plus entretenu et sera remplacé par le télescope James-Webb).

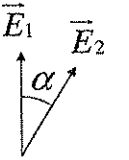
63. Pour le principe, observons au foyer O d'une lentille. Choisissons $t=0$ à l'instant où l'étoile est dans l'axe du télescope (en pointillé sur la figure), mais la Terre tourne et la direction de l'étoile se décale. Dans le référentiel du télescope, fixe par rapport au référentiel terrestre, pendant la durée t la direction de l'étoile a tourné de $\alpha=\Omega t$ avec $\Omega=7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}, vitesse angulaire de rotation de la Terre. Les ondes lumineuses provenant de cette étoile et diffractées par S_1 et S_2 interfèrent ensuite en O où elles accusent alors une différence de phase $2\pi\delta/\lambda$ pour chaque composante spectrale, avec $\delta=HS_1=a\sin\alpha\approx a\Omega t$ car α est très petit (et $a=S_1S_2$). On en déduit que les franges défilent en O ; leur période T est la durée pendant laquelle la différence de marche varie d'une longueur d'onde : comme $\delta(t=0)=0$, on a $\delta(t=T)=\lambda$ soit $T=\dfrac{\lambda}{a\Omega}$.



AN : On prend $\lambda=0{,}6$ µm et $a=1$ mm (comme en TP), d'où $T\approx 8$ s.
Si l'on augmente a, cette période devient encore plus courte...Dans la pratique, le télescope est entraîné par un moteur dont l'axe de rotation est parallèle à l'axe de rotation Sud Nord de la Terre pour un suivi de l'étoile observée.

64. Dans un dispositif d'interférences obtenues par division du front d'onde (de type fentes d'Young), les franges ne sont pas localisées (elles occupent un volume dans la zone de recouvrement des deux faisceaux). En augmentant la taille de la source (pour une plus grande luminosité), il y a perte de cohérence spatiale ; le contraste diminue et les franges se brouillent rapidement sur tout le volume, elles ne sont donc jamais très lumineuses.
Dans un dispositif interférentiel à division d'amplitude (de type interféromètre de Michelson), les franges ne sont pas localisées lorsque la source est quasi ponctuelle (auquel cas elles ne sont pas lumineuses !). L'augmentation de la taille de la source a également pour effet de brouiller les franges, sauf en un endroit appelé « lieu de localisation » (à l'infini ou sur l'un des miroirs selon le cas) ; les franges sont alors localisées. Leur avantage est double : d'une part, on n'a plus besoin de régler finement la taille de la source pour les obtenir ; d'autre part, comme on peut les produire avec une source étendue, il est facile de les rendre bien lumineuses…

65. Les champs $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ font un angle α entre eux, (on les prend de même norme E), et sont déphasés de φ à l'endroit considéré.



L'intensité résultante est :

$$I = k(\overline{E}_1 + \overline{E}_2\,e^{-i\varphi}).(\overline{E}_1 + \overline{E}_2\,e^{+i\varphi}) = k\left(2E^2 + \overline{E}_1.\overline{E}_2(e^{-i\varphi} + e^{+i\varphi})\right)$$

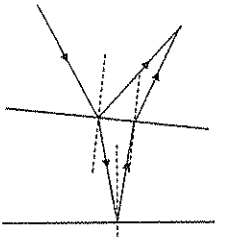
et avec $\overline{E}_1.\overline{E}_2 = E^2\cos\alpha$, il vient finalement :

$$\boxed{I(\varphi) = 2I_0(1+\cos\alpha\cos\varphi)}$$

Le facteur de visibilité est $V = \cos\alpha$; il suffit donc de tourner l'un des polariseurs pour voir le contraste des franges diminuer (c'est l'expérience de Fresnel et Arago).

66. Pour qu'une lame d'épaisseur e puisse être qualifiée de lame « à faces parallèles », il faut que cette épaisseur soit uniforme le long de la lame à δe près, la tolérance étant $\delta e < \lambda/10$ au plus (l'usinage ne pouvant être parfait au sens mathématique du terme !). Une simple vitre ne convient donc pas. Il faut aussi que l'indice de réfraction n soit bien uniforme dans toute la lame. Il en est de même des miroirs d'un interféromètre de Michelson polis à mieux que $\lambda/20$ près (c'est cette planéité, et la qualité de la micromécanique permettant de les déplacer, qui en fait le prix…).

67. Une bulle de savon est constituée d'une lame d'eau emprisonnant de l'air (le savon intervenant pour le maintien mécanique). À cause de la gravité, cette lame n'est pas d'épaisseur uniforme et localement elle peut être assimilée à un coin d'eau. C'est un système à division d'amplitude, puisque un rayon incident donne deux émergents avec un aller-retour dans la lame (les rayons émergents suivants sont liés aux faisceaux qui ont effectué plusieurs aller-retour dans la lame, rendant ainsi leur éclairement négligeable) ; l'un des rayons émerge par réflexion sur la face antérieure (avec déphasage de π) et l'autre après deux réfractions et une réflexion sur la face postérieure (sans déphasage).



Lorsque la bulle est éclairée par une source qui n'est pas quasi ponctuelle, les franges se localisent comme celles du coin d'air, donc quasiment sur la bulle. Les couleurs des cannelures claires du spectre de la lumière émergente sont celles pour lesquelles l'interférence au point considéré est constructive soit $\delta = p\lambda$, p entier.

Certains verres d'indice n sont traités « antireflet » par dépôt d'une mince couche d'un indice inférieur (voir la question **84.** du chapitre **3**) de telle manière que pour une longueur d'onde du spectre (aux environs de 0,55 µm qui correspond au maximum de sensibilité de l'œil), les interférences des ondes réfléchies soient destructives. Pour les autres longueurs d'onde, il demeure un léger reflet...

68. La résolution d'un télescope de diamètre D est liée à la diffraction en λ/D ; la résolution en ondes radio ($\lambda = 21$ cm) est donc nettement moins bonne qu'en ondes lumineuses ($\lambda \approx 0{,}5$ µm). L'intérêt cependant des ondes radio à $\lambda = 21$ cm est d'exister, d'être peu perturbées par la traversée de l'atmosphère, de permettre aux radioastronomes de travailler de jour (il n'y a pas de perturbation vers 1,4 GHz) ; de plus, la réalisation de tel gros télescope à $\lambda/20$ près, soit à 1 cm, ne pose aucun problème de fabrication (un simple grillage métallique de maille inférieure à λ suffit, et ceci sur une surface énorme depuis laquelle l'énergie captée est ensuite focalisée vers un foyer récepteur).

L'amélioration de la résolution s'effectue en associant plusieurs antennes en parallèle de manière à constituer un réseau et produire des interférences à N ondes comme au radiotélescope de Nançay. C'est d'ailleurs pour la même raison que la réception domestique d'ondes hertziennes télévisées s'effectuait dans le temps avec des antennes (sur les toits) en forme de « râteau ».

69. Considérons un motif de ce réseau constitué par deux seules facettes décalées de e. À l'infini, les deux ondes renvoyées dans la direction prévue par l'optique géométrique interfèrent destructivement puisqu'elles y sont en opposition de phase ; en effet, leur différence de marche est de $2e = \lambda/2$. Il n'y a donc pas d'intensité lumineuse renvoyée dans la direction (non dispersive) prévue par l'optique géométrique ! C'est d'ailleurs ainsi que l'information est codée sur les CD où sont repérées par interférence destructive par réflexion les passages d'un creux à une bosse et inversement.

70. Dans la pratique un réseau est toujours d'extension finie, mais plus important, l'onde incidente (un faisceau laser élargi par une lentille) ne couvre qu'une partie du réseau, excluant ainsi l'influence de la partie non éclairée sur les phénomènes observés.

Rappelons que si p est le pas du réseau et f' la distance focale de la lentille de projection, alors dans le plan de cette lentille, les ordres sont séparés d'une distance $\lambda f'/p$ où λ est la longueur d'onde ; pour un réseau illimité, ces ordres sont « ponctuels ».

Si N est le nombre de traits éclairés du réseau, sur une largeur finie $L = Np$, alors cet « effet de bord » conduit à une diffraction qui élargit la taille des ordres ; il ne s'agit plus alors de points, mais de taches dont la demi-largeur est de l'ordre de $\lambda f'/L$ soit $\lambda f'/Np$, une largeur N fois plus petite ($N \gg 1$) que la distance des ordres ; les ordres ne se chevauchent donc pas, ils restent très séparés.

71. Dans le cas où $a = \lambda$ les ordres ± 1 du réseau sont diffractés dans les directions données par $\sin\theta = \pm\lambda/a = \pm 1$ soit $\theta = \pm\pi/2$; ces ondes progressives se propagent alors perpendiculairement à l'axe Oz du système, c'est-à-dire parallèlement au plan du réseau, suivant Ox. L'éclairement sur l'écran est alors uniforme (lié au seul ordre 0 suivant l'axe), ce qui signifie que l'information sur la structure périodique du réseau est perdue ; la limite de résolution ultime, pour un objet périodique, d'un microscope à champ lointain (chargé d'en donner une image) est donc égale à la longueur d'onde de la lumière utilisée. Ce qui est conforme au « principe du filet de pêche » : plus on veut attraper des poissons de petite taille (voir des détails fins), plus la maille du filet de pêche doit être resserrée (plus la longueur doit être faible). « On ne peut pas attraper des poissons plus petits que la maille du filet de pêche » signifie « on ne peut pas voir des détails plus petits que la longueur d'onde ».

Dans le cas où $a < \lambda$, la formule $\sin\theta = \pm\lambda/a$ ne s'applique plus !

Les ondes diffractées ont alors une structure d'onde évanescente, progressive suivant Ox le long du plan du réseau (comme précédemment), mais dont l'amplitude s'atténue le long de la direction Oz de l'optique géométrique. Son existence proche de l'objet permet à un microscope à pointe d'établir l'image du réseau alors même que son pas est plus petit que la longueur d'onde : c'est l'intérêt du microscope en champ proche.

72. Les interférences sont recherchées (et on a vu que les conditions d'obtention ne sont pas faciles) car utiles : pour la métrologie lorsque la micromécanique a atteint ses limites (question **52.**) ; pour la spectrométrie par transformée de Fourier (largeur de raie) ; pour les mesures de défauts (questions **36.**), d'indice de réfraction (interféromètre de Rayleigh, question **76.**), de distance angulaire entre étoiles (méthode de Fizeau, question **50.**) ; pour la vélocimétrie laser (question **77.**) ; pour l'interférométrie destinée à la détection d'ondes gravitationnelles ; pour les filtres interférentiels, l'holographie,...

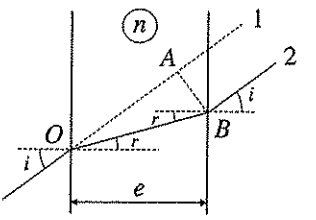
La diffraction est présente dès que l'on limite l'ouverture d'une onde, par effets de bord, c'est-à-dire toujours (question **10.**) ; elle accompagne inévitablement la formation des images et apparaît, lorsque les aberrations géométriques et chromatiques ont été réduites devant elle, comme la limite naturelle de la notion d'image ponctuelle – ce qui en fait une gêne, voire une difficulté. Elle est bien sûr utile et même recherchée pour des applications voulues, comme dans le traitement des images par filtrage ou dans d'autres domaines (voir parmi les réponses de la question **60.**).

Exercices

73. Influence de l'incidence sur une lame à faces parallèles (*)

Le rayon rectiligne $OA1$ dans l'air est celui en absence de la lame. Le rayon doublement réfracté $OB2$ (les deux extrémités étant parallèles) est celui qui passe dans la lame d'indice n. Jusqu'en O leur trajet est commun, et à partir du plan d'onde AB, il n'y a pas de différence de marche supplémentaire.

La variation $\Delta\delta$ de la différence de marche introduite par la lame sur le trajet dans l'air est donc :



$$\Delta\delta = nOB - OA = n\frac{e}{\cos r} - \frac{e}{\cos r}\cos(i-r)$$

Il vaut mieux choisir ce plan d'onde « intérieur » qui coupe la lame sur le rayon 2 en B plutôt que le plan d'onde « extérieur » et parallèle, qui coupe la lame sur le rayon 1…

Par ailleurs les réfractions se font suivant la loi des Descartes-Snell : $\sin i = n \sin r$

Alors : $\Delta\delta = n\frac{e}{\cos r} - \frac{e}{\cos r}(\cos i \cos r + \sin i \sin r) = n\frac{e}{\cos r}(1-\sin^2 r) - e\cos i$

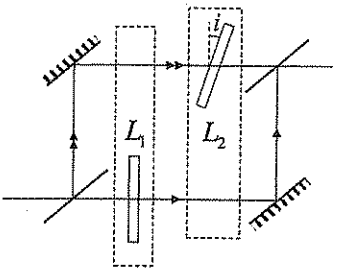
$$\text{soit} \quad \boxed{\Delta\delta = \left(n\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}} - \cos i\right)e}$$

ce qui pour $i = 0$ redonne le résultat classique $\Delta\delta = (n-1)e$

La fonction $\Delta\delta(i)$ est paire (i et $-i$ conduisent évidemment au même problème) ; dans le développement, le premier terme à conserver par rapport à $\Delta\delta(i=0)$ est donc en i^2 :

$$\Delta\delta \approx \left[n\left(1-\frac{i^2}{2n^2}\right) - \left(1-\frac{i^2}{2}\right)\right]e \quad \text{et finalement} \quad \boxed{\Delta\delta = \left(1+\frac{i^2}{2n}\right)(n-1)e}$$

74. Interféromètre de Mach-Zendher



En décalant les lames pour bien montrer qu'il s'agit, comme à la question précédente, de comparer le chemin dans chaque lame au chemin dans l'air, la différence de marche totale trajet (2) – trajet (1) (attention aux signes) est :

$$\delta(i) = \Delta\delta_2 - \Delta\delta_1 = \Delta\delta(i) - \Delta\delta(0) = \frac{n-1}{2n}ei^2$$

La lumière étant de largeur spectrale négligeable et émise par une source quasi ponctuelle, les ondes émergentes sont cohérentes entre elles (interféromètre à division d'amplitude) et la formule des interférences s'applique pour l'éclairement sur E :

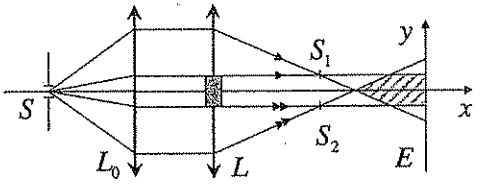
$$I(i) = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi\delta(i)}{\lambda}\right)$$

Elle montre que l'éclairement est uniforme pour toute valeur de i : l'interféromètre produit une teinte plate. Au départ, $i = 0$, elle est claire (l'éclairement est maximal car les faisceaux sont en phase par symétrie). Lorsque i augmente, l'éclairement diminue jusqu'à s'annuler la première fois pour i_1 tel que $\delta(i_1) = \lambda/2$ (les ondes émergeant des deux voies sont en opposition de phase, et l'écran est noir), et l'écran

est noir, soit pour $i_1 = \sqrt{n\lambda/(n-1)e} = 2{,}87.10^{-2}$ rad $= 1°39'$. En continuant d'augmenter i, l'écran est alternativement brillant et sombre ; l'éclairement est nul pour les angles i_p tels que $\delta(i_p) = (2p-1)\lambda/2$, soit $i_p = \sqrt{2p-1}\, i_1$. Et donc en augmentant régulièrement l'angle i, l'éclairement sur l'écran « clignote » et ce de plus en plus vite puisque i_p est proportionnel à $\sqrt{2p-1}$.

75. Bilentilles à obturation

Il faut avant tout faire une figure soignée avec deux faisceaux de part et d'autre de l'axe Sx (un rayon passant par le centre, même décalé, d'une lentille, n'est pas dévié !).



a) L'onde plane issue de la lentille L_0 converge après les deux demi-lentilles formées à partir de L aux deux « demi-foyers », notés S_1 et S_2 ; ces deux points servent de sources de lumières cohérentes entre elles (vu la largeur spectrale négligeable de la lumière émise par la fine fente) qui produisent une figure d'interférences (par division du front d'onde). Ce sont les sources secondaires, au sommet chacune d'un faisceau lumineux conique ; le recouvrement de ces faisceaux délimite le champ d'interférences (hachuré sur la figure). L'ensemble est équivalent à deux trous d'Young S_1 et S_2, et les franges sont des segments de droite dans la direction Ez.

La largeur du champ d'interférences sur l'axe Ey est donc simplement $2\varepsilon = 2$ mm.

L'analogie avec les trous d'Young évite tout calcul ; la différence de marche en un point M du champ s'obtient par analogie :

$$\delta = \frac{ax}{D}, \text{ soit avec les notations d'ici : } \delta(M) = S_2M - S_1M = \frac{2\varepsilon y}{d-f}$$

d'où l'intensité : $\boxed{I(y) = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{2\varepsilon y}{d-f}\right)}$

L'interfrange est $i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda(d-f)}{2\varepsilon} \approx \underline{0{,}074 \text{ mm}}$ (les franges ne sont pas visibles à l'œil nu, il faut une lunette).

Le nombre de franges est : $\underline{N} = \frac{2\varepsilon}{i} = \frac{(2\varepsilon)^2}{\lambda(d-f)} = \underline{27}$ (formule homogène)

Rq 1 : En augmentant la taille 2ε du cache, on augmente d'autant la largeur du champ d'interférence en diminuant d'autant l'interfrange (car S_1 et S_2 s'écartent) ; il n'est donc pas étonnant que N soit en $(2\varepsilon)^2$.

Rq 2 : Pour évaluer plus correctement N, il conviendrait de rajouter à la frange centrale brillante, le nombre (entier) de franges brillantes de part et d'autre de l'axe soit : $N = 1 + 2 \times \mathrm{E}\left(\frac{\varepsilon}{i}\right) = 1 + 2 \times 13 = 27$.

b) Soit y_0 l'ordonnée du point où se produirait la première anticoïncidence et à laquelle correspond δ_0. On a $\delta_0 = p_0 \lambda_1 = (p_0 - 1/2)\lambda_2$ où p_0 est l'ordre soit :

$$\underline{p_0 = \frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda} = 491 \text{ franges}} \text{ environ}$$

Or il y a seulement 13 franges dans le champ de chaque côté ; ce phénomène n'est donc pas visible (pas de problème d'incohérence temporelle) et le doublet se comporte comme une seule radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ comme à la question a).

c) Placer une lame à faces parallèles sur le trajet 2 revient sur l'écran à translater le système de franges (voir la question **44.**) ; il faut que $\delta = (n-1)e = p_0 \lambda_1$, soit :

$$\underline{e = \frac{p_0 \lambda_1}{n-1} \approx 0{,}56 \text{ mm}}$$

L'éclairement de l'écran est alors quasi uniforme puisque le contraste est nul.

76. Mesure de l'indice de l'air par méthode interférentielle

a) Il est possible de reproduire le raisonnement qualitatif de la question **44.** : la lumière parcourt plus rapidement le trajet SS_1, dans le tube T_1 (car en se vidant, la vitesse y augmente), que le trajet SS_2 ; si l'on souhaite suivre sur Ox au cours du temps le point M_c par lequel passe la frange centrale (pour laquelle la différence de marche reste nulle), il faut donc, pour compenser, augmenter la longueur géométrique S_1M_c par rapport à S_1O (ou diminuer S_2M_c par rapport à S_2O), d'où un décalage vers le bas de la figure.

b) La différence de marche $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$, et qui vaut $\delta(x) = \frac{ax}{D}$ (notations classiques) au point M lorsque les deux tubes sont remplis, vaut à présent :

$$\delta'(x) = \delta(x) + n_2 l - n_1 l = \delta(x) + nl - (n - \Delta n)l \quad \text{soit} \quad \delta'(x) = ax/D + \Delta n\, l$$

La frange centrale donnée par $\delta'(x_c) = 0$ a pour abscisse $x_c = -\frac{\Delta n\, l\, D}{a} < 0$, le système de franges a donc bien défilé vers les x négatifs.

Cette translation ne modifie pas l'interfrange, et un déplacement de une frange se traduit par :

$$|x_c| = i \quad \text{soit} \quad \Delta n = \frac{\lambda}{l} \quad \text{et numériquement :} \quad \underline{\Delta n \approx 3.10^{-6}}$$

ce qui confère à cette méthode une excellente sensibilité aux variations d'indice d'un gaz (qui peuvent également être provoquées par fluctuation de température ou de pression).

c) Raisonnement qualitatif : au point O où $p = 101{,}5$ franges ont défilé, la différence de marche est passée de 0 à $\delta = p\lambda = (n-1)l$ puisque le chemin optique sur les rayons dans T_2 reste nl quand celui sur les rayons dans T_1 est ramené à l, d'où :

$$\boxed{n = 1 + p\frac{\lambda}{l}}$$

En reprenant le calcul de la question b) :
Le cas $n_1 = 1$ (indice du vide) correspond à $\Delta n = n - 1$. La frange centrale s'est déplacée vers le bas de $p = 101{,}5$ franges, donc son abscisse est passée de 0 à :

$$x_c = -pi \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-1)lD}{a} = p\frac{\lambda D}{a} \quad \text{d'où} \quad n = 1 + p\frac{\lambda}{l}$$

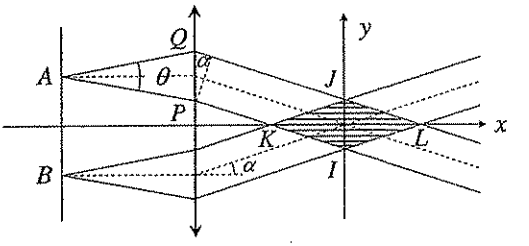
AN : $\underline{n = 1{,}00029}$

Afficher 5 chiffres après la virgule est permis ici puisque $n-1$ est déterminé avec 2 chiffres significatifs.

NB : En réalité, la résolution de cet exercice est un peu plus délicate car souhaitant mesurer l'indice de l'air, contrairement aux autres exercices, on ne peut plus faire l'approximation revenant à le prendre égal à 1 ! (par exemple $\delta = nax / D$ ...). Le résultat numérique est cependant inchangé.

77. Vélocimétrie laser

a) Vu les ordres de grandeur, il n'est pas possible de faire un dessin à l'échelle. Les sources A et B de lumières cohérentes entre elles étant dans le plan focal objet de la lentille, celle-ci transforme les faisceaux divergents en faisceaux parallèles. Le losange $IJKL$ de recouvrement délimite la zone d'interférences. À noter qu'il s'agit d'interférences entre ondes planes, et donc dans le plan de la figure, les franges sont des segments de droite où $y = cste$.



L'angle α est donné par $\tan\alpha = \frac{a}{2f'} \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha \approx 10^{-2} \text{ rad} = 0{,}58° = 34'}$.

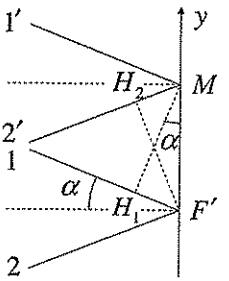
Vu la faible valeur de α, on a :

$$\underline{IJ} \approx PQ = 2f'\tan\frac{\theta}{2} \approx f'\theta = \underline{8{,}7 \text{ mm}} \quad \text{et} \quad \underline{KL} \approx \frac{IJ}{\alpha} = \underline{87 \text{ cm}}.$$

b) Notons d'abord que les chemins optiques (AF') et (BF') sont identiques par stigmatisme de la lentille (ou par symétrie du système par rapport à Ox). A et B étant en phase, on en déduit que le déphasage des deux ondes est nul en F'.

Deux méthodes pour déterminer le déphasage $\varphi(M)$:

* Les ondes marquées 1 et 2 sont en phase en F'.
L'onde 1' en M est en avance sur l'onde 1 en F' de $H_1F' = y\sin\alpha$, soit $\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda} y\sin\alpha$
L'onde 2' en M est en retard sur l'onde 2 en F' de $H_2M = y\sin\alpha$, soit $\varphi_2 = -\dfrac{2\pi}{\lambda} y\sin\alpha$
d'où la différence de phase entre les ondes 1' et 2' arrivant en M :



$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} 2y\sin\alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{\varphi(M) = \frac{4\pi\sin\alpha}{\lambda} y}$$

* Le déphasage des deux ondes planes de vecteurs d'onde
$$\vec{k}_A = k(\cos\alpha\,\vec{u}_x - \sin\alpha\,\vec{u}_y) \text{ et } \vec{k}_B = k(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$$
en un point M est alors donné par :
$$\varphi(M) = \vec{k}_B.\overrightarrow{F'M} - \vec{k}_A.\overrightarrow{F'M} = (\vec{k}_B - \vec{k}_A).\overrightarrow{F'M} \text{ qui vérifie bien } \varphi(F') = 0$$
soit $$\boxed{\varphi(M) = 2k\sin\alpha.y = \frac{4\pi\sin\alpha}{\lambda} y}$$

Ce déphasage est indépendant de x, ce qui confirme que les franges sont des plans d'équation $y = cste$.
La formule des interférences s'écrit alors :
$$I(y) = 2I_0\left(1+\cos\frac{4\pi\sin\alpha}{\lambda} y\right) \text{ du type } I(y) = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi y}{i}\right)$$
donnant l'interfrange $$\boxed{i = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \approx \frac{\lambda}{2\alpha}}$$

AN : $\underline{i = 31\ \mu m}$ donc invisible à l'œil nu (mais ce n'est pas le but du dispositif).

Rq : Avec $\tan\alpha \approx \alpha = \dfrac{a}{2f'}$, on retrouve $i = \dfrac{\lambda f'}{a}$ comme pour les trous d'Young !

c) Si le mouvement de la particule entraînée par le fluide est $y(t) = y_0 + vt$, le détecteur capte l'intensité $I'(t) = KI(y) = 2KI_0\left(1+\cos 2\pi\dfrac{y_0+vt}{i}\right)$, ce qui est une réplique temporelle des franges spatiales.
Ceci suppose néanmoins que la taille de la particule soit bien inférieure à l'interfrange (mais la quantité de lumière diffusée est alors faible), car dans le cas contraire, la particule « intègre » toute la lumière qu'elle reçoit et la lumière

globalement diffusée donne lieu à un signal bien moins contrasté, voire quasi constant.

Ce signal en $\cos\left(\varphi_0+\frac{2\pi t}{T}\right)$ est périodique de période $T=\frac{i}{v}=\frac{\lambda f'}{av}$

Cela représente simplement le temps que met la particule de vitesse v pour parcourir la distance i entre deux franges brillantes successives.

AN : à la fréquence $f=1/T=950$ Hz correspond la vitesse du fluide $\underline{v=3\ \text{cm.s}^{-1}}$

d) Alors $I'_{totale}(t)=\sum_{n=1}^{N}2KI_0\left(1+\cos 2\pi\frac{y_n(t)}{i}\right)$, et pour une concentration trop importante, sachant que les particules sont aléatoirement réparties sur l'axe y, les $\cos 2\pi\frac{y_n(t)}{i}$ prennent à tout instant une distribution aléatoire entre -1 et $+1$ d'où $\sum_{n=1}^{N}\cos 2\pi\frac{y_n(t)}{i}\approx 0$ et $I'_{totale}(t)=N2KI_0$. Cet éclairement est alors certes important (par la présence de N), mais constant au cours du temps. Le système perd son intérêt puisque la mesure de la vitesse v du fluide devient impossible.

78. Interférences en lumière blanche ; cannelures

a) Au centre O de l'écran, toutes les longueurs d'onde de la lumière blanche ont un éclairement maximal ($\delta=p\lambda=0$ soit $p=0$, $\forall\lambda$) : on y voit donc une frange claire blanche. En s'éloignant du centre O, puisque $\delta(x,\lambda)=p(x,\lambda)\lambda$, certaines longueurs d'onde ont un maximum ($p(x,\lambda)$ entier), d'autres un minimum nul ($p(x,\lambda)$ demi-entier) ; si x est petit, cela concerne peu de longueurs d'onde et on voit une frange brun sombre, puis des franges de couleurs (turquoise, orange, rose, vert,...), et si x est plus grand, cela concerne beaucoup de longueurs d'onde et on voit un éclairement quasi blanc dit « blanc d'ordre supérieur », mais dans lequel certaines longueurs d'onde sont en réalité absentes.

b) La différence de marche au point M considéré est $\delta=ax/D=5$ µm ; elle est la même pour toutes les longueurs d'onde du spectre visible.
En revanche, les radiations présentes en M (franges brillantes) correspondent aux longueurs d'onde données par $\delta=p\lambda$ et donc à des ordres d'interférences p entiers différents.

Il faut traduire $\lambda_v=0{,}4\ \mu\text{m}\le\lambda=\frac{\delta}{p}\le\lambda_r=0{,}8\ \mu\text{m}$, avec des indices v et r pour « violet » et « rouge », soit $\frac{\delta}{\lambda_r}\le p\le\frac{\delta}{\lambda_v}$.

Numériquement, cela va de l'ordre $p=7$ (l'entier supérieur) pour le rouge à l'ordre $p=12$ (l'entier inférieur) pour le violet. Il y a donc 6 pics de lumière

(cannelures claires) de couleur différente dans le spectre donné par le prisme (de $p=7$ à $p=12$), et par conséquent 5 cannelures sombres qui les séparent.

79. Interférences entre deux fentes « accolées » (*)

a) Sur la largeur totale $2a$ de l'ouverture, on a la juxtaposition de deux fentes de même largeur a, l'une (notée 1) habituelle et l'autre (notée 2) comportant la lame déphasante. Les ondes issues de ces deux fentes par division du front d'onde étant cohérentes entre elles, il faut sommer leurs amplitudes complexes.
Choisissons l'origine des phases, à la réception en M à l'infini, sur le rayon provenant du centre C_1 de la fente 1 ; son amplitude diffractée est alors réelle et s'écrit avec la variable $u = \pi a \sin\theta / \lambda$:

$$\underline{A}_1(u) = A_0 \frac{\sin u}{u}$$

L'amplitude en M de l'onde diffractée par la fente 2, de même taille, est similaire à la précédente ; elle s'écrit $\underline{A}_2(u) = A_0 e^{i\varphi} \frac{\sin u}{u} . e^{i\psi}$, mais elle comporte deux déphasages par rapport à l'amplitude complexe en M due à la fente 1 :
– l'un de φ, induit par le retard engendré par la présence de la lame déphasante
– l'autre est ψ, un retard également, car le centre C_2 de la fente 2 est à la distance a de C_1, origine des phases, d'où $\psi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta = 2u$

L'amplitude totale est : $\underline{A}(u) = A_0 \frac{\sin u}{u} \left(1 + e^{i(2u+\varphi)}\right)$

L'intensité diffractée est alors :

$$\boxed{I(u) = 2I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 . (1 + \cos(2u + \varphi))}$$

Cette écriture sous la forme du produit de deux fonctions met bien en évidence le facteur lié à la diffraction par chaque demi-fente et le facteur lié aux interférences entre les ondes diffractées par chacune, avec ici comme cas particulier : la distance entre les centres des deux fentes est égale à la largeur de chacune d'entre-elles (d'où $\psi = 2u$!).

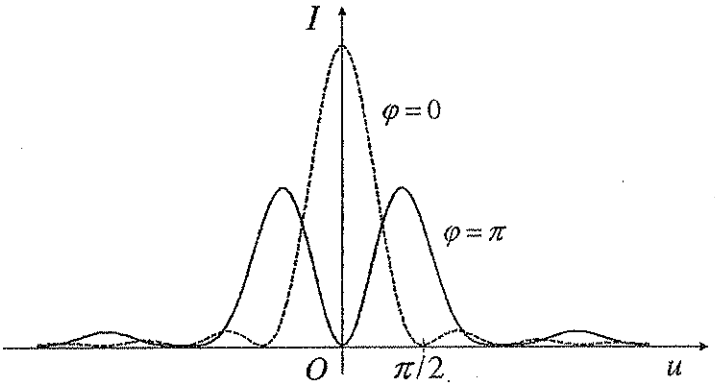
Le cas particulier $\varphi = 0$ donne $I_{\varphi=0}(u) = 2I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 . 2\cos^2 u = 4I_0 \left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2$, ce qui est, sans surprise, l'intensité diffractée par une fente habituelle de largeur $2a$ (d'où la variable $2u$), et dont l'amplitude double dans la direction de propagation prédite par l'optique géométrique conduit à une intensité quadruple dans cette direction, par interférences constructives.

b) Le cas particulier $\varphi = \pi$ donne $I_{\varphi=\pi}(u) = 2I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 . (1 - \cos 2u)$; ceci fait apparaître que le terme d'interférence est nul dans la direction $\theta = 0$ de l'optique

géométrique, ce qui n'est pas courant mais logique pour deux ondes de même amplitude, cohérentes entre elles et en opposition de phase.

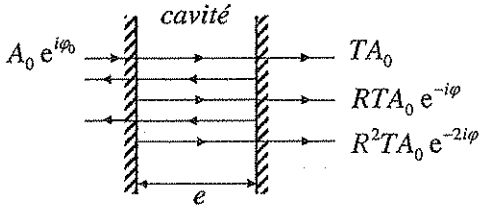
Le calcul est facile : $I_{\varphi=\pi}(u) = 2I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 .2\sin^2 u \Rightarrow \boxed{I_{\varphi=\pi}(u) = 4I_0\frac{\sin^4 u}{u^2}}$

Les maxima de cette fonction sont donnés (cela se calcule par simple dérivée) par : $\tan u = 2u$ soit $u_m \approx 1{,}165 \approx 0{,}37\pi$ avec $I_{\varphi=\pi}(u_m)/4I_0 \approx 0{,}52$.



80. Les modes fins d'une cavité optique

a) Avec les indications de l'énoncé, au bout de deux réflexions internes, l'amplitude est multipliée par $r^2 = R$, et au bout de deux transmissions « inverses » elle est multipliée par $t't = T$.



Les amplitudes complexes des rayons successifs transmis à travers la cavité sont indiquées sur la figure (pour plus de lisibilité, les réflexions successives ont été décalées). Il est important de noter que l'origine des phases a été choisie sur la première onde émergeante, et que le déphasage φ entre deux ondes émergeantes successives est constant, la cavité étant à « faces parallèles ».

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \text{ avec } \delta = 2e \text{ (un aller-retour en plus) d'où } \varphi = \frac{4\pi e}{\lambda}$$

Au total, on obtient par division d'amplitude à partir d'une onde incidente, une infinité d'ondes par transmission (ainsi que par réflexion, non étudiées ici). Elles sont cohérentes entre elles (puisque issues de la même onde par division d'amplitude) et il faut donc sommer leurs amplitudes complexes. Les différents

rayons émergeants, tous d'amplitude différente et déphasés, sont parallèles entre eux et interfèrent donc à l'infini.

b) L'amplitude complexe résultante est : $\underline{A} = TA_0\left(1 + Re^{-i\varphi} + R^2 e^{-2i\varphi} + ...\right) = \dfrac{TA_0}{1 - Re^{-i\varphi}}$

(série géométrique, convergente car de raison telle que $|Re^{-i\varphi}| < 1$).

L'intensité résultante est $I = K\underline{A}.\underline{A}^* = \dfrac{KT^2A_0^2}{(1-Re^{-i\varphi})(1-Re^{+i\varphi})} = \dfrac{T^2 I_0}{1 - 2R\cos\varphi + R^2}$

Le dénominateur de cette expression se transforme comme suit :

$$1 - 2R\cos\varphi + R^2 = (1-R)^2 + 2R(1-\cos\varphi) = (1-R)^2 + 4R\sin^2\varphi/2$$

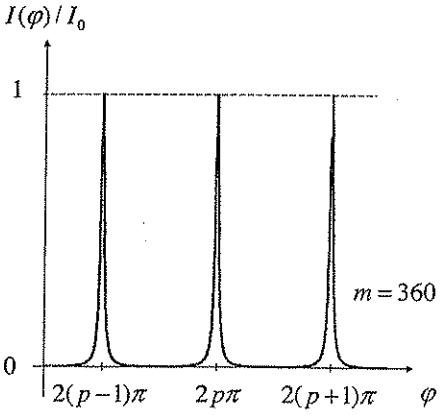
$$\text{d'où } I = \frac{T^2}{(1-R)^2}\frac{I_0}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$$

Avec $R + T = 1$ et en posant $\boxed{m = \dfrac{4R}{(1-R)^2}}$, l'intensité résultante s'écrit :

$$\boxed{\frac{I(\varphi)}{I_0} = \frac{1}{1 + m\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}}$$ C'est la fonction d'Airy

c) AN : Pour la lame d'air entre deux miroirs pour lesquels $R = 0{,}90$ au moins, on a $\underline{m = 360}$; pour $R = 0{,}99$, $\underline{m \approx 40\,000}$ ce qui est considérable.

Le graphe réalisé pour $m = 360$ montre clairement que les pics sont très brillants et très fins sur un fond quasi sombre.
La courbe $I(\varphi)$ est périodique de période 2π ; elle présente une suite de pics d'autant plus étroits que m est grand (car quand m est grand, $I(\varphi)$ décroît beaucoup plus rapidement en s'éloignant des maxima), d'où l'intérêt du dispositif à deux miroirs appelé interféromètre de Fabry-Perot. La largeur d'un pic à mi-hauteur est petite devant la distance entre deux pics.



$I_{max} = I_0$ pour $\varphi = 2p\pi$, $p \in \mathbb{N}^*$; toute la lumière incidente traverse le dispositif et ceci $\forall R$, ce qui est surprenant, mais pour une longueur d'onde λ seulement (en réalité les interférences entre ondes réfléchies à gauche par le dispositif sont alors destructives comme pour une lame antireflets).

$I_{min} = I_0/(1+m)$ pour $\varphi = (2p+1)\pi$; pour m important l'intensité minimale est quasi nulle.

d) Les ondes font de nombreux allers et retours dans la cavité, ce qui permet d'avoir des pics (ou modes) d'autant plus fins. En effet, les pics sont d'autant plus étroits que le nombre d'ondes qui interfèrent est élevé, et donc que le coefficient de réflexion R des miroirs est proche de 1 : on retrouve l'intérêt des interférences à ondes multiples (comme pour le réseau) pour une meilleure résolution.

La longueur de la cavité du Fabry-Perot est déterminante ; en supposant e fixée, les pics (maxima de lumière transmise) sont obtenus pour les longueurs d'onde λ_p vérifiant la condition $\varphi_p = \dfrac{4\pi e}{\lambda_p} = 2p\pi$ soit $e = p\dfrac{\lambda_p}{2}$! On retrouve la condition de quantification des modes vue aux questions **31.** et **36.** du chapitre **3.**

81. Dispersion et résolution d'un spectrographe à réseau

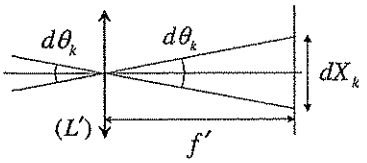
1. Dispersions angulaire et linéaire

a) En différentiant la formule du réseau : $\sin\theta_k = \sin\theta_0 + k\dfrac{\lambda}{p}$ (0)

où k est l'ordre d'interférence et p le pas du réseau (tous deux fixés), avec ici $\theta_0 = 0$, on trouve :

$$\cos\theta_k d\theta_k = 0 + k\frac{d\lambda}{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\theta_k}{d\lambda} = \frac{k}{p\cos\theta_k}} \quad (1)$$

b) Un faisceau qui arrive sur la lentille (L') avec une ouverture $d\theta_k$ donne sur la plaque une tache de largeur $dX_k = f'\tan d\theta_k \approx f' d\theta_k$ (sur le dessin, penser aux rayons qui passent par le centre de la lentille sans être déviés, tandis que tous les autres incidents qui leur sont parallèles passent dans le plan focal image de (L') par les mêmes points respectivement).



D'où $\dfrac{dX_k}{d\lambda} = f'\dfrac{d\theta_k}{d\lambda}$ soit d'après (1) : $\boxed{\dfrac{dX_k}{d\lambda} = \dfrac{kf'}{p\cos\theta_k}}$ (2)

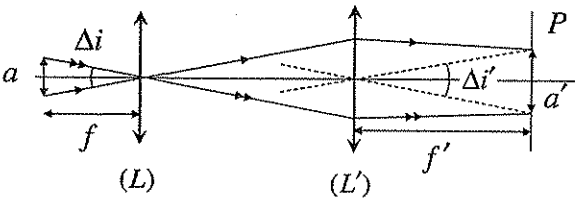
La dispersion augmente avec l'ordre k et se trouve d'autant plus importante que le pas p du réseau est faible.

c) AN : $k = 1$ d'où $\sin\theta_1 = 0{,}289$ d'après (0) soit $\cos\theta_1 = 0{,}957$

La dispersion linéaire vaut $\dfrac{dX_k}{d\lambda} \approx \underline{0{,}52 \text{ mm.nm}^{-1}}$

2. Résolution des doublets jaunes dans les spectres d'ordre 1

a) L'optique géométrique donne manifestement $\Delta i = \Delta i'$ (une fois de plus, il suffit de penser aux rayons qui passent par les centres des lentilles sans être déviés).



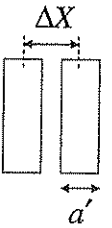
alors $\frac{a}{f} = \frac{a'}{f'} \Rightarrow \boxed{a' = a\frac{f'}{f}}$

AN : $\underline{a' = 0{,}35 \text{ mm}}$

b) Pour Na : bien que $\cos\theta_i = 0{,}956$, $\frac{dX_k}{d\lambda} \approx 0{,}52 \text{ mm.nm}^{-1}$.

$$\Delta\lambda = 0{,}6 \text{ nm} \Rightarrow \underline{\Delta X_{Na} = 0{,}31 \text{ mm}} < 2\times\frac{a'}{2} = 0{,}35 \text{ mm}$$

Chacune des deux longueurs d'onde donne sa propre image de la fente source ; la largeur des images est a', à comparer à l'espacement de leurs centres – lié à la dispersion. Ici, pour le sodium, les deux images se recouvrent, et donc le doublet n'est pas résolu.



Pour Hg : $\Delta\lambda = 2{,}1$ nm

$$\Rightarrow \underline{\Delta X_{Hg} = 1{,}09 \text{ mm}} > 2\times\frac{a'}{2} = 0{,}35 \text{ mm}$$

Cette fois, pour le mercure, l'espacement des deux images est supérieur à leur largeur : le doublet jaune du mercure est résolu.

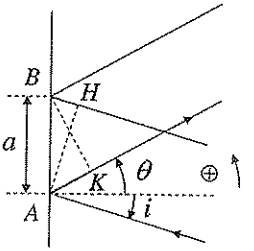
82. Le CD comme exemple de réseau par réflexion

a) Considérons deux points A et B du disque distants du pas a du réseau.

Par rapport au rayon arrivant en A, le rayon arrivant en B est en retard de HB correspondant algébriquement à $a\sin i < 0$ (car $i < 0$).

Par rapport au rayon quittant A, le rayon quittant B est en avance de AK correspondant algébriquement à $a\sin\theta > 0$ (car $\theta > 0$).

La différence de marche totale est $\delta = a(\sin\theta + \sin i)$.



Les interférences sont constructives (maximum d'intensité) pour $\delta = k\lambda$, ce qui conduit à la formule du réseau par réflexion :

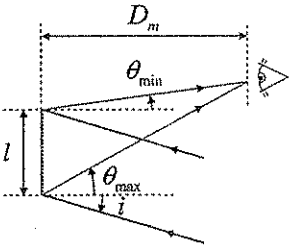
$$\boxed{\sin\theta + \sin i = \frac{k\lambda}{a}}$$

On note que l'ordre $k = 0$ est obtenu dans la direction $\theta = -i$ de la réflexion prévue par l'optique géométrique.

AN : Pour le bleu $\lambda = 0{,}4$ µm, $\underline{\theta_{min} = 25{,}1°}$;

pour le rouge $\lambda = 0{,}8$ µm, $\underline{\theta_{max} = 42{,}3°}$.

b) À une distance trop faible du CD, l'œil n'a pas le champ nécessaire pour percevoir la totalité du spectre. Le rouge et le bleu sont perçus simultanément si l'œil se place à la distance minimale D_m telle qu'il reçoive les rayons d'ordre 1 associés à chacune de ces couleurs et provenant respectivement de chacune des extrémités de la partie gravée d'un segment radial – distantes de $l = 33$ mm. La figure montre clairement que :



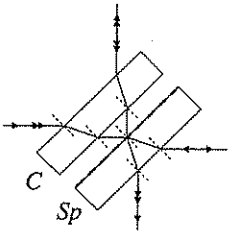
$$D_m \tan\theta_{max} = D_m \tan\theta_{min} + l \quad \Rightarrow \quad \underline{D_m = \frac{l}{\tan\theta_{max} - \tan\theta_{min}} \approx 7{,}5 \text{ cm}}$$

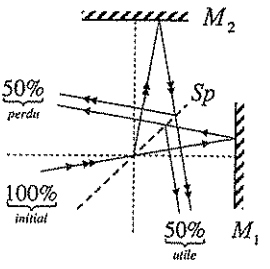
Travaux pratiques

83. Les réponses sont toutes regroupées dans les tableaux au début des questions.
Le symbole *Na* sur les lampes à vapeur de sodium vient du nom latin de cet élément, *Natrium*, et le symbole *Hg* sur les lampes à vapeur mercure vient de son nom grec latinisé, *Hydrargyrum*, signifiant « argent liquide ».

84. Pour qu'une fente diffracte bien, il faut que sa largeur soit inférieure ou égale à $a \approx 0{,}1$ mm. Pour que l'interfrange ne soit pas trop petit, il faut que les deux fentes ne soient pas séparées de plus de $l \approx 0{,}5$ mm. Cela permet typiquement d'observer à l'œil $N = 2l/a$ soit 10 franges d'interférence dans le pic central de diffraction (le calcul est fait à la question **45.**).
Voici ce que l'on observe :
- le pic central de diffraction se rétrécit mais l'interfrange est inchangé : on voit donc moins de franges de même largeur ;
- l'interfrange diminue mais la largeur du pic central de diffraction est inchangée : on voit donc davantage de franges plus serrées ;
- la translation du système laisse la figure inchangée (les effets de bord sont les mêmes) ;
- la figure étant orthogonale à la direction des fentes, la rotation du système entraîne une rotation identique de la figure ;
- la figure est alors translatée, son centre étant donné par la nouvelle direction de l'optique géométrique.

85. La séparatrice Sp est une lame semi-réfléchissante qui permet la division d'amplitude. Cette lame en verre d'une certaine épaisseur est rendue semi-réfléchissante par dépôt sur sa face avant : un rayon se réfléchissant sur M_1 la traverse donc trois fois alors qu'un rayon se réfléchissant sur M_2 ne la traverse qu'une fois. Ceci introduit une différence de marche entre les deux bras du Michelson et qui dépend de la longueur d'onde à cause de la dispersion du verre (l'indice n du verre est fonction de λ) ; il n'est donc pas possible de la compenser $\forall\lambda$ en reculant simplement le miroir M_2. Ceci est le rôle de la compensatrice C, une lame faite dans le même verre et de la même épaisseur que la séparatrice et disposée en avant de celle-ci (il est alors facile de vérifier que chacun des deux rayons qui interfèrent effectue quatre traversées identiques).





Le schéma montre qu'en moyenne la moitié du flux est effectivement perdue, mais suivant que la part utile concerne des interférences constructives ou destructives, la part perdue peut aller de 0 à 100%.

86. À l'aide d'une lentille convergente placée avant l'appareil, on réalise l'image d'un diaphragme (contre la lampe) sur un écran placé en sortie en veillant à bien illuminer les deux miroirs du Michelson. On obtient sur l'écran deux images nettes, chacune issue d'un miroir. Il faut agir sur l'orientation du miroir M_1 pour réduire l'angle α du coin d'air et superposer au mieux ces deux images pour deux raisons : l'une évidente, pour avoir des interférences sur l'écran, il faut que les deux faisceaux se recouvrent ; l'autre, plus subtile, car l'interfrange attendu pour les franges d'égale épaisseur est $i = \lambda/2\alpha$ et donc pour passer du µm (λ) au mm (i), il faut $\alpha \approx 10^{-3}$ rad $\approx 3'$.
Les images parasites sont dues aux réflexions multiples entre les lames séparatrice et compensatrice ; on les superpose à l'image principale (ce qui les camoufle) en rendant la lame compensatrice (orientable) parallèle à la lame séparatrice (fixe).

87. Les franges d'égale épaisseur sont rectilignes. Placer le diaphragme au foyer d'une lentille convergente L_1 pour éclairer les miroirs en lumière quasi parallèle. Les franges sont localisées sur le miroir M_2. Pour une observation directe à l'œil, cela suppose d'accommoder sur ce miroir (sans trop se rapprocher pour éviter la fatigue) ; on peut aussi les projeter sur un écran à l'aide d'une lentille convergente L_2 (de courte focale pour en avoir le meilleur grandissement) qui conjugue le miroir M_2 et l'écran. La taille de la source (2 cm) ne pose pas de problème de cohérence spatiale (pas de perte de contraste), elle a pour conséquence la localisation de franges. L'interfrange sur M_2 est $i = \lambda/2\alpha$ ce qui suppose (voir la question **86.**) $\alpha \approx 1'$ au plus si on veut que l'interfrange soit confortablement visible à l'œil nu.

La lampe à vapeur de mercure comporte de nombreuses raies et, compte tenu de leur longueur de cohérence pour une lampe à moyenne pression, il y a perte de contraste par incohérence temporelle pour $e \neq 0$ proche de 0,5 mm ou plus. Afin de voir apparaître les franges, il faut déplacer le miroir M_1 pour se rapprocher du contact optique (pour $e = 0$, $\delta = 0 \ \forall \lambda$), le but étant d'avoir l'arête des deux miroirs dans le champ de vision (contact optique), ce qui correspond aux ordres d'interférences voisins de zéro. Dans cette opération, les franges colorées (ou irisées) défilent avec une certaine période ; il faut guetter la frange centrale, souvent « blanche » entourée de deux franges noires, qui est celle pour laquelle le contraste est maximal, ce qui est subjectif (pour le vérifier, remplacer la source par une lampe blanche). Il est impossible de la déterminer avec certitude avec la lumière d'une lampe à vapeur de sodium (trop cohérente !) pour laquelle le contraste est régulièrement proche de 1 sur tout le champ de vision. La recherche avec une lumière blanche (trop incohérente) ne permet pas de la trouver facilement car l'opération serait tellement délicate qu'elle mettrait trop de temps...

88. Après avoir obtenu $e = 0$ (contact optique) à la question précédente, faire $\alpha = 0$ en « écartelant » les franges d'égale épaisseur pour obtenir la teinte plate. Avec la lentille L_1 placée en entrée le plus près possible de l'interféromètre, condenser la lumière incidente sur le miroir M_1 pour obtenir un faisceau le plus convergent possible et faire $e \neq 0$. Les franges d'égale inclinaison sont circulaires et sont localisées à l'infini. Pour une observation directe à l'œil normal, protégé par un dépoli placé juste devant l'interféromètre, il n'est donc nullement besoin d'accommoder (au contraire, il ne faut plus se concentrer ni sur le miroir M_2, ni sur l'image du dépoli de protection). Pour une observation sur l'écran à une distance $d \approx 1{,}5$ m, une lentille de grande focale devient inutile. Là non plus, la taille de la source ne pose guère de problème de cohérence spatiale (pas de perte de contraste) si e n'est pas trop grand (inférieur à quelques millimètres), elle a pour conséquence la localisation de franges ; et si on observe dans le plan focal image (d'une lentille convergente de grande focale préférentiellement), la taille de la source ne pose plus aucun problème de cohérence spatiale. L'angle maximal i_{max} impose le champ, c'est-à-dire l'anneau de rayon maximal. Le rayon du $k^{ième}$ anneau compté à partir du centre est en $d\sqrt{k\lambda/e}$, ce qui justifie la nécessité de faire $e \neq 0$ pour les faire apparaître, et ceci du premier coup.

Lorsque les « anneaux » ont une forme elliptique, il faut reprendre le parallélisme de la compensatrice par rapport à la séparatrice. Lorsque les franges défilent lors d'un petit mouvement de tête horizontal ou vertical, il faut reprendre l'une ou l'autre des vis de réglage fin de l'angle α (pas encore assez proche de 0) disposées sur le miroir fixe M_2. La modification de e fait apparaître (ou disparaître) des anneaux au centre, en modifie les rayons et donc le nombre visible, et provoque une perte de contraste par incohérence temporelle.

Une graduation correspond à $\Delta e = 1/100^e$ mm $= 10$ µm d'où $\delta = 2\Delta e = 20$ µm, et avec par exemple $\lambda = 0{,}5$ µm, cela représente 40 franges qui défilent (écrire $\delta = p\lambda$) !

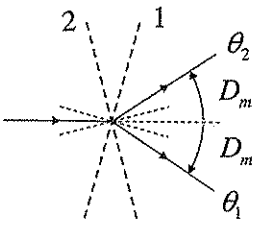
89. Entre deux annulations successives du contraste (plus précis que de repérer $C=1$!), où le miroir a été déplacé de Δe, on a pour les longueurs d'onde λ et $\lambda+\Delta\lambda$:

$$\delta = 2\Delta e = p\lambda = (p-1)(\lambda+\Delta\lambda) \;\Rightarrow\; \Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\Delta e}$$

où λ est la longueur d'onde moyenne ($\lambda = 589{,}3$ nm) et $\Delta e = e_2 - e_1 = 0{,}29$ mm le déplacement du chariot du Michelson (mesuré sur plusieurs fuseaux), d'où $\Delta\lambda = 0{,}60$ nm qui est la valeur exacte avec deux chiffres significatifs.

90. Vu la faible étendue du laser, on n'a de lumière qu'au centre ($\cos i = 1$) et le point d'impact sur l'écran est alternativement lumineux ou sombre pendant que le chariot se translate lentement.
Se munir d'une photodiode pour enregistrer le signal lumineux recueilli à la sortie du Michelson, soit sur une table traçante $x(t)$, soit sur un ordinateur par une interface. Pour un déplacement Δe du miroir, il défile N franges avec $\delta = 2\Delta e = N\lambda$, ce qui par comptage de N sur $\Delta e \approx 0{,}10$ mm permet une bonne détermination de λ.

91. L'incidence $\theta_0 = 0$ n'est pas facile à réaliser avec une bonne précision et la graduation du vernier du goniomètre ne donne pas en général l'indication 0 lorsque la lunette est dans l'axe du collimateur (dans la formule du réseau $\sin\theta_K = \sin\theta_0 + Kn\lambda$, θ_K est en fait l'écart angulaire par rapport à l'ordre $K=0$).



Pour s'affranchir de ce problème d'origine et augmenter la précision des mesures, on utilise le minimum de déviation D_m (la déviation est $D_K(\lambda) = \theta_K(\lambda) - \theta_0$), obtenu pour $\theta = -\theta_0$ et donné par : $\sin\dfrac{D_m}{2} = \dfrac{Kn\lambda}{2}$.
Fixer une raie dans un ordre dispersif $K \neq 0$ et faire tourner lentement la plate-forme avec le réseau, en suivant la raie à la lunette ; le minimum de déviation est obtenu au moment où la raie semble vouloir faire demi-tour, faire coïncider alors le fil du réticule avec la raie et lire la valeur θ_1 sur le vernier. Procéder de même avec l'ordre symétrique $(-K)$ et noter θ_2 : alors $D_m = (\theta_2 - \theta_1)/2$.

Chapitre 7
■ Mécanique ■

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

constante de gravitation	$G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$
accélération de la pesanteur (terrestre)	$g = 9{,}81\ m.s^{-2}$
constante des gaz parfaits	$R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$

La Terre

jour solaire moyen	$T_m = 1$ jour $= 24$ h $= 86400$ s
jour sidéral	$T_s = 23$h 56min 04s $= 86164$ s
vitesse de rotation propre	$\omega = 2\pi/T_s = 7{,}3.10^{-5}\ rad.s^{-1}$
rayon (périmètre)	$R_T = 6370\ km \approx 6{,}4.10^3\ km$ ($\approx 40\ 000$ km)
masse	$M_T = 5{,}97\ 10^{24}\ kg \approx 6{,}0.10^{24}\ kg$
champ de gravitation à la surface	$GM_T/R_T^2 \approx 9{,}81\ m.s^{-2}$
rayon de son orbite = distance Terre-Soleil	1 unité astronomique $= d_{ST}$ ≈ 150 millions km
période de révolution autour du Soleil	1 année $= A = 365{,}25$ jours
vitesse moyenne sur son orbite	$v_o \approx 2\pi d_{ST}/A \approx 30\ km.s^{-1}$

La Lune

lunaison (période entre deux pleines lunes)	$L = 29{,}5$ jours
période orbitale = période de rotation propre	$T_L = 27{,}3$ jours
distance Terre-Lune	$d_{TL} = 380\ 000$ km
masse	$M_L \approx M_T/81$
diamètre angulaire apparent	$\alpha_L = 32' \approx 0{,}5°$

Le Soleil

distance Terre-Soleil	$d_{ST} \approx 150.10^6$ km soit 8min 20s pour la lumière
masse	$M_S \approx 2{,}0.10^{30}$ kg
rayon	$R_S \approx 700\ 000$ km
diamètre angulaire apparent	$\alpha_S \approx \alpha_L = 32' \approx 0{,}5°$ $\quad \alpha_S \approx 2R_S/d_{ST}$

Le cours d'abord

Changement de référentiel

1. Un référentiel (R) lié à (Ox, Oy, Oz) est en mouvement par rapport à un référentiel (R_0) lié à (O_0x_0, O_0y_0, O_0z_0). Comment s'écoule le temps dans les deux référentiels dans le cadre de la mécanique classique ? Que peut-on dire du mouvement d'un point M par rapport aux deux référentiels ?

2. Rappeler la définition et caractériser une translation quelconque d'un référentiel (R) par rapport à un référentiel (R_0). Faire une figure.

Si M est un point de l'espace, établir les lois de composition d'abord des vitesses puis des accélérations dans le passage de (R) (référentiel relatif) à (R_0) (référentiel absolu). Donner, pour ce mouvement, les expressions de la vitesse d'entraînement et de l'accélération d'entraînement.

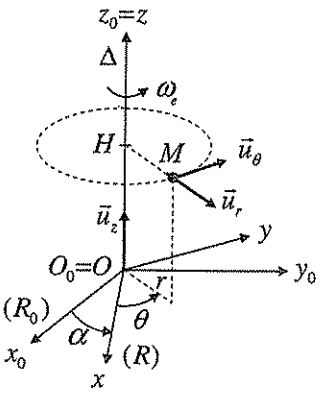
3. Rappeler la définition et caractériser une rotation pure uniforme de (R) dans (R_0) autour d'un axe fixe dans (R_0).

Si M est un point de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

établir pour ce mouvement les lois de composition d'abord des vitesses puis des accélérations dans le passage de (R) (référentiel relatif) à (R_0) (référentiel absolu).

Donner, pour ce mouvement, les expressions de la vitesse d'entraînement, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire.



Dynamique dans un référentiel non galiléen

4. Comment s'écrit la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel (R) en mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen (R_0) ? Définir et commenter les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Comment appliquer le théorème du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel (R) non galiléen ?

5. Reprendre la question **4.** dans le cas d'un référentiel (R) en translation par rapport à un référentiel galiléen (R_0). Que peut-on dire de la force d'inertie d'entraînement ?

6. Reprendre la question **4.** dans le cas d'un référentiel (R) en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen (R_0). Commenter les forces

d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Préciser en particulier leur moment par rapport à l'axe et leur travail dans ce cas.

Référentiel terrestre et champ de pesanteur

7. Rappeler l'expression de la force de gravitation entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2. En déduire le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle en un point quelconque de l'espace. À quelle condition le champ gravitationnel créé par un astre, en un point extérieur, est-il le même que celui créé par une masse ponctuelle ?

8. Définir le référentiel de Copernic (C), le référentiel géocentrique, puis le référentiel terrestre (R), et détailler le mouvement de (R) par rapport à (C).

9. Quelle est la période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique, appelée jour sidéral T_{sid} ? Faire une figure. Pourquoi est-elle différente du jour solaire moyen $T_{sm} = 24$ h ?

10. Quelle est la définition expérimentale du poids d'un corps ? Quelle expression théorique en est alors la conséquence ?

11. Quelle est la différence entre champ de gravitation et champ de pesanteur ? Proposer une application numérique (au niveau du sol) au pôle, à une latitude de 45°, et à l'équateur ; commenter. On donne $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} ; $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}4.10^6$ m (dans le modèle sphérique), $\Omega = 7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}.

Les lois du frottement de glissement

12. Quelle est la grandeur vectorielle qui modélise la résultante des actions de contact exercée par un support plan Π sur un solide S en translation ? La décomposer en sa composante normale et sa composante tangentielle et donner leurs noms. Quel problème se pose-t-il dans l'étude du mouvement de ce solide contraint dans ses déplacements à rester en contact avec le support matériel ? Comment se traduit une absence de frottement de glissement ?

13. Énoncer les lois de Coulomb relatives au frottement de glissement.

14. Illustrer les notions abordées dans les deux questions précédentes dans le cas particulier d'une boîte de masse m posée sur une table horizontale. Considérer d'abord le cas où la boîte est immobile dans le référentiel, puis celui où un opérateur exerce une force $\vec{F}$ horizontale sur la boîte (sur la partie basse de la face pour éviter le pivotement autour du coin inférieur).

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ La mécanique ne supporte pas l'à peu près. Les théorèmes y sont précis, les résultats s'entendent pour des cas déterminés, et les méthodes déployées exigent une rare rigueur... En particulier, vu le caractère fondamentalement vectoriel, les flèches sur les vecteurs sont obligatoires et une égalité du genre « $\overrightarrow{vecteur} = scalaire$ » est à proscrire.

Changement de référentiel

☐ Attention, une translation n'est pas forcément rectiligne ! Et une translation rectiligne pas forcément uniforme !

☐ Le sens du vecteur rotation d'un repère par rapport à un autre (et par conséquent le signe de sa projection sur l'axe) est donné par la règle du tire-bouchon lorsque celui-ci est tourné dans le sens du mouvement réel de rotation.

☐ Le choix d'un référentiel relatif doit être dicté par un mouvement relatif (de M dans le référentiel relatif) simple ou connu. Avant tout calcul, il faut après avoir clairement défini les référentiels, décrire le mouvement relatif puis le mouvement d'entraînement.

☐ La vitesse et l'accélération d'entraînement concernent un point très particulier, le point coïncidant, qui n'est pas un point réel. En rotation notamment $\vec{a}_e$ n'est pas la dérivée de $\vec{v}_e$, c'est la raison pour laquelle des expressions spécifiques sont données pour $\vec{a}_e$ et $\vec{v}_e$ dans le cours pour les mouvements particuliers de (R). Ceci apparaît clairement sur l'expression $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$, si on la dérive par rapport au temps dans (R_0), une partie de la dérivée de $\vec{v}_r$ et une partie de la dérivée de $\vec{v}_e$ forment l'accélération complémentaire.

☐ La période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles est donnée par le jour sidéral qui ne concerne que la rotation propre et non par le jour solaire moyen qui cumule les effets de la rotation propre et de la translation quasi circulaire de la Terre autour du Soleil.

Référentiel non galiléen

☐ Il ne faut pas évoquer un référentiel non galiléen (R) sans préciser le référentiel galiléen (R_0) qui sert de référence pour décrire son mouvement relatif.

☐ Pour une étude dans un référentiel non galiléen, écrire proprement les forces d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ et de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c$. Se souvenir par ailleurs que les forces d'interactions de matière sont des invariants galiléens (donc identiques dans tous les référentiels).

☐ Il faut bien distinguer le champ de gravitation terrestre $\vec{A}$ et l'accélération de la pesanteur ou champ de pesanteur $\vec{g}$, distinction qui n'a de sens qu'en référentiel terrestre non galiléen.

Mécanique

☐ Commencer par faire un schéma représentant le système à étudier.
Comme dans tout problème de mécanique, il faut d'abord :
- toujours définir le système étudié : si l'ensemble est composé de plusieurs solides, une réflexion préalable s'impose sur les avantages / inconvénients de considérer telle ou telle partie du système.
- préciser le référentiel d'étude (R), s'il est galiléen ou non.
- faire l'inventaire des forces vraies en les représentant sur la figure ; s'appliquer pour donner à la force de frottement de glissement $\vec{T}$ son sens (une question de bon sens !)

☐ La quantité de mouvement d'un système dans (R) est : $\vec{p}_{(R)} = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{(R)}$

En dérivant dans (R) la relation donnant le centre de masse G, il vient simplement :

$$\boxed{\vec{p}_{(R)} = m\vec{v}(G)_{(R)}}$$

où $m = \sum_i m_i$ est la masse totale du système et O un point quelconque.

☐ La relation fondamentale de la dynamique (RFD) conduit à une relation vectorielle écrite dans le référentiel d'étude (R). Il est ensuite nécessaire pour l'exploiter de la projeter sur une base de projection :
- lorsque le mobile est facilement repéré par des coordonnées cartésiennes, il s'agit le plus souvent d'une base fixe liée au référentiel d'étude (R).
- lorsque le mobile est facilement repéré par des coordonnées polaires (ou cylindriques), il convient de choisir la base locale polaire ou cylindrique, bases mobiles, afin que ces projections soient les plus simples possibles et de ne pas se sentir obligé de projeter sur la base fixe liée au référentiel d'étude (R).

Toujours bien veiller (à cause des produits vectoriels), à ce que la base choisie soit directe.

☐ Les équations différentielles (qu'il convient de numéroter s'il y en a plusieurs et d'y faire référence lorsqu'on les utilise) sont du second ordre par rapport au temps. Les constantes d'intégration (y penser !) se déterminent à partir des conditions initiales sur la vitesse et la position.

☐ Pour un système conservatif à un degré de liberté, l'équilibre se traduit sur son énergie potentielle par $\frac{dE_p}{dx}=0$ en variable linéaire x, ou $\frac{dE_p}{d\theta}=0$ en variable angulaire θ.
L'écriture $\frac{dE_p}{dx}(x_e)=0$ signifie qu'on a d'abord dérivé par rapport à x, puis on y a porté $x=x_e$, et pas l'inverse !

☐ Dans la loi de la puissance (ou de l'énergie) cinétique intervient éventuellement la puissance (ou le travail) des forces intérieures, il ne faut pas les oublier ; ces grandeurs sont nulles dans le cas où le système est constitué d'un point ou d'un solide unique.

☐ L'énergie potentielle de pesanteur augmente avec l'altitude ; l'écriture $E_p=mgz$ suppose l'axe Oz suivant la verticale ascendante, il reste à préciser le choix de l'origine de cette énergie potentielle.
Éviter de recalculer le travail du poids ; il y a moins d'erreurs de signe à prendre l'opposé de la variation d'énergie potentielle de pesanteur $W_{poids}=-\Delta Ep_{pes}$.

☐ Dans le cas d'un solide suspendu à un support fixe à l'aide d'un fil souple inextensible, la tension du fil exercée sur le solide est radiale alors que la vitesse du point du solide auquel elle s'applique est orthoradiale (puisque le fil est de longueur constante) : la tension ne travaille donc pas.

☐ Attention aux expressions pièges « poids et réaction se compensent » ou « poids et réaction normale se compensent » invoquées avant l'étude du mouvement ! Elles supposent en effet que les forces de réaction seraient connues a priori, ce qui est évidemment faux. Les forces de réaction dépendent des autres forces **et** du mouvement (accélération), on n'y accède qu'après l'écriture du principe fondamental.

Applications directes du cours

Changement de référentiel

15. Un référentiel (R) lié à (Ox, Oy, Oz) est en translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_e=v_e\vec{u}_x$ par rapport à un référentiel (R_0) lié à (O_0x_0, O_0y_0, O_0z_0). Donner la relation entre les coordonnées x, y, z et x_0, y_0, z_0 d'un point M dans les deux référentiels dont les directions sont communes. Comparer les vecteurs vitesses et accélérations de M dans les deux référentiels et commenter.

16. Quelle est la propriété fondamentale des référentiels galiléens concernant leur mouvement relatif ?

17. Sans faire de calculs, indiquer ce que deviennent les compositions des vitesses et des accélérations dans le cas où le mouvement de (R) par rapport à (R_0) est composé d'une translation et d'une rotation pure uniforme autour d'un axe.

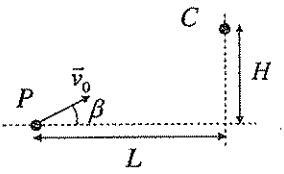
18. Indiquer *qualitativement* comment est modifiée la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation non uniforme, lorsque le vecteur rotation $\overrightarrow{\omega_e}$ de (R) par rapport à (R_0) n'est pas constant en norme tout en gardant une direction fixe. Donner un exemple pratique.

19. Un enfant est sur un manège qui tourne à vitesse angulaire constante ; détailler qualitativement, mais avec précision, la force d'inertie de Coriolis qu'il peut ressentir.

20. En descendant une rivière, un canot à moteur dépasse un radeau au point A. Après un temps $\tau = 60$ min, il rebrousse chemin, puis rencontre le radeau à la distance $L = 6$ km en aval du point A. Déterminer la vitesse du courant si le moteur du canot fonctionne au même régime dans les deux sens du mouvement.

21. Un avion lâche une cargaison en vol ; comment tombe-t-elle par rapport à l'avion, c'est-à-dire dans le référentiel lié à l'avion si les frottements sont négligés ?

22. Une cible C est abandonnée, avec une vitesse initiale nulle, d'une hauteur H au moment où un projectile P, soumis à son poids, est lancé à une vitesse $\vec{v}_0$ à partir d'une distance au sol L. Quel doit être l'angle de tir β pour que le projectile atteigne la cible ? À quelle condition le choc est-il possible ?



23. Dans quel référentiel se place-ton en affirmant que « le Terre tourne sur elle-même » ?

24. Pourquoi le référentiel géocentrique est-il souvent considéré comme galiléen ?

25. Se référer à la figure de la réponse **9.** pour établir l'expression littérale donnant le jour sidéral T_{sid} en fonction du jour solaire moyen T_{sm} et de l'année A. Pour cela, considérer outre le référentiel de Copernic (C), le référentiel (R') d'origine S et tournant par rapport à (C) de telle manière que ST soit l'un de ses axes. Établir le résultat demandé sur la base d'une composition (admise) des vitesses de rotation ; commenter.

26. Comment en pratique doit-on tenir compte de la différence entre $\vec{A}$ et $\vec{g}$?

27. Le poids d'une personne est de 700 N ; augmente-t-il ou diminue-t-il dans un ascenseur en phase d'accélération ascendante ? Quelle est l'accélération ressentie par l'usager ?

Dynamique en référentiel non galiléen

28. Relèvement des voies ferrées dans un virage

Un train roule à vitesse v constante en norme ; la voie ferrée est légèrement incurvée vers la gauche (dans le sens de la marche), la portion de voie concernée est assimilable à un arc de cercle de rayon R grand. Expliquer la situation par un schéma et proposer l'angle α d'inclinaison de la voie par rapport à l'horizontale qu'il est recommandé d'adopter pour une meilleure sécurité des passagers.

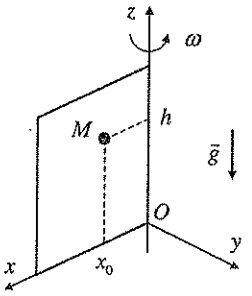
AN : Pour un TGV circulant à 300 $km.h^{-1}$ l'inclinaison des voies ne dépasse pas 3,5° ; en déduire le rayon de courbure minimal acceptable.

Comment ce problème se transpose-t-il au cycliste ?

29. Mouvement d'une balle sur une porte qui s'ouvre

Une porte s'ouvre à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical Oz ; le repère $Oxyz$ est tel que l'axe Ox reste dans le plan de la porte.

Une balle, assimilée à un point matériel de masse m, mobile sans frottement sur la porte, se situe à l'instant $t=0$ à une distance $x=x_0$ de l'axe et une distance $z=h$ du sol ; elle est lâchée avec une vitesse initiale nulle par rapport à la porte.



a) Pourquoi vaut-il mieux se placer dans le référentiel tournant (R) que dans le référentiel fixe ?

b) Quelles sont les composantes de la vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ et de l'accélération $\vec{a}(M)_{(R)}$ du point M dans le référentiel (R) ?

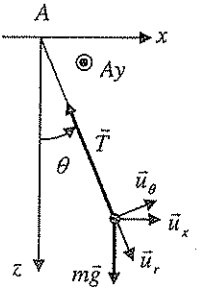
c) Trouver l'équation de la trajectoire de la balle dans (R).

30. Pendule à extrémité supérieure mobile

Un pendule simple est suspendu en un point A ; ce dernier effectue dans le référentiel terrestre galiléen des oscillations sur un axe horizontal, autour d'un point fixe O (non représenté), telles que :

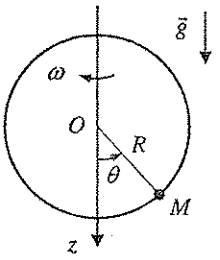
$$\overrightarrow{OA} = a \sin(pt)\, \vec{u}_x$$

Le pendule oscille dans un plan vertical et on appelle θ l'angle formé par le fil avec la verticale passant par A. Déterminer la loi de variation $\theta(t)$ sachant que θ reste petit et que $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.



31. Équilibre d'une masse sur un anneau tournant

Un point matériel M, de masse m, est mobile sans frottements sur un cercle (C), de centre O et de rayon R, situé dans un plan vertical. Le cercle (C) tourne avec la vitesse angulaire constante ω autour d'un diamètre vertical. On repère la position de M par l'angle θ que forme $\overline{OM}$ avec la verticale descendante Oz. Étudier suivant les valeurs de ω, les positions d'équilibre relatif de M sur (C) et leur stabilité.



■ Terme de marées

32. Rappeler le mouvement du référentiel géocentrique (R_G) par rapport au référentiel de Copernic (C) ; pourquoi n'est-il pas tout à fait galiléen ? En déduire *qualitativement* l'origine du terme de marée.

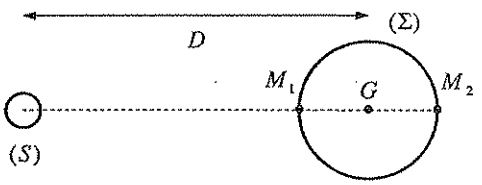
Appliquer alors successivement :

- dans (R_G) la relation fondamentale de la dynamique (1) à un point M de masse m en tenant compte du champ gravitationnel $\vec{A}(M)$ des astres autre que la Terre
- dans (C) la relation fondamentale de la dynamique (2) à la Terre de masse M_T (considérée à répartition sphérique de masse)

En déduire l'expression du terme de marée : $m\left(\vec{A}(M) - \vec{A}(G)\right)$

Pourquoi dans la plupart des cas, ce terme est-il négligeable ? Quelle propriété cela entraîne-t-il alors pour le référentiel géocentrique ?

33. Soit (Σ) un astre qui subit le terme de marée de la part d'un astre source (S) ; représenter sur la figure le terme de marée $\vec{A}(M) - \vec{A}(G)$ pour deux points M_1 et M_2 à la surface de (Σ) de part et d'autre de (Σ) dans l'alignement des deux astres.



Quel est l'effet du terme de marée sur l'astre qui le subit ?

Pourquoi le phénomène des marées océaniques sur Terre est-il aussi visible ?

34. Procéder, pour le terme de marée $\vec{A}_{marée} = \vec{A}(M) - \vec{A}(G)$, à un développement limité en R_T / D où R_T est le rayon de la Terre et D sa distance à l'astre et établir que les marées dues à un astre au niveau de la Terre sont proportionnelles à M/D^3 où M est la masse de l'astre.

En déduire l'importance relative des effets de la Lune et du Soleil ; commenter.

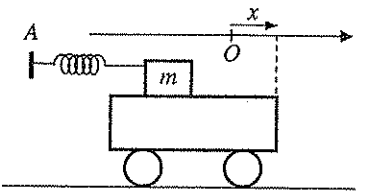
Pour quelle configuration du système Terre-Lune-Soleil, les effets s'ajoutent-ils ou se contrarient-ils ?

Effet de la force de Coriolis

35. Citer et justifier, sans pratiquement faire de calculs, des conséquences expérimentalement vérifiables de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

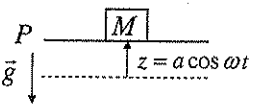
Frottement solide

36. Un chariot se déplace sans frottements sur le sol. Sur ce chariot se trouve un bloc de masse m, le coefficient de frottement solide de glissement entre le bloc et le chariot est k. La constante de raideur du ressort est K et le point A est immobile.



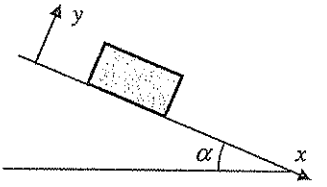
Initialement $x = 0$ et le ressort est détendu, sa longueur est sa longueur à vide. On déplace très lentement le chariot, à vitesse constante, pour quelle valeur de x le bloc glisse-t-il sur le chariot ?

37. Un plateau oscillant horizontal P est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude a et de pulsation ω. Un corps M de masse m est posé sur P. Calculer la pulsation critique ω_0 en-dessous de laquelle M ne décolle jamais de P ; quelle est alors l'accélération du plateau, à tout instant et sa valeur maximale ?



38. Mouvement d'un bloc sur un plan incliné

Un bloc de masse m est posé sur un plan incliné faisant l'angle α avec le plan horizontal. Le coefficient de frottement solide de glissement est égal à k.



a) On augmente progressivement α à partir de la valeur 0. Pour quelle valeur α_l de α le bloc se met-il à glisser ? À quoi peut servir cette expérience ?

b) Calculer l'accélération $\ddot{x}$ du centre de masse dans le cas du glissement et décrire la nature du mouvement.

39. Étude énergétique

On reprend la situation précédente avec l'angle α fixé, et en communiquant à l'instant $t = 0$, une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ au bloc, avec $v_0 > 0$ (donc vers le bas).

a) À quelle condition, à interpréter, le bloc finit-il par s'arrêter ? Trouver à quel instant $t = \tau$ ainsi que la distance L parcourue par le centre de masse.
AN : $\alpha = 18°$; $k = 0{,}40$; $v_0 = 1{,}0\ \text{m.s}^{-1}$; $m = 2{,}0\ \text{kg}$.

b) En restant dans cette condition, déterminer la variation d'énergie cinétique ΔE_c du bloc entre $t = 0$ et $t = \tau$ ainsi que le travail W_{frott} de la force de frottement sur la même durée, par évaluation directe.

c) Retrouver l'expression de W_{frott} en effectuant un bilan énergétique. Que devient ce travail ?

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

40. Pour des vecteurs colinéaires, la composition des vitesses une fois projetée $v_a = v_r + v_e$ en mécanique classique, s'écrit $v_a = \dfrac{v_r + v_e}{1 + v_r.v_e / c^2}$ en relativité restreinte où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Que devient cette formule pour des vitesses de la vie courante ? Commenter la valeur prise par v_a lorsque $v_r = c$.

41. Expliquer le rôle d'une ceinture de sécurité et proposer une application numérique convaincante.

42. L'année n'est pas un multiple entier de jours solaires, mais $A = 365{,}2422$ j soit $A \approx 365{,}25$ j. Quelle conséquence cela entraîne-t-il au niveau du calendrier ? Les années 1900 et 2000 étaient-elles bissextiles ?

43. Combien s'écoulerait-il de jour en un an si la Terre ne tournait pas sur elle-même ? Que peut-on en déduire ?

44. Pourquoi une comète passant près d'un astre peut-elle se fragmenter ? Cela s'est-il déjà produit ?

45. Donner une estimation de la période T_0 séparant deux marées successives en un même lieu (la lunaison est $L \approx 29{,}5$ jours).

46. Comment expliquer avec la force d'inertie de Coriolis due au mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, le sens de rotation des cyclones dans l'hémisphère Nord (anti horaire, vers la gauche) et dans l'hémisphère Sud (sens horaire, vers la droite) ?

47. Pourquoi les bases de lancement de fusée sont-elles proches de l'équateur ? Les satellites de la Terre tournent-ils tous dans le même sens ?

48. Existe-il un endroit où $\vec{g} = \vec{0}$? Commenter l'application numérique.

49. Comment le principe d'inertie permet-il de donner une explication qualitative simple de la déviation vers l'Est des corps en chute libre ?

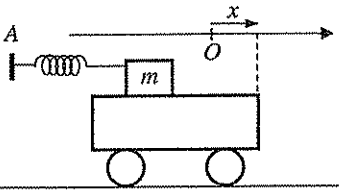
50. Un petit bateau de masse $M = 1000$ kg est coincé sur l'équateur par le manque de vent. Le marin à bord hisse alors rapidement l'ancre de masse $m = 200$ kg jusqu'en haut du mât de hauteur $h = 20$ m. Le bateau se met alors en mouvement ; dans quelle direction et avec quelle vitesse ?

■ Effet de la force de Coriolis

35. Citer et justifier, sans pratiquement faire de calculs, des conséquences expérimentalement vérifiables de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

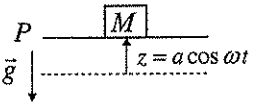
■ Frottement solide

36. Un chariot se déplace sans frottements sur le sol. Sur ce chariot se trouve un bloc de masse m, le coefficient de frottement solide de glissement entre le bloc et le chariot est k. La constante de raideur du ressort est K et le point A est immobile.



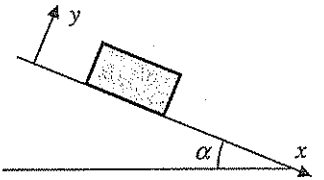
Initialement $x = 0$ et le ressort est détendu, sa longueur est sa longueur à vide. On déplace très lentement le chariot, à vitesse constante, pour quelle valeur de x le bloc glisse-t-il sur le chariot ?

37. Un plateau oscillant horizontal P est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude a et de pulsation ω. Un corps M de masse m est posé sur P. Calculer la pulsation critique ω_0 en-dessous de laquelle M ne décolle jamais de P ; quelle est alors l'accélération du plateau, à tout instant et sa valeur maximale ?



38. Mouvement d'un bloc sur un plan incliné

Un bloc de masse m est posé sur un plan incliné faisant l'angle α avec le plan horizontal. Le coefficient de frottement solide de glissement est égal à k.



a) On augmente progressivement α à partir de la valeur 0. Pour quelle valeur α_l de α le bloc se met-il à glisser ? À quoi peut servir cette expérience ?

b) Calculer l'accélération $\ddot{x}$ du centre de masse dans le cas du glissement et décrire la nature du mouvement.

39. Étude énergétique

On reprend la situation précédente avec l'angle α fixé, et en communiquant à l'instant $t = 0$, une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ au bloc, avec $v_0 > 0$ (donc vers le bas).

a) À quelle condition, à interpréter, le bloc finit-il par s'arrêter ? Trouver à quel instant $t = \tau$ ainsi que la distance L parcourue par le centre de masse.
AN : $\alpha = 18°$; $k = 0{,}40$; $v_0 = 1{,}0\ \text{m.s}^{-1}$; $m = 2{,}0\ \text{kg}$.

b) En restant dans cette condition, déterminer la variation d'énergie cinétique ΔE_c du bloc entre $t = 0$ et $t = \tau$ ainsi que le travail W_{frott} de la force de frottement sur la même durée, par évaluation directe.

c) Retrouver l'expression de W_{frott} en effectuant un bilan énergétique. Que devient ce travail ?

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

40. Pour des vecteurs colinéaires, la composition des vitesses une fois projetée $v_a = v_r + v_e$ en mécanique classique, s'écrit $v_a = \dfrac{v_r + v_e}{1 + v_r . v_e / c^2}$ en relativité restreinte où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Que devient cette formule pour des vitesses de la vie courante ? Commenter la valeur prise par v_a lorsque $v_r = c$.

41. Expliquer le rôle d'une ceinture de sécurité et proposer une application numérique convaincante.

42. L'année n'est pas un multiple entier de jours solaires, mais $A = 365{,}2422$ j soit $A \approx 365{,}25$ j. Quelle conséquence cela entraîne-t-il au niveau du calendrier ? Les années 1900 et 2000 étaient-elles bissextiles ?

43. Combien s'écoulerait-il de jour en un an si la Terre ne tournait pas sur elle-même ? Que peut-on en déduire ?

44. Pourquoi une comète passant près d'un astre peut-elle se fragmenter ? Cela s'est-il déjà produit ?

45. Donner une estimation de la période T_0 séparant deux marées successives en un même lieu (la lunaison est $L \approx 29{,}5$ jours).

46. Comment expliquer avec la force d'inertie de Coriolis due au mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, le sens de rotation des cyclones dans l'hémisphère Nord (anti horaire, vers la gauche) et dans l'hémisphère Sud (sens horaire, vers la droite) ?

47. Pourquoi les bases de lancement de fusée sont-elles proches de l'équateur ? Les satellites de la Terre tournent-ils tous dans le même sens ?

48. Existe-il un endroit où $\vec{g} = \vec{0}$? Commenter l'application numérique.

49. Comment le principe d'inertie permet-il de donner une explication qualitative simple de la déviation vers l'Est des corps en chute libre ?

50. Un petit bateau de masse $M = 1000$ kg est coincé sur l'équateur par le manque de vent. Le marin à bord hisse alors rapidement l'ancre de masse $m = 200$ kg jusqu'en haut du mât de hauteur $h = 20$ m. Le bateau se met alors en mouvement ; dans quelle direction et avec quelle vitesse ?

51. Évaluer le rapport des forces de gravitation qu'exercent respectivement la Terre et le Soleil sur la Lune lorsque les trois astres sont alignés, la Lune passant entre le Soleil et la Terre ; commenter.

52. Quelle est la caractéristique du mouvement de la Terre qui permet d'interpréter l'existence des saisons ? Qu'appelle-t-on équinoxe ? solstice ? Pourquoi les saisons sont-elles de durées (légèrement) inégales ?

53. « C'est le frottement avec le sol qui permet la marche d'une personne ». Expliquer et donner d'autres exemples simples où la force de frottement (loin de s'opposer au mouvement) permet une mise en mouvement.

54. En réalité, les lois de Coulomb relatives au frottement de glissement distinguent :
- le coefficient dynamique de frottement de glissement k s'il y a glissement, avec $\|\vec{T}\| = k\|\vec{N}\|$,
- le coefficient statique de frottement de glissement k_0 s'il y a équilibre relatif, avec $\|\vec{T}\| \leq k_0\|\vec{N}\|$.

Donner un argument simple montrant que k_0 est légèrement supérieur à k.

55. Un système mécanique est isolé ; son moment cinétique est-il conservé ? son énergie mécanique est-elle conservée ?

Exercices

56. Des phases de la Lune à la masse de la Terre

Se munir d'un petit calendrier sur lequel figurent les phases de la Lune.

a) Déterminer la durée moyenne L d'une lunaison (définir ce terme), exprimée au dixième de jour près.

b) En déduire, en s'appuyant sur un schéma et un raisonnement clairs (penser à une composition des vitesses de rotation), la période T (formule littérale, puis valeur numérique au dixième de jour près) de révolution propre de la Lune autour de la Terre.

c) La Lune présente toujours la même face à la Terre, quelle est sa période de rotation sur elle-même ?

d) Déterminer la masse de la Terre (grande devant celle de la Lune) à partir de ces considérations lunaires sachant que la distance Terre-Lune est $a = 384\,000$ km.

57. Puissance d'une réaction d'axe

Un anneau assimilé à un point matériel M coulisse sans frottements sur un axe $O\Delta$ horizontal en rotation à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz vertical.

a) Faire une figure. Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel fixe (et galiléen) (R) lié à $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et la projeter sur la base polaire tournante $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ liée à la tige.

b) Donner la solution $r(t)$ sachant qu'à $t=0$, on a $r=r_0$ et $\dot{r}=0$ ainsi que les composantes R_θ et R_z de la réaction d'axe (sans remplacer $\dot{r}$).

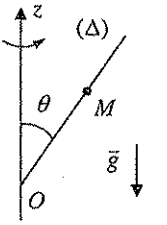
c) Calculer dans le référentiel (R) la puissance totale $P_{(R)}$ reçue par le point M (sans remplacer r et $\dot{r}$). Quelle est la force qui travaille ?

d) Écrire à présent la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel tournant $(R') = (O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ lié à la tige ; commentaire.

e) Calculer dans (R') la puissance totale $P_{(R')}$ reçue par le point M. Quelle est la force qui travaille ? Conclusion.

58. Anneau glissant sur un axe incliné en rotation

Un petit anneau, assimilé à un point matériel noté M, est enfilé sur une tige (Δ) sur laquelle il glisse sans frottement. La tige d'extrémité O fait avec l'axe Oz un angle θ constant et elle est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de Oz. On pose $OM = s$.



a) Pour quelle valeur s_e de s l'anneau est-il en équilibre par rapport à la tige ? Prévoir qualitativement, par l'étude des forces, si cette position d'équilibre est stable ou instable. Retrouver ce résultat avec l'énergie potentielle totale dans le référentiel relatif.

b) On abandonne l'anneau, avec une vitesse initiale nulle par rapport à la tige, en une position M_0 définie par $OM_0 = s_0$ (avec $s_0 \neq s_e$). Établir l'équation différentielle définissant le mouvement de M le long de la tige. La résoudre et en déduire $s = f(t)$.

Dans quel sens se produit le mouvement relatif de M si $s_0 > s_e$, si $s_0 < s_e$?

c) Déterminer, à chaque instant, les composantes de la réaction exercée par la tige sur l'anneau, en fonction de s, ω et θ.

59. Usure du bord intérieur de rails par un TGV

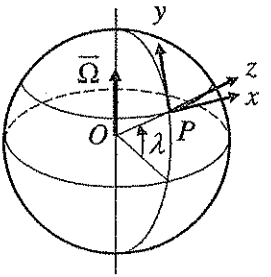
P est un point de la surface du globe.

Px est parallèle au parallèle en P et dirigé vers l'Est

Py est parallèle au méridien en P et dirigé vers le Nord

Pz est la verticale ascendante en P

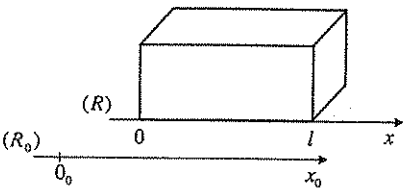
Une voie ferrée rectiligne, horizontale, en un point P de la surface terrestre de latitude λ, fait un angle θ avec Px. En raison de la rotation de la Terre, une réaction latérale R_L de la voie sur le train apparaît en plus de la réaction verticale R_V.



Évaluer le rapport $\dfrac{R_L}{R_V}$ avec $v = 320$ km.h^{-1}, $\lambda = 45°$, Ω et g sont connus.

60. Distribution de pression dans une cavité accélérée (*)

(R_0) est le référentiel galiléen du laboratoire. Une cavité de longueur l, de section S, liée au référentiel (R), contient de l'air assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et dont la pression P_0 est uniforme lorsqu'elle est au repos. La cavité possède dans (R_0) un mouvement de translation rectiligne d'accélération $\vec{\gamma} = \gamma \vec{u}_x$ constante. La température T de l'air reste constante et uniforme. On se propose d'établir la loi de répartition $P(x)$ de la pression dans la cavité en mouvement.



a) Sans calcul, situer $P(x=0)$ et $P(x=l)$ par rapport à P_0.

b) Quel système convient-il de choisir ? Faire l'étude mécanique dans le référentiel mobile (R) et déterminer l'expression de $P(x)$ en notant P_γ la constante d'intégration.

c) Déterminer la constante d'intégration P_γ grâce à un argument simple ; dans le calcul, poser $a = \dfrac{M\gamma l}{RT}$.

La cavité est l'habitacle d'une fusée au lancement : $\gamma = 5g$; $l = 4$ m ; $T = 20$ °C.

d) Calculer a (M et R sont connues), et en déduire le développement limité de P_γ (à quel ordre faut-il aller ?) ; en déduire celui de $P(x)$; commentaire.

61. Mouvement d'un ballon dans le référentiel terrestre non galiléen (*)

Un terrain de rugby placé à la latitude $\lambda = 45°$ est orienté Nord-Sud. Un joueur tente une pénalité à 40 m face aux poteaux. Le ballon part avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans la direction du Nord en faisant l'angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale ; $\| \vec{v}_0 \| = 20$ m.s^{-1} ; on néglige la résistance de l'air (ainsi que la rotation du ballon sur lui-même) et on se propose de déterminer l'influence du caractère non galiléen du référentiel terrestre sur le point de chute du ballon.

a) Choisir la base locale terrestre : Oz verticale ascendante du lieu, Oy tangent au méridien et vers le Nord, Ox tangent au parallèle et vers l'Est ; projeter la RFD sur cette base.

b) Intégrer le système d'équations une fois par rapport au temps. Justifier en calculant la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des Pôles, que l'on considère les termes en ω_e comme infiniment petits du premier ordre.

c) Montrer que les équations obtenues en ne considérant que les termes de premier ordre non nul sont :

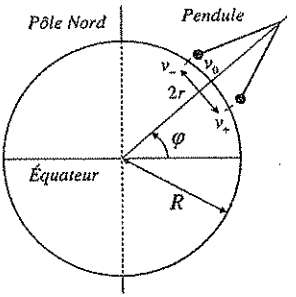
$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega_e \left(\cos\lambda \, z - \sin\lambda \, y \right) \\ \dot{y} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

d) Calculer à l'aide des équations ci-dessus la déviation au point de chute littéralement en fonction de ω_e, v_0, α et λ, puis numériquement avec $g = 9,8\ \text{m.s}^{-2}$. Conclure.

62. Pendule au Panthéon (*)

On place au sein du Panthéon à Paris un pendule constitué d'un fil (de masse négligeable) de longueur $l = 70$ m au bout duquel est fixée une masse $m = 28$ kg. L'attache du fil assure au pendule la possibilité de se balancer avec la même liberté quelle que soit la direction. L'angle entre le fil et la verticale est noté θ et la référence nulle de l'énergie potentielle de pesanteur est prise pour $\theta = 0$.
Le système est tel que les frottements et dissipations peuvent être négligés en première approximation et que le fil peut être pris parfaitement rigide.

1. L'accélération de la pesanteur à Paris vaut $g = 9,81\ \text{m.s}^{-2}$ et le pendule est d'abord lâché avec une vitesse initiale nulle dans le référentiel terrestre galiléen.



a) Quelle est la période P de ce pendule dans l'hypothèse des faibles amplitudes ?

b) Quelle est en degrés et minutes l'amplitude maximale θ_M de ses oscillations si on lui fournit à $t = 0$ une énergie totale $E = 100$ J ? Que vaut sa vitesse maximale ?

c) Si on lançait le pendule sur une oscillation Nord-Sud, sans rotation de la Terre, il oscillerait entre deux points de latitude $\varphi \pm \Delta\varphi$ distants de $2r$. Calculer r.

2. On se place à présent dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen. La latitude de Paris est $\varphi = 48°51'$ Nord ; la Terre tourne sur elle-même en $T_0 \approx 24$ heures et son rayon est $R = 6\,400$ km.

a) Quelle est, au repos, la vitesse linéaire v_0 (en m/s et en km/h) du pendule autour de l'axe de la Terre suite au mouvement de rotation de cette dernière.

b) Exprimer les vitesses v_+ et v_- des deux points de la question **1.c)** autour de l'axe de la Terre suite au mouvement de cette dernière et calculer l'écart en vitesse $\Delta v = |v_\pm - v_0|$ de ces points par rapport à v_0.

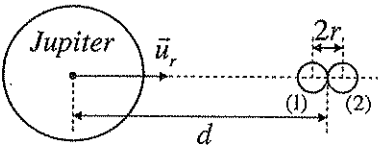
c) On lance le pendule suivant un méridien (axe Nord-Sud) en le poussant à partir de son point au repos avec la même énergie E qu'à la question **1.b)**.
Montrer que le plan d'oscillation du pendule tourne pour un observateur immobile dans le Panthéon (justifier la réponse et faire un dessin). Quel est le sens de rotation de ce plan ? En déduire le temps T (en h et min) que met le plan du pendule pour faire un tour complet.

d) Que se passe-t-il si on réalise cette expérience en un point de latitude 48°51' Sud ?
Que se passe-t-il si on réalise cette expérience sur l'équateur ? au pôle Nord ?

63. Limite de Roche (*)

On cherche à déterminer la distance en dessous de laquelle une comète s'approchant de Jupiter se sépare en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

- le référentiel Jupitérocentrique est galiléen, et Jupiter (masse M_J, rayon R_J) est un astre sphérique et homogène,
- la comète de masse volumique μ_c est en orbite circulaire de rayon d autour de Jupiter,
- la comète est constituée de deux sphères identiques de masse m et de rayon r, homogènes et disposées comme indiqué sur la figure (les trois centres restent alignés au cours du mouvement) ; elles sont liées entre elles par leur attraction gravitationnelle mutuelle.



a) Établir que le mouvement du centre d'inertie de la comète est uniforme, puis déterminer l'expression de ω^2, le carré de la vitesse angulaire du mouvement.

b) On note $\vec{R}$ la réaction de la sphère de gauche (1) sur la sphère de droite (2) de la comète. Écrire la relation fondamentale de la dynamique (ou théorème de la résultante cinétique) pour l'une des sphères dans le référentiel Jupitérocentrique. Est-il nécessaire de le faire pour la seconde ?

c) À quelle condition le contact entre les deux sphères est-il rompu ? En déduire, sachant que $\frac{r}{d} \ll 1$, que cela conduit pour d à une limite inférieure d_{lim} et exprimer $\frac{d_{lim}}{R_J}$ en fonction de μ_c et μ_J, masse volumique de Jupiter.

AN : $M_J = 1{,}9.10^{27}$ kg ; $R_J = 7{,}1.10^4$ km et $\mu_c = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3} ; calculer $\frac{d_{lim}}{R_J}$.

64. Oscillateur mécanique avec frottement solide ; bilan d'énergie

Un système oscillant est constitué d'un solide S de masse m, fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur k. Le solide est astreint à se déplacer le long d'un plan horizontal suivant un axe Ox et son centre d'inertie se situe à l'origine O de l'axe lorsque le ressort a sa longueur naturelle. Le champ de pesanteur uniforme est noté $\vec{g}$.

Le contact entre le solide et le support se fait avec frottement solide et on note f le coefficient de frottement.

a) Montrer qu'en présence du frottement solide, il existe une plage d'équilibre, c'est-à-dire qu'il existe une longueur a telle que, si le solide S est abandonnée avec une vitesse initiale nulle et que G est compris entre $-a$ et a, S reste à l'équilibre. Expliciter a.

On lâche S avec une vitesse initiale nulle, G se trouvant à un point d'abscisse $x_0 = \lambda a$, où le coefficient $\lambda > 1$ et sans unité.

b) Établir l'équation du mouvement de G dans sa première phase. En déduire entièrement l'expression de $x(t)$ en fonction de λ, a et une pulsation ω_0 à

définir. Calculer l'abscisse minimale x_{min} atteinte ; que peut-on en déduire sur la suite du mouvement si $\lambda = 2,5$? Tracer dans ce cas la courbe $x(t)$ et exprimer la durée du mouvement en fonction de T_0, période propre de l'oscillateur non amorti.

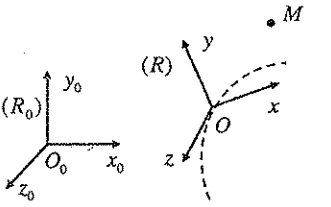
c) Calculer la variation d'énergie mécanique $\Delta E = E_f - E_i$ entre l'instant initial et l'instant final en fonction de a et λ, puis calculer séparément le travail $W_{\vec{R}}$ de la réaction ; commenter ces résultats et conclure.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

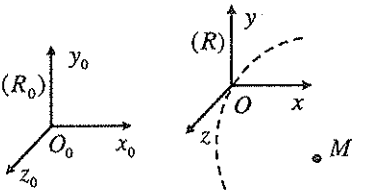
Changement de référentiel

1. Un référentiel par rapport auquel on souhaite étudier le mouvement d'un point M par exemple peut être symboliquement représenté par un repère d'espace (un point et trois axes) auquel il est nécessaire d'adjoindre une base de temps (une horloge, fixe dans ce référentiel). La nature du mouvement de M, attaché à aucun référentiel, dépend en général du référentiel choisi par la trajectoire, la vitesse,...



Contrairement à ce qui se passe en relativité où le temps ne s'écoule pas de la même manière dans deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre, ici, en mécanique newtonienne, lorsque deux horloges dans (R_0) et (R) ont été synchronisées : $t = t_0$, on parle du temps absolu.

2. Un référentiel (R) lié à (Ox, Oy, Oz) est en translation par rapport à un référentiel (R_0) lié à (O_0x_0, O_0y_0, O_0z_0).
La nature (rectiligne, circulaire ou curviligne) de la translation est déterminée par le mouvement du point origine O de (R) par rapport à (R_0) : $\vec{v}(O)_{(R_0)}$.



Il importe seulement qu'en absence de rotation, les axes de (R) « ne tournent pas » par rapport à ceux de (R_0).

* Les vitesses d'un point M dans (R_0) et (R) sont respectivement :

$$\vec{v}(M)_{(R_0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right)_{(R_0)} = \vec{v}_a \quad \text{et} \quad \vec{v}(M)_{(R)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R)} = \vec{v}_r$$

avec les indices a pour absolu et r pour relatif.

Dérivons la relation de Chasles $\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}$ dans (R_0) :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right)_{(R_0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\right)_{(R_0)} + \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R_0)}$$

Or dans une translation, les vecteurs de la base liée au référentiel (R) gardent des directions fixes par rapport aux vecteurs de la base liée au référentiel (R_0). Par conséquent, et dans ce cas seulement, les dérivées d'un même vecteur prises dans (R_0) et dans (R) coïncident ($\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$), ce qui permet d'écrire :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right)_{(R_0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\right)_{(R_0)} + \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R)} \quad \text{soit} \quad \underline{\vec{v}(M)_{(R_0)} = \vec{v}(O)_{(R_0)} + \vec{v}(M)_{(R)}} \quad (1)$$

Soit P le point lié à (R), c'est-à-dire $\vec{v}(P)_{(R)} = \vec{0}$, et qui, à l'instant considéré, coïncide avec M, soit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}$ à t ; par définition la vitesse du point coïncidant P dans (R_0) est appelée vitesse d'entraînement en P ; elle traduit le mouvement de (R) par rapport à (R_0) : $\vec{v}_e = \vec{v}(P)_{(R_0)}$

De la relation (1) appliquée à P, $\vec{v}(P)_{(R_0)} = \vec{v}(O)_{(R_0)} + \vec{0}$, on déduit alors :

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{v}(O)_{(R_0)}}$$

permettant de réécrire la composition des vitesses (1) sous la forme :

$$\boxed{\vec{v}(M)_{(R_0)} = \vec{v}(M)_{(R)} + \vec{v}_e} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e}$$

* Les accélérations du point M dans (R_0) et (R) sont respectivement :

$$\vec{a}(M)_{(R_0)} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{(R_0)}}{dt}\right)_{(R_0)} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{(R)} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{(R)}}{dt}\right)_{(R)}$$

On dérive (1) : $\vec{v}(M)_{(R_0)} = \vec{v}(O)_{(R_0)} + \vec{v}(M)_{(R)}$ par rapport au temps dans (R_0) :

$$\vec{a}(M)_{(R_0)} = \vec{a}(O)_{(R_0)} + \left(\frac{d\vec{v}(M)_{(R)}}{dt}\right)_{(R_0)}$$

Comme précédemment, ici, les vecteurs unitaires de (R) ne dépendent pas du temps dans (R_0) et donc $\left(\frac{d\vec{v}(M)_{(R)}}{dt}\right)_{(R_0)} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{(R)}}{dt}\right)_{(R)} = \vec{a}(M)_{(R)}$

$$\text{d'où} \quad \underline{\vec{a}(M)_{(R_0)} = \vec{a}(O)_{(R_0)} + \vec{a}(M)_{(R)}} \quad (2)$$

Soit P le point lié à (R), c'est-à-dire $\vec{a}(P)_{(R)} = \vec{0}$, et qui, à l'instant considéré, coïncide avec M, soit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}$ à t ; par définition l'accélération du point coïncidant P dans (R_0) est appelée accélération d'entraînement en P ; elle traduit le mouvement de (R) par rapport à (R_0) : $\vec{a}_e = \vec{a}(P)_{(R_0)}$

De la relation (2) appliquée à P, $\vec{a}(P)_{(R_0)} = \vec{a}(O)_{(R_0)} + \vec{0}$, on déduit alors :

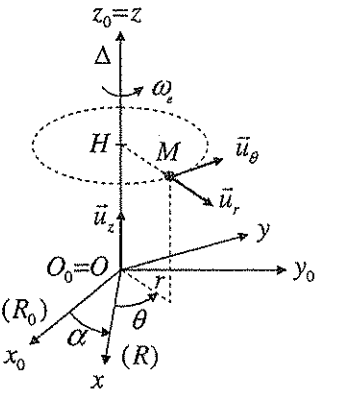
$$\boxed{\vec{a}_e = \vec{a}(O)_{(R_0)}}$$

permettant de réécrire la composition des accélérations (2) sous la forme :

$$\boxed{\vec{a}(M)_{(R_0)} = \vec{a}(M)_{(R)} + \vec{a}_e} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e}$$

En résumé, lors d'une translation, tous les points ont la même vitesse d'entraînement, la même accélération d'entraînement (et il n'y a pas d'accélération complémentaire) ; dans ce cas particulier, l'accélération d'entraînement est la dérivée de la vitesse d'entraînement !

3. Une rotation autour d'un axe fixe dans (R_0), par exemple $\Delta = Oz = O_0z_0$, est caractérisée par le vecteur rotation : $\overrightarrow{\omega_e} = \omega_e \vec{u}_z = \dot{\alpha}\,\vec{u}_z$ où α est l'angle indiqué sur la figure, entre l'axe Ox_0 et l'axe Ox. La rotation est pure si O est confondu avec O_0, il n'y a pas alors de terme de translation. Dans cette étude, on se limite au cas où $\omega_e = \dot{\alpha} = cste$ (rotation uniforme).



Le point M considéré de l'espace n'est attaché à aucun référentiel ; il en est de même des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ qui, du fait du mouvement de M, dépendent du temps dans (R) et (R_0).

rappelons que : $\left(\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_{(R)} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\left(\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{(R)} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

L'angle θ correspond à des coordonnées cylindriques pour le point mobile M dans (R) (l'axe de référence est Ox).

de même : $\left(\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_{(R_0)} = (\dot{\alpha}+\dot{\theta})\vec{u}_\theta = (\omega_e+\dot{\theta})\vec{u}_\theta$ et $\left(\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{(R_0)} = -(\omega_e+\dot{\theta})\vec{u}_r$

* Dérivons $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ dans (R_0) :

$$\vec{v}(M)_{(R_0)} = \dot{r}\vec{u}_r + r(\omega_e+\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z = (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) + r\omega_e\vec{u}_\theta \quad (1)$$

on y reconnaît la vitesse du point M dans (R) en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M)_{(R)} = (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z)$$

la vitesse d'entraînement est celle du point P coïncidant à l'instant considéré avec M et lié à (R), soit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}$ à t et $\vec{v}(P)_{(R)} = \vec{0}$:

$$\text{par (1)} : \quad \vec{v}_e = \vec{v}(P)_{(R_0)} = \vec{0} + r\omega_e\vec{u}_\theta$$

d'où la composition des vitesses :

$$\boxed{\vec{v}(M)_{(R_0)} = \vec{v}(M)_{(R)} + \vec{v}_e} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{v}_e = r\omega_e\vec{u}_\theta}$$

Cette vitesse d'entraînement est orthoradiale, liée au seul mouvement de rotation de (R) par rapport à (R_0).

* Dérivons la vitesse donnée en (1) : $\vec{v}(M)_{(R_0)} = (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) + r\omega_e\vec{u}_\theta$ pour obtenir l'accélération en se souvenant que $\omega_e = cste$; après avoir regroupé les termes :

$$\vec{a}(M)_{(R_0)} = \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z\right] - r\omega_e^2\vec{u}_r + 2(-\omega_e r\dot{\theta}\vec{u}_r + \omega_e\dot{r}\vec{u}_\theta) \quad (2)$$

on y reconnaît l'accélération du point M dans (R) en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a}(M)_{(R)} = \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z\right]$$

l'accélération d'entraînement est l'accélération dans (R_0) du point P coïncidant à l'instant considéré avec M et lié à (R), soit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}$ à t, $\vec{v}(P)_{(R)} = \vec{0}$ et $\vec{a}(P)_{(R)} = \vec{0}$:

par (2) : $\vec{a}_e = \vec{a}(P)_{(R_0)} = \vec{0} - r\omega_e^2\vec{u}_r + \vec{0}$ ou encore $\vec{a}_e = -\omega_e^2 r\vec{u}_r = -\omega_e^2\overrightarrow{HM}$

où H est la projection du point M sur l'axe de rotation ; elle est centripète c'est-à-dire dirigée du point M vers l'axe et traduit le mouvement de (R) par rapport à (R_0) (ceci est cohérent avec le mouvement circulaire uniforme de P dans (R_0)).

Il reste dans (2) une accélération « complémentaire » et dont l'expression est :

$$\vec{a}_c = 2(-\omega_e r\dot{\theta}\vec{u}_r + \omega_e\dot{r}\vec{u}_\theta) = 2\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{\omega_e} \wedge \vec{v}(M)_{(R)}$$

Cette accélération complémentaire dite aussi de Coriolis fait apparaître un produit vectoriel avec la vitesse relative du point M, c'est-à-dire la vitesse dans le référentiel mobile (R).

D'où la composition des accélérations :

$$\boxed{\vec{a}(M)_{(R_0)} = \vec{a}(M)_{(R)} + \vec{a}_e + \vec{a}_c} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

avec $\boxed{\vec{a}_e = -\omega_e^2\overrightarrow{HM} = -\omega_e^2 r\vec{u}_r}$ et $\boxed{\vec{a}_c = 2\overrightarrow{\omega_e} \wedge \vec{v}_r}$

Il faut bien noter dans ce cas que l'accélération d'entraînement n'est pas la dérivée de la vitesse d'entraînement !

Dynamique dans un référentiel non galiléen

4. Si m est la masse du point M, la composition des accélérations la plus générale de la question **3.** $\vec{a}(M)_{(R_0)} = \vec{a}(M)_{(R)} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ permet d'écrire :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = m\vec{a}(M)_{(R_0)} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

À présent le référentiel (R_0) est galiléen et donc $m\vec{a}(M)_{(R_0)} = \sum\vec{f}$, la somme des forces d'interaction de matière s'appliquant sur le point M ; par ailleurs, on définit les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis par :

$$\boxed{\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c}$$

d'où finalement dans le référentiel (R) non galiléen :

$$\boxed{m\vec{a}(M)_{(R)} = \sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}}$$

Cette relation de la dynamique traduit le fait que le mouvement du point M par rapport au référentiel non galiléen (R) est obtenu en ajoutant aux forces d'interaction vraies, les deux forces d'inertie.
De même le théorème du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique s'appliquent dans les référentiels non galiléens à condition de tenir compte des moments des forces d'inertie pour le premier et des travaux des forces d'inertie pour le second.

À noter qu'en mécanique galiléenne, les forces sont des invariants, c'est-à-dire que vues dans (R) ou (R_0), les forces d'interaction de matière $\vec{f}$ sont les mêmes.

5. Dans le cas d'un référentiel (R) en translation par rapport à un référentiel galiléen (R_0) :

* la force de Coriolis est nulle (absence de rotation donc $\vec{\omega}_e = \vec{0}$) :

$$\boxed{\vec{f}_{ic} = \vec{0}}$$

* la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ se réduit d'après la question **2.** à :

$$\boxed{\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(O)_{(R_0)}}$$

Cette force est alors uniforme, c'est-à-dire qu'elle la même pour tous les points M. Le moment de cette force ou son travail sont alors faciles à évaluer.

Remarquer que pour un mouvement d'entraînement de type translation rectiligne et uniforme, soit $\vec{a}(O)_{(R_0)} = \vec{0}$, la force d'inertie d'entraînement est bien nulle, ce qui est conforme au fait que (R) est galiléen dans ce cas.

6. Dans le cas d'un référentiel (R) en rotation pure uniforme autour de l'axe Oz fixe dans un référentiel galiléen (R_0) :

* la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ s'écrit d'après la question **3.** :

$$\boxed{\vec{f}_{ie} = +m\omega_e^2 \overrightarrow{HM} = m\omega_e^2 r\,\vec{u}_r}$$

et donc à une accélération centripète correspond une force centrifuge.

Le support de cette force passant par l'axe de rotation $\Delta = Oz$, son moment par rapport à l'axe est nul (la force centrifuge ne fait pas tourner !)

Il est possible d'évaluer son travail :

Un déplacement élémentaire du point M (donné par $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$) s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$$

d'où $\delta W_{ie} = \vec{f}_{ie}.d\overrightarrow{OM} = m\omega_e^2 r dr = d\left(\frac{1}{2}m\omega_e^2 r^2\right) = -dE_{Pie}$

la force d'inertie d'entraînement est conservative et dérive d'une énergie potentielle :

$$\boxed{E_{Pie} = -\frac{1}{2}m\omega_e^2 r^2 + cste}$$

* la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c$ s'écrit d'après la question **3.** :

$$\boxed{\vec{f}_{ic} = -2m\,\overrightarrow{\omega_e} \wedge \vec{v}_r}$$

elle est orthogonale au déplacement relatif, son travail dans (R) est donc nul.
En revanche, son moment par rapport à l'axe est *a priori* non nul.

Référentiel terrestre et champ de pesanteur

7. Deux masses *ponctuelles* m_1 et m_2 interagissent par une force gravitationnelle (loi de Newton). La force exercée par m_1 sur m_2 est :

$$\vec{f}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

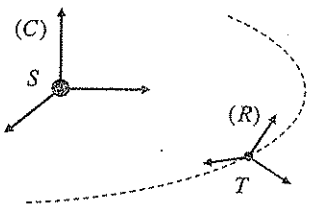
où r est la distance entre les deux points et $\vec{u}_{12}$ un vecteur unitaire dirigé de m_1 vers m_2. La constante G vaut $6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} (ou encore en kg^{-1}.m^3.s^{-2}).
Le champ gravitationnel créé par m_1, placée au centre d'un système de coordonnées sphériques, au point où se trouve m_2 est :

$$\boxed{\vec{A} = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}_r}$$

Il existe un résultat simple (l'équivalent du théorème de Gauss en électrostatique), concernant un modèle d'astre sphérique et plus précisément à répartition de masse à symétrie sphérique (c'est-à-dire que sa masse volumique $\rho = \rho(r)$ est indépendante de θ et φ). Dans ce cas, le champ gravitationnel créé par l'astre en un point extérieur est *le même* que celui qui serait créé par une masse ponctuelle placée au centre du modèle sphérique.
Par exemple le champ créé par un modèle sphérique de Terre (de masse M_T) à répartition sphérique de masse en un point extérieur est :

$$\boxed{\vec{A} = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r}$$

8. Le référentiel de Copernic (C) a pour origine le centre de masse S du système solaire (soit pratiquement le centre du Soleil ce qui le rend très proche du référentiel de Kepler) et possède trois axes fixes dans des directions d'étoiles



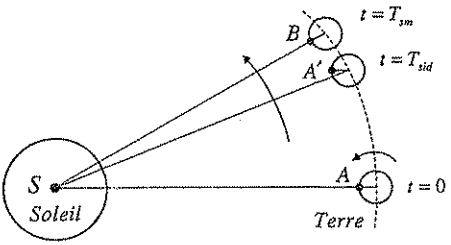
lointaines ; il est considéré comme galiléen.
Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et ses axes sont parallèles à ceux de (C) ; il n'est pas tout à fait galiléen car le centre de la Terre n'a pas un mouvement rectiligne uniforme.
Le référentiel terrestre (R) est rigidement attaché à la Terre (il tourne avec elle) ; il n'est qu'approximativement galiléen.
Le mouvement de (R) par rapport à (C) est composé :
- d'une translation circulaire (ou presque) décrivant la révolution de la Terre autour du Soleil,
- d'une rotation décrivant la rotation de la Terre sur elle-même autour de l'axe des pôles.

9. (R) décrit un tour complet sur lui-même lorsque A passe en A' : ceci définit le jour sidéral de durée

$\underline{T_{sid} = 23\text{ h }56\text{ min }04\text{ s} = 86\,164\text{ s}}$

et qui donne la vitesse de rotation $\vec{\omega}_{(R)/(C)}$ notée ici $\vec{\Omega}$ avec

$$\underline{\Omega = \frac{2\pi}{T_{sid}} = 7{,}3.10^{-5}\text{ rad.s}^{-1}}.$$



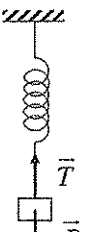
Et donc, à cause de la translation circulaire de vitesse angulaire ω, il n'est pas encore tout à fait midi dans la situation A'. Le jour solaire moyen de durée $\underline{T_{sm} = 24\text{ h} = 86\,400\text{ s}}$ s'écoule lorsque A passe en B, c'est-à-dire entre deux passages successifs du Soleil au méridien.

En effet, l'angle supplémentaire de rotation, sur un jour solaire, se retrouve au centre : c'est $\widehat{ASB}$ et au bout d'un an la somme des angles de type $\widehat{ASB}$ vaut 2π, donc en 365,25 jours solaires la Terre a effectué 366,25 tours sur elle-même :

$$T_{sid} = T_{sm}\frac{365{,}25}{366{,}25} \quad \text{AN : } T_{sm} = 86\,400\text{ s} \Rightarrow \underline{T_{sid} = 86\,164\text{ s}}$$

La différence de 3 min 56 s par jour cumulée sur une année redonne…un jour entier (voir aussi la question **43.**) ; c'est ce décalage du ciel qu'observe l'astronome d'une nuit au lendemain (points opposés à A et B).

10. Le poids est une notion propre à un observateur terrestre : constatant que tous les objets sont soumis à une force dirigée vers la Terre, il appelle poids la force qu'exerce la Terre sur tout corps se trouvant à proximité de la Terre.
Pour mesurer cette force, l'observateur terrestre lui oppose une force connue en norme, direction et sens : par exemple la force exercée par un ressort (dynamomètre).
La définition *expérimentale* du poids est donc l'opposé de la force qu'il faut exercer pour maintenir dans le référentiel terrestre un corps au repos soit :



$$\boxed{\vec{P} = -\vec{T}}$$

Dans une expérience du type ci-dessus, la masse accrochée au dynamomètre est en équilibre. On détermine ainsi la direction (celle du fil à plomb) : la verticale du lieu par définition, le sens : vers le bas, la norme ; c'est $\| \vec{T} \|$.
Remarquer que le dynamomètre peut être étalonné, sans faire appel à la valeur de g (méthode habituelle), en mesurant sa constante de raideur avec la période d'oscillations.

Un calcul théorique pour la même expérience fournit l'expression *théorique* du poids.
Le référentiel terrestre n'étant pas tout à fait galiléen, il faut considérer le référentiel géocentrique, galiléen : le mouvement d'entraînement est une rotation pure quasi uniforme autour de l'axe des pôles (situation de la question **6.**) : $\vec{\omega}_{(R)/(C)} = \vec{\Omega} = \overrightarrow{cste}$.
On écrit pour un corps de masse m soumis à la force de gravitation terrestre, une force $\vec{T}$ qui en assure l'immobilité et la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre (la force d'inertie de Coriolis est nulle à l'équilibre relatif) :

$$\vec{0} = m\vec{A}(M) + \vec{T} + \vec{f}_{ie}$$

et donc :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{A}(M) + \vec{f}_{ie} = m\left[\vec{A}(M) + \Omega^2 \overrightarrow{HM}\right]}$$

Il tient donc compte non seulement de l'attraction terrestre, mais aussi de la force d'inertie centrifuge liée à la rotation de la Terre. On en déduit l'expression de l'accélération de la pesanteur en posant $\vec{P} = m\vec{g}$:

$$\boxed{\vec{g} = \vec{A}(M) + \Omega^2 \overrightarrow{HM}}$$

11. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ diffère donc du champ de gravitation $\vec{A}$ par le terme $\Omega^2 \overrightarrow{HM}$. La plus grande valeur en norme de cet écart correspond à la plus grande valeur de HM, soit sur l'équateur avec $HM = R_T$ (expérience faite au niveau du sol) où de plus $\vec{A}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont colinéaires et opposés.
Dans le cadre de l'hypothèse d'une Terre à symétrie sphérique, le champ de gravitation terrestre (au niveau du sol) est : $A_0 = G\dfrac{M_T}{R_T^2} = 9{,}81 \text{ m.s}^{-2}$.

Par ailleurs : $\Omega^2 R_T = 3.10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$, soit $\Omega^2 HM \ll A_0$.
Ce modèle est ensuite confronté aux mesures expérimentales :

au pôle ($\lambda = 90°$) : $g = 9{,}83 \text{ m.s}^{-2}$ (c'est A_0 car $HM = 0$)

à la latitude $\lambda = 45°$: $g = 9{,}81 \text{ m.s}^{-2}$

à l'équateur ($\lambda = 0$) : $g = 9{,}78 \text{ m.s}^{-2}$

On observe bien que g diminue quand λ diminue, mais l'écart mesuré avec A_0 à l'équateur est de $5.10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$ au lieu des $3.10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$ prévus. En fait c'est A_0 qui dépend lui aussi de la latitude, du fait du léger aplatissement de la Terre aux pôles :

à l'équateur on est donc un peu plus loin du « centre » de la Terre qu'aux pôles et A_0 est plus petit. Les deux corrections sont du même ordre et dans le même sens.

Voir la question **26.** sur la distinction dans la pratique entre $\vec{g}$ et $\vec{A}$.

Les lois du frottement de glissement

12. Dans un mouvement de translation d'un solide S sur un support plan Π l'action de contact exercée par Π sur S est modélisée par une résultante ou réaction $\vec{R}$, somme des forces de contact $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ où $\vec{N}$ est la réaction normale (orthogonale au plan Π) et $\vec{T}$ la force de frottement de glissement (dans le plan Π).

La force $\vec{R}$ exercée par le support sur le solide est une force de réaction. Elle n'a pas d'existence propre, elle n'apparaît que si d'autres forces s'exercent. Sa valeur dépend des autres forces appliquées et du mouvement !

La loi du centre de masse pour le solide s'écrit : $\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$ où $\vec{a}$ et $\vec{R}$ sont inconnues *a priori*, ce qui pose problème pour la résolution. Une connaissance partielle de la force de réaction peut permettre de trouver des projections qui éliminent la force de réaction et rend possible l'intégration.

Une liaison sans frottement de glissement (comme sur une patinoire !) signifie $\vec{T} = \vec{0}$ et donc $\vec{R} = \vec{N}$; la réaction devient normale au plan Π (on peut alors projeter sur des directions où $\vec{R}$ n'a pas de composante).

13. Lois de Coulomb relatives au frottement de glissement :

– s'il y a glissement, alors la force de frottement de glissement $\vec{T}$ s'oppose à la vitesse de glissement et en norme :

$$\|\vec{T}\| = k\|\vec{N}\|$$

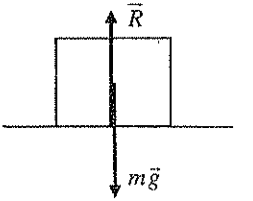
où k est le coefficient dynamique de frottement de glissement qui augmente avec la rugosité des zones en contact ($k = 0$ pour une patinoire, $k \approx 0{,}2$ à $0{,}6$ pour des surfaces courantes)

– s'il y a équilibre relatif, alors en norme :

$$\|\vec{T}\| < k\|\vec{N}\|$$

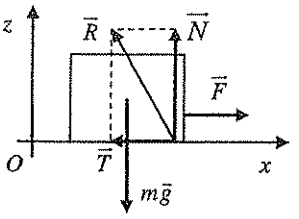
14. Situation 1 : La boîte, posée sur une table horizontale, est immobile dans le référentiel terrestre galiléen : la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ du centre de masse sont nulles, donc :

$$\sum \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}, \text{ soit } \vec{R} = \vec{N} = -m\vec{g}$$



Ici c'est la connaissance du mouvement (l'immobilité) qui permet de déterminer la réaction.

Situation 2 : Un opérateur exerce une force $\vec{F}$ horizontale sur la boîte :



Qualitativement :

– si $\|\vec{F}\| < F_{gl}$ (valeur limite expérimentale), la boîte reste immobile :

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

donc $\vec{R}$ a changé, elle s'est adaptée aux nouvelles forces appliquées, ce qui montre bien qu'elle n'a pas d'existence propre.

– si $\|\vec{F}\| \geq F_{gl}$, la boîte glisse.

Détermination de F_0 par application des lois de Coulomb :

Projetons la loi du centre de masse $m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$ sur les deux axes :

– la verticale ascendante Oz : $-mg + N = 0 \implies N = mg$

– l'horizontale Ox : $-T + F = ma_x \geq 0$ car s'il y a mouvement il se fait vers la droite.

Et dès que le mouvement de glissement s'amorce, $T = kN = kmg$.

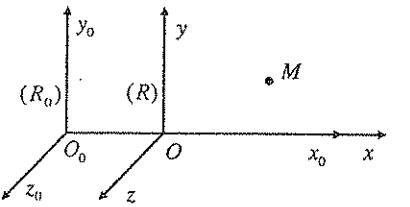
Finalement $F \geq T = kmg = F_{gl}$ d'où $\boxed{F_{gl} = kmg}$

On retrouve qu'à F donnée, il faut k petit pour avoir glissement ; par ailleurs, la limite F_{gl} est indépendante de la hauteur du point d'application de la force (du moins tant qu'il n'y a pas de pivotement autour de l'arrête inférieure droite).

Applications directes du cours

Changement de référentiel

15. La vitesse de translation $\vec{v}_e = v_e\vec{u}_x$ de (R) par rapport à (R_0) correspond à la vitesse de O dans (R_0) si bien que $\overrightarrow{O_0O} = v_e t\vec{u}_x$ puisque $\vec{v}_e$ est constante en direction et en norme et que l'instant initial est choisi lorsque O coïncide avec O_0.



La relation de Chasles, $\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}$ projetée sur les 3 axes, conduit à :

$$\begin{cases} x_0 = v_e t + x \\ y_0 = y \\ z_0 = z \end{cases}$$

En dérivant $x_0 = v_e t + x$ par rapport au temps, il vient : $\dot{x}_0 = v_e + \dot{x} = \dot{x} + v_e$, c'est la composition des vitesses sur l'axe de translation.
Et comme par ailleurs $\dot{y}_0 = \dot{y}$ et $\dot{z}_0 = \dot{z}$ (vitesses transverses identiques), on écrit vectoriellement :

$$\boxed{\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_e} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e}$$

où $\vec{v}_a = \vec{v}_0$ désigne la vitesse absolue (vitesse de M dans (R_0)), $\vec{v}_r = \vec{v}$ la vitesse relative (vitesse de M dans (R)), et $\vec{v}_e$ la vitesse d'entraînement (vitesse de (R) par rapport à (R_0)).

Par dérivation de cette relation, sachant que $\vec{v}_e = \overrightarrow{cste}$:

$$\text{on a} \quad \boxed{\vec{a}_0 = \vec{a}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r}$$

L'accélération du point M (et donc la nature du mouvement) est la même dans les deux référentiels en translation rectiligne uniforme, résultat qui reste vrai pour deux référentiels en translation quelconque et connu sous le nom de « principe de relativité galiléenne ».

16. Dans un référentiel galiléen un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{v}_a = \overrightarrow{\text{cste}}$. Un référentiel relatif mobile par rapport au référentiel galiléen est galiléen si $\vec{v}_r = \overrightarrow{\text{cste}}$, or $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ il faut donc : $\vec{v}_e = \overrightarrow{\text{cste}}$.
Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

17. Dans le cas d'une composition d'une translation et d'une rotation uniforme autour d'un axe, il suffit d'ajouter les termes translation et rotation. Par exemple, pour la vitesse d'entraînement : $\vec{v}_e = \vec{v}(O)_{(R_0)} + r\omega_e \vec{u}_\theta$.

18. Pour l'accélération d'entraînement, il n'y a pas de terme de translation. La force centrifuge radiale (liée à l'accélération centripète) est toujours ressentie. Une force orthoradiale (liée à une accélération tangentielle) est ressentie lorsque la rotation n'est pas uniforme (cas facilement compréhensible mais pas au programme). C'est le cas d'un manège dans la phase d'accélération ou de décélération.

19. La force de Coriolis ressentie dépend du comportement de l'enfant. S'il reste sagement assis sur son cheval de bois, donc immobile dans le référentiel du manège, il ne la ressentira pas ; il en est de même s'il a un mouvement vertical (il se lève et se rassied parallèlement à l'axe de rotation) car alors $\overrightarrow{\omega_e} // \vec{v}(M)_{(R)}$; il faut pour ressentir la force de Coriolis qu'il se déporte latéralement (la force de Coriolis est

alors orthoradiale) ou dans un mouvement avant/arrière (la force de Coriolis est alors radiale).

20. Le radeau va à la même vitesse que la rivière ; dans le référentiel « rivière », le canot fait un aller-retour (à vitesse constante) en $2\tau = 2$ h. Pendant ce temps, le radeau a parcouru $L = 6$ km, d'où la vitesse du courant :

$$\boxed{v = \frac{L}{2\tau} = 3 \text{ km/h}}$$

Rester dans le référentiel de la berge conduit à faire des compositions de vitesses différentes à l'aller et au retour et la résolution s'en trouve inutilement allongée... Voici donc un exemple simple où le changement de référentiel s'avère avantageux.

21. Si l'avion vole à vitesse constante, il a un mouvement de translation rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre galiléen, il constitue un référentiel galiléen. Les conditions initiales correspondent à une chute libre sans frottement, avec vitesse initiale nulle : le mouvement est rectiligne dans le référentiel de l'avion. La cargaison chute donc tout en restant à la verticale de l'avion.

22. On peut bien sûr se placer dans le référentiel terrestre, déterminer x_P, z_P et z_C pour traduire $z_P(x_P = L) = z_C$: c'est long et il y a plus efficace.

Dans le référentiel en chute libre d'origine C, la cible C est immobile et le projectile P a un mouvement rectiligne uniforme donné par sa vitesse initiale (la pesanteur y est compensée par la force d'inertie d'entraînement (car $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(C)_{(R_0)} = -m\vec{g}$ où (R_0) est ici le référentiel terrestre) ; tout se passe comme dans le référentiel terrestre sans pesanteur...).

Alors il vient directement $\boxed{\tan\beta = H/L}$, à condition que la vitesse v_0 soit suffisante pour que C se situe à l'intérieur de la parabole de sûreté de P.

23. Certainement pas dans le référentiel terrestre ! C'est le référentiel que nous pratiquons quotidiennement sans nous rendre compte de la rotation de la Terre (il a fallu plusieurs millénaires pour établir ce fait qui nous paraît maintenant évident).
La réponse est ou le référentiel de Copernic ou aussi (de manière plus évidente) le référentiel géocentrique ; en effet ce dernier est en translation (quasi circulaire) par rapport au référentiel de Copernic, et la vitesse de rotation de la Terre est la même dans deux référentiels en translation, même quelconque.

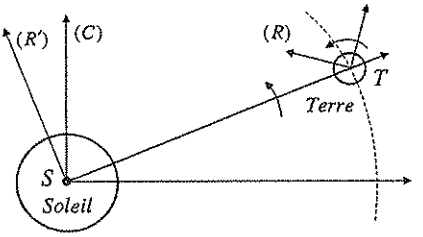
24. Le référentiel de Copernic est considéré comme galiléen. Le référentiel géocentrique effectue un tour autour du Soleil en un an (soit 360° pour 365 jours) ; cette translation (quasi circulaire) fait qu'il n'est pas rigoureusement galiléen, cependant la trajectoire de la Terre est localement un segment de droite parcouru à vitesse constante, il est donc quasi galiléen sur une durée courte pendant 1 an.

25. (R) est le référentiel terrestre et (C) le référentiel de Copernic. Soit (R') le référentiel d'origine S et tournant par rapport à (C) de telle manière que ST soit

l'un de ses axes ; sa période de rotation est l'année $A = 365{,}25\, T_{sm}$. Alors, par addition des vitesses angulaires :

$$\vec{\omega}_{(R)/(C)} = \vec{\omega}_{(R)/(R')} + \vec{\omega}_{(R')/(C)}$$

En supposant les vecteurs parallèles et de même sens et en s'aidant du dessin de la réponse **9.** pour la définition des périodes, il vient :



$$\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{T_{sm}} + \frac{1}{A} \quad \text{soit} \quad \boxed{T_{sid} = \frac{T_{sm}}{1 + T_{sm}/A}}$$

Cette formule montre bien que l'écart entre le jour sidéral et le jour solaire moyen réside, au dénominateur, dans le rapport $T_{sm}/A = 1/365{,}25$, soit un jour dans l'année (voir aussi la question **43.**).

AN : $T_{sm} = 86\,400$ s $\Rightarrow$ $\underline{T_{sid} = 86\,164\text{ s}}$.

26. On peut faire les observations suivantes :

- Si le référentiel terrestre est galiléen : on confond $\vec{g}$ et $\vec{A}$
- Si le référentiel terrestre est non galiléen (problème de dynamique terrestre avec référentiel géocentrique galiléen) : remplacer $m\vec{A} + \vec{f}_{ie}$ par $m\vec{g}$ et $\vec{g}$ est par définition suivant la verticale du lieu (axe Oz de la base locale terrestre).
- Cas précédent dans lequel on utilise en plus un modèle Terre sphérique pour exprimer $\vec{A}$: alors *on peut* négliger $\vec{f}_{ie}$ qui est du même ordre que le terme négligé dans l'approximation de $\vec{A}$ et on a pour une altitude z :

$$\boxed{\vec{g}(z) \approx -\frac{GM_T}{(R_T + z)^2}\vec{u}_r}$$

Dans ce cas la verticale du lieu passe par le centre du modèle sphérique de Terre.

Attention dans le cas du référentiel terrestre non galiléen, à aucun moment on ne doit écrire que $\vec{g}$ est égal à $\vec{A}$.

27. Ni l'un ni l'autre puisque les forces sont des invariants galiléens, et donc le poids de la personne reste de 700 N, et ce, quel que soit le mouvement de l'ascenseur !
La confusion vient du fait que dans l'ascenseur accéléré, l'usager ressent en plus de son poids, la force d'inertie d'entraînement (terme translationnel) ; si l'ascenseur est en phase d'accélération ascendante, $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(O)_{(R)}$ est dirigée vers le bas et contribue à la sensation d'une augmentation du poids (une lourdeur qui plaque au sol…) et inversement lorsque l'ascenseur est en descente accélérée.
Noter que si le passager de l'ascenseur est soudain saisi d'amnésie et n'a pas de vue sur l'extérieur, alors rien ne lui permettra de distinguer entre les deux possibilités suivantes : « Je suis immobile à la surface d'une planète » et il trouvera $\vec{g} - \vec{a}_e$

comme champ de pesanteur, ou « Je suis dans un véhicule en translation rectiligne uniformément accélérée dans un référentiel galiléen » et il trouvera $\vec{a}_e - \vec{g}$ comme accélération. Bien sûr la définition d'un référentiel galiléen loin de toute matière pose problème.

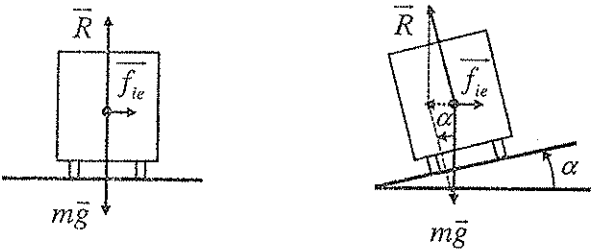
Dynamique en référentiel non galiléen

28. Relèvement des voies ferrées dans un virage

Le référentiel (R) du train est en rotation de vitesse angulaire $\omega = v / R$ autour d'un axe vertical passant par le centre de courbure, et ce par rapport au référentiel terrestre galiléen.

Dans le référentiel (R) non galiléen, le train est soumis à :

- son poids : $m\vec{g}$
- la réaction de la voie : $\vec{R}$
- la force d'inertie d'entraînement (centrifuge) : $\vec{f}_{ie} = -m(-\omega^2 \overrightarrow{HM}) = m\omega^2 R\vec{u}_r$
- la force de Coriolis : nulle, le train est immobile dans son référentiel



Les dessins représentent l'arrière du train qui tourne donc du côté gauche.

Si la voie est horizontale comme sur la figure de gauche, la somme des forces est non nulle et égale à $\vec{f}_{ie}$ et le train est déporté par la force centrifuge vers la droite, avec un risque de déraillement à grande vitesse.

Si la voie est inclinée vers l'axe de rotation comme sur la figure de droite, en choisissant bien l'angle α, il est possible d'annuler la somme des forces (la somme du poids et de la réaction s'oppose à la force centrifuge) et le risque de basculer vers la droite ou vers la gauche disparaît. La simple construction vectorielle recommande de prendre une inclinaison α donnée par :

$$\tan\alpha = \frac{\| \vec{f}_{ie} \|}{\| m\vec{g} \|} = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{v^2}{Rg}$$

résultat indépendant de la masse du train. Plus la vitesse est grande ou plus le rayon de courbure est faible, plus l'inclinaison devra être importante.

AN : $R_{min} = \dfrac{v^2}{\tan\alpha_{max}\, g} \approx 11{,}5$ km ce qui correspond à une ligne peu incurvée.

Le cycliste roule en général sur des routes horizontales ; pour prendre un virage serré sans risque de se faire déporter sur l'extérieur, il doit incliner sa bicyclette vers

l'intérieur de la courbe. Le cas des courses en vélodrome est analogue à celui des trains ; la piste du vélodrome est inclinée par construction d'un angle estimé en fonction d'une vitesse moyenne ce qui permet au cycliste de garder son vélo à peu près perpendiculairement à la piste.

29. Mouvement d'une balle sur une porte qui s'ouvre

a) Dans le référentiel terrestre (R_0) fixe (non représenté sur la figure), il n'y a pas de forces d'inertie puisqu'il est galiléen, mais l'accélération $\vec{a}(M)_{(R_0)}$ du point M est plus compliquée et la trajectoire est curviligne à trois dimensions.
Dans le référentiel (R) tournant, donc non galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie, mais l'accélération $\vec{a}(M)_{(R)}$ du point M est bien plus simple et la trajectoire est plane.

b) La position du point M dans la base de projection liée à (R) (indiquée en bas à gauche de la barre verticale du vecteur) est, sachant que le plan de la porte coïncide avec $y = 0$:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ z \end{vmatrix}_{(R)}$$

Dans le référentiel tournant, les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ sont fixes, et donc vitesse et accélération s'obtiennent simplement sur la base cartésienne liée à (R) par dérivation des composantes :

$$\vec{v}(M)_{(R)} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \end{vmatrix}_{(R)} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{(R)} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{vmatrix}_{(R)}$$

c) Dans le référentiel tournant (R) la balle est soumise à :

- son poids : $m\vec{g} = -mg\,\vec{u}_z$
- la réaction de la porte, orthogonale, en l'absence de frottement, au plan du support, donc portée par $\vec{u}_y$: $\vec{R} = R\,\vec{u}_y$ (avec $R > 0$ tant qu'il y a contact)
- la force d'inertie d'entraînement (centrifuge) : $\vec{f}_{ie} = -m(-\omega^2\overrightarrow{HM}) = m\omega^2 x\,\vec{u}_x$ où H est la projection de M sur l'axe de rotation
- la force de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -m(2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{(R)}) = -2m \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \end{vmatrix}_{(R)} = \begin{vmatrix} 0 \\ -2m\omega\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$,

la base de projection est toujours celle attachée à la porte

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans (R) :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

et c'est tout naturellement ici (mais ceci n'est pas obligatoire) que la base de projection est celle liée au repère (R) :

$$m\begin{vmatrix}\ddot{x}\\0\\\ddot{z}\end{vmatrix}_{(R)}=\begin{vmatrix}0\\0\\-mg\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\R\\0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}m\omega^2x\\0\\0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\-2m\omega\dot{x}\\0\end{vmatrix}$$

sur Ox : $\ddot{x}=\omega^2x$ s'intègre en $x(t)=A\operatorname{ch}\omega t+B\operatorname{sh}\omega t$; les conditions initiales $x(t=0)=x_0$ et $\dot{x}(t=0)=0$ donnent $\underline{x(t)=x_0\operatorname{ch}\omega t}$ (1)

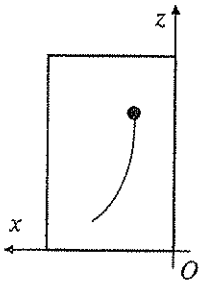
la force d'inertie éloigne la balle de l'axe de la porte (pas d'oscillations !)

sur Oy : $R-2m\omega\dot{x}=0$ soit $\underline{R=2m\omega^2\operatorname{sh}\omega t}$

la réaction de la porte compense intégralement la force de Coriolis qui n'a ici aucun effet sur la trajectoire.

sur Oz : $\ddot{z}=-g$ soit $\underline{z(t)=h-gt^2/2}$ (2) vérifiant $z(t=0)=h$ et $\dot{z}(t=0)=0$

c'est la loi de la chute libre.



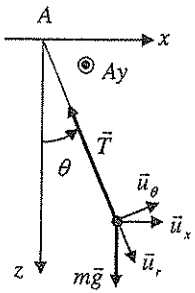
Les équations horaires (1) et (2) conduisent, après élimination du temps (le paramètre t), à l'équation $x(z)$ de la trajectoire :

$$\boxed{x(z)=x_0\operatorname{ch}\left(\omega\sqrt{\frac{2(h-z)}{g}}\right)}$$

30. Pendule à extrémité supérieure mobile

Le pendule est mis en régime d'oscillations forcées par le mouvement imposé de son extrémité A.

Se placer dans le référentiel (R) lié au point A, d'axes parallèles à ceux du référentiel terrestre (R_0) galiléen, il est en translation rectiligne sinusoïdale dans le référentiel galiléen. Le système masse m est soumis à son poids, la tension du fil, $\vec{f}_{ie}=-m\vec{a}(A)_{(R_0)}=map^2\sin(pt)\,\vec{u}_x$ et $\vec{f}_{ic}=\vec{0}$.



Le moment cinétique de la masse m par rapport au point A est :

$$\vec{\sigma}_A=\vec{r}\wedge m\vec{v}(M)_{(R)}=ml^2\dot{\theta}\,\vec{u}_y$$

le moment de $\vec{T}$ par rapport à A est nul ($\vec{T}$ passe par A)

le moment du poids est $-mgl\sin\theta\,\vec{u}_y$ (passer par le bras de levier $l\sin\theta$ et observer qu'il est négatif sur $\vec{u}_y$)

le moment de $\vec{f}_{ie}$ est $+map^2\sin(pt)\,l\cos\theta\,\vec{u}_y$ (passer par le bras de levier $l\cos\theta$ et observer qu'il est positif sur $\vec{u}_y$)

Le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Ay donne :

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta+map^2l\sin(pt)\cos\theta$$

et avec θ petit : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{ap^2}{l}\sin(pt)$

- solution de l'équation homogène : $\theta_G = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi\right)$, c'est celle du pendule libre (avec le point A fixe) avec la pulsation classique
- solution particulière de l'équation complète : $\theta_P = B\sin(pt + \psi)$, celle du régime forcé avec la pulsation imposée par le mouvement imposé du point A en supposant, en l'absence de frottements, $p \neq \sqrt{\frac{g}{l}}$ afin d'éviter une « résonance infinie » : le remplacement sous cette forme dans l'équation (ou la méthode complexe) fournit : $B = \frac{ap^2}{g - p^2 l}$ et $\psi = 0$

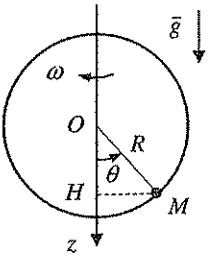
La solution générale est :

$$\theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi\right) + \frac{ap^2}{g - p^2 l}\sin(pt)$$

et les conditions initiales conduisent à : $\begin{cases} A\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \\ A = -\dfrac{ap^3}{g - p^2 l}\sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{cases}$

$$\boxed{\theta(t) = -\frac{ap^3}{g - p^2 l}\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + \frac{ap^2}{g - p^2 l}\sin(pt)}$$

31. Équilibre d'une masse sur un anneau tournant



Le référentiel lié au cercle est en rotation pure uniforme dans le référentiel terrestre galiléen, il est non galiléen, $\vec{\omega}_e = \omega\,\vec{u}_z$ (attention à la notation ω de l'exercice à ne pas confondre avec $\dot{\theta}$). L'étude de l'équilibre relatif est faite dans le référentiel relatif (R). Le système masse m est soumis à :

- son poids qui dérive de $E_{P1} = -mgz + cste$
- la réaction normale au cercle (pas de frottements) qui ne travaille pas dans (R) puisqu'orthogonale à la vitesse $\vec{v}_r$ de M dans (R)
- $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2\overrightarrow{HM}$ qui dérive de $E_{P2} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 + cste$
- $\vec{f}_{ic} = -m(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r)$ qui ne travaille pas dans (R) puisqu'orthogonale à la vitesse $\vec{v}_r$ de M dans (R)

Le système est conservatif à un paramètre, θ, car $z = R\cos\theta$ et $HM = R\sin\theta$
L'énergie potentielle totale de M est :

$$E_p = -mgR\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\theta + cste$$

$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR\sin\theta\left(1 - \frac{\omega^2 R}{g}\cos\theta\right)$, les valeurs qui annulent la dérivée sont :

$$\boxed{\theta_1 = 0\,,\ \theta_2 = \pi \ \text{ et } \ \theta_3 \text{ tel que } \cos\theta_3 = \frac{g}{\omega^2 R} \ \text{ si } \ \frac{g}{\omega^2 R} < 1}$$

$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgR\cos\theta - m\omega^2R^2(2\cos^2\theta - 1)$

- $\theta_1 = 0$, $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgR - m\omega^2R^2$ > 0 si $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ équilibre stable

  < 0 si $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ équilibre instable

- $\theta_2 = \pi$, $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -mgR - m\omega^2R^2 < 0$ équilibre instable

- θ_3, $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgR\frac{g}{\omega^2R} - m\omega^2R^2(2\frac{g^2}{\omega^4R^2} - 1) = mgR\left(\frac{\omega^2R}{g} - \frac{g}{\omega^2R}\right)$

  or θ_3 existe si $x = \frac{g}{\omega^2R} < 1$, donc : $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$ (car en $\frac{1}{x} - x$) et l'équilibre est stable.

L'apparition d'une position d'équilibre stable à partir d'une certaine vitesse de rotation est cohérente avec le fait que la position d'équilibre $\theta_1 = 0$ devienne instable pour cette valeur.

Rq : On peut aussi traiter cet exercice par les forces ; $\sum \vec{f} = \vec{0}$ donne les équilibres, et l'étude directe des forces lors d'une petite variation de θ autour de l'équilibre redonne les stabilités.

Terme de marées

32. Le référentiel géocentrique (R_G) dont l'origine est au centre de masse G de la Terre et les axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic (C), est en translation par rapport au référentiel de Copernic (C). Ce mouvement de translation (il s'agit d'une translation elliptique, quasi circulaire, le tour étant effectué en un an) n'étant que « localement » rectiligne uniforme, le référentiel géocentrique n'est pas tout à fait galiléen !

Cette translation est curviligne comme conséquence de l'attraction du Soleil sur la Terre (si le Soleil n'attirait pas la Terre, celle-ci aurait dans (C), d'après le principe d'inertie, un mouvement rectiligne uniforme !). Et si dans l'étude du point M on tient compte de l'action du Soleil sur la Terre, alors il faut également tenir compte de l'action du Soleil sur M. Ces deux actions conduisent à un effet différentiel appelé terme de marée.

Dans l'étude qui suit le référentiel absolu galiléen (noté (R_0) dans le cours) est le référentiel de Copernic (C), et le référentiel relatif non galiléen (noté (R) dans le cours) est le référentiel géocentrique (R_G).

Les forces appliquées à un point matériel M quelconque de masse m sont :

- les forces vraies dont :
  * la force « extra-terrestre » $m\vec{A}(M)$ principalement dues aux astres comme le Soleil et la Lune
  * et d'autres forces de résultante $\vec{F}$ (dans laquelle il y a la force gravitationnelle exercée par la Terre elle-même)
- la force d'inertie $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(G)_{(C)}$ car (R_G) est en translation
- la force d'inertie $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ car (R_G) est en translation

La RFD dans (R_G) appliquée à M s'écrit :

$$m\vec{a}(M)_{(R_G)} = \vec{F} + m\vec{A}(M) - m\vec{a}(G)_{(C)} \quad (1)$$

On peut exprimer $\vec{a}(G)_{(C)}$ en appliquant la RFD à la Terre dans (C) galiléen, et en considérant que la Terre est à répartition sphérique de masse :

$$M_T\,\vec{a}(G)_{(C)} = M_T\,\vec{A}(G) \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(G)_{(C)} = \vec{A}(G)$$

puisque la Terre n'est soumise qu'à l'action des astres.

Attention de ne pas justifier cette relation en disant de façon trop rapide que le champ « extra-terrestre » est quasiment le même en tout point de la Terre, car le phénomène de marée est justement dû au fait que ce n'est pas le cas !

La relation (1) devient :

$$\boxed{m\vec{a}(M)_{(R_G)} = \vec{F} + m\left(\vec{A}(M) - \vec{A}(G)\right)}$$

Le terme $m\left(\vec{A}(M) - \vec{A}(G)\right)$ est appelé terme de marée ; il est lié au caractère non galiléen du référentiel géocentrique (le signe + devant $\vec{A}(M)$ traduit une force vraie et le signe – devant $\vec{A}(G)$ traduit une force d'inertie).

Le principal résultat de ce calcul est que le terme de marée est le plus souvent négligeable. Par exemple pour la Terre dans le champ solaire :

$$A_S = 6.10^{-3}\ \text{m.s}^{-2} \text{ alors que } \|\,\vec{A}_S(\text{surface}) - \vec{A}_S(G)\,\| = 5.10^{-7}\ \text{m.s}^{-2}.$$

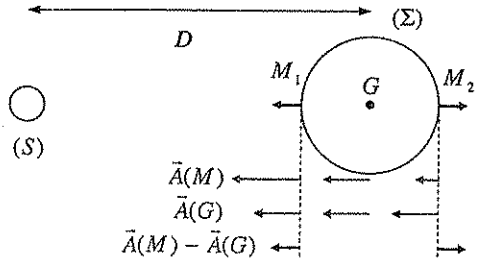
En conclusion : Pour la plupart des phénomènes étudiés (sauf les marées évidemment) le terme de marée peut être négligé et

$$\boxed{m\vec{a}(M)_{(R_G)} = \vec{F}}$$

traduisant que le référentiel géocentrique est un très bon référentiel galiléen dans son voisinage *à condition* de ne pas tenir compte du champ des autres astres.

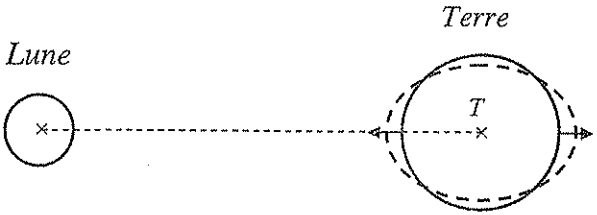
Bien sûr ce résultat n'est pas spécifique de la Terre et se généralise à un autre astre ; il suffit pour cela de remplacer le référentiel géocentrique par le référentiel « astrocentrique » de l'astre concerné.

33. En prenant deux points M_1 et M_2 de part et d'autre de (Σ), alignés avec l'astre (S) source du champ $\vec{A}$: $A(M_2) < A(G) < A(M_1)$, car les distances à (S) sont différentes et que le champ est en $1/r^2$.



On en déduit le terme de marée en chaque point $\vec{A}(M_i) - \vec{A}(G)$, la figure n'est évidemment pas à l'échelle !). Pour M_2 l'explication est la suivante : M_2 est moins attiré par (S) que ne l'est G, tout se passe donc, par rapport à G, comme s'il était repoussé ! (et inversement pour M_1)
Conclusion : le champ de marée exercé par (S) sur (Σ) de centre G tend à disloquer (Σ) en l'étirant de part et d'autre du plan orthogonal en G à GS.

Dans le cas de la Terre le champ de marée, principalement dû à la Lune et au Soleil (environ les deux tiers de l'effet de la Lune), agit surtout sur les parties non rigidement liées à la sphère terrestre, les océans, et crée un bourrelet océanique.



En pointillé, une schématisation (très agrandie) de la déformation de la surface des océans.
Cette déformation est très faible et n'est pas *a priori* mesurable car les déformations du géoïde terrestre par rapport à une forme sphérique moyenne sont beaucoup plus importantes. Mais à cause de la rotation de la Terre sur elle-même, le bourrelet océanique (de direction Terre-Lune à peu près fixe sur une durée d'un jour) va balayer toute la surface de la Terre et chaque point de cette surface passe environ deux fois par jour (voir la question **45.**) sous le bourrelet océanique, rendant le phénomène particulièrement visible.
Noter que l'excitation ainsi créée est périodique et qu'il peut y avoir localement des phénomènes de résonance amplifiant les écarts entre marée haute et marée basse.

34. Le terme de marée est lié à un effet différentiel entre l'attraction qu'exerce un astre de masse M à la surface de la Terre (de rayon R_T) et celle qu'il exerce au centre de la Terre (à la distance D de l'astre). En supposant les trois points alignés comme sur la figure de la question précédente pour que les deux forces soient colinéaires :

$$\vec{A}_{marée} = \vec{A}(M) - \vec{A}(G) = -\frac{GM}{(D \pm R_T)^2}\vec{u}_r + \frac{GM}{D^2}\vec{u}_r$$

soit puisque $\frac{R_T}{D} \ll 1$, $\vec{A}_{marée} \approx -\frac{GM}{D^2}\left(1 \mp 2\frac{R_T}{D}\right)\vec{u}_r + \frac{GM}{D^2}\vec{u}_r = \pm\frac{2GMR_T}{D^3}\vec{u}_r$

Le rapport du terme lunaire au terme solaire est :

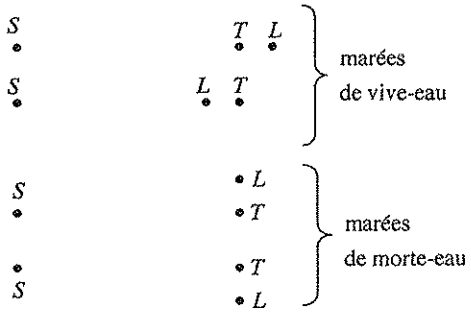
$$\frac{A^L_{marée}}{A^S_{marée}} = \frac{M_L}{M_S}\left(\frac{D_{TS}}{D_{TL}}\right)^3 \approx 2{,}3$$

soit largement en faveur de la Lune (près de 70 %).

Alors que le rapport des simples termes de gravitation est :

$$\frac{A_S(G)}{A_L(G)} = \frac{M_S}{M_L}\left(\frac{D_{TL}}{D_{TS}}\right)^2 \approx 170$$

le Soleil attire la Terre 170 fois plus fort que ne le fait la Lune.



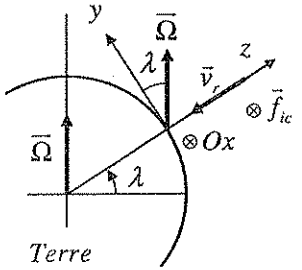
Lune et Soleil ajoutent leurs effets lorsqu'ils sont alignés avec la Terre, peu importe que la Lune soit entre la Terre et le Soleil ou de l'autre côté. Il s'agit donc de la Pleine Lune et de la Nouvelle Lune.

Les effets se contrarient quand la direction de la Lune et du Soleil sont perpendiculaires, il s'agit du premier et du dernier quartier.

Effet de la force de Coriolis

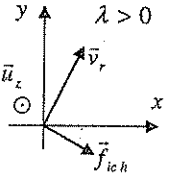
35. Le repère local $(Oxyz)$ est tel que Ox est tangent au parallèle et dirigé vers l'Est, Oy est tangent au méridien et dirigé vers le Nord, Oz est la verticale ascendante.

Lors de la chute libre sur une grande hauteur, on observe une légère déviation vers l'Est (2,8 cm



pour 158 m de chute, expérience historique, 1833, à la latitude de 51°).
L'interprétation avec la force d'inertie de Coriolis, due au mouvement de rotation de la Terre seulement, est suffisante : le mouvement est sensiblement vertical (d'après l'expérience) et $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ est dirigée vers l'Est (direction Ox du dessin). L'effet est le même dans les hémisphères Nord et Sud, il est donc maximal sur l'équateur.

Pour un mouvement sensiblement horizontal et à grande échelle (vents ou courants marins) : $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = -2m\left(\Omega \cos\lambda\, \vec{u}_y \wedge \vec{v}_r + \Omega \sin\lambda\, \vec{u}_z \wedge \vec{v}_r\right)$ avec $\vec{v}_r$ dans le plan $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$, le premier terme de $\vec{f}_{ic}$ est donc vertical (modifie très légèrement le poids) et le second horizontal modifie le mouvement horizontal. Cette composante horizontale de la force d'inertie de Coriolis est en $\sin\lambda$, elle change donc de sens quand on change d'hémisphère. Le schéma ci-contre, dans l'hémisphère Nord, montre une déviation vers la droite par rapport au mouvement. Les Alizés soufflant des tropiques vers l'équateur sont déviés vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud, ils soufflent sur l'équateur d'Est en Ouest.



Frottement solide

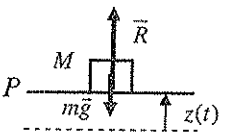
36. Le bloc de masse m, étudié dans le référentiel terrestre galiléen (R), est soumis à son poids, à la force de rappel élastique $\vec{F} = -K\left(l - l_0\right)\vec{u}_x$ et à la réaction du chariot $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. La direction de $\vec{N}$ est connue, c'est la normale au plateau horizontal du chariot, donc la verticale.

$$M\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}(G)_{(R)} \quad (1)$$

On étudie l'immobilité, et ses conditions de validité, du bloc par rapport au chariot. Le chariot se déplaçant à vitesse, son accélération et celle du bloc sont nulles dans le référentiel terrestre. L'allongement $l - l_0 = x$ et le chariot entraîne la masse vers la droite : $\vec{T}.\vec{u}_x = T > 0$ avec $T < kN$. Les projections de (1) donnent :
sur la verticale ascendante : $-mg + N = 0$
sur l'axe horizontal Ox : $0 - Kx + 0 + T = 0$

La condition $T < kN$ conduit à $\boxed{x < \dfrac{kmg}{K}}$

37. Le système considéré est le corps M de masse m. Il est soumis à son poids $-mg\,\vec{u}_z$, à la réaction normale du plateau $R\,\vec{u}_z$ et son mouvement est connu : c'est celui du plateau avec lequel il est en contact.
La loi du centre de masse pour M s'écrit alors en projection sur la verticale ascendante :



$$m\ddot{z}(t) = -mg + R \implies R(t) = mg - m\omega^2 a\cos\omega t$$

Attention : la réaction dépend du temps, et le corps M n'étant pas immobile, elle n'est pas égale (en norme) à son poids.

La réaction la plus faible (lorsque $\cos\omega t = 1$) vaut $R_{min} = mg - m\omega^2 a$; le contact est maintenu tant que $R_{min} > 0$ soit $\omega^2 < g/a = \omega_0^2$ ce qui définit la pulsation critique :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}}$$

L'accélération du plateau est alors $\ddot{z}(t) = -\omega_0^2 a \cos\omega t = -g\cos\omega t$ avec pour maximum g, comme s'il était en chute libre !

38. Mouvement d'un bloc sur un plan incliné

a) Le bloc de masse m, étudié dans le référentiel terrestre galiléen (R), est soumis à son poids et à la réaction du plan $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n$. La direction de $\vec{R}_n$ est connue, c'est la normale au plan incliné, direction Oy de l'énoncé.

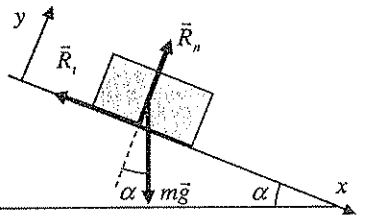
$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{R}_t = m\vec{a}(R)_{(R)} \quad (1)$$

On étudie l'immobilité, et ses conditions de validité, du bloc sur le plan incliné, lui-même immobile dans le référentiel terrestre : $\vec{a}(R)_{(R)} = \vec{0}$.

On note $R_t = \| \vec{R}_t \| > 0$, avec $\vec{R}_t . \vec{u}_x < 0$ car le plan incliné retient le bloc vers le haut.

Les projections de (1) sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ donnent, avec la condition de non glissement :

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - R_t = 0 \\ -mg\cos a + R_n = 0 \\ R_t < kR_n \end{cases}$$



$mg\sin\alpha < kmg\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\tan\alpha < k}$

Cette inégalité, pour un coefficient de frottement k fixé, n'est vérifiée que pour des angles $\alpha < \alpha_l$; la valeur maximale de α, avant glissement, est donc une mesure expérimentale directe du coefficient de frottement statique k. La comparaison de k et $\tan\alpha$ rend commode une expression de k sous la forme $\tan\alpha_l$.

b) Pour $\alpha > \alpha_l$, le bloc glisse spontanément vers le bas, la force de frottement de glissement garde le sens de $-\vec{u}_x$ et les lois de Coulomb donne $R_t = kR_n$, d'où avec les projections de (1) :

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - R_t = m\ddot{x} \\ -mg\cos\alpha + R_n = m\ddot{y} = 0 \\ R_t = kR_n \end{cases}$$

car G reste à une ordonnée $y = cste$.

Il vient :

$$\boxed{\ddot{x} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha) = g\sin\alpha(1 - k / \tan\alpha)}$$

L'hypothèse du glissement $\tan\alpha > k$ conduit bien sûr à $\ddot{x} > 0$; $\ddot{x} = cste$ assure un mouvement rectiligne uniformément accéléré. L'absence de frottement, $k = 0$ comme sur une pente verglacée, conduit automatiquement à un glissement d'accélération maximale $g\sin\alpha$ bien connue.

39. Étude énergétique

a) Le bloc étant lancé avec une vitesse initiale, il y a forcément glissement dans un premier temps. Le mouvement du bloc se faisant vers le bas, les conditions du calcul de l'accélération précédente restent valables :

$$\ddot{x} = g\sin\alpha(1 - k / \tan\alpha)$$

Le mouvement étant uniformément varié, le bloc ne s'arrête qu'en cas de décélération ; la condition $\ddot{x} < 0$ conduit à :

$$\boxed{k > \tan\alpha}$$

Interprétation : pour une pente fixée, le coefficient de frottement doit être suffisamment élevé, ou encore, pour un coefficient de frottement fixé, la pente doit être suffisamment faible. Cette inégalité est vérifiée avec les valeurs numériques de l'énoncé.

On écrit $\ddot{x} = -g\sin\alpha(k / \tan\alpha - 1)$, et par intégration, compte tenu des conditions initiales :

$\dot{x}(t) = v_0 - [g\sin\alpha(k / \tan\alpha - 1)]t$ et $x(t) = v_0 t - [g\sin\alpha(k / \tan\alpha - 1)]t^2 / 2$

Le bloc s'immobilise à l'instant τ donné par $\dot{x}(\tau) = 0$, soit :

$$\boxed{\tau = \frac{v_0}{g\sin\alpha(k / \tan\alpha - 1)}}$$

La distance parcourue depuis l'instant initial jusqu'à l'arrêt est $L = x(\tau)$, soit :

$$\boxed{L = \frac{v_0^2}{2[g\sin\alpha(k / \tan\alpha - 1)]}}$$

AN : $\underline{\tau = 1{,}4\text{ s}}$ et $\underline{L = 0{,}71\text{ m}}$

b) La variation d'énergie cinétique du bloc entre $t = 0$ et $t = \tau$ est simplement :

$$\Delta E_c = E_c(\tau) - E_c(0) = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

La force de frottement, $R_t = kR_n = kmg\cos\alpha$, est constante au cours du mouvement ; elle s'applique sur la base du bloc qui parcourt une distance L, le travail de la force de frottement sur la même durée est donc :

$$W_{frott} = \int \vec{R}_t.\overrightarrow{dM} = -R_t L \quad \text{soit} \quad \boxed{W_{frott} = -kmgL\cos\alpha}$$

AN : $\underline{\Delta E_c = -1{,}0\ \text{J}}$ et $\underline{W_{frott} = -5{,}3\ \text{J}}$

c) Pour un solide (système indéformable), le travail des forces intérieures est nul ; le théorème de l'énergie cinétique entre les deux instants s'écrit alors :

$$\Delta E_c = W_{\vec{R}_t} + W_{\vec{R}_n} + W_{m\vec{g}}$$

avec $W_{\vec{R}_t} = W_{frott}$ par définition, $W_{\vec{R}_n} = 0$ car la réaction normale est orthogonale au déplacement, et $W_{m\vec{g}} = -\Delta E_p = mgL\sin\alpha$ ($\underline{\Delta E_p = -4{,}3\ \text{J}}$).

Rq : On retrouve $\Delta(E_c + E_p) = W_{frott} = W_{nc}$, la variation d'énergie mécanique du système est égale au travail des forces non conservatives.

D'où :

$$W_{frott} = \Delta E_c + \Delta E_p = -\frac{1}{2}mv_0^2 - mgL\sin\alpha$$

$$= -\frac{1}{2}m2Lg(k\cos\alpha - \sin\alpha) - mgL\sin\alpha = -mgLk\cos\alpha$$

Ce bilan d'énergie conduit à la même expression de W_{frott}, travail dissipé en énergie thermique (échauffement par frottement) entre le bloc et le plan.

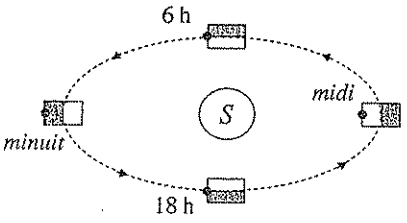
Questions de réflexion ☐ Physique pratique

40. Les vitesses courantes sont non relativistes et vérifient $v_r \ll c$ et $v_e \ll c$; on en déduit que $v_a = \dfrac{v_r + v_e}{1 + v_r.v_e / c^2} \approx v_r + v_e$, la formule relativiste redonne alors la formule de la mécanique classique.
Un photon qui se déplace à la vitesse $v_r = c$ dans le référentiel relatif se déplace également à la vitesse $v_a = \dfrac{c + v_e}{1 + v_e / c} = c$ dans le référentiel absolu, et ceci $\forall v_e$, et pas à une vitesse supérieure à c comme on aurait pu le penser.
En réalité l'invariance de c, à savoir « La lumière se propage dans le vide avec la même vitesse c dans tous les référentiels galiléens » est un des deux postulats de la relativité restreinte, l'autre « L'expression des lois physiques est la même dans tous les référentiels galiléens » généralise à toute la physique le principe de relativité de Galilée limité à la seule mécanique newtonienne.

41. En cas d'accident, la décélération est brutale ; le référentiel lié à la voiture n'est plus galiléen et les corps sont soumis à une force d'inertie d'entraînement dans le sens de la marche, à compenser avec une ceinture pour éviter l'éjection. Si l'on estime que le véhicule passe de 50 km/h à l'arrêt en 0,1 s, l'accélération subie est de $140\ \text{m.s}^{-2} \approx 15g$, ce qui correspond dans le langage de la sécurité routière à « une force de projection égale à 15 fois son poids »...

42. L'année normale comporte 365 jours (avec un mois de février de 28 jours) ; il suffit alors tous les 4 ans d'intercaler une année bissextile de 366 jours (avec un mois de février de 29 jours) pour rattraper le retard du jour manquant. En réalité cette correction n'est pas « juste », le calendrier grégorien (instauré en France en 1582 sous Henri III) avance alors d'environ 3 jours tous les 400 ans ; c'est la raison pour laquelle les années 1700, 1800, 1900, 2100, etc...normalement bissextiles ne le sont pas, alors que les années 1600, 2000, 2400, etc...le restent.

43. La figure ci-contre sur laquelle la Terre a volontairement été représentée sous forme rectangulaire (afin de bien voir qu'elle ne tourne pas sur elle-même) montre clairement que pour un observateur (le point sur la Terre), en un an (c'est-à-dire une révolution complète autour du Soleil), il s'est écoulé...−1 jour !



On en déduit donc que 365,25 jours (solaires moyens) dans une année correspondent en réalité à 366,25 rotations propres (jours sidéraux) : $365{,}25\ T_{sm} = 366{,}25\ T_{sid}$, ce qui redonne exactement les résultats des questions **9.** et **25.** !

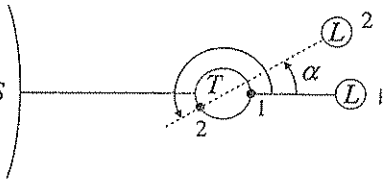
44. Voir les questions **33.** et **34.** Le champ de marée exercé par (S) sur (Σ) de centre G tend à disloquer (Σ) en l'étirant de part et d'autre du plan orthogonal en G à GS.

Cet effet en M / D^3 est d'autant plus important que (Σ) est proche de (S) et que (S) est massive. Si les forces de marée deviennent plus grandes que les forces de cohésion (par exemple gravitationnelles propres), alors (Σ) peut être brisé.

C'est ce qui est arrivé à la comète Shoemaker-Lévy 9 en 1994 : passée trop près de Jupiter, elle s'est brisée en plusieurs morceaux qui ont ensuite percuté la planète géante.

Une interprétation des anneaux de Saturne est la destruction par effet de marée d'un ou plusieurs satellites trop gros et trop proches de leur planète (voir la question **63.** pour un calcul de la limite de Roche sur un modèle).

45. Partons de la situation 1 dans laquelle les trois astres Soleil, Terre et Lune sont alignés dans cet ordre (pleine Lune). Pour l'observateur terrestre (au point 1), il est minuit et la marée est haute. La prochaine marée n'est pourtant pas à midi suivant lorsque la Terre a fait un demi-tour sur elle-même car la Lune a elle aussi tourné (un peu) sur son orbite (dans le même sens).

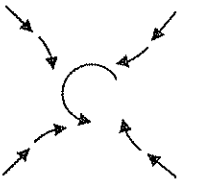


Le même observateur observe donc la prochaine marée haute dans la position 2 et si T_0 est le temps qui sépare les deux situations : $T_0 = \dfrac{\alpha}{\omega_L} = \dfrac{\pi+\alpha}{\omega_T}$, soit avec

$T = 2\pi / \omega_T \approx 24$ h et $L = 2\pi / \omega_L \approx 29{,}5$ jours, $\alpha = \dfrac{\pi T}{L-T}$

d'où $\boxed{T_0 = \dfrac{T}{2}\dfrac{1}{1-T/L} \approx 12 \text{ h } 25 \text{ min}}$

46. Considérons un déplacement horizontal des masses d'air attirées par une forte dépression ; dans l'hémisphère Nord la déviation due à la force d'inertie de Coriolis a lieu vers la droite (voir la question **35.**). Mais la vitesse relative est radiale, d'où le schéma ci-contre. Le cyclone tourne vers la gauche dans l'hémisphère Nord et vers la droite dans l'hémisphère Sud.



hémisphère Nord

47. Pour pouvoir bénéficier de l'effet d'entraînement de la Terre lié à sa rotation propre, effet proportionnel à la distance à l'axe de rotation, donc maximal à l'équateur où $v = 2\pi R_T / T \approx 1670$ km/h. Au sol le satellite dispose déjà d'énergie cinétique dans le référentiel géocentrique. Le site européen de Kourou en Guyane française est le mieux placé de ce point de vue avec une latitude de 5°. L'économie en carburant est estimée à 5% par rapport aux bases plus hautes en latitude comme Cap Canaveral en Floride (28°) et surtout Baïkonour (46°) ou Plesetsk (63°).
La Terre tourne d'Ouest en Est autour de son axe, la plupart des satellites tournent donc dans ce sens autour de la Terre pour bénéficier de la rotation de la Terre au lancement (vers l'Est). Quelques satellites, qualifiés de rétrogrades, tournent en sens inverse, en général sur des orbites très inclinées.

48. $\vec{g}(r,\lambda) = -\dfrac{GM_T}{r^2}\vec{u}_r + \Omega^2 \overrightarrow{HM} = \vec{0}$ suppose $\lambda = \lambda_0 = 0$ pour que les deux composantes soient de même direction, ce qui limite la recherche au plan équatorial.

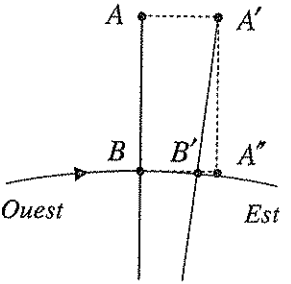
Quand r augmente le terme gravitationnel (négatif en projection) diminue en valeur absolue et le terme centrifuge (positif en projection) augmente ; $r = r_0$ est tel que :

$$r_0^3 = \frac{GM_T}{\Omega^2}$$

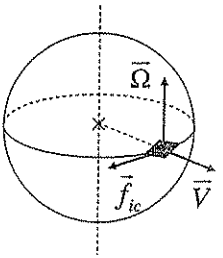
AN : $r_0 = 42\,200$ km, mais pour ressentir cet effet centrifuge, il faudrait que le corps soit rigidement attaché à la Terre pour tourner en même temps qu'elle. Il n'est donc pas étonnant de retrouver le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire, qui justement tourne à la même vitesse angulaire que la Terre ! (avec r et Ω différents, c'est la condition d'apesanteur comme dans la station spatiale internationale ISS).

49. Le mobile est lâché avec une vitesse initiale nulle (dans le référentiel terrestre non galiléen) du point A ; B est le point correspondant à la verticale au sol. Dans le référentiel géocentrique (galiléen) et dans lequel la Terre tourne sur elle-même

d'Ouest en Est, les points A et B ne sont pas immobiles ; ils ont une vitesse suivant le parallèle du lieu d'autant plus grande qu'ils sont loin du centre : $v_A > v_B$. Après le lâché du mobile en A, par inertie, celui-ci conserve sa vitesse horizontale, et atteint donc le sol en A'' tel que $BA'' = AA'$, alors que dans le même temps B est passé en B' : pour l'observateur terrestre il y a eu déviation vers l'Est, qu'il explique dans son référentiel par la force de Coriolis...



50. On note $\vec{V}$ la vitesse avec laquelle le marin lève l'ancre vers le haut du mat (dans le référentiel terrestre). À cause de la rotation de la Terre, l'ancre et donc le bateau subit la force de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$ qui déplace le bateau vers l'Ouest sur l'équateur. Pendant la durée τ de l'opération : $(M+m)\dfrac{dv}{dt} = 2m\Omega V = 2m\Omega\dfrac{h}{\tau}$.



La vitesse v du bateau croît linéairement et $v_{max} = v(t=\tau)$, soit $v_{max} = \dfrac{2m\Omega h}{M+m} = 0{,}5$ mm.s^{-1}, ce qui n'est pas une solution...

51. Une fois de plus la figure n'est pas à l'échelle, mais elle suffit pour comprendre qu'en situation de nouvelle Lune, les forces de gravitation exercées par le Soleil et la Terre sur la Lune sont de sens opposé.

Le rapport est $\dfrac{F_{T/L}}{F_{S/L}} = \dfrac{GM_TM_L/d_{TL}^2}{GM_SM_L/(d_{TS}-d_{TL})^2} \approx \dfrac{M_T}{M_S}\left(\dfrac{d_{TS}}{d_{TL}}\right)^2$ car $d_{TS} \gg d_{TL}$

L'application numérique est surprenante : $\dfrac{F_{T/L}}{F_{S/L}} = \dfrac{6.10^{24}}{2.10^{30}}\left(\dfrac{150.10^6}{384\,000}\right)^2 = 0{,}46 < 1$

alors que l'on s'attendait à un rapport supérieur à 1 car la Lune, en tant que satellite terrestre, n'est pas « capturée » par le Soleil ! En fait l'évaluation de la distance limite d_l au-delà de laquelle un satellite terrestre devient solaire ne peut pas se faire par les seules attractions gravitationnelles.

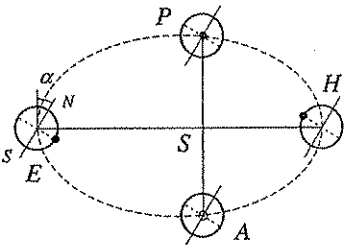
Si on considère l'action du Soleil sur la Lune, alors il faut aussi, évidemment, considérer son action sur la Terre, ce qui rend le référentiel géocentrique non galiléen. Le calcul est simplement celui du terme de marée de la question **32.**, et en utilisant le développement limité de la question **34.** on obtient pour la Lune à la distance d_{TL} de la Terre, elle-même à d_{TS} du Soleil : $\dfrac{2GM_{soi}d_{TL}}{d_{TS}^3}$ terme de marée à comparer au champ gravitationnel exercé par la Terre sur la Lune : $\dfrac{GM_T}{d_{TL}^2}$.

La distance théorique correspondant à l'égalité donne

$$d_{TL} = d_{TS}\left(\frac{M_T}{2M_{sol}}\right)^{1/3} = 2.10^6 \text{ km}$$

Cette distance est largement supérieure à la distance Terre-Lune, sans toutefois être très supérieure, le Soleil perturbe l'orbite lunaire.

52. La trajectoire que décrit la Terre dans sa course autour du Soleil est appelée écliptique. L'axe des pôles Nord-Sud de la Terre (et dirigé vers l'étoile polaire) est incliné d'un angle $\alpha = 23°27'$ sur l'écliptique ; cela modifie au cours de l'année l'inclinaison des rayons solaires en un lieu donné de la Terre (ainsi que la durée du « jour » et de la nuit), donc le degré d'ensoleillement et conditionne l'alternance des saisons. Pour s'en convaincre, comparer la situation au début de l'hiver (point H) et au début de l'été (point E) dans l'hémisphère Nord.



Le point sur la figure est un observateur sur l'équateur terrestre au moment où le Soleil passe au méridien (il est midi pour lui). Au point H, il est « au-dessus » de l'écliptique dans sa position la plus éloignée : c'est le solstice d'hiver (à noter qu'alors le Soleil est au zénith, c'est-à-dire à la verticale, du tropique du Capricorne à 23°27′ de latitude Sud). Au point E, il est « en dessous » de l'écliptique dans sa position la plus éloignée : c'est le solstice d'été (à noter qu'alors le Soleil est au zénith du tropique du Cancer, à 23°27′ de latitude Nord). Aux points P et A le Soleil est au zénith pour notre observateur sur l'équateur ; il s'agit de l'équinoxe de printemps et d'automne (date à laquelle le point est caché sur la figure) ; alors, partout sur Terre, la durée du « jour » est égale à celle de la nuit (soit 12 h).

La faible excentricité de l'orbite terrestre (exagérée sur la figure) est responsable d'une légère inégalité de la durée des saisons ; des mesures astronomiques permettent de déterminer avec précision la durée des saisons : ainsi pour l'hiver et le printemps, dans l'hémisphère Nord, $T_H = 89{,}4$ jours et $T_p = 93{,}2$ jours.

Il se trouve que le solstice d'hiver correspond pratiquement à la position où la Terre passe au périhélie. L'hiver dans l'hémisphère Nord a donc lieu lorsque la Terre est en moyenne plus proche du Soleil et l'été quand elle en est plus éloignée (les saisons inversées de l'hémisphère Sud sont donc plus contrastées…).

53. Lorsque la jambe droite est mise en avant, sur une patinoire horizontale où aucune force extérieure n'existe parallèlement au sol, la jambe gauche recule afin que le centre de masse reste immobile dans sa position initiale. Sur un sol normal c'est l'action de contact qu'exerce le sol sur le pied gauche qui l'empêche de reculer et permet à la personne d'avancer. Ou à un véhicule de démarrer, à un cylindre de tourner, à une corde de violon d'être entraînée par l'archet,…

L'idée qu'une force de frottement « freine » un mouvement est donc loin d'être toujours juste !

54. Il est plus difficile de mettre un objet en mouvement de glissement sur un sol (à partir de $F_0 = k_0 N$) que de maintenir ce mouvement une fois qu'il est amorcé (il suffit de $F = kN$), où $\vec{F}$ est la force d'un opérateur qui doit s'opposer à la force de frottement du sol. De $F_0 > F$ on déduit $k_0 > k$, mais les deux coefficients sont voisins et toujours pris identiques dans les exercices.

55. La question concerne un système mécanique (et non le cas particulier d'un point ou d'un solide).

- Le système étant isolé, il n'est soumis à aucun moment de forces extérieures ; d'après la loi du moment cinétique, donc son moment cinétique est conservé.
- En revanche, son énergie mécanique n'est pas forcément conservée ; le système étant isolé, il n'y a pas de travail des forces extérieures, et parmi les forces intérieures il faut distinguer celles qui sont conservatives (c) et dérivent d'une énergie potentielle de celles qui sont non conservatives (nc). D'après la loi de l'énergie cinétique dans (R^*) :

$$\Delta Ec = W_{ext} + W_{int}^{c} + W_{int}^{nc} = 0 - \Delta Ep + W_{int}^{nc}$$

donne $\Delta(Ec + Ep) = \Delta E_m = W_{int}^{nc}$ où W_{int}^{nc} peut être négatif, nul et même positif.

Exercices

56. Des phases de la Lune à la masse de la Terre

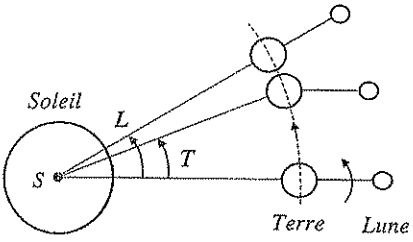
a) La lunaison L est la période s'écoulant entre deux phases identiques successives de la Lune (par exemple entre deux pleines lunes ou, ce qui est plus précis à l'observation, entre deux nouvelles lunes).
Il s'agit donc d'une période apparente pour un Terrien, différente de la période de révolution propre T en raison de la révolution de la Terre autour du Soleil.

La calendrier de l'année 2015 indique 12 lunaisons entre les pleines lunes du 5 janvier et du 25 décembre (attention à la règle des piquets et des intervalles !) ; entre ces deux dates se sont écoulés 354 jours, d'où

$$\underline{L = 29{,}5 \text{ jours}}$$

Noter que les phases de la Lune constituent le point commun de la détermination des dates de la Pâque chrétienne, du nouvel an chinois et du début du Ramadan.

b) Les deux révolutions (Lune autour de la Terre et Terre autour du Soleil) se font dans le même sens et nous supposons dans le même plan. Le schéma ci-contre montre bien qu'entre deux pleines lunes successives de durée L, la Lune a fait plus d'un tour autour de la Terre, la période de révolution propre étant T.



Soit (C) le repère de Copernic (fixe) et (R) le repère tournant, d'origine S et dont l'un des axes pointe vers la Terre ; la composition des vitesses de rotation donne :

$$\vec{\omega}_{L/(C)} = \vec{\omega}_{L/(R)} + \vec{\omega}_{(R)/(C)} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{L} + \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{L}{1 + L/A}}$$

AN : $T = 27{,}3$ jours

Dans cette formule, A est la durée de l'année. Si la Lune ne tournait pas autour de la Terre, il s'écoulerait en une année une lunaison, et c'est cet excédent L/A qui explique la différence entre L et T (voir à ce sujet les questions **9.** et **43.**).

c) En présentant toujours la même face à la Terre, la Lune effectue une rotation sur elle-même avec une période égale à sa période de révolution de 27,3 jours. Cette synchronisation est une conséquence des forces de marée exercées par la Terre sur la Lune.

d) En supposant le référentiel géocentrique galiléen, on écrit la 3e loi de Kepler pour la Lune autour de la Terre (avec $M_T \gg M_L$) : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$

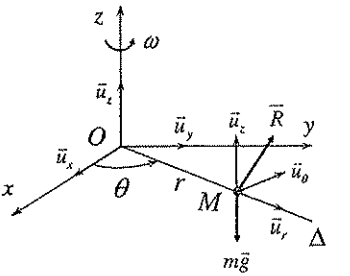
T est bien la période propre de la question b) soit $T = 27{,}3$ jours, d'où :

$$M_T = 6{,}0.10^{24} \text{ kg}$$

57. Puissance d'une réaction d'axe

a) L'anneau est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la réaction d'axe $\vec{R}$. Dans $(R) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = m\vec{g} + \vec{R} \quad (1)$$



Il s'agit de projeter cette équation vectorielle sur la base polaire tournante $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ liée à la tige.

L'accélération est donc l'accélération en polaires avec r variable (distance de l'anneau à l'axe) et $\dot{\theta} = \omega = cste$; par ailleurs $\ddot{z} = 0$ puisque le mouvement s'effectue dans le plan $z = 0$.

Le poids n'a qu'une composante verticale.

La réaction a une composante verticale R_z, une composante orthoradiale R_θ, mais pas de composante radiale $R_r = 0$ en l'absence de frottements.

La relation (1) s'écrit en projection sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ indiquée :

$$m \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\omega^2 \\ 2\dot{r}\omega \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_z \end{vmatrix}$$

b) sur $\vec{u}_r$: $\ddot{r} = \omega^2 r$ qui s'intègre en $r(t) = A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t$

les conditions initiales $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$ conduisent à $\boxed{r(t) = r_0\,\mathrm{ch}\,\omega t}$

sur $\vec{u}_\theta$: $\boxed{R_\theta = 2m\omega\dot{r}}$

sur $\vec{u}_z$: $\boxed{R_z = mg}$ (du fait de l'absence de mouvement vertical la composante verticale de la réaction compense le poids)

c) Dans le référentiel (R), la puissance reçue par l'anneau en M de la part des deux forces (poids et réaction) est donnée par l'expression :

$$P_{(R)} = \left(m\vec{g} + \vec{R}\right).\vec{v}(M)_{(R)}$$

Le produit scalaire est effectué en projetant les vecteurs sur la base tournante $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$; la vitesse est donc « la vitesse en polaires » avec $\dot{\theta} = \omega$:

$$P_{(R)} = (R_\theta\,\vec{u}_\theta).(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\omega\vec{u}_\theta) = r\omega R_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{(R)} = 2m\omega^2 r\dot{r}}$$

Dans (R), c'est donc la réaction orthoradiale qui travaille (car elle n'est pas orthogonale au déplacement dans (R) !)

d) Soit $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la base fixe du référentiel galiléen (R) et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base associée au référentiel d'étude tournant, non galiléen (R').

Dans (R') l'anneau est soumis à son poids $m\vec{g}$, à la réaction d'axe $\vec{R}$, à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\left(-\omega^2\overrightarrow{HM}\right)$, avec $H = O$, et à la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{(R')}\right)$. L'équation de la dynamique s'écrit dans (R') :

$$m\vec{a}(M)_{(R')} = m\vec{g} + \vec{R} + m\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{(R')}$$

Attention : dans le référentiel d'étude (R') dans lequel le vecteur $\vec{u}_r$ est fixe, le mouvement du point M est rectiligne, et donc la vitesse et l'accélération y s'expriment simplement par : $\vec{v}(M)_{(R')} = \dot{r}\,\vec{u}_r$ et $\vec{a}(M)_{(R')} = \ddot{r}\,\vec{u}_r$

En projection sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$m\begin{vmatrix}\ddot{r}\\0\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\-mg\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\R_\theta + m\omega^2\\R_z\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}r\\0-2m\\0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\0\\\omega\end{vmatrix} \begin{vmatrix}\dot{r}\\0\\0\end{vmatrix}$$

car en l'absence de frottement, la réaction n'a pas de composante dans la direction $\vec{u}_r$ du mouvement.

sur $\vec{u}_r$: $\ddot{r} = \omega^2 r$ comme précédemment $\Rightarrow$ $\boxed{r(t) = r_0\,\mathrm{ch}\,\omega t}$

respectant $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$ (le mouvement est lié à la force centrifuge)

sur $\vec{u}_\theta$: $\boxed{R_\theta = 2m\omega\dot{r} = 2m\omega^2 r_0 \operatorname{sh} \omega t}$

(la réaction orthoradiale compense la force de Coriolis)

sur $\vec{u}_z$: $\boxed{R_z = mg}$ (la réaction verticale compense le poids)

e) Dans (R') la puissance totale reçue par le point M est (en incluant toutes les forces) :

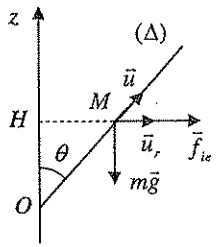
$$P_{(R')} = \left(m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}\right).\vec{v}(M)_{(R')} = (m\omega^2 r\vec{u}_r).\dot{r}\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{P_{(R')} = m\omega^2 r\dot{r}}$$

Dans (R') seule la force d'inertie d'entraînement travaille.

Conclusion : Non seulement le travail dépend du référentiel (ici $P_{(R)} = 2P_{(R')}$), mais de plus, d'un référentiel à l'autre, ce ne sont pas les mêmes forces qui travaillent.

58. Anneau glissant sur un axe inclinée en rotation

Le référentiel (R) lié à la tige (Δ) est en rotation pure uniforme autour d'un axe vertical fixe du référentiel terrestre galiléen, il n'est pas galiléen. Le vecteur rotation d'entraînement est $\vec{\omega}_e = \omega\vec{u}_z$ (pas de confusion possible ici avec $\dot{\theta}$ car θ est constant). L'étude de l'équilibre relatif est faite dans le référentiel relatif (R) lié à (Δ). Le système anneau, considéré comme un point matériel, est soumis à :



- son poids qui dérive de $E_{P1} = mgz + cste$
- la réaction normale à (Δ) (pas de frottements) qui ne travaille pas dans (R)
- $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2\overrightarrow{HM} = m\omega^2 s \sin\theta\,\vec{u}_r$ qui dérive de

$$E_{P2} = -\frac{1}{2}m\omega^2\,HM^2 + cste$$

- $\vec{f}_{ic} = -m(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r) = \vec{0}$ à l'équilibre relatif et qui, sinon, ne travaille pas dans (R)

a) La RFD : $m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}(M)_{(R)}$, à l'équilibre relatif et en projection sur $\vec{u}$:

$$-mg\cos\theta + 0 + m\omega^2 s\sin^2\theta + 0 = 0$$

Pour $\theta = 0$ il n'y a évidemment pas de solution $\Rightarrow$ $\boxed{s = s_e = \dfrac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}}$

Remarquer que pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ l'équilibre est logiquement $s_e = 0$.

Considérons un petit déplacement de M à partir de l'équilibre :

- vers le haut soit $s > s_e$; alors $\vec{f}_{ie}.\vec{u} = m\omega^2 s\sin^2\theta > mg\cos\theta$ et le mouvement vers le haut

- vers le bas soit $s < s_e$; alors $\vec{f}_{ic}.\vec{u} = m\omega^2 s \sin^2\theta < mg\cos\theta$ et le mouvement vers le bas

L'équilibre est instable.

Le système est conservatif à un paramètre s, avec $z = s\cos\theta$, l'énergie potentielle est : $E_p = mgs\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 s^2 \sin^2\theta + cste$

$$\frac{dE_p}{ds} = mg\cos\theta - m\omega^2 s\sin^2\theta = 0 \Rightarrow s = s_e = \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$$

et $\frac{d^2E_p}{ds^2} = -m\omega^2\sin^2\theta < 0$ l'équilibre est instable.

b) La RFD projetée sur $\vec{u}$, colinéaire à (Δ) et orthogonal à $\vec{f}_{ic}$, donne :

$$-mg\cos\theta + 0 + m\omega^2 s\sin^2\theta + 0 = m\ddot{s} \Rightarrow \ddot{s} - \omega^2\sin^2\theta\, s = -g\cos\theta$$

équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre constant,

$$s(t) = Ae^{+(\omega\sin\theta)t} + Be^{-(\omega\sin\theta)t} + \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}$$

La solution particulière est la position d'équilibre $s = s_e$; avec les conditions initiales $s(0) = s_0$ et $\dot{s}(0) = 0$, on obtient :

$$\boxed{s(t) = s_e + \frac{s_0 - s_e}{2}\left(e^{+(\omega\sin\theta)t} + e^{-(\omega\sin\theta)t}\right)}$$

Si $s_0 > s_e$, $s(t)$ est une fonction croissante et le mouvement est vers le haut.

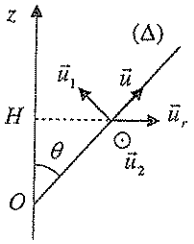
Si $s_0 < s_e$, $s(t)$ est une fonction décroissante et le mouvement est vers le bas.

c) La réaction de la tige peut maintenant être déterminée entièrement car le mouvement est connu, elle est orthogonale à la tige et s'écrit : $\vec{R}_n = R_1\vec{u}_1 + R_2\vec{u}_2$.

Il faut exprimer la force de Coriolis, avec la vitesse relative :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{(R)} = 2\omega\dot{s}(\vec{u}_z\wedge\vec{u}) = -2\omega\dot{s}\sin\theta\,\vec{u}_2$$

$$\Rightarrow \vec{f}_{ic} = 2m\omega\dot{s}\sin\theta\,\vec{u}_2$$



La RFD projetée sur $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta + R_1 - m\omega^2 s\sin\theta\cos\theta + 0 = 0 \\ 0 + R_2 + 0 + 2m\omega\dot{s}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_1 &= m\left(g\sin\theta + \omega^2 s\sin\theta\cos\theta\right) \\ R_2 &= -2m\omega\frac{ds}{dt}\sin\theta \end{aligned}}$$

La réaction dépend de la vitesse relative donc du mouvement.

Comme à la question **57. d)** la force de Coriolis n'a pas d'effet sur le mouvement car elle est compensée par la composante R_z de la réaction.

59. Usure du bord intérieur de rails par un TGV

L'étude est faite dans le référentiel terrestre (R) non galiléen puisqu'il faut tenir compte de la rotation de la Terre ; la force d'inertie d'entraînement est déjà comptée dans le poids, il s'agit donc d'un effet de la force de Coriolis.

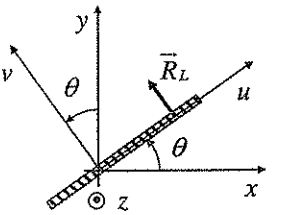
Le référentiel de référence (R_0) galiléen est le référentiel géocentrique et non le référentiel de Copernic ; en effet, la Terre met 365 jours pour faire un tour entier soit 360° autour du Soleil, la trajectoire de la Terre est donc localement un segment de droite parcouru à vitesse constante. Ceci revient à négliger l'action du Soleil sur la Terre et corrélativement l'action du Soleil sur le train (tenir compte des deux redonnerait par effet différentiel le terme de marée du Soleil sur le train... ! voir la question **32.**).

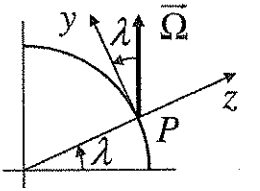
Dans le référentiel terrestre (R) le train possède un mouvement rectiligne uniforme (vecteur vitesse constant en direction et norme), son accélération $\vec{a}(P)_{(R)}$ est donc nulle. La vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ de la Terre dans le référentiel géocentrique est prise constante en direction et en norme, si bien que le seul terme d'inertie d'entraînement qui demeure est celui qui, associé au champ gravitationnel, figure déjà dans le poids.

Il reste la réaction $\vec{R}$ des rails sur le train et la force de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m\left(2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(P)_{(R)}\right)$.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au train dans (R) s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(P)_{(R)} = \vec{0} \quad (1)$$





Pour être exploitable, cette relation vectorielle doit être projetée sur une base ; on a le choix entre la base cartésienne (P,x,y,z) ou la base polaire (P,u,v,z). Cette dernière est plus « naturelle » vis-à-vis de la vitesse du train et de la direction de $\vec{R}_L$.

Avec $\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega\cos\lambda \\ \Omega\sin\lambda \end{vmatrix}_{(P,xyz)}$, puis $\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \Omega\cos\lambda\sin\theta \\ \Omega\cos\lambda\cos\theta \\ \Omega\sin\lambda \end{vmatrix}_{(P,uvz)}$

(1) s'écrit (tous les vecteurs sont projetés sur la base (P,u,v,z) :

$$\begin{vmatrix}0\\0\\-mg\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\R_L\\R_V\end{vmatrix}-2m\begin{vmatrix}\Omega\cos\lambda\sin\theta\\\Omega\cos\lambda\cos\theta\\\Omega\sin\lambda\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}v\\0\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$

sur Pv : $0=R_L-2m\Omega\sin\lambda v$ (2)

sur Pz : $0=-mg+R_V+2m\Omega\cos\lambda\cos\theta v$ (3)

Si (2) donne $R_L=2m\Omega\sin\lambda v$, on peut se contenter dans (3) de $R_V\approx mg$ car on peut y négliger le terme petit en $\Omega=7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1} ce qui n'est pas possible dans (2).

d'où le rapport : $\boxed{\dfrac{R_L}{R_V}\approx\dfrac{2\Omega v\sin\lambda}{g}}$

AN : $R_L/R_V\approx 0{,}94.10^{-5}$, ce qui peut paraître faible, mais finit par conduire à des problèmes d'usure.

60. Distribution de pression dans une cavité accélérée (*)

a) L'inertie de la matière fait que dans la cavité en accélération, le gaz est déporté vers le fond de la cavité (comme un voyageur assis dans le sens de la marche dans un train en accélération). Il faut donc s'attendre à une augmentation de la pression sur l'arrière de la cavité et une diminution en avant de la cavité :

$$P(x=0)>P_0 \quad \text{et} \quad P(x=l)<P_0$$

b) L'étude est faite dans le référentiel mobile (R) dans lequel, après un régime transitoire ignoré, le gaz est en équilibre (statique des fluides), même si elle pourrait aussi facilement être conduite dans le référentiel galiléen (R_0) du laboratoire (l'accélération du gaz y est $\vec{\gamma}$).

La pression n'étant pas homogène dans la cavité, il convient de considérer une tranche de gaz de masse $dm=\rho(x)Sdx$.

Sur l'axe horizontal Ox les forces de pression s'écrivent :

$$dF_{Pr}=SP(x)-SP(x+dx)=-\frac{dP}{dx}dxS=-\frac{dP}{dx}dV$$

et la force d'inertie d'entraînement est (il n'y a pas de force de Coriolis dans le référentiel relatif en translation) :

$$\overrightarrow{dF_i}=-dm(\vec{\gamma})=-\rho(x)dV\gamma\vec{u}_x$$

En l'absence de mouvement, on a sur $\vec{u}_x$: $dF_{Pr}+dF_i=0$, soit :

$$-\frac{dP}{dx}-\rho(x)\gamma=0$$

L'air, de masse molaire M, est assimilé à un gaz parfait de température uniforme :

$$\rho(x)=\frac{MP(x)}{RT}$$

d'où en séparant les variables :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M\gamma}{RT}dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(x) = P_\gamma e^{-\frac{M\gamma x}{RT}}} \quad (1)$$

Comme prévu la pression décroît avec x, et la constante d'intégration P_γ (à ne pas noter P_0 !) représente la valeur de P en $x = 0$.

c) La constante P_γ se détermine en traduisant que la masse totale de gaz est conservée entre la cavité accélérée et la cavité au repos :

$$\int_0^l \rho(x) S dx = \rho_0 S l$$

et puisque ρ est proportionnelle à P :

$$\frac{1}{l}\int_0^l P(x)dx = P_0$$

relation qui montre que P_0 représente aussi la pression moyenne dans la cavité.

L'intégration de $P(x)$ conduit, en posant $a = \dfrac{M\gamma l}{RT}$ (sans dimension), à :

$$P_\gamma = P_0 \frac{a}{1 - e^{-a}}$$

(on retrouve que P_0 est la pression uniforme lorsque $\gamma = 0$)

d) AN : avec $M = 29.10^{-3}$ kg.mol^{-1}, $R = 8{,}31$ J.K^{-1}mol^{-1}, $T = 293$ K

$$\underline{a = 2{,}3.10^{-3}}$$

$a \ll 1$ justifie le développement limité de P_γ à l'ordre 2 au dénominateur pour éviter de trouver $P_\gamma \approx P_0$ (cas de l'ordre 1).

$$P_\gamma \approx P_0 \frac{a}{1-(1-a+a^2/2)} = P_0 \frac{1}{1-a/2} \approx P_0(1+a/2) > P_0$$

Alors (1) $\Rightarrow$ $P(x) = P_\gamma e^{-\frac{M\gamma x}{RT}} \approx P_0(1+a/2)(1-ax/l) \approx P_0\left(1+a\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)\right)$.

ou encore $\boxed{P(x) \approx P_0\left[1+\frac{M\gamma}{RT}(l/2-x)\right]}$

conduisant à une décroissance linéaire de la pression avec x ; on a $P(l/2) = P_0$, $P(x=0) = P_0(1+a/2)$ et $P(x=l) = P_0(1-a/2)$ d'où une variation relative :

$$\frac{P(x=0)-P(x=l)}{P_0} = a = 2{,}3.10^{-3}$$

très faible malgré la forte accélération de $5g$; c'est la raison pour laquelle il n'a pas été tenu le poids (accélération g), et qui modifie encore moins la distribution de pression suivant Oz.

61. Mouvement d'un ballon dans le référentiel terrestre non galiléen (*)

a) Les forces agissant sur le ballon, considéré comme un point matériel, sont dans le référentiel terrestre non galiléen en rotation pure uniforme dans le référentiel géocentrique galiléen : la force de gravitation $m\vec{A}$, $\vec{f}_{ie}$ et $\vec{f}_{ic} = -m\left(2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r\right)$ que l'on projette sur la base locale terrestre (la figure est la même qu'à la question **59.**) :

$$-2m\begin{vmatrix}0\\ \omega_e\cos\lambda\\ \omega_e\sin\lambda\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2m\left(\omega_e\cos\lambda\,\dot{z}-\omega_e\sin\lambda\,\dot{y}\right)\\ -2m\left(\omega_e\sin\lambda\,\dot{x}\right)\\ +2m\left(\omega_e\cos\lambda\,\dot{x}\right)\end{vmatrix}$$

La RFD s'écrit $m\vec{A}+\vec{f}_{ie}+\vec{f}_{ic}=m\vec{a}_r$ avec $m\vec{A}+\vec{f}_{ie}=m\vec{g}$ par définition et ici compte-tenu des déplacements limités du ballon, $\vec{g}$ est uniforme et porté par Oz ; on projette la RFD :

$$\begin{cases}\ddot{x}=-2\omega_e\left(\cos\lambda\,\dot{z}-\sin\lambda\,\dot{y}\right)\\ \ddot{y}=-2\omega_e\sin\lambda\,\dot{x}\\ \ddot{z}=+2\omega_e\cos\lambda\,\dot{x}-g\end{cases}$$

b) Les équations à variables séparables généralisées peuvent être intégrées en ligne et avec les conditions initiales, on obtient :

$$\vec{v}_0\begin{vmatrix}0\\ v_0\cos\alpha\\ v_0\sin\alpha\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=-2\omega_e\left(\cos\lambda\,z-\sin\lambda\,y\right)\\ \dot{y}=-2\omega_e\sin\lambda\,x+v_0\cos\alpha\\ \dot{z}=+2\omega_e\cos\lambda\,x-gt+v_0\sin\alpha\end{cases}$$

$\omega_e=\dfrac{2\pi}{T}$ avec $T=86\,164\,\text{s}$, $\omega_e=7{,}3.10^{-5}\ \text{rad.s}^{-1}$

c) En ne gardant que les termes de premier ordre non nul (x comme $\dot{x}$ est en ω_e, les premiers termes dans $\dot{y}$ et $\dot{z}$ sont alors en ω_e^2 donc négligeables) :

$$\begin{cases}\dot{x}=-2\omega_e\left(\cos\lambda\,z-\sin\lambda\,y\right) & (1)\\ \dot{y}=v_0\cos\alpha & (2)\\ \dot{z}=-gt+v_0\sin\alpha & (3)\end{cases}$$

d) Les équations (2) et (3) donnent, avec à $t=0$, M en O :

$y=(v_0\cos\alpha)\,t$ et $z=-\dfrac{1}{2}\,g\,t^2+(v_0\sin\alpha)\,t$, que l'on remplace dans (1) :

$$\dot{x}=\omega_e g\cos\lambda\,t^2-2\omega_e v_0\sin\left(\alpha-\lambda\right)t$$

qui s'intègre en :

$$x(t)=\frac{1}{3}\,\omega_e g\cos\lambda\,t^3-\omega_e v_0\sin\left(\alpha-\lambda\right)t^2+0$$

Au point de chute $z=0$ et $t=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$ en remplaçant dans $x(t)$ et après simplification :

$$\boxed{x = \frac{4\omega_e v_0^3}{3g^2}\sin^2\alpha\left(3\cos\alpha\sin\lambda - \sin\alpha\cos\lambda\right)}$$

AN : $\underline{x = 4{,}0\text{ mm}}$, $x > 0$ déviation vers l'Est mais non significative ici ; la déviation théorique très faible n'est pas mesurable car les hypothèses frottements négligeables et ballon considéré comme un point matériel entraînent des écarts bien plus importants. Le joueur n'a donc pas à se soucier de la force d'inertie de Coriolis.

En revanche, durant la première bataille des Falkland (première guerre mondiale), tous les obus anglais arrivaient très loin à gauche de leur cible...Les îles Falkland sont à la latitude 50° Sud et les viseurs des canons anglais avaient été réglés en Angleterre (50° Nord), ce qui change tout pour les mouvements quasi horizontaux.

62. Pendule au Panthéon (*)

1. a) Le résultat est classique : $\underline{P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 16{,}8\text{ s}}$

b) Dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) l'énergie mécanique du pendule est conservée (pas de frottements, liaison parfaite au niveau de l'attache) :

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) \quad \text{avec} \quad \theta(t) = \theta_M\cos\omega t$$

* à $t = 0$, $\dot{\theta} = 0$ et $E = mgl(1-\cos\theta_M) \Rightarrow \cos\theta_M = 1 - \frac{E}{mgl}$; $\underline{\theta_M = 5{,}85° = 5°51'}$

* vitesse maximale pour $\theta = 0$: $v_M = l\dot{\theta}(\omega t = \pi/2) = l\omega\theta_M$; $\underline{v_M = 2{,}67\text{ m.s}^{-1}}$.

c) On a $r = l\sin\theta_M$; $\underline{r = 7{,}13\text{ m}}$ d'où $\Delta\varphi \approx \frac{r}{R}$ assimilé à sa tangente car très petit.

2. a) Le lieu décrit un cercle de rayon $R\cos\varphi$ en un jour, d'où $v_0 = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T_0}$;

$$\underline{v_0 = 306\text{ m.s}^{-1} = 1\,102\text{ km/h}}$$

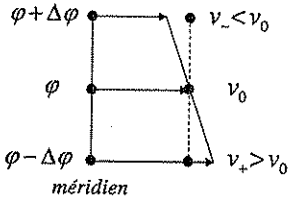
vitesse du même ordre de grandeur (à peine inférieure) à celle du son dans l'air.

b) De même $v_\pm = \frac{2\pi R\cos(\varphi \mp \Delta\varphi)}{T_0} = \frac{2\pi R}{T_0}(\cos\varphi \pm \Delta\varphi\sin\varphi)$ par développement limité,

soit $v_\pm = v_0 \pm \frac{2\pi r\sin\varphi}{T_0}$ car $\Delta\varphi = \frac{r}{R}$ et donc $\Delta v = |v_\pm - v_0| = \frac{2\pi r\sin\varphi}{T_0}$

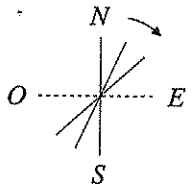
$\underline{\Delta v = 0{,}39\text{ mm.s}^{-1} = 1{,}4\text{ m/h}}$; ces écarts sont faibles, mais pas négligeables !

c) Par inertie, le pendule garde sa vitesse v_0. Vers le Nord, il a de l'avance $(v_0 > v_-)$ sur le point au sol ; vers le Sud, il accuse un retard $(v_0 < v_+)$. Pour un observateur immobile (ou par rapport au sol), le plan d'oscillation du pendule tourne donc dans le sens horaire.



Les maxima d'amplitude du pendule décrivent un cercle de rayon r à la vitesse Δv (conservée par inertie tout au long de la rotation), d'où la période :

$$T = \frac{2\pi r}{\Delta v} \Rightarrow \boxed{T = \frac{T_0}{\sin\varphi}} \; ; \; \underline{T = 31\text{h}\,52\text{min}}$$



Dans le référentiel terrestre (non galiléen), cet effet s'explique par l'action de la force de Coriolis.
L'interprétation géométrique séduisante proposée souffre du défaut de toutes les interprétations géométriques des effets de la force de Coriolis en ne considérant que le mouvement d'entraînement. Notamment dans l'interprétation proposée, si le lancé initial se faisait dans la direction Est-Ouest, rien ne se passerait...

d) Dans l'hémisphère Sud, la période T est la même, mais le sens de rotation est inversé.
À l'équateur, le pendule ne tourne pas puisque les vitesses v_+ et v_- de part et d'autre sont égales $(\varphi = 0 \Rightarrow T \to \infty)$.
Au pôle Nord, le plan du pendule est fixe dans le référentiel géocentrique et la Terre tourne « en dessous de lui » ; sa période apparente est $T = T_0$ (cas $\varphi = 90°$).

63. Limite de Roche (*)

a) Le mouvement est à force centrale, d'où $C = r^2\dot{\theta} = cste$, et de $r = d = cste$ (mouvement circulaire), on déduit $\dot{\theta} = \omega = cste$ (mouvement uniforme).
La RFD appliquée à l'ensemble de la comète et projetée sur l'axe dirigé par $\vec{u}_r$:

$$-(2m)\omega^2 d = -G\frac{mM_J}{(d-r)^2} - G\frac{mM_J}{(d+r)^2} \; (0) \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM_J}{2d}\left[\frac{1}{(d-r)^2} + \frac{1}{(d+r)^2}\right] \; (0')$$

Attention, la comète n'a pas une symétrie sphérique, et comme le champ de force est inhomogène, la somme des forces sur les deux sphères n'est pas égale à la force qui s'exercerait sur une sphère de masse $2m$: le second membre de la RFD n'est donc pas $-G\frac{(2m)M_J}{d^2}$!

b) La sphère de gauche (1) subit l'attraction de Jupiter, l'attraction de la sphère de droite, et la réaction $-\vec{R} = -R\vec{u}_r$ de la sphère (2), d'où :

$$-m\omega^2(d-r) = -G\frac{mM_J}{(d-r)^2} + G\frac{m^2}{(2r)^2} - R \quad (1)$$

La sphère de droite (2) subit l'attraction de Jupiter, celle de la sphère de gauche, et la réaction $\vec{R} = R\vec{u}_r$ de la sphère (1), d'où :

$$-m\omega^2(d+r) = -G\frac{mM_J}{(d+r)^2} - G\frac{m^2}{(2r)^2} + R \quad (2)$$

L'une de ces deux équations est inutile puisque leur somme redonne (0) où les forces intérieures à la comète s'éliminent.

c) Le maintien en contact des sphères suppose $R > 0$; la rupture se fait donc pour $R \leq 0$.

(1) et (0') $\Rightarrow$ $R = -G\frac{mM_J}{(d-r)^2} + G\frac{mM_J}{2d}\left(\frac{1}{d-r} + \frac{d-r}{(d+r)^2}\right) + G\frac{m^2}{4r^2}$; un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{r}{d}$ donne : $R \approx -\frac{3GmM_J r}{d^3} + G\frac{m^2}{4r^2}$

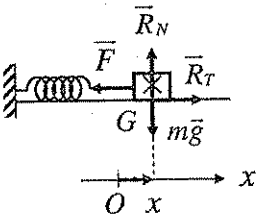
La condition $R \leq 0$ conduit à $d \leq d_{lim} = \left(\frac{12M_J}{m}\right)^{1/3} r$, d'où le rapport

$$\boxed{\frac{d_{lim}}{R_J} = \left(\frac{12\mu_J}{\mu_C}\right)^{1/3} \approx 2{,}5}$$

ce qui suppose un passage de la comète très proche de Jupiter.
Pour une interprétation en terme de marée, voir la question **44.**.

64. Oscillateur mécanique avec frottement solide ; bilan d'énergie

a) Si, comme sur la figure, $x > 0$, alors $\vec{F}$ la force exercée par le ressort et $\vec{R}_T$ la réaction tangentielle (dite force de frottement) sont orientées comme sur la figure.



Le théorème du centre de masse appliqué au solide dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit :

$$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = \|R_T\| - kx \quad (1)$$

en projection sur Oy (vers le haut), en absence de mouvement vertical :

$$m\ddot{y} = 0 = \|R_N\| - mg \quad (2)$$

On traduit l'équilibre du solide par $\ddot{x} = 0$, soit

$$kx \overset{(1)}{=} \|R_T\| < f\|R_N\| \overset{(2)}{=} fmg \quad \Rightarrow \quad x < a = \frac{fmg}{k}$$

Dans l'hypothèse de départ $x < 0$, $\vec{F}$ et $\vec{R}_T$ changent de sens et on trouve l'immobilité pour $x > -a$, avec :

$$\boxed{a = \frac{fmg}{k}}$$

En résumé, si au départ $-a < x_0 < a$ avec une vitesse initiale nulle, il n'y a pas de mouvement ; il n'y a pas une position d'équilibre, mais une plage d'équilibre.

b) On constate $x_0 > a$, et par conséquent le solide se met en mouvement dans le sens des $x < 0$, et les forces sont orientées comme sur la figure du a).
On reprend l'équation (1), $m\ddot{x} = \|R_T\| - kx$, avec $\|R_T\| = f\|R_N\| = fmg$ d'après (2) d'où :

$$m\ddot{x} = fmg - kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 = \sqrt{k/m}}$$

La solution générale de cette équation différentielle est la somme :
– de la solution générale de l'équation sans second membre : $A\cos(\omega_0 t + \varphi)$
– d'une solution particulière (une constante) : $\frac{fg}{\omega_0^2} = \frac{fmg}{k} = a$

d'où $x(t) = a + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ de vitesse $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
Les conditions initiales :

$$x(0) = a + A\cos\varphi = x_0 = \lambda a \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin\varphi = 0$$

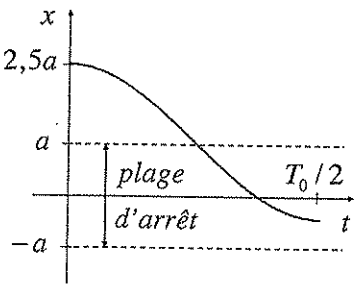
conduisent à la valeur des constantes d'intégration : $\varphi = 0$ et $A = x_0 - a = (\lambda - 1)a$
d'où la solution :

$$\boxed{x(t) = a + (\lambda - 1)a\cos(\omega_0 t)}$$

L'abscisse minimale atteinte au bout d'une demi-oscillation est :

$$x_{min} = a - (\lambda - 1)a = (2 - \lambda)a$$

Pour $\lambda = 2{,}5$, on a alors $\underline{x_{min} = -0{,}5a}$;
le centre de masse est dans la plage d'arrêt avec une vitesse nulle à ce moment, et donc le mouvement s'arrête, le solide ne repart pas vers les x croissants.
La courbe $x(t)$ se limite à une demi-sinusoïde centrée sur a et d'amplitude $1{,}5a$; la durée du mouvement est une demi-période $T_0/2$ (Attention, le solide ne s'arrête pas dès qu'il arrive dans la plage d'arrêt car il lui faut en plus une vitesse nulle...).



c) L'énergie cinétique est nulle à l'instant initial et à l'instant final, et donc l'énergie mécanique se limite à l'énergie potentielle élastique du ressort :

$$E_i = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}k\lambda^2 a^2 \quad \text{et} \quad E_f = \frac{1}{2}kx_{min}^2 = \frac{1}{2}k(2-\lambda)^2 a^2$$

d'où la variation d'énergie mécanique :

$$\boxed{\Delta E = E_f - E_i = 2k(1-\lambda)a^2}$$

On constate $\Delta E < 0$ dès lors qu'il y a mouvement pour $\lambda > 1$.

Le travail de la réaction est celui de la seule force de frottement $\overline{R}_T$ ($\overline{R}_N$ est orthogonale au déplacement), une force constante opposée au mouvement :

$$W_{\overline{R}} = -R_T(x_0 - x_{min}) = -fmg(\lambda a - (2-\lambda)a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\overline{R}} = -2k(\lambda-1)a^2}$$

L'égalité $\Delta E = W_{\overline{R}} < 0$ n'est autre que l'expression du théorème de l'énergie cinétique sous la forme $\Delta(E_c + E_p) = \sum W_{nc}$, la force de frottement étant une force non conservative.

L'énergie mécanique perdue par le système est convertie en énergie thermique (échauffement par frottement) entre le solide et le support.

Chapitre 8
■ Physique quantique ■

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

constante de Planck	$h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s
célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}
constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}

L'atome et ses constituants

charge de l'électron	$-e$ avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}91.10^{-30}$ kg ($mc^2 = 0{,}51$ MeV)
charge du proton ; du neutron	$e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; 0
masse du proton ≈ masse du neutron	$M = 1{,}67.10^{-27}$ kg ≈ 1840 m_e ($Mc^2 = 940$ MeV)
énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène	$E_I = 13{,}6$ eV
rayon de Bohr	$a_0 = 0{,}53.10^{-10}$ m
rayon d'un noyau de A nucléons	$R = r_0 \times A^{1/3}$ avec $r_0 \approx 1{,}2$ fm
radioactivité : énergie d'une particule α	E_α de 4 à 9 MeV
barrière de potentiel en bord de noyau	$V_0 \approx 50$ MeV

Le spectre électromagnétique et l'énergie du photon

électron-volt	1 eV = $1{,}60.10^{-19}$ J
infrarouge	0,8 µm < λ < 1 mm ; E ≈ 0,1 eV
lumière visible	0,4 µm < λ < 0,8 µm ; E ≈ 1 eV (1,5 eV < E < 3 eV)
ultraviolet	10 nm < λ < 0,4 µm ; E ≈ 10 eV
rayons X	10^{-12} m < λ < 10^{-8} m ; E ≈ 10 keV
λ_{rouge} d'un laser $He-Ne$	$\lambda_{rouge} = 632{,}8$ nm
puissance usuelle d'un laser $He-Ne$	de 1 mW à 20 mW

Le cours d'abord

Fonction d'onde et équation de Schrödinger

1. Rappeler l'équation de Schrödinger à une dimension, satisfaite par la fonction d'onde $\psi(x,t)$ d'une particule de masse m évoluant dans un potentiel $V(x)$. Quelle est, en termes de probabilité, l'interprétation physique de la fonction d'onde complexe $\psi(x,t)$ décrivant l'état d'une particule à l'instant t.

2. Soient $\psi_1(\vec{r},t)$ et $\psi_2(\vec{r},t)$ deux fonctions d'ondes possibles d'une même particule quantique, et α_1 et α_2 deux nombres complexes. Que peut-on dire de la fonction d'onde $\psi(\vec{r},t) = \alpha_1 \times \psi_1(\vec{r},t) + \alpha_2 \times \psi_2(\vec{r},t)$? Comment nomme-t-on ce résultat ?

3. Donner la définition d'un état stationnaire en physique quantique.

4. Soit une particule de masse m évoluant dans un potentiel $V(x)$ indépendant du temps. En procédant à la séparation des variables, c'est-à-dire en recherchant une solution de l'équation de Schrödinger sous la forme $\psi(x,t) = \varphi(x) \times f(t)$, établir l'équation de Schrödinger indépendante du temps satisfaite par la fonction $\varphi(x)$ et déterminer la forme de la fonction $f(t)$.

Particule libre

5. Selon Louis de Broglie, l'état d'une particule libre d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p}$ est représenté par la fonction $\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)\right]$. Vérifier que cette fonction est solution de l'équation de Schrödinger et que l'opérateur $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ s'identifie à l'opérateur énergie cinétique. Rappeler les différentes relations entre le vecteur d'onde $\vec{k}$ de cette onde plane, la quantité de mouvement $\vec{p}$ et l'énergie E de la particule libre. Interpréter les difficultés de normalisation de la fonction $\psi(\vec{r},t)$ proposée par de Broglie.

6. Soit une particule libre de masse m, de vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ et d'énergie $E = \frac{1}{2}mv^2$. Rechercher les solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme $\psi(x,t) = \varphi(x)\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$ et commenter les expressions obtenues.

7. Quel principe de mécanique quantique permet de justifier qu'une particule localisée spatialement ne peut pas être décrite par une onde plane monochromatique ? Utiliser

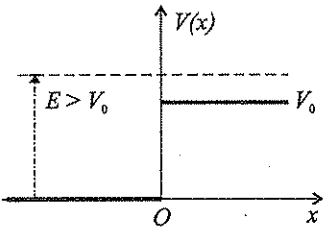
ce principe pour déterminer, dans un cas unidimensionnel, l'indétermination sur le vecteur d'onde d'un électron dont la position est connue à $\pm 0{,}1$ nm près. Exprimer également l'indétermination sur la vitesse de cet électron.

8. Par analogie avec $\vec{j} = \rho \vec{v}$, vecteur densité de courant de charge électrique, construire pour une particule libre le vecteur densité de courant de probabilité $\vec{J}$. Proposer, toujours par analogie, une équation locale qui traduit le caractère conservatif de la probabilité de présence d'une particule quantique.

■ États stationnaires dans des potentiels constants par morceaux

9. Marche d'énergie potentielle (1)

Une particule incidente de masse m et d'énergie E se déplace selon les x croissants et subit au voisinage de $x = 0$ une interaction modélisée par une marche de potentiel. L'énergie potentielle $V(x)$ de la particule est alors donnée par $V(x) = 0$ pour $x < 0$ (région notée g) et $V(x) = V_0$, avec $V_0 > 0$ pour $x \geq 0$ (région notée d). Dans cet exercice, l'étude est limitée au cas $E > V_0$.



a) Rappeler le comportement de la particule en mécanique classique.

La fonction d'onde stationnaire est cherchée sous la forme :

$$\psi_g(x,t) = \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx}\right) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \text{ pour } x < 0 \text{ et } \psi_d(x,t) = C e^{iqx} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \text{ pour } x \geq 0.$$

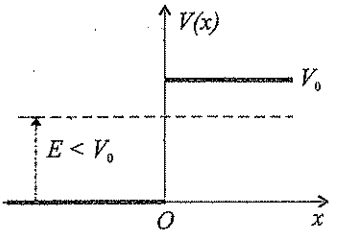
b) Interpréter les différents termes de cette fonction d'onde et établir les expressions des grandeurs k et q en fonction des données du problème.

c) Rappeler les relations de continuité de la fonction d'onde en $x = 0$. Établir les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude notés respectivement $r = \dfrac{B}{A}$ et $t = \dfrac{C}{A}$.

d) Déterminer, en utilisant les courants de probabilités, les coefficients de transmission et de réflexion de la particule, notés respectivement T et R. Expliquer la différence de comportement par rapport à une particule classique.

10. Marche d'énergie potentielle (2)

Dans une situation identique à celle de l'exercice précédente, mais quand l'énergie cinétique de la particule incidente est inférieure à la hauteur de la marche de potentiel ($E < V_0$), l'expression de la fonction d'onde dans la région de droite est modifiée en $\psi_d(x,t) = C e^{-\alpha x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$.

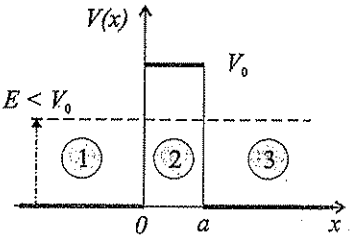


a) Établir l'expression de la grandeur α en fonction des données du problème. Caractériser complètement cette onde $\psi_d(x,t)$.

b) Déterminer les nouvelles valeurs r', t', R' et T' des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et pour la particule. Commenter les expressions obtenues.

11. Barrière d'énergie potentielle ; effet tunnel

Une particule de masse m et d'énergie E se déplace selon les x croissants et rencontre en $x=0$ une barrière de potentiel de largeur a selon Ox et de hauteur en énergie $V_0>0$. L'énergie potentielle de la particule prend alors la forme :



$V(x)=0$ pour $x<0$, région notée (1).

$V(x)=V_0$, avec $V_0>0$ pour $0\le x\le a$, région (2).

$V(x)=0$ pour $x>a$, région (3).

Dans cet exercice, l'étude est limitée au cas $E<V_0$ et la fonction d'onde stationnaire de la particule d'énergie E est cherchée sous la forme $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$.

a) Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction $\varphi(x)$ dans les différentes régions (utiliser les notations $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$ pour distinguer les différentes régions). Établir alors les expressions :

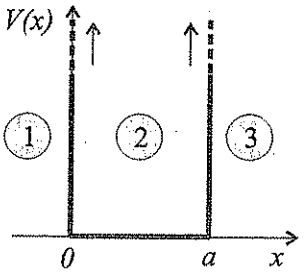
$$\varphi_1(x)=A_1 e^{ikx}+B_1 e^{-ikx},\ \varphi_2(x)=A_2 e^{-\alpha x}+B_2 e^{+\alpha x} \text{ et } \varphi_3(x)=A_3 e^{ikx}.$$

Écrire le système linéaire permettant d'exprimer B_1, A_2, B_2 et A_3 en fonction de A_1 et des données du problème. Rappeler le principe de l'algorithme du pivot de Gauss permettant de résoudre numériquement les systèmes de Cramer.

b) Qu'appelle-t-on effet tunnel ? Décrire qualitativement l'influence de la hauteur et de la largeur de la barrière de potentiel sur le coefficient de transmission de la particule.

12. Puits de profondeur infinie

Une particule de masse m, se déplaçant selon Ox, est confinée dans un puits de potentiel infini. L'énergie potentielle de cette particule prend alors la forme :



$V(x)\to\infty$ pour $x<0$, région inaccessible à la particule, notée (1).

$V(x)=0$ pour $0\le x\le a$, région de confinement de la particule, notée (2).

$V(x)\to\infty$ pour $x>a$, région inaccessible notée (3).

Soit $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, avec $E>0$, la fonction d'onde stationnaire de la particule d'énergie E dans la région (2).

a) Établir les expressions des solutions et les niveaux d'énergie associés.
b) Discuter les analogies avec les modes d'onde stationnaires étudiés en électromagnétisme.
c) Estimer l'ordre de grandeur de l'énergie d'un proton confiné dans un noyau de diamètre de l'ordre du femtomètre ($a\simeq 10^{-15}$ m).

États non stationnaires

13. Superposition de deux états stationnaires

Une particule de masse m, se déplaçant selon Ox, est confinée dans un puits de potentiel infini, de largeur a. Les fonctions d'onde des états stationnaires de cette particule sont $\psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$ avec $E_n=n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

À titre d'exemple, envisageons ici une combinaison linéaire des deux états stationnaires $n=1$ et $n=2$, représentée par la fonction d'onde :

$$\psi(x,t)=\alpha_1\times\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\alpha_2\times\sin\left(2\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}, \text{ avec } (\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*.$$

On note dans la suite $\frac{E_1}{\hbar}=\omega$ et $\frac{E_2}{\hbar}=2^2\frac{E_1}{\hbar}=4\omega$.

a) Établir l'expression de $\rho_P(x,t)$, densité de probabilité de présence de la particule. Interpréter le résultat obtenu.
b) Déterminer une relation entre les coefficients α_1 et α_2. Vérifier que les valeurs $\alpha_1=\sqrt{\frac{3}{2a}}$ et $\alpha_2=\sqrt{\frac{1}{2a}}$ satisfont cette relation. Utiliser ces valeurs pour représenter $\rho_P(x,t)$ aux instants $t=0$, $t=\frac{T}{4}$ et $t=\frac{T}{2}$ où $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Utiliser en abscisse la variable normalisée $u=\frac{x}{a}$ et représenter la fonction $\tilde{\rho}_P(u,t)$ telle que $\rho_P(x,t)dx=\tilde{\rho}_P(u,t)du$.

14. Une particule de masse m, confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a, se trouve dans un état non stationnaire décrit par la fonction d'onde :

$$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{3}{2a}}\times\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\sqrt{\frac{1}{2a}}\times\sin\left(2\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}, \text{ avec } E_1=\frac{E_2}{4}=\hbar\omega.$$

Déterminer l'expression de $<x(t)>$, position moyenne de la particule à l'instant t. Commenter le résultat obtenu. On donne les intégrales :

$$I_n=\int_{x=0}^{x=a}\frac{x}{a}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx=\frac{a}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right) \text{ et } \int_{x=0}^{x=a}\frac{x}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=-\frac{4a}{9\pi^2}.$$

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Pour une particule de masse m soumise à un champ de force dérivant du potentiel $V(\vec{r})$ l'équation de Schrödinger s'écrit:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t)+V(\vec{r})\psi(\vec{r},t)$$

Attention :

– Dans cette équation $V(\vec{r})$ désigne l'énergie potentielle dont dérive la force exercée sur la particule (à ne pas confondre avec le potentiel introduit en électromagnétisme, noté V également).

– Cette équation n'est pas applicable sous cette forme pour l'étude des particules relativistes.

– Si on connaît la fonction d'onde $\psi(\vec{r},0)$ à un instant initial $t=0$, l'équation de Schrödinger permet de déterminer $\psi(\vec{r},t)$ à tout instant ultérieur.

☐ Dans une formulation en termes d'opérateurs :

– l'opérateur $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ représente l'énergie totale,

– l'opérateur $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ représente l'énergie cinétique,

– l'opérateur $V(\vec{r})$ représente l'énergie potentielle.

☐ Un état stationnaire est décrit par une fonction d'onde à variables séparées :

$$\psi(\vec{r},t)=\varphi(\vec{r})f(t)$$

☐ Dans le cas d'une énergie potentielle indépendante du temps, les états stationnaires sont donnés par $\psi(\vec{r},t)=\varphi(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$ avec $\varphi(\vec{r})$ solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r})+V(\vec{r})\varphi(\vec{r})=E\times\varphi(\vec{r})$$

☐ Lors de la recherche des états stationnaires d'une particule évoluant dans un potentiel unidimensionnel constant par morceaux et borné, $\varphi(x)$ et $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ sont continues et bornées. En revanche si le potentiel présente une discontinuité infinie, la continuité de $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ n'est plus assurée.

☐ L'énergie des états stationnaires liés est quantifiée alors que celle des états libres ne l'est pas.

☐ Dans un puits de potentiel de largeur a et de hauteur finie, les niveaux d'énergie des états liés stationnaires sont inférieurs aux niveaux correspondants dans un puits de même largeur a mais de hauteur infinie.

☐ Lors de l'effet tunnel (cas d'une particule incidente d'énergie E inférieure à la hauteur de barrière V_0) la densité de probabilité de présence post-barrière est uniforme et l'énergie de la particule transmise est inchangée. Le coefficient de probabilité de transmission T décroît exponentiellement avec la largeur de la barrière et avec sa hauteur.

☐ Pour qu'il y ait mouvement d'une particule, il faut que sa fonction d'onde soit une superposition linéaire d'états stationnaires cohérents.

Applications directes du cours

Fonction d'onde et équation de Schrödinger

15. Une particule est dans un état décrit à l'instant $t=0$ par la fonction d'onde $\psi(x)=Ax\,e^{-\frac{|x|}{2a}}$, où A et a sont des constantes positives.

Déterminer l'expression de A en fonction de a.

Tracer les variations de la densité linéique de probabilité de présence $\rho_P(x)$ en fonction x. Pour quel(s) valeur(s) de x cette densité est-elle maximum ?

16. Un électron est dans un état décrit à l'instant $t=0$ par la fonction d'onde :

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{pour } x<0\\ C\,e^{-x}\left(1-e^{-x}\right) & \text{pour } x\geq 0\end{cases}$$, où C est une constante positive et x le nombre réel donnant l'abscisse exprimée en nm.

a) Déterminer la valeur de C et la position la plus probable de l'électron.

b) Déterminer les valeurs de la position moyenne, notée $<x>$, et de l'écart quadratique moyen $\Delta x=\sqrt{<x^2>-<x>^2}$.

17. La fonction d'onde d'une particule de masse m évoluant dans un potentiel harmonique $V(x)=\frac{1}{2}\beta x^2$ et se trouvant dans l'état stationnaire fondamental est :

$$\psi(x,t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right)\times\exp\left(-i\frac{E_0 t}{\hbar}\right),\ \text{avec } \alpha=\frac{m\omega_0}{\hbar},\ \omega_0^2=\frac{\beta}{m}\ \text{et } E_0=\frac{\hbar\omega_0}{2}.$$

a) Vérifier que la fonction proposée est bien solution de l'équation de Schrödinger.

b) Déterminer, pour cet état stationnaire de plus basse énergie, la probabilité P de trouver la particule en dehors de la région classique, définie par $V(x)\leq E_0$.

Particule libre

18. Le cyclotron industriel Cyclone ® 30 permet d'accélérer des ions jusqu'à 30 MeV. Calculer la longueur d'onde de de Broglie, de l'onde plane associée à un faisceau de protons d'énergie $E = 10$ MeV. Relier la norme k du vecteur d'onde et l'énergie E d'une particule. Écrire enfin la fonction d'onde représentant le flux ininterrompu de protons produit par le cyclotron.

19. Le même cyclotron est utilisé pour produire un faisceau de particules alpha d'énergie $E = 30$ MeV. L'intensité du courant de charges associé est $I = 10\,\mu$A, le diamètre du faisceau est $a = 1$ mm. Calculer la longueur d'onde de de Broglie de l'onde plane associée. Relier la norme k du vecteur d'onde et l'énergie E d'une particule α. Écrire la fonction d'onde représentant le flux ininterrompu de particules produit par le cyclotron et déterminer numériquement l'amplitude ψ_0 de l'onde plane associée. La masse d'une particule alpha est $m_\alpha = 6{,}64\times10^{-27}$ kg.

20. On se propose d'étudier ici, à l'instant $t = 0$, la fonction d'onde obtenue en superposant N ondes planes de même amplitude, de phase nulle en $x = 0$ et de vecteurs d'onde respectifs $k_n = k_0 + n\times\Delta k_0$, où n désigne un entier variant de 0 à $N-1$, et k_0 et Δk_0 des constantes.

Rappeler l'expression de la fonction d'onde $\psi_n(x)$. Écrire alors l'expression de la superposition $\psi(x)$ de ces N fonctions d'onde et celle de la densité de probabilité de présence $\rho_P(x) = |\psi(x)|^2$.

Que devient cette expression quand on fait tendre Δk_0 vers zéro en maintenant constant le produit $N\times\Delta k_0 = \Delta\tilde{k}$ (cela revient à superposer un nombre croissant d'ondes choisies dans un intervalle spectral de largeur déterminé) ?

Quelle est la relation entre la localisation de la particule et la largeur $\Delta\tilde{k}$ de l'intervalle choisi pour réaliser cette superposition d'ondes planes ? Comment retrouver plus facilement ce résultat ?

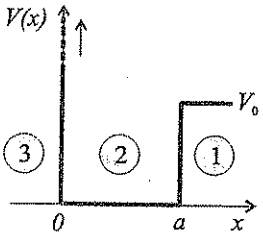
États stationnaires dans des potentiels constants par morceaux

21. Une particule de masse m évolue dans le potentiel $V(x)$ représenté ci-contre :

$V(x) \to \infty$ pour $x < 0$, région inaccessible à la particule, notée (3).

$V(x) = 0$ pour $0 \le x \le a$, région notée (2).

$V(x) = V_0$ pour $x > a$, région notée (1).



Notons $\psi(x,t) = \varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, avec $E > 0$, la fonction d'onde stationnaire de la particule d'énergie E dans la région (2).

a) Montrer que l'énergie des états liés ($E < V_0$) est solution de l'équation :

$$\tan\left(\frac{a\sqrt{2mE}}{\hbar}\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$

b) Esquisser, sans résoudre l'équation, l'allure de la fonction $\varphi(x)$ de l'état fondamental de la particule.

22. Un électron d'énergie $E = 1$ eV se déplace selon l'axe Ox et rencontre en $x = 0$ une barrière de potentiel rectangulaire de hauteur $V_0 = 2$ eV. Déterminer la largeur a de cette barrière pour laquelle la probabilité de transmission de l'électron est de 10^{-3}. On rappelle l'expression approchée du facteur de transmission tunnel T d'une particule, valable dans le domaine des faibles valeurs ($T \ll 1$) :

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left[-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right]$$

Comparer la valeur de a obtenue à la longueur d'onde de de Broglie de cet électron.

23. Une particule de masse m, se déplaçant selon Ox, est confinée dans l'intervalle $[0, a]$, puits de potentiel infini. La particule est dans l'état quantique stationnaire n.

a) Déterminer la probabilité, notée $P_n(\alpha)$, que la particule soit confinée dans l'intervalle $[0, \alpha a]$ avec $\alpha \in]0,1[$.

b) Commenter la dépendance en n de $P_n(\alpha)$.

■ États non stationnaires

24. Une particule de masse m, confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a, est dans un état non stationnaire décrit par la fonction d'onde $\psi(x,t)$ telle qu'à l'instant $t = 0$ on ait :

$$\psi(x, t=0) = \varphi(x) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \times \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \times \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

On rappelle que les fonctions d'onde des états stationnaires d'une particule de masse m, confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a sont données par :

$$\psi_n(x,t) = \varphi_n(x) \times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right) \times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \text{ avec } E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

a) Établir que ces fonctions $\varphi_n(x)$ vérifient $\int_{x=0}^{x=a} \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \delta_{mn}$, où δ_{mn} désigne le symbole de Kronecker ($\delta_{nn} = 1$ et $\delta_{mn} = 0$ pour $m \neq n$).

b) Écrire la fonction $\varphi(x)$ comme une combinaison linéaire d'états stationnaires et en déduire l'expression de $\psi(x,t)$.

c) Établir l'expression de $\rho_p(x,t)$, densité de probabilité de présence de la particule.

25. Afin de compléter l'étude précédente, on donne les relations permettant de calculer l'énergie moyenne et l'énergie quadratique moyenne d'une particule :

$$< E >= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} dx \quad \text{et} \quad < E^2 >= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} dx .$$

À l'aide de ces relations, calculer pour la particule se trouvant dans l'état non stationnaire de la question **24.**, son énergie moyenne $< E >$ ainsi que l'écart quadratique de son énergie $\Delta E = \sqrt{< E^2 > - < E >^2}$.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

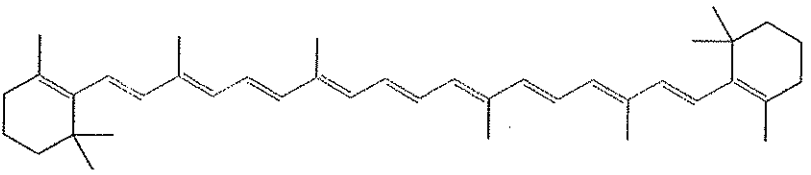
26. Déterminer les valeurs en eV des trois premiers niveaux d'énergie d'un électron confiné dans un puits infini de largeur $a = 0{,}2$ nm (taille caractéristique d'un atome). Calculer la longueur d'onde du rayonnement émis lors des transitions $3 \rightarrow 1$ et $2 \rightarrow 1$.

27. Déterminer les valeurs en MeV des trois premiers niveaux d'énergie d'un proton confiné dans un puits infini de largeur $a = 5{,}0$ fm (taille caractéristique d'un noyau). Calculer la longueur d'onde du rayonnement émis lors des transitions $3 \rightarrow 1$ et $2 \rightarrow 1$.

28. Un laser à rubis émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 694{,}3$ nm. En admettant que cette émission est due à la transition $2 \rightarrow 1$ d'un électron confiné dans un puits infini de largeur a, calculer la valeur numérique de a.

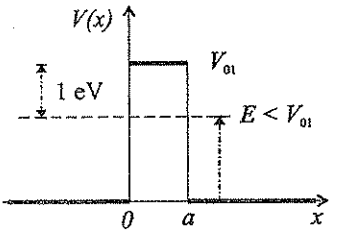
29. Notons E_1^∞ (respectivement E_1) le niveau de plus basse énergie d'une particule de masse m confinée dans un puits de potentiel de largeur a et de hauteur infinie (respectivement finie). Avec le moins de calculs possible comparer E_1^∞ et E_1.

30. Dans la molécule de β-carotène, 22 électrons π sont délocalisés le long de la chaîne carbonée. Ces électrons occupent les 11 plus bas niveaux d'énergie, à raison de 2 électrons par niveau (principe d'exclusion de Pauli et règle de Hund). Il est possible de décrire approximativement ces électrons comme des particules évoluant dans un puits de potentiel infini de largeur a, taille attendue de la chaîne carbonée. Le spectre d'absorption du β-carotène comporte une raie de longueur d'onde $\lambda = 451$ nm, qui correspond à l'énergie minimale d'excitation de la molécule. Déterminer la valeur numérique de a. Comparer la valeur obtenue à la valeur tabulée $\tilde{a} = 3{,}0$ nm.

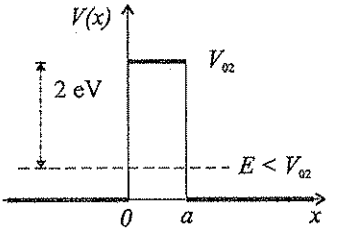


31. L'état d'une particule libre de masse m, d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p} = p_x \vec{u}_x$, est représenté par la fonction d'onde $\psi(x,t) = \psi_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)\right]$. Etablir les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de cette onde plane. À quoi correspond la vitesse de groupe ? Comparer ces résultats à ceux obtenus dans le cas d'une onde lumineuse plane monochromatique se propageant dans le vide.

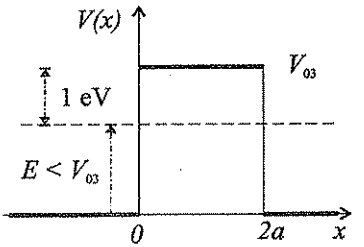
32. Quatre particules quantiques identiques de masse m et de même énergie E rencontrent, en provenant de la gauche, une barrière de potentiel. Classer en justifiant, par ordre décroissant, les probabilités de traversée de barrière par effet tunnel.



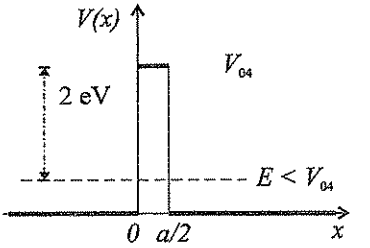
barrière n°1



barrière n°2



barrière n°3



barrière n°4

33. Comment est-il possible, dans le cadre de la physique quantique, d'interpréter une expérience d'interférences entre particules matérielles ?

34. Rappeler la géométrie de la molécule d'ammoniac NH_3. Dans une modélisation à une dimension, on note x l'abscisse du plan contenant les trois H par rapport à N (ce dernier est fixe car de masse bien plus grande). Esquisser la courbe d'énergie potentielle $V(x)$ de cette molécule et déterminer le type de « potentiel carré » adapté. Expliquer qualitativement les possibilités d'oscillations de cette molécule.

35. Donner le principe du microscope à effet tunnel. Que permet-il de « voir », avec quelle résolution ? Quelles sont ses limites ?

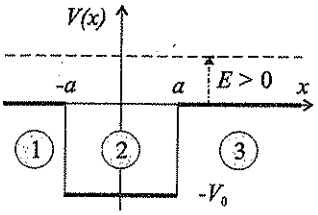
36. Traversée d'un puits de potentiel

Une particule de masse m et d'impulsion $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ se déplace selon les x croissants et rencontre en $x=-a$ un puits de potentiel de largeur $2a$ et de profondeur V_0. L'énergie potentielle de la particule prend alors la forme :

$V(x)=0$ pour $x<-a$, région notée (1),

$V(x)=-V_0$, avec $V_0>0$ pour $-a\le x\le a$, région (2),

$V(x)=0$ pour $x>a$, région (3).



a) Déterminer les valeurs de l'énergie E de la particule incidente pour lesquelles il n'y a pas de réflexion lors du franchissement de ce puits de potentiel.

b) Ramsauer et Townsend ont observé ce phénomène de résonance en transmission lors de la diffusion d'électrons de basse énergie ($E=0{,}7$ eV) par des atomes de xénon. Évaluer la profondeur V_0 du puits de potentiel modélisant l'interaction mise en jeu en considérant que le diamètre d'un atome de xénon est de l'ordre de 0,1 nm.

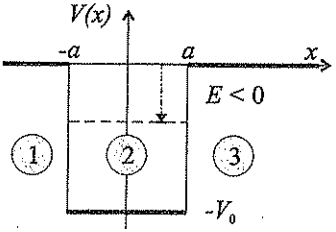
37. États stationnaires d'une particule dans un puits de profondeur finie

Une particule de masse m et d'énergie E (avec $-V_0<E<0$) est confinée dans un puits de potentiel de largeur $2a$ et de profondeur V_0. L'énergie potentielle de la particule prend alors la forme :

$V(x)=0$ pour $x<-a$, région notée (1),

$V(x)=-V_0$, avec $V_0>0$ pour $-a\le x\le a$, région (2),

$V(x)=0$ pour $x>a$, région (3).



Notons $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E de la particule confinée dans ce puits de profondeur finie.

a) Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction $\varphi(x)$ dans les différentes régions (utiliser les notations $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$ pour distinguer les différentes régions). En déduire les expressions $\varphi_1(x)=A_1e^{\alpha x}$, $\varphi_2(x)=A_2e^{ikx}+B_2e^{-ikx}$, $\varphi_3(x)=A_3e^{-\alpha x}$ en précisant les expressions de α et k. Écrire le système linéaire vérifié par A_1, A_2, B_2 et A_3.

La parité du potentiel permet d'affirmer que les fonctions $\varphi(x)$ décrivant les états stationnaires de la particule sont paires (modes symétriques) ou impaires (modes antisymétriques).

b) Établir pour les modes symétriques la relation reliant les grandeurs k et α. Puis celle reliant les variables adimensionnées $u = \dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ et $\xi = ka$. Justifier, à l'aide d'un tracé, qu'il y a quantification des niveaux d'énergie de la particule.

c) Établir pour les modes antisymétriques la nouvelle relation reliant les grandeurs k et α, puis celle reliant u et ξ.

d) Le mode fondamental est-il symétrique ou antisymétrique ? Peut-il être le seul mode possible ?

38. Effet tunnel et radioactivité α

L'isotope radioactif ${}^{212}_{83}Bi$ du bismuth se désintègre en l'isotope ${}^{208}_{81}Tl$ du thallium en émettant une particule α $\left({}^{4}_{2}He\right)$ d'énergie $E = 6{,}0\,\text{MeV}$. On rappelle, dans le domaine des faibles valeurs, l'expression approchée du facteur de transmission tunnel T dans le cas d'une barrière de hauteur V_0 et de largeur a, pour une particule de masse m et d'énergie E.

$$T \simeq \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}\exp\left[-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right]$$

a) Déterminer la distance r_0 entre le noyau de thallium et la particule α, pour laquelle l'énergie E est égale à l'énergie potentielle électrostatique. Évaluer numériquement cette distance.

b) Le rayon R d'un noyau de nombre de masse A est donné par la formule $R = R_0A^{1/3}$ avec $R_0 = 1{,}2\,\text{fm}$. Déterminer la valeur numérique de R pour ${}^{208}_{81}Tl$. En déduire la valeur V_b du maximum de potentiel dans lequel évolue la particule α à l'extérieur du noyau. En choisissant comme valeur approchée de la barrière $V_0 = \dfrac{V_b}{2}$, évaluer la valeur numérique du coefficient de transmission T.

En déduire un ordre de grandeur de la durée de vie moyenne τ de l'isotope radioactif du bismuth.

39. État non stationnaire d'une particule dans un puits de profondeur infinie

Une particule de masse m, confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a, est dans un état non stationnaire décrit, pour $0 \le x \le a$, par la fonction d'onde $\psi(x,t)$ telle qu'à l'instant $t = 0$ on ait :

$$\psi(x, t=0) = \varphi(x) = \frac{4}{\sqrt{5a}} \times \sin^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

On rappelle que les fonctions d'onde des états stationnaires d'une particule de masse m, confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a, sont données par :

$$\psi_n(x,t) = \varphi_n(x) \times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right) \times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \quad \text{avec} \quad E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

a) Écrire la fonction $\varphi(x)$ comme une combinaison linéaire de fonctions d'onde d'états stationnaires et en déduire l'expression de $\psi(x,t)$.

b) Établir l'expression de $\rho_P(x,t)$, densité de probabilité de présence de la particule.

40. Particule confinée dans un double puits de potentiel symétrique

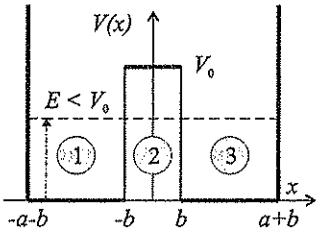
Une particule de masse m évolue dans un double puits de potentiel décrit de la façon suivante :

$V(x) \to \infty$ pour $|x| > b+a$.

$V(x) = 0$ pour $-a-b \le x \le -b$, région (1).

$V(x) = V_0$ pour $|x| < b$, région (2).

$V(x) = 0$ pour $b \le x \le b+a$, région (3).



L'étude est limitée au cas $E < V_0$ et la fonction d'onde stationnaire de la particule d'énergie E est cherchée sous la forme $\psi(x,t) = \varphi(x) \times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$.

a) Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction $\varphi(x)$ dans les différentes régions (utiliser les notations $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$ pour distinguer ces différentes régions).

b) Établir alors les expressions $\varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$, $\varphi_2(x) = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}$ et $\varphi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$. Écrire le système linéaire vérifié par ces coefficients A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 et B_3.

La parité du potentiel permet d'affirmer que les fonctions $\varphi(x)$ décrivant les états stationnaires de la particule sont pairs (modes symétriques) ou impairs (modes antisymétriques).

c) Établir pour les états symétriques la relation reliant les grandeurs k et α. Puis celle reliant les variables adimensionnées $u = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$, $\xi = ka$ et $q = \frac{b}{a}$. Montrer, à l'aide d'un tracé réalisé dans les cas $(u,q) = (100,1)$ puis $(u,q) = (100,0.1)$, qu'il y a quantification des niveaux d'énergie de la particule.

d) Établir pour les états antisymétriques la nouvelle relation reliant les grandeurs k et α, puis celle reliant u, ξ et q. Montrer, à l'aide d'un tracé réalisé dans les cas $(u,q) = (100,1)$ puis $(u,q) = (100,0.1)$, qu'il y a quantification des niveaux d'énergie de la particule.

e) L'état fondamental est-il symétrique ou antisymétrique ? Cet état existe-t-il toujours ?

f) Calculer pour un électron, dans le cas où $a = 2b = 0{,}2$ nm et $V_0 = 20$ eV, les valeurs numériques des deux paramètres u et q. Déterminer ensuite les valeurs

numériques des deux premiers niveaux d'énergie notés E_S et E_A. Comparer ces valeurs à celles des deux premiers niveaux d'énergie d'un électron confiné dans un puits infini de largeur a.

41. Particule dans un double puits symétrique profond (*)

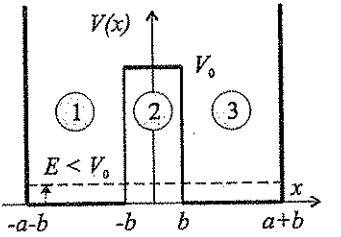
Une particule de masse m évolue dans le double puits de potentiel de l'exercice 36.

$V(x) \to \infty$ pour $|x| > b+a$.

$V(x) = 0$ pour $-a-b \le x \le -b$, région (1).

$V(x) = V_0$ pour $|x| < b$, région notée (2).

$V(x) = 0$ pour $b \le x \le b+a$, région notée (3).



Les notations sont celles de l'exercice précédent, mais maintenant le puits de potentiel symétrique est supposé profond ce qui revient à faire l'hypothèse d'étude $u = \dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2} >> 1$, avec toujours $E < V_0$. De plus, l'étude est limitée aux premiers niveaux d'énergie (typiquement $n \le 5$).

a) Simplifier les relations établies entre les variables u, ξ et q (dans l'exercice 36) qui établissent la quantification des niveaux d'énergie E_{nS} et E_{nA} des états symétriques (notés S) et antisymétriques (notés A). Mettre ces relations de quantification respectivement sous la forme $\tan(\xi) = -p_S \times \xi$ et $\tan(\xi) = -p_A \times \xi$. Comparer p_S et p_A entre eux, puis justifier qualitativement les relations $E_{nS} \simeq E_{nA}$ et $E_{nS} \le E_{nA}$.

b) Déterminer les valeurs de E_{1S} et E_{1A} dans le cas où $p_S \ll 1$ et $p_A \ll 1$. Etablir la relation $E_{1A} - E_{1S} = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \times \dfrac{8e^{-\alpha b}}{\alpha a}$. Poser $\tilde{E}_1 = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ et interpréter les deux termes de cette expression.

c) Évaluer $E_{1m} = \dfrac{E_{1A} + E_{1S}}{2}$, énergie moyenne des deux premiers états E_{1S} et E_{1A}.

Montrer que $\dfrac{\tilde{E}_1 - E_{1m}}{\tilde{E}_1} \simeq \dfrac{2}{\alpha a}$ et interpréter ce rapport.

42. Combien d'états liés ? (*)

Une particule de masse $m = 2{,}20 \times m_p$ (avec $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) est confinée dans un puits de potentiel de largeur $2a = 2{,}84 \times 10^{-15}$ m et de profondeur $V_0 = 70$ MeV. Déterminer le nombre d'états liés stationnaires possibles. Préciser les niveaux d'énergie de ces états stationnaires.

43. L'oscillateur harmonique en mécanique quantique

a) Montrer que la fonction d'onde $\varphi_0(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$ est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\varphi(x) = E\varphi(x)$ pour une énergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$. Exprimer a en fonction de m et ω_0, puis déterminer l'expression de A en fonction de a.

b) Effectuer le changement de variable $\varphi(x) = \phi(X)$ avec $X = \frac{x}{a}$ et introduire l'énergie réduite $\varepsilon = \frac{E}{E_0}$ pour écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps sous la forme : $-\frac{d^2\phi}{dX^2} + X^2\phi = \varepsilon\phi$.

Poser alors $\phi(X) = AH(X)\exp\left(-\frac{X^2}{2}\right)$ et établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $H(X)$.

c) Déterminer la fonction $H_0(X)$ en utilisant $\varphi_0(x)$. Chercher ensuite $H_1(X)$ sous la forme $H_1(X) = X$ et déterminer l'énergie E_1 et la fonction d'onde $\varphi_1(x)$ de cet état stationnaire. Faire de même pour $H_2(X) = 1 + \alpha X^2$.

44. Constante de désintégration α (*)

La radioactivité α désigne l'émission de particules α (noyaux d'hélium constitués de deux protons et de deux neutrons) par des noyaux lourds. En 1928, Gamow a proposé pour expliquer ce phénomène, que la particule α, confinée à l'intérieur du noyau par une barrière de potentiel, pouvait en sortir par effet tunnel. Le bilan de cette désintégration est : ${}^{A+4}_{Z+2}X \rightarrow {}^{A}_{Z}Y + {}^{4}_{2}He$.

Dans ce processus, l'énergie E de la particule α est petite devant la hauteur V_0 de la barrière de potentiel qui confine la particule à l'intérieur du noyau. Le coefficient de transmission tunnel s'écrit alors $T \approx e^{-G} = \exp\left\{\left(-\frac{2}{\hbar}\right)\int_R^b\left[2mU(r) - E\right]^{1/2}dr\right\}$, où $U(r)$ désigne l'énergie potentielle coulombienne d'interaction entre la particule α et le noyau, R le rayon du noyau et b la distance séparant le noyau de la particule α quand $U(b) = E$.

a) Montrer que $G = \frac{2}{\hbar}\left(\frac{mZe^2b}{\pi\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right) - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}}\right]$.

b) Donner alors l'expression de la constante de désintégration Λ en fonction de la vitesse v_n des particules α dans le noyau, de R et de G.

c) Dans le cas du noyau d'uranium 238, $R \simeq 7{,}5$ fm , $E \simeq 4{,}2$ MeV , $V_0 \simeq 40$ MeV , $b = 7R$ et $v_n \simeq 10^7$ m.s^{-1}. Calculer l'ordre de grandeur de G, puis de la constante de désintégration Λ.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

■ Fonction d'onde et équation de Schrödinger

1. L'équation de Schrödinger, pour une particule de masse m soumise à un champ de force dérivant du potentiel $V(\vec{r})$ s'écrit :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t)+V(\vec{r})\psi(\vec{r},t)}$$

Dans le cas d'un problème unidimensionnel cette équation devient :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)}$$

La probabilité dP de trouver à l'instant t une particule de fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$ dans un volume $d\tau$ situé au voisinage du point de vecteur position $\vec{r}$ est :

$$\boxed{dP(\vec{r},t)=\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 d\tau=\psi(\vec{r},t)\times\psi^*(\vec{r},t)d\tau}$$

La fonction d'onde s'interprète ainsi comme une amplitude complexe de probabilité et son module au carré comme une probabilité volumique de présence.
La condition de normalisation :

$$\boxed{\int_{espace}\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 d\tau=1}$$

traduit physiquement que la particule se trouve quelque part dans l'espace et mathématiquement que la fonction d'onde est de carré sommable. Notons que la phase du nombre complexe $\psi(\vec{r},t)$ n'intervient plus dans l'expression de la probabilité dP.

2. Les fonctions $\psi_1(\vec{r},t)$ et $\psi_2(\vec{r},t)$ étant par hypothèse deux fonctions d'onde possibles d'une même particule quantique, elles sont toutes les deux solutions de la même équation de Schrödinger. Cette équation aux dérivées partielles est une équation linéaire, ce qui implique que toute combinaison linéaire de solutions est une solution. La fonction $\psi(\vec{r},t)=\alpha_1\times\psi_1(\vec{r},t)+\alpha_2\times\psi_2(\vec{r},t)$ appartient ainsi à la famille des fonctions d'onde qui décrivent l'évolution de l'état de cette particule. Ce résultat est connu sous le nom de *principe de superposition*.

3. Dans le cadre de la physique quantique, une particule se trouve dans un état stationnaire si son énergie est constante au cours du temps. En revanche, en physique classique le terme stationnaire est utilisé pour désigner une indépendance par rapport au temps. Ainsi, l'énergie mécanique d'un pendule simple non amorti est une grandeur stationnaire alors que le pendule ne se trouve pas dans un état stationnaire au sens de la mécanique classique.

4. Écrivons $\psi(x,t)=\varphi(x)\times f(t)$ dans $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)$ pour obtenir :

$$i\hbar\varphi(r)\frac{df(t)}{dt}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V(x)\varphi(x)\right]f(t)$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $\varphi(r)\times f(t)$, il vient facilement :

$$i\hbar\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}=\frac{1}{\varphi(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V(x)\varphi(x)\right]$$

Les deux membres de cette équation sont des fonctions de deux variables indépendantes x et t. Cette égalité ne peut donc être satisfaite que si ces deux termes sont égaux à une constante notée E, d'où les deux équations :

$$\boxed{i\hbar\frac{df(t)}{dt}=E\times f(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V(x)\varphi(x)=E\times\varphi(x)}$$

La première équation s'intègre en $f(t)=f(0)\mathrm{e}^{-iEt/\hbar}$ et la seconde constitue l'équation de Schrödinger indépendante du temps. En identifiant la dépendance temporelle à une dépendance en $f(t)=f(0)\mathrm{e}^{-i\omega t}$, il vient la relation :

$\boxed{E=\hbar\omega}$ qui n'est autre que la relation de Planck-Einstein $\boxed{E=h\nu}$

Particule libre

5. Dans le cas de l'étude de l'évolution d'une particule libre, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t)}$$

En prenant en compte la forme proposée par Louis de Broglie il vient :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=i\hbar\times\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)\times\psi(\vec{r},t)=E\times\psi(\vec{r},t) \text{ et}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\times\left(-\frac{p^2}{\hbar^2}\right)\times\psi(\vec{r},t)=\frac{p^2}{2m}\times\psi(\vec{r},t).$$

L'opérateur $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ s'identifie ainsi à une multiplication par $\frac{p^2}{2m}$, terme qui n'est rien d'autre que l'énergie cinétique E_C de la particule. Comme la particule est libre $E_C = E$, ce qui conduit à l'expression :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) = E\times\psi(\vec{r},t)}$$

Il a été établi précédemment que : $\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = E\times\psi(\vec{r},t)}$

La fonction d'onde $\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)\right]$, proposée par de Broglie est donc bien solution de l'équation de Schrödinger :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t)}$$

En identifiant avec $\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]$, il vient facilement :

$$\boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k}} \quad \text{et} \quad \boxed{E = \hbar\omega = h\nu}$$

Une fonction $\psi(\vec{r},t)$ de ce type ne peut pas satisfaire la condition de normalisation $\int_{\text{espace}} |\psi(\vec{r},t)|^2 d\tau = 1$, car $|\psi|^2 = \psi\psi^* = \psi_0\psi_0^* = |\psi_0|^2 \neq 0$ et l'intégrale diverge.

La fonction $\psi(\vec{r},t)$ n'est pas de carré sommable (ce n'est donc pas à proprement parler une fonction d'onde). Comme il a été vu en optique et en électromagnétisme, l'extension spatiale et l'extension temporelle d'une onde plane monochromatique sont infinies, d'où les problèmes de normalisation ci-dessus. Cependant un faisceau réel ou une particule réelle en mécanique quantique peuvent être décrits comme une superposition d'ondes monochromatiques. On parle alors de paquet d'ondes et dans le cas d'un problème à une dimension il vient :

$$\boxed{\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}(k)\times e^{ikx}\,dk}$$

6. En écrivant $\psi(x,t) = \varphi(x)\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$ dans $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$, il vient $E\times\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$, soit encore :

$$\boxed{\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0}$$

L'expression de l'énergie cinétique $E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}$ conduit à l'équation :

$$\boxed{\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\frac{p^2}{\hbar^2}\varphi(x)=0}$$

qui s'intègre en $\varphi(x)=Ae^{\frac{i}{\hbar}px}+Be^{-\frac{i}{\hbar}px}$. Les solutions de l'équation de Schrödinger se mettent ainsi sous la forme $\psi(x,t)=\psi_+(x,t)+\psi_-(x,t)$ avec :

$$\boxed{\psi_+(x,t)=Ae^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\psi_-(x,t)=Ae^{-\frac{i}{\hbar}(px-Et)}}$$

Ces deux ondes $\psi_+(x,t)$ et $\psi_-(x,t)$ sont planes, monochromatiques et se propagent respectivement selon les x croissants et les x décroissants.
Ces solutions existent quelle que soit la valeur de l'énergie cinétique de la particule. Le spectre est continu, ce qui est une caractéristique des états libres.

7. Il s'agit du principe d'indétermination d'Heisenberg (1925) qui affirme qu'il est impossible de connaître simultanément la position et la quantité de mouvement d'une particule avec une précision parfaite. Si la position x est précisée à Δx près et la quantité de mouvement p_x à Δp_x près, alors $\Delta x\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$.

   La quantité de mouvement de la particule et le vecteur d'onde de la fonction d'onde étant reliés par la relation $\vec{p}=\hbar\vec{k}$, il vient $\Delta x\Delta k_x \geq \frac{1}{2}$.

   Pour un électron de position connue à $\pm 0{,}1$ nm près, on obtient $\Delta k_x \simeq 5{,}0.10^9\ \text{m}^{-1}$.
   Soit encore une indétermination sur sa vitesse de $\Delta v_x \simeq 5{,}8.10^5\ \text{m.s}^{-1}$.

8. Notons ρ_P la probabilité volumique de présence de la particule et $\vec{v}=\frac{\vec{p}}{m}$ sa vitesse.

   La relation $\vec{j}=\rho\vec{v}$ se transpose alors facilement en :

$$\boxed{\vec{J}=\rho_P\frac{\vec{p}}{m}}$$

où $\vec{J}$ désigne le vecteur densité de courant de probabilité. La relation de de Broglie $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ et l'interprétation de Born de la fonction d'onde en termes de probabilité $\rho_P=|\psi|^2$ permettent alors d'écrire :

$$\boxed{\vec{J}=|\psi|^2\frac{\hbar\vec{k}}{m}}$$

Par analogie avec l'équation de conservation de la charge $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\text{div}(\vec{j})=0$, il vient en mécanique quantique :

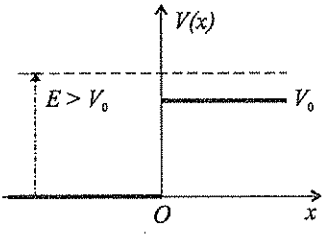
$$\boxed{\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\vec{J}\right) = 0}$$

États stationnaires dans des potentiels constants par morceaux

9. Marche d'énergie potentielle (1)

a) *En mécanique classique*, lors de la rencontre d'une marche de potentiel de hauteur V_0 deux cas sont à envisager :

Si l'énergie mécanique E de la particule incidente (égale ici à son énergie cinétique initiale E_{cg}) est supérieure à V_0, la particule franchit la marche en subissant une décélération. Son énergie cinétique dans la partie droite prend la valeur $E_{cd} = E - V_0$ et le facteur de transmission vaut 1.



Dans le cas où $E < V_0$ la particule classique ne peut pas pénétrer dans la région de droite, elle est alors réfléchie en $x = 0$.

b) *En mécanique quantique* la fonction d'onde stationnaire de la particule est notée :

$$\boxed{\psi_g(x,t) = \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx}\right) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} \quad \text{pour } x < 0,$$

$$\boxed{\psi_d(x,t) = C e^{iqx} e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Ces trois termes correspondent à des ondes planes monochromatiques :

$A e^{i\left(kx - \frac{E}{\hbar}t\right)}$ se propage selon les x croissants dans la région de gauche g,

$B e^{-i\left(kx + \frac{E}{\hbar}t\right)}$ selon les x décroissants dans la même région g,

$C e^{i\left(qx - \frac{E}{\hbar}t\right)}$ selon les x croissants dans la région de droite d.

À partir des relations $E_c = \frac{p^2}{2m}$ et $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, on obtient facilement :

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} \quad \text{et} \quad \boxed{q = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}}$$

respectivement dans la région de gauche et dans la région de droite.

c) Les relations entre les coefficients A, B et C s'obtiennent en traduisant la continuité $\forall t$ de la fonction d'onde et de sa dérivée lors d'un saut de potentiel fini :

$$\boxed{\psi_g(0,t)=\psi_d(0,t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{\partial \psi_g}{\partial x}\right)_{x=0}=\left(\frac{\partial \psi_d}{\partial x}\right)_{x=0}}$$

Ces relations conduisent aux équations :

$$\begin{cases} A+B=C \\ kA-kB=qC \end{cases} \text{ que l'on écrit encore sous la forme } \begin{cases} 1+r=t \\ k(1-r)=qt \end{cases}$$

In fine, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sont :

$$\boxed{r=\frac{k-q}{k+q}} \quad \text{et} \quad \boxed{t=\frac{2k}{k+q}}$$

d) Les vecteurs densité de courant de probabilité associés aux trois ondes planes précédentes s'écrivent $\vec{J}_g^{inc}=|A|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{u}_x$, $\vec{J}_g^{refl}=-|B|^2\frac{\hbar k}{m}\vec{u}_x$ et $\vec{J}_d^{trans}=|C|^2\frac{\hbar q}{m}\vec{u}_x$.

En notant $\vec{J}_g^{inc}=J_g^{inc}\vec{u}_x$, $\vec{J}_g^{refl}=-J_g^{refl}\vec{u}_x$ et $\vec{J}_d^{trans}=J_d^{trans}\vec{u}_x$, les coefficients de réflexion et de transmission de la particule sont donnés par :

$$\boxed{R=\frac{J_g^{refl}}{J_g^{inc}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T=\frac{J_d^{trans}}{J_g^{inc}}}$$

Ces coefficients s'écrivent $\boxed{R=|r|^2}$ et $\boxed{T=\frac{q}{k}|t|^2}$ et conduisent à la relation :

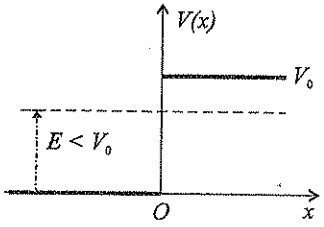
$$\boxed{R+T=1}$$

Contrairement au cas classique dans lequel la particule passe toujours à droite quand $E>V_0$, on observe en mécanique quantique une probabilité non nulle de réflexion au niveau de la discontinuité de potentiel ($R\neq 0$). Ce phénomène de réflexion partielle, dû aux propriétés ondulatoires de la particule est équivalent à celui observé en optique.

10. Marche d'énergie potentielle (2)

a) Dans la région de droite ($x>0$) l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V_0\times\psi(x,t)}$$



En prenant en compte $\psi_d(x,t)=Ce^{-\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$,

il vient facilement $E=-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2+V_0$, puis l'expression :

$$\boxed{\alpha=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}$$

L'onde $\psi_d(x,t)$ est une onde dite *évanescente* dont l'amplitude complexe est atténuée sur une distance :

$$\boxed{\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}}$$

Plus la marche de potentiel est importante par rapport à l'énergie de la particule plus cette distance d'atténuation est petite.

b) Soient $\psi_g(x,t) = \left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ et $\psi_d(x,t) = Ce^{-\alpha x}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ les expressions respectives de la fonction d'onde dans les régions de gauche et de droite. Les relations entre les termes d'amplitude A, B et C s'obtiennent en traduisant la continuité $\forall t$ de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = 0$ (saut de potentiel fini).

$\psi_g(0,t) = \psi_d(0,t)$ et $\left(\frac{\partial \psi_g}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \psi_d}{\partial x}\right)_{x=0}$ conduisent aux équations :

$$\begin{cases} A + B = C \\ ikA - ikB = -\alpha C \end{cases} \text{ que l'on écrit } \begin{cases} 1 + r' = t' \\ 1 - r' = \frac{i\alpha}{k}t' \end{cases} \text{ avec toujours } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Les nouvelles valeurs des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sont :

$$\boxed{r' = \frac{k - i\alpha}{k + i\alpha}} \text{ et } \boxed{t' = \frac{2k}{k + i\alpha}}$$

Le coefficient de réflexion de la particule est toujours donné par :

$$\boxed{R' = \frac{J_g^{refl}}{J_g^{inc}} = |r'|^2 = 1}$$

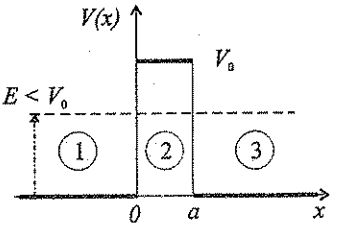
Le coefficient de transmission s'obtient à partir de $T' = 1 - R' = 0$.
Dans la situation étudiée ici, la particule est toujours réfléchie mais sa fonction d'onde n'est pas nulle dans la région de droite. Ce phénomène est similaire au phénomène optique de réflexion totale, au cours duquel une onde électromagnétique évanescente s'établit dans le deuxième milieu.

11. Barrière d'énergie potentielle ; effet tunnel

a) Dans les régions (1) et (3), l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

Dans la région (2) elle se note :



$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V_0\times\psi(x,t)$$

La prise en compte de l'expression de la fonction d'onde, $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, conduit aux équations différentielles :

$$\boxed{\frac{d^2\varphi_{1ou3}(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_{1ou3}(x)=0}$$ dans les régions (1) ou (3),

$$\boxed{\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\varphi_2(x)=0}$$ dans la région (2).

En introduisant les grandeurs $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $\alpha=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$, on obtient les formes proposées par l'énoncé :

$$\boxed{\varphi_1(x)=A_1e^{ikx}+B_1e^{-ikx}}\quad\boxed{\varphi_2(x)=A_2e^{-\alpha x}+B_2e^{+\alpha x}}\quad\boxed{\varphi_3(x)=A_3e^{ikx}}$$

Dans la région (3), le terme en B_3e^{-ikx} n'apparaît pas car il n'y a pas de propagation selon les x décroissants dans cette région (il faudrait que la particule subisse une interaction ou qu'il y ait une autre source de particule dans cette région pour que le coefficient B_3 soit non nul).

La continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée lors des sauts de hauteur fini en $x=0$ et $x=a$ permet d'obtenir le système linéaire 4×4 en B_1, A_2, B_2 et A_3.

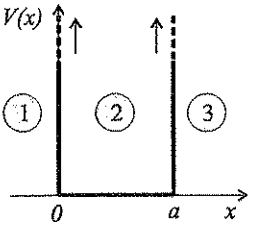
$$\begin{cases}A_1+B_1=A_2+B_2\\A_2e^{-\alpha a}+B_2e^{+\alpha a}=A_3e^{ika}\\ikA_1-ikB_1=-\alpha A_2+\alpha B_2\\-\alpha A_2e^{-\alpha a}+\alpha B_2e^{+\alpha a}=ikA_3e^{ika}\end{cases}\quad\text{ou encore}\quad\boxed{\begin{cases}B_1-A_2-B_2=-A_1\\A_2e^{-\alpha a}+B_2e^{+\alpha a}-A_3e^{ika}=0\\ikB_1-\alpha A_2+\alpha B_2=ikA_1\\-\alpha A_2e^{-\alpha a}+\alpha B_2e^{+\alpha a}-ikA_3e^{ika}=0\end{cases}}$$

Soit un système linéaire d'équations, noté $[M]\times[X]=[N]$ avec $[M]$ une matrice $n\times n$ et $[X]$ et $[N]$ deux vecteurs de dimension n. La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer, par une suite de transvections, ce système en un système équivalent $[\tilde{M}]\times[X]=[\tilde{N}]$ où $[\tilde{M}]$ est une matrice triangulaire supérieure qui permet une résolution simple du système.

b) L'effet tunnel consiste en la traversée d'une barrière de potentiel de hauteur $V_0>0$, par une particule de masse m et d'énergie E (avec $E<V_0$). D'un point de vue classique la particule ne devrait pas franchir cette barrière de potentiel. Il apparaît cependant, en mécanique quantique, que la particule possède une probabilité non nulle de traverser la barrière. Notons que cette probabilité de traversée tend exponentiellement vers zéro avec la hauteur et la largeur de la barrière. De même, si l'on fait $\hbar\to0$ dans l'expression de la probabilité de traversée, celle-ci tend vers zéro, en accord avec la description classique.

12. Puits de profondeur infinie

a) Dans la région (2), l'équation de Schrödinger est :



$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t).$$

La prise en compte de l'expression $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ conduit à l'équation différentielle $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x)=0$,

qui s'intègre en $\varphi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ avec l'expression $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

L'écriture des conditions aux limites en bords de puits $\boxed{\psi(0,t)=\psi(a,t)=0}$ conduit alors à : $\begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{ika}+Be^{-ika}=0 \end{cases}$.

Ce système admet des solutions non nulles si son déterminant est nul :

$$\boxed{e^{-ika}-e^{ika}=-2i\sin(ka)=0}$$

Les valeurs possibles de k sont quantifiées par un entier naturel n et on note k_n la valeur de k telle que $k_n\times a=n\pi$.

Les niveaux d'énergie de la particule confinée s'obtiennent ensuite à partir de la relation $k_n=\frac{n\pi}{a}=\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$, qui conduit à :

$$\boxed{E_n=\frac{\hbar^2k_n^2}{2m}=n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

L'énergie de la particule confinée est quantifiée, contrairement à celle d'une particule libre. Dans l'état fondamental, l'énergie dite de confinement quantique prend la valeur

$$\boxed{E_1=\frac{h^2}{8ma^2}}$$

Dans l'état quantique n il vient $\psi_n(x,t)=2iA_n\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$.

La condition de normalisation de ces fonctions $\int_{x=0}^{x=a}|\psi_n(x,t)|^2\,dx=1$ s'écrit :

$$\boxed{\int_{x=0}^{x=a}4|A_n|^2\sin^2\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx=2|A_n|^2\int_{x=0}^{x=a}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)\right)dx=2|A_n|^2a=1}$$

Ceci conduit à $|A_n| = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ puis, après un choix judicieux de la phase à l'origine, à l'expression normalisée :

$$\boxed{\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right) \times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}}$$

b) Cette expression de la fonction d'onde est identique à celle du champ électrique d'un mode stationnaire observé dans le cas d'une cavité à une dimension. Il a été établi à la question **36.** du chapitre **3** l'expression $\vec{E} = E_0 \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\vec{u}_y$, qui s'écrit en représentation complexe $\underline{\vec{E}} = E_0 \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)e^{i\omega t}\vec{u}_y$. Comme pour tout type d'ondes, la quantification apparaît en les confinant spatialement.

c) L'expression de l'énergie de confinement quantique établie ci-dessus $E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$, permet d'estimer l'ordre de grandeur de l'énergie d'un proton confiné dans un noyau de taille de l'ordre du femtomètre ($a \approx 10^{-15}$ m). Avec $m = 1{,}67\times10^{-27}$ kg, il vient $E_1 = 3{,}3\times10^{-11}$ J $= 200$ MeV.

États non stationnaires

13. Superposition de deux états stationnaires

a) En partant de l'expression $\psi(x,t) = \alpha_1 \times \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \alpha_2 \times \sin\left(2\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$, on calcule $\rho_P(x,t) = |\psi|^2 = \psi\psi^*$. Pour ce faire, notons tout d'abord la fonction d'onde sous la forme $\psi(x,t) = \alpha_1 e^{-i\omega t}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\times\sin\left(2\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i3\omega t}\right]$, soit encore :

$$\boxed{\psi(x,t) = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\omega t}\left[1 + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\times\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i3\omega t}\right]}$$

Cette dernière forme permet d'exprimer facilement la densité de probabilité de présence de la particule :

$$\rho_P(x,t) = \psi\psi^* = \alpha_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[1 + 4\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + 4\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(3\omega t)\right]$$

$$\rho_P(x,t) = \psi\psi^* = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + 4\alpha_1\alpha_2\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(3\omega t)\right]$$

On peut remarquer sur cette expression que, du fait de la combinaison linéaire d'états stationnaires, la densité de probabilité de la particule dépend de x et de t, ce qui revient à dire que la particule est en mouvement.

En mécanique quantique, il y a mouvement quand l'état du système est un état d'interférence entre plusieurs états stationnaires d'énergies différentes.

b) La relation entre α_1 et α_2 s'obtient en traduisant $\int_{x=0}^{x=a} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1$.

Évaluons les différents termes intervenant dans cette intégrale :

$$\int_{x=0}^{x=a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \left[\frac{1}{3}\times\frac{a}{\pi}\times\sin^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]_{x=0}^{x=a} = 0$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=a}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{a}{2\pi}\times\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a} 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \int_{x=0}^{x=a}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=a}\left[1-\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right]dx = \frac{a}{2}$$

D'où le résultat $\int_{x=0}^{x=a} |\psi(x,t)|^2 \, dx = \left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\times\frac{a}{2} = 1$ qui s'écrit $\boxed{\alpha_1^2+\alpha_2^2 = \frac{2}{a}}$

Les valeurs $\alpha_1 = \sqrt{\frac{3}{2a}}$ et $\alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ vérifient bien cette relation et permettent d'écrire $\rho_P(x,t) = \frac{1}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{3}{2}+2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(3\omega t)\right]$ puis :

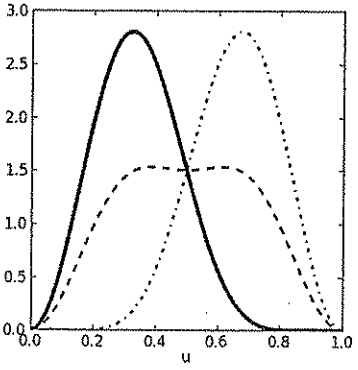
$\tilde{\rho}_P(u,t) = \sin^2(\pi u)\left[\frac{3}{2}+2\cos^2(\pi u)+2\sqrt{3}\cos(\pi u)\cos(3\omega t)\right]$, soit encore

$$\boxed{\tilde{\rho}_P(u,t) = \sin^2(\pi u)\left[\frac{3}{2}+2\cos^2(\pi u)+2\sqrt{3}\cos(\pi u)\cos\left(6\pi\frac{t}{T}\right)\right]}$$

La variable temporelle normalisée $\xi = \frac{t}{T}$ permet alors d'écrire :

$$\boxed{\tilde{\rho}_P(u,\xi) = \sin^2(\pi u)\left[\frac{3}{2}+2\cos^2(\pi u)+2\sqrt{3}\cos(\pi u)\cos(6\pi\xi)\right]}$$

La figure ci-dessous représente en trait plein le tracé de $\tilde{\rho}_P(u,\xi=0)$, en pointillé celui de $\tilde{\rho}_P(u,\xi=0{,}25)$ et en traits mixtes $\tilde{\rho}_P(u,\xi=0{,}5)$.



Cette figure met en évidence le mouvement résultant de la superposition non linéaire de deux états stationnaires d'énergies différentes.

14. Dans le cadre de l'exercice précédent, il a été établi l'expression de la densité linéique de présence $\rho_P(x,t)$ d'une particule dans l'état non stationnaire décrit par la fonction d'onde : $\psi(x,t)=\sqrt{\frac{3}{2a}}\times\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\sqrt{\frac{1}{2a}}\times\sin\left(2\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$.

L'expression de la position moyenne $<x(t)>$ de la particule à l'instant t est :

$$\boxed{<x(t)>=\int_{x=0}^{x=a} x\,\rho_P(x,t)\,dx}$$

En utilisant les formules $\sin^2(u)=\frac{1}{2}(1-\cos(2u))$ et $\sin(2u)=2\sin(u)\cos(u)$, la densité de probabilité

$$\rho_P(x,t)=\frac{1}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{3}{2}+2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(3\omega t)\right]$$

s'écrit sous la forme :

$$\rho_P(x,t)=\frac{1}{a}\left[\frac{3}{4}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)+\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)+2\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(3\omega t)\right]$$

$$\boxed{\rho_P(x,t)=\frac{1}{a}\left[1-\frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)+2\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(3\omega t)\right]}$$

On retrouve la relation de normalisation : $\forall t,\ \int_{x=0}^{x=a}\rho_P(x,t)\,dx=1$.

Lors du calcul de $<x(t)>=\int_{x=0}^{x=a} x\,\rho_P(x,t)\,dx$, il apparaît les intégrales I_2 et I_4 fournies par l'énoncé.

En utilisant le résultat $I_n = \frac{a}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$, il vient $I_2 = I_4 = 0$.

L'intégrale $\int_{x=0}^{x=a} \frac{x}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = -\frac{4a}{9\pi^2}$ étant fournie, il reste à calculer $\int_0^a \frac{x}{a}dx = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a}{2}$ pour obtenir *in fine* l'expression :

$$\boxed{< x(t) > = \frac{a}{2} - \frac{8\sqrt{3}}{9\pi^2}a\cos(3\omega t)}$$

Cette expression illustre clairement que la particule est en mouvement à l'intérieur du puits de potentiel infini. La position moyenne de cette particule oscille autour de la valeur $\frac{a}{2}$ avec une amplitude de $\frac{8\sqrt{3}}{9\pi^2}a$ et une période de $\tau = \frac{2\pi}{3\omega}$.

Applications directes du cours

Fonction d'onde et équation de Schrödinger

15. À partir de la fonction $\psi(x,t=0) = Ax\,e^{-\frac{|x|}{2a}}$, on obtient $\psi\psi^* = A^2x^2\,e^{-\frac{|x|}{a}} = \rho_p(x)$.

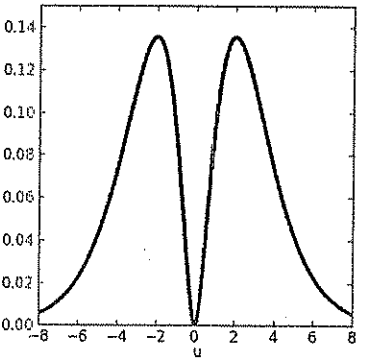
La condition de normalisation $\int_{espace} |\psi(\vec{r},t=0)|^2 d\tau = 1$, s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} A^2x^2\,e^{-\frac{|x|}{a}}dx = 1$ et conduit au calcul :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2x^2\,e^{-\frac{|x|}{a}}dx = 2A^2\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-\frac{x}{a}}dx = 2A^2a^3\int_0^{+\infty} u^2\,e^{-u}du = 4A^2a^3}$$

On en déduit les expressions :

$$\boxed{A = \frac{1}{2a^{3/2}}} \quad \boxed{\psi(x) = \frac{x}{2a^{3/2}}e^{-\frac{|x|}{2a}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\rho_p(x) = \frac{x^2e^{-\frac{|x|}{a}}}{4a^3}}$$

La variable réduite $u = \frac{x}{a}$ permet de normaliser le tracé demandé en représentant la fonction $\tilde{\rho}_p(u) = \frac{u^2}{4}e^{-|u|}$ telle que $\tilde{\rho}_p(u)du = \rho_p(x)dx$.



La parité de la fonction $\tilde{\rho}_P(u)$ et l'expression de sa dérivée $\frac{d\tilde{\rho}_P}{du} = \frac{u}{4}[2-u]e^{-u}$, permettent de conclure que le maximum de la densité de probabilité de présence se situe en $u_{max} = \pm 2$ soit encore $x_{max} = \pm 2a$.

16. La fonction d'onde de l'électron étudié est $\psi(x,t=0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x<0 \\ Ce^{-x}\left(1-e^{-x}\right) & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$

a) La constante C se détermine à l'aide de la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$.

Ce qui s'écrit ici :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = C^2 \int_0^{+\infty} e^{-2x}\left(1-e^{-x}\right)^2 dx = C^2 \int_0^{+\infty} e^{-2x}\left(1-2e^{-x}+e^{-2x}\right) dx ,$$

ou encore :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = C^2 \int_0^{+\infty} \left(e^{-2x}-2e^{-3x}+e^{-4x}\right) dx = C^2 \left[-\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{2e^{-3x}}{3}-\frac{e^{-4x}}{4}\right]_0^{+\infty} = \frac{C^2}{12} = 1$$

La valeur de normalisation est donc $\boxed{C = 2\sqrt{3}}$

La densité de probabilité de présence de l'électron est donné par $\rho_P(x) = |\psi(x)|^2$. Comme dans cet exercice $\psi(x) \in \mathbb{R}_+$, la densité de probabilité est maximum quand $\psi(x)$ l'est aussi. La fonction $f(x) = e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)$ est un produit de deux termes dont la somme est constante. L'extremum de cette fonction a donc lieu quand ces deux termes sont égaux, c'est-à-dire $e^{-x} = 1-e^{-x}$ soit encore $\underline{x_{max} = \ln(2) \approx 0{,}69}$.

b) La valeur $< x >$ se calcule par :

$$\boxed{< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x)|^2\,dx = 12\int_{0}^{+\infty} x\left(e^{-2x} - 2e^{-3x} + e^{-4x}\right)dx}$$

Établissons tout d'abord le résultat :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{x e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}\,dx = 0 + \left[-\frac{e^{-nx}}{n^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$$

il vient ensuite facilement : $\boxed{< x >= 12\times\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{16}\right) = \frac{13}{12} \simeq 1{,}08}$

La relation $\frac{\partial}{\partial n}\left(\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx\right) = -n\int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx}\,dx$ permet d'écrire :

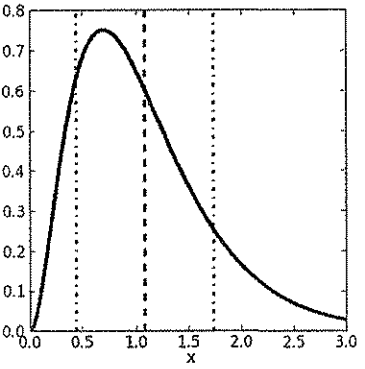
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx}\,dx = -\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{n^3}$$

D'où $< x^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\psi(x)|^2\,dx = 12\int_0^{+\infty} x^2\left(e^{-2x} - 2e^{-3x} + e^{-4x}\right)dx$ qui donne :

$$\boxed{< x^2 >= 12\times\left(\frac{2}{8} - \frac{4}{27} + \frac{2}{64}\right) = \frac{115}{72}}$$

Il vient alors $\Delta x^2 = < x^2 > - < x >^2 = \frac{115}{72} - \frac{169}{144} = \frac{61}{144}$ soit $\boxed{\Delta x = \frac{\sqrt{61}}{12} = 0{,}65}$

Le tracé ci-dessous représente, en trait plein, les variations de la densité linéique de probabilité de présence $\rho_p(x) = |\psi(x)|^2$. Le positionnement de $< x >$ est indiqué en pointillé et ceux de $< x > \pm \Delta x$ en traits mixtes.



17. Soit une particule de masse m évoluant dans un potentiel harmonique $V(x) = \frac{1}{2}\beta x^2$.

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+\frac{1}{2}\beta x^2\psi(x,t)$$

a) Vérifions que l'expression $\psi(x,t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right)\times\exp\left(-i\frac{E_0 t}{\hbar}\right)$ est bien solution de cette équation différentielle. Le membre de gauche s'écrit facilement :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=E_0\times\psi(x,t)}$$

Évaluons le membre de droite par étapes :

$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)=-\alpha x\times\psi(x,t)$, puis $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=-\alpha\times\psi(x,t)+\alpha^2x^2\times\psi(x,t)$

et *in fine* :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+\frac{1}{2}\beta x^2\psi(x,t)=\left[\frac{\hbar^2}{2m}\alpha+\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\right)x^2\right]\times\psi(x,t)}$$

En utilisant $\alpha=\frac{m\omega_0}{\hbar}$, $\omega_0^2=\frac{\beta}{m}$, $E_0=\frac{\hbar\omega_0}{2}$ il vient :

$$\boxed{\frac{\hbar^2}{2m}\alpha=E_0}\quad\text{et}\quad\boxed{\beta=\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2}$$

D'où le résultat : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+\frac{1}{2}\beta x^2\psi(x,t)=E_0\times\psi(x,t)$.

L'équation différentielle de Schrödinger est bien vérifiée par :

$$\boxed{\psi(x,t)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right)\times\exp\left(-i\frac{E_0 t}{\hbar}\right)}$$

b) Une particule d'énergie E_0 est dite en dehors de la région classique si elle se trouve en un point d'abscisse x où $E_0<V(x)$. Pour l'oscillateur harmonique dans son état fondamental, la région classique est donc définie par $|x|\le x_0$ où $V(x_0)=E_0$, soit encore $\frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2=\hbar\frac{\omega_0}{2}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{x_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}=\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}$$

La probabilité P de trouver la particule dans la région $|x|>x_0$ est

$$P=\int_{|x|>x_0}|\psi(x,t)|^2\,dx=2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{x_0}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\,dx$$

En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{x}{x_0}$ il vient : $\boxed{P = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-u^2}\, du}$

À l'aide de la calculatrice on évalue $P \simeq 14\%$.

Particule libre

18. Pour relier la longueur d'onde de de Broglie et l'énergie de la particule écrivons :

$mv = \hbar k = \dfrac{h}{\lambda}$, puis $\lambda = \dfrac{h}{mv}$, $\lambda^2 = \dfrac{h^2}{m^2 v^2} = \dfrac{h^2}{2m\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)} = \dfrac{h^2}{2mE}$ d'où la relation :

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}}$$

Avec $E = 50$ MeV, $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg il vient $\underline{\lambda = 9{,}07 \times 10^{-15}\ \text{m}}$.

Le module du vecteur d'onde est $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi\sqrt{2mE}}{h}$ soit encore $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

Numériquement il vient $\underline{k = 6{,}96 \times 10^{15}\ \text{m}^{-1}}$.

La fonction d'onde représentant le flux ininterrompu de protons produit par le cyclotron s'écrit alors : $\psi(x,t) = \psi_0 \exp\left[i\left(kx - \dfrac{E}{\hbar}t\right)\right]$.

19. Pour un faisceau de particules alpha d'énergie $E = 30$ MeV, les applications numériques conduisent à $\lambda = 2{,}63 \times 10^{-15}$ m et $k = 2{,}40 \times 10^{16}\ \text{m}^{-1}$. Chaque particule alpha portant une charge $2e$, le faisceau d'intensité $I = 10\ \mu\text{A}$ correspond à un flux de $\phi = 3{,}1 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1}$ et un flux surfacique :

$$\boxed{\varphi_s = \frac{4\phi}{\pi a^2} = 4{,}0 \times 10^{20}\ \text{m}^{-2}.\text{s}^{-1}}$$

Ce flux surfacique correspond au nombre de particules alpha véhiculé par le faisceau par unité de surface et par unité de temps. Il s'identifie à la norme du vecteur densité de courant de probabilité :

$$\boxed{\vec{J} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}}$$

En notant encore $\psi(x,t) = \psi_0 \exp\left[i\left(kx - \dfrac{E}{\hbar}t\right)\right]$, il vient $|\psi_0|^2 \dfrac{\hbar k}{m} = \varphi_s$ puis :

$$\boxed{|\psi_0| = \sqrt{\frac{m\varphi_s}{\hbar k}}} \quad \text{et} \quad \boxed{|\psi_0| = 1{,}0 \times 10^6\ \text{m}^{-3/2}}$$

20. La $n^{\text{ème}}$ fonction d'onde s'écrit $\psi_n(x)=\psi_0\exp(ik_n x)$.

La superposition des N ondes de vecteurs d'onde $k_n=k_0+n\times\Delta k_0$ s'écrit alors :

$$\boxed{\psi_n(x)=\psi_0\sum_{n=0}^{N-1}e^{i(k_0+n\times\Delta k_0)x}=\psi_0\,e^{ik_0x}\times\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^{in\Delta k_0 x}\right)}$$

En reconnaissant dans le terme $\sum_{n=0}^{N-1}e^{in\Delta k_0 x}$ la somme des n premiers termes d'une série géométrique de raison $e^{i\Delta k_0 x}$, il vient le résultat :

$$\boxed{\psi_n(x)=\psi_0\,e^{ik_1x}\times\frac{1-e^{iN\Delta k_0 x}}{1-e^{i\Delta k_0 x}}=\psi_0\,e^{ik_0x}\times\frac{e^{i\frac{1}{2}N\Delta k_0 x}}{e^{i\frac{1}{2}\Delta k_0 x}}\times\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta k_0\,x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta k_0\,x\right)}}$$

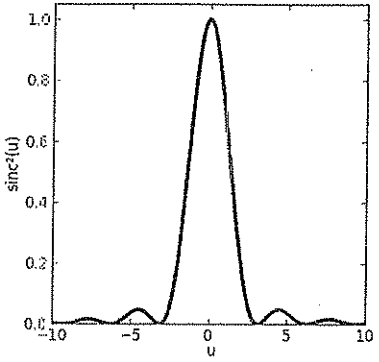
La densité de probabilité de présence s'écrit alors :

$$\boxed{\rho_P(x)=|\psi_0|^2\times\frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\Delta k_0\,x\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta k_0\,x\right)}}$$

La forme prise par cette expression quand $\Delta k_0\to 0$ avec $N\times\Delta k_0=\Delta\tilde{k}$ est :

$$\rho_P(x)=|\psi_0|^2\times\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{k}\,x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta k_0\,x}{2}\right)^2}=N^2|\psi_0|^2\times\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{k}\,x}{2}\right)}{\left(\frac{N\Delta k_0\,x}{2}\right)^2}=N^2|\psi_0|^2\times\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta\tilde{k}\,x}{2}\right)$$

où $\mathrm{sinc}(u)$ désigne la fonction sinus cardinal rencontrée en optique.



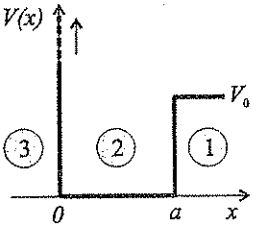
Le tracé de $\mathrm{sinc}^2(u)$ ci-dessus rappelle que cette fonction est quasiment nulle en dehors de l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

La superposition d'ondes planes entraîne ainsi une localisation de la particule.
En prenant π comme valeur de la largeur à mi-hauteur de la fonction sinc^2, on obtient la relation $\Delta\tilde{k}\times\Delta x_{\psi 2}=2\pi$. Plus l'intervalle en vecteur d'onde est étendu, plus la particule est localisée spatialement.

L'inégalité d'Heisenberg $\Delta k\times\Delta x\geq\dfrac{1}{2}$, permet d'accéder immédiatement à ce résultat. Un paquet d'onde est d'autant plus localisé spatialement qu'il est étendu en vecteur d'onde.

États stationnaires dans des potentiels constants par morceaux

21. Soit une particule de masse m qui évolue dans le potentiel $V(x)$ représenté ci-contre.



L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\ \text{dans}\ (2)\ \text{et}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V_0\times\psi(x,t)$$

dans (1).

a) La prise en compte de l'expression de la fonction d'onde, $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, conduit dans les régions (2) et (1) aux équations différentielles :

$$\boxed{\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_2(x)=0}\ \text{et}\ \boxed{\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\varphi_1(x)=0}$$

avec $E<V_0$ pour les états liés.

Avec $k=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $\alpha=\dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$, on obtient les expressions :

$$\boxed{\varphi_2(x)=A_2e^{ikx}+B_2e^{-ikx}}\ \text{et}\ \boxed{\varphi_1(x)=A_1e^{-\alpha x}+B_1e^{+\alpha x}}$$

La non divergence de $\varphi_1\varphi_1^*$ en l'infini impose $B_1=0$ d'où $\varphi_1(x)=A_1e^{-\alpha x}$.
De plus les conditions aux limites imposées à la fonction $\varphi(x)$ sont :

$$\boxed{\varphi(x=0)=0}\ \boxed{\varphi(x=a^-)=\varphi(x=a^+)}\ \text{et}\ \boxed{\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{x=a^-}=\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{x=a^+}}$$

Il vient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 0 \\ A_2\,e^{ika} + B_2\,e^{-ika} = A_1\,e^{-\alpha a} \\ ikA_2\,e^{ika} - ikB_2\,e^{-ika} = -\alpha A_1\,e^{-\alpha a} \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} A_2 = -B_2 \\ A_2\left(e^{ika} - e^{-ika}\right) = A_1\,e^{-\alpha a} \\ ikA_2\left(e^{ika} + e^{-ika}\right) = -\alpha A_1\,e^{-\alpha a} \end{cases}$$

$$\text{puis} \quad \boxed{\begin{cases} A_2 = -B_2 \\ 2i\sin(ka) \times A_2 - A_1\,e^{-\alpha a} = 0 \\ 2ik\cos(ka) \times A_2 + \alpha A_1\,e^{-\alpha a} = 0 \end{cases}}$$

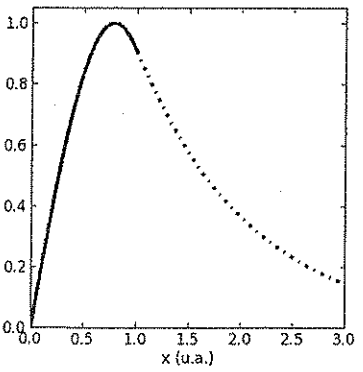
Ce système d'équations admet des solutions non nulles si et seulement si :

$\begin{vmatrix} 2i\sin(ka) & -e^{-\alpha a} \\ 2ik\cos(ka) & \alpha e^{-\alpha a} \end{vmatrix} = 0$, ce qui s'écrit $\boxed{\alpha\sin(ka) + k\cos(ka) = 0}$ d'où l'on tire la relation $\boxed{\tan(ka) = -\dfrac{k}{\alpha}}$ que l'on met sous la forme demandée :

$$\boxed{\tan\left(\frac{a\sqrt{2mE}}{\hbar}\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}}$$

b) Les expressions de $\varphi(x)$ dans les deux régions sont alors $\varphi_2(x) = 2iA_2\sin(kx)$ et $\varphi_1(x) = A_1\,e^{-\alpha x}$.

Pour esquisser le tracé de la fonction d'onde de l'état fondamental, il suffit de raccorder en $x = a$, avec continuité de $\varphi(x)$ et de sa tangente, une fonction sinus ne présentant qu'un seul ventre sur l'intervalle $[0,a]$ et une exponentielle décroissante sur $[a,+\infty[$.



22. Avec $E = 1\text{ eV}$ et $V_0 = 2 \times E = 2\text{ eV}$, l'expression proposée pour le facteur de transmission tunnel prend la forme simplifiée : $T \approx 4\exp\left[-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2mE}\right]$.

Il vient alors la relation : $\boxed{a = -\frac{\ln\left(\frac{T}{4}\right)}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}}$

Pour avoir $T = 10^{-3}$, la largeur de la barrière doit être de $\underline{a = 0{,}81\text{ nm}}$

La longueur d'onde de de Broglie de l'électron incident se calcule à partir de la formule :

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 1{,}23\text{ nm}}$$

L'expression de a établie ci-dessus s'écrit encore :

$$\boxed{a = -\frac{\ln\left(\frac{T}{4}\right)}{4\pi}\frac{h}{\sqrt{2mE}} = -\frac{\ln\left(\frac{T}{4}\right)}{4\pi} \times \lambda}$$ soit numériquement $\underline{a = 0{,}66\lambda}$

Pour observer un effet tunnel significatif la largeur de la barrière de potentiel doit être de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie de la particule.

23. L'expression de la fonction d'onde normalisée pour une particule confinée dans un puits de potentiel infini et se trouvant dans l'état stationnaire quantique n est :

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right) \times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

a) La probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $[0, \alpha a]$ est alors :

$P_n(\alpha) = \frac{2}{a}\int_0^{\alpha a}\sin^2\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^{\alpha a}\left[1 - \cos\left(2n\frac{\pi x}{a}\right)\right]dx$, soit encore :

$$\boxed{P_n(\alpha) = \alpha - \frac{\sin(2n\pi\alpha)}{2n\pi}}$$

b) En introduisant la fonction sinus cardinal telle que $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, on peut encore écrire :

$$\boxed{P_n(\alpha) = \alpha\left(1 - \text{sinc}(2n\pi\alpha)\right)}$$

Le terme en $\text{sinc}(2n\pi\alpha)$ $\text{sinc}(2n\pi\alpha)$ décroît quand n augmente et s'annule quand n tend vers l'infini. D'où l'expression de la limite demandée :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n(\alpha) = \alpha}$$

On retrouve là le résultat classique selon lequel la répartition de la particule confinée est uniforme sur l'intervalle $[0,a]$. Ceci est en accord avec le principe de correspondance selon lequel les résultats de la physique quantique tendent vers ceux obtenus en physique classique quand le nombre quantique n caractéristique du système tend vers l'infini.

États non stationnaires

24. Les fonctions d'ondes des états stationnaires d'une particule de masse m, confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a sont données par :

$$\boxed{\psi_n(x,t)=\varphi_n(x)\times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)\times e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}} \quad \text{avec} \quad \boxed{E_n=n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

a) À partir de l'expression $\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)$, on calcule facilement :

$$\int_{x=0}^{x=a}\varphi_n(x)\varphi_n(x)dx=\frac{2}{a}\int_{x=0}^{x=a}\sin^2\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx=\frac{1}{a}\int_{x=0}^{x=a}\left[1-\cos\left(2n\frac{\pi x}{a}\right)\right]dx$$

d'où :

$$\boxed{\int_{x=0}^{x=a}\varphi_n(x)\varphi_n(x)dx=1}$$

puis :

$$\int_{x=0}^{x=a}\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\frac{2}{a}\int_{x=0}^{x=a}\sin\left(m\frac{\pi x}{a}\right)\times\sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)dx\text{, soit encore :}$$

$$\int_{x=0}^{x=a}\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\frac{1}{a}\int_{x=0}^{x=a}\cos\left((m-n)\frac{\pi x}{a}\right)dx-\frac{1}{a}\int_{x=0}^{x=a}\cos\left((m+n)\frac{\pi x}{a}\right)dx$$

$$\boxed{\int_{x=0}^{x=a}\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=0}$$

Les fonctions $\varphi_n(x)$ vérifient bien la relation $\int_{x=0}^{x=a}\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\delta_{mn}$.
Ces fonctions sont dites orthogonales entre elles.

b) La formule de trigonométrie $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ permet d'écrire la fonction d'onde sous la forme :

$$\psi(x,t=0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}\times\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\sqrt{\frac{8}{5a}}\times\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

À l'aide de $\varphi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ et $\varphi_2(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ il vient :

$$\boxed{\psi(x,t=0)=\frac{2}{\sqrt{5}}\varphi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_2(x)}$$

L'expression de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ de la particule dans cet état non stationnaire s'écrit alors :

$$\boxed{\psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{5}}\varphi_1(x)\mathrm{e}^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_2(x)\mathrm{e}^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}}$$

c) La densité de probabilité de présence s'écrit ensuite :

$$\boxed{\rho_p(x,t)=\psi\psi^*=\frac{4}{5}\varphi_1^2(x)+\frac{1}{5}\varphi_2^2(x)+\frac{4}{5}\varphi_1(x)\varphi_2(x)\times\cos\left(\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right)}$$

25. À l'aide de la formule $<E>=i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dx$ et de l'expression de la fonction d'onde $\psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{5}}\varphi_1(x)\mathrm{e}^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_2(x)\mathrm{e}^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$, on calcule :

$$<E>=\frac{1}{5}\int_{x=0}^{x=a}\left(2\varphi_1\mathrm{e}^{i\frac{E_1}{\hbar}t}+\varphi_2\mathrm{e}^{i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)\left(2E_1\varphi_1\mathrm{e}^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+E_2\varphi_2\mathrm{e}^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)dx$$

$$<E>=\frac{1}{5}\int_{x=0}^{x=a}\left(4E_1\varphi_1^2+E_2\varphi_2^2+2E_1\varphi_1\varphi_2\mathrm{e}^{i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t}+2E_2\varphi_1\varphi_2\mathrm{e}^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t}\right)dx.$$

En utilisant que $\int_{x=0}^{x=a}\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\delta_{mn}$, on obtient facilement le résultat :

$$\boxed{<E>=\frac{4}{5}E_1+\frac{1}{5}E_2}$$

À l'aide de la formule $<E^2>=-\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}dx$, on calcule :

$$<E^2>=\frac{1}{5}\int_{x=0}^{x=a}\left(2\varphi_1\mathrm{e}^{i\frac{E_1}{\hbar}t}+\varphi_2\mathrm{e}^{i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)\left(2E_1^2\varphi_1\mathrm{e}^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+E_2^2\varphi_2\mathrm{e}^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)dx,$$

ce qui conduit au résultat :

$$\boxed{<E^2>=\frac{4}{5}E_1^2+\frac{1}{5}E_2^2}$$

L'écart quadratique de l'énergie de cette particule est alors donné par :

$$(\Delta E)^2=<E^2>-<E>^2=\frac{4}{25}\left(E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\right)=\frac{4}{25}(E_2-E_1)^2.$$

Ce qui conduit au résultat :

$$\boxed{\Delta E=\frac{2}{5}(E_2-E_1)}$$

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

26. Les niveaux d'énergie d'une particule de masse m confinée dans un puits infini d'extension a sont donnés par $E_n = n^2 \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$. Pour un électron confiné dans un puits infini de largeur $a = 0{,}2$ nm, les trois premiers niveaux sont :

$$E_1 = 9{,}3 \text{ eV}, \; E_2 = 37 \text{ eV} \text{ et } E_3 = 84 \text{ eV}.$$

La longueur d'onde $\lambda_{p \to n}$ du rayonnement émis lors d'une transition $p \to n$ s'écrit :

$$\boxed{\lambda_{p \to n} = \frac{hc}{E_p - E_n}}$$

Numériquement, il vient $\lambda_{3 \to 1} \simeq 17$ nm et $\lambda_{2 \to 1} \simeq 44$ nm ; ces deux longueurs d'onde sont situées dans le domaine de l'ultraviolet.

27. Pour un proton confiné dans un puits infini de largeur $a = 5$ fm, les trois premiers niveaux d'énergie sont :

$$E_1 = 8{,}1 \text{ MeV}, \; E_2 = 33 \text{ MeV} \text{ et } E_3 = 73 \text{ MeV}.$$

Les longueurs d'onde des rayonnements émis respectivement lors des transitions nucléaires $3 \to 1$ et $2 \to 1$ sont $\lambda_{3 \to 1} \simeq 19$ fm et $\lambda_{2 \to 1} \simeq 51$ fm ; ces deux longueurs d'onde sont situées dans le domaine des rayons γ.

28. Lors de la transition $p \to n$ d'une particule confinée dans un puits de potentiel infini :

$$\boxed{\lambda_{p \to n} = \frac{hc}{E_p - E_n} = \frac{8mca^2}{h} \times \frac{1}{p^2 - n^2}}$$

Dans le cas d'une transition $2 \to 1$, cette relation s'écrit encore $\lambda_{2 \to 1} = \dfrac{8mca^2}{3h}$.

On en déduit l'expression $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3h\lambda_{2 \to 1}}{2mc}}$, et numériquement $a = 0{,}795$ nm.

Cette valeur est bien de l'ordre de grandeur du paramètre de maille d'une structure cristalline.

29. Dans le cas d'une particule de masse m confinée dans un puits de potentiel infini de largeur a, l'état stationnaire fondamental correspond, en ce qui concerne la dépendance spatiale, au mode fondamental d'une corde vibrante de longueur a fixée en ses extrémités. L'existence d'un seul ventre de vibration et de deux nœuds aux extrémités impose $\lambda_1^{\infty} = 2a$.

La relation $p = \hbar k = \dfrac{h}{\lambda}$ conduit à l'expression $E = \dfrac{h^2}{2m\lambda^2}$ soit encore $\boxed{E_1^{\infty} = \dfrac{h^2}{8ma^2}}$

Dans le cas d'une particule confinée dans un puits de hauteur finie, la fonction d'onde du mode fondamental ne s'annule plus en bords de puits. Comme cette fonction ne présente qu'un seul ventre de vibration sur l'intervalle $[0,a]$ la longueur d'onde λ_1 associée est nécessairement supérieure à $\lambda_1^{\infty} = 2a$.

La relation $E = \dfrac{h^2}{2m\lambda^2}$ entraîne alors $\boxed{E_1 < E_1^{\infty}}$

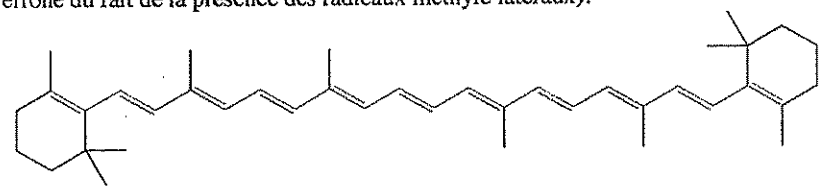
30. Les niveaux d'énergie d'une particule de masse m confinée dans un puits infini d'extension a sont donnés par $E_n = n^2 \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. En utilisant le résultat établi précédemment, la longueur d'onde λ_{pn} du rayonnement absorbé lors de la transition $n \to p$, avec $p > n$ s'écrit $\lambda_{pn} = \dfrac{hc}{E_p - E_n} = \dfrac{8mca^2}{h} \times \dfrac{1}{p^2 - n^2}$.

Dans le cas de la molécule de β-carotène, la raie d'absorption de longueur d'onde $\lambda = 451\,\text{nm}$ correspond à la transition $11 \to 12$.

D'où la relation $\lambda = \dfrac{8mca^2}{23h}$ qui conduit à l'expression du paramètre a :

$$\boxed{a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23h\lambda}{2mc}}}$$

Numériquement, avec le modèle du puits infini, $a = 1{,}8\,\text{nm}$. Cette valeur diffère de la valeur tabulée $\tilde{a} = 3{,}0\,\text{nm}$ car le modèle choisi pour le potentiel est bien trop simple. Les interactions des électrons entre eux ont été négligées et le potentiel $V(x)$ a été considéré comme constant le long de la chaîne carbonée (ce qui est erroné du fait de la présence des radicaux méthyle latéraux).



31. La fonction d'onde de la particule s'écrit $\psi(x,t) = \psi_0 \exp\left[\dfrac{i}{\hbar}(p_x x - Et)\right]$.

La phase de cette fonction d'onde est : $\boxed{\Phi = \dfrac{p_x x - Et}{\hbar}}$

L'expression de la vitesse de phase est alors $\boxed{v_\varphi = \dfrac{E}{p_x} = \dfrac{\hbar\omega}{\hbar k} = \dfrac{\omega}{k}}$

En écrivant $\psi(x,t)=\psi_0\exp\left[i(kx-\omega t)\right]$ dans l'équation de Schrödinger $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$, il vient la relation de dispersion :

$$\boxed{\omega=\frac{\hbar k^2}{2m}}$$

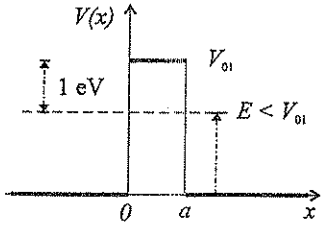
La vitesse de groupe se détermine à partir de cette expression :

$$\boxed{v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{\hbar k}{m}=\frac{p_x}{m}}$$

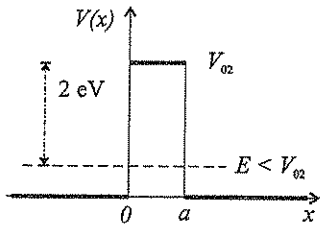
Cette vitesse de groupe correspond à la vitesse « classique » de la particule.

Les expressions $v_\varphi=\sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{2m}}$ et $v_g=\sqrt{\dfrac{2\hbar\omega}{m}}$ mettent en évidence le caractère dispersif de la propagation des ondes de matière. Dans le cas d'une onde lumineuse plane monochromatique se propageant dans le vide on a établi $v_\varphi=v_g=c$.
La propagation des ondes lumineuses dans le vide se fait sans dispersion.

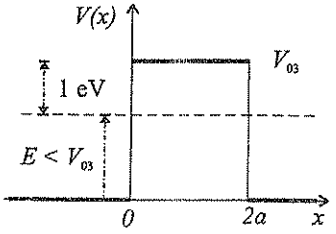
32. En notant $V_0=1\text{ eV}$ et en posant $V_0=\alpha E$, il vient $V_{01}=V_{03}=E+V_0=(1+\alpha)E$ et $V_{02}=V_{04}=E+2V_0=(1+2\alpha)E$.



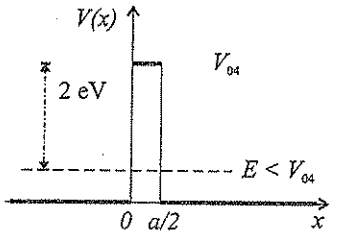
barrière n°1



barrière n°2



barrière n°3



barrière n°4

L'expression approchée du facteur de transmission tunnel T, à travers une barrière de largeur L et de hauteur $\tilde{V}_0$, pour une particule d'énergie E a été donnée dans la question **22.** :

$$\boxed{T \approx \frac{16E\left(\tilde{V}_0 - E\right)}{\tilde{V}_0^2} \exp\left[-\frac{2L}{\hbar}\sqrt{2m\left(\tilde{V}_0 - E\right)}\right]}$$

En notant T_j le facteur de transmission à travers la barrière n° j, il vient :

$$T_1 = \frac{16\alpha}{(1+\alpha)^2}\exp\left[-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m\alpha E}\right],\ T_3 = \frac{16\alpha}{(1+\alpha)^2}\exp\left[-\frac{4a}{\hbar}\sqrt{2m\alpha E}\right] \text{ soit } T_3 = {T_1}^2.$$

$$T_2 = \frac{32\alpha}{(1+2\alpha)^2}\exp\left[-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{4m\alpha E}\right],\ T_4 = \frac{32\alpha}{(1+2\alpha)^2}\exp\left[-\frac{a}{\hbar}\sqrt{4m\alpha E}\right], \text{ et } T_2 = {T_4}^2.$$

Comme chaque $T_j < 1$, $T_3 = {T_1}^2$ et $T_2 = {T_4}^2$ entraînent $T_3 < T_1$ et $T_2 < T_4$. Ces deux relations d'ordre étaient immédiates car, les autres paramètres étant maintenus constants, la probabilité de traversée par effet tunnel est une fonction décroissante de la largeur de la barrière. En revanche, entre les situations 1 et 2, c'est la hauteur relative de barrière $\tilde{V}_0 - E$ qui varie. Comme T_j est une fonction décroissante de $\tilde{V}_0 - E$ (la décroissance exponentielle l'emporte sur la croissance linéaire), il vient :

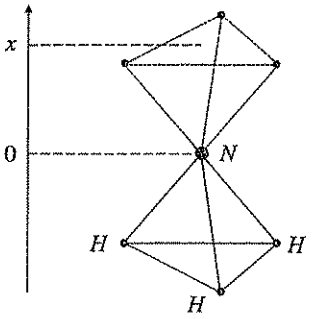
$$\boxed{T_3 < T_2 < T_1 < T_4}$$

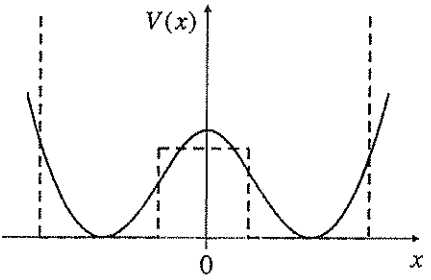
On peut retrouver ce résultat en posant $\beta = \frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m\alpha E}$ et en notant :

$$T_3 = \frac{16\alpha}{(1+\alpha)^2}e^{-2\beta},\ T_2 = \frac{32\alpha}{(1+2\alpha)^2}e^{-\beta\sqrt{2}},\ T_1 = \frac{16\alpha}{(1+\alpha)^2}e^{-\beta},\ \text{et } T_4 = \frac{32\alpha}{(1+2\alpha)^2}e^{-\beta/\sqrt{2}}.$$

33. L'état d'une particule libre d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p}$ est représenté par la fonction $\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)\right]$. Dans la plupart des dispositifs interférentiels à deux voies, la fonction d'onde du quanton s'écrit $\psi(\vec{r},t) = \psi_1(\vec{r},t) + \psi_2(\vec{r},t)$, où $\psi_1(\vec{r},t)$ et $\psi_2(\vec{r},t)$ désignent respectivement les fonctions d'onde du quanton empruntant l'une ou l'autre des voies. Cette écriture correspond à l'addition des amplitudes complexes de deux ondes en optique $\underline{s}(\vec{r},t) = \underline{s}_1(\vec{r},t) + \underline{s}_2(\vec{r},t)$. La densité de probabilité de présence de la particule quantique est donnée par $|\psi_1(\vec{r},t) + \psi_2(\vec{r},t)|^2$ à l'instar du passage de l'amplitude totale à l'intensité en optique. C'est l'interprétation, dans le cadre de la physique quantique, de l'observation de franges d'interférences entre particules matérielles.

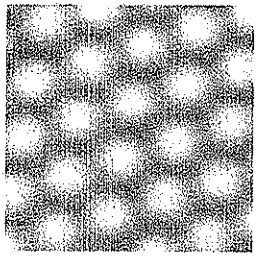
34. La molécule d'ammoniac a une structure pyramidale. Pour $x = 0$ le plan formé par les trois H passe par N, situation instable (car l'azote repousse les trois hydrogènes) correspondant à un maximum local d'énergie potentielle V_0. La courbe d'énergie potentielle $V(x)$ est paire vu la symétrie du problème. De part et d'autre, la molécule est dans une situation classiquement stable avec des minima d'énergie potentielle (référence prise nulle). Enfin, sauf à rompre les liaisons, le potentiel augmente pour assurer la cohésion des liaisons chimiques de la molécule.





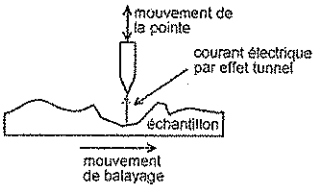
En trait plein, la courbe réelle, en pointillé, le profil modélisant la situation. On retrouve le problème d'une particule confinée dans un double puits de potentiel symétrique, traité à la question **40.**. En mécanique classique, la barrière de potentiel en $x = 0$ est infranchissable pour une particule d'énergie inférieure à V_0, l'atome N devrait donc toujours rester du même côté du plan formé par les trois H. En mécanique quantique, la particule peut, même si son énergie est inférieure à V_0, franchir cette barrière par effet tunnel : l'inversion de la molécule est possible.
En réalité le plan des atomes d'hydrogène passe alternativement d'un côté à l'autre de l'atome d'azote, et on parle de la fréquence d'inversion ou d'oscillations de la molécule (à 24 GHz dans le domaine des ondes centimétriques, phénomène à la base du maser à ammoniac).

35. Le microscope à effet tunnel, inventé en 1981, est un microscope en champ proche qui utilise l'effet tunnel (un phénomène quantique) pour déterminer la morphologie et la densité d'états électroniques de surfaces conductrices ou semi-conductrices avec une résolution spatiale inférieure à la taille des atomes.



Ci-contre des atomes de silicium à la surface d'un cristal de carbure de silicium (SiC).

Le principe est le suivant : à l'aide d'un système de positionnement de grande précision, **une pointe conductrice** placée en face de la surface à étudier permet la mesure d'un courant résultant du passage d'électrons entre la pointe et la surface par effet tunnel ; les électrons libres du métal sortent un peu de la surface, si bien qu'en approchant la pointe très près, il est possible d'enregistrer un courant électrique d'intensité très faible (entre quelques pA et quelques nA, nécessitant un système électronique d'amplification).



Comme ce courant décroît exponentiellement avec la distance séparant la pointe de la surface (sur quelques dixièmes de nanomètres), on fait bouger la pointe au-dessus de la surface à représenter avec un mouvement de balayage et un ordinateur ajuste

en temps réel (*via* un système d'asservissement) la hauteur de la pointe de manière à conserver l'intensité du courant tunnel constante (au moyen d'une boucle de rétroaction). L'enregistrement de cette hauteur permet de reconstituer le profil de la surface avec une précision inférieure aux distances interatomiques.

Le microscope à effet tunnel ne permet de voir que les nuages électroniques des atomes et nécessite d'avoir un échantillon conducteur d'électricité. Si l'échantillon est isolant, on utilise une technique proche, la microscopie à force atomique.

Exercices

36. Traversée d'un puits de potentiel

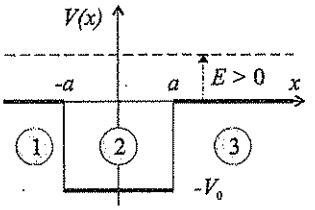
a) L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

dans (1) ou (3),

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)-V_0\times\psi(x,t)$$

dans la région (2).



La prise en compte de l'expression de la fonction d'onde, $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, conduit aux équations différentielles :

$$\boxed{\frac{d^2\varphi_{1ou3}(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_{1ou3}(x)=0}$$ dans les régions (1) ou (3)

$$\boxed{\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}+\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\varphi_2(x)=0}$$ dans la région (2).

En introduisant les grandeurs $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $q=\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$, on obtient dans les différentes régions les formes :

$$\boxed{\varphi_1(x)=e^{ikx}+re^{-ikx}} \quad \boxed{\varphi_2(x)=A_2e^{iqx}+B_2e^{-iqx}} \quad \boxed{\varphi_3(x)=te^{ikx}}$$

Dans la région (3), le terme en e^{-ikx} n'apparaît pas car il n'y a pas de propagation selon les x décroissants dans cette région (il faudrait que la particule subisse une interaction ou qu'il y ait une autre source de particule dans cette région pour ce terme soit non nul). La continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée lors des sauts de hauteur fini en $x=-a$ et $x=a$ permet d'obtenir le système linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} e^{-ika}+re^{ika}=A_2e^{-iqa}+B_2e^{iqa} \\ A_2e^{iqa}+B_2e^{-iqa}=te^{ika} \\ ike^{-ika}-ikre^{ika}=iq\left(A_2e^{-iqa}-B_2e^{iqa}\right) \\ iq\left(A_2e^{iqa}-B_2e^{-iqa}\right)=ikte^{ika} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} e^{-ika}+re^{ika}=A_2e^{-iqa}+B_2e^{iqa} \\ A_2e^{iqa}+B_2e^{-iqa}=te^{ika} \\ e^{-ika}-re^{ika}=\dfrac{q}{k}\left(A_2e^{-iqa}-B_2e^{iqa}\right) \\ A_2e^{iqa}-B_2e^{-iqa}=\dfrac{k}{q}te^{ika} \end{cases}$$

En l'absence de réflexion lors de la traversée du puits, en posant $r=0$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} e^{-ika}=A_2e^{-iqa}+B_2e^{iqa} \\ e^{-ika}=\dfrac{q}{k}\left(A_2e^{-iqa}-B_2e^{iqa}\right) \\ A_2e^{iqa}+B_2e^{-iqa}=te^{ika} \\ \dfrac{q}{k}\left(A_2e^{iqa}-B_2e^{-iqa}\right)=te^{ika} \end{cases} \text{ soit encore } \boxed{\begin{cases} A_2\left(1-\dfrac{q}{k}\right)e^{-iqa}+B_2\left(1+\dfrac{q}{k}\right)e^{iqa}=0 \\ A_2\left(1-\dfrac{q}{k}\right)e^{iqa}+B_2\left(1+\dfrac{q}{k}\right)e^{-iqa}=0 \\ te^{ika}=A_2e^{iqa}+B_2e^{-iqa} \\ e^{-ika}=A_2e^{-iqa}+B_2e^{iqa} \end{cases}}$$

Ce système de 4 équations à 3 inconnues n'admet des solutions non nulles que si les deux premières équations sont linéairement dépendantes. Il suffit d'annuler le déterminant du système des deux premières équations pour obtenir la relation :

$\left(1-\left(\dfrac{q}{k}\right)^2\right)e^{-i2qa}-\left(1-\left(\dfrac{q}{k}\right)^2\right)e^{i2qa}=0$, soit encore $\boxed{\sin(2qa)=0}$ puisque $q\neq k$.

La condition de non réflexion lors de la traversée du puits est :

$$\boxed{2q_na=n\pi} \text{ avec } n\in\mathbb{N}.$$

Avec $q_n=\dfrac{\sqrt{2m(E_n+V_0)}}{\hbar}$, les valeurs de E_n pour lesquelles il n'y a pas de réflexion sont :

$$\boxed{E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}-V_0}$$

La condition $2q_na=n\pi$ traduit simplement qu'un aller-retour de l'onde dans le puits correspond à une différence de marche qui est un multiple de la longueur d'onde dans le puits. Dans un modèle à ondes multiples, cela revient à dire qu'il y a résonance en transmission quand les ondes émergentes sont toutes en phase.

b) En supposant que la résonance observée correspond à $n=1$, on obtient comme profondeur de puits :

$$\boxed{V_0=\frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}-E\simeq 8{,}6\text{ eV}}$$

37. États stationnaires d'une particule dans un puits de profondeur finie

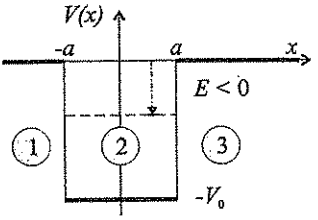
a) L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

dans les régions (1) ou (3)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)-V_0\times\psi(x,t)$$

dans la région (2).



La prise en compte de l'expression de la fonction d'onde, $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, conduit aux équations différentielles :

$$\boxed{\frac{d^2\varphi_{1ou3}(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_{1ou3}(x)=0}$$ dans les régions (1) ou (3),

$$\boxed{\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}+\frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}\varphi_2(x)=0}$$ dans la région (2).

En introduisant les grandeurs $\alpha=\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$ et $k=\frac{\sqrt{2m(V_0-|E|)}}{\hbar}$, ces équations différentielles s'écrivent :

$$\boxed{\frac{d^2\varphi_{1ou3}(x)}{dx^2}-\alpha^2\times\varphi_{1ou3}(x)=0}$$ et $$\boxed{\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}+k^2\times\varphi_2(x)=0}$$

Après avoir éliminé les termes qui conduisent à une divergence en $\pm\infty$, les solutions ont pour expression :

$$\boxed{\varphi_1(x)=A_1e^{\alpha x}}\quad\boxed{\varphi_2(x)=A_2e^{ikx}+B_2e^{-ikx}}\quad\boxed{\varphi_3(x)=A_3e^{-\alpha x}}$$

La continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée lors des sauts de hauteur fini en $x=-a$ et $x=a$ donne le système linéaire 4×4 en A_1, A_2, B_2 et A_3.

$$\begin{cases} A_1e^{-\alpha a}=A_2e^{-ika}+B_2e^{ika} \\ A_3e^{-\alpha a}=A_2e^{ika}+B_2e^{-ika} \\ \alpha A_1e^{-\alpha a}=ik\left(A_2e^{-ika}-B_2e^{ika}\right) \\ -\alpha A_3e^{-\alpha a}=ik\left(A_2e^{ika}-B_2e^{-ika}\right) \end{cases}$$ soit encore $$\begin{cases} A_1e^{-\alpha a}-A_2e^{-ika}-B_2e^{ika}=0 \\ A_2e^{ika}+B_2e^{-ika}-A_3e^{-\alpha a}=0 \\ \alpha A_1e^{-\alpha a}-ik\left(A_2e^{-ika}-B_2e^{ika}\right)=0 \\ ik\left(A_2e^{ika}-B_2e^{-ika}\right)+\alpha A_3e^{-\alpha a}=0 \end{cases}$$

Ce système linéaire 4×4 en A_1, A_2, B_2 et A_3 n'admet des solutions non nulles que si son déterminant est nul.

b) Dans le cas des modes symétriques notons $A_1=A_3=C$ et $A_2=B_2=D$.

Le système ci-dessus devient alors équivalent au système :

$$\begin{cases} C\,e^{-\alpha a} - 2D\cos(ka) = 0 \\ \alpha C\,e^{-\alpha a} - 2kD\sin(ka) = 0 \end{cases}$$

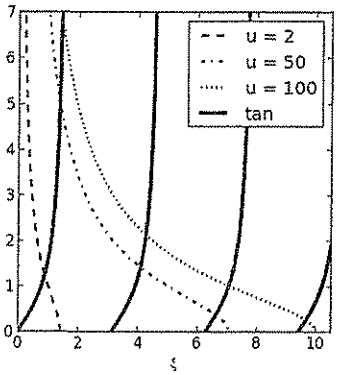
L'annulation du déterminant de ce système 2×2 conduit à la relation de quantification des modes pairs :

$$\boxed{\alpha = k\tan(ka)}$$

Les variables sans dimension $u = \dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ et $\xi = ka$ permettent d'écrire cette relation de quantification des modes sous la forme :

$$\boxed{\frac{\sqrt{u-\xi^2}}{\xi} = \tan\xi}$$

Le tracé ci-dessous illustre, pour différentes valeurs de u, la quantification des valeurs permises ξ_n de ξ pour les états symétriques. Pour la valeur $u = 2$ il y a un seul état lié possible, en revanche il y en a trois pour $u = 50$ et quatre pour $u = 100$.



c) Dans le cas des états antisymétriques posons $A_1 = C = -A_3$ et $A_2 = D = -B_2$.
Le système ci-dessus devient alors équivalent au système :

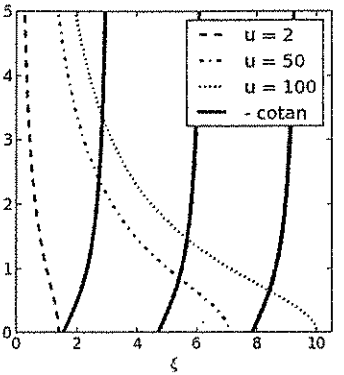
$$\begin{cases} C\,e^{-\alpha a} + 2iD\sin(ka) = 0 \\ \alpha C\,e^{-\alpha a} - 2ikD\cos(ka) = 0 \end{cases}$$

L'annulation du déterminant de ce système 2×2 conduit à la relation de quantification des modes impairs :

$$\boxed{\alpha = -k\,\mathrm{cotan}(ka)}$$

Les variables u et ξ permettent alors d'écrire : $\boxed{\dfrac{\sqrt{u-\xi^2}}{\xi} = -\mathrm{cotan}\xi}$

Le tracé ci-dessous illustre, pour différentes valeurs de u, la quantification des valeurs permises ξ_n de ξ pour les états antisymétriques. Pour la valeur $u=2$ il n'y a pas d'état lié antisymétrique possible, en revanche il y en a deux pour $u=50$ et trois pour $u=100$.



d) À partir des tracés ci-dessus, on constate qu'il existe toujours un état fondamental pair. Cet état lié est le seul possible si la valeur de ξ qui annule $\frac{\sqrt{u-\xi^2}}{\xi}$ est inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

Cette condition se réécrit $u<\frac{\pi^2}{4}\approx 2{,}47$ soit encore $\boxed{V_0<\frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}}$

Cette valeur critique :

$$\boxed{V_C=\frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}}$$

correspond au niveau fondamental d'une particule confinée dans un puits infini de largeur $2a$, ce qui rend ce résultat facile à mémoriser.
L'énergie du niveau fondamental dans un puits de profondeur finie est donc nécessairement inférieure à l'énergie du niveau fondamental dans un puits de profondeur infinie.

38. Effet tunnel et radioactivité α

a) En posant $Z=81$, l'expression de l'énergie potentielle électrostatique de la particule α distante de r du noyau de Thallium est :

$$\boxed{E_{pe}=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

D'où l'expression $\boxed{r_0 = \dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}}$ et numériquement $\underline{r_0 = 39\text{ fm}}$

b) En utilisant la formule $R = R_0 A^{1/3}$, le rayon du noyau de Thallium est $\underline{R = 7{,}1\text{ fm}}$.

La valeur V_b du pic de potentiel est alors $V_b = \dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = 33\text{ MeV}$ et la hauteur moyenne de barrière tunnel $V_0 = \dfrac{V_b}{2} = 16{,}5\text{ MeV}$.

En prenant comme largeur de barrière $a = r_0 - R = 32\text{ fm}$, la valeur numérique du coefficient de transmission est $\underline{T \approx 1{,}6\times10^{-39}}$.

Il faut donc $\dfrac{1}{T}$ collisions pour que la particule quitte le puits de potentiel par effet tunnel. Avec une énergie de $E = 6{,}0\text{ MeV}$, la vitesse de la particule α dans le puits de potentiel constitué par le noyau est $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m}} = 1{,}7\times10^{7}\text{ m.s}^{-1}$.

La particule entre donc en collision avec les bords du puits toutes les $\dfrac{2R}{v} = 8{,}4\times10^{-22}\text{ s}$. La durée de vie moyenne est alors donnée par la relation :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{T}\times\frac{2R}{v} = \frac{8{,}4\times10^{-22}}{1{,}6\times10^{-39}} \approx 5{,}3\times10^{17}\text{ s} \approx 17\text{ milliards d'années}}$$

39. État non stationnaire d'une particule dans un puits de profondeur infinie

a) En utilisant la formule $\sin^3(x) = \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{1}{4}\sin(3x)$, on peut réécrire $\varphi(x)$ sous la forme $\varphi(x) = \dfrac{3}{\sqrt{5a}}\times\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{5a}}\times\sin\left(\dfrac{3\pi x}{a}\right)$.

Cette fonction d'onde s'exprime facilement à l'aide de $\varphi_1(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ et $\varphi_3(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{3\pi x}{a}\right)$ sous la forme :

$$\boxed{\psi(x,t=0) = \frac{3}{\sqrt{10}}\varphi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{10}}\varphi_3(x)}$$

Il vient l'expression de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ de la particule dans cet état non stationnaire :

$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{3}{\sqrt{10}}\varphi_1(x)\,e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} - \frac{1}{\sqrt{10}}\varphi_3(x)\,e^{-i\frac{E_3}{\hbar}t}}$$

b) La densité de probabilité de présence s'écrit alors facilement :

$$\rho_P(x,t)=\psi\psi^*=\frac{9}{10}\varphi_1^2(x)+\frac{1}{10}\varphi_3^2(x)-\frac{3}{5}\varphi_1(x)\varphi_3(x)\times\cos\left(\frac{(E_3-E_1)t}{\hbar}\right)$$

40. Particule confinée dans un double puits de potentiel symétrique

a) L'équation de Schrödinger s'écrit :

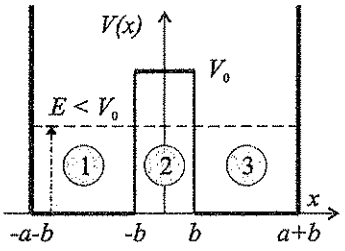
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \text{ dans } (1) \text{ et } (3),$$

et dans (2) : $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V_0\times\psi(x,t)$

La prise en compte de l'expression de la fonction d'onde, $\psi(x,t)=\varphi(x)\times e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, conduit aux équations différentielles :

$$\frac{d^2\varphi_{1ou3}(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_{1ou3}(x)=0$$

dans les régions (1) ou (3),



$$\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\varphi_2(x)=0$$ dans la région (2).

En introduisant les grandeurs $\alpha=\dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ et $k=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, ces équations différentielles s'écrivent :

$$\frac{d^2\varphi_{1ou3}(x)}{dx^2}+k^2\times\varphi_{1ou3}(x)=0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}-\alpha^2\times\varphi_2(x)=0$$

b) Ces équations différentielles s'intègrent en :

$$\varphi_1(x)=A_1e^{ikx}+B_1e^{-ikx} \qquad \varphi_2(x)=A_2e^{-\alpha x}+B_2e^{+\alpha x} \qquad \varphi_3(x)=A_3e^{ikx}+B_3e^{-ikx}$$

La continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée lors des sauts de potentiel de hauteur fini en $x=\pm b$ et la nullité de la fonction $\varphi(x)$ en $x=\pm(a+b)$ permettent d'obtenir le système linéaire 6×6 en A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 et B_3 (où $a+b=l$).

$$\begin{cases} A_1 e^{-ikl} + B_1 e^{ikl} = 0 \\ A_1 e^{-ikb} + B_1 e^{ikb} = A_2 e^{-\alpha b} + B_2 e^{\alpha b} \\ A_3 e^{ikb} + B_3 e^{-ikb} = A_2 e^{\alpha b} + B_2 e^{-\alpha b} \\ A_3 e^{ikl} + B_3 e^{-ikl} = 0 \\ ik\left(A_1 e^{-ikb} - B_1 e^{ikb}\right) = \alpha\left(A_2 e^{-\alpha b} - B_2 e^{\alpha b}\right) \\ ik\left(A_3 e^{ikb} - B_3 e^{-ikb}\right) = \alpha\left(A_2 e^{\alpha b} - B_2 e^{-\alpha b}\right) \end{cases}$$

Ce système linéaire n'admet des solutions non nulles que si son déterminant est nul.

c) Dans le cas des états symétriques $A_1 = B_3$, $A_3 = B_1$ et $A_2 = B_2$. Soit encore :

$$\begin{cases} A_1 e^{-ikl} + A_3 e^{ikl} = 0 \\ A_1 e^{-ikb} + A_3 e^{ikb} = 2A_2 \cosh(\alpha b) \\ ik\left(A_1 e^{-ikb} - A_3 e^{ikb}\right) = -2\alpha A_2 \sinh(\alpha b) \end{cases} \quad \begin{cases} A_3 = -A_1 e^{-i2kl} \\ A_1\left(e^{-ikb} - e^{ikb} e^{-i2kl}\right) = 2A_2 \cosh(\alpha b) \\ ikA_1\left(e^{-ikb} + e^{ikb} e^{-i2kl}\right) = -2\alpha A_2 \sinh(\alpha b) \end{cases}$$

Les deux dernières équations de ce système sont linéairement indépendantes si :

$$-\frac{\alpha \sinh(\alpha b)}{\cosh(\alpha b)} = \frac{ik\left(e^{-ikb} + e^{ikb} e^{-i2kl}\right)}{\left(e^{-ikb} - e^{ikb} e^{-i2kl}\right)} = \frac{ik\left(e^{ik(l-b)} + e^{-ik(l-b)}\right)}{\left(e^{ik(l-b)} - e^{-ik(l-b)}\right)} = \frac{k\cos\left(k(l-b)\right)}{\sin\left(k(l-b)\right)}$$

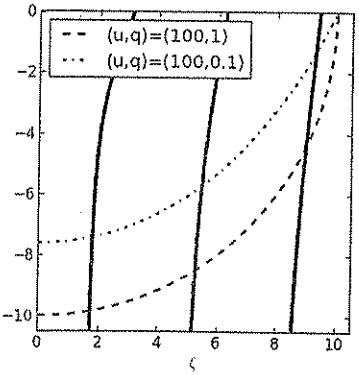
La relation de quantification des états symétriques s'écrit donc :

$$\boxed{k\cot(ka) = -\alpha \tanh(\alpha b)}$$

Les variables adimensionnées $u = \dfrac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$, $\xi = ka$ et $q = \dfrac{b}{a}$ permettent d'écrire cette relation de quantification des états symétriques sous la forme :

$$\boxed{\xi \cot(\xi) = -\sqrt{u - \xi^2} \tanh\left(q\sqrt{u - \xi^2}\right)}$$

Afin d'illustrer la quantification des niveaux d'énergie de la particule, il suffit de réaliser le tracé demandé dans les cas où $(u, q) = (100, 1)$ puis $(u, q) = (100, 0.1)$.



d) Dans le cas des états antisymétriques

$A_1 = -B_3$, $A_3 = -B_1$ et $A_2 = -B_2$, d'où :

$$\begin{cases} A_1 e^{-ikl} - A_3 e^{ikl} = 0 \\ A_1 e^{-ikb} - A_3 e^{ikb} = -2A_2 \sinh(\alpha b) \\ ik\left(A_1 e^{-ikb} + A_3 e^{ikb}\right) = 2\alpha A_2 \cosh(\alpha b) \end{cases} \quad \begin{cases} A_3 = A_1 e^{-i2kl} \\ A_1\left(e^{-ikb} - e^{ikb} e^{-i2kl}\right) = -2A_2 \sinh(\alpha b) \\ ikA_1\left(e^{-ikb} + e^{ikb} e^{-i2kl}\right) = 2\alpha A_2 \cosh(\alpha b) \end{cases}$$

Les deux dernières équations de ce système sont linéairement indépendantes si :

$$\frac{\alpha \cosh(\alpha b)}{\sinh(\alpha b)} = \frac{ik\left(e^{-ikb} + e^{ikb} e^{-i2kl}\right)}{\left(e^{-ikb} - e^{ikb} e^{-i2kl}\right)} = \frac{ik\left(e^{ik(l-b)} + e^{-ik(l-b)}\right)}{\left(e^{ik(l-b)} - e^{-ik(l-b)}\right)} = \frac{k\cos\left(k(l-b)\right)}{\sin\left(k(l-b)\right)}$$

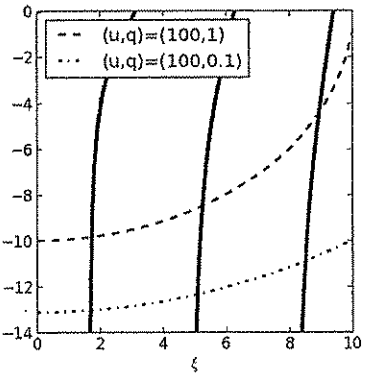
La relation de quantification des états antisymétriques s'écrit donc :

$$\boxed{k\cot(ka) = -\alpha \coth(\alpha b)}$$

Les variables adimensionnées $u = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$, $\xi = ka$ et $q = \frac{b}{a}$ permettent d'écrire cette relation de quantification des états sous la forme :

$$\boxed{\xi \cot(\xi) = -\sqrt{u - \xi^2} \coth\left(q\sqrt{u - \xi^2}\right)}$$

Pour les états antisymétriques, dans le où $(u, q) = (100, 1)$ puis $(u, q) = (100, 0.1)$, on obtient la figure :



e) De façon analogue à ce qui a été vu dans le cas d'une particule confinée dans un puits de potentiel de hauteur finie, l'état fondamental est symétrique.

Cet état n'existe que si $\sqrt{u} \geq \frac{\pi}{2}$, ce qui se réécrit $u \geq \frac{\pi^2}{4}$, soit encore :

$$\boxed{V_0 \geq \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}}$$

Cette valeur critique $V_C = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$ correspond au niveau fondamental d'une particule confinée dans un puits infini de largeur $2a$.

f) Dans le cas où $a = 2b = 0{,}2$ nm, $V_0 = 20$ eV et $m = 9{,}1\times10^{-31}$ kg, les valeurs numériques des paramètres u et q sont $\underline{q = 0{,}5}$ et $\underline{u = 21}$

Les relations de quantification établies précédemment, à savoir :

$$\xi\cot(\xi) = -\sqrt{u-\xi^2}\tanh\left(q\sqrt{u-\xi^2}\right) \text{ et } \xi\cot(\xi) = -\sqrt{u-\xi^2}\coth\left(q\sqrt{u-\xi^2}\right)$$

admettent alors comme premières solutions respectives $\underline{\xi_S = 2{,}53}$ et $\underline{\xi_A = 2{,}57}$

La relation $\xi = ka$ permet alors d'écrire $E = \dfrac{\hbar^2\xi^2}{2ma^2}$ et de calculer :

$$\underline{E_S = 6{,}06\text{ eV}} \quad \text{et} \quad \underline{E_A = 6{,}25\text{ eV}}$$

Les niveaux d'énergie d'un électron confiné dans un puits infini de largeur a sont $E_n = n^2\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Avec $a = 0{,}2$ nm, il vient $\underline{E_1 = 9{,}34\text{ eV}}$ et $\underline{E_2 = 37{,}4\text{ eV}}$.

41. Particule dans un double puits symétrique profond (*)

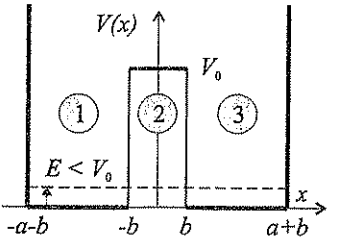
a) Les relations de quantification établies dans l'exercice **40.** sont :

pour les états symétriques :

$$\xi\cot(\xi) = -\sqrt{u-\xi^2}\tanh\left(q\sqrt{u-\xi^2}\right),$$

et pour les états antisymétriques :

$$\xi\cot(\xi) = -\sqrt{u-\xi^2}\coth\left(q\sqrt{u-\xi^2}\right),$$



Le puits est supposé profond. L'étude est limitée aux premiers niveaux d'énergie. Ceci se traduit par $u \gg 1$, $\xi \leq 5\pi$ et permet d'écrire :

$$\sqrt{u-\xi^2} = \sqrt{u}\text{, puis } \boxed{\xi\cot(\xi) = -\sqrt{u}\tanh\left(q\sqrt{u}\right)} \text{ pour (S)}$$

$$\text{et } \boxed{\xi\cot(\xi) = -\sqrt{u}\coth\left(q\sqrt{u}\right)} \text{ pour (A)}$$

Ceci se note encore :

$$\boxed{\tan(\xi) = -\frac{\coth\left(q\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}\xi} \text{ pour (S) et } \boxed{\tan(\xi) = -\frac{\tanh\left(q\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}\xi} \text{ pour (A).}$$

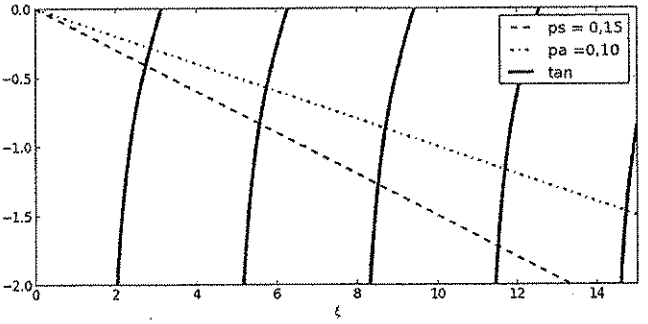
Après avoir identifié avec les formes $\tan(\xi) = -p_S\times\xi$ et $\tan(\xi) = -p_A\times\xi$, il vient :

$$\boxed{p_S = \frac{\coth\left(q\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}} \text{ et } \boxed{p_A = \frac{\tanh\left(q\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}}$$

Pour comparer p_S et p_A il suffit de former le rapport :

$$\boxed{\frac{p_S}{p_A}=\frac{\coth\left(q\sqrt{u}\right)}{\tanh\left(q\sqrt{u}\right)}=\left(\frac{\cosh\left(q\sqrt{u}\right)}{\sinh\left(q\sqrt{u}\right)}\right)^2>1}$$

Compte tenu de l'hypothèse d'étude $u\gg 1$, il vient $\frac{p_S}{p_A}\simeq 1$, ce qui permet de justifier immédiatement la relation $E_{nS}=E_{nA}$. La figure ci-dessous représente les tracés de $\tan(\xi)$, $-0{,}15\xi$ (états S) et $-0{,}10\xi$ (états A) sur l'intervalle $[0{,}5\pi]$. Ce tracé illustre que les valeurs de ξ permettant d'accéder aux valeurs de l'énergie des états stationnaires sont dans l'ordre $\xi_{1S}<\xi_{1A}<\xi_{2S}<\xi_{2A}<\xi_{3S}\cdots$



b) Pour déterminer les valeurs de E_{1S} et E_{1A} dans le cas où $p_S\ll 1$ et $p_A\ll 1$, il faut tout d'abord écrire les formes approchées pour des valeurs de $u\gg 1$:

$$\boxed{p_S=\frac{\coth\left(q\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}\simeq\frac{1}{\sqrt{u}}\left(1+2\mathrm{e}^{-q\sqrt{u}}\right)}\quad\text{et}\quad\boxed{p_A=\frac{\tanh\left(q\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}\simeq\frac{1}{\sqrt{u}}\left(1-2\mathrm{e}^{-q\sqrt{u}}\right)}$$

Après avoir remarqué que ξ_{1S} et ξ_{1A} sont proches de π par valeur inférieure, il est pertinent de poser $\xi_{1S}=\pi-\varepsilon_{1S}$ et $\xi_{1A}=\pi-\varepsilon_{1A}$ avec $\varepsilon_{1S}\ll 1$ et $\varepsilon_{1A}\ll 1$.

La résolution de l'équation $\tan(\pi-\varepsilon)=-p\times(\pi-\varepsilon)$, compte tenu de $\tan(\pi-\varepsilon)=-\varepsilon+\mathrm{O}(\varepsilon^3)\simeq-\varepsilon$ conduit au résultat $\varepsilon=\frac{p}{1+p}\pi$ puis $\xi=\frac{\pi}{1+p}$.

Les valeurs recherchées sont donc $\xi_{1S}=\frac{\pi}{1+p_S}$ et $\xi_{1A}=\frac{\pi}{1+p_A}$.

Elles permettent enfin, à partir de la relation $E=\frac{\hbar^2\xi^2}{2ma^2}$ d'écrire $E_{1S}=\frac{\hbar^2\xi_{1S}^2}{2ma^2}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\frac{1}{(1+p_S)^2}$ et $E_{1A}=\frac{\hbar^2\xi_{1A}^2}{2ma^2}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\frac{1}{(1+p_A)^2}$, puis comme par hypothèse $p_S\ll 1$ et $p_A\ll 1$:

$$\boxed{E_{1S} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1-2p_S)} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{1A} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1-2p_A)}$$

Ces expressions conduisent alors à $E_{1A} - E_{1S} = \frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}(p_S - p_A) = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ma^2}\frac{e^{-q\sqrt{u}}}{\sqrt{u}}$.

Dans le cas d'un puits profond il vient encore $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \simeq \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$, d'où l'on tire la relation approchée $u = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} = \alpha^2a^2$. En prenant en compte $q = \frac{b}{a}$, la différence d'énergie entre les deux premiers niveaux est :

$$\boxed{E_{1A} - E_{1S} = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ma^2}\frac{e^{-\alpha b}}{\alpha a}}$$

Soit encore :

$$\boxed{E_{1A} - E_{1S} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \times \frac{8e^{-\alpha b}}{\alpha a} = \tilde{E}_1 \times \frac{8e^{-\alpha b}}{\alpha a}}$$

où $\tilde{E}_1$ désigne l'énergie de l'état fondamental d'une particule de masse m confinée dans un puits infini de largeur a. L'écart en énergie $E_{1A} - E_{1S}$ est d'autant plus grand que la transmission par effet tunnel à travers la barrière de potentiel est importante (terme en $e^{-\alpha b}$).

c) À l'aide des expressions $E_{1S} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1-2p_S)$ et $E_{1A} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1-2p_A)$, il est facile d'établir l'expression :

$$\boxed{E_{1m} = \frac{E_{1S} + E_{1A}}{2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1 - p_S - p_A) \simeq \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{u}}\right)}$$

En introduisant $\tilde{E}_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ énergie de l'état fondamental d'une particule de masse m confinée dans un puits infini de largeur a, la relation précédente s'écrit sous la forme :

$$\boxed{E_{1m} \simeq \tilde{E}_1\left(1 - \frac{2}{\sqrt{u}}\right)}$$

Cette expression se réécrit encore $\frac{\tilde{E}_1 - E_{1m}}{\tilde{E}_1} = \frac{2}{\sqrt{u}} = \frac{2}{\alpha a}$.

Ce rapport correspond à l'abaissement relatif moyen de l'énergie de l'état fondamental d'une particule de masse m confinée dans un puits infini de largeur a du fait du couplage entre les deux puits quantiques.

L'énergie moyenne est abaissée car, du fait de l'effet tunnel à travers la barrière, le domaine spatial accessible à la particule est plus étendu.

42. Combien d'états liés ? (*)

Il s'agit d'exploiter ici les résultats obtenus au cours de l'exercice **37.**

À l'aide des variables adimensionnées $u=\dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ et $\xi=ka$, les relations de quantification sont pour les états symétriques et antisymétriques respectivement :

$\boxed{\dfrac{\sqrt{u-\xi^2}}{\xi}=\tan\xi}$ pour les états (S) et $\boxed{\dfrac{\sqrt{u-\xi^2}}{\xi}=-\text{cotan}\,\xi}$ pour les états (A).

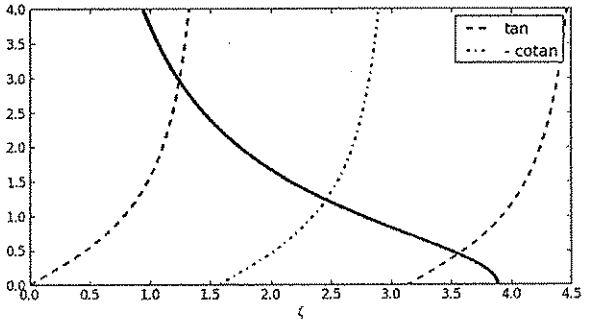
Pour une particule de masse $m=2{,}20\times m_p$ confinée dans un puits de potentiel de largeur $2a=2{,}84\times10^{-15}$ m et de profondeur $V_0=70$ MeV, l'application numérique pour $u=\dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ conduit à $\underline{u=15{,}1}$.

Cette valeur permet de calculer ξ_{max}, valeur pour laquelle $\sqrt{u-\xi_{max}^2}=0$.

Numériquement il vient $\underline{\xi_{max}=3{,}88}$.

Comme $\xi_{max}\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, il peut exister 3 états liés dans ce puits, deux états symétriques et un état antisymétrique. À l'aide de la calculatrice, les valeurs de ξ correspondant à ces trois états sont $\underline{\xi_{1S}=1{,}24}$, $\underline{\xi_{1A}=2{,}46}$ et $\underline{\xi_{2S}=3{,}56}$.

La figure ci-dessous représente la région positive des tracés des expressions $\tan\xi$, $-\text{cotan}\,\xi$ et $\dfrac{\sqrt{15{,}1-\xi^2}}{\xi}$ sur $\left]0,\dfrac{3\pi}{2}\right[$.



La relation $k=\dfrac{\sqrt{2m\left(V_0-|E|\right)}}{\hbar}$ permet enfin de déterminer $E=\dfrac{\hbar^2\xi^2}{2ma^2}-V_0$.

Numériquement il vient $\underline{E_{1S}=-62{,}8\text{ MeV}}$, $\underline{E_{1A}=-41{,}9\text{ MeV}}$ et $\underline{E_{2S}=-11{,}1\text{ MeV}}$.

43. L'oscillateur harmonique

a) La constante A se détermine à partir de la condition de normalisation $\int\limits_{espace} |\psi(\vec{r},t)|^2 \, d\tau = 1$ qui s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \, e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = A^2 a\sqrt{\pi} = 1$ et donne :

$$\boxed{A = \pi^{-1/4} a^{-1/2}}$$

Le calcul de la dérivée seconde de la fonction d'onde $\varphi_0(x)$ donne :

$$\varphi_0''(x) = \frac{A}{a^4}\left(x^2 - a^2\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

Cette expression permet d'écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps sous la forme :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\left(x^2 - a^2\right)}{a^4} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 = E_0$$

puis en ordonnant selon les puissances de x :

$$\frac{1}{2}x^2\left(m\omega_0^2 - \frac{\hbar^2}{ma^4}\right) + \frac{\hbar^2}{2ma^2} - E_0 = 0$$

La nullité des coefficients de ce polynôme conduit à $ma^2 = \frac{\hbar}{\omega_0}$ et $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$.

La fonction d'onde spatiale de l'état fondamental est donc

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)}$$

d'où l'expression complète : $\boxed{\psi_0(x,t) = \varphi_0(x)\, e^{\left(-i\frac{E_0 t}{\hbar}\right)}}$

b) En utilisant $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\phi}{dX} \times \frac{dX}{dx} = \frac{1}{a}\frac{d\phi}{dX}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{a^2}\frac{d^2\phi}{dX^2}$ dans l'équation de Schrödinger il vient :

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{d^2\phi(x)}{dX^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 X^2 \phi(x) = E\,\phi(x)$$

La prise en compte de $ma^2 = \frac{\hbar}{\omega_0}$ permet alors d'écrire :

$$-\frac{\hbar\omega_0}{2}\frac{d^2\phi(x)}{dX^2} + \frac{\hbar\omega_0}{2} X^2 \phi(x) = E\,\phi(x)$$

Diviser les deux membres de cette équation par $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ permet alors d'aboutir à l'équation différentielle :

$$\boxed{-\frac{d^2\phi}{dX^2} + X^2\phi = \varepsilon\,\phi} \quad \text{où } \varepsilon = \frac{E}{E_0}$$

En posant $\phi(X) = A\,H(X)\exp\left(-\frac{X^2}{2}\right)$, il apparaît que $H(X)$ est solution de l'équation :

$$\boxed{\frac{d^2H}{dX^2} - 2X\frac{dH}{dX} + (\varepsilon - 1)H = 0}$$

c) L'identification de $\phi_0(X) = A\,H_0(X)\exp\left(-\frac{X^2}{2}\right)$ à $\varphi_0(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$, avec $X = \frac{x}{a}$, donne $\boxed{H_0(X) = 1}$

L'expression $H_1(X) = X$ injectée dans l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{d^2H}{dX^2} - 2X\frac{dH}{dX} + (\varepsilon - 1)H = 0}$$

fournit la valeur $\varepsilon = 3$ c'est-à-dire $\boxed{E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0}$, puis $\varphi_1(x) = A\,x\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$ et enfin :

$$\boxed{\varphi_1(x) = \frac{2x}{\pi^{1/4}a^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)}$$

La prise en compte de $H_2(X) = 1 + \alpha X^2$ dans l'équation différentielle précédente fournit le polynôme de degré deux $X^2\left[\alpha(\varepsilon - 5)\right] + 2\alpha + \varepsilon - 1 = 0$.

La nullité des coefficients de ce polynôme conduit aux relations $\varepsilon = 5$ et $\alpha = -2$, c'est-à-dire à $\boxed{E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega_0}$ et à la fonction d'onde :

$\varphi_2(x) = A\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$ soit encore :

$$\boxed{\varphi_2(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{a}}\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)}$$

44. Constante de désintégration α (*)

a) La réaction associée à la désintégration est notée ${}^{A+4}_{Z+2}X \rightarrow {}^{A}_{Z}Y + {}^{4}_{2}He$ et le coefficient de transmission tunnel

$$\boxed{T \approx e^{-G} = \exp\left\{\left(-\frac{2}{\hbar}\right)\int_R^b\left[2mU(r) - E\right]^{1/2}dr\right\}}$$

La grandeur G s'écrit donc $G=\frac{2}{\hbar}\int_R^b\left[2mU(r)-E\right]^{1/2}dr$ et $U(r)=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

La prise en compte de la définition de la borne b, à savoir $U(b)=E$, permet alors d'écrire :

$$G=\frac{2}{\hbar}\int_R^b\left[\frac{mZe^2}{\pi\varepsilon_0 r}-\frac{mZe^2}{\pi\varepsilon_0 b}\right]^{1/2}dr=\frac{2}{\hbar}\left(\frac{mZe^2}{\pi\varepsilon_0}\right)^{1/2}\int_R^b\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right]^{1/2}dr$$

Le calcul de cet intégrale se fait en posant $r=b\cos^2(x)$:

$$\int_R^b\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right]^{1/2}dr=2\sqrt{b}\int_0^{\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right)}\sin^2(x)\,dx=\sqrt{b}\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right)-\sqrt{\frac{R}{b}-\frac{R^2}{b^2}}\right]$$

d'où l'expression demandée :

$$\boxed{G=\frac{2}{\hbar}\left(\frac{mZe^2b}{\pi\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right)-\sqrt{\frac{R}{b}-\frac{R^2}{b^2}}\right]}$$

b) La particule α rentre en collision avec les bords du puits toutes les $\frac{2R}{v_n}$ secondes. Elle subit en moyenne $\frac{1}{T}$ chocs avant de pouvoir traverser, ce qui correspond à une durée de vie moyenne au sein du noyau de

$$\boxed{\tau=\frac{2R}{v_n}\times\frac{1}{T}}$$

La constante de désintégration a donc pour expression $\boxed{\Lambda=\frac{1}{\tau}=\frac{v_n e^{-G}}{2R}}$

c) Les valeurs numériques fournies conduisent à $\underline{\Lambda\simeq 2\times10^{-18}\,s^{-1}}$, en bon accord avec les valeurs expérimentales.

Chapitre 9
Thermodynamique

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

constante des gaz parfaits	$R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$

L'air

masse molaire	$M = 29\ g.mol^{-1}$
masse volumique	$\rho = 1{,}2\ kg.m^{-3}$
capacité thermique massique à V = cste	$c_v = 0{,}72\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
capacité thermique massique à P = cste	$c_p = 1{,}0\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

L'eau

masse molaire	$M = 18\ g.mol^{-1}$
masse volumique	$\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$
capacité thermique de l'eau liquide	$c = 4{,}18\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

Le cours d'abord

Écriture différentielle des principes de la thermodynamique

1. Comment définit-on l'énergie interne U d'un système dans le référentiel d'étude ? Le premier principe fait intervenir $U + E_c$; que représente cette grandeur E_c ? Pourquoi n'est-elle pas directement incluse dans U ?

2. Énoncer le premier principe généralisé de la thermodynamique pour une transformation élémentaire d'un système fermé ; commentaires.
Comment s'écrit-il lorsque le système est « purement » thermodynamique ?

3. Pourquoi le premier principe est-il insuffisant ? Donner un exemple.

4. Énoncer le second principe de la thermodynamique pour une transformation élémentaire d'un système fermé et commenter les notions d'entropie échangée et d'entropie créée.

Système ouvert en régime d'écoulement stationnaire

5. Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel (à définir) d'un fluide à travers la section droite S d'une canalisation, établir l'expression des débits volumique D_V et massique D_m en fonction de la vitesse v du fluide sur S et de la masse volumique ρ du fluide, et préciser leur unité.

6. Une portion de canalisation AB parcourue par un fluide en écoulement permanent délimite un système ouvert. La représenter sur un schéma et traduire la conservation de la masse du fluide pour donner un résultat utilisant le débit massique.
À quelle condition le débit volumique se conserve-t-il le long d'une canalisation ? Donner un contre-exemple.
Sur un exemple, pourrait-on énoncer des lois de conservation si le régime n'était pas permanent ?

7. Un fluide circule dans une portion de tuyau en régime permanent avec un débit massique D_m. Quelle relation existe-t-il entre le transfert thermique massique q (en J.kg^{-1}) et la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}$ (en $\text{J.s}^{-1} = \text{W}$) reçus par le fluide ? Quelle est l'origine physique de ce transfert thermique ?

8. Qu'est-ce-qui distingue le travail utile reçu par le fluide (de la part de la machine) du travail total ?
Relier le travail massique utile w_u (en J.kg^{-1}) reçu par le fluide passant à travers le dispositif de la part de la machine et la puissance utile $\mathcal{P}_u$ (en $\text{J.s}^{-1} = \text{W}$).

9. Quelles sont pour un fluide se déplaçant localement à la vitesse $\vec{v}$, et placé dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ à l'altitude z, les expressions de l'énergie cinétique massique e_c et de l'énergie potentielle de pesanteur massique e_p ? Donner leur unité.

10. Préciser les hypothèses et établir l'expression générale du premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine quelconque sous la forme :

$$D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th} \quad \text{ou} \quad \Delta\left(h + e_c + e_p\right) = w_u + q$$

en précisant les notations utilisées (les grandeurs thermodynamiques massiques, intensives, sont notées en minuscules).

11. s est l'entropie massique du fluide et $\dot{S}_{éch.}$ et $\dot{S}_{créée}$ sont les taux de variation d'entropie échangée ou créée par unité de temps. Monter que, dans les mêmes conditions, le second principe pour un fluide en écoulement stationnaire au débit D_m s'énonce :

$$D_m \Delta s = \dot{S}_{éch.} + \dot{S}_{créée} \quad \text{ou} \quad \Delta s = s_{éch.} + s_{créée}$$

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ La notion de « différentielle » peut recouvrir deux points de vue différents, illustrés sur l'exemple suivant :
– point de vue « temporel » : un système d'enthalpie $H = U + PV$ subit une transformation élémentaire au cours de laquelle son enthalpie varie de $dH = dU + d(PV)$, soit puisqu'à la fois la pression et le volume peuvent varier au cours du temps : $dH = dU + VdP + PdV$.
– point de vue « spatial » : en l'absence de transformation, on extrait d'un système homogène d'enthalpie $H = U + PV$ un sous-système élémentaire d'enthalpie $dH = dU + PdV$; seules les variables extensives sont concernées, mais pas la pression, variable intensive. Par unité de masse : $h = u + Pv$.
Il faut donc être vigilant et toujours bien assigner une signification physique aux grandeurs que l'on écrit.

☐ Contrairement à une variable extensive définie globalement pour l'ensemble du système, les grandeurs définies par unité de masse (ou de volume, ou de nombre de moles), sont intensives et locales. C'est aussi le cas des fonctions d'état massiques : u, h, s qui sont intensives et locales.

☐ Les grandeurs énergétiques massiques s'expriment plus volontiers en $J.g^{-1}$ ou ce qui revient au même, en $kJ.kg^{-1}$; pour les applications numériques, ne pas omettre de les convertir en 10^3 $J.kg^{-1}$.

☐ Dans certains problèmes, l'installation à étudier paraît quelquefois complexe de prime abord. Une lecture globale de l'épreuve et surtout une analyse préliminaire du schéma d'ensemble et des notations est conseillée. Par exemple : y a-t-il un seul circuit de fluide avec conservation du débit tout au long de l'installation, ou y a-t-il deux circuits en interaction via un mélangeur et un séparateur ? Ou encore : quels sont les modèles utilisés dans chaque partie (gaz parfait, transformations réversibles,...)
Éviter l'attitude qui consiste à se jeter d'emblée sur la première question pour gagner du temps : dans ce genre d'épreuve, une vision globale est précieuse.

☐ Lors de l'application du 1er principe des systèmes ouverts en régime permanent, énoncer entièrement le théorème avec ses hypothèses.

☐ La loi de Laplace est souvent utilisée (les hypothèses sont : la transformation est adiabatique réversible, le gaz est parfait avec $\gamma = c_p / c_v$ indépendant de T).
À partir de $Pv^\gamma = cste$ et de l'équation d'état des gaz parfaits $Pv/T = cste$, il faut aussi savoir retrouver les autres formes : $P^{1-\gamma}T^\gamma = cste$ et $Tv^{\gamma-1} = cste$, où v est le volume massique.

Il ne s'agit pas de constantes au cours du temps dans la transformation d'un système, mais de constantes dans l'espace (le régime est stationnaire) entre deux éléments d'un fluide, par exemple à l'entrée et la sortie d'une machine.

☐ Pour un liquide seul (pour lequel $h \approx u$, soit $c_p \approx c_v$) ou pour un gaz parfait, la variation d'enthalpie ne dépend que de la variation de température ΔT. Si de plus, $c_p = Cte$ sur le domaine de variation de température, on a la relation $\Delta h = c_p \Delta T$, qui s'écrit entre l'entrée et la sortie d'une machine :

$$h_s - h_e = c_p (T_s - T_e).$$

☐ Appliquée au premier principe des systèmes ouverts dans une machine, la notation « Δ » signifie variation d'une fonction d'état entre l'entrée et la sortie de la machine.
Le premier principe des systèmes fermés s'écrit : $U_f - U_i = W_{reçue} + Q_{reçue}$, ce qui quelquefois conduit naïvement à écrire pour un système ouvert : ~~$\Delta u = w_u + q$~~. Il faut écrire : $\Delta h = w_u + q$ dans le cas où les variations d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables.

☐ Une machine ne possédant *aucune pièce mobile* (comme des pales, des pistons, des hélices,...) ne fournit aucun travail au fluide : le travail massique utile et la puissance mécanique utile sont nuls $w_u = 0$ et $\mathcal{P}_u = 0$. Un fluide dans une conduite calorifugée ne reçoit aucun transfert thermique $q = 0$ et $\mathcal{P}_{th} = 0$.

☐ Dans un tuyau de section constante où s'écoule un fluide incompressible, le débit massique, le débit volumique et la vitesse d'écoulement (supposée uniforme dans une section droite) se conservent. Donc, l'énergie cinétique massique aussi.

☐ Toujours vérifier les signes des travaux.
Pour un compresseur, le travail massique utile fourni par la machine au fluide est positif : $w_{u,compresseur} > 0$ (et donc $\mathcal{P}_{u,compresseur} > 0$) alors que pour une turbine il est négatif : $w_{u,turbine} < 0$ (et donc $\mathcal{P}_{u,turbine} < 0$).
Dans une turbine, le fluide perd de l'enthalpie qui est récupérée par l'extérieur pour être utilisée (pour fabriquer de l'électricité avec un alternateur par exemple). Pour un compresseur, c'est le contraire : il faut payer la compression du fluide.

☐ Un rendement est toujours inférieur à l'unité par définition. À vérifier dans les applications. En revanche, une efficacité peut être plus grande.

Applications directes du cours

Thermodynamique

12. Comment s'écrit le premier principe de la thermodynamique lorsque le système est « purement » mécanique et sans frottement ? Que retrouve-t-on ?

13. Pour un système « purement » thermodynamique pour lequel le seul travail reçu est celui des forces de pression, à quelle variation de fonction thermodynamique s'identifie le transfert thermique : si la transformation est isochore ? si la transformation est isobare ? Donner dans chaque cas l'expression différentielle de cette fonction à l'aide de la capacité thermique massique adaptée.

Écoulements stationnaires

14. Énoncer le premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire, puis indiquer les termes que l'on peut souvent y négliger. Donner des exemples pour lesquels ces termes ne sont pas négligeables (un contre-exemple pour chaque approximation lorsqu'elle n'est pas possible).

15. Calculs de débits

Un tuyau de section constante $S = 10\ \text{cm}^2$ transporte de l'eau liquide de masse volumique $\rho = 1\ \text{kg.L}^{-1}$ en régime permanent à la vitesse uniforme $v = 2\ \text{m.s}^{-1}$.

a) Quelles sont les valeurs numériques du débit volumique et du débit massique de l'eau dans le tuyau ?

b) Exprimer l'énergie cinétique du liquide passant à travers une section S pendant le temps dt. Définir et donner l'expression du débit d'énergie cinétique du tuyau ; quelle est sa valeur, son unité ? Évaluer également la densité massique d'énergie cinétique.

c) Comment pourrait-on concrètement récupérer la puissance mécanique correspondante ?

16. Importance des termes

Pour une turbine à gaz (de capacité thermique massique à pression constante $c_p \approx 1\ \text{kJ.kg}^{-1}$) où la température chute de 20°C entre l'entrée et la sortie, où la vitesse des gaz est $v \approx 10\ \text{m.s}^{-1}$, et la différence d'altitude entre l'entrée et la sortie de l'ordre du mètre, évaluer l'importance relative des différents termes intervenant dans le premier principe des systèmes ouverts et conclure.

17. Puissance fournie par une turbine à air

Une turbine à air (considéré comme un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1{,}4$ et de masse molaire $M = 29\ \text{g.mol}^{-1}$) est supposée entièrement calorifugée. Le gaz y subit une détente que l'on peut considérer comme adiabatique réversible, et possède un débit $D_m = 100\ \text{kg.s}^{-1}$. La turbine fonctionne avec, à l'entrée, une pression $P_e = 200$ bar et une température $T_e = 350\ °\text{C}$ et à la sortie une pression $P_s = 19$ bar.

On donne $R = 8{,}31\ \text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$, et on rappelle pour le gaz parfait : $c_P = \dfrac{\gamma R}{(\gamma - 1)M}$

a) Calculer la température de sortie T_s.

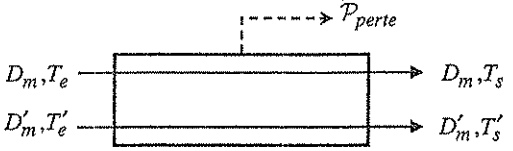
b) Calculer la puissance fournie par l'arbre de la turbine (à un alternateur par exemple).

18. Échangeur thermique

On considère un échangeur thermique, isolé de l'extérieur à deux entrées et deux sorties fonctionnant avec deux liquides identiques de capacité thermique à pression constante c_P (supposée constante). Le premier fluide entre en e et sort en s ; il a un débit massique D_m. Le second fluide entre en e' et sort en s', avec un débit D'_m.

a) En appliquant le premier principe des systèmes ouverts en régime stationnaire à un système à préciser, donner une relation entre les débits massiques, les températures d'entrée T_e et T'_e et les températures de sortie T_s et T'_s.

b) Comment serait modifiée cette relation s'il existait des pertes thermiques des fluides vers l'extérieur correspondant à une puissance thermique $\mathcal{P}_{perte}$?



c) Ici, $\mathcal{P}_{perte} = 0$. L'échange thermique est supposé « parfait » entre les deux liquides (la surface de contact est très grande et le temps de contact très long). Quelle relation supplémentaire peut-on en déduire ?
AN : $T_e = 80\ °\text{C}$, $T'_e = 20\ °\text{C}$, $D_m = 2\ \text{kg/s}$, $D'_m = 8\ \text{kg/s}$, calculer T_s et T'_s.

19. Échauffement isobare

Un liquide de capacité thermique constante $c_P = 4\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ est en écoulement permanent, de débit massique $D_m = 2{,}0\ \text{kg.s}^{-1}$, à travers un thermostat isobare idéal (à définir) de température $T_s = 60\ °\text{C}$. Les températures d'entrée et de sortie du liquide sont respectivement $T_e = 15\ °\text{C}$ et $T_s = 60\ °\text{C}$.

a) Quelle est la puissance thermique cédée au fluide par le thermostat ?
On donne l'identité thermodynamique $dh = vdP + Tds$ où v est le volume massique.

b) Calculer la variation d'entropie massique du liquide entre l'entrée et la sortie $\Delta s = s_s - s_e$.

c) En appliquant le deuxième principe des systèmes ouverts en régime stationnaire, calculer l'entropie créée massique $s_{créée}$ ainsi que le taux de création d'entropie $\dot{S}_{créée}$ (ou entropie créée par unité de temps) dans le fluide. Étudier le signe du résultat et commenter.

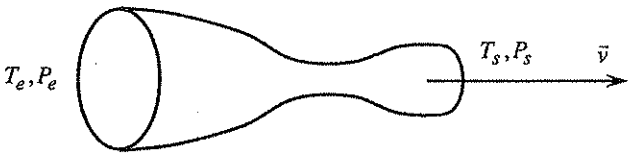
d) Qualitativement et sans aucun calcul, comment varierait ce résultat si le fluide passait de T_e à T_s grâce à deux échangeurs, le premier à une température intermédiaire entre T_e et T_s, et le deuxième à T_s ?

20. Tuyère

Une tuyère horizontale calorifugée éjecte, en régime permanent d'écoulement, « de l'air » à vitesse v élevée, celui-ci entrant avec une vitesse négligeable. Les notations sont précisées sur le schéma. On note $r = R/M$ où M est la masse molaire.

On donne : $T_e = 1600$ K , $P_e = 52$ bar , $T_s = 550$ K , $P_s = 1{,}0$ bar ,

$$c_P = 1{,}0 \text{ kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1} \quad \text{et} \quad r = R/M = 290 \text{ J.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}.$$



a) En précisant les hypothèses, calculer la vitesse v d'éjection de l'air.

b) La détente est-elle ici adiabatique réversible ?

On donne l'identité thermodynamique $du = Tds - Pdv_m$ où v_m est le volume massique.

c) Montrer que pour un gaz parfait la variation d'entropie massique est donnée par $ds = \frac{r}{\gamma - 1}\left[\gamma \frac{dT}{T} + (1-\gamma)\frac{dP}{P}\right]$. En déduire l'entropie massique créée $s_{crée}$ (entropie créée par unité de masse de gaz traversant la tuyère) et la calculer numériquement.

21. La détente de Joule-Thomson

La détente de Joule-Thomson est une détente lente (ou quasi statique) et stationnaire d'un gaz au travers d'un milieu poreux, l'ensemble étant thermiquement isolé (parois calorifugées). Proposer un schéma du dispositif et lui appliquer le 1er principe des systèmes ouverts en régime permanent. Quelle est la grandeur qui se conserve ? Quel est l'effet thermique sur un gaz parfait, sur un gaz réel ? Cette détente est-elle réversible ? Quel est son intérêt ?

Données : l'entropie de n moles de gaz parfait idéal (C_{Pm} indépendant de T) est :

$$S(T,P) = S_0' + nC_{Pm} \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0}$$

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

22. Préciser sur un exemple la différence entre un régime d'écoulement permanent, un état d'équilibre statique, et donner un exemple de régime non permanent.

23. L'eau ayant une grande capacité thermique et un coût très faible, elle est le fluide « caloporteur » par excellence : expliquer ce que cela signifie.
Quel peut être alors l'intérêt d'utiliser l'huile comme cela est parfois le cas (fluide de refroidissement de transformateur, radiateur électrique à bain d'huile...) ?

24. Pour faire de l'eau tiède à 37 °C, un mélangeur de douche utilise de l'eau froide à 12 °C et de l'eau chaude à 65 °C. Calculer le rapport x des deux débits d'eau froide et d'eau chaude. Pour quelle raison la température de l'eau chaude est-elle si élevée ?

25. Un torrent dévale la montagne sur un dénivelé de 1000 m, et du fait des frottements internes (viscosité et frottement contre les rochers), sa vitesse reste pratiquement constante.
Pour simplifier, la descente de l'eau étant rapide, on suppose son évolution adiabatique ; il n'y a donc dans ce modèle aucun transfert thermique avec le sol ou avec l'air extérieur.

a) Appliquer à ce cas le premier principe des systèmes ouverts en régime permanent, et en déduire l'augmentation de température de l'eau au cours de la descente.

AN : la capacité thermique de l'eau est $c_P = 4\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$.

b) Comparer ce résultat avec la différence de température de l'air entre le haut et le bas de la montagne (le gradient de température habituel est de l'ordre de $6\ \text{K.km}^{-1}$) et conclure.

26. Une installation de chauffage à gaz naturel (méthane) fonctionne en régime permanent avec un brûleur de débit volumique de gaz (pression et température ordinaires) de $D = 0{,}15\ \text{L/s}$. Sachant que le pouvoir calorifique du méthane est de $p = 820\ \text{kJ.mol}^{-1}$, calculer le débit d'eau nécessaire dans l'installation de chauffage pour avoir de l'eau chaude (capacité thermique $c_P = 4{,}18\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$) à $T_s = 85\ °\text{C}$ en sortie si la température à l'entrée de la chaudière est $T_e = 10\ °\text{C}$.
Calculer le « débit financier » en €/ mois (hors entretien) de l'installation sachant que le prix TTC du gaz naturel (hors abonnement) est d'environ 0,68 €/m^3.
Quelle justification peut-on avancer pour ne pas utiliser une pompe à chaleur d'une bonne efficacité $\eta = 2{,}8$ sachant que l'électricité est facturée TTC (hors abonnement) en heures creuses 0,10 €/kWh et en plein tarif 0,15 €/kWh ?

27. Expliquer ce qu'est une chaudière à condensation et quel est son intérêt.

28. La majorité des machines thermiques sans combustion utilisent les changements d'état des fluides. Quelle en est la raison ? Ne pourrait-on pas utiliser simplement des gaz échangeant de l'énergie par transfert thermique et travail ?

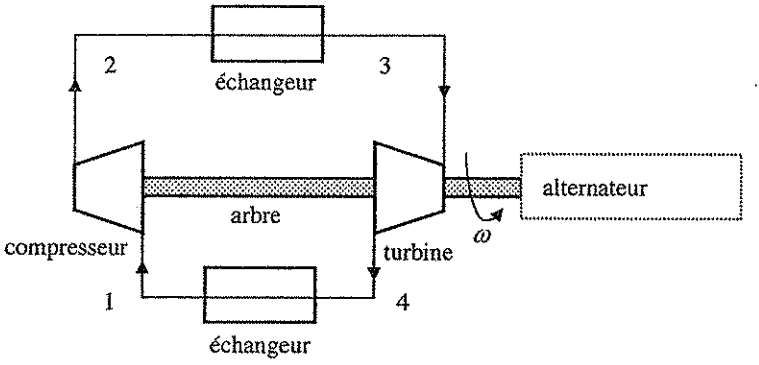
29. Expliquer qualitativement le fonctionnement de la climatisation d'une voiture.

30. Quelle est la fonction d'une tuyère ? Donner des exemples d'utilisation.

31. Cycle moteur de Joule d'une turbine à gaz

Dans le cycle de Joule idéal, un fluide circulant en circuit fermé avec un débit massique D_m, assimilable à un gaz parfait (pas de changement d'état), de coefficient $\gamma = Cte$, subit à partir de l'état (1) à (P_1,T_1), une compression adiabatique réversible où il reçoit un travail massique w_C pour arriver à l'état (2) à (P_2,T_2).

Il reçoit ensuite la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}$ correspondant au transfert thermique massique $q>0$ dans un échangeur isobare où sa température passe à la valeur T_3, puis il se détend de manière adiabatique réversible dans la turbine où il reçoit le travail massique $w_T<0$ pour arriver à l'état (4) à (P_4,T_4).



Enfin, il se refroidit dans un autre échangeur isobare où il reçoit le transfert thermique massique $q'<0$ pour revenir à (P_1,T_1).

Les échangeurs ne contiennent aucune pièce mobile et la turbine et le compresseur sont couplés par le même arbre : la turbine fait tourner le compresseur et fournit la puissance excédentaire $\mathcal{P}$ à l'alternateur correspondant au travail w par unité de masse de fluide. On pose $x=\frac{P_2}{P_1}$ appelé rapport de compression.

a) Indiquer les transformations subies, représenter le cycle en diagramme de Clapeyron, et y faire apparaître les transferts thermiques et travaux en précisant leur signe.

b) Définir l'efficacité η de ce moteur thermique, et l'exprimer d'abord en fonction des quatre températures.

c) Démontrer la relation $T_2T_4=T_1T_3$ et donner η en fonction de x et de γ. Montrer que η est inférieur à l'efficacité maximale d'un cycle de Carnot à deux sources à T_1 et T_3. Application numérique pour η avec $P_1=1$ bar, $P_2=5$ bar et $\gamma=1{,}4$.

d) Dans une turbine à gaz, l'échangeur chaud est un brûleur où l'introduction d'une faible quantité de carburant dans l'air donne une combustion. On trouve ensuite

des résidus de combustion chauds, et tout se passe comme si le transfert thermique dû à la réaction chimique exothermique avait été apportée de l'extérieur au fluide.
Souligner les différences avec le cycle de Joule étudié, mais prouver que les résultats sont néanmoins applicables.
La combustion apporte un transfert thermique de 920 kJ par kg d'air. La capacité thermique de l'air est $c_P = 1{,}0\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$ et $T_1 = 20\ °\text{C}$. On conserve les autres valeurs numériques du c) : calculer T_2, T_3 et T_4. Commenter.

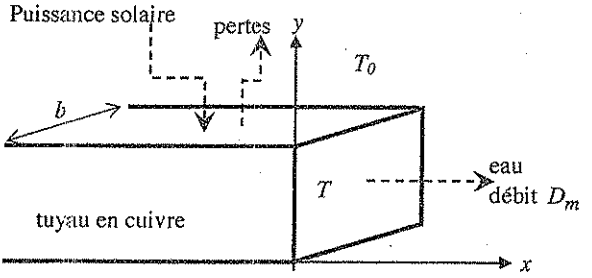
e) Pour ne pas abandonner de transfert thermique en pure perte dans le refroidisseur isobare, on pense à utiliser les gaz d'échappement à T_4 : on choisit donc de les faire passer dans un autre échangeur isobare destiné à réchauffer le gaz (2) à la sortie du compresseur. On parvient ainsi en (2') avant le brûleur, à une température $T_2' = 420\ °\text{C}$. Proposer un nouveau schéma, calculer la nouvelle l'efficacité η' et commenter le résultat.

32. Chauffe-eau solaire

Un chauffe-eau solaire de toit à utilisation domestique est modélisé par un tuyau d'axe Ox à section rectangulaire en cuivre de largeur b, peint en noir (pour absorber le rayonnement) reposant par sa face inférieure sur un isolant thermique, et exposé au soleil par sa face supérieure. Les faces latérales verticales sont également calorifugées et ne reçoivent aucun rayonnement.
Le tuyau est parcouru par un courant d'eau permanent dans la direction de l'axe x et de débit massique D_m.

La capacité thermique de l'eau est constante : $c_P = 4{,}2\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$

La lumière solaire est entièrement absorbée par le tuyau. L'éclairement du tuyau (puissance solaire reçue par unité de surface de tuyau) est noté E. On étudie le régime permanent d'écoulement une fois celui-ci établi. Le régime transitoire de montée progressive en température n'est pas abordé : donc la température ne dépend pas du temps et $T = T(x)$.



Le cuivre étant un excellent conducteur de la chaleur, on peut supposer que tout le métal, y compris sa face noircie exposée, est à la même température $T(x)$ que l'eau dans le tuyau à la même abscisse x.

Les seuls transferts thermiques envisagés se font suivant y (pas de diffusion thermique dans le sens x de la convection, ni dans l'eau, ni dans le cuivre).
Si l'air extérieur est plus froid que le tuyau, à la température $T_0 < T$, il y a inévitablement des pertes thermiques vers l'atmosphère (ou un gain si l'air extérieur est plus chaud).

a) Préciser l'origine physique de ces pertes, et justifier qu'elles peuvent s'écrire par unité de longueur de tuyau sous la forme : $\frac{d\mathcal{P}_{perte}}{dx} = \alpha b(T - T_0)$ où α est une constante dont l'expression n'est pas demandée.

b) Appliquer le premier principe des systèmes ouverts en régime stationnaire à l'eau contenue dans une portion de tuyau de longueur dx. Poser $y(x) = T(x) - T_0$; à quelle équation différentielle obéit $y(x)$?

c) Résoudre cette équation en supposant que l'eau est introduite à l'entrée du tuyau, en $x = 0$ à une température T_1 et en faisant apparaître une dimension caractéristique L du problème. Le débit massique étant imposé par le cahier des charges, quelle longueur de tuyau faut-il choisir pour optimiser le dispositif ? Pourquoi est-il préférable de placer l'ensemble sous une vitre transparente ?

d) Application numérique : en été, avec la vitre, $T_0 = 50°C$, $T_1 = 18$ °C, $b = 4$ cm, $D_m = 50$ kg/h, $E = 800$ W/m^2. Trouver la valeur de α grâce à l'expérience préliminaire suivante : sans aucun débit d'eau, on attend le régime permanent, et on trouve une température constante $T = 86$ °C.
Puis évaluer la température limite que peut atteindre l'eau avec le débit D_m et la longueur à donner au tuyau. Donner enfin l'allure du graphe de $T(x)$.

e) En hiver, l'inclinaison des rayons et la nébulosité diminuent l'éclairement à $E = 450$ W/m^2. La température sous la vitre prend la valeur $T_0 = 14$ °C et l'eau est plus froide à l'entrée : $T_1 = 8$ °C. Calculer la température de sortie pour la même longueur de tuyau et pour le même débit D_m. Le chauffe-eau solaire conserve-t-il un intérêt ?

33. Installation frigorifique

On modélise le comportement thermodynamique du fluide dans une machine frigorifique à fluide diphasé par la succession de transformations suivantes :
- compression adiabatique réversible en phase gazeuse du point d'équilibre A au point d'équilibre B ; au point A, le fluide est à l'état de vapeur saturante.
- refroidissement isobare de la vapeur du point B au point d'équilibre C ; au point C, le fluide est à l'état de vapeur saturante.
- liquéfaction isobare et totale du fluide du point d'équilibre C au point d'équilibre D ; au point D, le fluide est à l'état de liquide saturant.
- détente adiabatique irréversible du fluide que l'on peut ici modéliser par une détente isenthalpique entre le point d'équilibre D et le point E (qui se trouve dans un état d'équilibre liquide-vapeur).
- vaporisation totale du fluide du point d'équilibre E au point d'équilibre A.

On donne les enthalpies massiques du fluide aux points A, B et D :

$h_A = 1167\ \text{kJ.kg}^{-1}$, $h_B = 1355\ \text{kJ.kg}^{-1}$ et $h_D = 30\ \text{kJ.kg}^{-1}$

a) Représenter le cycle en diagramme de Clapeyron, l'orienter, et calculer les transferts thermiques massiques q_c et q_f reçus par le fluide, au cours d'un cycle, respectivement au contact des sources chaude et froide.

b) Estimer le coefficient d'efficacité η de la machine frigorifique.

c) La phase gazeuse, de capacité thermique massique à pression constante c_P, peut être assimilée à un gaz parfait. On note T_B la température du fluide au point B et T_C sa température au point C. Exprimer littéralement l'enthalpie massique de vaporisation $l_V(T_C)$ du fluide à la température T_C en fonction des données.

d) Le titre massique en vapeur x est défini comme le rapport de la masse de vapeur sur la masse totale de fluide. Calculer numériquement le titre massique en vapeur x_E au point E sachant que la chaleur latente de vaporisation du fluide à la température T_A au point A est $l_V(T_A) = 1293\ \text{kJ.kg}^{-1}$.

e) On utilise cette installation frigorifique pour maintenir constante la température d'une chambre froide à laquelle il faut enlever 5 000 kJ par heure. Sachant que la machine fonctionne en régime stationnaire, calculer le débit massique D_m du fluide frigorifique.

34. Détente adiabatique dans une turbine

Une turbine calorifugée, conçue pour travailler sans liquide, détend une vapeur d'eau sèche issue d'un surchauffeur à la température $T_e = 380\ °\text{C}$ et à la pression $P_e = 10$ bar jusqu'à la pression $P_s = 1{,}0$ bar.

On donne un extrait du diagramme (T,s) de l'eau pure. Les isobares (en bar) sont représentées en trait plein et les courbes de même enthalpie (en kJ/kg) en pointillé.

a) Que représente la courbe en gras ?

b) Positionner le point e représentant la vapeur à l'entrée. La vapeur est-elle sèche ou saturante ?

c) La détente est d'abord supposée réversible.

α) Tracer sur le diagramme la courbe d'évolution du fluide et le point s correspondant à l'état de sortie.

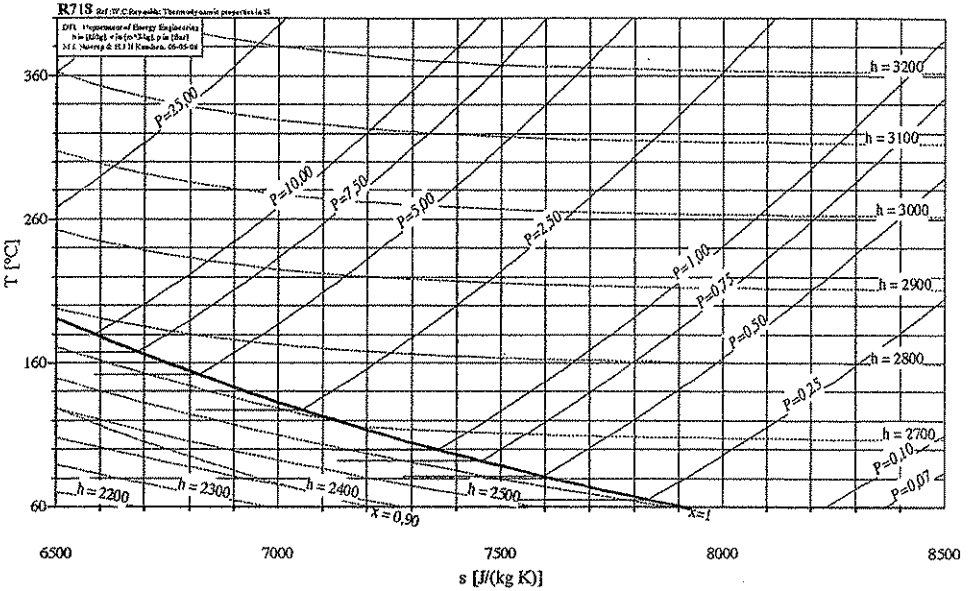
β) La vapeur en sortie est-elle sèche ? Quelle est sa température de sortie T_s ? Quel est le travail massique utile de détente w_u ? Jusqu'à quelle pression pourrait-on détendre isentropiquement la vapeur sans faire apparaître de liquide ?

d) En réalité la détente est irréversible.

Les pressions d'entrée et de sortie sont encore $P_e = 10$ bar, et $P_s = 1{,}0$ bar mais la température de sortie réelle est mesurée à : $T'_s = 150°\text{C}$.

α) Positionner sur le diagramme le point s' correspondant à l'état de sortie. Mesurer l'entropie créée massique.

β) La vapeur en sortie est-elle sèche ? Quel est le travail utile de détente w'_u ? Commenter le résultat, définir et calculer un « rendement » isentropique de la turbine.



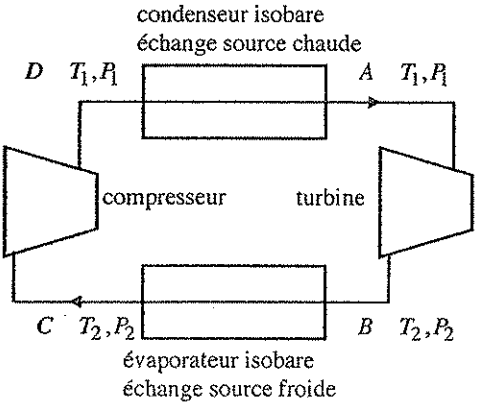
35. Réfrigérateur à ammoniac

Pour optimiser l'efficacité d'une machine frigorifique, il faut s'approcher du cycle de Carnot théorique constitué de deux isothermes à T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$ et de deux adiabatiques (une détente du point A au point B du cycle de P_1 à P_2 et une compression du point C au point D du cycle de P_2 à P_1).

De plus pour des échanges de chaleur importants, sans utiliser de trop grandes quantités de fluide, on utilise des changements d'état. On suppose donc que l'ammoniac décrit l'intégralité du palier de changement d'état à T_1 ;

le fonctionnement se fait en circuit fermé et en régime permanent avec une circulation continue d'ammoniac pur au débit massique D_m.

On considère l'installation ci-contre. Dans le condenseur et l'évaporateur isobares, le fluide est diphasé, donc la température reste aussi constante. De façon classique, le travail récupéré à la turbine est fourni au compresseur,

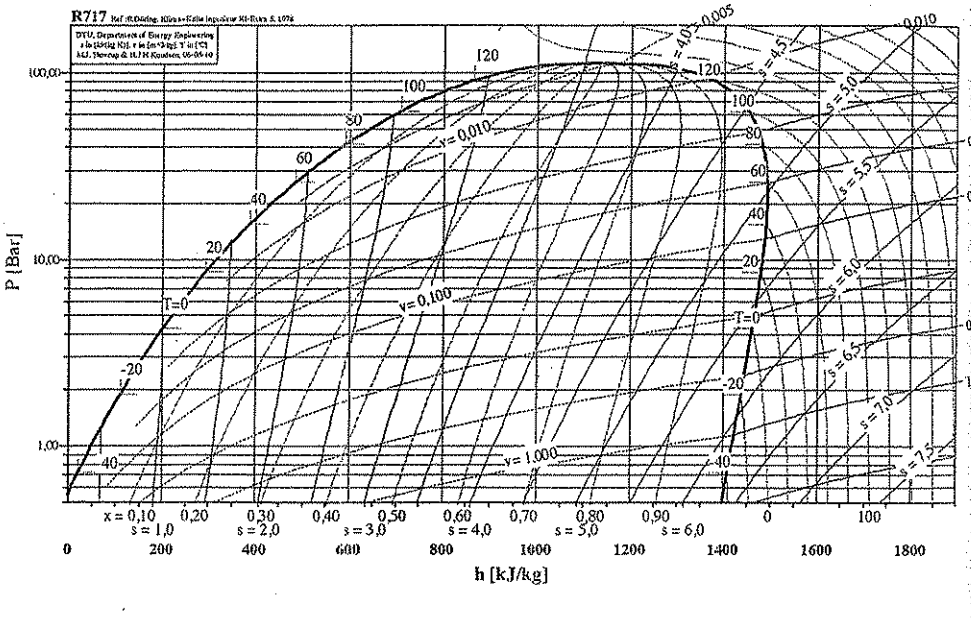


ce qui limite la dépense pour alimenter ce dernier.

a) Placer dans un diagramme (T,s), la courbe de saturation et tracer le cycle de Carnot théorique *ABCD* que décrirait le fluide.

b) On fixe d'abord les températures à $T_1 = 40\,°C$ et $T_2 = -20\,°C$. Justifier ces valeurs si la source chaude (air extérieur) est à 30°C et l'intérieur du « réfrigérateur » à $-5\,°C$. Cela modifie-t-il l'étude théorique ?

c) On donne ci-dessous le diagramme $(\ln P,h)$, encore appelé diagramme de Mollier des frigoristes, pour l'ammoniac. Les isentropiques (notées s, valeurs en $kJ.K^{-1}.kg^{-1}$) y sont tracées en trait plein, les isochores (notées v, valeurs en $m^3.kg^{-1}$) en pointillé et les isothermes apparaissent en pointillé dans la partie droite (vapeur) où elles sont différenciées, elles ne sont pas tracées dans la courbe de saturation, les valeurs de températures sont en °C et rappelées sur la courbe de saturation. Attention l'échelle des pressions est logarithmique.
Les courbes suivies par le fluide dans ses transformations seront assimilées à des portions de droite et les valeurs numériques entre deux courbes données seront interpolées linéairement.
Mesurer les pressions P_1 et P_2, puis tracer le cycle de Carnot *ABCD*. Calculer l'efficacité de Carnot η_C en fonction de T_1 et T_2 et commenter le résultat.



d) Dans la pratique, on n'utilise pas de turbine de détente adiabatique : elles ont un mauvais rendement en mélange liquide-vapeur, et sont complexes et chères. Bien plus simple est l'utilisation d'un détendeur calorifugé simple, sans pièce mobile

(souvent un simple rétrécissement). Montrer que ce détendeur est isenthalpique et tracer la nouvelle portion AB' sur le diagramme.

e) On ne comprime pas non plus le mélange diphasé du point C au point D, ceci risquerait d'endommager le compresseur. On préfère décrire l'intégralité du palier d'évaporation à T_2 jusqu'au point C' avant de comprimer la vapeur sèche de façon adiabatique réversible jusqu'à P_1. Tracer le nouveau cycle $AB'C'D'A$ décrit par l'ammoniac. Quelle est la température maximale atteinte, et quel problème cela peut-il poser ?

f) Sachant qu'on veut extraire 1,0 kW thermique de la source froide, calculer le débit massique du fluide, la puissance électrique à fournir au compresseur dont le moteur électrique a un rendement $r = 0{,}9$, le débit volumique qu'il aspire, ainsi que la puissance thermique que doit absorber la source chaude.

Calculer l'efficacité de ce cycle réfrigérateur, peut-on la comparer à celle du cycle de Carnot ?

36. Régulation thermique avec une pompe à chaleur

Certaines pompes à chaleur possèdent la particularité de pouvoir fonctionner avec une puissance réglable en ajustant la vitesse de rotation du compresseur (système breveté par plusieurs marques). Ceci peut être mis à profit pour la régulation de température, obligatoire dans le cas du chauffage d'une maison.

La modélisation et les notations suivantes sont adoptées :

T_0 : Température extérieure supposée constante.

T_C : Température de consigne constante (affichée sur le thermostat dans la maison).

T : Température courante de la maison (dépend du temps, mais supposée uniforme en première approximation).

C : Capacité thermique totale de la maison

La pompe à chaleur commandée électroniquement restitue de façon instantanée à la maison une puissance thermique proportionnelle à l'écart avec la consigne *via* une constante $\beta > 0$, soit : $\mathcal{P} = \beta(T_C - T)$.

Les inévitables pertes thermiques de la maison sont proportionnelles à l'écart avec la température extérieure *via* une constante $H > 0$, soit : $\mathcal{P}_p = H(T - T_0)$.

a) Quelle est l'unité de β ? Quel est son ordre de grandeur ?

b) Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit la température T. Quelle est la température limite T_l atteinte en régime permanent ?

Quel est l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour l'atteindre ? (aucune application numérique n'est demandée ici).

Que vaut l'erreur statique ? Commenter les résultats.

c) Représenter, avec des boucles de réaction, la situation sur un schéma bloc dont l'entrée est la consigne T_C et la sortie T.

Quel élément correcteur simple, et en quelle position, faudrait-il insérer dans le schéma bloc précédent pour supprimer l'erreur statique et obtenir ainsi la température de consigne ? Commenter.

d) Quel serait dans ce modèle l'hypothèse la plus grossière à améliorer en priorité ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

■ Écriture différentielle des principes de la thermodynamique

1. L'énergie interne, $U = E_c^{micro} + E_p^{micro}$, est l'énergie propre au système. C'est la somme des énergies cinétiques microscopiques d'agitation thermique des particules (atomes, ions, molécules,...) et de l'énergie potentielle d'interaction entre elles.
L'intérêt de cette grandeur *a priori* compliquée (car microscopique avec de nombreux paramètres) réside dans le fait que la thermodynamique permet justement d'en donner une expression simple en fonction des variables thermodynamiques (et donc macroscopiques) caractérisant le système : penser à la définition cinétique de P et T par exemple ; on dit que U est une fonction d'état.

Mais un système peut aussi emmagasiner de l'énergie cinétique : E_c est l'énergie cinétique macroscopique du système dans son mouvement d'ensemble lorsqu'il est mobile dans le référentiel d'étude.

2. Énoncé du premier principe
Pour un système fermé, lors d'une transformation élémentaire :

$$\boxed{d(U + E_c) = \delta W + \delta Q}$$

où δW représente le travail total des actions extérieures au système, algébriquement reçu et δQ, le transfert thermique algébriquement reçu ; il s'agit de quantités élémentaires, ce ne sont pas des différentielles.

Rq 1 : Dans δW, le travail des forces extérieures conservatives dérivant d'une énergie potentielle peut aussi s'écrire, par définition de l'énergie potentielle : $-dE_p$. On peut alors nommer énergie totale la grandeur :

$$E = U + E_c + E_p$$

Rq 2 : Dans δW, il ne faut pas tenir compte des actions intérieures (entre les différentes parties du système) ; certes, elles peuvent travailler (et modifier U, membre de gauche) si le système est déformable, mais leurs travaux n'interviennent pas dans le premier principe de la thermodynamique (membre de droite) à voir comme un bilan de tout ce qui est apporté de l'extérieur. En revanche, ces travaux des actions intérieures interviennent en mécanique dans le théorème de l'énergie cinétique.

Physiquement, cela signifie que le travail et le transfert thermique apportés au système peuvent aussi avoir un effet sur l'énergie cinétique de ce système.

Cas particulier important :
Le système est « purement » thermodynamique, c'est-à-dire macroscopiquement au repos dans le référentiel d'étude, alors $dE_c = 0$ puisque son énergie cinétique macroscopique ne varie pas. Le premier principe s'écrit sous la forme simplifiée :

$$\boxed{dU = \delta W + \delta Q}$$

la variation $dU = U(t + dt) - U(t)$ ne dépend que des états aux deux instants, elle est indépendante du chemin suivi, mais δW et δQ eux en dépendent.

3. Le premier principe (ou principe de conservation) ne suffit pas car l'équivalence « chaleur / travail » ne peut pas se faire dans n'importe quel sens ; il manque la « flèche du temps » donnée par le second principe (ou principe d'évolution).

Exemple : Une voiture freine brusquement, le contact avec frottements entre les disques et les plaquettes de frein conduit à un échauffement. Et pourtant le refroidissement du dispositif ne permet pas de rendre le mouvement (l'énergie cinétique) au véhicule alors que le premier principe ne l'interdit pas.

4. Le second principe stipule qu'il existe une fonction d'état des variables thermodynamiques, appelée entropie S, extensive, et dont la variation au cours d'une transformation élémentaire d'un système fermé est :

$$\boxed{dS = \delta S_{éch.} + \delta S_{créée}} \text{ avec } \boxed{\delta S_{éch.} = \sum_i \frac{\delta Q_i}{T_{ext.,i}}} \text{ et } \boxed{\delta S_{créée} \geq 0}$$

où $T_{ext.,i}$ est la température du thermostat i en contact avec le système et lui fournissant δQ_i. La somme porte sur l'ensemble des thermostats (ou sources) avec lesquels le système est en contact pendant la transformation (transformation polytherme).

Lorsque la source est unique : $\boxed{\delta S_{éch.} = \frac{\delta Q}{T_{ext.}}}$

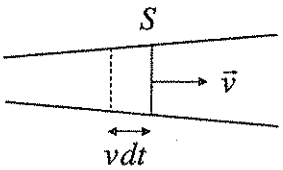
* Le terme d'échange est lié aux transferts thermiques. Ainsi, pour une transformation adiabatique (ou considérée comme telle si sa durée est très inférieure au temps caractéristique des échanges thermiques) et pour laquelle $\delta Q = 0$, il n'y a pas d'entropie échangée soit $\delta S_{éch.} = 0$.
* En particulier pour un système isolé (pour lequel entre autres $\delta Q = 0$), on a $\delta S_{éch.} = 0$ soit $dS = \delta S_{créée} \geq 0$; l'entropie est alors constante ou augmente au cours du temps, ce qui permet de prévoir sans ambiguïté le sens de l'évolution du système.
* Si l'entropie d'un système isolé augmente lors d'une transformation, la transformation inverse ne peut pas se faire par le même chemin (car l'entropie diminuerait) : la transformation est dite irréversible.
* Pour une transformation réversible , il n'y a pas d'entropie créée : $\delta S_{créée} = 0$ (alors l'équilibre réalise à tout moment $T = T_{ext.}$).

* Au cours d'une transformation adiabatique ($\delta S_{éch.} = 0$) et réversible ($\delta S_{créée} = 0$), on a conservation de l'entropie soit $dS = 0$ (isentropique) ; mais on peut avoir pour une autre transformation $dS = 0$ avec $\delta S_{créée} > 0$ et $\delta S_{éch.} < 0$.

Le second principe traduit que l'entropie (une grandeur extensive) est non conservative (et ceci même pour un système isolé, contrairement à l'énergie interne) car sa variation n'est pas uniquement liée à un terme d'échange mais également à un terme de création. Cette variation ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final.
Le terme de création mesure physiquement l'irréversibilité de la transformation : plus ce terme est élevé, plus la transformation est irréversible.
Le second principe permet de mettre en évidence l'impossibilité de certaines transformations dites irréversibles, les sources d'irréversibilité se trouvant dans les « chocs » de paramètres intensifs, les frottements solides , la diffusion, l'hystérésis, les réactions chimiques ou nucléaires,...
Par exemple, un « choc » de température entre un corps chaud et un corps froid entraîne une irréversibilité thermique et un « choc » de pression une irréversibilité mécanique.

■ Système ouvert en régime d'écoulement stationnaire

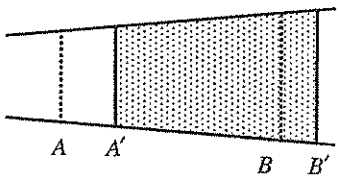
5. Pour un écoulement unidimensionnel, les variables vitesse, température, pression, masse volumique... sont uniformes sur une section droite S du tuyau et ne dépendent que de la coordonnée le long de l'écoulement.
Le volume qui passe à travers S pendant dt est contenu dans une longueur vdt (profil de vitesse v uniforme sur S) et vaut donc : $dV = S\,v\,dt$. Sa masse est $dm = \rho\,dV = \rho S\,v\,dt$ (ρ est la masse volumique du fluide sur la section S). On en déduit les débits volumique et massique :



$$\boxed{D_V = \frac{dV}{dt} = Sv} \text{ (en } m^3.s^{-1}\text{)} \quad \text{et} \quad \boxed{D_m = \frac{dm}{dt} = \rho S v = \rho D_V} \text{ (en } kg.s^{-1}\text{)}$$

6. Le <u>système ouvert</u> AB est délimité par les pointillés sur le schéma (surface de contrôle) ; à cause de l'écoulement, dans ce volume fixe entre et sort de la matière.
Le raisonnement porte sur un <u>système fermé</u> : il s'agit du fluide contenu dans AB à l'instant t. Le fluide se déplaçant, à l'instant $t + dt$, il se retrouve dans $A'B'$ (en grisé).
La masse de ce système fermé est constante :

$$m_{AB} = m_{A'B'} \text{ notée } m$$



Avec des notations évidentes :
– à l'instant t : $m = m_{AB} = dm_{AA'} + m_{A'B}(t)$
– à l'instant $t + dt$: $m = m_{A'B'} = m_{A'B}(t + dt) + dm_{BB'}$
Le régime étant permanent la masse de la partie commune est constante :

$$m_{A'B}(t) = m_{A'B}(t+dt)$$

On en déduit $dm_{AA'} = dm_{BB'}$; ces masses (infiniment petites) sont celles passant à travers les pointillés pendant l'intervalle de temps dt.

Les débits massiques à l'entrée $\frac{dm_{AA'}}{dt}$ et à la sortie $\frac{dm_{BB'}}{dt}$ sont donc égaux.

En régime permanent, le débit massique D_m se conserve le long de la canalisation (quel que soit le fluide, liquide ou gaz), ce qui signifie qu'il est le même en tout endroit de l'écoulement.

Si le fluide est en écoulement incompressible (ρ conservée), cela conduit à la conservation du débit volumique : $D_m = \rho D_V$ conservé $\Rightarrow$ D_V conservé.

Attention, dans le cas d'un tuyau où une vapeur se condense en régime permanent : à l'entrée, le débit volumique de vapeur est élevé, à la sortie le débit volumique de liquide est bien moindre (alors que le débit massique est uniforme).

En régime non permanent, le débit massique ne se conserve plus.

Exemple d'un réservoir fermé alimenté par un tuyau : le débit massique d'entrée est celui du fluide dans le tuyau, le débit massique de sortie est nul. Bien sûr, la masse dans le réservoir augmente, elle n'est pas indépendante du temps.

7. Le transfert thermique massique q est le transfert thermique reçu par unité de masse du fluide circulant dans le tuyau. La puissance thermique (ou flux thermique) $\mathcal{P}_{th}$ est le transfert thermique reçu par le fluide par unité de temps. Pendant dt où il passe dans le tuyau la masse de fluide $dm = D_m\,dt$, le fluide reçoit :

$$\delta Q = dm\,q = D_m\,q\,dt \quad \text{ou} \quad \delta Q = \mathcal{P}_{th}\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{th} = D_m\,q}$$

Le transfert thermique fourni par la canalisation a pour origine une source extérieure à la canalisation par échange thermique à travers les parois du tuyau.

Dans la plupart des cas les parois sont calorifugées et ce transfert est alors nul ($q = 0$ et $\mathcal{P}_{th} = 0$).

Attention, la relation $\mathcal{P}_{th} = D_m\,q$ indique que $\mathcal{P}_{th} = 0$ si $D_m = 0$, alors qu'il est possible d'échauffer un fluide au repos dans une conduite ! Oui, mais dans ce cas, le régime n'est plus stationnaire puisque la température augmente localement...

Par ailleurs, les changements d'état ou réactions chimiques ayant lieu au sein du fluide ne sont pas comptabilisés dans le terme d'échange q, mais dans la variation d'enthalpie Δh du 1er principe de la question **10.**.

À noter qu'en présence de convection comme ici, le transfert thermique entre le système fermé et le fluide en amont et le fluide en aval est toujours négligé.

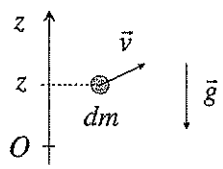
8. Comme le fluide arrive en continu (régime permanent), la portion située dans un volume délimité (la machine) est poussée par le fluide situé en amont, de même qu'il est retenu par le fluide en aval et ces forces de pression travaillent (c'est ce travail qui fait passer de l'énergie interne à l'enthalpie dans la question **10.**).

Par ailleurs, l'écoulement non horizontal du fluide conduit, comme en mécanique du point, à tenir compte du travail des forces de pesanteur.
Outre ce travail des forces de pression et celui des forces de pesanteur, il faut tenir compte d'éventuels travaux « autres » ou « utiles » : lorsqu'une machine (compresseur, turbine, hélice,...) possède des pièces mobiles comme des pales ou un piston, elle communique du travail au fluide à la frontière de celui-ci. Si on note w_u le travail massique utile (en $J.kg^{-1}$) et $\mathcal{P}_u$ leur puissance (en $J.s^{-1} = W$), reçus par le fluide passant à travers le dispositif de la part de la machine, alors comme à la question précédente :

$$\boxed{\mathcal{P}_u = D_m w_u}$$

Ces résultats se retrouvent par $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dm}\frac{dm}{dt}$ soit $\mathcal{P} = eD_m$!

9. Dans un fluide en mouvement, on considère localement une petite masse dm de fluide à l'altitude z (comptée par rapport à une altitude de référence donnée) et possédant une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel d'étude :



– son énergie cinétique est : $dE_c = \frac{1}{2} dm\, v^2$

– son énergie potentielle est : $dE_p = dm\, g\, z$

(où l'axe Oz est vertical ascendant)

d'où les énergies cinétique massique $e_c = \frac{dE_c}{dm}$ et potentielle massique $e_p = \frac{dE_p}{dm}$:

$$\boxed{e_c = \frac{v^2}{2}} \text{ et } \boxed{e_p = gz} \quad (\text{en } J.kg^{-1})$$

10. Énoncé : Pour l'écoulement permanent d'un fluide au débit D_m dans une « machine » fournissant la puissance mécanique utile $\mathcal{P}_u$ et la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}$ au fluide :

$$\boxed{D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}} \Leftrightarrow \boxed{\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q}$$

La notation $\Delta f = f_s - f_e$ signifie ici : variation de la fonction f du fluide entre l'entrée et la sortie de la machine (il s'agit donc d'un Δ « spatial » et non « temporel »). Le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q sont simplement reliés aux puissances.

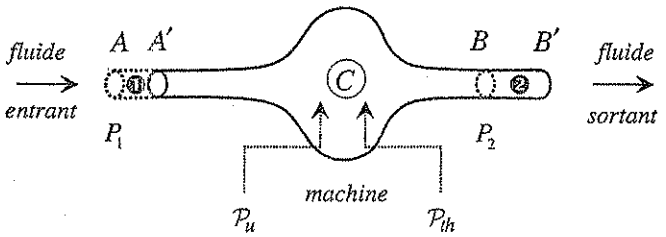
Démonstration : On considère un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine. Stationnaire signifie qu'en tout point les variables d'état sont indépendantes du temps. Le terme « machine » est à considérer au sens large : compresseur, turbine, chambre de combustion, échangeur, détendeur, paroi poreuse, simple étranglement...

Le raisonnement porte sur un système fermé comme à la question **6.** : le fluide contenu à l'instant t dans la portion AB qui, à l'instant $t+dt$, à cause de l'écoulement, passe en $A'B'$.

Le volume initial (entre A et B) est $dV_{AA'}+V_{A'B}=dV_1+V_C$
Le volume final (entre A' et B') est $V_{A'B}+dV_{BB'}=V_C+dV_2$
en notant 1 la partie entrante, 2 la partie sortante, et C la partie commune (avec *a priori* $dV_1 \neq dV_2$ si l'écoulement n'est pas incompressible).

On applique au système le premier principe généralisé des systèmes fermés entre t et $t+dt$ sous la forme :

$$dU+dE_c=U(t+dt)-U(t)+E_c(t+dt)-E_c(t)=\delta W+\delta Q \quad (1)$$



* δQ est le transfert thermique reçu par le fluide pendant dt de la part de la machine : $\delta Q=\mathcal{P}_{th}dt$

* Le travail total δW des actions extérieures reçu par le fluide pendant dt comprend le travail utile $\delta W_u=\mathcal{P}_u dt$ fourni par la machine pendant dt, le travail des forces de pression exercées par le fluide en amont et en aval pendant dt, et le travail des forces de pesanteur δW_{poids} :

$$\delta W=\mathcal{P}_u dt+P_1dV_1-P_2dV_2+\delta W_{poids}$$

En effet, en amont (entrée) où la pression est P_1 et où le volume varie de dV_1, le travail est $P_1dV_1>0$ car reçu par le fluide du système de la part du fluide en amont.
En aval (sortie) où la pression est P_2 et où le volume varie de dV_2, le travail est $-P_2dV_2<0$ car fourni par le fluide du système au fluide en aval.

* Par ailleurs, le poids, force conservative, dérive d'une énergie potentielle E_p :

$$\delta W_{Poids}=-dE_p=E_p(t)-E_p(t+dt)$$

* Finalement, (1) s'écrit :

$$dU+dE_c=\delta W+\delta Q=\mathcal{P}_u dt+P_1dV_1-P_2dV_2-dE_p+\mathcal{P}_{th}dt$$

ou encore : $d(U+E_c+E_p)=(\mathcal{P}_u+\mathcal{P}_{th})dt+P_1dV_1-P_2dV_2 \quad (2)$

On évalue maintenant le premier membre :

* $U(t)=dU_1+U_C(t)$ et $U(t+dt)=U_C(t+dt)+dU_2$

d'où $dU = U(t+dt) - U(t) = dU_2 + [U_C(t+dt) - U_C(t)] - dU_1$

C'est là qu'intervient l'hypothèse de régime permanent : l'énergie interne de la « partie commune » (une même tranche spatiale) ne varie pas au cours du temps :

$$U_C(t+dt) = U_C(t) \quad \text{d'où} \quad dU = dU_2 - dU_1$$

Il en est de même des variations d'énergies cinétique et potentielle qui interviennent dans l'énergie totale $E = U + E_c + E_p$. On obtient :

$$dE = (dU_2 - dU_1) + (dE_{c1} - dE_{c2}) + (dE_{p1} - dE_{p2}) \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) donnent finalement :

$$(dU_2 + P_2 dV_2) - (dU_1 + P_1 dV_1) + (dE_{c1} - dE_{c2}) + (dE_{p1} - dE_{p2}) = (\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th})dt$$

On reconnaît dans les deux premières expressions entre parenthèses les enthalpies des petites portions AA' et BB', d'où :

$$(dH_2 - dH_1) + (dE_{c1} - dE_{c2}) + (dE_{p1} - dE_{p2}) = (\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th})dt \quad (4)$$

Par conservation de la masse vue à la question **6.** : $dm_1 = dm_2 = D_m dt$;

on écrit alors $dH_1 = dm_1 h_1 = D_m dt h_1$ et $dH_2 = dm_2 h_2 = D_m dt h_2$, et de même pour dE_c et dE_p.

En reportant ces expressions dans l'équation (4) :

$$D_m dt(h_2 - h_1 + e_{c2} - e_{c1} + e_{p2} - e_{p1}) = (\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th})dt$$

Après simplification par dt et introduction de la notation $\Delta f = f_2 - f_1$:

$$\boxed{D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q}$$

après division par D_m et à l'aide des relations $\mathcal{P}_{th} = D_m q$ et $\mathcal{P}_u = D_m w_u$ obtenues aux questions **7.** et **8.**.

Les expressions $e_c = v^2/2$ et $e_p = gz$ ont été établies à la question **9.**.

NB : Au début de la démonstration $dU = U(t+dt) - U(t)$ est une variation temporelle sur le système entier ; à la fin de la démonstration $\Delta f = f_2 - f_1$ signifie que tout se passe, en régime stationnaire, comme si le petit élément ❶ était passé en ❷, il s'agit cette fois d'une évolution spatiale. On écrit également $\Delta f = f_s - f_e$ entre l'entrée et la sortie de la machine.

11. À l'aide d'une démonstration analogue à la précédente, on applique le second principe au système fermé – fluide dans le tuyau – entre t et $t+dt$. On en déduit l'expression du second principe pour un fluide en écoulement stationnaire au débit D_m :

$$\boxed{D_m \Delta s = \dot{S}_{éch.} + \dot{S}_{créée}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta s = s_{éch.} + s_{créée}}$$

s est l'entropie massique du fluide (en $J.K^{-1}.kg^{-1}$) et $\Delta s = s_2 - s_1$ représente la variation (spatiale) de s entre ❶ et ❷ ; on écrit également $\Delta s = s_s - s_e$ entre l'entrée et la sortie de la machine.

$s_{éch.} = \dfrac{q}{T_{ext.}} = \int \dfrac{\delta q}{T_{ext.}}$ (si $T_{ext.}$ varie au cours de l'échange) où $T_{ext.}$ est la température du tuyau imposée par l'extérieur ; $s_{éch.}$ est l'entropie massique échangée par le fluide lors de l'écoulement (le transfert thermique est fourni au fluide par une source de température $T_{ext.}$), et $s_{créée} \geq 0$ est l'entropie massique créée dans le fluide lors de l'écoulement ; leurs valeurs dépendent de la transformation envisagée.

$$\dot{S}_{éch.} = \frac{\delta S_{éch.}}{dt} = D_m s_{éch.} = \frac{\mathcal{P}_{th}}{T_{ext.}} \quad \text{et} \quad \dot{S}_{créée} = \frac{\delta S_{créée}}{dt} = D_m s_{créée}$$

sont les taux de variation d'entropie échangée ou créée par unité de temps.

Applications directes du cours

Thermodynamique

12. Pour un système fermé, lors d'une transformation élémentaire :

$$\boxed{d(U + E_c) = \delta W + \delta Q} \quad \text{avec } U = E_c^{micro} + E_p^{micro}$$

E_c^{micro} et E_p^{micro} représentent les énergies cinétiques et potentielles microscopiques.
Un système « purement » mécanique reste à température constante (s'il n'y a pas de frottement) soit $dE_c^{micro} = 0$ et ne reçoit aucun transfert thermique soit $\delta Q = 0$. En notant $dE_p^{micro} = -\delta W_{int.}$ où $\delta W_{int.}$ est le travail des forces intérieures, $\delta W_{ext.}^{c} = -dE_p$ le travail des forces extérieures conservatives, et $\delta W_{ext.}^{nc}$ le travail des forces extérieures non conservatives (ne dérivant pas d'une énergie potentielle) :

$$\delta W = \delta W_{ext.}^{c} + \delta W_{ext.}^{nc} = -dE_p + \delta W_{ext.}^{nc}$$

on retrouve le théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{d(E_c + E_p) = \delta W_{ext.}^{nc} + \delta W_{int.}}$$

Et pour un système indéformable, $dE_p^{micro} = -\delta W_{int.} = 0$

13. Pour un système « purement » thermodynamique : $dU = \delta W + \delta Q$
Si le seul travail reçu est celui lié aux forces de pression : $\delta W = -P_{ext.} dV$

- Si la transformation est isochore $dV = 0$ soit $\delta W = 0$ et donc $\boxed{dU = \delta Q_V}$ ou encore sur la transformation isochore $\Delta U = Q_V$.

  Le transfert thermique s'identifie à la variation d'énergie interne. Et comme la capacité thermique à volume constant est définie par : $C_V = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$, il vient

$$\boxed{\delta Q_V = dU = mc_V\, dT}$$

où m est la masse du système et c_V sa capacité thermique massique à volume constant.

- Si la transformation est isobare et mécaniquement réversible (sans frottements), alors $\delta W = -P_{ext.}dV = -PdV$ et le premier principe se transforme en :

$$d(U+PV) = \delta Q_p \text{ soit } \boxed{dH = \delta Q_p} \text{ ou encore } \Delta H = Q_p$$

Le transfert thermique s'identifie à la variation d'enthalpie $H = U + PV$. Et comme la capacité thermique à pression constante est définie par : $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$, il vient

$$\boxed{\delta Q_p = dH = mc_p dT}$$

où m est la masse du système et c_p sa capacité thermique massique à pression constante.

Écoulements stationnaires

14. Pour un écoulement permanent d'un fluide dans une « machine » fournissant le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q au fluide :

$$\boxed{\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q}$$

La notation Δf signifie : variation de la fonction f du fluide entre l'entrée et la sortie de la machine.
Très souvent, on peut négliger les variations des énergies cinétique et potentielle.
La simplification donne alors : $\Delta h \approx w_u + q$.
Attention aux contre-exemples :

* dans le cas d'un liquide voyant son altitude varier dans une conduite, on ne peut pas négliger $e_{p2} - e_{p1} = g(z_2 - z_1)$ devant la variation d'enthalpie (et en particulier dans la cas où cette dernière est nulle si la température et la pression du liquide ne changent pas).
* de même, si les vitesses de sortie des fluides sont élevées, il faut tenir compte de la variation d'énergie cinétique : c'est le cas pour la sortie des gaz d'une tuyère (voir les questions **20.** et **21.**).

15. Calculs de débits

a) $D_V = \frac{dV}{dt} = Sv = 2 \text{ L.s}^{-1}$ et $D_m = \frac{dm}{dt} = \rho Sv = 2 \text{ kg.s}^{-1}$.

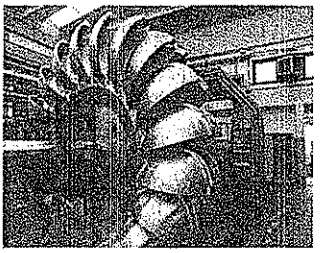
b) Pendant le temps dt, il passe à travers S, la masse $dm = D_m\, dt = \rho S v\, dt$. L'énergie cinétique de cette masse qui se déplace à la vitesse v vaut : $dE_c = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho S v^3 dt$. Le débit d'énergie cinétique est l'énergie cinétique passant à travers S par unité de temps et il vaut :

$$D_{E_c} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}\rho S v^3 = 4\ \text{J.s}^{-1} = 4\ \text{W}$$

D_{E_c} est aussi appelée puissance cinétique du jet de fluide à travers S.

Alors que la densité massique d'énergie cinétique vaut $e_c = \frac{dE_c}{dm} = \frac{v^2}{2} = 2\ \text{J.kg}^{-1}$

c) Pour récupérer cette puissance mécanique, le fluide doit céder du travail à une machine à pales (ou augets) qui est une turbine à eau. Il en existe plusieurs modèles suivant la forme des augets, la turbine de type PELTON étant la plus répandue. Les rendements sont élevés (de l'ordre de 0,9).



16. Importance des termes

On évalue numériquement les différents termes du premier principe des systèmes ouverts :

$$\Delta h = c_P \Delta T \approx 2.10^4\ \text{J.kg}^{-1},\ e_C = \frac{v^2}{2} \approx 50\ \text{J.kg}^{-1} \text{ et } \Delta e_c \approx 0,\ \Delta e_p = g\Delta z \approx 10\ \text{J.kg}^{-1}$$

Conclusion : on peut parfaitement négliger les variations d'énergies cinétique et potentielle dans ce cas.

17. Puissance fournie par une turbine à air

a) L'unité de masse de gaz parfait subit, entre l'entrée et la sortie de la turbine, une détente adiabatique réversible, on peut donc appliquer la loi de Laplace :

$$P_e^{1-\gamma} T_e^{\gamma} = P_s^{1-\gamma} T_s^{\gamma} \Rightarrow \boxed{T_s = T_e \left(\frac{P_e}{P_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \text{ AN : } \underline{T_s = 318\ \text{K}} \text{ (mettre } T_e \text{ en K)}$$

b) On applique le premier principe des systèmes ouverts au fluide dans la turbine en négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle.

$D_m \Delta h = \mathcal{P}_u$. En utilisant $\Delta h = c_P \Delta T = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) M} \Delta T$ et $\mathcal{P}_u = -\mathcal{P}_{extraite}$:

$$\boxed{\mathcal{P}_{extraite} = D_m \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) M} (T_e - T_s)} \text{ AN : } \underline{\mathcal{P}_{extraite} = 31\ \text{MW}}$$

18. Échangeur thermique

a) Le premier principe des systèmes ouverts en régime stationnaire appliqué à <u>l'ensemble des deux fluides</u> donne avec $\mathcal{P}_u = 0$, $\mathcal{P}_{th} = 0$ (l'ensemble est isolé thermiquement) et les approximations habituelles (pas de variations d'énergies cinétique et potentielle) :

$$D_m h_s + D'_m h'_s - D_m h_e - D'_m h'_e = 0 \Rightarrow D_m c_P (T_s - T_e) + D'_m c_P (T'_s - T'_e) = 0$$

b) Avec des pertes, et pour le même système :

$$D_m c_P (T_s - T_e) + D'_m c_P (T'_s - T'_e) = -\mathcal{P}_{perte}$$

(attention au signe, les fluides reçoivent $-\mathcal{P}_{perte}$ de l'extérieur).

c) Si l'échange thermique est complet, les températures de sortie des deux fluides sont identiques :
$T_s = T'_s$, et on obtient une moyenne coefficientée :

$$\boxed{T_s = \frac{D_m T_e + D'_m T'_e}{D_m + D'_m}} \quad \text{AN : } \underline{T_s = 32\ °C}$$

19. Échauffement isobare

a) Le fluide passe de T_e à T_s. On applique, avec les approximations habituelles le premier principe des systèmes ouverts au fluide dans l'échangeur : $D_m \Delta h = \mathcal{P}_{th}$ avec $\Delta h = c_P \Delta T = c_P (T_s - T_e)$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{P}_{th} = D_m c_P (T_s - T_e)}$ AN : $\underline{\mathcal{P}_{th} = 360\ \text{kW}}$

b) On considère un kg de fluide (système fermé) pour lequel on calcule la variation d'entropie entre l'entrée et la sortie. L'identité thermodynamique $dh = vdP + Tds$ où v est le volume massique donne pour une transformation isobare :

$$dh = c_P dT = Tds \quad \Rightarrow \quad ds = c_P \frac{dT}{T}$$

et par intégration entre l'entrée et la sortie :

$$\boxed{\Delta s = s_s - s_e = c_P \ln(T_s / T_e)} \quad \text{AN : } \underline{\Delta s = 580\ \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}}$$

c) La température du thermostat $T_{ext.}$ est égale à la température de sortie T_s du fluide, on en déduit facilement l'entropie échangée massique pour cette transformation isobare ($\Delta h = q$) :

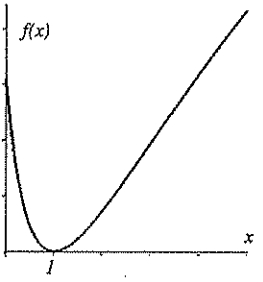
$$s_{éch.} = \frac{q}{T_{ext.}} = \frac{c_P (T_s - T_e)}{T_s}$$

et d'après le 2nd principe pour les systèmes ouverts, $\Delta s = s_{éch.} + s_{créée}$ on déduit $s_{créée} = \Delta s - s_{éch.}$ puis $\dot{S}_{créée} = D_m s_{créée}$:

$$\boxed{s_{créée} = c_P \ln \frac{T_s}{T_e} - c_P \left(1 - \frac{T_e}{T_s}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\dot{S}_{créée} = D_m c_P \left[\ln \frac{T_s}{T_e} - \left(1 - \frac{T_e}{T_s}\right)\right]}$$

AN : $\underline{s_{créée} = 40\ \text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}}$ et $\underline{\dot{S}_{créée} = 80\ \text{J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}}$

Pour étudier le signe de ces expressions, on pose : $x=\dfrac{T_S}{T_e}$ et on cherche le signe de la fonction f définie par : $f(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$. Une rapide étude montre qu'elle est toujours positive (voir le graphe), d'où l'irréversibilité. On doit retrouver que l'entropie créée s'annule lorsque $x=1$. Dans ce cas, $T_e=T_S$: il n'y a plus de transfert thermique ni d'irréversibilité.



d) Avec un échangeur intermédiaire, le choc thermique serait moins violent avec le fluide, et l'irréversibilité moins importante. Donc la création d'entropie diminuerait.

20. Tuyère

a) On rappelle les hypothèses : tuyère calorifugée, régime permanent d'écoulement, pas de travail utile, capacité thermique constante. Par ailleurs, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle (tuyère horizontale, et de toutes façons elle serait négligeable pour un gaz sinon), l'énergie cinétique en entrée est négligée, mais bien sûr pas l'énergie cinétique en sortie.
Par le premier principe des systèmes ouverts appliqué à l'air entre l'entrée et la sortie de la tuyère :

$$h_S-h_e+e_{cS}-\cancel{e_{ce}}=0$$

En tenant compte de l'expression $e_{cS}=\dfrac{v^2}{2}$ en sortie, et de $h_S-h_e=c_P\left(T_S-T_e\right)$ on obtient :

$$\boxed{v=\sqrt{2c_P\left(T_e-T_S\right)}} \quad \text{AN : } \underline{v=1\,450\ \text{m.s}^{-1}}$$

L'écoulement est supersonique !

b) Si la détente était adiabatique réversible, la loi de Laplace s'appliquerait entre entrée et sortie et $T_S=T_e\left(\dfrac{P_e}{P_S}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=517\ \text{K}<550\ \text{K}$. La détente adiabatique n'est donc pas réversible (la loi de Laplace ne s'applique pas).

c) À partir de l'identité thermodynamique et de la 1ère loi de Joule (gaz parfait) :

$$du=Tds-Pdv_m=c_V dT=\frac{r}{\gamma-1}dT$$

et de l'équation d'état du gaz parfait : $Pv_m=rT \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dv_m}{v_m}=\dfrac{dT}{T}-\dfrac{dP}{P}$

on retrouve l'expression de ds : $ds=\dfrac{r}{\gamma-1}\left[\gamma\dfrac{dT}{T}+(1-\gamma)\dfrac{dP}{P}\right]$

et par intégration entre entrée et sortie : $\Delta s = \frac{r}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P_s^{1-\gamma} T_s^{\gamma}}{P_e^{1-\gamma} T_e^{\gamma}}\right)$

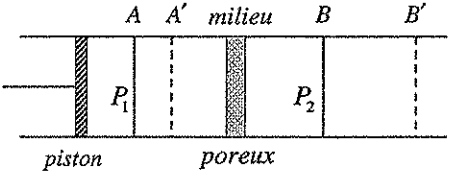
Le 2nd principe des systèmes ouverts s'écrit pour une transformation adiabatique pour laquelle $s_{éch.} = 0$:

$$\Delta s = s_s - s_e = s_{éch.} + s_{créée} = s_{créée} > 0 \quad \text{et donc : } s_s > s_e$$

d'où $\boxed{s_{créée} = \frac{r}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P_s^{1-\gamma} T_s^{\gamma}}{P_e^{1-\gamma} T_e^{\gamma}}\right)}$ AN : $\underline{s_{créée} = 62 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}}$

21. La détente de Joule-Thomson

La détente de Joule-Thomson est une détente lente (ou quasi statique) et stationnaire au travers d'un milieu poreux, l'ensemble étant thermiquement isolé (parois calorifugées).



Il est possible d'appliquer directement le résultat :

$$\Delta\left(h + e_c + e_p\right) = w_u + q$$

avec $q = 0$ (la conduite est calorifugée), $w_u = 0$ (pas de travail mécanique autre que celui des forces de pression et de pesanteur), $\Delta e_p = 0$ (pour une conduite horizontale, et sinon ce terme serait de toute façon négligeable), d'où

$$\Delta\left(h + e_c\right) = 0$$

La détente étant lente, l'énergie cinétique macroscopique du gaz (celle qui est liée à l'écoulement) est faible devant son enthalpie $e_c \ll h$; le 1er principe conduit alors à une conservation de l'enthalpie (ou transformation isenthalpique) :

$\boxed{\Delta h = 0}$ et ceci quel que soit le gaz

* pour un gaz parfait, on sait que l'enthalpie massique ne dépend que de la température $h(T)$ et donc $\Delta h = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$, la température reste constante.

Historiquement, l'expérience a montré que pour un gaz parfait (un gaz réel sous faible pression), il n'y avait pas de variation de température ; c'est ce qui a permis de déduire que l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépendait pas de sa pression, mais seulement de sa température : $H(T,P) = H(T)$ (2e loi de Joule).

Avec l'expression de l'entropie de n moles de gaz parfait idéal :

$$S(T,P) = S_0' + nC_{pm} \ln\frac{T}{T_0} - nR \ln\frac{P}{P_0}$$

on a pour cette transformation $\Delta S = nR\ln\frac{P_1}{P_2} > 0$, et comme $S_{éch.} = 0$, $S_{créée} = \Delta S > 0$; la transformation est irréversible à cause des phénomènes de diffusion gazeuse à travers la paroi poreuse.

Rq : Cette détente est adiabatique ; et bien que le gaz soit parfait (avec γ supposé indépendant de T), on ne peut pas lui appliquer la loi de Laplace $PV^\gamma = cste$ car elle est irréversible !

* pour un gaz réel, on constate en général une diminution de température $\Delta T < 0$ (si P_1 n'est pas trop grande et pour $T_1 < T_{Iim.}$), preuve que $H = H(T,P)$.

L'entropie (qui mesure le désordre ou l'information manquante) augmente lorsque la pression du gaz diminue.

Historiquement, c'est par cette méthode qu'ont été obtenues les premières liquéfactions de N_2, O_2, H_2, He,...

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

22. En physique, un phénomène permanent (ou stationnaire) ne dépend pas du temps. Plus précisément : aucune grandeur décrivant le système ne dépend explicitement du temps.

Ce n'est pas pour autant un équilibre statique : par exemple, si on regarde couler une rivière depuis un pont, on voit bien la même chose aujourd'hui qu'hier, mais pourtant l'eau coule et n'est pas à l'équilibre comme dans un lac. Mais un écoulement n'est pas toujours permanent : s'il pleut, le débit de la rivière augmente et l'eau monte au cours du temps sous le pont...

23. L'eau sert à transporter l'énergie thermique : par exemple, un moteur source de chaleur doit être refroidi par un circuit d'eau fermé s'échauffant au contact du moteur et se refroidissant dans un radiateur au contact avec l'air extérieur.

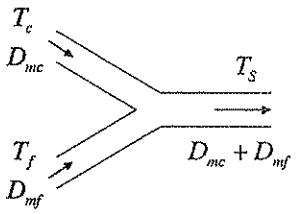
L'eau peut présenter des problèmes pratiques de corrosion des métaux, mais surtout de montée en pression : si on dépasse la température d'ébullition la vapeur apparaît et la pression de vapeur saturante monte alors très vite avec la température, ceci pouvant poser des problèmes de sécurité des installations : les chaudières à vapeur mal surveillées sont souvent des causes d'accidents graves par explosion.

L'huile qui bout à température plus élevée autorise de meilleures marges de sécurité et n'engendre pas de corrosion, mais elle présente des problèmes spécifiques : plus de viscosité, moindre capacité thermique, et surtout inflammabilité.

24. En notant avec un indice « c » les paramètres de l'eau chaude, « f » ceux de l'eau froide et T_s la température de sortie du mélange, le premier principe des systèmes ouverts à deux entrées et une sortie pour le fluide dans le mélangeur qui ne reçoit ni travail ni transfert thermique extérieurs s'écrit :

$$\left(D_{mf} + D_{mc}\right)T_s - D_{mf}T_f - D_{mc}T_c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{D_{mf}}{D_{mc}} = \frac{T_c - T_s}{T_s - T_f}}$$



AN : $x = 1{,}1$ (il faut davantage d'eau froide !)

Utiliser une eau très chaude est coûteux. Mais les normes sanitaires l'imposent pour éviter les risques de prolifération de bactéries comme les légionelles.

25. a) On suppose que l'eau s'écoule en régime quasi permanent, et on applique au torrent dans la « machine » (plan incliné ici), le premier principe des systèmes ouverts entre le haut et le bas de la montagne.

On néglige les variations d'énergie cinétique qui restent faibles, mais pas la variation d'énergie potentielle avec un tel dénivelé.

L'eau ne reçoit ici ni travail utile (sol fixe, pas de « pièces » mobiles), ni transfert thermique.

En fait, l'énergie perdue par frottement interne et externe se dissipe en chaleur.

$$\Delta\left(h + e_p\right) = 0 \Rightarrow c_P \Delta T + g(z_{bas} - z_{haut}) = 0 \text{ d'où } \underline{\Delta T} = \frac{g(z_{haut} - z_{bas})}{c_P} = \underline{2{,}5\ °C}$$

b) Cette variation est assez faible, surtout si on la compare à l'augmentation de température liée à la baisse d'altitude qui est ici de $6.10^{-3}.1000 = 6\ °C$. S'il n'existe aucun transfert thermique avec l'extérieur, l'eau arrive en bas donc plus froide que l'air ambiant. C'est ce que montre l'expérience.

26. On applique le premier principe des systèmes ouverts à l'eau qui s'échauffe dans la chaudière à gaz : $D_{meau}\,\Delta h_{eau} = \mathcal{P}_{th}$.

La puissance thermique transférée à l'eau a pour origine la combustion du gaz.

On exprime le pouvoir calorifique du gaz en kJ/L, connaissant le volume molaire à pression et température ordinaires $V_{molaire} = \frac{RT}{P} \approx 24\ \text{L.mol}^{-1}$, il vaut :

$p_{vol} = \frac{p}{V_{molaire}} = 34{,}2\ \text{kJ.L}^{-1}$. La puissance thermique libérée par la combustion est donc : $\mathcal{P}_{th} = D\,p_{vol} = 5{,}1\ \text{kW}$. D'où le débit d'eau :

$$D_{meau} = \frac{\mathcal{P}_{th}}{\Delta h_{eau}} = \frac{\mathcal{P}_{th}}{c_P\left(T_s - T_e\right)} = 16{,}3\ \text{g/s} = 59\ \text{kg/h}$$

Débit financier : $0{,}15.10^{-3} \times 0{,}68 = 1{,}0.10^{-4}$ €/s ≈ 270 €/mois (pour un fonctionnement jour et nuit).

Une pompe à chaleur, pour fournir la même puissance thermique aurait besoin de moins de puissance électrique : $\eta = \frac{\mathcal{P}_{th}}{\mathcal{P}_{élec}} \Rightarrow \mathcal{P}_{élec} = \frac{\mathcal{P}_{th}}{\eta} = 1{,}8\ \text{kW}$ soit une consommation de 1 310 kWh chaque mois, correspondant à environ 131 €/mois en heure creuse et 197 €/mois en heure pleine.

Il n'y a aucune justification à ne pas installer de pompe à chaleur, si ce n'est la force des habitudes, l'investissement nécessaire (assez vite amorti) et l'entretien.
Pour le chauffe-eau solaire, c'est encore plus évident : l'énergie de chauffage est gratuite et la motivation de limitation des rejets de dioxyde de carbone pour diminuer l'effet de serre est essentielle.

27. Une chaudière à condensation est une chaudière plus élaborée qu'un simple brûleur, où la vapeur d'eau qui résulte de la combustion des hydrocarbures (donnant toujours CO_2 et H_2O en combustion complète) est liquéfiée avant rejet dans l'atmosphère.
En effet, compte tenu des températures de flamme élevées, l'eau est toujours produite à l'état de vapeur. Sa liquéfaction permet de récupérer en plus l'enthalpie de changement d'état qui est loin d'être négligeable.

Ainsi pour la combustion du méthane, le pouvoir calorifique inférieur (*PCI*) est celui pour lequel l'eau est obtenue à l'état vapeur ($PCI = 820$ kJ.mol^{-1}).
Le pouvoir calorifique supérieur (*PCS*) est celui pour lequel l'eau est obtenue à l'état liquide ($PCS = 892$ kJ.mol^{-1}). La différence est de l'ordre de 10 %.

28. Sur le papier, un cycle utilisant la compression et la détente d'un gaz convient parfaitement pour un moteur, un réfrigérateur ou une pompe à chaleur.
Mais dans les faits, les transferts thermiques restent faibles : de l'ordre du kJ par kilogramme de gaz et par degré de variation de température (disons 200 kJ pour une variation de 200 °C qui est un ordre de grandeur raisonnable). De plus, les températures élevées sont coûteuses en pertes thermiques et en matériel...
Un changement d'état implique un transfert thermique bien plus important : pour la vaporisation de l'eau par exemple, environ 2 000 kJ par kilogramme d'eau vaporisée, et ce, sans changer de température.
Pour une puissance donnée, on peut donc utiliser beaucoup moins de fluide, et éviter de mettre en jeu des températures élevées, si on tire parti des changements d'état.

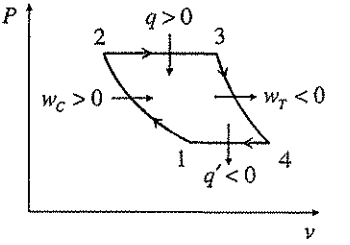
29. Le fluide frigorigène utilisé (le R-134a, un HFC de type tétrafluoroéthane, d'utilisation très encadrée) circule dans un circuit fermé et subit sur un cycle deux changements d'état « inverses » (comme dans un réfrigérateur). La transformation la plus importante se situe dans l'évaporateur (situé dans l'habitacle du véhicule) lorsque le liquide se vaporise ; cette opération, endothermique, prélève l'énergie thermique nécessaire sur l'air recyclé de l'habitacle (source froide) permettant la régulation de température souhaitée. L'autre partie du dispositif concerne le condenseur (situé à l'extérieur de l'habitacle, par exemple dans le compartiment moteur) où le gaz est à nouveau liquéfié ; cette opération, exothermique, restitue une énergie thermique à l'air extérieur, dit air de refroidissement (source chaude) ; c'est ce « dégagement de chaleur » plus important que l'on peut ressentir en passant à côté d'une voiture climatisée...Pour être complet, il faut placer un détendeur entre le condenseur et l'évaporateur, et un compresseur entre l'évaporateur et le condenseur, fournissant globalement sur un cycle un travail positif au fluide (conformément au second principe un réfrigérateur ditherme ne peut pas fonctionner si on ne lui fournit pas du travail).

30. La fonction d'une tuyère est de produire un jet de fluide à grande vitesse en sortie pour la propulsion à réaction (moteur d'avion, de fusée, et même de certains bateaux, « jet ski » par exemple).

Exercices

31. Cycle moteur de Joule d'une turbine à gaz

a) Un cycle moteur est parcouru dans le sens horaire dans le diagramme de Clapeyron $P(v)$ où v est le volume massique ; ici, il est composé de 4 transformations :



- $1 \to 2$ dans le compresseur : le gaz subit une compression adiabatique réversible où il reçoit un travail massique $w_C > 0$
- $2 \to 3$ dans le premier échangeur : vu le sens de parcours du cycle, il s'agit d'un échauffement isobare où le gaz reçoit le transfert thermique $q > 0$ ($T_3 > T_2$ dans le diagramme car les isothermes d'un gaz parfait sont des hyperboles équilatères d'autant plus éloignées de l'origine des coordonnées que la température est élevée)
- $3 \to 4$ dans la turbine : le gaz subit une détente adiabatique réversible où il fournit un travail massique $w_T < 0$
- $4 \to 1$ dans le second échangeur : cette fois, il s'agit d'un refroidissement isobare où le gaz cède le transfert thermique $q' < 0$.

b) Le premier principe des systèmes ouverts sur le cycle s'écrit :

$$\Delta_{cycle}(h + \cancel{e_c} + \cancel{e_p}) = 0 = w_C + w_T + q + q' \quad (1)$$

Le travail utile reçu par le fluide est ici : $w_u = w_C + w_T < 0$ (2)

Le travail fourni par le moteur est $w = -w_u = q + q' > 0$ d'après (1) et (2)

L'efficacité d'une installation motrice se définit par :

$$\eta = \frac{\textit{puissance mécanique récupérée}}{\textit{puissance thermique payée}} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{th}} = \frac{w}{q}$$

$$\text{d'où } \eta = 1 + \frac{q'}{q} = 1 + \frac{\Delta h_{41}}{\Delta h_{23}}$$

En effet dans les échangeurs, le premier principe des systèmes ouverts où l'on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle du fluide donne :

$$q = h_3 - h_2 = c_P(T_3 - T_2) \quad \text{et} \quad q' = h_1 - h_4 = c_P(T_1 - T_4) = -c_P(T_4 - T_1)$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}}$$

c) Dans la turbine et le compresseur, les transformations sont des adiabatiques réversibles pour un gaz parfait. La loi de Laplace s'applique dans les deux cas sous la forme $T = \alpha P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$:

$$T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ et } T_4 = T_3\left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\text{d'où : } \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_3}{T_4} \Rightarrow \boxed{T_2T_4 = T_1T_3}$$

On calcule alors :

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1}\right) = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta = 1 - x^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

AN : $x = 5$ et $\underline{\eta = 0{,}37}$

Rq : Les efficacités réelles sont moindres, à cause des irréversibilités de la turbine et du compresseur.

Dans un cycle de Carnot la source chaude doit être à la température T_3 et la source froide à la température T_1 ; son efficacité est connue : $\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_3}$

$$T_3 > T_2 \Rightarrow 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1 - \frac{T_1}{T_3} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta < \eta_C}$$

d) La différence essentielle est que l'on n'a plus un cycle, puisqu'en sortie 4, le fluide est constitué de résidus brûlés, alors qu'en entrée 1, il l'est de gaz frais. La nature chimique du fluide a donc changé. En particulier, on ne peut plus écrire $\Delta h = 0$ sur le cycle. Mais la variation d'enthalpie est reliée à l'enthalpie standard de la réaction chimique correspondant à la « chaleur apportée » dans le modèle du cycle.
Si le nombre de moles n'a pas trop changé, et que les résidus peuvent encore être considérés comme parfaits, tout se passe alors comme si on avait seulement introduit la chaleur de la combustion et les résultats sont applicables.

$$T_2 = T_1 x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 191\ °C\,, \quad q = c_P(T_3 - T_2) \Rightarrow T_3 = T_2 + \frac{q}{c_P} = 1110\ °C$$

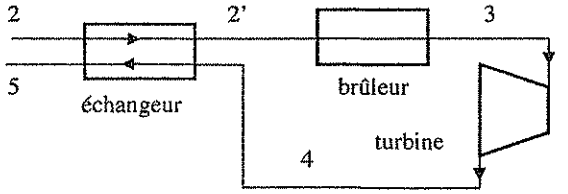
$$T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2} = 601\ °C \text{ (attention dans ces formules, mettre les températures en K)}$$

Les températures sont encore élevées en sortie ; il y a beaucoup d'énergie perdue dans l'échangeur froid.

e) On a cette fois $T_3 = T_2' + \frac{q}{c_P} = 1340\ °C$ et $T_4 = T_3 x^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 745\ °C$.

L'efficacité : $\eta' = \dfrac{-w_C - w_T}{q} = \dfrac{h_1 - h_2 + h_3 - h_4}{h_3 - h_2'} = \dfrac{T_1 - T_2 + T_3 - T_4}{T_3 - T_2'}$

AN : $\eta' = 0{,}49$; elle est donc sensiblement améliorée.



Rq : Dans la pratique, on utilise effectivement un récupérateur de chaleur pour les grosses turbines : l'amélioration est sensible. Si l'échangeur introduit entre 2 et 2' était parfait, alors $T_2' = T_5$, et bien sûr, un échange thermique optimum améliorerait encore l'efficacité.

32. Chauffe-eau solaire

a) Les pertes thermiques ont deux origines :
- perte par conduction (et convection) dans l'air au contact avec le cuivre.
- perte par rayonnement (tout corps chaud rayonne de la puissance électromagnétique, même si pour les corps à température ambiante ce rayonnement infrarouge n'est pas visible).

Dans les deux cas, on peut considérer avec une bonne approximation que les pertes sont proportionnelles à la différence de température entre l'eau et l'air $T - T_0$.

Rq : Dans toutes les formules, T est fonction de x ; pour alléger l'écriture, on note simplement : $T(x) = T$ quand il n'y a pas de confusion possible.

De plus, la puissance perdue par une surface S est proportionnelle à S (si on double la surface de tuyau, on double les pertes). Sur une surface de longueur dx, d'aire $b\,dx$, les pertes sont donc proportionnelles à $b\,dx$.

Donc la puissance perdue sur la longueur dx de tuyau peut s'écrire :

$$d\mathcal{P}_{perte} = \alpha b (T - T_0) dx$$

On en déduit la puissance perdue par unité de longueur demandée :

$$\frac{d\mathcal{P}_{perte}}{dx} = \alpha b (T - T_0)$$

b) On suppose que la puissance transférée de l'extérieur au cuivre est intégralement transmise à l'eau, ce qui revient à négliger la capacité thermique du cuivre.

Le premier principe des systèmes ouverts en régime stationnaire appliqué à l'eau dans une portion de tuyau de longueur dx donne avec $d(e_c + e_p) = 0$:

$$D_m\, dh = E\, b\, dx - \alpha (T - T_0) b\, dx$$

où dh est la variation de l'enthalpie massique de l'eau entre les abscisses x et $x+dx$:

$$dh = c_P\big(T(x+dx)-T(x)\big) = c_P\,dT$$

On en déduit l'équation différentielle en T :

$D_m c_P\,dT = E b\,dx - \alpha\big(T-T_0\big)b\,dx$, soit en posant $y = T-T_0$:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha b}{D_m c_P}y = \frac{E b}{D_m c_P}}$$

c) La solution de régime permanent est $y = \dfrac{E}{\alpha}$, soit : $T_{lim} = T_0 + \dfrac{E}{\alpha}$

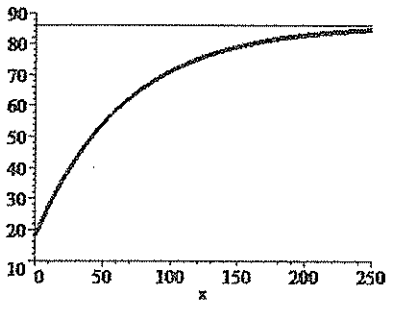
La solution générale se met sous la forme : $y = T-T_0 = A\exp\left(-\dfrac{x}{L}\right)+\dfrac{E}{\alpha}$ avec $L = \dfrac{D_m c_P}{\alpha b}$. Pour trouver la constante d'intégration A, on utilise la condition aux limites : $T = T_1$ en $x = 0$, ce qui donne $T_1 - T_0 = A + \dfrac{E}{\alpha} \Rightarrow A = T_1 - T_0 - \dfrac{E}{\alpha}$ et :

$$\boxed{T = T_0 + \left(T_1 - T_0 - \frac{E}{\alpha}\right)\exp\left(-\frac{x}{L}\right)+\frac{E}{\alpha}} \quad \text{avec} \quad \boxed{L = \frac{D_m c_P}{\alpha b}}$$

Inutile d'avoir un tuyau trop long, cher et encombrant. On atteint pratiquement la température limite pour $x = L$ (ou quelques L). Il faut choisir une longueur de l'ordre de L.

La vitre transparente augmente énormément T_0 par *effet de serre*. Et la température limite en dépend directement.

Rq : Sous une vitre, la température T_0 dépend de l'éclairement E. Mais la loi est compliquée ; elle n'est d'ailleurs pas demandée.



d) Si $D_m = 0$, $L = 0$ et $T = T_{lim} = 86$ °C dans tout le tuyau en régime permanent.

$$T_{lim} = T_0 + \frac{E}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{E}{T_{lim}-T_0} = 22 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$$

En donnant une longueur L au tuyau : $L = \dfrac{D_m c_P}{\alpha b} = 66$ m, on arrive à l'extrémité à la température : $T(L) = T_0 + \left(T_1 - T_0 - \dfrac{E}{\alpha}\right)\exp(-1) + \dfrac{E}{\alpha} = 61$ °C

Pour une longueur $2L = 132$ m : $T(2L) = T_0 + \left(T_1 - T_0 - \frac{E}{\alpha}\right)\exp(-2) + \frac{E}{\alpha} = 77$ °C

Et pour une longueur infinie, $T_{lim} = 86$ °C, température qu'il est impossible de dépasser.

e) Si on suppose que le coefficient de pertes α reste le même dans cette gamme de température, la nouvelle température limite est :

$T_{lim} = T_0 + \frac{E}{\alpha} = 14 + \frac{450}{22} = 34$ °C. Et pour une longueur $L = 66$ m de tuyau,

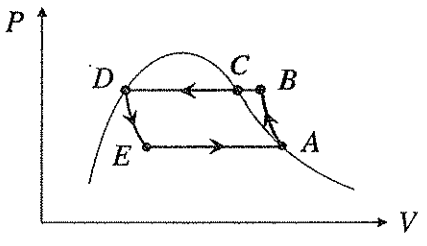
$$T(L) = T_0 + \left(T_1 - T_0 - \frac{E}{\alpha}\right)\exp(-1) + \frac{E}{\alpha} = 25\ °C.$$

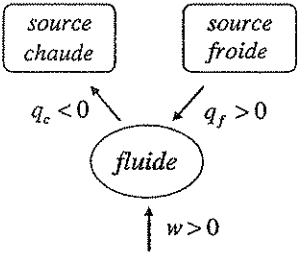
Le chauffe-eau solaire conserve un intérêt en hiver, mais pour avoir de l'eau assez chaude, il faut lui adjoindre un dispositif de chauffage annexe ; pourquoi pas une pompe à chaleur dont la source froide serait alimentée par un autre chauffe-eau solaire pour gagner en efficacité ?

33. Installation frigorifique

Le fluide qui circule en continu dans ce problème subit deux changements d'état inverses par cycle.

a) Sur le cycle, les points A et C se situent sur la courbe de rosée et le point D sur la courbe d'ébullition. S'agissant d'un cycle réfrigérant, il est parcouru dans le sens anti-horaire. Rappelons que (contrairement au cycle moteur) le fluide reçoit effectivement un transfert thermique de la source froide (les aliments à réfrigérer) et en cède effectivement à la source chaude (l'extérieur), ce qui est rendu possible par le travail électrique apporté.





La source chaude intervient donc sur le trajet BD : $q_c = h_D - h_B = -1325$ kJ.kg^{-1}

et la source froide sur le trajet EA : $q_f = h_A - h_E = h_A - h_D = 1137$ kJ.kg^{-1}.

(car il n'y a pas de travaux utiles dans les échangeurs et il n'y a pas d'intervention de source le long des adiabatiques AB et DE)

b) Le 1er principe appliqué à l'unité de masse du fluide sur un cycle s'écrit :

$$\Delta_{cycle}(h + e_c + e_p) = w + q_f + q_c = 0$$

L'efficacité est $\eta = \dfrac{q_f}{w} = -\dfrac{q_f}{q_f + q_c}$ soit $\underline{\eta = 6}$

Cela signifie qu'avec 1 J électrique fourni, la machine peut ôter 6 J aux aliments à réfrigérer (et donc évacuer 7 J dans l'air de la cuisine).

c) De B à C, on a un refroidissement isobare (en effet $T_C < T_B$) et de C à D, la liquéfaction totale de la vapeur à la température $T_C = T_D$ du palier, d'où :

$$\underline{h_D - h_B} = (h_D - h_C) + (h_C - h_B) = \underline{-l_V(T_C) + c_P(T_C - T_B)}$$

d) Le titre massique en liquide est $1-x$; et le liquide est vaporisé de E (x_E) à A ($x_A = 1$) à la température $T_E = T_A$ du palier, d'où, sachant que $h_E = h_D$:

$$h_A - h_E = h_A - h_D = (1-x)l_V(T_A) \implies x = 1 - \frac{h_A - h_D}{l_V(T_A)} \text{ soit } \underline{x = 0{,}12}$$

e) On a $q_f = 1137 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et la puissance demandée est $P = 5\,000 \text{ kJ.h}^{-1}$; le débit massique de fluide nécessaire est donc :

$$D_m = \frac{P}{q_f} \text{ soit } \underline{D_m = 4{,}40 \text{ kg.h}^{-1} = 1{,}22 \text{ g.s}^{-1}}$$

34. Détente adiabatique dans une turbine

a) La courbe en gras dans le diagramme (T,s) représente la courbe de rosée correspondant à la vapeur juste saturante (le titre $x_{vapeur} = 1$ est indiqué en abscisse).

b) En e, la vapeur est sèche, voire surchauffée (domaine de la vapeur seule).

c) α) Voir graphe : s est à la verticale de e car $\Delta s = s_s - s_e = s_{éch.} + s_{créée} = 0$, une adiabatique réversible est isentropique. s est également sur l'isobare $P = P_s = 1$ bar.

β) en s, la vapeur est encore sèche, mais pas très loin de commencer à se condenser. L'ordonnée du point s donne la température : $T_s = 108$ °C.

Le système est en écoulement, le premier principe des systèmes ouverts entre e et s donne :

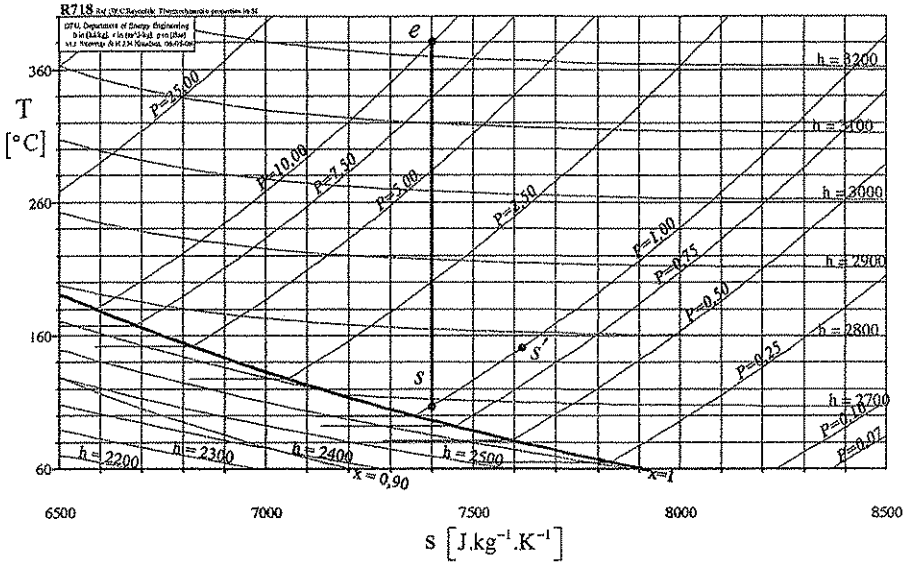
$$\Delta h = h_s - h_e = w_u + q \quad \text{avec } q = 0$$

En interpolant entre deux courbes de même enthalpie, on lit sur le diagramme :

$$h_s - h_e = 2690 - 3220 = -530 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ soit } \underline{w_u = -530 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

$w_u < 0$, la turbine fournit du travail au milieu extérieur.

On pourrait encore diminuer un peu la pression à partir de s jusqu'à la courbe de rosée qui serait atteinte pour $P = 0{,}9$ bar.



d) α) Pour tracer s' on trace l'intersection de l'isobare P_s avec l'horizontale $T'_s = 150\ °C$.

$\Delta s = s_{s'} - s_e = s_{s'} - s_s$ et $\Delta s = s_{éch.} + s_{créée} = s_{créée}$ car la transformation est adiabatique donc $s_{éch.} = 0$

La différence des abscisses de s et s' donne : $\underline{s_{créée} = 210\ \text{J.K}^{-1}\text{.kg}^{-1}}$

β) s' est dans le domaine vapeur sèche. Le travail utile de détente est :

$$w'_u = h_{s'} - h_e \quad \text{soit} \quad \underline{w'_u = -445\ \text{kJ.kg}^{-1}}$$

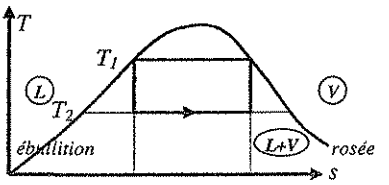
Comme il fallait s'y attendre, on récupère moins de travail que dans le cas réversible.

$$r = \frac{\text{grandeur obtenue dans le cas réel}}{\text{grandeur obtenue dans le cas idéal}} = \frac{-w'_u}{-w_u} \quad \text{soit} \quad \underline{r = 0{,}84}$$

Attention il ne s'agit pas du rendement de la turbine, mais du rapport de ce qu'elle peut produire par rapport au cas idéal réversible.

35. Réfrigérateur à ammoniac

a) Le cycle de Carnot en diagramme (T,s) est un rectangle (détente et compression adiabatiques réversibles se font à $s = cste$).

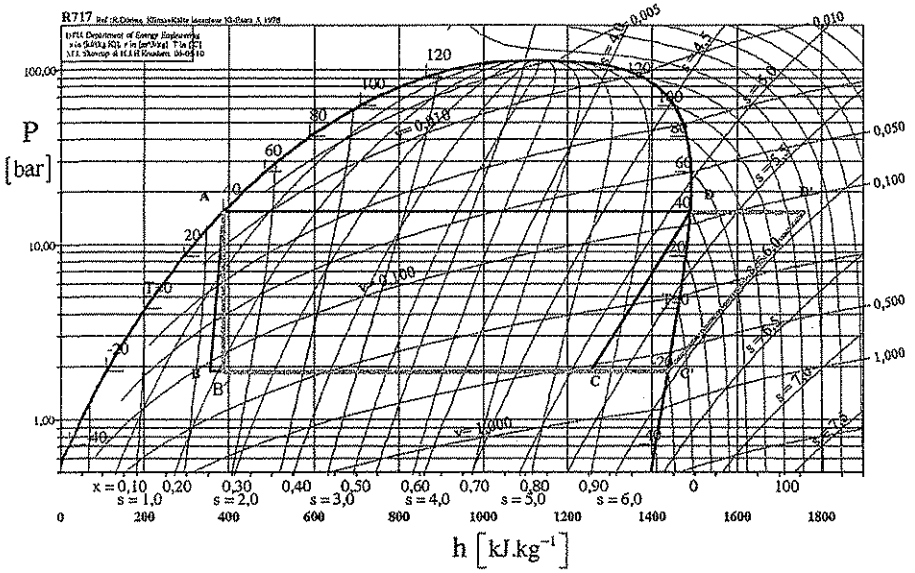


b) En pratique, pour que l'échange thermique se produise spontanément, il faut un écart de température avec la source. Dans l'évaporateur, la source froide (intérieur du « réfrigérateur ») cédera de la chaleur au fluide s'il est à une température plus basse : on choisit –20°C. Même chose du côté de la source chaude : pour évacuer assez de chaleur, avec l'extérieur à 30 °C, il faut que le fluide soit au moins à 40 °C.
Les échanges avec les sources ne sont alors plus réversibles ! Cependant la nature du cycle subsiste en considérant des systèmes diphasés à l'équilibre, donc évoluant à température constante.

c) On peut placer les deux paliers à –20°C et 40°C, grâce aux valeurs indiquées sur la courbe de saturation, ils sont horizontaux car T et P y sont constants. Attention pour la lecture des pressions, les valeurs de P sont portées mais l'échelle est logarithmique. Par interpolation linéaire entre deux valeurs, on trouve $P_1 = 15\,\text{bar}$ et $P_2 = 1{,}9\,\text{bar}$.
Pour tracer les transformations AB et CD, on trace des portions rectilignes d'isentropiques sensiblement parallèles à deux isentropiques consécutives.
On écrit pour le fluide, les deux principes des systèmes en écoulement sur le cycle réversible : $\begin{cases} q_1 + q_2 + w_u = \Delta h = 0 \\ \dfrac{q_1}{T_1} + \dfrac{q_2}{T_2} = \Delta s = 0 \end{cases}$
(q_1 et q_2 sont les transferts thermiques massiques reçues par le fluide des sources à T_1 et T_2, et w_u le travail massique mécanique total à fournir à l'ensemble turbine + compresseur (on récupère donc la puissance de la turbine).
L'efficacité de Carnot est : $\eta_C = \dfrac{q_2}{w_u}$.
Avec les deux équations, on trouve : $\boxed{\eta_C = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}}$ Numériquement, $\underline{\eta_C = 4{,}2}$.
Ce qui signifie qu'on extrait 4,2 fois plus de chaleur de la source froide qu'on n'injecte de travail. Cette valeur théorique n'est évidemment jamais atteinte.

d) Le premier principe des systèmes ouverts en régime stationnaire appliqué à ce détendeur, ne fournissant aucun travail ni aucun transfert thermique, donne : $\Delta h = h_{B'} - h_A = 0$. Le détendeur fonctionne à enthalpie constante et la portion AB' est un segment vertical.

e) C' se trouve à l'extrémité du palier de vaporisation à T_2. La compression étant adiabatique réversible, D' se trouve sur la même courbe d'entropie que C' à la pression P_1, donc à la même ordonnée que D.
La température maximale est atteinte en D' très proche de l'isotherme 140°C. Le fait que cette température soit supérieure à la température critique (graphiquement de l'ordre de 130°C) ne pose pas de problème particulier, mais sa valeur élevée impose des précautions spéciales sur le compresseur (huile, joint, etc....).



f) On applique le premier principe des systèmes ouverts entre l'entrée et la sortie :

– de l'évaporateur : $D_m\,(h_{C'} - h_{B'}) = \mathcal{P}_{th2}$ (1)

– du compresseur : $D_m\,(h_{D'} - h_{C'}) = \mathcal{P}_u$ (2)

– du condenseur : $D_m\,(h_A - h_{D'}) = \mathcal{P}_{th1}$ (3)

On mesure sur le diagramme : $h_A = h_{B'} = 385$ kJ.kg^{-1} ; $h_{C'} = 1435$ kJ.kg^{-1} ; $h_{D'} = 1755$ kJ.kg^{-1} et suivant l'énoncé : $\mathcal{P}_{th2} = 1{,}0$ kW.

$$\text{On déduit de (1) : } D_m = \frac{\mathcal{P}_{th2}}{(h_{C'} - h_{B'})} = 0{,}95 \text{ g/s} = 3{,}4 \text{ kg/h}$$

ordre de grandeur plausible.

$$\text{On déduit de (2) : } \mathcal{P}_u = D_m\,(h_{D'} - h_{C'}) = 305 \text{ W}$$

ce qui est 0,9 fois la puissance électrique à fournir : $\mathcal{P}_{élec} = 340$ W.

Le débit volumique aspiré par le compresseur : $D_V = \dfrac{D_m}{\rho_{C'}} = v_{C'}\,D_m$.

On mesure le volume massique en C' :

$v_{C'} = 0{,}62$ m^3.kg^{-1} et $D_V = 0{,}59$ L.s^{-1} $= 2{,}1$ m^3.h^{-1}

(3) donne : $\mathcal{P}_{th1} = D_m\,(h_A - h_{D'}) = -1{,}3$ kW, donc la puissance thermique absorbée par la source chaude est $-\mathcal{P}_{th1} = 1{,}3$ kW (soit la somme de ce qui est prélevé à la source froide et de ce qui est donné par le compresseur).

L'efficacité du réfrigérateur est : $\boxed{\eta = \dfrac{\mathcal{P}_{utile}}{\mathcal{P}_{payée}} = \dfrac{\mathcal{P}_{th2}}{\mathcal{P}_{élec}} = 2{,}9}$

Rq : L'efficacité du cycle seul (sans se préoccuper du rendement du moteur du compresseur) est :

$\eta_{cycle} = \dfrac{\mathcal{P}_{th2}}{\mathcal{P}_u} = 3{,}3$ qui correspond au calcul sur un cycle théorique où la portion $D'D$ n'est plus une isotherme et pour lequel la température maximale atteinte n'est plus T_1 mais $T_{D'}$: on ne peut donc pas vraiment la comparer à η_C calculée au c).

36. Régulation thermique avec une pompe à chaleur

a) β est, d'après la formule donnée, en $W.K^{-1}$. La puissance d'une pompe à chaleur est au maximum de quelques kilowatt. La puissance maximum fournie sera atteinte pour un écart de température d'une dizaine de Kelvin. β est donc de l'ordre du $kW.K^{-1}$. H est du même ordre de grandeur.

b) Il faut choisir comme système fermé la maison, pour lui appliquer le premier principe de la thermodynamique à pression constante, entre t et $t+dt$:

$dH = \delta Q$ avec dH la variation d'enthalpie : $dH = C\,dT = C\dfrac{dT}{dt}dt$.

et δQ le transfert thermique reçu :

$\delta Q = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_p)\,dt = \left[\beta(T_C - T) - H(T - T_0)\right]dt$.

On obtient : $C\dfrac{dT}{dt} = \beta(T_C - T) - H(T - T_0) \;\Rightarrow\; C\dfrac{dT}{dt} + (\beta + H)T = \beta T_C + HT_0$

de constante de temps : $\tau = \dfrac{C}{\beta + H}$.

Lorsque le régime permanent est atteint, $\dfrac{dT}{dt} = 0$, et $T = T_l = \dfrac{\beta T_C + HT_0}{\beta + H}$.

Il faudra environ 3τ pour l'atteindre à 5% près (loi du premier ordre).

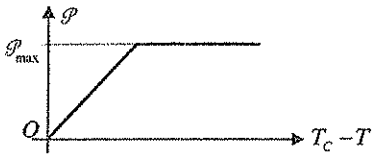
L'erreur statique est la différence entre la température de consigne et la température de régime permanent :

$$\Delta T_e = T_C - T_l = T_C - \frac{\beta T_C + HT_0}{\beta + H} = \frac{H}{\beta + H}(T_C - T_0).$$

Commentaires : La température de régime permanent est bien entendu comprise entre T_C et T_0.

Pour réduire l'erreur statique, il faudrait augmenter le gain β, ce qui est intuitif.

En pratique, β étant limité par la puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$ de la pompe à chaleur (et donc son prix), on choisit une loi à forte croissance et saturation :



c) Il s'agit de représenter sous forme de schéma bloc l'équation différentielle :

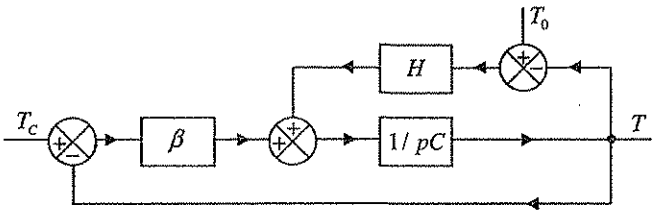
$$C\frac{dT}{dt} = \beta(T_C - T) - H(T - T_0)$$

En notation de Laplace, $C\frac{dT}{dt} = pCT$ donc :

$$T = \frac{1}{pC}\left[\beta(T_C - T) + H(T_0 - T)\right]$$

Il faut faire intervenir $(T_C - T)$ et $(T_0 - T)$ qui sont obtenus par des comparateurs soustracteurs.

Le terme $H(T_0 - T)$ est ajouté comme une perturbation dans la chaîne directe.



Pour supprimer l'erreur statique, il faut insérer un intégrateur (de constante de temps τ_0) dans la chaîne directe avant la perturbation. Ceci revient à remplacer β dans le schéma précédent par $\beta_0 / p\tau_0$.

Dans ces conditions, on obtient : $T = \frac{1}{pC}\left[\frac{\beta_0}{p\tau_0}(T_C - T) + H(T_0 - T)\right]$ qui redonne bien, en régime permanent (en faisant tendre p vers zéro) : $T \to T_C$.

Rq 1 : L'ajout d'un intégrateur revient à augmenter considérablement le gain statique (ou gain en continu), donc choisir un très grand β en régime permanent, ce qui a déjà été signalé dans le b).

Rq 2 : Attention, la stabilité du système n'est pas assurée dans ces conditions. Une autre étude serait nécessaire, avec la possibilité de remplacer l'intégrateur par un correcteur plus approprié au bon comportement dynamique du système (à savoir stabilité et temps minimum pour atteindre la température de consigne).

Rq 3 : En pratique, il est facile de jouer sur β par l'intermédiaire de l'électronique de commande du compresseur. On peut donc choisir la fonction correctrice de son choix.

d) L'hypothèse la plus grossière est sans doute celle consistant à choisir une température uniforme pour la maison. En réalité, l'inertie thermique des murs, et la lenteur des transferts thermiques impose d'autres constantes de temps jouant un rôle pratique important.

Chapitre 10
Diffusion thermique

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

constante des gaz parfaits	$R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$
constante de Boltzmann	$k_B = R / N_A = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$

L'air

masse molaire ; masse volumique	$M = 29\ g.mol^{-1}$; $\rho = 1{,}2\ kg.m^{-3}$
densité particulaire (à 20 °C sous 1 bar)	$n = P / k_B T \approx 2{,}5.10^{25}\ m^{-3}$
capacité thermique massique à V = cste	$c_v = 0{,}72\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
capacité thermique massique à P = cste	$c_p = 1{,}0\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
conductivité thermique	$\lambda = 2{,}3\ 10^{-2}\ W.m^{-1}.K^{-1}$
coefficient de diffusion thermique	$D = \lambda / \rho\, c_p = 2{,}0.10^{-5}\ m^2.s^{-1}$

L'eau

masse molaire ; masse volumique	$M = 18\ g.mol^{-1}$; $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$
densité moléculaire	$n = \rho N_A / M \approx 10^{28}\ m^{-3}$
capacité thermique de l'eau liquide	$c = 4{,}2\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
conductivité thermique	$\lambda = 0{,}60\ W.m^{-1}.K^{-1}$
coefficient de diffusion thermique	$D = \lambda / \rho\, c = 1{,}4.10^{-7}\ m^2.s^{-1}$

Conductivités thermiques

mauvais conducteurs (gaz, polystyrène)	$\lambda < 0{,}1\ W.m^{-1}.K^{-1}$
conducteurs moyens (bois, verre, eau, béton)	$\lambda \approx 0{,}1$ à $10\ W.m^{-1}.K^{-1}$
très bons conducteurs (métaux)	$\lambda \approx 200$ à $400\ W.m^{-1}.K^{-1}$

Le cours d'abord

Les modes de transfert thermique

1. Qu'appelle-t-on conduction ou diffusion thermique ? Quel est l'état de la matière où ce mode de transport est prépondérant ? Citer un exemple simple de diffusion thermique forcée dans un tel cas.

2. Quelle est la caractéristique de la convection par rapport à la conduction ? Citer des exemples de convection naturelle et de convection forcée.

3. Quelles sont les caractéristiques du transfert par rayonnement ?

Loi de Fourier

4. Définir à partir du flux thermique noté P ou Φ le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$ (préciser les unités). Quel est le rôle du produit scalaire dans cette expression ? Exprimer ensuite la quantité d'énergie d^2E qui, par conduction thermique, traverse l'élément de surface dS pendant le temps dt.

5. Énoncer la loi phénoménologique de Fourier et la commenter. Quelles analogies peut-on faire avec la loi d'Ohm ?

Résistance thermique

Les extrémités d'une tige cylindrique (conduction axiale), homogène, de section S et de longueur L, sont maintenues (en régime forcé) à des températures constantes T_1 en $x=0$ et $T_2<T_1$ en $x=L$. Le régime est stationnaire et la paroi latérale est isolée thermiquement.

6. Évaluer le flux thermique Φ à travers la surface S ; dépend-il de x en régime stationnaire ?
Intégrer l'équation précédente après avoir séparé les variables, et en déduire que la flux thermique Φ (ou puissance transférée P) s'écrit sous la forme :

$$P=\frac{T_1-T_2}{R_{th}}=G_{th}(T_1-T_2)$$

et donner l'expression de R_{th}, son unité, et interpréter G_{th}.

7. Que peut-on dire des règles d'association série et parallèle des résistances thermiques ? Proposer un tableau comparatif des grandeurs électrocinétiques et thermiques équivalentes.

8. Déterminer, en régime stationnaire, le profil de température $T(x)$ de la tige et tracer le graphe.

« L'équation de la chaleur »

Un milieu de masse volumique ρ possède une capacité thermique massique c et une conductivité thermique λ ; ces grandeurs sont prises uniformes et constantes.

9. Établir d'abord l'équation de diffusion à une dimension en l'absence d'autres phénomènes (pas de pertes latérales, pas de terme de création).

10. Généraliser la question précédente (toujours à une dimension) en introduisant un terme d'apport d'énergie thermique (citer des exemples) en notant p_v la puissance volumique algébrique apportée au volume Sdx pendant dt (p_v en $W.m^{-3}$). Indiquer également l'équation de conservation.

11. Quelles sont les propriétés immédiates de l'équation de diffusion ? Relier en ordre de grandeur les échelles caractéristiques spatiale et temporelle.

12. Quelle(s) condition(s) aux limites faut-il écrire de manière générale sur la frontière d'un domaine ? Comment cela se traduit-il dans les cas suivants : l'extrémité d'une tige est isolée, deux solides sont mis en contact, un solide est en contact avec un fluide (loi de Newton) ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Il faut prendre l'habitude d'effectuer des bilans de la manière la plus simple sans introduire de notations inutiles. Qu'il soit de matière ou thermique, il se fait un peu comme la « tenue d'un compte bancaire » : la différence entre les crédits (positifs) et les débits (négatifs) sur une période donnée contribue à augmenter ou diminuer le montant du solde à l'issue de cette période...

☐ Attention, les différents termes d'un bilan doivent être homogènes entre eux : bilan d'énergie ou de puissance ? à travers une surface totale ou par unité de surface ?...

☐ Dans l'établissement d'une équation bilan nécessaire à la bonne obtention de l'équation de diffusion, il faut être particulièrement vigilant sur les signes en présence d'un « terme de source » comme l'effet Joule, un faisceau laser pénétrant, une entropie créée,... . Les conventions de signe sont celles de la thermodynamique, ce qui est effectivement reçu par le système est compté positivement.

☐ Comme la température est une fonction spatio-temporelle, soit $T(x,t)$ à une dimension, il faut éviter la notation dT qui, pour une fonction de deux variables, signifie $dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial t}dt$, alors qu'en réalité, dans la plupart des cas, à x fixé, seule intervient l'évolution de la température au cours du temps, soit directement $\frac{\partial T}{\partial t}dt$.

☐ En revanche, en régime stationnaire pour un problème unidimensionnel dans lequel la température est notée par exemple $T(r)$, la dérivée spatiale doit s'écrire $\frac{dT}{dr}$ et non plus $\frac{\partial T}{\partial r}$.

☐ Soit $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ un champ vectoriel à symétrie sphérique, de centre O. Le flux Φ de $\vec{j}$ à travers une sphère de centre O et de rayon r s'écrit $\Phi = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \iint j(r)\,dS = j(r)\times\iint dS = j\times S = j(r)\times 4\pi r^2$, où l'on a utilisé que $j(r)$ est uniforme (ou constant) sur la surface de la sphère considérée. Il est totalement inutile de chercher à exprimer l'élément de surface dS qui ne peut en aucun cas contenir dr (à $r = cste$!) ; l'expression $dS = 8\pi r dr$, issue sans réflexion de $S = 4\pi r^2$, est particulièrement affligeante. Même remarque en symétrie cylindrique.

☐ Le mot « chaleur », bien que d'un emploi fréquent dans la vie courante, est tombé en disgrâce en thermodynamique où il est remplacé par transfert thermique (ou énergie thermique). Il faut donc préférer capacité thermique à « capacité calorifique », équation de diffusion thermique à la dénomination historique « équation de la chaleur », ou encore $\vec{j}_{th}$ à « $\vec{j}_Q$ » bien que les expressions entre guillemets soient encore en usage.

☐ Un des buts de la physique est d'intégrer les équations, pas de les dériver ! Il faut donc absolument garder la forme « compacte » des opérateurs laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$ ou sphériques : $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)$ sans développer les dérivées (ici par invariance n'intervient que la variable r).

☐ Lorsque les conditions aux limites du domaine d'étude spatio-temporel sont précisées, la solution de l'équation de diffusion est unique, mais le type de solution dépend de ces conditions, d'où la grande variété de solutions possibles. Cependant, la solution est rarement analytique et la résolution doit être menée numériquement.

☐ L'équation de diffusion thermique est linéaire en T et donc le théorème de superposition s'applique ; mais lorsqu'on construit la solution d'un problème par superposition, les conditions aux limites de la situation étudiée doivent être uniquement traduites sur la somme.

☐ En régime stationnaire, lorsque la distribution de température $T(x)$ est une fonction affine, il importe de faire apparaître dans son expression un signe pertinent : si pour une barre $T(x=0)=T_1>T(x=L)=T_2$, alors il faut préférer

$$T(x)=T_1-\frac{T_1-T_2}{L}x \quad \text{car } T(x) \text{ diminue, plutôt que } \quad T(x)=T_1+\frac{T_2-T_1}{L}x$$

☐ En régime stationnaire sans terme de source, le flux $\Phi=j_{th}S$ (à une variable d'espace) est conservé à travers un tube de champ, mais pas forcément la norme du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}_{th}$!
C'est seulement dans un problème à une dimension cartésienne que le résultat s'applique : $\vec{j}_{th}$ et S sont indépendants de x. Mais pas en coordonnées cylindriques ou sphériques où il demeure $\vec{j}_{th}(r)$ car $S=S(r)$.

☐ Lors de l'étude de la diffusion thermique dans un système composé de deux milieux solides séparés par une surface Σ, il y a continuité de la température et du vecteur densité de courant thermique à la traversée de cette surface Σ.

☐ Lors de l'étude de la diffusion thermique dans un système composé d'un milieu solide en contact avec un fluide de température T_0, la température de surface T_S du solide est *a priori* différente de T_0. C'est dans une couche limite de fluide d'épaisseur δ, au voisinage immédiat de la surface du solide, que la température passe de la valeur T_S à la valeur T_0. C'est la loi de Newton qui fournit dans ce cas la condition à la limite vérifiée par le champ de température (voir la question **12.**).

☐ *Dérivée d'une intégrale par rapport à sa borne supérieure* :

$$\boxed{\frac{d}{du}\left(\int_0^u f(y)\,dy\right)=f(u)}$$

☐ *Dérivées composées*. Soit la fonction $g(u)$ de la variable $u=a\dfrac{x}{\sqrt{t}}$, où x est une coordonnée d'espace, t le temps et a une constante. Les dérivées partielles de la fonction g s'obtiennent comme suit :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a}{\sqrt{t}}g'(u)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{ax}{2t^{3/2}}g'(u)}$$

Applications directes du cours

L'équation de diffusion

13. Pourquoi est-on amené à parler « d'équilibre thermodynamique local » ?

14. Quelle grandeur est conservée dans l'équation de conservation $\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ utilisée en diffusion thermique ? Quelle précision peut-on alors apporter sur la capacité thermique massique c utilisée ?

15. L'équation de conservation avec un terme de source se généralise à trois dimensions et en géométrie quelconque en :

$$\text{div}\, \vec{j}_{th} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p_v$$

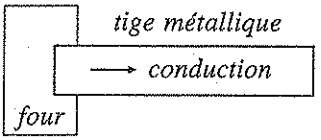
Obtenir l'équation de diffusion en traduisant la loi de Fourier la plus générale.

16. On se place en régime stationnaire (sans terme source) ; montrer que le flux thermique est uniforme et en donner une interprétation qualitative.

17. Trouver, en régime stationnaire, le profil de température $T(x)$ dans une barre de longueur L dont les extrémités sont maintenues aux températures $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$, et tracer le graphe.

18. À quelle condition sur la constante a la fonction $f(x,t) = \frac{K}{\sqrt{t}} e^{-\frac{ax^2}{t}}$ où K est une constante, est-elle solution de l'équation de diffusion ?

19. Durée d'un régime transitoire



Une tige cylindrique de longueur L (à conduction axiale et calorifugée sur la paroi latérale) est initialement à la température uniforme T_2 (celle de l'air environnant) et à $t = 0$, on lui applique une température T_1 en $x = 0$ (extrémité encastrée dans un four, voir le schéma à la question **1.**) alors qu'elle demeure à T_2 en $x = L$; il s'instaure alors un régime transitoire.

Estimer la durée τ d'établissement du régime permanent pour une tige d'acier pour laquelle $L = 25$ cm, puis $L' = 50$ cm ; $\lambda = 82$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $c = 0{,}46$ kJ.kg^{-1}.K^{-1} ; $\rho = 7{,}8.10^3$ kg.m^{-3}. Conclusion.

Résistance thermique

20. Établir les lois d'association série et parallèle de deux résistances thermiques R_{th1} et R_{th2}. Expliquer physiquement.

21. Pour maintenir une température $T_S = 85\ °C$ dans un sauna, il faut fournir une puissance $P = 1{,}2\ kW$. En déduire la résistance thermique R_{th} des parois du sauna sachant que la température extérieure est $T_E = 15\ °C$.

22. Application élémentaire à l'isolation thermique

L'intérieur (T_i) et l'extérieur (T_e) d'une maison sont séparés par un mur d'épaisseur $l = 30\ cm$ et de conductivité $\lambda = 0{,}7\ W.m^{-1}.K^{-1}$. Ce mur est recouvert d'un revêtement thermique d'épaisseur $e = 2\ cm$ et de conductivité thermique $\lambda' = 0{,}03\ W.m^{-1}.K^{-1}$. Quel est le rapport P'/P de la puissance perdue avec et sans revêtement ? Conclusion.

23. Stabilisation de la température dans un igloo

Pour passer la nuit, un inuit dort dans un igloo constitué de glace (ou neige compactée) de $S_i = 4\ m^2$ de surface, la neige compactée est un bon isolant de conductivité thermique $\lambda = 0{,}25\ W.K^{-1}.m^{-1}$. L'épaisseur de l'igloo est notée e.

La température extérieure $T_{ext} = -40\ °C$ est constante. Tous les points de l'air intérieur et des parois de glace sont à la même température T à un instant donné. On note P_f la puissance thermique traversant les parois par conduction thermique et R_i la résistance thermique de l'igloo.

a) L'inuit est une source thermique qui dégage 0,5 MJ par heure pendant son sommeil. Exprimer la puissance P_{th} dégagée par l'inuit dans les unités du système international.

b) Pendant la nuit, quand le feu à l'intérieur de l'igloo s'est éteint, la température intérieure est $T = 20\ °C$, tandis que celle à l'extérieur est $T_{ext} = -40\ °C$. Si la conduction thermique à travers les murs de l'igloo est le facteur dominant dans les pertes thermiques, quelle valeur doit avoir l'épaisseur e pour que l'intérieur de l'igloo ne se refroidisse pas ?

c) Quel serait le schéma thermique (association de résistances thermiques) si on devait considérer aussi les pertes thermiques dues à la porte d'entrée en peau de phoque et au fait que la paroi externe de l'igloo est recouverte d'une couche de neige fraîche dont la conductivité thermique est différente de celle de la neige compactée ?

24. Résistance d'un conducteur cylindrique (conduction radiale)

Un tronçon de longueur h d'une gaine d'isolation de conduite de conductivité λ, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ, a la forme d'un cylindre creux de rayon intérieur R_1 (température T_1) et de rayon extérieur R_2 (température T_2, on peut prendre $T_2 < T_1$).

a) Calculer le flux thermique Φ à travers un cylindre de hauteur h et de rayon r tel que $R_1 < r < R_2$ (faire un schéma) ; dépend-il de r ?

Intégrer l'équation précédente après avoir séparé les variables, et en déduire directement l'expression de la résistance R_{th} du tronçon.

b) Établir l'équation spatio-temporelle de diffusion en coordonnées cylindriques.

Quelle est en régime stationnaire, la distribution de température $T(r)$? En déduire la résistance R_{th} du tronçon ; commentaire sur la méthode.

25. Le conducteur sphérique (conduction radiale)

Un matériau homogène est compris entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$, de conductivité thermique λ, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ. Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures T_1 $(r = R_1)$ et T_2 $(r = R_2)$ et on suppose $T_1 > T_2$.

a) Calculer par la méthode habituelle la résistance thermique R_{th} de ce conducteur.

b) Puis établir l'équation spatio-temporelle de diffusion en coordonnées sphériques, et donner, en régime stationnaire, la distribution de température $T(r)$.

Applications

26. Chauffage d'une pièce avec pertes thermiques

On considère une pièce d'habitation et on nomme « parois » l'ensemble des murs (avec porte(s) et fenêtre(s)), sol et plafond qui la délimite. La température extérieure T_0 est constante, et on admet que l'ensemble { air intérieur + parois } de capacité thermique C, est à chaque instant à une température uniforme T.

La puissance thermique reçue par l'extérieur (à travers les parois) est donnée par la relation : $P_{th} = \dfrac{\delta Q}{dt} = \dfrac{T - T_0}{R}$ où R est la résistance thermique des parois.

La pièce est chauffée par un radiateur de puissance P mis en route à l'instant $t = 0$, instant auquel la température intérieure T initiale vaut T_0.

a) Établir, en précisant le système considéré, une relation liant T, T_0, R, P, C et dt.

b) En déduire l'expression de T en fonction du temps en introduisant un temps caractéristique τ. Calculer la valeur T_M atteinte par T si le radiateur fonctionne pendant un temps très long.

AN : Calculer τ et T_M sachant que $T_0 = 5\ °C$, $P = 2\ kW$, $C = 2{,}4.10^5\ J.K^{-1}$ et $R = 1.10^{-2}\ K.W^{-1}$.

27. Ventilation d'un composant électronique

Un composant électronique de conductivité thermique $\lambda = 4{,}0\ W.m^{-1}.K^{-1}$ a deux faces F_1 et F_2 de même surface S et séparées par une épaisseur $d = 2\ cm$. Un ventilateur refroidit la surface F_1 grâce à un courant d'air à la température $T_a = 20\ °C$ tandis que l'autre face F_2 est maintenue, du fait de son utilisation, à la température $T_2 = 50\ °C$. En régime permanent, la température de F_1 ne doit pas dépasser $T_1 = 30\ °C$.

Le transfert thermique entre le composant et l'air est donné par la loi de Newton :

$$\Phi_{th} = h(T_i - T_a)S$$

a) Commenter cette loi et donner l'unité du coefficient h.

b) Quelle doit être la valeur du coefficient h pour ne pas dépasser la valeur indiquée de T_i ? Sur quel paramètre peut-on jouer simplement pour obtenir cette valeur ?

28. Température cutanée d'un mammifère

Un mammifère peut être très sommairement schématisé par une sphère de muscles de centre O, de rayon R dont le métabolisme dégage la puissance thermique P par unité de volume, uniformément dans tout son volume. L'air extérieur a une conductivité thermique λ, sa température loin de l'animal est $T_0 = 20\ °C$. On s'intéresse à la température de l'air (donc pour $r \geq R$) en régime permanent.

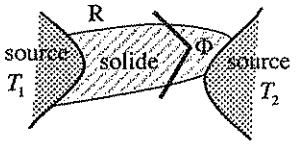
a) En passant par le flux thermique, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$, pour $r \geq R$. En déduire l'expression de $T(r)$.

b) Quelle est la température cutanée T_C de l'animal en $r = R$? Commenter les variations de la différence $T_C - T_0$ en fonction de λ seulement (c'est-à-dire à R et P fixés), puis en fonction de P seulement, et enfin en fonction de R seulement.

c) Quelle doit être la valeur de P pour avoir $T_C = 30\ °C$ dans l'air puis dans l'eau ? On donne : $\lambda = 500\ W.m^{-1}.K^{-1}$ pour l'eau et $\lambda = 5\ W.m^{-1}.K^{-1}$ pour l'air (ces valeurs tiennent compte de la convection). Prendre $R = 25\ cm$ ce qui permet d'avoir un rapport surface / volume voisin de celui de l'être humain. Commentaire.

29. Création d'entropie en régime permanent par diffusion thermique

Deux sources aux températures T_1 et T_2 sont en contact par l'intermédiaire d'un solide de géométrie non précisée, et de résistance thermique R en régime permanent.



Φ est le flux thermique circulant algébriquement de la source 1 vers la source 2.

a) Donner la relation entre les températures, Φ, et R.

b) On choisit comme système fermé le solide. En lui appliquant le deuxième principe entre les instants t et $t + dt$, calculer l'entropie créée par unité de temps (toujours en régime permanent). Commenter soigneusement le résultat.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

30. En quoi une équation de diffusion diffère-t-elle fondamentalement d'une équation de propagation de type d'Alembert ? Quelle conséquence cela a-t-il sur la distance atteinte par les phénomènes dans chaque cas ?

31. Peut-on parler de « vitesse de diffusion » ?

32. Par quel autre phénomène la conduction thermique dans les gaz ou les liquides est-elle souvent masquée ?

33. À quelle condition, en régime stationnaire, le flux de diffusion est-il conservatif ? Peut-on alors en déduire que la norme du vecteur densité de courant $\vec{j}$ est elle-même uniforme ?

34. Quelle est, en diffusion thermique, la grandeur échangée au niveau microscopique ?

35. Donner un exemple d'état stationnaire qui n'est pas un état d'équilibre.

36. Dans le cas d'un solide en contact avec un fluide de température T_0, l'échange d'énergie est souvent régi par la loi de Newton : $-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}(x_{\text{lim}},t)=h\left(T(x_{\text{lim}},t)-T_0\right)$ proportionnel à la différence de température où h est le coefficient de transfert thermique de surface ; quelle est son unité ? En réalité la température est continue en x_{lim} et le fluide ne retrouve sa valeur T_0 qu'au-delà d'une couche limite d'épaisseur δ. Montrer que la loi de Newton est une loi de Fourier déguisée et en déduire le lien entre h, δ et la conductivité thermique λ_{fl} du fluide.

37. Comment s'écrit l'équation de conservation à la question **10.** pour la diffusion thermique lorsque le milieu est le siège d'un effet Joule. Comparer à l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique et commenter les signes.

38. Quelle célèbre loi, la loi de Fourier a-t-elle inspirée ?

39. Pourquoi les métaux qui sont de bons conducteurs électriques sont-ils également de bons conducteurs thermiques ? Une meilleure conductibilité thermique conduit-elle forcément à un meilleur coefficient de diffusion thermique ?

40. Comment la bouteille « thermos » est-elle conçue pour réduire au mieux les trois modes de pertes thermiques.

41. Au milieu du XIXe siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme et que le flux thermique qui s'échappe de sa surface correspond à son refroidissement progressif depuis sa formation. Mesurant la valeur de ce flux en surface et estimant par ailleurs la température de la matière au début de la formation, il a modélisé ce refroidissement par diffusion thermique pour en déduire l'âge de la Terre. Il a trouvé comme ordre de grandeur 50 millions d'années. Pour quelle raison cette estimation est-elle inexacte ?

42. Comment procède-t-on pour évacuer « la chaleur » dégagée par un appareil électrique en marche ? Prendre comme exemples les appareils de TP ou l'unité centrale d'un ordinateur.

43. Quel est le principe du double vitrage ?

44. Quel type d'association de résistances thermiques décrit correctement un mur dans lequel se trouve une fenêtre. À quoi faut-il veiller lorsque l'on engage des travaux pour réduire les pertes thermiques ?

45. Par beau temps estival, pour éviter que « la chaleur » ne pénètre dans les pièces, on ferme le matin les fenêtres et on rabat les volets. Pourtant ces derniers ne sont jamais entièrement rabattus, mais seulement entrebâillés, pourquoi ?

46. Pourquoi les canalisations d'eau sont-elles enfouies dans le sol ?

47. Quel est l'intérêt d'un four à chaleur tournante, disposant d'un ventilateur pour brasser l'air ? Et d'un réfrigérateur à froid brassé ?

Exercices

48. Marche au hasard dans un gaz

a) Au niveau microscopique, dans le modèle qui assimile les molécules à des sphères dures de diamètre d, le cours de thermodynamique statistique établit l'expression du libre parcours moyen l (rappeler sa définition) :

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}n(\pi d^2)}$$

Pour l'air sous pression atmosphérique normale et à température usuelle de 20 °C, calculer la valeur numérique de la densité volumique particulaire n ; proposer un ordre de grandeur raisonnable pour d. Puis donner la valeur de l ; commentaire.

Qu'en est-il dans le cas d'un liquide ?

b) Rappeler comment est définie la vitesse quadratique moyenne u ; comment est-elle reliée à la température cinétique T ? Donner la valeur numérique de u pour l'air à température usuelle, puis estimer le temps moyen τ entre deux chocs pour l'air.

c) Un modèle microscopique fournit l'expression du coefficient de diffusion au sein d'un gaz :

$$D = \frac{1}{3} l u$$

AN : Calculer D pour l'air (autodiffusion) à 20 °C sous 1 bar ; commenter.

En raison de l'agitation thermique, les particules dans un gaz ou un liquide ont des trajectoires en forme de lignes brisées. Partant de l'origine O à l'instant $t = 0$, une particule effectue N déplacements $\vec{\delta}_i$ ($i = 1$ à N). Après chaque choc, elle repart dans une nouvelle direction indépendante de la précédente.

d) À quelle distance moyenne r de O se trouve-t-elle au bout d'un temps $t = N\tau$ (N grand) où τ est le temps moyen entre deux chocs successifs ? Exprimer r en fonction de t, du libre parcours moyen l et de la vitesse quadratique u.

Comment s'écrit le résultat $r(t)$ à l'aide de D.

AN : Estimer le temps que met un parfum, après ouverture du flacon, à diffuser sur une distance de 10 cm ; commentaire.

49. Marche au hasard et diffusion dans les solides

La diffusion d'un atome M dans un solide est modélisée à une dimension par sa migration le long d'une chaîne infinie d'atomes A_n d'abscisses $x_n = na$. Il met un temps moyen τ pour passer d'un site A_n à un des deux sites voisins A_{n-1} ou A_{n+1} avec la même probabilité $1/2$.

a) Si $p(x_n,t)$ désigne la probabilité pour M d'être en x_n à l'instant t, exprimer $p(x_n,t+\tau)$ en fonction de $p(x_{n-1},t)$ et de $p(x_{n+1},t)$.

b) L'hypothèse du milieu continu (la distance interatomique a est petite devant les dimensions macroscopiques du système) conduit à envisager une fonction continue de la variable x, $p(x,t)$, égale à $p(x_n,t)$ pour $x = x_n$.

Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $p(x,t)$?

Donner l'expression du coefficient de diffusion D correspondant ; commentaire.

50. Intérêt d'un double vitrage

Une pièce rectangulaire de 5,0 m×8,0 m, dont les murs ont une hauteur de 2,5 m et une épaisseur de $E = 0{,}3$ m, comprend une baie vitrée de 2,0 m×1,8 m et deux fenêtres de 1,2 m×1,2 m, toutes les trois d'épaisseur de vitres $e = 2{,}0$ mm. L'intérieur de la pièce est à la température $T_1 = 19$ °C, et les deux grands murs avec baie et fenêtres donnent sur l'extérieur à la température $T_2 = 0$ °C. Il n'y a aucun échange thermique à travers les deux autres (petits) murs, le sol et le plafond, les appartements voisins étant à la même température T_1.

Les conductivités thermiques du verre, d'un mur (béton + isolant) et de l'air sont $\lambda_V = 0{,}78$ W.m^{-1}.K^{-1}, $\lambda_M = 0{,}10$ W.m^{-1}.K^{-1} et $\lambda_A = 0{,}026$ W.m^{-1}.K^{-1}.

a) Calculer les résistances thermiques R_V des vitres, R_M des murs concernés, puis R de l'ensemble. En déduire les flux thermiques Φ_V à travers les vitres, Φ_M à travers les murs concernés, et Φ_T à travers l'ensemble. Évaluer le rapport Φ_M / Φ_T et conclure.

Pour limiter les pertes par les parties vitrées, les vitres simples sont remplacées par du « double vitrage » : deux vitres d'épaisseur $e = 2{,}0$ mm séparées par une couche d'air sans convection et d'épaisseur $e' = 4{,}0$ mm.

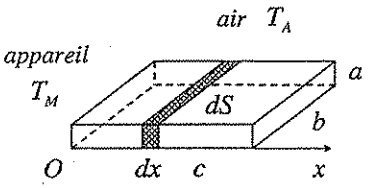
b) Calculer la résistance thermique d'une simple couche de vitre R_V, de la couche d'air comprise entre les deux couches de vitres R_A, puis du « double vitrage » dans son ensemble R_{DV}. En déduire le flux thermique Φ_{DV} à travers le « double vitrage » et conclure. Que vaut alors le flux Φ'_T à travers l'ensemble murs + « double vitrage » ?

c) Afin d'avoir une idée du profil de température dans le double vitrage, calculer les températures T'_1 et T'_2 des parois du verre au contact de l'air compris entre les deux vitres. Conclure.

51. Ailettes de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important d'un appareil électrique, dû à l'effet Joule, on munit l'arrière de son boîtier d'ailettes de refroidissement métalliques.

Chaque ailette est parallélépipédique, d'épaisseur $a = 2{,}0$ mm, de largeur $b = 10$ cm et de longueur $c = 12$ cm. Dans les calculs on admet $a \ll b$.



En fonctionnement permanent, le boîtier de l'appareil maintient une température $T_M = 60$ °C. L'air extérieur, qui circule, est à une température constante et uniforme $T_A = 20$ °C, sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air thermiquement peu conductrice dont la température reste localement voisine de celle de la surface de l'ailette.

Dans l'ailette, on admet une conduction thermique unidimensionnelle ; la température est $T(x)$, la loi de Fourier s'applique et la conductivité est $\lambda = 20$ W.m^{-1}.°C^{-1}.

Il existe par ailleurs un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant, à travers la couche limite. Le flux thermique entre la surface latérale dS (en gris sur la figure) de l'élément d'ailette de longueur dx et l'air ambiant est de la forme :

$$dP = h\left(T(x) - T_A\right) dS \quad \text{où} \quad h = 180 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$$

a) Écrire le bilan en régime stationnaire permanent des échanges thermiques de la tranche d'ailette de largeur dx. En déduire que la température $T(x)$ est solution de l'équation différentielle : $\dfrac{d^2T}{dx^2} - \dfrac{1}{L^2}\left(T(x) - T_A\right) = 0$

en précisant l'expression de L ainsi que sa valeur numérique et son unité.

b) Résoudre cette équation et donner l'expression simplifiée de $T(x)$ compte tenu de l'inégalité entre L et c.

c) Exprimer et calculer numériquement la puissance thermique totale P évacuée par l'ailette, puis la puissance thermique P' transmise par le boîtier de l'appareil à l'ailette en $x = 0$ et commenter. Combien faudrait-il fixer d'ailettes sur le boîtier pour évacuer une puissance totale $P_{tot} = 200$ W ?

52. Diffusion thermique et effet Joule

Un barreau cylindrique calorifugé de longueur $L = 25$ cm est parcouru par un courant électrique de densité $j = 5.10^5$ A.m^{-2} ; sa conductivité électrique est $\sigma = 7{,}7.10^5\ \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$. L'énergie thermique dégagée par effet Joule s'évacue par conduction dans le conducteur de conductivité thermique $\lambda = 50$ W.m^{-1}.°C^{-1}.

a) Établir l'équation d'évolution de la température $T(x,t)$.

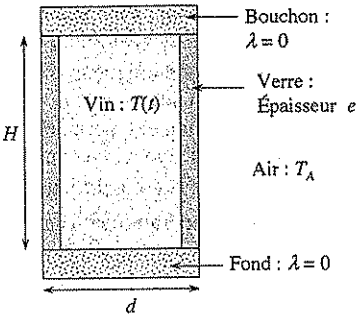
b) En déduire, en régime permanent, le profil de température $T(x)$ lorsqu'aux extrémités $T(0)$ et $T(L)$ sont imposées ; le flux thermique est-il indépendant de x ?

c) Trouver, en régime quasi stationnaire, l'endroit où démarre la fusion sachant que le barreau est maintenu à une différence de température $T(L) - T(0) = 50$ °C.

53. Mise en chambre d'un vin en bouteille

Une bouteille de vin, choisie dans la cave à une température de $T_0 = 8\ °C$ est mise en « chambre » dans la cuisine dont la température vaut $T_A = 22\ °C$.

La bouteille est assimilée à un cylindre de hauteur $H = 19{,}5$ cm, de diamètre extérieur $d = 7{,}6$ cm et d'épaisseur $e = 3$ mm. Dans cette modélisation les échanges thermiques entre l'extérieur et le vin se font uniquement par la surface latérale de la bouteille.
Par ailleurs la température $T(t)$ du vin est supposée uniforme, mais dépend lentement du temps ; celle du verre, en revanche, est fonction de r (distance à l'axe des coordonnées cylindriques) et le régime est quasi stationnaire.



Données : conductivité du verre $\lambda = 0{,}78\ \text{W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$
coefficient d'échange convectif $h = 10$ U.S.I.
capacité thermique massique du vin $c = 4\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$

a) Calculer le volume V (en cL) de vin dans la bouteille et commenter.

b) Quel est le signe du flux thermique Φ qui traverse la bouteille (la surface latérale est orientée vers l'extérieur, suivant $\vec{u}_r$) ? Calculer la résistance thermique R_{cond} de conduction de la partie latérale de la bouteille, en notant T_S la température en surface de la bouteille. Application numérique.

c) L'échange thermique par convection entre l'air ambiant et la bouteille est bien représenté par la loi de Newton : $\varphi = hS(T_S - T_A)$ où le coefficient d'échange thermique h est considéré comme constant et uniforme sur toute la surface S et φ est le flux thermique dans l'air. Quelle est l'unité de h ? De quelles grandeurs et de quels phénomènes physiques dépend ce coefficient ? Exprimer la résistance thermique de convection R_{conv} de la surface latérale de la bouteille en fonction des seules données. Application numérique.

d) Comparer les deux flux Φ et φ. En déduire la valeur numérique de la résistance thermique totale R_{th} d'échange entre l'air extérieur et le vin et commenter.

e) Écrire le bilan énergétique du vin entre deux instants infiniment voisins t et $t + dt$ en notant $C = mc$ la capacité thermique totale du vin. En déduire une équation différentielle vérifiée par $T(t)$. Il y apparaît une constante de temps τ ; quelle est sa signification et sa valeur numérique ?

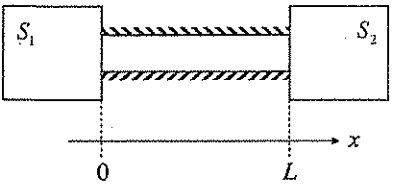
f) Résoudre cette équation avec la condition initiale proposée. Indiquer l'allure du graphe $T(t)$. Donner le schéma électrique équivalent en pensant à indiquer T, T_S et T_A.

g) AN 1 : Calculer le temps nécessaire pour que le vin atteigne sa température optimale de dégustation $T_D = 16\ °C$.

AN 2 : Quelle est à cet instant la température de surface T_S de la bouteille ? Commentaire.

54. Transfert thermique dans une barre

Une barre cylindrique homogène, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, de conductivité thermique λ, a une longueur L et une section droite Σ. Ses parois latérales sont calorifugées de telle sorte que les pertes thermiques sont négligées ; en revanche, chaque extrémité de la barre, en $x = 0$ et $x = L$, est en contact avec un thermostat, respectivement S_1 et S_2, qui impose la température $T_1 = T(0,t)$ et $T_2 = T(L,t)$.



Les volumes des différentes parties sont pris constants lors des échanges.

a) Rappeler la loi de Fourier en notant $\vec{j}_{th} = j_{th}(x,t)\vec{u}_x$ le vecteur densité de courant thermique dans la barre. Puis effectuer un bilan d'énergie sur une tranche élémentaire du conducteur, comprise entre les abscisses x et $x+dx$, et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x,t)$:

$$D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Expliciter D et donner son unité.

b) Dans cette seule question les deux thermostats ont des capacités thermiques infinies. En déduire :

- que les thermostats imposent alors des températures T_1 et T_2 constantes
- la distribution de température $T(x)$ dans la barre en régime permanent (on peut supposer $T_1 > T_2$)
- la résistance thermique R_{th} de la barre métallique.

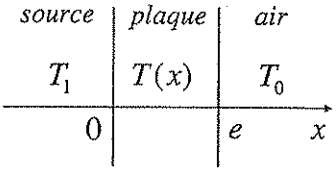
Dans les deux questions qui suivent, les deux thermostats de conductivité thermique infinie, ont la même capacité thermique C, non infinie, mais très grande devant la capacité thermique totale de la barre ; l'ensemble constitué par les thermostats et la barre est parfaitement calorifugé. Le thermostat S_1 a une température initiale T_1^0 et le thermostat S_2 a une température initiale T_2^0.

c) Quelles conséquences, sur les températures des thermostats et de la barre, les différentes hypothèses faites à propos des thermostats entraînent-elles ? Donner $T(x,t)$.

d) Montrer que $\frac{dT_1}{dt} = -\frac{dT_2}{dt}$ et établir les expressions des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ des thermostats au cours du temps en fonction des températures initiales, de C et de la résistance thermique de la barre (on peut supposer $T_1^0 > T_2^0$ et écrire $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sous des formes physiquement pertinentes à l'aide de T_1^0, T_2^0, t et d'un temps τ à exprimer).
Dessiner le circuit électrocinétique équivalent à cette étude et indiquer à quelles grandeurs thermiques correspondent la tension et le courant.

55. Importance conduction – convection dans un refroidissement thermique

Une source thermique, qui maintient une température constante et uniforme T_1, occupe l'espace $x<0$; elle est séparée de l'air ambiant à la température $T_0 < T_1$ (pour $x>e$) par une plaque d'épaisseur e constituée d'un matériau de conductivité thermique λ. La plaque se refroidit par convection au contact de l'air, le coefficient de convection est h (en $W.m^{-2}.K^{-1}$).



On considère uniquement le régime permanent (aucune température ne dépend du temps), le problème est à une seule dimension x (pas d'effet de bord) et les échanges en $x=0$ et $x=e$ sont limités à une surface transversale S.

a) Donner le profil de température $T(x)$ dans la plaque.

b) Après avoir rappelé la loi de Newton donnant j_{th} en $x=e$ entre la plaque et l'air, déterminer l'expression de la température de surface $T(e)$ de la plaque en fonction de T_0, T_1, λ, h et e. Écrire ensuite j_{th} en fonction des mêmes données, et en déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} équivalente ; la commenter.

c) Examiner les deux cas limites suivant la valeur du rapport he/λ, préciser dans chaque cas les conditions physiques, donner la valeur de $T(e)$, de la puissance thermique totale de refroidissement, et proposer un exemple simple de la vie courante.

56. Température à l'intérieur de la Terre

La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R = 6\,370$ km et de masse volumique $\rho = 2\,800$ kg.m^{-3}.

Le température à l'intérieur de la Terre est une fonction de $r = OM$ distance entre le point d'étude M et la centre de la Terre O ; elle est notée $T(r)$ et décroît en fonction de r. La température à la surface de la Terre est $T_0 = 290$ K.

On suppose que le régime permanent de refroidissement de la Terre est atteint.

La conduction est le seul mode de transfert thermique envisagé et la conductivité thermique de la Terre, $\lambda = 4$ W.m^{-1}.K^{-1}, est supposée uniforme.

Dans cette modélisation simplifiée, on définit deux zones :

– du centre de la Terre jusqu'à la limite de la lithosphère en $r_m = 6\,280$ km soit pour $0 \le r \le r_m$, il n'y a aucune source de production de « chaleur ».

– pour l'ensemble de la lithosphère (d'une épaisseur de 90 km), soit pour $r_m \le r \le R$, on tient compte de la source de chaleur que constitue la radioactivité d'éléments, essentiellement l'uranium. Ces sources radioactives dégagent, dans la lithosphère, une puissance thermique par unité de masse notée $H = 5.10^{-10}$ W.kg^{-1} supposée constante et uniforme.

a) À partir d'un bilan d'énergie portant sur une coquille sphérique d'épaisseur dr, sans source thermique, comprise entre deux sphères, une de rayon r et l'autre de rayon $r + dr$, montrer que l'équation de diffusion s'écrit, pour $0 \le r \le r_m$:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

b) Intégrer cette relation afin d'obtenir l'évolution de la température en fonction de r. Exprimer $T(r)$ en fonction de deux constantes d'intégration A et B. Quelle condition aux limites permet de déterminer la valeur de l'une d'entre elles ? Quelle est la signification de l'autre ? Commenter les résultats j_{th} et $T(r)$ obtenus dans cette zone.

c) En considérant une coquille sphérique similaire à celle définie plus haut, mais pour $r_m \le r \le R$, faire un nouveau bilan d'énergie et en déduire la nouvelle équation de diffusion.

d) Déduire de l'équation précédente l'évolution de la température dans la lithosphère en fonction de r, de différents paramètres, et de deux constantes d'intégration C et D.

e) Quelles conditions aux limites doit-on appliquer à la lithosphère ? En déduire C et D en fonction de T_0, R, r_m, ρ, H et λ, puis donner, pour la lithosphère, l'expression de la température en fonction de r.

f) Tracer sommairement la fonction $T(r)$ dans la Terre, puis calculer numériquement la température T_C au centre de la Terre ainsi que le gradient de température dT/dr en K.km^{-1} à la surface de la Terre.

g) Exprimer le flux thermique total Φ en surface de la Terre en fonction de la puissance radioactive dissipée P_d ; commenter ce résultat et faire l'application numérique.

57. Température dans le sol (*)

Le sol terrestre est localement assimilé à un demi-espace $(x > 0)$ homogène ; $\rho = 3{,}1.10^3$ kg.m^{-3} ; $c = 870$ J.kg^{-1}.°C^{-1} ; $\lambda = 1{,}8$ W.m^{-1}.°C^{-1}.

$T(x,t)$ représente la température dans le sol à la date t et à la profondeur x.

On suppose que la température à la surface du sol $(x = 0)$ évolue au cours de l'année suivant la loi :

$$T(0,t) = T_0 + a\cos\omega t \quad \text{(avec } a \text{ constant et } T' = 2\pi/\omega = 1 \text{ an)}$$

et qu'à grande profondeur, la température du sol tend vers la moyenne annuelle :

$$T(\infty,t) = T_0$$

a) En posant $T(x,t)=T_0+u(x,t)$, chercher une solution en régime forcé sous la forme $\underline{u}(x,t)=\underline{f}(x)e^{i\omega t}$. Introduire $\delta=\sqrt{2\lambda/\rho c\omega}$ et donner $T(x,t)$ en fonction de T' et $\lambda'=2\pi\delta$; commenter cette solution. Quelle est la vitesse de phase v_φ ?

AN : Calculer δ, λ' et v_φ.

b) En $x=0$: au 1er janvier $T_{min}=-10$ °C et au 1er juillet $T_{max}=30$ °C. Vers quelle date la température est-elle minimale à la profondeur $x=2$ m et quelle est cette valeur ?

Tracer les graphes superposés de $T(0,t)$ et de $T(x=2\text{ m},t)$ et les commenter.

c) Estimer l'effet sur $T(x=2\text{ m},t)$ des variations de température journalières.

58. La sensation de chaud

« Qui du bois ou de l'acier, à la même température, semble le plus chaud ? »

$t<0$; $T=T_1=37$ °C (main) uniforme pour $x<0$

$T=T_2=20$ °C (table) uniforme pour $x>0$

Le contact a lieu à l'instant $t=0$ dans le plan $x=0$ et on adopte le modèle suivant :

- le problème est unidimensionnel, on cherche $T(x,t)$
- l'expérience est de courte durée, les solides peuvent être considérés comme illimités, soit pour $t>0$, $T(-\infty,t)=T_1$ et $T(+\infty,t)=T_2$
- on admet qu'à l'interface s'établit instantanément une température stationnaire T_0.

a) Vérifier que $f_D(u)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-y^2}\,dy$ où $u=\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ avec $f_D(\pm\infty)=\pm1$ est solution de l'équation de diffusion (revoir les indications à la fin de « Conseils à suivre »).

b) On cherche $T(x,t)=a_i+b_i f_{D_i}(x,t)$; donner a_i et b_i en fonction de T_0 et T_i $(i=1,2)$ où D_i est le coefficient de diffusion du milieu i ; commenter.

c) Exprimer T_0 en fonction de T_1, T_2 et des effusivités E_1 et E_2 $(E=\sqrt{\rho c\lambda})$.

AN : Calculer T_0 sachant que $E_1=1{,}8.10^3$ W.m^{-2}.K^{-1}s$^{1/2}$ (main) ; $E_2=0{,}4.10^3$ (bois) ou $E_2=14.10^3$ (acier) ; conclusion.

d) Justifier la phrase « à l'interface s'établit instantanément une température stationnaire T_0 ».

59. Résolution numérique de « l'équation de la chaleur » 1 D

Deux matériaux cylindriques isolés latéralement de même section S, de même axe Ox, de même conductivité λ, de même masse volumique μ de même capacité thermique massique c, et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x=L_1$. Les extrémités $x=0$ et $x=L_1+L_2$ sont maintenues aux températures respectives T_1 et T_2 (régime forcé), températures initiales des deux barres.

La discrétisation numérique consiste à approcher la fonction T vérifiant l'équation de diffusion thermique :

- pour l'approximation numérique temporelle, $k = \mathrm{d}t$ est le pas de la subdivision uniforme $(t_i)_{i\in[0,N_t]}$ de l'intervalle de temps $[0,D]$: $t_i = ik$ et $\tilde{T}^i(x)$ est l'approximation de $T(x,t_i)$ pour $0 \le i \le N_t$,
- pour l'approximation numérique spatiale, $h = \mathrm{d}x$ est le pas de la subdivision uniforme $(x_n)_{n\in[0,N_x]}$ de l'intervalle $[0,L]$: $x_n = nh$ et $\tilde{T}_n(t)$ est l'approximation de $T(x_n,t)$ pour $0 \le n \le N_x$.

En conclusion, $\tilde{T}_n^i$ correspond à l'approximation numérique de la solution $T(x = nh, t = ik)$ donnée sur un maillage spatial de pas h et une discrétisation temporelle de pas k.

a) Montrer qu'un schéma numérique explicite d'ordre 2 en espace et 1 en temps (méthodes d'Euler) permet d'écrire l'équation discrétisée de la chaleur sous la forme :

$$\tilde{T}_n^{i+1} = \tilde{T}_n^i + \frac{k\alpha}{h^2}\left(\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i\right) \quad \left(\text{avec } \alpha = \frac{\lambda}{\mu c} \text{ diffusivité thermique}\right)$$

b) Écrire un programme Python pour $T_1 = 0$ °C, $T_2 = 1$ °C et $L_1 = L_2 = 0{,}5$ m et $\alpha = 10^{-4}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$ réalisant la simulation sur 500 s. La structure décrivant la température T est une matrice (liste de listes) ; le pas de discrétisation temporelle vaut 0,01 s et le pas de discrétisation spatiale vaut 0,01 m.

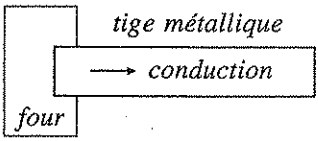
c) Représenter la température au sein du système pour les instants : 125 s, 250 s, 375 s et 500 s (*plot* du module *matplotlib.pyplot*). Proposer une représentation 2D (*imshow*). Commenter.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Les modes de transfert thermique

1. La conduction ou diffusion thermique est le transfert qui intervient dans un milieu dont la température n'est pas homogène et qui ne s'accompagne pas, à l'échelle macroscopique, de mouvement de matière. Ce mode est prépondérant dans les solides.
   Un exemple générique consiste à prendre une tige métallique dont l'extrémité gauche est encastrée dans un four maintenant une température donnée (à l'image d'un manche de casserole). La conduction fait que l'extrémité droite qui donne sur l'air va voir sa température augmenter.

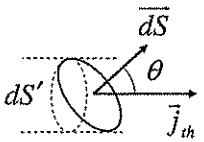


2. La convection, en revanche, implique un déplacement macroscopique de matière, et concerne donc les fluides (liquides et gaz) et pas les solides.
   - la convection se produit naturellement dans un fluide dans lequel existe un gradient de température : l'eau dans une casserole chauffée par le fond, l'air dans une pièce chauffée dans la partie basse ; les parties chaudes, moins denses, ont tendance à s'élever et les parties froides, plus denses, à s'enfoncer par gravité.
   - la convection peut être forcée par exemple en tournant son café avec une cuillère pour homogénéiser la concentration en sucre, ou par une pompe provoquant l'écoulement d'un fluide « caloporteur » dans un système de conduites ; c'est le cas de l'eau dans un chauffage central depuis la chaudière vers le radiateur, ou d'un fluide frigorigène qui circule dans un circuit fermé (avec en plus changement d'état) comme dans un réfrigérateur ou une climatisation de voiture.

3. Tout corps émet un rayonnement électromagnétique qui transporte de l'énergie susceptible d'échauffer le corps qui la reçoit (et qui en prélève au corps émetteur). Contrairement à la conduction et à la convection, le transfert par rayonnement peut s'effectuer dans le vide.
   Le spectre d'émission est continu et dépend de la température du corps ; il suit en particulier la loi de Wien qui relie simplement la longueur d'onde λ_m pour laquelle le spectre émis est maximal et la température T par : $\lambda_m T \approx 3\,000\ \mu\text{m.K}$
   - pour le corps humain à 37 °C, $\lambda_m \approx 10\ \mu\text{m}$ est dans l'infrarouge et on parle de rayonnement thermique
   - pour le Soleil, dont la couleur d'émission dominante est le jaune, $\lambda_m \approx 0{,}6\ \mu\text{m}$, la température de surface est de l'ordre de 5 000 K.

Loi de Fourier

4. La densité volumique de courant thermique $\vec{j}_{th}$ est un champ de vecteur dont le flux à travers une surface élémentaire orientée $\overrightarrow{dS}$ est la puissance thermique (en W) qui traverse cette surface :



$$\boxed{dP = \vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS}}$$

j_{th} s'exprime en $W.m^{-2}$ comme un vecteur de Poynting.

Le produit scalaire permet de tenir compte de l'inclinaison de $\overrightarrow{dS}$ sur $\vec{j}_{th}$; en effet, $\vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS} = j_{th} \times dS \cos\theta = j_{th} \times dS'$ où dS', projection de dS, est la surface « utile ».

Rq : Autre notation : $d\Phi = \vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS}$ où Φ est appelé flux thermique (en W)

La quantité d'énergie d^2E qui par conduction thermique traverse l'élément de surface dS pendant le temps dt est : $d^2E = dP\,dt = \vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS}\,dt$.

5. La cause du flux thermique de type conductif est la non uniformité du champ de température ; Fourier propose la loi :

$$\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T}$$

Le signe – traduit conformément au 2nd principe de la thermodynamique que les transferts thermiques s'effectuent *spontanément* dans le sens des températures décroissantes. Le coefficient λ positif est la conductivité thermique du corps étudié (en $W.m^{-1}.K^{-1}$).

La loi d'Ohm s'écrit sous forme analogue : $\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ (σ est la conductivité électrique).

Résistance thermique

6. Le flux thermique à travers la surface S de la tige conductrice est :

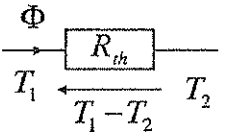
$$\Phi = \iint \vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS} = \iint j_{th}\,dS = -\lambda\frac{dT}{dx}S$$

car $\vec{j}_{th} = j_{th}\,\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}_x$ sont colinéaires, et sur la surface S à $x = cste$, $j_{th}(x)$ est uniforme.

Or en régime stationnaire (et en l'absence de source volumique) ce flux Φ est uniforme (car s'il ne l'était pas, si par exemple le flux d'entrée était supérieur au flux de sortie, alors la température de la tige augmenterait), soit Φ indépendant de x (et donc ici également $j_{th}(x)$ indépendant de x car la section S est uniforme), d'où en séparant les variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda S}dx \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda S}(L-0)$$

Ce résultat s'écrit sous la forme $T_1 - T_2 = R_{th}\Phi$ où R_{th} est la résistance thermique du tronçon :



$$\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}} \quad (\text{en K.W}^{-1})$$

L'inverse $G_{th} = 1/R_{th}$ est la conductance thermique ; sa définition par $\Phi = G_{th}(T_1 - T_2)$ montre que pour une différence de température donnée, la puissance transférée est d'autant plus grande que la conductance du milieu est élevée.
La résistance, indépendante du temps, s'évalue en régime stationnaire.

Rq : Comme en électrocinétique, la définition de la résistance en régime permanent peut se comprendre par le rapport :

$$\text{Résistance} = \frac{\text{cause}}{\text{conséquence}} = \frac{\text{différence de potentiel}}{\text{intensité du courant}} = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{U}{I}$$

$$\text{Résistance thermique} = \frac{\text{cause}}{\text{conséquence}} = \frac{\text{différence de température}}{\text{flux thermique}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

7. Les règles d'association série et parallèle des résistances thermiques sont les mêmes qu'en électricité (la question **20.** établit ces règles). Voici le tableau comparatif :

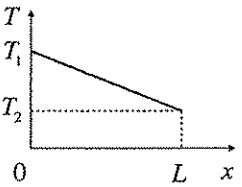
Électrocinétique	**Thermique**
différence de potentiel : $V_1 - V_2$	différence de température : $T_1 - T_2$
intensité du courant : I	puissance ou flux thermique : P ou Φ
résistance électrique : $R = V_1 - V_2 / I$	résistance thermique : $R_{th} = T_1 - T_2 / \Phi$
conductivité électrique : σ	conductivité thermique : λ
capacité électrique : C $I = C\dfrac{d(V_1 - V_2)}{dt}$	capacité thermique : C_{th} $\Phi = C_{th}\dfrac{d(T_1 - T_2)}{dt}$

8. En régime stationnaire, le flux $\Phi = -\lambda \dfrac{dT}{dx} S$ calculé à la question **6.** est uniforme le long de la tige, d'où :

$$\frac{dT}{dx} = cste = \frac{T_2 - T_1}{L} = -\frac{T_1 - T_2}{L} < 0$$

puisque (conditions aux limites) $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$
Par intégration :

$$\boxed{T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x}$$



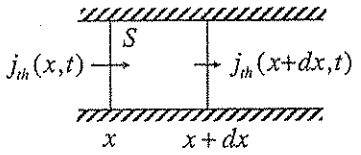
(le signe – est justifié par le fait que $T_2 < T_1$).

Rq 1 : Ce régime, bien que stationnaire, n'est pas un régime libre d'équilibre, mais un régime forcé par le maintien de températures $T_2 \neq T_1$ aux deux extrémités et qui empêche le système d'atteindre l'état d'équilibre thermodynamique pour lequel la température serait uniforme.

Rq 2 : Le profil de température $T(x)$ n'est nullement nécessaire pour le calcul de la résistance.

« L'équation de la chaleur »

9. Appliquons le premier principe au système constitué d'une tranche de section S et d'épaisseur dx dont la masse est $\rho S dx$.
En l'absence d'autres phénomènes, le différentiel de flux d'énergie thermique entrant – sortant pendant le temps dt conduit à modifier la température de la tranche pendant dt (penser à $Q = mc\Delta T$!) :



$$j_{th}(x,t)Sdt - j_{th}(x+dx,t)Sdt = \rho S dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad \text{soit} \quad -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Rq : Sur la figure, le flux entrant à gauche est plus important que le flux sortant à droite, et donc la température dans la tranche augmente au cours du temps ; en effet d'après l'équation de conservation :

$$\text{si } j_{th}(x,t) > j_{th}(x+dx,t) \text{ soit } \frac{\partial j_{th}}{\partial x} < 0 \text{, alors } \frac{\partial T}{\partial t} > 0 .$$

On y traduit la loi de Fourier : $j_{th} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$ où λ est pris constant, d'où l'équation de diffusion à une dimension :

$$\boxed{D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{D = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

D est le coefficient de diffusion thermique (ou diffusivité), en $m^2 s^{-1}$.

10. On peut imaginer des apports volumiques d'énergie thermique tel qu'un effet Joule si le milieu conducteur électrique est parcouru par un courant électrique, ou à la suite de réactions chimiques ou nucléaires si le milieu en est le siège. On peut citer aussi un effet photothermique dans un verre absorbant où un laser pulsé sert de source volumique de chaleur, ou encore considérer la puissance volumique reçue par un aliment dans un four à micro-ondes,...

* L'énergie thermique reçue pendant dt par conduction à travers les parois en x et $x+dx$:

$$j_{th}(x,t)Sdt - j_{th}(x+dx,t)Sdt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}dx\,Sdt$$

* ajoutée à celle reçue par d'autres apports pendant dt :

$p_v Sdx\,dt$ où p_v est leur puissance volumique (en $W.m^{-3}$)

* contribue à modifier la température de la masse dans la tranche pendant dt :

$$\rho Sdx\,c\big(T(x,t+dt)-T(x,t)\big) = \rho Sdx\,c\frac{\partial T}{\partial t}dt$$

d'où en simplifiant par $Sdxdt$:

$$\boxed{\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \rho c\frac{\partial T}{\partial t} = p_v}$$

qui représente l'équation de conservation avec un terme de source.

Rq : Cette équation écrite sous la forme $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = p_v - \frac{\partial j_{th}}{\partial x}$ montre que la variation de la température au cours du temps est due à la somme d'un terme de création p_v et d'un terme d'échange $-\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$.

L'équation de conservation (pour son contenu, voir la question **14.**) se généralise à trois dimensions et en géométrie quelconque en :

$$\boxed{\text{div}\,\vec{j}_{th} + \rho c\frac{\partial T}{\partial t} = p_v}$$

La loi de Fourier : $j_{th} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$, conduit alors à l'équation de diffusion généralisée :

$$\boxed{\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_v = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}}$$

Bien sûr, on retrouve $\boxed{D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$ avec $\boxed{D = \frac{\lambda}{\rho c}}$ si $p_v = 0$.

On admet la généralisation : $\boxed{D\Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$ pour tout type de coordonnées.

Le laplacien pour une symétrie cylindrique (ni θ ni z) est : $\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$

Le laplacien pour une symétrie sphérique (ni θ ni φ) est : $\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$

11. Propriétés immédiates de l'équation de diffusion :

* Linéarité : L'équation de diffusion est linéaire en T et donc le théorème de superposition s'applique.

* Irréversibilité : L'équation de diffusion est du premier ordre par rapport au temps et donc le changement de t en $-t$ ne la laisse pas invariante, contrairement à l'équation de d'Alembert du second ordre par rapport au temps. Ceci traduit la profonde irréversibilité des phénomènes de diffusion car ils tendent à l'uniformisation de la densité particulaire ; la diffusion, par essence irréversible, est donc créatrice d'entropie.

* Lien entre grandeurs caractéristiques : Soient L et τ une distance et un temps caractéristiques de la diffusion thermique. Alors par homogénéité, l'équation :

$$D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t} \text{ conduit à } D\frac{T}{L^2}\approx\frac{T}{\tau} \text{ soit } \boxed{L\approx\sqrt{D\tau}}$$

qui s'interprète également comme la distance L atteinte par la diffusion pendant le temps τ.

12. De manière générale, il faut traduire **la continuité du flux thermique** sur la limite d'un domaine, car il ne peut pas y avoir d'accumulation d'énergie sur la surface de contact séparant deux milieux.

En notant $\Phi(x_{\text{lim}},t)=j_{th}(x_{\text{lim}},t).S=-\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x_{\text{lim}},t)$, on peut distinguer trois cas simples :

* si l'extrémité est isolée : $\boxed{\Phi(x_{\text{lim}},t)=0,\ \forall t}$ soit $\frac{\partial T}{\partial x}(x_{\text{lim}},t)=0,\ \forall t$

* si deux solides sont en contact (même surface) : $\boxed{\Phi_1(x_{\text{lim}},t)=\Phi_2(x_{\text{lim}},t),\ \forall t}$

$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}(x_{\text{lim}},t)=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}(x_{\text{lim}},t)$, $\forall t$, et donc plus λ est grand, plus $\partial T/\partial x$ est petit : le solide de meilleure conductivité (qui évacue le mieux le flux thermique) a la répartition de température la plus uniforme.

* pour un solide en contact avec un fluide de température T_0 au loin, l'échange est régi par la loi de Newton : par unité de surface S,

$$\boxed{\Phi(x_{\text{lim}},t)=h\big(T(x_{\text{lim}},t)-T_0\big)S,\ \forall t} \text{ soit } -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x_{\text{lim}},t)=h\big(T(x_{\text{lim}},t)-T_0\big)$$

proportionnel à la différence de température, celle de la surface du solide et celle du fluide au loin, où h est le coefficient de transfert thermique de surface (en $W.m^{-2}.K^{-1}$) ; voir les précisions à la question **36.**

Rq : Dans le cas d'une convection très efficace, $h\to\infty$, la condition précédente prend la forme : $T(x_{\text{lim}},t)-T_0=-\frac{\lambda}{h}\frac{\partial T}{\partial x}(x_{\text{lim}},t)\to 0$ soit : $\boxed{T(x_{\text{lim}},t)=T_0}$

L'extrémité du solide prend alors la température du fluide.
Si le coefficient de Newton h n'est pas donné par l'énoncé, c'est cette condition aux limites qu'il faut privilégier (voir aussi la question **55.**).

Applications directes du cours

L'équation de diffusion

13. La diffusion thermique est régie par la loi de Fourier qui suppose l'existence d'un gradient de température ; elle ne se fait donc que dans un milieu hors d'équilibre thermique ! L'hypothèse d'équilibre thermodynamique local est essentielle (soit une situation très voisine d'une situation d'équilibre) afin que les champs spatio-temporels de température, flux thermique etc...gardent un sens.

14. En diffusion thermique, l'équation de conservation $\frac{\partial j_{th}}{\partial x}+\frac{\partial(\rho cT)}{\partial t}=0$ (la forme $\frac{\partial j_{th}}{\partial x}+\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=0$ suppose ρc constant) montre qu'il y apparaît une densité volumique d'énergie $e=\rho cT$; la grandeur conservée est donc l'énergie $E=mcT$!

Pour mettre un nom sur cette énergie, il faut examiner les conditions opératoires :

* si l'opération s'effectue à volume constant, $E\equiv U=mc_vT$ (et $e=u$) ; E et c représentent alors l'énergie interne U et la capacité thermique massique à volume constant c_v.
* si, comme dans la plupart des cas, l'opération s'effectue à pression constante, $E\equiv H=mc_pT$ (et $e=h$) ; E et c représentent alors l'enthalpie H (car la dilatation rajoute un travail des forces de pression) et la capacité thermique massique à pression constante c_p.

En réalité pour un solide ou un liquide, $c_p\approx c_v$ noté c. En revanche, pour un gaz où $c_p\neq c_v$, il faudrait distinguer les évolutions isochores ou isobares, mais là la conduction est souvent masquée par la convection !

15. p_v est la puissance volumique algébrique apportée (p_v en $\mathrm{W.m^{-3}}$). L'équation de conservation généralisée avec un terme de source :

$$\mathrm{div}\,\vec{j}_{th}+\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=p_v$$

sur laquelle on traduit la loi de Fourier la plus générale : $\vec{j}_{th}=-\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$

conduit avec $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T=\Delta T$, à l'équation de diffusion généralisée (et pour une géométrie quelconque) :

$$\boxed{\lambda\Delta T+p_v=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}}$$

Bien sûr si $p_v=0$, on retrouve $\boxed{D\Delta T-\frac{\partial T}{\partial t}=0}$ avec $\boxed{D=\frac{\lambda}{\rho c}}$

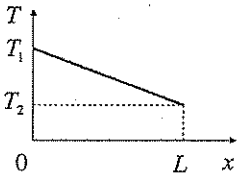
16. En régime stationnaire, l'équation de conservation $\frac{\partial j_{th}}{\partial x}+\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=0$ se réduit à $\frac{dj_{th}}{dx}=0$ soit j_{th} indépendant de x : le flux thermique $\Phi = j_{th}S$ est uniforme sur toute la longueur. Si la température d'une tranche est constante au cours du temps, cela signifie bien que le flux thermique entrant à gauche est égal au flux thermique sortant à droite.

Rq : En régime stationnaire, $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, l'équation de diffusion $D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial T}{\partial t}=0$ se réduit à $\frac{d^2T}{dx^2}=0$ soit $T(x)=ax+b$ qui redonne $\Phi = j_{th}S=-\lambda\frac{dT}{dx}S=-\lambda aS$ indépendant de x.

Ce résultat se généralise à une géométrie quelconque : en effet, en régime stationnaire, $\text{div}\,\vec{j}_{th}+\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=0$ conduit à $\text{div}\,\vec{j}_{th}=0$; $\vec{j}_{th}$ est alors un champ à flux $\Phi = j_{th}(r)S(r)$ conservatif, par analogie avec le champ magnétique.

17. La question **8.** a montré que les propriétés du flux suffisent à déterminer $T(x)$. On peut aussi partir de l'équation de diffusion $D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial T}{\partial t}=0$ qui, en régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, se limite à $\frac{d^2T}{dx^2}=0$; la solution affine $T(x)=ax+b$ se détermine par les conditions aux limites $T(0)=T_1$ et $T(L)=T_2$:

$$\boxed{T(x)=T_1-\frac{T_1-T_2}{L}x}$$



(le signe – est justifié par le fait que $T_2<T_1$).

18. L'équation de diffusion thermique est $D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial t}=0$.

avec $f(x,t)=\frac{K}{\sqrt{t}}e^{-\frac{ax^2}{t}}$, on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2aKx}{t^{3/2}}e^{-\frac{ax^2}{t}}$

soit $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2aK}{t^{3/2}}\left(1-\frac{2ax^2}{t}\right)e^{-\frac{ax^2}{t}}$, puis $\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{K}{2t^{3/2}}\left(1-\frac{2ax^2}{t}\right)e^{-\frac{ax^2}{t}}$

L'équation est vérifiée $\forall x$ et $\forall t$ pour $\boxed{a=\frac{1}{4D}}$

Cette solution en régime non stationnaire et certaines autres (voir par exemple les questions **57.** et **58.**) montrent la variété des solutions de l'équation de diffusion. Les solutions physiques s'obtiennent par combinaison linéaire sur ces fonctions

mathématiques. Elles diffèrent toutes par les conditions initiales en $t = 0$, ainsi que par les conditions aux limites en $x = \pm\infty$. Le choix se fait donc en fonction du problème concret à résoudre.

19. Durée d'un régime transitoire

L'analyse dimensionnelle réalisée sur l'équation de diffusion

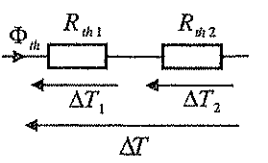
$$D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \text{ conduit à } D\frac{T}{L^2} \approx \frac{T}{\tau} \text{ soit } L \approx \sqrt{D\tau}$$

qui s'interprète aussi comme la distance L atteinte par la diffusion pendant le temps τ

Avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$, il vient $\tau \approx \frac{L^2 \rho c}{\lambda} \approx \underline{45 \text{ min}}$ (et avec $L' = 2L$, $\tau' = 4\tau \approx 3$ h), résultat numérique qui confirme que la diffusion thermique est un phénomène lent.

Résistance thermique

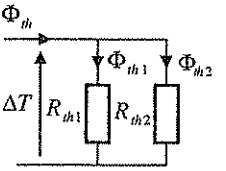
20. Si R_{th1} et R_{th2} sont en série, alors elles sont traversées par le même flux thermique Φ_{th} ; en notant ΔT_1 et ΔT_2 les différences de température à leurs extrémités (orientées dans le même sens), la différence de température totale est :



$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = R_{th1}\Phi_{th} + R_{th2}\Phi_{th} = (R_{th1} + R_{th2})\Phi_{th}$$

ou encore $\Delta T = R_{th}^{éq}\Phi_{th}$ avec $\boxed{R_{th}^{éq} = R_{th1} + R_{th2}}$

Si R_{th1} et R_{th2} sont en parallèle, alors elles ont leurs extrémités communes et sont soumises à la même différence de température ΔT ; en notant Φ_{th1} et Φ_{th2} les flux thermiques qui les traversent (orientés dans le même sens), le flux thermique total est :



$$\Phi_{th} = \Phi_{th1} + \Phi_{th2} = \frac{\Delta T}{R_{th1}} + \frac{\Delta T}{R_{th2}} = \left(\frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}\right)\Delta T$$

ou encore $\Phi_{th} = \frac{\Delta T}{R_{th}^{éq}}$ avec $\boxed{\frac{1}{R_{th}^{éq}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}}$ ou $\boxed{R_{th}^{éq} = \frac{R_{th1}R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}}}$

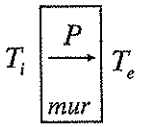
Ainsi les règles d'association série et parallèle des résistances thermiques sont les mêmes qu'en électricité : en série (un mur avec revêtement par exemple), le flux thermique est le même et ce sont les différences de température qui s'ajoutent ; en parallèle (un mur et une porte dans le mur), les flux thermiques s'ajoutent pour une même différence de température.

21. Il suffit d'appliquer la formule $R_{th} = \dfrac{T_S - T_E}{P} = \dfrac{85-15}{1200} = 5{,}8.10^{-2}$ K.W^{-1}.

22. Application élémentaire à l'isolation thermique

Les résistances thermiques du mur et du revêtement de surface S sont :

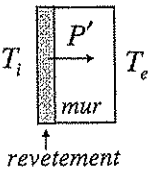
$$R_m = \frac{l}{\lambda S} \quad \text{et} \quad R_r = \frac{e}{\lambda' S}$$



Sans et avec revêtement, les puissances thermiques perdues sont :

$$P = \frac{T_i - T_e}{R_m} \quad \text{et} \quad P' = \frac{T_i - T_e}{R_m + R_r}$$

car les deux résistances sont en série.



Rq : La température intérieure T_i n'est pas modifiée, car le but de l'isolation n'est pas de l'augmenter en gardant la même consommation d'énergie, mais bien de réduire la consommation pour une température inchangée.

d'où $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{1}{1+\dfrac{R_r}{R_m}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{e\lambda}{l\lambda'}} \approx 0{,}39 < 1$ essentiellement car $\lambda' \ll \lambda$.

23. Stabilisation de la température dans un igloo

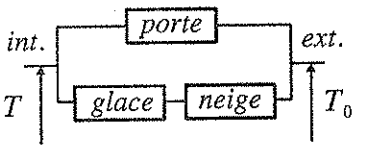
a) 0,5 MJ d'énergie dégagée par heure (ou 3600 s) correspond à une puissance (ou flux) thermique $P_{th} = 0{,}5.10^6 / 3600 = 139$ W.

b) La puissance thermique P_f traversant les parois par conduction thermique est donnée par la relation : $P_f = \dfrac{1}{R_i}(T - T_{ext})$ où $R_i = \dfrac{e}{\lambda S_i}$ est la résistance thermique de l'igloo. Pour que la température dans l'igloo reste constante (en régime stationnaire), il faut que le bilan de puissance sur le système igloo soit nul : toute la puissance fournie par l'inuit à la paroi de l'igloo est transférée à l'air extérieur (une manière de traduire la continuité du flux) :

$$P_{th} = P_f \quad \text{soit} \quad P_{th} = \frac{\lambda S_i}{e}(T - T_{ext}) \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\lambda S_i}{P_{th}}(T - T_{ext})$$

AN : $e = 43$ cm

c) La porte d'entrée en peau de phoque est en parallèle sur la paroi de glace de l'igloo (même différence de température entre l'intérieur et l'extérieur pour les deux résistances en parallèle, mais un flux thermique plus important à travers la porte que les murs). En revanche la couche de neige fraîche (de conductivité thermique plus faible que celle de la glace) qui recouvre l'igloo est en série avec

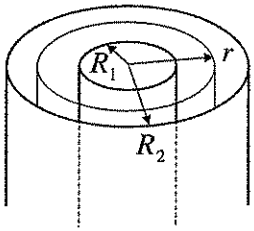


la glace (neige compactée) des murs (même flux à travers les deux pour des résistances en série et les différences de température s'ajoutent entre l'intérieur et l'interface d'un côté et l'interface et l'extérieur de l'autre).

24. Résistance d'un conducteur cylindrique (conduction radiale)

a) La résistance, indépendante du temps, s'évalue en régime stationnaire. Et comme le problème est à symétrie cylindrique, la température n'est fonction que de r ; la loi de Fourier s'écrit simplement : $j_{th} = -\lambda \dfrac{dT}{dr}$.

Le flux thermique ($\vec{j}_{th}$ est radial) à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h dans le conducteur est :



$$\Phi = \iint \vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS} = j_{th}(r).S = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h$$

car $\vec{j}_{th}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires, et sur le cylindre $r = cste$, $j_{th}(r)$ est uniforme.

Or en régime stationnaire (et en l'absence de source volumique) ce flux est uniforme (s'en convaincre par un raisonnement par l'absurde), soit Φ indépendant de r, d'où en séparant les variables :

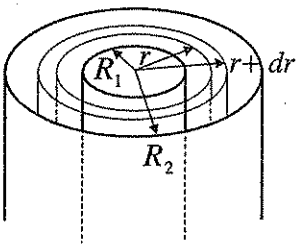
$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda h}\frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda h}\ln\frac{R_2}{R_1} < 0$$

résultat du type $T_1 - T_2 = R_{th}\Phi$ d'où la résistance thermique $\boxed{R_{th} = \dfrac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda h}}$

b) On considère une couronne cylindrique d'épaisseur dr (entre r et $r+dr$) et de hauteur h ; le bilan thermique pendant dt s'écrit :

$$+2\pi r h\, j_{th}(r,t)dt - 2\pi(r+dr)h\, j_{th}(r+dr,t)dt = \rho(2\pi r dr h)c\frac{\partial T}{\partial t}dt$$

En effet, les surfaces des cylindres ne sont pas les mêmes en r et $r+dr$; par ailleurs le volume de la couronne s'obtient par : surface de base × hauteur. L'application de la formule de Taylor doit alors concerner la fonction $r.j_{th}(r)$:



après simplification par $2\pi h dr dt$,

$$-\frac{\partial(r\, j_{th})}{\partial r} = \rho c\, r\frac{\partial T}{\partial t}$$

et avec la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial r}$, il vient

$$\boxed{D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

soit précisément $D\Delta T - \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ et ici $\Delta T = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$.

En régime stationnaire, $\frac{\partial T}{\partial t}=0$ soit $\Delta T=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$.

$$r\frac{dT}{dr}=A \Rightarrow T(r)=A\ln r+B$$

et avec les conditions aux limites $T(r=R_1)=T_1$ et $T(r=R_2)=T_2$,

le profil de température est : $\boxed{T(r)=T_1-\frac{T_1-T_2}{\ln R_2/R_1}\ln\frac{r}{R_1}}$

Pour $T_1>T_2$, la température décroît avec l'éloignement par rapport à la conduite.

Le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}=-\lambda\overrightarrow{\text{grad}}\,T=\lambda\frac{T_1-T_2}{(\ln R_2/R_1)r}\vec{u}_r$

donne alors accès au flux : $\Phi=\iint\vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS}=j_{th}.2\pi rh=\frac{2\pi\lambda h(T_1-T_2)}{\ln(R_2/R_1)}$

indépendant de r (le flux est conservatif en régime stationnaire).

La définition $\Phi=\frac{T_1-T_2}{R_{th}}$ conduit à la résistance $\boxed{R_{th}=\frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda h}}$

La méthode du a) qui permet d'accéder directement à R_{th} sans passer par la connaissance explicite du champ de température $T(r)$ est de loin préférable à la méthode du b)...

25. Le conducteur sphérique (conduction radiale)

a) La méthode habituelle est celle du flux, sans passer par le profil de $T(r)$.

La résistance, indépendante du temps, s'évalue en régime stationnaire. Et comme le problème est à symétrie sphérique, la température n'est fonction que de r ; la loi de Fourier s'écrit simplement : $j_{th}=-\lambda\frac{dT}{dr}$.

Le flux thermique ($\vec{j}_{th}$ est radial) à travers une sphère de rayon r tel que $R_1<r<R_2$ dans le conducteur est :

$$\Phi=\iint\vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS}=\iint j_{th}(r).dS=j_{th}(r).S=-\lambda\frac{dT}{dr}4\pi r^2$$

car $\vec{j}_{th}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires, et sur la sphère $r=cste$, $j_{th}(r)$ est uniforme.

Or en régime stationnaire (et en l'absence de source volumique) ce flux est uniforme (s'en convaincre par un raisonnement par l'absurde), soit Φ indépendant de r, d'où en séparant les variables :

$$dT=-\frac{\Phi}{4\pi\lambda}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow T_2-T_1=\frac{\Phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)<0$$

résultat du type $T_1-T_2=R_{th}\Phi$ d'où la résistance thermique $\boxed{R_{th}=\frac{R_2-R_1}{4\pi\lambda R_1R_2}}$

b) Le bilan thermique pendant dt sur une coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r+dr$ dans le conducteur s'écrit :

$$+j_{th}(r).A\pi r^2 dt - j_{th}(r+dr).A\pi(r+dr)^2 dt = \rho(4\pi r^2 dr)\,c\frac{\partial T}{\partial t}dt$$

En effet, les surfaces des sphères ne sont pas les mêmes en r et $r+dr$; par ailleurs le volume de la coquille sphérique s'obtient par : surface de base × épaisseur. L'application de la formule de Taylor concerne la fonction $j_{th}(r).r^2$, et après simplification par $4\pi dr dt$ et division par r^2, il vient l'équation de conservation :

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial(j_{th}(r).r^2)}{\partial r} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

La loi de Fourier $j_{th} = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial r}$ conduit alors à l'équation de diffusion :

$$\boxed{D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{\partial T}{\partial t}=0} \quad \text{avec } D=\frac{\lambda}{\rho c}$$

Bien sûr cette équation n'est autre que $D\Delta T-\dfrac{\partial T}{\partial t}=0$, mais elle permet d'avoir l'expression du laplacien en coordonnées sphériques à symétrie sphérique.

En régime stationnaire, la distribution de température $T(r)$ est donnée par :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{dT}{dr}=\frac{A}{r^2} \;\Rightarrow\; T(r)=B-\frac{A}{r}$$

Les conditions aux limites $T_1\,(r=R_1) > T_2\,(r=R_2)$ donnent finalement :

$$\boxed{T(r)=T_1-\frac{1-R_1/r}{1-R_1/R_2}(T_1-T_2)}$$

Pour $T_1 > T_2$, la température décroît avec la distance au centre.

Applications

26. Chauffage d'une pièce avec pertes thermiques

a) Considérons le système formé par l'air intérieur et les parois ; le 1er principe à pression constante, appliqué à ce système pendant l'intervalle de temps dt où la température intérieure T varie de dT, s'écrit : $dH = \delta Q$

- δQ se décompose en $\delta Q_1 = +P dt > 0$ correspondant au transfert thermique effectivement reçu de la part du radiateur et $\delta Q_2 = -\dfrac{T-T_0}{R}dt < 0$ correspondant au transfert thermique cédé par le système à l'extérieur pour $T > T_0$ (on parle de perte thermique) et qui est l'opposé de celui reçu par l'extérieur

– par ailleurs $dH = CdT$

d'où $\boxed{CdT = Pdt - \frac{T - T_0}{R}dt}$

b) Cette relation s'écrit en variable $T - T_0$: $\frac{d(T-T_0)}{dt} + \frac{T-T_0}{RC} = \frac{P}{C}$

équation différentielle tout à fait analogue à celle de la charge d'un condensateur, avec apparition d'un temps caractéristique du régime transitoire :

$$\boxed{\tau = RC}$$

La somme d'une solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière constante est $T(t) - T_0 = K\,e^{-t/\tau} + PR$

La condition $T(t=0) = T_0$ donne $K = -PR$

et finalement : $\boxed{T(t) = T_0 + PR\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

La température maximale atteinte au bout de quelques τ est $\boxed{T_M = T_0 + PR}$

AN : $\underline{\tau = 40 \text{ min}}$ et $\underline{T_M = 25\ °C}$

27. Ventilation d'un composant électronique

a) La loi de Newton affirme simplement que le flux thermique entre un solide (ici le composant) et un fluide (ici l'air) est proportionnel à la surface de contact, à la différence de température entre le solide et le fluide et à un coefficient h qui dépend des milieux en contact mais aussi de la vitesse de l'air pour tenir compte de la convection (qui prime sur la conduction).

Cette loi permet de définir une résistance de convection par $R_{conv} = \frac{T_1 - T_a}{\Phi_{th}} = \frac{1}{hS}$.

L'unité du coefficient h est le $W.m^{-2}.K^{-1}$.

b) La différence de température entre les deux faces du composant induit un flux thermique donné par :

$$\Phi_{th} = \frac{T_2 - T_1}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{d}(T_2 - T_1) \quad \text{car la résistance thermique est } R_{th} = \frac{d}{\lambda S}$$

Par continuité du flux thermique sur la face F_1, on a :

$$\Phi_{th} = \frac{\lambda S}{d}(T_2 - T_1) = h(T_1 - T_a)S \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{\lambda}{d}\frac{T_2 - T_1}{T_1 - T_a}}$$

AN : $\underline{h = 400\ W.m^{-2}.K^{-1}}$

La valeur de h est d'autant plus élevé que le débit de ventilation de l'air est important.

On peut compléter cet exercice par la question **42.**.

28. Température cutanée d'un mammifère

a) À l'extérieur de l'animal, en régime stationnaire et en l'absence de terme volumique de source dans l'air, le flux thermique est uniforme ; à travers une sphère de rayon r, il est indépendant du rayon de la sphère, et est donc égal à la puissance dégagée par l'animal :

$$\Phi = j_{th}(r).4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 P \quad \text{avec} \quad j_{th}(r) = -\lambda\frac{dT}{dr} \quad \text{(loi de Fourier)}$$

$$\text{soit} \quad dT = -\frac{PR^3}{3\lambda}\frac{dr}{r^2} \quad \text{qui s'intègre en} \quad \boxed{T(r) = T_0 + \frac{PR^3}{3\lambda r}}$$

compte tenu de la condition aux limites $T(r = \infty) = T_0$ (l'animal ne modifie pas la température de l'air au loin).

b) La température cutanée T_C de l'animal est alors donnée par :

$$\boxed{T_C = T(r = R) = T_0 + \frac{PR^2}{3\lambda}}$$

La différence $T_C - T_0$ entre la température cutanée de l'animal et celle du milieu est d'autant plus importante que la conductivité thermique du milieu est faible (difficulté d'évacuation de la chaleur), que la puissance thermique volumique de production est grande (métabolisme important), ou que l'animal est gros (effet thermique plus important).

c) P est donnée par $P = \frac{3\lambda}{R^2}(T_C - T_0)$ (on retrouve la loi de Newton)

AN : dans l'air : $\underline{P = 2{,}4\ \text{kW.m}^{-3}}$; dans l'eau : $\underline{P = 240\ \text{kW.m}^{-3}}$

Cette dernière application numérique explique pourquoi il n'existe pas de petits mammifères marins.

29. Création d'entropie en régime permanent par diffusion thermique

a) Par définition de la résistance thermique : $R = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$.

b) Entre t et $t + dt$, la variation d'entropie du système est la somme des termes d'échange et de création (deuxième principe) : $dS = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_1} + \delta S_C$

où $\delta Q_1 = \Phi\, dt$ représente le transfert thermique reçu par le solide de la part de la source 1 et $\delta Q_2 = -\Phi\, dt$ celui de la part de la source 2 (attention aux signes).

Par ailleurs, $dS = 0$, car le système n'évolue pas, en régime permanent, et l'entropie est une fonction d'état. On en déduit :

$$\delta S_C = \frac{-\Phi\, dt}{T_1} + \frac{\Phi\, dt}{T_2} = \frac{(T_1 - T_2)}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)dt = \frac{(T_1 - T_2)^2}{RT_1T_2}dt \text{, et finalement :}$$

$$\boxed{\frac{\delta S_C}{dt} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{R T_1 T_2}}$$

Commentaires :

- quelles que soient les températures et le sens du transfert thermique, la création d'entropie est positive, conformément au deuxième principe ;
- $\frac{\delta S_C}{dt} \to 0$ uniquement si $T_1 \to T_2$; le transfert thermique, s'il existe (c'est-à-dire si les températures T_1 et T_2 sont différentes) est toujours irréversible ;
- le taux de création d'entropie et donc l'irréversibilité sont d'autant plus importants que les températures T_1 et T_2 sont éloignées ;
- on tient là un exemple de transformation non adiabatique, irréversible, et malgré cela isentropique.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

30. Il y a entre les deux équations une différence profonde, traduite par le fait qu'une équation de diffusion admet une dérivée temporelle d'ordre un alors qu'elle est d'ordre deux dans une équation de d'Alembert :

- le changement de t en $-t$ ne laisse donc pas l'équation de diffusion invariante contrairement à celle de d'Alembert, ce qui traduit la profonde irréversibilité des phénomènes de diffusion, alors qu'une onde progressive peut se propager de manière identique dans les deux sens.
- dans de nombreux cas, les phénomènes de diffusion concernent au cours du temps, une distance $x \approx \sqrt{Dt}$, proportionnelle à la racine carrée du temps, où D est le coefficient de diffusion (unique coefficient dans l'équation de diffusion), c'est-à-dire une portion d'espace qui s'étend de moins en moins vite, alors que pour une onde, $x = ct$ où c est la célérité (unique coefficient dans l'équation de d'Alembert).

31. Non, au sens « célérité constante » comme pour une onde.
Oui, dans la mesure où la distance x_m atteinte par la diffusion pendant l'intervalle de temps t est $x_m \approx \sqrt{Dt}$, on définit une vitesse instantanée $v_m = dx_m / dt = 2\sqrt{D/t}$ qui diminue lorsque t augmente et qui confirme qu'au cours du temps la diffusion s'étend de moins en moins vite.

32. Par la convection, c'est-à-dire le déplacement macroscopique de matière. Au quotidien, la diffusion étant un phénomène trop lent, la convection est toujours activée pour accélérer l'homogénéisation d'un milieu : on remue une soupe réchauffée pour homogénéiser la température (et puis on la remue dans l'assiette après l'avoir salée pour homogénéiser la concentration de sel).
Dans les solides où la convection est inexistante ou extrêmement lente, on observe une diffusion de particules ou une conduction thermique « pure ».

33. L'équation de conservation $\text{div}\,\vec{j}_{th} + \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = p_v$ montre qu'en régime stationnaire, le flux de diffusion n'est conservatif, soit $\text{div}\,\vec{j}_{th} = 0$, qu'en l'absence de terme de source, soit $p_v = 0$. En effet, qualitativement, si $p_v \neq 0$, le flux sortant d'un volume élémentaire est égal au flux entrant augmenté du terme de création.

Si j_{th} est uniforme sur une surface S donnée (par exemple à $r = cste$), la conservation du flux entraîne celle de $j_{th}.S$ (indépendant de r) ; or en coordonnées cylindriques ou sphériques où S dépend de r, il en est de même de j_{th} qui n'est donc pas uniforme dans tout l'espace. C'est même le cas en coordonnées cartésiennes lorsque la section du cylindre n'est pas constante, mais du type $S(x)$.

On retrouve bien sûr ces phénomènes en magnétostatique avec $\text{div}\,\vec{B} = 0$ (le flux magnétique est conservatif, mais l'intensité du champ magnétique diminue lorsque les lignes de champ s'écartent).

34. Il s'agit de l'énergie cinétique d'agitation thermique ; avec $\dfrac{1}{2}mu^2 = \dfrac{3}{2}k_B T$, il apparaît que dans un milieu dans lequel existe un gradient de température, il existe corrélativement un gradient d'énergie cinétique. Les collisions entre particules s'effectuent en moyenne avec transfert d'énergie cinétique microscopique de la plus énergétique vers la moins énergétique, d'où l'uniformisation des champs en régime libre (cette explication ne convient cependant pas pour les conducteurs métalliques, voir la question **39.**).

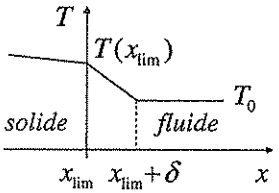
35. Il suffit de prendre la tige décrite à la question **1.** en régime forcé, c'est-à-dire en maintenant à gauche (le four branché) une température T_1 et à droite (l'air renouvelé) une température T_2. L'état stationnaire (assez long à atteindre en pratique) décrit à la question **8.** avec un profil de température affine n'est cependant pas un état d'équilibre thermodynamique puisque la température n'est pas uniforme.

36. h s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$.

La continuité de j_{th} à l'interface s'écrit :

$$j_{th}(x_{\text{lim}},t) = -\lambda_{sol}\left.\frac{\partial T(x_{\text{lim}},t)}{\partial x}\right|_{sol} = h\left(T(x_{\text{lim}},t) - T_0\right)$$

où l'indice *sol* concerne le solide.



Le membre de droite concerne le liquide ; écrivons :

$$h\left(T(x_{\text{lim}},t) - T_0\right) \approx h\delta\frac{T(x_{\text{lim}},t) - T(x_{\text{lim}}+\delta,t)}{\delta} \approx -\lambda_{fl}\left.\frac{\partial T(x_{\text{lim}},t)}{\partial x}\right|_{fl} \quad \text{soit } h = \frac{\lambda_{fl}}{\delta}$$

L'avantage de la loi de Newton est qu'elle tient compte également de la convection. En effet, si le fluide est plus agité, l'épaisseur δ de la couche limite diminue, et h augmente, ce qui rend la convection plus efficace dans le transfert thermique de surface.

Rq : La continuité de la température est également vraie, mais souvent cela ne conduit pas à grand-chose car la température de surface n'est en général pas connue.

37. La puissance volumique effectivement reçue par le milieu de la part du champ électrique est $p_v = \vec{j}.\vec{E}$. L'équation de conservation à la question **10.** s'écrit alors :

$$\text{div}\,\vec{j}_{th} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{j}.\vec{E} \quad \text{ou} \quad \text{div}\,\vec{j}_{th} + \frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} = \vec{j}.\vec{E}$$

(elle est établie séparément à une dimension à la question **52.**)
L'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique (vue au chapitre **2** à la question **13.**) où $\vec{R}$ est le vecteur de Poynting et u la densité volumique d'énergie électromagnétique, s'écrit :

$$\text{div}\,\vec{R} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div}\,\vec{R} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j}.\vec{E}$$

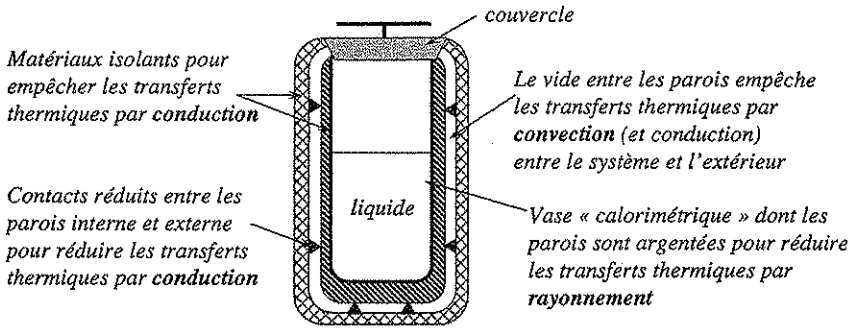
Dans les deux équations, le second membre est considéré comme un terme de source ; si le signe est négatif dans la seconde, c'est parce que le champ électrique fournit effectivement l'énergie au milieu et donc l'énergie électromagnétique du champ diminue.

38. Fourier a établi la loi sur la conduction thermique en 1807 ; Ohm s'en est inspiré en 1827 pour établir sa célèbre loi sur la conduction électrique...

39. Parce que dans les métaux, la conduction thermique fait intervenir les électrons libres comme la conduction électrique ; les deux conductivités, σ et λ, évoluent donc dans le même sens comme le montre le tableau ci-dessous. En revanche, le coefficient de diffusion thermique D dépend également de ρ et c_p, d'où une moindre concordance avec λ.

	σ	λ	ρ	c_p	$D = \lambda / \rho c_p$
	$S.m^{-1}$	$W.m^{-1}.K^{-1}$	$kg.m^{-3}$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	$m^2.s^{-1}$
Fe	$1{,}0.10^7$	80	$7{,}9.10^3$	$0{,}11.10^3$	$9{,}2.10^{-5}$
Al	$3{,}8.10^7$	200	$2{,}7.10^3$	$0{,}91.10^3$	$8{,}1.10^{-5}$
Au	$4{,}3.10^7$	300	$19{,}3.10^3$	$0{,}13.10^3$	$12{,}0.10^{-5}$
Cu	$6{,}0.10^7$	390	$8{,}9.10^3$	$0{,}38.10^3$	$11{,}5.10^{-5}$
Ag	$6{,}3.10^7$	420	$10{,}5.10^3$	$0{,}23.10^3$	$17{,}4.10^{-5}$

40. Les contacts entre le récipient interne contenant le liquide chaud et la coque externe en contact avec l'air se limitent à des taquets pour réduire les pertes par conduction.
Entre les deux récipients règne un vide approché pour réduire les pertes par convection.
Les parois des récipients sont recouvertes d'une mince couche métallique (comme les vases Dewar) pour limiter les pertes par rayonnement.



41. L'âge de la Terre est estimé à 4,5 milliards d'années, soit environ 100 fois plus que l'estimation de Lord Kelvin en 1866. En fait son calcul, par méconnaissance à l'époque, omettait le terme de source, à savoir la radioactivité naturelle découverte par Becquerel en 1896. Le flux thermique qui s'échappe de la Terre est dû en grande partie à l'énergie libérée par la désintégration radioactive de l'uranium et en faible partie au refroidissement de l'intérieur de la Terre qui se poursuit.

42. On utilise la diffusion en fixant sur la face arrière d'un générateur par exemple des ailettes de refroidissement placées dans l'air libre (voir le principe à la question **51.**). On utilise également la convection en plaçant un ventilateur sur la face arrière d'un oscilloscope numérique par exemple.
Ou de manière plus efficace les deux. Le microprocesseur de l'unité centrale d'un ordinateur installé sur la carte mère du boîtier chauffe à l'utilisation. Des ailettes de refroidissement sont prévues (le disperseur métallique), collées par une pâte thermique sur le processeur et elles-mêmes ventilées par un ventilateur permettant une meilleure évacuation de la chaleur.

43. Dans le but de réduire les pertes thermiques, le double vitrage est constitué de deux vitres (chacune plus épaisse qu'une vitre ordinaire pour en réduire la conductivité) séparées par de l'air ou un gaz neutre (et mauvais conducteur) maintenu immobile par des joints pour réduire les transferts par convection d'une vitre à l'autre (pour une application numérique, voir la question **50.**).

44. Les déperditions thermiques peuvent se faire soit par le mur, soit par les vitres de la fenêtre, qui sont donc associés en parallèle ; de ce fait, c'est celui dont la résistance thermique est la plus faible (le plus souvent la fenêtre) qui est responsable des plus grandes pertes. Il ne sert donc à rien d'isoler les murs (l'isolant et le mur sont alors en série) sans poser simultanément un double vitrage.

45. Les fenêtres sont fermées pour éviter la circulation avec l'air chaud de l'extérieur ; les volets sont rabattus pour éviter que les rayons de soleil ne pénètrent dans les pièces. Pour une meilleure efficacité, il est souhaitable de laisser une libre circulation d'air entre les vitres et les volets (plus chauds que l'air extérieur).

46. Dans le sol, il n'y a pas de convection et les écarts de température en surface sont très rapidement amortis en profondeur, surtout s'ils sont de courte durée, ce qui,

sous nos latitudes, met les canalisations à l'abri du gel (pour les AN, voir la question 57.).

47. Le brassage de l'air (phénomène de convection) rend l'air « plus chaud » au contact de l'aliment à cuire d'où un flux thermique plus important vers l'aliment ; mais si ce dernier a un coefficient de diffusion thermique trop faible, l'extérieur risque d'être brûlé et l'intérieur pas assez cuit (le choc thermique !). Pour la même raison, un courant d'eau froide est bien plus efficace qu'un bain Marie pour refroidir un biberon...
Dans un réfrigérateur à froid brassé, un ventilateur force la circulation de l'air pour permettre une meilleure homogénéité de la température (par rapport aux anciens réfrigérateurs à froid statique, plus froid en bas qu'en haut). Pour le réfrigérateur à froid ventilé (ou « No Frost ») l'air introduit dans l'appareil est déchargé de son humidité ce qui, en plus du froid brassé, empêche la formation de givre et limite la prolifération de bactéries.

Exercices

48. Marche au hasard dans un gaz

a) Le libre parcours moyen (l.p.m) l est la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives.

Pour un gaz parfait : $P = n k_B T \implies \underline{n = \frac{P}{k_B T} = \frac{10^5}{1{,}38.10^{-23} \times 293} \approx 2{,}5.10^{25}\ \text{m}^{-3}}$

Pour un diamètre de molécule O_2 / N_2 de diamètre $d \approx 0{,}3$ nm, il vient :

$$\text{sachant que } l = \frac{1}{\sqrt{2}n(\pi d^2)} : \quad \underline{l \approx 0{,}1\ \mu\text{m}}$$

ce qui est grand à l'échelle moléculaire, le gaz étant peu dense.
En revanche pour un liquide où les molécules sont « en contact », le libre parcours moyen est de l'ordre de la taille des molécules soit $l \approx qqs$ 0,1 nm, ce qui avec la formule précédente, confirme qu'un liquide est toujours en gros 1000 fois plus dense qu'un gaz.

b) La distribution des vitesses au niveau microscopique est très large (en norme) et présente un maximum : ceci signifie qu'il y a des particules plus lentes et d'autres plus rapides que la moyenne. La vitesse quadratique moyenne u est une grandeur scalaire liée à la moyenne de la norme au carré (comme une grandeur efficace en électrocinétique). Par ailleurs la température cinétique T est une grandeur macroscopique qui mesure cette agitation thermique microscopique. Plus précisément, une particule ponctuelle, par son mouvement de translation, possède 3 degrés de liberté (les directions suivant lesquelles elle peut se déplacer). La physique statistique attribue à chacun d'entre eux, en moyenne, une énergie identique (principe d'équipartition de l'énergie) : $\frac{1}{2}k_B T$, si bien que pour l'énergie cinétique de translation moyenne :

$$< \frac{1}{2} m v^2 > = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$$

où $M = N_A m$ est la masse molaire et $R = k_B N_A$, la constante des gaz parfaits.

AN : Pour l'air, $\underline{u} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \left(\frac{3 \times 8{,}31 \times 293}{29.10^{-3}} \right)^{1/2} \approx \underline{500 \text{ m.s}^{-1}}$

En assimilant la vitesse moyenne à la vitesse quadratique moyenne, le temps moyen τ entre deux collisions successives (chocs) pour les molécules de l'air est :

$$\underline{\tau} \approx \frac{l}{u} \approx \underline{0{,}2 \text{ ns}}$$

c) Le coefficient de diffusion est donné par l'expression $D = \frac{1}{3} l u$.

Pour l'air à 20 °C sous 1 bar, les questions précédentes donnent :

$$\underline{D} = \frac{1}{3} \times 0{,}1.10^{-6} \times 500 \approx \underline{2.10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$$

ce qui correspond bien à la valeur expérimentale.

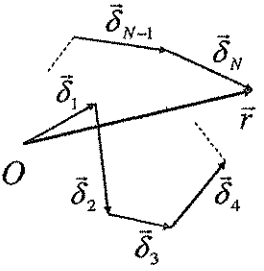
d) Au bout de N déplacements $\vec{\delta}_i$ la particule est en :

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\delta}_i$$

soit en norme : $r^2 = \vec{r}^2 = \sum_{i=1}^{N} \vec{\delta}_i^2 + 2 \sum_{i} \sum_{j<i} \vec{\delta}_i . \vec{\delta}_j$

Or par définition du l.p.m. : $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} | \vec{\delta}_i |^2 = l^2$

Par ailleurs pour N suffisamment grand, le caractère aléatoire de la diffusion assure des cosinus de produits scalaires aléatoirement répartis entre -1 et $+1$ d'où $\sum_{i} \sum_{j<i} \vec{\delta}_i . \vec{\delta}_j = 0$



Il reste, avec toujours $l \approx u\tau$, $r^2 = N l^2 + 0 \approx \frac{t}{\tau} \times (u\tau) \times l \quad \Rightarrow \quad \boxed{r(t) \approx \sqrt{l u t}}$

Avec l'expression de D à la question précédente, il vient :

$$\boxed{r(t) \approx \sqrt{3Dt}}$$

La question **49.** montre que le modèle de la marche au hasard apparaît pertinent pour décrire la diffusion des particules.

AN : $\underline{t} \approx \frac{r^2}{l u} \approx \frac{(0{,}1)^2}{0{,}1.10^{-6} \times 500} = 200 \text{ s} = \underline{3 \text{ min } 20 \text{ s}}$. Ce temps est très grand et montre que les phénomènes de diffusion sont des phénomènes « lents ».

En réalité les molécules du parfum ont une masse plus élevée que celles de l'air, soit u plus petit et donc t encore plus grand..., d'où l'intérêt de la convection !

49. Marche au hasard et diffusion dans les solides

a) Si l'atome M est en x_n à $t+\tau$, c'est qu'il était à l'instant antérieur t, en x_{n-1} ou (exclusif) en x_{n+1} avec respectivement une probabilité $p(x_{n-1},t)$ ou $p(x_{n+1},t)$. Or de A_{n-1} (respectivement A_{n+1}), il a une chance sur deux de migrer en A_n (c'est l'hypothèse de la marche au hasard) avec une probabilité $p(x_{n-1},t)/2$ (respectivement $p(x_{n+1},t)/2$), les deux cas s'excluant mutuellement, d'où par somme :

$$\boxed{p(x_n,t+\tau)=\frac{1}{2}p(x_{n-1},t)+\frac{1}{2}p(x_{n+1},t)}$$

b) Le passage à la fonction continue s'écrit, avec $x_{n\pm1}=x\pm a$,

$$p(x,t+\tau)=\frac{1}{2}\left[p(x-a,t)+p(x+a,t)\right]$$

Le développement limité par rapport à la variable d'espace doit être poussé jusqu'à l'ordre deux, alors que par rapport au temps, l'ordre un est suffisant :

$$p(x\pm a,t)=p(x,t)\pm a\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad p(x,t+\tau)=p(x,t)+\tau\frac{\partial p}{\partial t}$$

d'où l'équation aux dérivées partielles du type équation de diffusion :

$$\boxed{D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial p}{\partial t}=0} \quad \text{avec} \quad \boxed{D=\frac{a^2}{2\tau}}$$

La marche au hasard est donc un modèle pertinent pour décrire le phénomène de diffusion, avec un distance moyenne parcourue en $\sqrt{Dt}$ pour $t\gg\tau$.

Si le libre parcours moyen et la vitesse quadratique moyenne sont estimées à $l=a$ et à $u=a/\tau$, alors le coefficient de diffusion s'écrit :

$$\boxed{D=\frac{1}{2}lu}$$

résultat à comparer au cas du gaz à 3 dimensions (question **48.**).

50. Intérêt d'un double vitrage

Les associations (en série ou en parallèle) des résistances thermiques suivent les mêmes lois que les résistances électriques.

a) La surface totale des vitres est :

$$S_v=2{,}0\times1{,}8+2(1{,}2\times1{,}2)=6{,}48\ \text{m}^2$$

correspondant à une résistance thermique $R_V = \frac{e}{\lambda_V S_V} = 0{,}396.10^{-3}$ K.W^{-1}

Des deux grands murs en contact avec l'air extérieur il faut décompter la surface des vitres, la surface concernée est donc :

$$S_M = 2(8{,}0 \times 2{,}5) - 6{,}48 = 33{,}52 \text{ m}^2$$

correspondant à une résistance thermique $R_M = \frac{E}{\lambda_M S_M} = 89{,}5.10^{-3}$ K.W^{-1}

Les pertes thermiques se font ou par les vitres ou par les murs qui sont donc placés en parallèle, d'où la résistance thermique de l'ensemble :

$$R = \frac{R_V R_M}{R_V + R_M} = 0{,}398.10^{-3} \text{ K.W}^{-1} \approx R_V \quad \text{car } R_M \gg R_V$$

Les flux thermiques correspondants sont :

$$\Phi_V = \frac{T_1 - T_2}{R_V} = 48{,}0 \text{ kW.m}^{-2} \; ; \; \Phi_M = \frac{T_1 - T_2}{R_M} = 0{,}21 \text{ kW.m}^{-2}$$

$$\text{et finalement} \quad \Phi_T = \Phi_V + \Phi_M = \frac{T_1 - T_2}{R} = 48{,}2 \text{ kW.m}^{-2}$$

La rapport demandé vaut $\frac{\Phi_M}{\Phi_T} = 4{,}4.10^{-4}$; il y a donc seulement 0,4 % des pertes qui s'effectuent par les murs, soit 99,6 % par les vitres, d'où la nécessité d'agir.

b) $R_V = \frac{e}{\lambda_V S_V} = 0{,}40.10^{-3}$ K.W^{-1} est la valeur calculée à la question a) pour une simple couche de vitre.

La résistance thermique de la couche d'air comprise entre les deux couches de vitres est :

$$R_A = \frac{e'}{\lambda_A S_V} = 23{,}7.10^{-3} \text{ K.W}^{-1} \gg R_V$$

Pour le « double vitrage » dans son ensemble, les deux couches de verre et celle d'air sont en série, d'où :

$$R_{DV} = 2R_V + R_A = 24{,}5.10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

Comme on pouvait s'y attendre, c'est la couche d'air qui limite la conduction en élevant la résistance thermique.

À travers le « double vitrage » $\Phi_{DV} = \frac{T_1 - T_2}{R_{DV}} = 0{,}775$ kW.m^{-2} soit en gros 60 fois moindre que Φ_V pour une simple vitre.

La résistance totale est cette fois $R' = \dfrac{R_{DV}R_M}{R_{DV}+R_M} = 19{,}2.10^{-3}$ K.W^{-1} $\gg R$ et le nouveau flux total vaut $\Phi'_T = \dfrac{T_1 - T_2}{R'} = 0{,}99$ kW.m^{-2}, ce qui ne représente plus en gros qu'un 50^e du flux Φ_T précédent.

Dans la pratique l'amélioration, bien qu'incontestable, est nettement moindre, car ici il n'a pas été tenu compte des pertes par convection avec l'air extérieur ou par rayonnement.

c) Le flux $\Phi_{DV} = 0{,}78$ kW.m^{-2} est le même à travers les trois couches du double vitrage ; de plus en régime stationnaire, les profils de température sont linéaires dans chaque couche.

Vitre intérieure : $T_1 - T'_1 = R_V \Phi_{DV} \Rightarrow T'_1 = 18{,}7$ °C

Couche d'air : $T'_1 - T'_2 = R_A \Phi_{DV} \Rightarrow T'_2 = 0{,}3$ °C

Pour obtenir T'_2, on aurait pu considérer la vitre extérieure : $T'_2 - T_2 = R_V \Phi_{DV} \Rightarrow T'_2 = 0{,}3$ °C

La température apparaît donc pratiquement uniforme dans la partie vitrée, alors que le gradient de température est beaucoup plus important dans la couche d'air.

51. Ailettes de refroidissement

a) En régime stationnaire, le bilan de puissance thermique sur la tranche d'ailette de largeur dx s'écrit (attention aux signes et à l'évaluation des surfaces concernées) :

$$j_{th}(x).ab - j_{th}(x+dx).ab - h\big(T(x)-T_A\big).2(a+b)dx = 0$$

après simplification par bdx, puisque $a \ll b$: $-\dfrac{dj_{th}}{dx}a = 2h\big(T(x)-T_A\big)$

et avec la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda\dfrac{dT}{dx}$, il vient $\boxed{\dfrac{d^2T}{dx^2} - \dfrac{1}{L^2}\big(T(x)-T_A\big) = 0}$

où L est clairement homogène à une longueur avec $\underline{L} = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}} \approx \underline{1{,}05 \text{ cm}}$

b) L'équation se résout en $T(x) - T_A = Ae^{x/L} + Be^{-x/L}$

L'inégalité $c \gg L$, à savoir une ailette bien plus longue que l'ordre de grandeur de la variation de température, assure que l'extrémité en $x = c$ est à la température de l'air : $T(c) - T_A = Ae^{c/L} + Be^{-c/L} \approx 0$ conduit à prendre $A = 0$ (car $A \ll B$).

En $x = 0$, il reste $T_M - T_A = B$

d'où $\boxed{T(x) = T_A + \big(T_M - T_A\big)e^{-x/L}}$

Rq : En réalité l'écriture correcte des conditions aux limites en $x = c$ (la continuité du flux) assure après détermination de A et B que $\forall x < c$, $Ae^{x/L} \ll Be^{-x/L}$.

c) La surface d'évacuation de la puissance est sensiblement constituée des deux grandes faces latérales :

$$dP = h\big(T(x) - T_A\big)dS = h\big(T_M - T_A\big)e^{-x/L}\,2b\,dx \;\Rightarrow\; \underline{P} \approx 2hbL\big(T_M - T_A\big) \approx \underline{15{,}1\ \text{W}}$$

car dans l'intégrale, on a $e^{-c/L} \ll 1$

La puissance thermique transmise par l'appareil à l'ailette en $x = 0$ est :

$$P' = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \times ab = \frac{\lambda}{L}\big(T_M - T_A\big)ab = P$$

après avoir remplacé L par son expression ; en régime stationnaire (sans terme de création) le flux est conservatif : toute la puissance fournie par l'appareil est évacuée dans l'air.

Le nombre d'ailettes à placer en parallèle pour évacuer la puissance totale est :

$$\underline{N} = \frac{P_{tot}}{P} = \underline{13{,}2}$$; il suffit donc d'en disposer 14.

52. Diffusion thermique et effet Joule

a) La puissance volumique cédée par le champ électrique au conducteur est :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E} = \frac{j^2}{\sigma}$$ d'après la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

Cet apport local d'énergie thermique constitue pour le conducteur une source volumique effective de puissance Joule (à ne pas assimiler ici à une perte). Le bilan de puissance pour une tranche de section S et d'épaisseur dx s'écrit :

$$j_{th}(x,t)S - j_{th}(x+dx,t)S + \frac{j^2}{\sigma}Sdx = \rho S dx\, c\frac{\partial T}{\partial t}$$

où ρ et c sont la masse volumique et la capacité thermique massique.

Après développement et simplification par Sdx, il vient l'équation de conservation :

$$-\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \frac{j^2}{\sigma} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

qui, associée à la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$, conduit à l'équation de diffusion avec terme de source :

$$\boxed{\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho c\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{j^2}{\sigma} = 0}$$

b) En régime stationnaire, l'équation précédente se réduit à : $\dfrac{d^2T}{dx^2} = -\dfrac{j^2}{\lambda\sigma}$

ce qui compte tenu des conditions aux limites $T(0)$ et $T(L)$ imposées, conduit à un profil de température parabolique :

$$\boxed{T(x)=\frac{j^2}{2\lambda\sigma}x(L-x)+\frac{T(L)-T(0)}{L}x+T(0)}$$

En présence d'un terme de source comme ici, le flux n'est pas uniforme le long du barreau en régime stationnaire (s'en convaincre par $P=j_{th}.S=-\lambda S dT/dx$, ou plus physiquement faire remarquer que le flux sortant est égal au flux entrant augmenté de la puissance Joule reçue...).

c) Gardons la solution précédente en régime lentement évolutif ; la fusion démarre là où la température est maximale, donc à l'endroit où le flux thermique est nul :

$$\frac{dT}{dx}=\frac{j^2L}{2\lambda\sigma}-\frac{j^2}{\lambda\sigma}x+\frac{T(L)-T(0)}{L}=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{x_m=\frac{L}{2}+\frac{\lambda\sigma(T(L)-T(0))}{j^2L}=15{,}6\text{ cm}}$$

53. Mise en chambre d'un vin en bouteille

a) Le volume de vin fait apparaître le rayon intérieur :

$V=\pi(d/2-e)^2H=750\text{ cm}^3$, soit un volume habituel de 75 cL.

b) Comme le problème est à symétrie cylindrique, la température n'est fonction que de r ; la loi de Fourier s'écrit simplement : $j_{th}=-\lambda\frac{dT}{dr}<0$ car « entrant » (la chaleur va spontanément du chaud vers le froid).
Le flux thermique à travers un cylindre de rayon r et de hauteur H dans le verre est, sachant que le flux est uniquement radial (il n'y en a pas à travers les bases) :

$$\Phi=\iint\vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS}=-\lambda\frac{dT}{dr}2\pi rH<0$$

Or en régime quasi stationnaire ce flux est uniforme (Φ indépendant de r), d'où :

$$dT=-\frac{\Phi}{2\pi\lambda H}\frac{dr}{r}$$

Après intégration de $r=d/2-e$ à $r=d/2$, il vient :

$$T_S-T=-\frac{\Phi}{2\pi\lambda H}\ln\frac{d}{d-2e}>0$$

résultat du type $T-T_S=R_{cond}\Phi<0$ d'où la résistance thermique :

$$\boxed{R_{cond}=\frac{\ln\frac{d}{d-2e}}{2\pi\lambda H}}$$

AN : $\underline{R_{cond}=0{,}086\text{ K.W}^{-1}}$

c) φ est le flux thermique en Watt (W) donc h s'exprime en $\text{W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$. Physiquement, h dépend essentiellement des propriétés physiques de l'air (conductivité thermique, viscosité, etc), de la vitesse de l'air (convection), et de la forme et de la structure de la surface d'échange.

Là aussi, $\varphi = hS(T_S - T_A) < 0$, le flux est « entrant » car $T_A > T_S$ (l'air de la cuisine échauffe la bouteille).

En écrivant $\varphi = \dfrac{T_S - T_A}{R_{conv}}$, il vient $\underline{R_{conv} = \dfrac{1}{hS} = \dfrac{1}{h\pi dH} = 2{,}15 \text{ K.W}^{-1}}$

car la surface latérale de la bouteille est $S = 2\pi\dfrac{d}{2}H$.

d) Par continuité du flux en surface de la bouteille, on a $\Phi = \varphi$, d'où la différence de température entre le vin et l'air de la cuisine :

$$T - T_A = (T - T_S) + (T_S - T_A) = (R_{cond} + R_{conv})\varphi = R_{th}\varphi$$

Il apparaît que les deux résistances sont en série ce qui était prévisible, d'où la résistance thermique totale :

$$\underline{R_{th} = R_{cond} + R_{conv} = 2{,}24 \text{ K.W}^{-1}}$$

On constate sans surprise que $R_{cond} \ll R_{conv}$ (l'air est plus isolant que le verre !) ; le phénomène limitant est la convection (dans l'air), pas la conduction (dans le verre).

e) Le système fermé choisi est le vin dans la bouteille.
À pression constante, le premier principe de la thermodynamique appliqué à ce système entre t et $t + dt$ donne :

$dH = \delta Q$ avec $dH = mcdT$ et $\delta Q = \Phi dt$, ce qui conduit à :

$$mc\frac{dT}{dt} = -\frac{T - T_A}{R_{th}} > 0$$

La température $T(t)$ du vin (supposée uniforme) augmente sous l'effet du flux en provenance de l'air extérieur.
En notant $C = mc = 3$ kJ.K^{-1} la capacité thermique totale du vin, puis $\tau = R_{th}C$, l'équation différentielle précédente s'écrit :

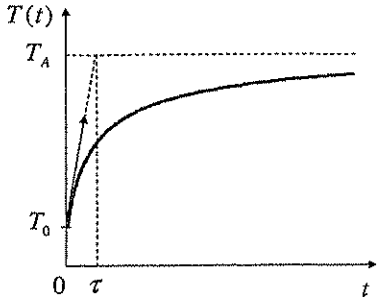
$$\frac{d(T - T_A)}{dt} = -\frac{T - T_A}{\tau}$$

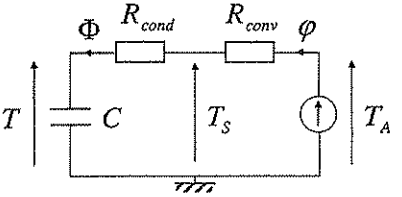
Elle montre que l'écart de température $T(t) - T_A < 0$ se réduit avec un temps caractéristique $\underline{\tau = R_{th}C = 6720 \text{ s} = 1 \text{ h } 52 \text{ min}}$.

f) La solution de cette équation est, compte tenu que $T(t = 0) = T_0$:

$$T(t) - T_A = (T_0 - T_A)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{soit} \quad \boxed{T(t) = T_A - (T_A - T_0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Cette dernière forme montre mieux que $T(t)$ est une fonction croissante de T_0 à T_A avec une constante de temps τ. Dans le circuit équivalent, le vin est représenté par un condensateur de capacité C sous la tension T, l'air extérieur (la source) par un générateur de force électromotrice T_A, et les résistances thermiques par des résistances électriques, la tension centrale étant T_S.





g) AN 1 : La durée t_D cherchée est donnée par $T(t_D) = T_D$ soit $t_D = \tau \ln \dfrac{T_A - T_0}{T_A - T_D}$

$$\underline{t_D = 5\,690 \text{ s} = 1 \text{ h } 35 \text{ min}}$$

AN 2 : La température de surface T_S est donnée par la continuité du flux $\Phi = \varphi$ (voir aussi le schéma électrique, ou diviseur de tension) :

$$\frac{T_A - T_S}{R_{conv}} = \frac{T_S - T}{R_{cond}} \Rightarrow T_S = \frac{R_{cond} T_A + R_{conv} T}{R_{cond} + R_{conv}} \text{ (barycentre) et pour } T = T_D :$$

$$\underline{T_S = 16{,}2 \text{ °C}}$$

Comme $R_{cond} \ll R_{conv}$ la température de surface de la bouteille est beaucoup plus proche de celle du vin que de celle de l'air.

54. Transfert thermique dans une barre

a) Se reporter aux questions de cours **5.** et **9.** : $D = \lambda / \rho c$ s'exprime en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

b) * Physiquement, si la capacité thermique des thermostats est infinie (ce sont alors de vraies sources), ils peuvent fournir de l'énergie thermique sans modifier leur température. Par l'équation de la diffusion écrite pour les thermostats :

$$D_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i} \to 0 \text{ d'où } \frac{\partial T_i}{\partial t} \to 0 : T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont constantes}$$

* La barre finit alors par atteindre un régime permanent forcé :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ soit } \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x$$

car pour $T_1 > T_2$, $T(x)$ diminue avec x

* En régime permanent, le flux thermique Φ est uniforme :

$$\Phi = j_{th} \cdot \Sigma = -\lambda \frac{dT}{dx} \Sigma = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \Sigma \Rightarrow R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{L}{\lambda \Sigma}$$

c) * Les thermostats, des métaux par exemple, conduisent très bien la chaleur ; leur température T_i est donc uniforme

en effet, $j_{th_i} = -\lambda_i \dfrac{\partial T_i}{\partial x}$ étant fini avec $\lambda_i \to \infty \Rightarrow \dfrac{\partial T_i}{\partial x} = 0$

* C non infinie, les températures des thermostats ne sont plus constantes et dépendent du temps : $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

* $C \gg (\rho \Sigma L)c$ soit $c \approx 0$ et donc $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ pour la barre. Le flux Φ dans la barre est donc uniforme comme en régime stationnaire ; on a un régime quasi stationnaire avec $T(x,t) = T_1(t) - \dfrac{T_1(t) - T_2(t)}{L} x$.

d) L'ensemble thermostats et barre étant isolé (et de volume constant), l'énergie interne est constante dans une évolution élémentaire :

$dU = C dT_1 + C dT_2 + \rho \Sigma L c dT = 0$ et comme $\rho \Sigma L c \ll C$, il vient $\dfrac{dT_1}{dt} = -\dfrac{dT_2}{dt}$

Rq : On pouvait dire aussi que le flux étant uniforme le long de la barre, toute la puissance reçue par S_1 est transférée à S_2, soit $-C\dfrac{dT_1}{dt} = C\dfrac{dT_2}{dt}$.

d'où $T_1(t) + T_2(t) = cste = T_1^0 + T_2^0$ (1)

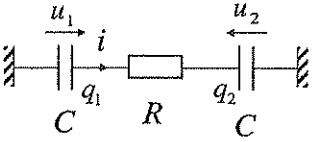
De même le flux reçu par S_1 s'identifie à celui dans la barre :

$$-C\frac{dT_1}{dt} = \Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{2T_1 - T_1^0 - T_2^0}{R_{th}} \quad \text{d'après (1)}$$

Par intégration avec la condition initiale $T_1(t=0) = T_1^0$ et en posant $\tau = \dfrac{R_{th}C}{2}$,

$$\boxed{T_1(t) = T_1^0 - \frac{T_1^0 - T_2^0}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad \text{et de même} \quad \boxed{T_2(t) = T_2^0 + \frac{T_1^0 - T_2^0}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Circuit électrocinétique équivalent :
la décharge d'un condensateur dans un autre à travers une résistance.
Au début $u_1^0 > u_2^0$, donc $i > 0$



$$\begin{cases} u_1 - u_2 = Ri \\ i = -\dfrac{dq_1}{dt} = -C\dfrac{du_1}{dt} = \dfrac{dq_2}{dt} = C\dfrac{du_2}{dt} \end{cases}$$

La tension et le courant correspondent respectivement à la température et au flux.

55. Importance conduction – convection dans un refroidissement thermique

a) En régime stationnaire, l'équation de la diffusion thermique s'écrit $\dfrac{d^2T(x)}{dx^2} = 0$; les conditions aux limites sont $T(0) = T_1$, imposée par la source, et $T(e)$, température de surface à ce stade inconnue (intermédiaire entre T_1 et T_0) :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T_1 - T(e)}{e} \quad \text{et} \quad \boxed{T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T(e)}{e}x}$$, fonction affine

b) La densité de courant thermique dans la plaque est donnée par la loi de Fourier :

$$j_{th}(0 \le x \le e) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T(e)}{e} > 0 \quad \text{uniforme}$$

Au niveau de l'interface plaque – air, la loi de Newton donne :

$$j_{th}(x = e) = h\big(T(e) - T_0\big) > 0$$

La continuité du flux thermique ($j_{th} S$) en $x = e$ (le flux thermique issu de la plaque est entièrement communiqué à l'air) entraîne celle de j_{th} :

$$\lambda \frac{T_1 - T(e)}{e} = h\big(T(e) - T_0\big)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(e) = \frac{\lambda T_1 + he T_0}{\lambda + he} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{1 + he/\lambda} = T_1 - \frac{T_1 - T_0}{1 + \lambda/he}}$$

De ces trois expressions, la 1ère montre que $T(e)$ est bien comprise entre T_1 et T_0 (c'est un barycentre), la 2e et la 3e donnent les écarts par rapport à T_0 ou T_1.
L'élimination de $T(e)$ conduit alors aux expressions suivantes de j_{th} :

$$j_{th} = h\frac{T_1 - T_0}{1 + he/\lambda} = \frac{\lambda}{e}\frac{T_1 - T_0}{1 + \lambda/he} = \frac{T_1 - T_0}{e/\lambda + 1/h}$$

Le flux thermique total est alors : $\Phi = j_{th} S = \dfrac{T_1 - T_0}{e/\lambda + 1/h} S \equiv \dfrac{T_1 - T_0}{R_{th}}$

soit une résistance thermique : $\boxed{R_{th} = \dfrac{e}{\lambda S} + \dfrac{1}{hS} = R_{cond.} + R_{conv.}}$

qui s'écrit sous la forme d'une somme (les milieux sont en série) d'une résistance thermique due à la conduction, d'expression classique $R_{cond.} = e/\lambda S$, et d'une résistance décrivant la convection dans l'air $R_{conv.} = 1/hS$.

c) * $he/\lambda \ll 1$ (soit $R_{cond.} \ll R_{conv.}$) est obtenu pour une plaque peu épaisse, bonne conductrice thermique et un faible coefficient de convection (air immobile), la conduction dans la plaque est plus efficace que la convection dans l'air ; alors $T(e) \approx T_1$ et $j_{th} = h\big(T_1 - T_0\big)$ qui montre que c'est la convection qui limite les échanges thermiques entre la source et l'air.

* $he/\lambda \gg 1$ (soit $R_{cond.} \gg R_{conv.}$) est obtenu pour une plaque plutôt épaisse, mauvaise conductrice thermique et un coefficient de convection élevée (air ventilé), la convection dans l'air est donc plus efficace que la conduction dans la plaque ; $T(e) \approx T_0$ et $j_{th} = \lambda\big(T_1 - T_0\big)/e$ qui montre que c'est la conduction qui limite les échanges thermiques entre la source et l'air.

Le critère expérimental pour savoir si on est dans un cas ou dans l'autre est la température de contact avec l'air. Par exemple pour le corps humain, la température extérieure de la peau est plutôt celle du corps (cas 1) : on sait alors qu'il vaut mieux éviter les courants d'air pour ne pas s'enrhumer...Dans le cas d'une bouteille thermos qui se refroidit, la température extérieure de la bouteille est pratiquement celle de l'air (cas 2) : la placer en plein vent ne la refroidira guère plus vite !

En fait les deux cas sont des situations non optimales, car si l'on souhaite un refroidissement important, par exemple dans le cas où la source est un moteur ou un appareil électrique qui chauffe, on a intérêt à prendre une plaque métallique et de ventiler l'air à son contact (soit $R_{cond.}$ et $R_{conv.}$ faibles) ; au contraire, si l'on souhaite éviter le refroidissement, on a alors intérêt à prendre une plaque isolante non ventilée (plus exactement $R_{cond.}$ et / ou $R_{conv.}$ importants).

56. Température à l'intérieur de la Terre

a) Le bilan thermique sur une coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r+dr$ s'écrit en l'absence de terme de source et en régime permanent :

$$+j_{th}(r).A\pi r^2 dt - j_{th}(r+dr).A\pi(r+dr)^2 dt = 0$$

Il s'identifie à la conservation du flux thermique.

L'application de la formule de Taylor concerne la fonction $j_{th}(r)r^2$:

$$-\frac{d}{dr}\left(j_{th}(r)r^2\right)dr.A\pi dt = 0$$

Après simplification par $4\pi drdt$ et application de la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda\dfrac{dT}{dr}$, il vient l'équation de diffusion :

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0} \quad \text{pour } 0 \le r \le r_m$$

b) Par intégration, on a d'abord $r^2\dfrac{dT}{dr} = A$ soit $\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{A}{r^2}$ puis $T(r) = B - \dfrac{A}{r}$

Cette solution, pour $A \neq 0$, conduit à une densité de flux et une température infinies au centre de la Terre $r = 0$, ce qui est impossible, d'où $A = 0$.

On en déduit $j_{th} = -\lambda\dfrac{dT}{dr} = 0$ et $T(r) = B = T_C$ uniforme pour $0 \le r \le r_m$.

En particulier $j_{th}(r = r_m) = 0$; en effet aucun flux thermique ne peut exister au niveau de la lithosphère car un flux entrant ou sortant de la zone centrale de la Terre conduirait forcément à une variation au cours du temps de sa température et donc à un régime non permanent.

c) Le bilan thermique sur une coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r+dr$, donc de volume élémentaire $4\pi r^2 dr$, s'écrit en présence d'un terme de source et en régime permanent :

$$j_{th}(r).4\pi r^2 dt + H4\pi r^2 dr dt = j_{th}(r+dr).4\pi(r+dr)^2 dt$$

Cette écriture traduit que le flux entrant en r augmenté du terme de source dans le volume est égal au flux sortant en $r+dr$; bien qu'en régime permanent, il n'y a alors plus conservation du flux thermique.

L'application de la formule de Taylor concerne toujours la fonction $j_{th}(r).r^2$:

$$-\frac{d}{dr}\left(j_{th}(r)r^2\right)dr.4\pi dt + \rho 4\pi r^2 dr\, H dt = 0$$

Après simplification par $4\pi dr dt$ et application de la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda\frac{dT}{dr}$, il vient, en divisant par r^2, la nouvelle équation de diffusion :

$$\boxed{\frac{\lambda}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)+\rho H = 0} \quad \text{pour } r_m \le r \le R$$

$\lambda\Delta T + \rho H = 0$, ce qui permet de retrouver l'expression du laplacien en coordonnées sphériques.

d) On écrit $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\rho H}{\lambda}r^2$ soit après intégration $\frac{dT}{dr} = -\frac{\rho H}{3\lambda}r + \frac{C}{r^2}$ (1)

Une nouvelle intégration fournit $T(r) = -\frac{\rho H}{6\lambda}r^2 - \frac{C}{r} + D$

e) Par continuité du flux thermique à l'interface $r = r_m$, il faut traduire $j_{th}(r = r_m) = 0$ comme à la question b) soit $\frac{dT}{dr}(r = r_m) = -\frac{\rho H}{3\lambda}r_m + \frac{C}{r_m^2} = 0$ d'après la relation (1).

Ceci fournit la constante $C = \frac{\rho H}{3\lambda}r_m^3$ d'où $T(r) = -\frac{\rho H}{6\lambda}r^2 - \frac{\rho H}{3\lambda}\frac{r_m^3}{r} + D$

Cette solution doit vérifier la condition $T(r = R) = T_0$, la température en surface.

Cela conduit à $D = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda}R^2 + \frac{\rho H}{3\lambda}\frac{r_m^3}{R}$, et finalement :

$$\boxed{T(r) = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda}\left(R^2 - r^2\right) - \frac{\rho H}{3\lambda}r_m^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)} \quad \text{pour } r_m \le r \le R$$

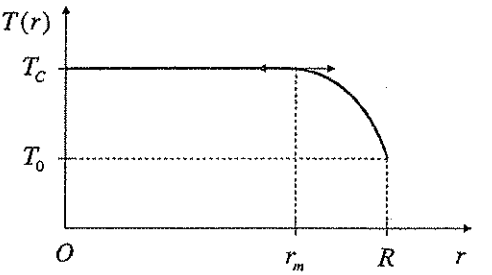
f) La température dans la zone centrale (et donc au centre) est obtenue par continuité de la température à l'interface $r = r_m$, ce qui achève la détermination de T_C :

$$T_C = T(r_m) = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda}\left(R^2 - r_m^2\right) - \frac{\rho H}{3\lambda}r_m^3\left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{R}\right)$$

ou plus simplement :

$$\boxed{T(r) = T_C = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda}R^2\left(1 - \frac{3r_m^2}{R^2} + \frac{2r_m^3}{R^3}\right)} \quad \text{pour } 0 \le r \le r_m$$

La courbe $T(r)$ est tracée ci-contre ; en $r = r_m$, il y a continuité de la fonction et de la pente (par le flux).



AN 1 : $T_C \approx 290 + 1400 = 1690$ K soit $\underline{1\,420\,°C}$,

ce qui est une valeur sous-estimée ; en réalité il existe dans la Terre plusieurs couches concentriques de températures différentes et la valeur trouvée est l'ordre de grandeur de la moyenne ; on pense que $T_C \approx 3\,500$ °C. Néanmoins la valeur dans ce problème s'approche de la température de fusion du fer (d'environ 1 500 °C).

AN 2 $\dfrac{dT}{dr}(r=R) = -\dfrac{\rho H}{3\lambda} R\left(1 - \dfrac{r_m^3}{R^3}\right) = -0{,}031 \text{ K.m}^{-1} = \underline{-31 \text{ K.km}^{-1}}$;

cette augmentation de la température avec la profondeur (gradient thermique) à ce qui est observé en spéléologie : la température augmente de 3 °C tous les 100 m de profondeur.

g) Le flux thermique total en surface de la Terre est (en Watt) :

$$\Phi = j_{th}(r=R).S = -\lambda \frac{dT}{dr}(r=R).4\pi R^2 = \frac{4\pi\rho H}{3} R^3\left(1 - \frac{r_m^3}{R^3}\right)$$

AN : $\underline{\Phi = 6{,}3.10^{13} \text{ W}}$; cette valeur de 63 000 gigawatts est colossale, mais répartie sur une grande surface $P_d / 4\pi R^2 = 0{,}12 \text{ W.m}^{-2}$, elle s'avère faible.

La puissance radioactive dissipée dans la lithosphère de volume $\dfrac{4}{3}\pi R^3 - \dfrac{4}{3}\pi r_m^3$ est :

$$P_d = \rho \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r_m^3\right) H$$

Le résultat $P_d = \Phi$ était prévisible car l'énergie produite par radioactivité dans la lithosphère, en régime stationnaire, ne diffuse pas par $r = r_m$ sinon la partie centrale s'échaufferait (voir $j_{th}(r = r_m) = 0$), mais uniquement en surface $r = R$.

57. Température dans le sol (*)

a) L'équation de diffusion étant linéaire, $u(x,t)$, l'écart de température, et $\underline{u}(x,t)$, sa représentation complexe, la vérifient également, avec comme conditions aux limites $u(0,t) = a\cos\omega t$ et $u(\infty,t) = 0$:

$$D\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2}-\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}=0 \text{ donne } D\frac{d^2 \underline{f}}{dx^2}-\underline{f}\,i\omega=0$$

puis $\frac{d^2 \underline{f}}{dx^2}=-i\frac{\omega}{D}\underline{f}=\pm\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\omega}{D}\underline{f}=\pm\left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2\underline{f}$ avec $\delta=\sqrt{\frac{2D}{\omega}}=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c\omega}}$

de solution $\underline{f}(x)=A\mathrm{e}^{(1+i)x/\delta}+B\mathrm{e}^{-(1+i)x/\delta}$ où δ est homogène à une longueur.

La solution complexe est $\underline{u}(x,t)=\underline{f}(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$; il faut traduire les conditions :

* en profondeur : $\underline{u}(\infty,t)=0 \Rightarrow A=0$, alors $\underline{u}(x,t)=B\mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{i(\omega t-x/\delta)}$ et en notation réelle : $u(x,t)=B\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos(\omega t-x/\delta)$
* en surface : $u(0,t)=a\cos\omega t \Rightarrow B=a$, d'où la solution cherchée :

$$\boxed{T(x,t)=T_0+a\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi x}{\lambda'}}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T'}-\frac{x}{\lambda'}\right)}$$

Cette écriture caractérise une onde se propageant vers les x croissants à la vitesse de phase $v_\varphi=\omega\delta=\sqrt{\frac{2\lambda\omega}{\rho c}}$ dépendant de ω (il y a dispersion) et s'amortissant en amplitude sur une distance caractéristique de l'ordre de $\delta=\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c\omega}}$, liée à la longueur d'onde λ'.

Rq : v_φ et δ sont tous les deux proportionnels à $\sqrt{\lambda}$; l'amortissement est d'autant plus important (λ petit) que la vitesse de propagation est faible.

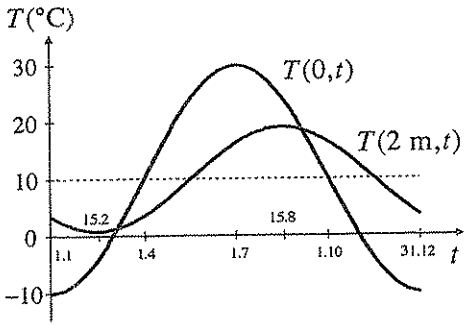
AN : $\underline{\delta=2{,}55\text{ m}}$; $\underline{\lambda'=2\pi\delta=16\text{ m}}$; $\underline{v_\varphi=\omega\delta=\frac{\lambda'}{T'}=16\text{ m/an}=0{,}5\ \mu\text{m.s}^{-1}}$

b) Les valeurs au 1er janvier et au 1er juillet donnent une valeur moyenne $\underline{T_0=10\ °\text{C}}$ et une amplitude $\underline{a=-20\ °\text{C}}$. Comme $a<0$, la température est minimale pour :

$$\cos 2\pi\left(\frac{t}{T'}-\frac{x}{\lambda'}\right)=+1 \Rightarrow \frac{t}{T'}=\frac{x}{\lambda'}=\frac{1}{8} \text{ d'où } \underline{t=\frac{T'}{8}=1{,}5\text{ mois}}$$

À $x=2$ m de profondeur, la température est minimale vers le 15 février et vaut $\underline{T=0{,}88\ °\text{C}}$ (il n'y gèle donc jamais) alors qu'au sol, à la même époque, le température est $\underline{T=-4{,}1\ °\text{C}}$, d'où l'intérêt de l'enfouissement des canalisations d'eau.

Le déphasage et la réduction d'amplitude sur l'évolution en surface sont d'autant plus



importants que la profondeur est grande.

c) L'amortissement est également dispersif : $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}} = \sqrt{\frac{2T'}{\pi \rho c}}$

$T' = 1$ an : $\underline{\delta = 2{,}55 \text{ m}}$; $e^{-x/\delta} = 0{,}46$ (sensible) ; $v_\varphi = 16 \text{ m/an} = 0{,}5 \ \mu\text{m.s}^{-1}$

$T' = 1$ jour : $\underline{\delta = 0{,}13 \text{ m}}$; $e^{-x/\delta} = 2.10^{-7}$ (insensible) ; $v_\varphi = 82 \text{ cm/ jour} = 9 \ \mu\text{m.s}^{-1}$

L'amortissement est plus important puisque se réalisant sur une plus faible profondeur. Les variations journalières sont insensibles à une profondeur de 2 m .

58. La sensation de chaud

a) Il faut savoir effectuer ces calculs proprement, en voici le détail :

$$\frac{\partial f_D}{\partial x} = \frac{df_D}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}} = \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$$

d'où $\frac{\partial^2 f_D}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\left(-\frac{2x}{4Dt}\right) e^{-x^2/4Dt} = -\frac{x}{2\sqrt{\pi}(Dt)^{3/2}} e^{-x^2/4Dt}$

de même $\frac{\partial f_D}{\partial t} = \frac{df_D}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \times \frac{x}{2\sqrt{D}}\left(-\frac{1}{2t^{3/2}}\right) = -\frac{x}{2\sqrt{\pi D}\, t^{3/2}} e^{-x^2/4Dt}$

ce qui satisfait l'équation de diffusion thermique : $D\frac{\partial^2 f_D}{\partial x^2} - \frac{\partial f_D}{\partial t} = 0$

b) Pour $x \leq 0$ (la main), la température est prise sous la forme (l'équation de diffusion est linéaire) $T(x,t) = a_1 + b_1 f_{D_1}(x,t)$; les conditions aux limites sont :

* $x = 0$, $u = 0$ et $f(0) = 0$ d'où $T(0,t) = a_1 = T_0$
* $x = -\infty$, $u = -\infty$ et $f(-\infty) = -1$ d'où $T(-\infty,t) = a_1 - b_1 = T_1$

il en résulte $a_1 = T_0$ et $b_1 = T_0 - T_1$: $\boxed{T(x,t) = T_0 - (T_0 - T_1) f_{D_1}(x,t)}$ (avec $f_{D_1} \leq 0$)

De même pour $x \geq 0$, on détermine $a_2 = T_0$ et $b_2 = T_2 - T_0$:

$\boxed{T(x,t) = T_0 + (T_2 - T_0) f_{D_2}(x,t)}$ (avec $f_{D_2} \geq 0$)

Rq : Cette solution assure également les conditions initiales : $T(x < 0,0) = T_1$ et $T(x > 0,0) = T_2$, ainsi que la continuité de la température en $x = 0$: $\forall t > 0$, $T(0,t) = T_0$, d'où son intérêt.

c) En projection sur l'axe Ox , le vecteur densité de flux thermique donné par la loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ donne sans précision de milieu :

$$j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda b \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \quad \text{d'après la question a)}$$

soit $j_{th1}(x,t)=\dfrac{\lambda_1(T_1-T_0)}{\sqrt{\pi D_1 t}}e^{-x^2/4D_1t}$ et $j_{th2}(x,t)=\dfrac{\lambda_2(T_0-T_2)}{\sqrt{\pi D_2 t}}e^{-x^2/4D_2t}$

La continuité du flux thermique à l'interface entraîne celle de $j_{th}(0,t)$:

$$\forall t>0\ ,\ j_{th1}(0,t)=j_{th2}(0,t)\ \Rightarrow\ \frac{\lambda_1}{\sqrt{D_1}}(T_1-T_0)=\frac{\lambda_2}{\sqrt{D_2}}(T_0-T_2)$$

avec $\dfrac{\lambda}{\sqrt{D}}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda/\rho c}}=\sqrt{\rho c\lambda}=E$, l'effusivité du milieu

d'où $E_1(T_1-T_0)=E_2(T_0-T_2)\ \Rightarrow\ \boxed{T_0=\dfrac{E_1T_1+E_2T_2}{E_1+E_2}}$

Cette température à l'interface apparaît donc comme le barycentre des températures initiales avec comme coefficient, les effusivités respectives, et donc bien sûr $T_2<T_0<T_1$.

AN : pour le contact main-bois : $T_0=33{,}9$ °C

et pour le contact main-acier $T_0=21{,}9$ °C

C'est évidemment à cette température, et non à celle de l'objet que l'on touche même s'il contribue à la déterminer, que sont sensibles les terminaisons nerveuses de la surface de la main. Dans le contact main-bois, la température de contact est proche de celle de la main ; le bois apparaît donc « plus chaud » que l'acier, qui bien qu'à la même température que le bois, donne une température de contact proche de sa température propre. L'effusivité de l'acier est bien supérieure à celle du bois ($E_a/E_b=35$) à cause d'une meilleure conductivité thermique λ et aussi une plus grande capacité thermique ρc.

d) Au moment même du contact, il y a discontinuité de la température : ceci crée en $x=0$, à l'instant initial, un gradient de température très élevé entraînant un flux thermique qui impose rapidement une température d'équilibre T_0 en $x=0$.

Par ailleurs $\dfrac{\partial T}{\partial t}=-\dfrac{bx}{2\sqrt{\pi D}\,t^{3/2}}e^{-x^2/4Dt}=0$ pour $x=0$, $\forall t>0$: cette température T_0 est donc également stationnaire.

59. Résolution numérique de « l'équation de la chaleur » 1 D

a) Soit f une fonction de classe C^∞, alors

$$\Upsilon f=\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ \text{(équation exacte)}$$

$$\text{et}\ \ \Upsilon_{h,k}f=\frac{f_n^{i+1}-f_n^i}{k}-\alpha\frac{f_{n+1}^i-2f_n^i+f_{n-1}^i}{h^2}\ \text{(équation discrétisée)}$$

avec les notations usuelles $f(x_n=nh,t_i=ik)=f_n^i$.

D'après la formule de Taylor :

$$f(t_i,x_{n+1}) = f(t_i,x_n) + h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(t_i,x_n)} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(t_i,x_n)} + \frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{(t_i,x_n)} + O(h^4)$$

et $f(t_i,x_{n-1}) = f(t_i,x_n) - h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(t_i,x_n)} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(t_i,x_n)} - \frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{(t_i,x_n)} + O(h^4)$

donc $\frac{f_n^{i+1} - 2f_n^i + f_n^{i-1}}{h^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(t_i,x_n)} + O(h^2)$

Le schéma est d'ordre 2 en espace.

De même $\frac{f_{n+1}^i - f_n^i}{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(t_i,x_n)} + O(k)$

$$\frac{f_n^{i+1} - f_n^i}{k} - \alpha\frac{f_{n+1}^i - 2f_n^i + f_{n-1}^i}{h^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(t_i,x_n)} - \alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(t_i,x_n)} + O(h^2) + O(k)$$

d'où l'erreur de consistance $E_{h,k}f = \Upsilon_{h,k}f - \Upsilon f = O(h^2) + O(k)$.

Le schéma est d'ordre 2 en espace et 1 en temps.

b) Le code Python est :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
Longueur=1
duree=500
k=0.01
h=0.01
alpha=0.0001

Nx=int(Longueur/h)
Nt=int(duree/k)

T=[[1 if j==Nx-1 else 0  \
for j in range(Nx)]\
for i in range(Nt)]

T[0]=[0 if j<=int(Nx/2.) else 1\
for j in range(Nx)]

for t in range(0,Nt-1):
    for x in range(1,Nx-1):

T[t+1][x]=T[t][x]+alpha*k*(T[t][x+1]\
        -2*T[t][x]+T[t][x-1])/(h*h)

dist=[i*h for i in range(Nx)]

plt.plot(dist,T[Nt/4],'k--',linewidth=2)
plt.plot(dist,T[Nt/2],'k-.',linewidth=2)
plt.plot(dist,T[3*Nt/4],'k:',linewidth=2)
plt.plot(dist,T[-1],'k',linewidth=2)
plt.plot(dist,T[0],'k')
plt.xlabel('longueur (m)',fontsize=14)
plt.ylabel(u'température (°C)',fontsize=14)
plt.legend(('t=125 s','t=250 s',\
```

Longueur des deux barres
Durée de l'expérience
Pas de discrétisation temporel
Pas de discrétisation spatial
Coefficient de diffusivité thermique

Nombre de points selon x
Nombre de points calculés pour t

Conditions aux limites

Conditions initiales selon x

Boucle de calcul en temps
Boucle spatial
Schéma aux différences finies

Liste des nœuds spatiaux

Représentation graphique à différents instants (question c)

```
't=375 s','t=500 s'))
plt.show()

plt.figure(2)
plt.imshow(T,cmap=cm.binary,alpha=1)
plt.colorbar()
plt.axis('tight')
plt.ylabel(u'durée (seconde)',fontsize=14)
plt.xlabel('longueur (m)',fontsize=14)
plt.show()
```

Figure 2 (question c)

c) À l'instant $t = 0$, les deux barres sont mises en contact, le transfert thermique débute immédiatement depuis la barre de température la plus élevée ($x > L_1$). Donc, immédiatement après l'instant initial, toute la barre de température la plus petite est « prévenue » que son extrémité ($x = L_1 = 0{,}5$ m) est en contact avec une source chaude : il y a diffusion thermique.

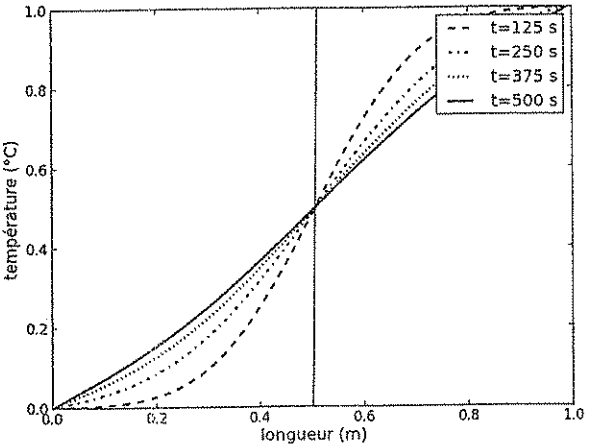


Figure 1 : Température au sein des deux barres jointes à différents instants. Schéma numérique réalisé pour une durée de 250 s, des pas de discrétisation spatial et temporel de 0,01 et un coefficient de diffusivité de 10^{-4} $m^2.s^{-1}$.

La température de contact correspond à la moyenne des deux températures extrémales.
De plus à $t = 500$ s, la courbe de température est proche de la représentation graphique d'une droite, le système est donc proche de l'état stationnaire

La figure 2 représente l'évolution de la température en fonction du temps au sein de la barre à l'aide de la fonction *imshow*, un code de couleur permet de visualiser la température.

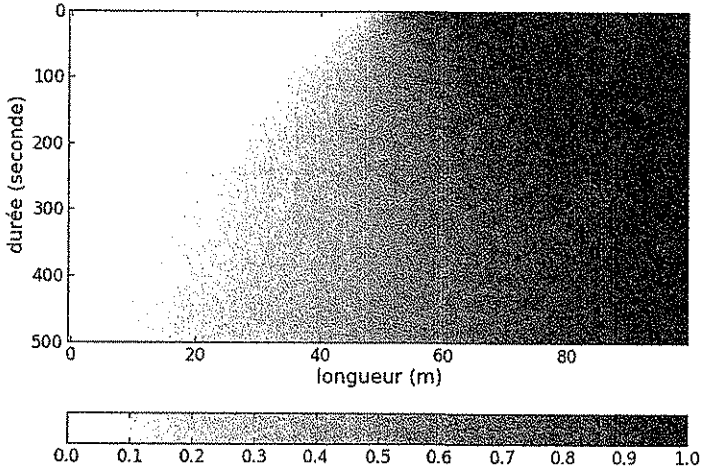


Figure 2 : Évolution de la température au sein des deux barres jointes. Schéma numérique réalisé pour une durée de 500 s, des pas de discrétisation spatial et temporel de 0,01 et un coefficient de diffusivité de 10^{-4} $m^2.s^{-1}$.

Chapitre 11
Thermodynamique statistique

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$
constante de Planck	$h = 6{,}62.10^{-34}\ J.s$
constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$
constante des gaz parfaits	$R = N_A\, k_B = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

Énergies et températures caractéristiques

température ambiante T_a	$T_a = 298\ K$
énergie d'agitation thermique à T_a	$k_B T_a = 25{,}7\ meV$
température de surface du Soleil $T_\odot$	$T_\odot = 5750\ K$
énergie d'agitation thermique à $T_\odot$	$k_B T_\odot = 0{,}50\ eV$
énergie d'ionisation de l'hydrogène	$E_i = 13{,}6\ eV$
température d'ionisation de l'hydrogène	$T_i = E_i / k_B = 1{,}58 \times 10^5\ K$
température au centre du Soleil T_C	$T_C = 15{,}1 \times 10^6\ K$
énergie d'agitation thermique à T_C	$k_B T_C = 1{,}30\ keV$
record mondial des basses températures	$T_{LWR} = 100 \times 10^{-12}\ K$
record mondial des hautes températures	$T_{HWR} = 4 \times 10^{12}\ K$
température dans un haut-fourneau	$T_{HF} = 1800\ K$

Capacités thermiques molaires à volume constant

gaz parfait monoatomique	$C_{Vm} = 3R/2 = 12{,}5\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
gaz parfait diatomique ($T_{rot} \leq T \leq T_{vib}$)	$C_{Vm} = 5R/2 = 20{,}8\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
gaz parfait diatomique ($T \geq T_{vib}$)	$C_{Vm} = 7R/2 = 20{,}8\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
solide à température "élevée"	$C_{Vm} = 3R = 25\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
eau vapeur à 100 °C sous 1 bar	$C_{Vm} = 28{,}0\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
eau liquide à 100 °C sous 1 bar	$C_{Vm} = 74{,}5\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

L'air

masse molaire ; masse volumique	$M = 29\ g.mol^{-1}$; $\rho = 1{,}2\ kg.m^{-3}$
densité particulaire (à 20 °C sous 1 bar)	$n = P / k_B T \approx 2{,}5.10^{25}\ m^{-3}$
vitesse quadratique moyenne (à 20 °C)	$u = \sqrt{3RT / M} \approx 500\ m.s^{-1}$
libre parcours moyen	$l \approx 0{,}1\ \mu m$
durée moyenne entre deux chocs	$\tau \approx l / u \approx 2.10^{-10}\ s = 0{,}2\ ns$
capacité thermique molaire à V = cste	$C_{Vm} \simeq 5R/2 = 20{,}8\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
hauteur d'échelle de l'atmosphère	$H = 8{,}8\ km$ à $300\ K$

Le cours d'abord

Échelles microscopique, mésoscopique et macroscopique

1. Combien de molécules contient un système constitué de 3 g d'eau ? Combien de paramètres faut-il pour décrire ce système d'un point de vue mécanique ? Une étude expérimentale macroscopique montre que le nombre de paramètres nécessaires à la description de ce fluide est seulement de deux pour des conditions d'évolution quasi statiques : par exemple pression et température ou volume et température. Comment expliquer cette réduction surprenante du nombre de paramètres à connaître ?

2. Considérer un modèle de sphères dures (de diamètre d) pour les molécules d'un fluide de densité moléculaire n^* (nombre de molécules par unité de volume) et estimer la distance moyenne l parcourue par une molécule entre deux collisions successives (libre parcours moyen). Pour simplifier, considérer une molécule mobile à la vitesse $\vec{v}$, au milieu des autres immobiles.

3. Calculer une valeur approchée de n^* pour l'air sous une pression de 1 bar et à une température usuelle de 20 °C. Estimer le libre parcours moyen l en choisissant d de l'ordre de 0,3 nm pour les molécules O_2 / N_2. Utiliser l'expression plus générale $l = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, n^* \pi d^2}$ qui tient compte du fait que les molécules cibles sont elles-mêmes en mouvement. Évaluer l'ordre de grandeur de l dans un liquide où les molécules sont « en contact » et comparer les résultats.

4. Qu'est-ce que l'échelle mésoscopique ? Comment choisir l'élément de volume dV en un point M du fluide, pour pouvoir définir par exemple la densité moléculaire n^* en ce point ?

Facteur de Boltzmann

5. Comment peut-on définir simplement la pression $P(M)$ dans un fluide ? Quelle est son unité dans le système international ? Qu'entend-on par « isotropie » de la pression ?

6. Un fluide est en équilibre mécanique dans le référentiel terrestre galiléen. Soit, en un point A, le système physique constitué d'un volume élémentaire de fluide dV, de masse $dm = \rho(A)dV$, où $\rho(A)$ désigne la masse volumique en A. Faire le bilan des forces s'exerçant sur ce volume dV choisi parallélépipédique et d'arêtes parallèles à des axes cartésiens. Traduire l'équilibre mécanique de ce système en projetant la RFD sur l'axe Oz dirigé suivant la verticale ascendante. Le champ de pesanteur en A est notée $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

7. À partir du système d'équations obtenu à la question précédente, montrer que la pression ne dépend que de l'altitude z. Exprimer la variation de pression dP lors d'une variation dz de l'altitude. Comment peut-on alors interpréter la différence de pression entre deux points d'altitude z_1 et $z_2 < z_1$? Quelle caractéristique du fluide faut-il connaître ou modéliser pour poursuivre le calcul de cette différence de pression ?

8. Considérer maintenant le champ de pesanteur uniforme et l'atmosphère comme un gaz parfait isotherme à la température T_0. Commenter ces deux hypothèses. Établir alors la dépendance $P(z)$ de la pression avec l'altitude en notant P_0 la pression atmosphérique au niveau du sol. Définir et calculer la hauteur d'échelle (ou hauteur caractéristique) h pour l'air à 20 °C. Justifier que dans une enceinte de taille limitée (une salle de classe), on puisse considérer la pression du gaz comme uniforme.

9. À partir de l'expression de $P(z)$ précédente, établir celle de la concentration moléculaire $n(z)$ en introduisant la masse m d'une molécule et la constante de Boltzmann $k_B = R/N_A$, rapport de la constante des gaz parfaits à la constante d'Avogadro. Interpréter le résultat.

10. L'atmosphère est un mélange de diazote et de dioxygène considérés comme des gaz parfaits. Soient respectivement $n_{N_2}(z)$ et $n_{O_2}(z)$ leurs concentrations moléculaires à l'altitude z. On rappelle qu'au niveau du sol $\dfrac{n_{N_2}(z=0)}{n_{O_2}(z=0)} = 4{,}0$. Prévoir si ce rapport augmente ou diminue avec l'altitude. En supposant l'atmosphère isotherme à $T = 270$ K, déterminer l'altitude à laquelle ce rapport a varié de 25% par rapport au sol. Commenter.

11. Déterminer la hauteur d'échelle du dioxyde de carbone au sein de l'atmosphère isotherme à $T = 300\ \text{K}$, en équilibre dans le champ de pesanteur supposé uniforme. Commenter.

Systèmes à spectre en énergie discret

12. Un système physique ϕ en contact avec un thermostat à la température T peut se trouver dans deux états non dégénérés d'énergies E_1 et E_2 avec $E_2 = E_1 + \tilde{E}$ et $\tilde{E} > 0$. Exprimer p_1 et p_2, probabilités d'occupation respectives de ces deux états. Introduire la variable adimensionnée $\alpha = \dfrac{\tilde{E}}{k_B T}$ et tracer les variations de p_1 en fonction de α. Déterminer l'expression de l'énergie moyenne E_m de ce système physique ainsi que celle de son écart quadratique moyen en énergie ΔE. Tracer l'allure des variations du rapport $\dfrac{\Delta E}{\tilde{E}}$ en fonction de α. Commenter.

13. Un système physique ϕ en contact avec un thermostat à la température T est constitué de N particules indépendantes identiques dont chacune peut se trouver dans deux états non dégénérés d'énergie E_1 et E_2 avec $E_2 = E_1 + \tilde{E}$ et $\tilde{E} > 0$. Déterminer l'expression de l'énergie moyenne E_m de ce système physique ainsi que son écart quadratique moyen en énergie ΔE. Commenter les variations du rapport $\dfrac{\Delta E}{E_m}$ avec le nombre N de particules.

14. Capacité thermique d'un système à deux niveaux

Soit un système, composé d'un grand nombre N d'entités microscopiques indépendantes (par exemple des molécules) en équilibre avec un thermostat à la température T. Chacune de ces entités possède deux niveaux d'énergie ε_1 et ε_2 non dégénérés, avec $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ et $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. On note $\theta = \varepsilon / k_B$.

a) Établir l'expression de l'énergie interne U en fonction de $x = T/\theta$.

b) Calculer la capacité thermique C de ce système ainsi que C/R. Étudier les limites à basse et haute température de C/R. Représenter l'allure des variations de C/R en fonction de $x = T/\theta$.

c) À partir de la relation $(\Delta U)^2 = \dfrac{\exp(-1/x)}{\left[1+\exp(-1/x)\right]^2} N\varepsilon^2$ établie à la question **13.**, relier les fluctuations d'énergie interne de ce système et sa capacité thermique C.

d) Dans quel domaine rencontre-t-on ce type de modélisation en physique ?

15. Soit un système composé d'un grand nombre N de particules indépendantes en équilibre avec un thermostat à la température T. Les niveaux d'énergie ε_n accessibles à chacune de ces particules sont quantifiés et équidistants selon la

relation $\varepsilon_n = \varepsilon_0 + n\varepsilon$ et sont supposés non dégénérés. Déterminer pour ce système les expressions de l'énergie interne U et de la capacité thermique C. Introduire la température θ_E définie par $k_B\theta_E = \varepsilon$ et la variable $x = \dfrac{T}{\theta_E}$ pour représenter $\dfrac{C}{Nk_B} = f(x)$. Que remarque-t-on à haute température ?

■ Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

16. Un système physique ϕ dont l'état dépend du seul paramètre x est en équilibre avec un thermostat à la température T. Le comportement de ce système est décrit par la statistique de Maxwell-Boltzmann et son énergie s'exprime de façon quadratique en fonction de la variable x selon l'expression $E = \dfrac{1}{2}\gamma x^2$. Le domaine de variation de x est $D = [-x_0, x_0]$, avec l'hypothèse supplémentaire $\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma x_0^2}{k_B T} \gg 1$.

Établir que l'énergie moyenne de ce système est $< E >= \dfrac{k_B T}{2}$. Sous quel nom ce résultat est-il connu ?

17. En utilisant le théorème de l'équipartition de l'énergie, déterminer la capacité thermique molaire d'un gaz classique dilué monoatomique.

18. En utilisant le théorème de l'équipartition de l'énergie, déterminer la capacité thermique molaire d'un gaz classique dilué diatomique constitué de molécules considérées tout d'abord rigides puis non rigides.

19. Soit un solide constitué d'atomes disposés régulièrement selon un réseau cristallin. Chaque atome est libre de se déplacer un peu autour de sa position d'équilibre. Pour des températures suffisamment élevées une description classique de ce système est suffisante. Par application du théorème de l'équipartition de l'énergie retrouver que, dans ce modèle, la capacité thermique molaire de ce solide est $C_m = 3R$. Sous quel nom cette loi est-elle connue ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ La statistique de Boltzmann concerne les systèmes microscopiques ou macroscopiques en équilibre avec un thermostat à une température T.

☐ La probabilité pour un tel système de se trouver dans un état d'énergie E est proportionnelle à :

$$\boxed{e^{-E/k_BT}}$$

et non la probabilité pour l'énergie du système de prendre la valeur E. Cette distinction est cruciale quand les états énergétiques sont dégénérés.

☐ La mise en équation de nombreux problèmes est grandement simplifiée par un choix pertinent de l'origine des énergies. Ainsi lors de l'étude d'un système à deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 (avec $E_2 > E_1$) il est souhaitable d'introduire l'écart en énergie $2\varepsilon = E_2 - E_1$ et de choisir l'origine des énergies en $E_0 = (E_1 + E_2)/2$ pour écrire $\tilde{E}_2 = E_2 - E_0 = \varepsilon$ et $\tilde{E}_1 = E_1 - E_0 = -\varepsilon$.

☐ La fonction de partition $\boxed{Z = \sum_{\text{tous les états}} \exp(-\beta E)}$ avec $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$, permet d'exprimer simplement les grandeurs thermodynamiques relatives au système. Ainsi, l'énergie moyenne d'un système est $< E >= -\dfrac{1}{Z}\dfrac{\partial Z}{\partial \beta} = -\dfrac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$.

☐ Lors de l'étude d'un système à spectre en énergie discret, l'approximation classique consiste à supposer que les niveaux d'énergie successifs sont séparés entre eux d'une énergie très inférieure à $k_B T$. Les niveaux d'énergie du système forment alors quasiment un continuum.

☐ Le théorème d'équipartition de l'énergie permet d'attribuer à chaque terme quadratique intervenant dans l'expression de l'énergie du système la valeur :

$$\boxed{k_B T/2}$$

En revanche, les contributions à l'énergie moyenne des termes non quadratiques doivent être calculées au cas par cas.

☐ La capacité thermique d'un système peut être définie à volume constant ou à pression constante. Elles sont notées respectivement C_V et C_P. Elles sont reliées à l'énergie interne U et à l'enthalpie H par les définitions :

$$\boxed{C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V} \quad \text{et} \quad \boxed{C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P}$$

☐ La capacité thermique d'un système est une grandeur extensive. Ceci permet de définir, selon la description choisie, la capacité molaire, massique ou encore particulaire.

☐ Lors de l'étude d'un gaz diatomique, pour utiliser la bonne expression de la capacité thermique molaire à volume constant, il faut comparer la température d'étude aux températures dites de rotation et de vibration T_R et T_V :

- pour $T \leq T_R$, $C_{Vm} = \frac{3}{2}R$.
- pour $T_R \leq T \leq T_V$, $C_{Vm} = \frac{5}{2}R$.
- pour $T \geq T_V$, $C_{Vm} = \frac{7}{2}R$.

Par exemple, pour le dihydrogène $T_R \simeq 75$ K et $T_V \simeq 6300$ K.

☐ Il est conseillé de connaître les valeurs numériques suivantes :
– les masses volumiques :

$$\rho_{eau} = 1 \text{ g.cm}^{-3} = 1 \text{ kg/L} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_{air} = \frac{MP}{RT} = 1{,}2 \text{ g/L} = 1{,}2 \text{ kg.m}^{-3} \text{ à } 20\,^\circ\text{C sous 1 atm (modèle G.P.)}$$

– les masses molaires :

$$M_{eau} = 18 \text{ g.mol}^{-1} = 18.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} \text{ (revenir à } H_2O : 2+16)$$

$$M_{air} = 29 \text{ g.mol}^{-1} = 29.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} \text{ [en gros 4/5 de } N_2 \text{ (28) et 1/5 de } O_2 \text{ (32)]}$$

☐ Pour l'étude de l'équilibre d'un fluide, choisir comme système une particule de fluide de masse $dm = \rho(M)dV$ et non la totalité du fluide.

☐ Pour les fluides, utiliser la masse volumique (grandeur intensive locale) plutôt que le volume. Ainsi, pour un gaz parfait, on écrit $\rho = MP/RT$ plutôt que $PV = nRT$ (pour une masse $m = \rho V$ donnée, ρ et V sont inversement proportionnels).

☐ Les exercices où interviennent uniquement les forces de pression et de pesanteur se résolvent à partir de la loi simple :

$$\boxed{dP = -\rho g dz}$$

où l'axe Oz est dirigé suivant la verticale ascendante.

Applications directes du cours

Loi du nivellement barométrique

20. En 1860, un explorateur anglais rapporte les mesures suivantes de Palestine : au niveau de la mer Morte, à 25 °C, la pression atmosphérique normale est de 796 mmHg. Qu'en déduit-il sachant que cette mer est fermée ?

21. Quelle conversion faut-il effectuer pour passer des mbar aux hPa ?

22. Dans l'hypothèse d'une atmosphère isotherme à $T_0 = 20\ °C$, déterminer la pression et la masse volumique de l'air au sommet du Mont-Blanc (altitude : 4 810 m). Commenter les résultats obtenus.

23. Estimation de la masse de l'atmosphère terrestre
En considérant l'atmosphère comme un gaz parfait isotherme à 0°C, déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de la masse M_a de l'atmosphère terrestre. Il est rappelé que l'épaisseur de l'atmosphère est grande devant $h = 8{,}0$ km (hauteur caractéristique à 0°C) et petite devant le rayon terrestre $R = 6\,400$ km.

Systèmes à spectre en énergie discret

24. Soit un système composé d'un grand nombre N de molécules indépendantes en équilibre avec un thermostat à la température T. Chacune de ces molécules peut se trouver dans l'un des trois états de niveaux d'énergie $E_1 = 0$, $E_2 = \varepsilon$ et $E_3 = 10\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Ces états sont supposés non dégénérés. Déterminer les expressions de l'énergie interne molaire U_m et de la capacité thermique molaire C_m de ce système. Représenter les variations de C_m en fonction de la température. Préciser le domaine de température dans lequel les deux premiers niveaux sont pratiquement les seuls occupés.

25. Un système constitué d'un grand nombre de particules indépendantes est en équilibre avec un thermostat à la température T. Les pourcentages de répartition de la population dans les différents niveaux d'énergie non dégénérés sont donnés ci-dessous. Quelle est la température du thermostat ?

	état 1	état 2	état 3	état 4
énergie (meV)	4,3	12,9	21,5	30,1
population	63%	23%	8,5%	3,1%

26. Un oscillateur harmonique quantique unidimensionnel est en équilibre avec un thermostat à la température T. Son spectre en énergie, non dégénéré, est $E_n = (n+1/2)\hbar\omega_0$. Déterminer l'expression de l'énergie moyenne $< E >$ de cet oscillateur ainsi que son écart quadratique moyen en énergie ΔE. Comment varient ces grandeurs pour $k_B T << \hbar\omega_0$ et $k_B T >> \hbar\omega_0$? Représenter les variations de $\dfrac{\Delta E}{< E >}$ en fonction de la température.

Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

27. Un gaz parfait constitué de molécules diatomiques élastiques est en équilibre à la température $T = 4500$ K. Déterminer pour une molécule les énergies moyennes des mouvements de translation, de rotation et de vibration dans l'approximation classique.

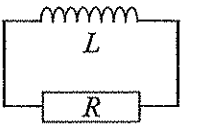
28. Déterminer, à haute température, la capacité thermique molaire d'un mélange gazeux composé de 50% de O_2 et de 50% de CO_2 (molécule supposée linéaire).

29. Le tableau ci-dessous regroupe les capacités thermiques molaires à volume constant de quelques solides simples à une température $T = 298$ K. Ces valeurs sont-elles en accord avec la loi de Dulong et Petit ?

solides	aluminium	diamant	plomb	platine	argent	étain
C_{Vm} en $J.K^{-1}.mol^{-1}$	23,4	6,1	24,8	25,4	24,4	25,4

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

30. Le circuit électrique représenté ci-contre est en équilibre thermique avec un thermostat à la température T. Déterminer l'expression de Δi, écart quadratique moyen de l'intensité du courant électrique circulant dans l'inductance.
Application numérique pour $L = 100$ mH et $T = 300$ K.



31. Pour voir ce qu'il en est de l'expression courante « léger comme l'air » estimer :
- la masse d'air dans une salle de classe
- la masse d'air dans le plus petit parallélépipède contenant la tour Eiffel (dont la base carrée fait 125 m de côté et la hauteur totale 324 m) ; comparer le résultat à la masse de la charpente métallique de la tour, soit environ 7 000 tonnes.

32. Qu'entend-on par « avion pressurisé » ?

33. Pourquoi les mesures de pression faites pour les prévisions météorologiques sont corrigées de l'altitude du lieu de la mesure ? À quoi ressembleraient sinon les cartes représentant les courbes isobares ?

34. Définir et calculer l'altitude z_G du centre de masse d'une colonne d'air isotherme de température T et de hauteur infinie en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$. Quel est l'effet d'une variation de T sur z_G ?

35. Un cylindre d'axe Oz, de rayon R et de hauteur h, contient N molécules de masse m d'un gaz parfait. L'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire ω au sein d'une pièce à la température T. L'équilibre relatif dans le référentiel tournant est réalisé. Déterminer l'expression de la concentration moléculaire $n(r)$ en fonction de la distance r à l'axe.

36. Dans l'atmosphère supposée isotherme d'une étoile de type A l'énergie cinétique moyenne des atomes d'hydrogène est $< e_c > = 1{,}1$ eV. Quelle est la température de

surface de cette étoile ? Déterminer les proportions d'atomes d'hydrogène qui se trouvent dans les deux premiers états excités. On rappelle que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés selon $E_n = \frac{-13,6}{n^2}$ eV.

37. Déterminer la température T_L à partir de laquelle il est nécessaire de prendre en compte les états excités dans la détermination de la capacité thermique de l'hydrogène atomique.

38. Rappeler la relation d'Arrhenius vue en cinétique chimique. Établir un lien entre cette relation et la statistique de Maxwell-Boltzmann.

Exercices

39. Suspension colloïdale et distribution de Maxwell-Boltzmann

Un milieu fluide, de température uniforme T et de masse volumique ρ_f, contient en régime dilué des particules solides en suspension (appelées également colloïdes). Cette solution est soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$. Les colloïdes sont sphériques, de rayon a, de volume v et de masse volumique ρ_c. Leur concentration particulaire à l'altitude z est notée $n = n(z) \equiv \delta N / \delta V$. La pression du fluide est notée P_f et l'écart entre les masses volumiques $\tilde{\rho} = \rho_c - \rho_f$.

Pour les ordres de grandeurs, les colloïdes sont en or ($\rho_{or} = 19,30 \times 10^3$ kg.m^{-3}, $a = 50$ nm et $n = 10^{18}$ m^{-3}) et le fluide est de l'eau à $T = 300$ K.

a) Dans la limite du régime dilué, l'équation d'état du "gaz colloïdal" est celle d'un gaz parfait. Préciser cette équation reliant la pression P_c du gaz colloïdal et sa concentration particulaire n.

b) Établir l'équation différentielle traduisant l'équilibre mécanique d'un élément de volume de la solution. Vérifier qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{dP_f}{dz} + g\rho_f + k_B T \frac{dn}{dz} + nvg\tilde{\rho} = 0$$

c) En régime dilué, la présence des colloïdes est sans incidence sur les variations de la pression P_f du fluide avec l'altitude z. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $n(z)$.

d) En notant $n(0) = n_0$, établir l'expression de $n(z)$ et exprimer sa longueur caractéristique de variation notée L. Calculer l'ordre de grandeur de L.

e) La comparaison du rapport $L(a)/a$ à l'unité définit une frontière entre un état de suspension et celui d'un sédiment. Exprimer en fonction de $k_B T$ et $g\tilde{\rho}$ la taille critique a_c associée à cette frontière. Proposer une interprétation énergétique de ce seuil et justifier le choix du critère adopté. Calculer a_c.

f) Indiquer à quelle condition sur a et n, le gaz de colloïdes peut être considéré comme un gaz parfait. Cette condition est-elle satisfaite ici ?

g) La définition de la concentration locale $n(z)$ présuppose une uniformité des grandeurs à l'échelle de δV. Indiquer comment doivent se situer la longueur caractéristique L et l'extension δz de l'élément de volume δV. Quelle autre contrainte doit également vérifiée δz ?

40. Capacité thermique molaire du dihydrogène (*)

Au sein d'une molécule de dihydrogène, l'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est correctement décrite par l'expression empirique :

$V = V_0 \times \left[e^{-2a(r-r_0)} - 2e^{-a(r-r_0)} \right]$, où $V_0 = 4{,}4$ eV, $a = 2\times10^8$ cm^{-1} et $r_0 = 8\times10^{-9}$ cm.

a) Estimer les températures T_R et T_V à partir desquelles la rotation et la vibration de la molécule contribuent à la capacité thermique.

b) Donner pour le dihydrogène gazeux, en l'absence d'ionisation et de dissociation, les valeurs approchées de la capacité thermique molaire à volume constant aux températures $T_1 = 25$ K, $T_2 = 250$ K, $T_3 = 2500$ K et $T_4 = 10\,000$ K.

41. Capacité thermique molaire de l'atmosphère isotherme

Raisonner sur une colonne d'air isotherme de température T et de hauteur infinie en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$. Déterminer l'expression de l'énergie interne molaire U_m puis de la capacité thermique molaire $C_m = \dfrac{\partial U_m}{\partial T}$ de cette atmosphère isotherme.

42. Système à trois niveaux d'énergie

Un système physique, en contact avec un thermostat à la température T, est constitué de N atomes indépendants pouvant se trouver dans des états non dégénérés d'énergies respectives $-\varepsilon$, 0 et $+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Déterminer les expressions de l'énergie interne molaire U_m, de l'écart quadratique en énergie molaire ΔU_m et de la capacité thermique molaire C_m de ce système. Représenter le graphe des variations de C_m en fonction de la variable $x = \dfrac{k_B T}{\varepsilon}$.

43. Fluctuations d'énergie et capacité thermique

Soit un système composé d'un grand nombre N de particules indépendantes en équilibre avec un thermostat à la température T. Chacune de ces particules peut se trouver dans l'un des n états non dégénérés de niveaux d'énergie E_i (i variant de 1 à n). Introduire la fonction de partition $Z = \sum_{i=1}^{n} e^{-E_i/k_B T}$, la notation $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$ et montrer que la contribution c_V d'une particule à la capacité thermique du système est reliée à son écart quadratique moyen en énergie Δe par $c_V = \dfrac{(\Delta e)^2}{k_B T}$.

44. Paramagnétisme à deux états

Une collection d'un grand nombre N de particules de spins 1/2 identiques est placée dans une région de l'espace de volume V où règne un champ magnétique constant uniforme $\vec{B}_0$ dirigé suivant un axe Oz. Chaque particule possède un moment magnétique $\vec{m}$ dont la projection sur l'axe Oz est quantifiée et ne peut prendre que deux valeurs opposées $m_z = \pm\mu_B$ où $\mu_B = e\hbar/2m$ est le magnéton de Bohr.

On note N^+ (respectivement N^-) le nombre de particules tels que $\vec{m}\cdot\vec{B}_0 > 0$ (respectivement $\vec{m}\cdot\vec{B}_0 < 0$). La température du système est maintenue à une valeur T et les interactions entre les spins (ou dipôles magnétiques correspondants) sont négligeables.

a) En utilisant la loi de répartition de Boltzmann, déterminer à l'équilibre le moment magnétique résultant $\vec{M}$ de cette assemblée de dipôles magnétiques en fonction de N, μ_B et de la grandeur sans dimension $a = \mu_B B_0/k_B T$.

b) Représenter sur un graphe les variations de $\|\vec{M}\|$ en fonction de la température. Commenter ce tracé. Évaluer en électronvolts, les deux énergies $\mu_B B_0$ et $k_B T$ pour un champ magnétique intense $B_0 = 1\,\mathrm{T}$ et une température $T = 293\,\mathrm{K}$. Quelle est la relation reliant $\vec{M}$ à $\vec{B}_0$ dans ces conditions expérimentales ?

c) Exprimer l'énergie interne U des N dipôles en considérant uniquement leur énergie potentielle dans le champ $\vec{B}_0$. Discuter les cas limites. Déterminer dans les conditions usuelles, à savoir $a \ll 1$, la capacité thermique $C_{B_0}(T)$ de ce système, à champ constant.

d) Calculer la longueur d'onde λ d'une onde électromagnétique dont les photons ont une énergie suffisante pour induire une transition entre les deux niveaux dans le cas où $B_0 = 0{,}33\,\mathrm{T}$.

45. Longueur d'écrantage de Debye

Les colloïdes sont des particules dispersées dans un milieu fluide. Leur taille, de l'ordre du µm, est intermédiaire entre la taille atomique et les distances macroscopiques. Ces particules sont chargées en surface et leur répulsion électrostatique assure une remarquable stabilité à leur suspension dans un fluide. Cependant, dans le cas où le solvant est ionisé, des ions de charges opposées s'agglomèrent autour des colloïdes provoquant un écrantage de la répulsion électrostatique.

On se propose de déterminer les variations du potentiel électrostatique au voisinage d'un colloïde. La situation étudiée est modélisée de la façon suivante :

- Le colloïde est une boule de rayon a, de centre O et porte une charge $Ze \geq 0$ uniformément répartie en surface.
- Le problème est à symétrie sphérique. Le potentiel électrostatique à une distance r du colloïde est noté $V(r)$ avec $\lim_{r\to+\infty} V(r) = 0$.

- Le solvant est constitué d'une solution d'ions positifs et négatifs, de charges respectives $+e$ et $-e$, de concentration particulaire n_0 loin du colloïde.
- Au voisinage du colloïde, les concentrations particulaires des ions sont notées $n_+(r)$ et $n_-(r)$.
- La permittivité électrique du solvant est prise égale à celle du vide.
- La suspension colloïdale est maintenue à la température T.

a) Établir l'expression de la charge volumique $\rho(r)$ à une distance r du colloïde en fonction de e, n_0, k_B, T et $V(r)$.

b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $V(r)$.

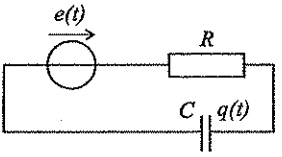
c) Résoudre cette équation dans le cas où V_0, potentiel électrostatique à la surface de la particule colloïdale, est petit devant k_BT/e. Faire apparaitre une longueur caractéristique λ_D dite longueur de Debye. Commenter.

d) Application numérique : Évaluer λ_D à une température de $T = 300$ K, dans le cas d'une solution d'ions monovalents à une concentration molaire $c_0 = 0{,}01$ mol.L^{-1}. Comment pourrait-on simplifier la modélisation sachant que le rayon des colloïdes est $a = 0{,}5$ µm ?

46. Étude du bruit Johnson (*)

L'agitation thermique des électrons dans une résistance engendre des fluctuations de la tension à ses bornes, appelées bruit Johnson. Pour décrire ce phénomène, la résistance étudiée est modélisée par une résistance idéale R en série avec un générateur de tension aléatoire $e(t)$, de valeur moyenne temporelle nulle.

Pour poursuivre l'analyse, considérons le circuit ci-dessous maintenu à la température T.



a) On étudie d'abord le cas d'une f.é.m. sinusoïdale $e_f(t)$, de fréquence f. Calculer l'énergie moyenne U_f stockée dans le condensateur en fonction de C, R, f et $\overline{e_f^2} = <e_f^2(t)>$.

b) La f.é.m. fluctuante $e(t)$ peut être considérée comme la superposition de composantes sinusoïdales incohérentes entre elles. Plus précisément, pour l'intervalle de fréquence $[f, f+df]$, la contribution $d\overline{e^2}$ à la valeur moyenne $\overline{e^2}$ est donnée par $d\overline{e^2} = u(f)df$. La quantité $u(f)$ s'appelle la densité spectrale associée. Déterminer la moyenne temporelle $\overline{U}$ de l'énergie stockée

dans le condensateur, dans l'hypothèse où la densité spectrale est indépendante de la fréquence, soit encore $u(f) = u_0 = Cste$.

Les fluctuations de la répartition des électrons se traduisent au niveau des armatures du condensateur, par une charge aléatoire q. La probabilité de trouver cette charge dans l'intervalle $[q, q+dq]$ est donnée par $P(q)dq$ où $P(q)$ est une densité de probabilité normalisée de la forme :

$$P(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C k_B T}} \exp\left(-\frac{U(q)}{k_B T}\right)$$

où $U(q)$ désigne l'énergie stockée dans le condensateur portant une charge q sur l'une de ses armatures.

c) Calculer, à partir de la distribution $P(q)$, la valeur moyenne $< U >$ de l'énergie stockée dans le condensateur en fonction de k_B et T. Commenter.

d) En supposant égales les valeurs moyennes $\overline{U}$ et $< U >$, obtenir la valeur moyenne de la densité spectrale u_0. Exprimer alors $\overline{e^2}$ en fonction de R, k_B et T dans la bande de fréquences de largeur $\Delta f = f_2 - f_1$.

e) Déterminer la valeur numérique de $\sqrt{u_0}$ pour $T = 100$ mK et $R = 1$ MΩ.

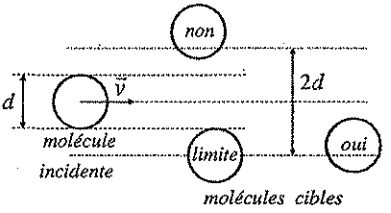
Réponses aux questions

Le cours d'abord

Échelles microscopique, mésoscopique et macroscopique

1. Avec une masse molaire de $M = 18\,\text{g.mol}^{-1}$, il y a $\frac{m}{M} N_A \approx 10^{23}$ molécules dans les trois grammes d'eau. Il faudra donc 6.10^{23} paramètres pour décrire ce système d'un point de vue mécanique. Même si les interactions entre molécules sont connues, le nombre d'équations rend le problème impossible à traiter. Dans une description macroscopique ce sont plutôt les valeurs moyennes qui jouent un rôle dans l'évolution de l'état d'un système et non les valeurs individuelles. Par exemple, la variable macroscopique température est reliée à $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ vitesse quadratique moyenne des particules constituant le système.

2. Les molécules (les nuages électroniques) sont assimilées à des sphères qui, comme des boules de billard, ne peuvent pas se recouvrir (force de répulsion à courte distance). La molécule incidente n'aura de choc avec une molécule cible que si le centre de cette dernière se trouve sur un disque de diamètre $2d$ centré sur l'axe correspondant à la trajectoire rectiligne incidente. La molécule incidente subit donc une collision si il y a une particule cible dans le volume balayé.



$$\pi d^2 l \times n^* = 1 \Rightarrow \boxed{l = \frac{1}{\pi d^2 n^*}}$$

3. Le nombre de molécules dans n moles de gaz est nN_A où N_A est la constante d'Avogadro. Écrivons alors l'équation des gaz parfait sous la forme $PV = nN_A \frac{R}{N_A} T = nN_A \times k_B T$. Par définition le nombre de molécules par unité de volume ou densité particulaire (en m^{-3}) est $n^* = \frac{nN_A}{V}$

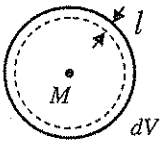
$$n^* = \frac{P}{k_B T} = \frac{10^5}{1{,}38.10^{-23} \times 293} \approx \underline{2{,}5.10^{25}\ \text{m}^{-3}}$$

Ainsi dans un mm^3 d'air, il y a tout de même $2{,}4.10^{16}$ molécules, soit 24 millions de milliards, ce qui dépasse l'entendement...!
Pour un diamètre de molécule O_2 / N_2 de $d \approx 0{,}3$ nm,

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} n^* \pi d^2} \approx \underline{0{,}1\ \mu m}$$

ce qui est grand à l'échelle moléculaire, le gaz étant peu dense. En revanche pour un liquide où les molécules sont « en contact », le libre parcours moyen est de l'ordre de la taille des molécules soit $l \approx 0{,}1$ nm, ce qui avec la formule précédente, confirme qu'un liquide est toujours en gros 1000 fois plus dense qu'un gaz.

4. L'élément de volume dV choisi doit être **grand à l'échelle microscopique,** afin de contenir un très grand nombre de molécules et que l'on puisse y définir la grandeur macroscopique par une valeur moyenne spatiale, mais **petit à l'échelle macroscopique,** pour que la grandeur macroscopique ainsi définie puisse être considérée comme la valeur locale au point M.



À cause des chocs, le nombre de particules dans dV fluctue, mais si la taille de dV est très grande devant le libre parcours moyen, cette fluctuation ne concerne que les particules « en surface » de dV.

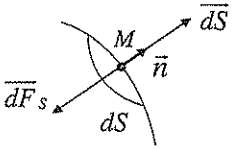
- pour un gaz où $l \approx 0{,}1$ µm, on peut prendre $dV \approx 1\ mm^3$
- pour un liquide où $l \approx qqs\ 0{,}1$ nm, prendre $dV \approx 1\ \mu m^3$

En notant dN le nombre de molécules contenues dans le volume dV, on peut alors définir la densité moléculaire locale :

$$\boxed{n^*(M) = \frac{dN}{dV}}$$

Facteur de Boltzmann

5. Soit une surface S baignant sur sa droite dans un fluide au repos ; elle est matérielle si elle délimite sur sa gauche un solide et immatérielle si elle baigne entièrement dans le fluide. Un élément de surface dS « centré » en un point M, orienté par la normale extérieure $\vec{n}$, subit une force exclusivement normale de la part du fluide de droite :



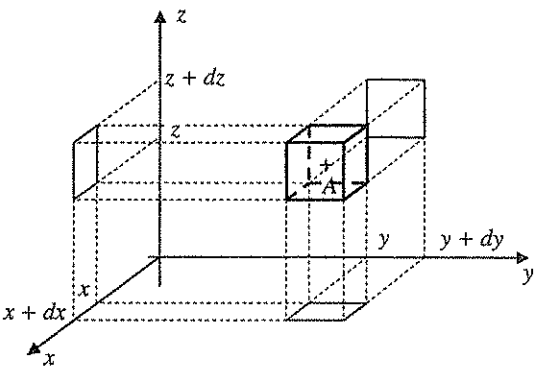
$$\overrightarrow{dF}_S(M) = -P(M)dS\vec{n} = -P(M)\overrightarrow{dS}$$

où $P(M) > 0$ est un champ scalaire appelé pression au point M considéré.
Elle s'exprime donc comme la norme de la force pressante normale par unité de surface :

$$\boxed{P(M) = \frac{\| \overrightarrow{dF}_S \|}{\| \overrightarrow{dS} \|}}$$ et son unité est le $N.m^{-2}$ = Pa (Pascal).

La pression au point M ne dépend pas de $\vec{n}$, c'est-à-dire de l'orientation de l'élément de surface dS au point considéré : c'est l'isotropie de la pression.

6. Le parallélépipède élémentaire $dx\,dy\,dz$, de centre A, est en équilibre au sein du fluide sous l'action de son poids : $\rho(A)\,dxdydz\,\vec{g}$ et des forces de pression exercées par le fluide environnant sur chacune de ses faces.



Sur la face arrière :
$+P(x, y_A, z_A)\,dy\,dz\,\vec{u}_x$
avec $x = x_A - dx/2$
Sur la face avant :
$-P(x + dx, y_A, z_A)\,dy\,dz\,\vec{u}_x$
avec $x + dx = x_A + dx/2$
Donc suivant l'axe Ox :

$$\left(P(x, y_A, z_A) - P(x + dx, y_A, z_A)\right) dy\,dz\,\vec{u}_x = -\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)_A dx\,dy\,dz\,\vec{u}_x$$

De même suivant Oy : $-\left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)_A dx\,dy\,dz\,\vec{u}_y$ et suivant Oz : $-\left.\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)_A dx\,dy\,dz\,\vec{u}_z$

La RFD en projection donne en A, point quelconque du fluide :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = 0 \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = 0 \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z}\,dx\,dy\,dz - \rho g\,dx\,dy\,dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases}}$$

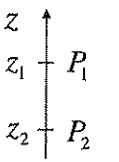
en rappelant que l'axe Oz est dirigé vers le haut.

7. $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ P ne dépend pas de x et y. La pression est donc uniforme dans tout plan horizontal d'un même fluide en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre. Les isobares (surfaces d'égale pression) sont des plans horizontaux perpendiculaires à Oz. La pression ne dépend donc que de l'altitude z :

$$-\rho g - \frac{dP}{dz} = 0 \quad \text{(dérivée droite puisque } P \text{ ne dépend que de } z\text{)}$$

d'où la formule importante $\boxed{dP = -\rho g dz}$

Par intégration $P_2 - P_1 = \int_{z_2}^{z_1} \rho(z) g(z) dz > 0$ fait apparaître que la différence de pression entre les deux points est liée au poids du fluide



contenu dans le cylindre de génératrices parallèles à Oz, de base « unité », et de hauteur $z_1 - z_2$.

Le calcul de cette intégrale, donnant accès au champ de pression, nécessite de connaître ou de modéliser $\rho(z)$ suivant la nature du fluide : compressible, incompressible...

8. Le champ de pesanteur g varie selon $1/(R+z)^2$ où $R = 6\,370$ km désigne le rayon terrestre et z l'altitude comptée à partir du sol. Jusqu'à quelques dizaines de kilomètres $z \ll R$ et g peut être considéré comme uniforme.

L'atmosphère isotherme à T_0 signifie que les variations de la température avec l'altitude sont négligées. Ceci n'est vrai que sur quelques centaines de mètres. On utilise cependant le modèle isotherme permettant un calcul simplifié.

$$\text{Alors } dP = -\rho g dz = -\frac{MP}{RT_0} g dz \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

dans le cadre du modèle g est indépendant de z et après intégration :

$$\boxed{P(z) = P_0 \, e^{-\frac{Mg}{RT_0} z}}$$

où P_0 est la pression atmosphérique au sol $(z = 0)$.

Comme prévu la pression décroît avec l'altitude (c'est la formule dite du « nivellement barométrique » ou plus simplement formule barométrique).

On définit la hauteur d'échelle h par $P(z) = P_0 \, e^{-\frac{z}{h}}$ soit $\boxed{h = \frac{RT_0}{Mg} = 8{,}6 \text{ km}}$

h représente la hauteur sur laquelle la pression diminue d'un facteur $e \approx 2{,}7$.

À température uniforme, la masse volumique est proportionnelle à la pression :

$$\boxed{\rho(z) = \rho_0 \, e^{-\frac{Mg}{RT_0} z}}$$

À température égale, un même volume d'air en altitude, contient moins de molécules qu'au niveau de la mer. De plus, la proportion de dioxygène est plus faible, car $M_{O_2} > M_{N_2}$ et la pression partielle en dioxygène diminue plus rapidement avec l'altitude que la pression partielle en diazote. Ces deux points expliquent les problèmes respiratoires en altitude : dans la ligne ferroviaire des Andes au Pérou, des masques à oxygène sont disponibles pour les touristes ayant du mal à respirer ; certains wagons de la ligne de chemin de fer Pékin-Lhassa, au Tibet, avec 950 km à plus de 4000 m, sont pressurisés. On peut également citer les accidents parfois mortels survenus aux premiers aéronautes tentant des records d'altitude.

La formule barométrique montre d'autre part que dans un récipient de taille limitée (y compris une salle de classe), on peut négliger la variation de pression avec l'altitude et donc parler de « la » pression du gaz (avec l'article défini) : même avec $z = 100$ m, on a $P/P_0 = 0{,}99$.

9. On écrit $\frac{M}{R}=\frac{M}{N_A}\frac{N_A}{R}=\frac{m}{k_B}$ où $k_B=\frac{R}{N_A}=1{,}38.10^{-23}\ \text{J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann (k_BT est une énergie) et $m=M/N_A$ la masse d'une molécule.

La densité moléculaire étant, à température uniforme, proportionnelle à la pression selon la relation $P(z)=n(z)k_BT$, on peut écrire :

$$\boxed{n(z)=n_0\,e^{-\frac{mgz}{k_BT}}}$$

Le nombre N de molécules contenues dans la colonne cylindrique de base S s'écrit alors $N=S\times\int_{z=0}^{+\infty}n(z)dz=S\times\int_{z=0}^{+\infty}n_0\,e^{-\frac{mgz}{k_BT}}dz$ soit encore :

$$\boxed{N=\frac{Sn_0k_BT}{mg}}$$

Le nombre infinitésimal dN de molécules situées dans ce cylindre entre les altitudes z et $z+dz$ s'écrit $dN=S\times n(z)dz$.

La probabilité dP qu'une molécule se situe entre les altitudes z et $z+dz$ s'exprime alors facilement comme le rapport de ces deux nombres :

$$dP=\frac{dN}{N}=\frac{S\times n(z)dz}{N}=\frac{mg\,e^{-\frac{mgz}{k_BT}}dz}{k_BT}=p(z)dz$$

où $p(z)=\frac{mg}{k_BT}\times e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$ est la densité linéique de probabilité de présence.

La probabilité qu'une molécule d'air se situe entre les altitudes z et $z+dz$ est ainsi proportionnelle à $e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$. En faisant apparaître l'énergie potentielle $U=mgz$, ce coefficient de proportionnalité s'écrit :

$$\boxed{e^{-\frac{U}{k_BT}}}$$

C'est le facteur de Boltzmann, appelé encore poids de Boltzmann.

10. Soient m_{N_2} et m_{O_2} les masses des molécules de diazote et de dioxygène. L'atmosphère étant supposé isotherme, la statistique de Boltzmann permet d'écrire $n_{N_2}(z)=n_{N_2}^0\exp\left(-\frac{m_{N_2}gz}{k_BT}\right)$ et $n_{O_2}(z)=n_{O_2}^0\exp\left(-\frac{m_{O_2}gz}{k_BT}\right)$.

Les molécules de O_2 sont plus massives que celles de N_2, ce qui entraine que la concentration moléculaire en O_2 diminue plus vite que celle en N_2 avec l'altitude.

Le rapport $r(z)=\frac{n_{N_2}(z)}{n_{O_2}(z)}$ est donc une fonction croissante de l'altitude et

l'expression $r(z)=\dfrac{n_{N_2}(z)}{n_{O_2}(z)}=\dfrac{n_{N_2}^0}{n_{O_2}^0}\exp\left(\dfrac{\left(m_{O_2}-m_{N_2}\right)g\,z}{k_BT}\right)$ permet de déterminer l'altitude h telle que $r(h)=4\times1{,}25=5$ en résolvant $\exp\left(\dfrac{\left(m_{O_2}-m_{N_2}\right)g\,h}{k_BT}\right)=1{,}25$.

On obtient ainsi :

$$\boxed{h=\frac{k_BT}{\left(m_{O_2}-m_{N_2}\right)g}\ln(1{,}25)}$$ et numériquement $\underline{h=12{,}8\text{ km}}$.

La valeur obtenue est de l'ordre de l'épaisseur de la troposphère.

11. Le dioxyde de carbone fait partie du mélange gazeux idéal qu'est l'atmosphère. Sa concentration particulaire varie avec l'altitude selon $n_{CO_2}(z)=n_0\exp\left(-\dfrac{m_{CO_2}g\,z}{k_BT}\right)$.

La hauteur caractéristique de cette distribution est :

$$\boxed{h_{CO_2}=\frac{k_BT}{m_{CO_2}g}=\frac{m_{air}}{m_{CO_2}}\times\frac{k_BT}{m_{air}\,g}}$$

Numériquement il vient $\underline{h_{CO_2}}=\dfrac{29}{44}\times\dfrac{k_BT}{m_{air}\,g}=\underline{5{,}8\text{ km}}$.

Ce calcul illustre que plus les polluants sont lourds, plus ils sont confinés au voisinage du sol. C'est pourquoi la couche formée des trois premiers kilomètres de troposphère est qualifiée de couche sale.

Systèmes à spectre d'énergies discret

12. Le système physique ϕ étant en contact avec un thermostat à la température T, le facteur de Boltzmann permet d'exprimer la distribution canonique de probabilité :

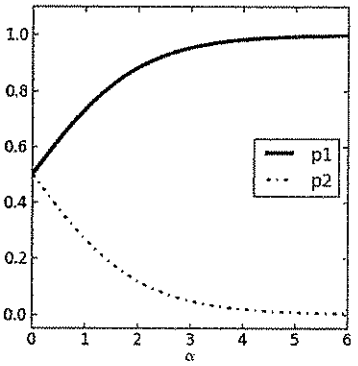
$$\boxed{p_1=Ae^{-\frac{\mathcal{E}_1}{k_BT}}}\quad\text{et}\quad\boxed{p_2=Ae^{-\frac{\mathcal{E}_2}{k_BT}}}$$

La condition de normalisation $\boxed{p_1+p_2=1}$ conduit à l'expression de la constante $A=\dfrac{1}{e^{-\frac{\mathcal{E}_1}{k_BT}}+e^{-\frac{\mathcal{E}_2}{k_BT}}}$ puis à $p_1=\dfrac{e^{-\frac{\mathcal{E}_1}{k_BT}}}{e^{-\frac{\mathcal{E}_1}{k_BT}}+e^{-\frac{\mathcal{E}_2}{k_BT}}}=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{\tilde{E}}{k_BT}}}$ et enfin à $p_2=\dfrac{e^{-\frac{\tilde{E}}{k_BT}}}{1+e^{-\frac{\tilde{E}}{k_BT}}}$.

À l'aide de la variable adimensionnée $\alpha=\dfrac{\tilde{E}}{k_BT}$ ces expressions s'écrivent :

$$\boxed{p_1=\frac{1}{1+e^{-\alpha}}}\quad\text{et}\quad\boxed{p_2=\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}}$$

D'où le tracé en trait plein des variations de la probabilité p_1 en fonction de la variable $\alpha = \dfrac{\tilde{E}}{k_B T}$ et en trait mixte celui de p_2 :



Ce graphe illustre deux points essentiels :
Lorsque $\tilde{E} << k_B T$, c'est-à-dire quand l'écart en énergie entre les deux états du système est petit devant l'énergie d'agitation thermique, les deux états sont équiprobables ($p_1 = p_2 = \dfrac{1}{2}$).
En revanche quand cet écart en énergie est grand devant l'énergie d'agitation thermique ($\tilde{E} >> k_B T$), la probabilité d'occupation de l'état de basse énergie tend vers 1.

L'énergie moyenne E_m du système est $E_m = p_1 E_1 + p_2 E_2 = \dfrac{E_1}{1+\mathrm{e}^{-\alpha}} + \dfrac{E_2\,\mathrm{e}^{-\alpha}}{1+\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

En introduisant la moyenne arithmétique $E_0 = \dfrac{E_1 + E_2}{2}$, il vient $E_1 = E_0 - \dfrac{\tilde{E}}{2}$ et $E_2 = E_0 + \dfrac{\tilde{E}}{2}$ ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{E_m = E_0 - \frac{\tilde{E}}{2} \times \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}{1+\mathrm{e}^{-\alpha}} = E_0 - \frac{\tilde{E}}{2} \times (p_1 - p_2)}$$

L'écart quadratique en énergie ΔE est donné par :

$$(\Delta E)^2 = p_1 (E_1 - E_m)^2 + p_2 (E_2 - E_m)^2$$

$$(\Delta E)^2 = p_1 (E_1^2 - 2E_1 E_m + E_m^2) + p_2 (E_2^2 - 2E_2 E_m + E_m^2)$$

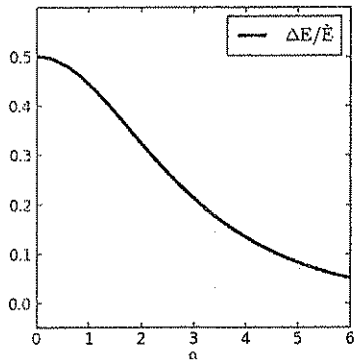
$$(\Delta E)^2 = p_1 E_1^2 + p_2 E_2^2 - 2\underbrace{(p_1 E_1 + p_2 E_2)}_{=E_m} E_m + \underbrace{(p_1 + p_2)}_{=1} E_m^2$$

$$\boxed{(\Delta E)^2 = p_1 E_1^2 + p_2 E_2^2 - E_m^2}$$ formule à mémoriser.

$$(\Delta E)^2 = p_1\left(E_0 - \frac{\tilde{E}}{2}\right)^2 + p_2\left(E_0 + \frac{\tilde{E}}{2}\right)^2 - \left(E_0 - \frac{\tilde{E}}{2}\times(p_1 - p_2)\right)^2$$

$$(\Delta E)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{4}\left(1-(p_1-p_2)^2\right) = \frac{\tilde{E}^2}{4}(1+p_1-p_2)(1-p_1+p_2) = p_1 p_2 \tilde{E}^2$$

D'où le résultat $\boxed{\Delta E = \sqrt{p_1 p_2}\,\tilde{E}}$ et ci-dessous le tracé de $\frac{\Delta E}{\tilde{E}} = \sqrt{p_1 p_2}$ en fonction de la variable sans dimension $\alpha = \tilde{E}/k_B T$.



Le tracé de $\frac{\Delta E}{\tilde{E}}$ montre que les fluctuations relatives d'énergie de ce système à deux états sont très importantes quand $\tilde{E} << k_B T$, c'est-à-dire quand l'écart en énergie entre les deux états du système est petit devant l'énergie d'agitation thermique.
En revanche quand cet écart en énergie est grand devant l'énergie d'agitation thermique ($\tilde{E} >> k_B T$) la probabilité d'occupation de l'état de basse énergie tend vers 1, l'état énergétique du système est quasi certain et les fluctuations relatives de l'énergie tendent vers zéro.

13. Le système physique ϕ étant en contact avec un thermostat à la température T, le facteur de Boltzmann permet d'exprimer les probabilités p_1 et p_2, qu'ont les particules d'occuper les états d'énergie E_1 ou E_2. les expressions de p_1 et p_2 ont été établies à la question précédente : $p_1 = \frac{1}{1+e^{-\alpha}}$ et $p_2 = \frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}$ avec $\alpha = \frac{\tilde{E}}{k_B T}$.
L'énergie moyenne du système a maintenant pour expression :

$$\boxed{E_m = \sum_{i=1}^{N}(p_1 E_1 + p_2 E_2) = N(p_1 E_1 + p_2 E_2)}$$

$$E_m = N\left(E_0 - \frac{\tilde{E}}{2}\times(p_1 - p_2)\right), \text{ avec toujours } E_0 = \frac{E_1 + E_2}{2} \text{ et } \tilde{E} = E_2 - E_1.$$

L'écart quadratique en énergie ΔE de ce système est donné par :

$$(\Delta E)^2 = N\left[p_1\left(E_1 - \frac{E_m}{N}\right)^2 + p_2\left(E_2 - \frac{E_m}{N}\right)^2\right]$$

$$(\Delta E)^2 = N\left[p_1\left(E_1^2 - 2\frac{E_1 E_m}{N} + \frac{E_m^2}{N^2}\right) + p_2\left(E_2^2 - 2\frac{E_2 E_m}{N} + \frac{E_m^2}{N^2}\right)\right]$$

$$(\Delta E)^2 = N\left[p_1E_1^2 + p_2E_2^2 - 2\frac{E_m}{N}\underbrace{(p_1E_1 + p_2E_2)}_{=\frac{E_m}{N}} + \underbrace{(p_1 + p_2)}_{=1}\frac{E_m^2}{N^2}\right]$$

$$(\Delta E)^2 = N\left[p_1E_1^2 + p_2E_2^2 - \frac{E_m^2}{N^2}\right] = Np_1p_2\tilde{E}^2$$

In fine, il vient pour l'expression de l'écart quadratique moyen :

$$\boxed{\Delta E = \sqrt{N}\sqrt{p_1p_2}\,\tilde{E}}$$

Le rapport donnant les fluctuations relatives d'énergie de ce système de N particules prend la forme :

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E_m} = \frac{\sqrt{N}\sqrt{p_1p_2}\,\tilde{E}}{N\left(E_0 - \frac{\tilde{E}}{2}\times(p_1 - p_2)\right)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\times\frac{\sqrt{p_1p_2}\,\tilde{E}}{E_0 - \frac{\tilde{E}}{2}\times(p_1 - p_2)}}$$

Il est important de souligner la dépendance en $1/\sqrt{N}$ de ce rapport. Ceci permet de comprendre pourquoi les fluctuations relatives d'énergie régressent quand la taille du système augmente. Plus le nombre de particules du système est important plus il est licite de confondre l'énergie du système et son énergie moyenne. Ce type de calcul peut être mené pour d'autres variables physiques afin d'illustrer le bien-fondé de l'utilisation des grandeurs thermodynamiques pour caractériser l'état d'un système comportant un nombre important de constituants.

14. Capacité thermique d'un système à deux niveaux

a) D'après les résultats établis dans les questions **11.** et **12.**, le nombre de constituants dans les états 1 et 2 sont :

$$N_1(\varepsilon_1) = \frac{N}{1+\exp(-\theta/T)} \quad \text{et} \quad N_2(\varepsilon_2) = \frac{N\exp(-\theta/T)}{1+\exp(-\theta/T)}$$

L'expression de l'énergie interne est alors :

$$\boxed{U = N\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\exp(-\theta/T)}{1+\exp(-\theta/T)}}$$

À basse température, c'est-à-dire $T/\theta \ll 1$, il vient $U = N\varepsilon_1$. Tous les constituants se trouvent dans l'état de basse énergie.
En revanche, à haute température l'expression de l'énergie interne prend la forme $U = N\dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$, ce qui illustre que les deux niveaux deviennent équiprobables.

b) La définition $C = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_N$ permet de calculer :

$$C = N\frac{\theta}{T^2}\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\exp(-\theta/T)}{\left[1+\exp(-\theta/T)\right]^2} = N\frac{\theta}{T^2}\frac{\varepsilon\exp(-\theta/T)}{\left[1+\exp(-\theta/T)\right]^2} = Nk_B\frac{\theta^2}{T^2}\frac{\exp(-\theta/T)}{\left[1+\exp(-\theta/T)\right]^2}$$

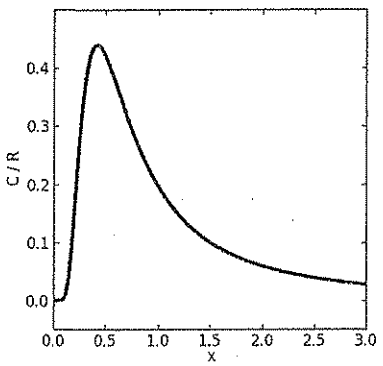
En introduisant la constante des gaz parfaits $R = N_A \times k_B$, il vient l'expression :

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{N}{N_A}\times\frac{\theta^2}{T^2}\frac{\exp(-\theta/T)}{\left[1+\exp(-\theta/T)\right]^2}}$$

Il est alors aisé de déterminer $\lim\limits_{T\to+\infty}\left(\dfrac{C}{R}\right) = 0$ et $\lim\limits_{T\to 0}\left(\dfrac{C}{R}\right) = 0$.

Il en résulte que physiquement, C/R doit passer par un maximum quant T varie.

Le tracé ci-dessous de $f(x) = \dfrac{\exp(-1/x)}{x^2\left(1+\exp(-1/x)\right)^2}$ donne l'allure des variations de C/R avec la température.



Cette courbe présente en $x_{max} = 0{,}417$ un maximum d'une valeur $f(x_{max}) = 0{,}439$. En introduisant le nombre de moles $n = \dfrac{N}{N_A}$, la capacité thermique maximale du système prend la valeur :

$$\boxed{C_{max} = 0{,}439 \times nR}$$

Ce comportement particulier du système s'appelle l'anomalie de Shottky.

c) La relation $(\Delta E)^2 = Np_1p_2\tilde{E}^2$ établie à la question **13.** s'écrit ici :

$$\boxed{(\Delta U)^2 = \frac{\exp(-\theta/T)}{\left[1+\exp(-\theta/T)\right]^2} N\varepsilon^2}$$

À partir de $C = Nk_B \frac{\theta^2}{T^2} \frac{\exp(-\theta/T)}{\left[1+\exp(-\theta/T)\right]^2}$ il vient alors, compte tenu de $\theta = \frac{\varepsilon}{k_B}$, la relation classique :

$$\boxed{(\Delta U)^2 = C \times k_B T^2}$$

d) Les systèmes à deux niveaux sont courants en physique. C'est le cas par exemple des spins 1/2 plongés dans un champ magnétique extérieur.

15. Les N particules étant indépendantes, il convient de raisonner d'abord sur l'une d'entre elles. Selon la statistique de Boltzmann, la probabilité qu'une particule soit dans un état d'énergie $\varepsilon_n = \varepsilon_0 + n\varepsilon$ est :

$$\boxed{p_n = \frac{\exp(-\varepsilon_n/k_BT)}{Z}} \quad \text{où} \quad \boxed{Z = \sum_{m=0}^{+\infty} \exp(-\varepsilon_m/k_BT)}$$

Ce dernier terme est appelé fonction de partition de la particule étudiée. La notation Z vient de l'allemand « Zustandssumme » qui signifie « somme sur tous les états ».

En posant $\beta = \frac{1}{k_BT}$, la fonction de partition s'écrit :

$Z = \sum_{m=0}^{+\infty} \exp(-\beta\varepsilon_m) = \exp(-\beta\varepsilon_0) \sum_{m=0}^{+\infty} \exp(-n\beta\varepsilon)$ soit encore :

$$\boxed{Z = \frac{\exp(-\beta\varepsilon_0)}{1-\exp(-\beta\varepsilon)}}$$

L'énergie moyenne d'une particule, $u_{moy} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \times \varepsilon_n$ s'écrit alors à l'aide de la fonction de partition $u_{moy} = \frac{1}{Z} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \exp(-\beta\varepsilon_n) = \frac{-1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$ puis

$$\boxed{u_{moy} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}}$$

Le calcul de $-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ fournit le résultat $u_{moy} = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon e^{(-\beta\varepsilon)}}{1-e^{(-\beta\varepsilon)}}$.

Les particules étant indépendantes entre elles, l'énergie interne du système est donnée par $U = N \times u_{moy} = N\varepsilon_0 + \dfrac{N\varepsilon\, e^{(-\beta\varepsilon)}}{1 - e^{(-\beta\varepsilon)}}$ soit encore :

$$\boxed{U = N\varepsilon_0 + \frac{N\varepsilon\, e^{(-\varepsilon/k_B T)}}{1 - e^{(-\varepsilon/k_B T)}}}$$

La capacité thermique du système à volume constant est :

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_N = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_N \times \frac{d\beta}{dT} \text{ soit encore } \boxed{C = -\frac{1}{k_B T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_N}$$

Après avoir calculé $\left(\dfrac{\partial U}{\partial \beta}\right)_N = \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(N\varepsilon_0 + \dfrac{N\varepsilon}{e^{(\beta\varepsilon)} - 1}\right) = -\dfrac{N\varepsilon^2 e^{(\beta\varepsilon)}}{\left(e^{(\beta\varepsilon)} - 1\right)^2}$, la capacité thermique du système s'écrit :

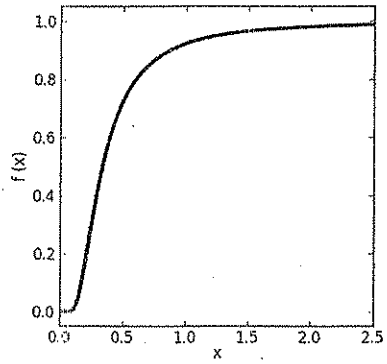
$$C = Nk_B \times \left[\frac{\varepsilon}{k_B T}\right]^2 \times \frac{e^{(\beta\varepsilon)}}{\left(e^{(\beta\varepsilon)} - 1\right)^2} = Nk_B \times \left[\frac{\varepsilon}{k_B T}\right]^2 \times \frac{e^{(\beta\varepsilon)}}{e^{(\beta\varepsilon)} \times \left(e^{\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)} - e^{\left(-\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)}\right)^2}$$

soit encore :

$$\boxed{C = Nk_B \left[\frac{\varepsilon}{2k_B T}\right]^2 \frac{1}{\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{\varepsilon}{2k_B T}\right)}}$$

En introduisant la variable adimensionnée $x = \dfrac{T}{\theta_E}$ où $k_B \theta_E = \varepsilon$, il vient $\dfrac{\varepsilon}{2k_B T} = \dfrac{1}{2x}$ et la capacité thermique s'écrit alors $C = Nk_B \dfrac{1}{4x^2 \,\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{1}{2x}\right)} = Nk_B \times f(x)$.

Le tracé de $\dfrac{C}{Nk_B} = f(x) = \dfrac{1}{4x^2 \,\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{1}{2x}\right)}$ est donné ci-dessous :



À haute température $x \gg 1$ et la capacité thermique prend la valeur $C = Nk_B$. Aux très basses températures, une fraction importante des particules reste dans l'état de plus basse énergie. Une élévation infinitésimale de température δT n'en excite qu'un petit nombre, d'où la faiblesse de la capacité thermique.

■ Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

16. Soit D le domaine de variation de la variable x qui décrit l'état du système et Z la fonction $Z = \int_D e^{-\frac{E}{k_B T}} dx$. En posant $\beta = \frac{1}{k_B T}$ il vient $Z = \int_D e^{-\beta E} dx$.

L'énergie moyenne du système s'écrit alors :

$$< E > = \frac{\int_D E e^{-\beta E} dx}{Z} = \frac{\int_D E e^{-\beta E} dx}{\int_D e^{-\beta E} dx} = \frac{-1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \text{ ou encore :}$$

$$\boxed{< E > = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}}$$

Il reste alors à évaluer l'expression de la fonction $Z = \int_{-x_0}^{x_0} \exp\left(-\beta \frac{\gamma x^2}{2}\right) dx$. Compte tenu de l'hypothèse $\frac{1}{2} \frac{\gamma x_0^2}{k_B T} >> 1$, les bornes de l'intégrale peuvent être étendues à $\pm\infty$ pour obtenir $Z = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta \gamma}}$ et écrire ainsi :

$$\boxed{\ln Z = Cte - \frac{1}{2} \ln \beta}$$

L'énergie moyenne du système est alors $< E > = \frac{1}{2\beta}$ soit encore :

$$\boxed{< E > = \frac{k_B T}{2}}$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de l'équipartition de l'énergie.
Pour un système en contact avec un thermostat à la température T, la contribution d'un terme quadratique à l'énergie moyenne est de $\frac{k_B T}{2}$.

17. Pour évaluer la capacité thermique molaire d'un gaz classique dilué monoatomique il est nécessaire de dénombrer les différents termes quadratiques qui interviennent dans l'expression de l'énergie de ses constituants.

En physique classique, pour un gaz parfait monoatomique, les atomes sont repérés par leurs coordonnées (x, y, z). Comme les interactions entre les particules sont négligées, l'énergie de chaque constituant du gaz se résume à son énergie cinétique :

$$e = e_C = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

En vertu du théorème d'équipartition de l'énergie, la valeur moyenne de l'énergie de cette particule est :

$$< e > = \frac{3}{2}k_B T$$

L'énergie interne molaire s'écrit alors $U_m = N_A \times \frac{3}{2}k_B T$, où N_A désigne la constante d'Avogadro. En introduisant la constante $R = N_A \times k_B$, il vient

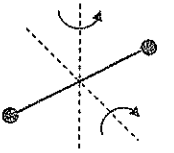
$$U_m = \frac{3}{2}RT$$

La capacité molaire à volume constant du gaz parfait monoatomique est alors :

$$C_{vm} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T}\right)_V = \frac{3R}{2} = 12{,}5\ \text{J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}$$

18. Dans le cas d'un gaz diatomique constitué de molécules rigides telles que H_2 ou O_2, l'énergie d'une molécule se résume encore à son énergie cinétique. Cependant il est nécessaire cette fois de prendre en compte deux termes quadratiques supplémentaires correspondants à la rotation de la molécule rigide autour des axes perpendiculaires à l'axe de la molécule. D'où :

$$U_m = N_A \times \frac{5}{2}k_B T \quad \text{et} \quad C_{vm} = \frac{5R}{2}$$



Si le gaz diatomique est constitué de molécules non rigides il faut ajouter à l'énergie des particules deux termes quadratiques supplémentaires dus à la vibration de la molécule. Le premier terme est l'énergie cinétique associée à ce mouvement de vibration. Le second terme est l'énergie potentielle élastique correspondant à la modélisation parabolique, au voisinage de la position d'équilibre, du potentiel d'interaction entre les deux atomes. D'où :

$$\boxed{U_m = N_A \times \frac{7}{2} k_B T \quad \text{et} \quad C_{vm} = \frac{7R}{2}}$$

19. Le mouvement de chaque atome au voisinage de sa position d'équilibre peut être décrit à l'aide d'une approximation harmonique du potentiel dans lequel il évolue. L'énergie mécanique d'un atome se met alors sous la forme :

$$\boxed{e = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2} \gamma\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

Le théorème de l'équipartition de l'énergie permet d'écrire $\boxed{< e > = 3\, k_B T}$

L'énergie inerme molaire a alors pour expression $U_m = N_A \times 3 k_B T = 3RT$.

La capacité thermique molaire à volume constant se détermine ensuite par :

$$\boxed{C_m = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T}\right) = 3R \simeq 25\ \text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}}$$

Il s'agit de loi de Dulong et Petit qui fut d'abord découverte empiriquement en 1819 et qui est assez bien vérifiée pour la plupart des éléments à la température ambiante.

Applications directes du cours

Loi du nivellement barométrique

20. En supposant l'atmosphère isotherme et en prenant l'axe Oz suivant la verticale ascendante avec l'origine $z = 0$ au niveau de la mer Méditerranée où la pression normale est $P_0 = 760$ mmHg, la loi du nivellement barométrique dans l'air $P(z) = P_0\, e^{-\frac{Mg}{RT} z}$ donne pour l'altitude de la mer Morte :

$$z = -\frac{RT}{Mg} \ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{8{,}31 \times 298}{29.10^{-3} \times 9{,}81} \ln \frac{796}{760} = -403\ \text{m}$$

Bien sûr, avec $P > P_0$, il était prévisible que $z < 0$; le niveau de la mer Morte se trouve à plus de 400 m sous le niveau moyen des mers (actuellement son niveau est de -427 m). Rappelons que jadis elle était reliée à la mer Rouge, que l'évaporation progressive de l'eau l'en a isolée en faisant énormément baisser son niveau, et corrélativement augmenter sa salinité y empêchant toute forme de vie (d'où son nom), permettant à son eau plus dense une grande flottabilité du corps humain…

21. Il s'agit rigoureusement de la même unité :

$$1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa} \implies 1\ \text{mbar} = 10^2\ \text{Pa} = 1\ \text{hPa}.$$

22. La pression décroît avec l'altitude selon la formule dite du « nivellement barométrique », avec une hauteur d'échelle h :

$$\boxed{P(z) = P_0 \, e^{-\frac{z}{h}} \quad \text{avec} \quad h = \frac{RT}{Mg} = 8{,}6 \text{ km}}$$

h représente la hauteur sur laquelle la pression diminue d'un facteur $e \approx 2{,}7$.

Au sommet du Mont-Blanc, dans le cadre du modèle isotherme, la pression atmosphérique prend la valeur approchée $P = 0{,}57\,P_0$. Ceci montre que la pression atmosphérique dépend fortement de l'altitude.

23. Estimation de la masse de l'atmosphère terrestre

La loi du nivellement barométrique, $P(z) = P_0 e^{-z/h}$, conduit pour un gaz parfait à température T uniforme, à $\rho(z) = \rho_0 e^{-z/h}$ où z est l'altitude comptée à partir de la surface terrestre.

La masse dM_a d'atmosphère contenue dans une coquille sphérique de rayon $r > R$ et d'épaisseur $dr = dz$, car $r = R + z$ est : $dM_a = \rho_0 e^{-z/h} 4\pi r^2 dz$.

Pour intégrer cette formule sur toute l'atmosphère, on procède à deux approximations :

– sachant que son épaisseur est petite devant le rayon terrestre R, on pose $4\pi r^2 \approx 4\pi R^2$.

– sachant que son épaisseur est grande devant h, on fait porter l'intégrale sur z de 0 à l'∞.

$$\text{Alors } M_a \approx \rho_0 4\pi R^2 \int_0^\infty e^{-z/h} dz \Rightarrow \boxed{M_a \approx \rho_0 4\pi R^2 h}$$

Ce résultat exprime que si la masse volumique était uniforme et égale à ρ_0, l'épaisseur de l'atmosphère serait (seulement !) de h.

AN : $\rho_0 = 1{,}3$ kg.m^{-3} (air à 0 °C sous pression normale), $R = 6\,400$ km et $h = 8{,}0$ km donnent $\underline{M_a \approx 5.10^{18} \text{ kg}}$, soit 10^{-6} masse terrestre (6.10^{24} kg).

Système à spectre en énergie discret

24. En introduisant $Z = 1 + e^{-\varepsilon/k_B T} + e^{-10\varepsilon/k_B T}$, les probabilités d'occupation des différents niveaux d'énergie sont respectivement $p_1 = \frac{1}{Z}$, $p_2 = \frac{e^{-\varepsilon/k_B T}}{Z}$ et $p_3 = \frac{e^{-10\varepsilon/k_B T}}{Z}$.

L'énergie moyenne d'une molécule s'écrit alors :

$$E_{moy} = p_1 E_1 + p_2 E_2 + p_3 E_3 \text{ puis, comme } E_1 = 0 : \boxed{E_{moy} = p_2 E_2 + p_3 E_3}$$

En introduisant $\beta = 1/k_B T$, il vient :

$$\boxed{E_{moy} = \frac{\varepsilon\left(e^{-\beta\varepsilon} + 10e^{-10\beta\varepsilon}\right)}{1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-10\beta\varepsilon}}}$$

L'énergie interne molaire s'exprime ensuite selon $U_m = N_A \times E_{moy}$.

La capacité thermique molaire à volume constant $C_m = \dfrac{\partial U_m}{\partial T}$ s'écrit alors :

$$C_m = N_A \times \frac{\partial E_{moy}}{\partial T} = N_A \times \frac{\partial E_{moy}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \beta}{\partial T}$$

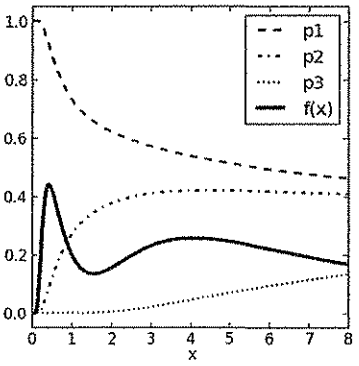
Un calcul aisé conduit à $C_m = \dfrac{N_A \varepsilon^2}{k_B T^2} \times \dfrac{e^{-\beta\varepsilon} + 100e^{-10\beta\varepsilon} + 81e^{-11\beta\varepsilon}}{\left(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-10\beta\varepsilon}\right)^2}$, expression qui se met encore sous la forme $C_m = N_A k_B (\beta\varepsilon)^2 \times \dfrac{e^{-\beta\varepsilon} + 100e^{-10\beta\varepsilon} + 81e^{-11\beta\varepsilon}}{\left(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-10\beta\varepsilon}\right)^2}$.

En posant $\beta\varepsilon = \theta_E / T = 1/x$, cette capacité thermique s'écrit $C_m = R \times f(x)$ où :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^2} \times \frac{e^{-1/x} + 100e^{-10/x} + 81e^{-11/x}}{\left(1 + e^{-1/x} + e^{-10/x}\right)^2}}$$

Le tracé ci-dessous représente en trait plein $f(x)$ et en pointillé les variations de p_1, p_2 et p_3 en fonction de $x = T/\theta_E$.

Ce tracé met en évidence l'influence sur la capacité thermique de l'état d'occupation des différents niveaux d'énergie. La température limite T_L, en dessous de laquelle les deux premiers niveaux sont les seuls occupés s'obtient en résolvant par exemple $p_3(x_L) = 10^{-3}$. La résolution numérique de cette équation donne la valeur $x_L = 1{,}54$ soit $T_L = 1{,}54 \dfrac{\varepsilon}{k_B} = 1{,}54 \times \theta_E$.



25. La statistique de Maxwell-Boltzmann permet d'exprimer le rapport des nombres de particules n_i et n_j occupant deux niveaux non dégénérés d'énergies ε_i et ε_j :

$$\boxed{\frac{n_j}{n_i} = \exp\left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{k_B T}\right)} \quad \text{d'où l'on tire} \quad \boxed{T = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{k_B} \times \frac{1}{\ln\left(n_j / n_i\right)}}$$

Le tableau proposé permet de calculer les températures suivantes, en notant T_{ij} la température obtenue à partir des états i et j : $T_{12} = 99{,}0\ \text{K}$, $T_{13} = 99{,}6\ \text{K}$, $T_{14} = 99{,}3\ \text{K}$, $T_{23} = 100{,}2\ \text{K}$, $T_{24} = 99{,}5\ \text{K}$ et $T_{34} = 98{,}9\ \text{K}$.
La valeur moyenne de ces résultats est $\underline{T = 99{,}4\ \text{K}}$.

26. La fonction de partition pour l'oscillateur harmonique quantique s'écrit :

$$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right) = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}}} = \frac{1}{2\,\text{sh}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}\right)}$$

En notant $\beta = 1/k_B T$, il vient alors :

$$\boxed{Z = \frac{1}{2\,\text{sh}(\beta\hbar\omega_0/2)}}$$

L'énergie moyenne s'exprime selon $< E >= -\dfrac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ et après calculs :

$$< E >= \frac{\hbar\omega_0}{2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right) \text{ soit encore } \boxed{< E >= \frac{\hbar\omega_0}{2}\coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}\right)}$$

Par définition, l'écart quadratique moyen est $(\Delta E)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left[E_n - < E >\right]^2$, et après développement :

$$\boxed{(\Delta E)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n E_n^2 - < E >^2}$$

Le premier terme se calcule en remarquant que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n E_n^2 = \dfrac{1}{Z}\dfrac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$.

Avec $Z = \dfrac{1}{2}\left[\text{sh}\left(\dfrac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^{-1}$, il vient $\dfrac{\partial Z}{\partial \beta} = -\dfrac{\hbar\omega_0}{4}\text{ch}\left(\dfrac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\left[\text{sh}\left(\dfrac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^{-2}$

puis $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = -\dfrac{\hbar^2\omega_0^2}{8}\left[\text{sh}\left(\dfrac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^{-1} + \dfrac{\hbar^2\omega_0^2}{4}\left[\text{ch}\left(\dfrac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^2 \times \left[\text{sh}\left(\dfrac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^{-3}$

soit encore $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \dfrac{\hbar^2\omega_0^2}{8} \times \dfrac{1 + \left[\text{ch}\left(\dfrac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^2}{\left[\text{sh}\left(\dfrac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^3}$

Le premier terme à calculer s'écrit donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n E_n^2 = \frac{\hbar^2\omega_0^2}{4} \times \frac{1+\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^2}{\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^2}$$

En utilisant alors l'expression $< E >= \frac{\hbar\omega_0}{2}\coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT}\right)$, l'écart quadratique s'écrit $(\Delta E)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n E_n^2 - < E >^2 = \frac{\hbar^2\omega_0^2}{4} \times \frac{1}{\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)\right]^2}$ et il se met sous la forme :

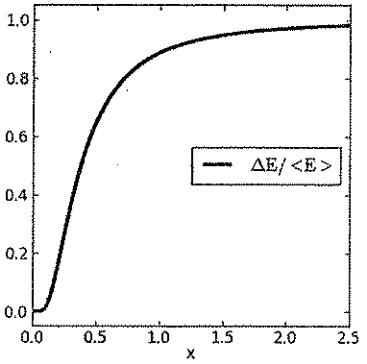
$$\Delta E = \frac{\hbar\omega_0}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)} = \frac{\hbar\omega_0}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT}\right)}$$

À basses températures $k_BT << \hbar\omega_0$: $< E > \to \frac{\hbar\omega_0}{2}$ et $\Delta E \to \hbar\omega_0\, e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT}}$

À hautes températures $k_BT >> \hbar\omega_0$: $< E > \to k_BT$ et $\Delta E \to k_BT$

En posant encore $\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT} = \frac{1}{2x}$, on peut écrire $\frac{\Delta E}{< E >} = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2x}\right)}$.

Le tracé ci-dessous met en évidence la relation entre les fluctuations d'énergie et la capacité thermique d'un système. Comparer cette courbe à celle de la question **15.**



Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

27. Lors de l'étude d'un gaz parfait diatomique il faut prendre en compte dans l'expression de l'énergie mécanique d'une molécule trois termes quadratiques associés au mouvement de translation, deux termes quadratiques pour la rotation et deux termes quadratiques supplémentaires pour la vibration de la molécule.

Le théorème d'équipartition assure que la valeur moyenne de toute contribution quadratique à l'énergie est $\frac{k_B T}{2}$. Avec $T = 4500\,\text{K}$, $\frac{k_B T}{2} = 194\,\text{meV} \approx 0{,}2\,\text{eV}$.

Il vient ainsi $\underline{<\varepsilon_{translation}> = 0{,}6\,\text{eV}}$, $\underline{<\varepsilon_{rotation}> = 0{,}4\,\text{eV}}$ et $\underline{<\varepsilon_{vibration}> = 0{,}4\,\text{eV}}$.

28. Le dioxygène est un gaz diatomique et comme il a été vu précédemment, sa capacité thermique molaire à haute température est $C_{m,O_2} = \frac{7}{2}R$. Dans l'expression de l'énergie mécanique de la molécule linéaire de CO_2, il y a deux termes quadratiques de plus provenant d'un degré de liberté de vibration supplémentaire. Le théorème d'équipartition conduit alors à $C_{m,CO_2} = \frac{9}{2}R$. La capacité thermique molaire du mélange est alors $C_m = 0{,}5 \times C_{m,O_2} + 0{,}5 \times C_{m,CO_2} = 4R$.

29. La loi de Dulong et Petit stipule que pour des températures suffisamment élevées, tous les solides ont la même capacité thermique molaire à volume constant $C_{Vm} = 3R$. La valeur numérique correspondante est $C_{Vm} = 24{,}94 \approx 25\,\text{J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}$.

Ce résultat est une conséquence directe du théorème d'équipartition. Le mouvement de chaque atome au voisinage de sa position d'équilibre peut être décrit à l'aide d'une approximation harmonique du potentiel dans lequel il évolue. L'énergie mécanique de cet atome se met alors sous la forme :

$$\boxed{e = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}\gamma\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

Le théorème d'équipartition de l'énergie permet alors d'écrire $<e> = 3\,k_B T$, puis facilement $C_{Vm} = 3R$. Le tableau fourni permet de vérifier qu'une température de $T = 298\,\text{K}$ est suffisante, dans le cas de la plupart des solides, pour que l'approximation consistant à traiter chaque atome comme un oscillateur mécanique classique donne de bons résultats.

En revanche, dans le cas du diamant, cette température $T = 298\,\text{K}$ n'est pas assez élevée et l'aspect quantique des oscillateurs ne peut pas être ignoré dans la description du système.

Soit m la masse d'un atome et γ la constante de raideur du potentiel harmonique décrivant le mouvement de l'atome au voisinage de sa position d'équilibre. La pulsation propre associée est alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$ est l'approximation classique donne de bons résultats si :

$$\boxed{k_B T \gg \hbar\omega_0}$$

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

30. Les fluctuations dans le mouvement des électrons libres (électrons de conduction) sont à l'origine des fluctuations de courant. Notons $i(t)$ l'intensité du courant électrique dans l'inductance. L'expression de l'énergie électromagnétique stockée dans celle-ci est : $W = \dfrac{Li^2}{2}$.

Le théorème d'équipartition de l'énergie permet alors d'écrire :

$$\boxed{< W >= \frac{L < i^2 >}{2} = \frac{k_B T}{2}}$$

Dans ce circuit sans générateur $< i(t) >= i_{moy} = 0$ et $< i^2 >= < \left(i - i_{moy}\right)^2 >= \left(\Delta i\right)^2$.

D'où l'expression de l'écart quadratique moyen de l'intensité dans l'inductance :

$$\boxed{\Delta i = \sqrt{\frac{k_B T}{L}}}$$

Avec $L = 100\ \text{mH}$ et $T = 300\ \text{K}$ il vient $\Delta i = 203\ \text{pA}$, ce qui est indécelable en électrocinétique.

31. La masse volumique de l'air à 20 °C est de $1,2\ \text{g/L} = 1,2\ \text{kg.m}^{-3}$:

- volume d'une salle de classe $12 \times 8 \times 4 \approx 400\ \text{m}^3$ correspondant à une masse d'air d'environ 500 kg.
- volume du plus petit parallélépipède contenant la tour Eiffel : $125 \times 125 \times 324 = 5,06.10^6\ \text{m}^3$ contenant une masse d'air d'environ 6 100 tonnes, du même ordre de grandeur que la masse de la charpente métallique de la tour !

32. À une altitude de croisière de 10 000 m, la pression extérieure est de l'ordre de 35 kPa (soit 0,35 atm) pour une température de –50°C ; pour assurer le confort des passagers, les avions sont pressurisés à une pression d'environ 80 kPa (soit 0,8 atm), pression bien supérieure à la pression extérieure mais qui n'atteint pas la valeur de la pression normale au sol…

33. Les variations de pression permettant les prévisions météorologiques sont comprises entre 0,99 bar et 1,03 bar, donc petites par rapport aux variations liées aux différences d'altitude. Il faut donc corriger la pression mesurée en un lieu de son altitude, c'est-à-dire ramener sa valeur au niveau de la mer avec la formule barométrique. Sinon les cartes d'isobares seraient tous les jours les mêmes : des cartes de lignes de niveau, représentant les reliefs géographiques.

34. Lors de l'étude de l'atmosphère isotherme, il a été établi que la concentration en molécules vérifie la loi $n(z) = n_0 \exp\left(-\dfrac{mgz}{k_k T}\right)$.

En introduisant $H = \dfrac{k_B T}{mg}$ cette relation s'écrit $n(z) = n_0 \exp(-z/H)$.

L'altitude z_G du centre de masse est donnée par l'égalité :

$$z_G = \frac{\int_{z=0}^{+\infty} z \times n_0 \, e^{-z/H} \, dz}{\int_{z=0}^{+\infty} n_0 \, e^{-z/H} \, dz}$$

Il vient ainsi $z_G = \dfrac{\left[-H(H+z) \times n_0 \, e^{-z/H}\right]_0^{+\infty}}{\left[-H \times n_0 \, e^{-z/H}\right]_0^{+\infty}} = H$.

L'altitude du centre de masse de la colonne d'air est :

$$z_G = H = \frac{k_B T}{m}$$

et varie de façon linéaire avec la température.

35. Dans le référentiel non galiléen tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz, les molécules de gaz subissent une force d'inertie d'entraînement dont l'expression est :

$$\vec{F}_{ie} = mr\omega^2 \vec{u}_r = -\overrightarrow{grad}\left(-\frac{mr^2\omega^2}{2}\right)$$

La rotation est ainsi équivalente à un champ extérieur d'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{mr^2\omega^2}{2}$$

La statistique de Boltzmann permet alors d'exprimer la concentration moléculaire $n(r) = A e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}}$. La constante A est déterminée par $N = \iiint_{Cylindre} n(r) \, d\tau$ qui est la relation de normalisation de la loi de probabilité.

Le calcul conduit à $N = 2\pi A h \int_{r=0}^{r=R} r \, e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}} \, dr = \pi A h \left[\frac{2k_B T \, e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}}}{m\omega^2}\right]_0^R$,

puis $A = \dfrac{Nm\omega^2}{2\pi h k_B T\left(e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2k_B T}} - 1\right)}$ d'où le résultat :

$$n(r)=\frac{Nm\omega^2 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2k_BT}}}{2\pi h k_B T\left(e^{-\frac{m\omega^2 R^2}{2k_BT}}-1\right)}$$

36. L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hydrogène est reliée à la température de l'atmosphère de l'étoile par la relation $<e_C>=\frac{3}{2}k_BT$. À partir de $<e_C>=1{,}1\,\text{eV}$ on calcule $T=8500\,\text{K}$.

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés selon $E_n=\frac{-13{,}6}{n^2}\,\text{eV}$.

En notant N_1, N_2 et N_3 les nombres d'atomes dans les différents états, la statistique de Boltzmann donne les rapports :

$$\frac{N_2}{N_1}=\exp\left(\frac{E_1-E_2}{k_BT}\right) \quad \text{et} \quad \frac{N_3}{N_1}=\exp\left(\frac{E_1-E_3}{k_BT}\right)$$

Avec $E_1=-13{,}6\,\text{eV}$, $E_2=\frac{-13{,}6}{4}\,\text{eV}$, $E_3=\frac{-13{,}6}{9}\,\text{eV}$ et $k_BT=\frac{2\times1{,}1}{3}\,\text{eV}$ il vient :

$$\frac{N_2}{N_1}=9{,}1\times10^{-7} \quad \text{puis} \quad \frac{N_3}{N_1}=6{,}9\times10^{-8}$$

Ces deux rapports étant très petits devant l'unité ils peuvent être identifiés aux proportions d'atomes d'hydrogène qui se trouvent dans les deux premiers états excités.

37. Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés selon $E_n=\frac{-13{,}6}{n^2}\,\text{eV}$.

Dans un domaine de température dans lequel seuls les deux premiers niveaux sont excités, l'énergie moyenne d'un atome d'hydrogène est :

$$<e>=\frac{3}{2}k_BT+p_1E_1+p_2E_2$$

Dans cette expression p_1 et p_2 désignent les probabilités d'occupation des niveaux, données par $p_1=\frac{e^{-\beta E_1}}{Z}$ et $p_2=\frac{e^{-\beta E_2}}{Z}$ avec $\beta=1/k_BT$ et $Z=e^{-\beta E_1}+e^{-\beta E_2}$.

L'énergie moyenne d'un atome s'écrit alors :

$$<e>=\frac{3}{2}k_BT-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}=\frac{3}{2}k_BT-\frac{\partial\ln(Z)}{\partial\beta}$$

La contribution d'un atome à la capacité thermique est ainsi :

$$c_V = \frac{\partial < e >}{\partial T} = \frac{3}{2}k_B - \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2} \times \frac{\partial \beta}{\partial T} = \frac{3}{2}k_B + \frac{1}{k_B T^2} \times \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2}.$$

Le calcul de la dérivée seconde conduit au résultat :

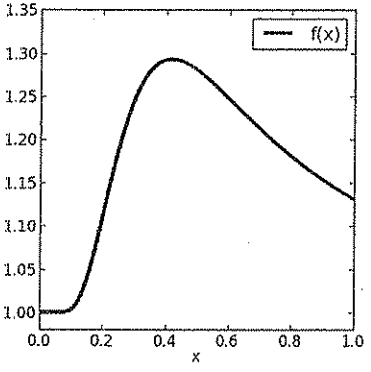
$\frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2} = \frac{(E_2 - E_1)^2 \, e^{-\beta(E_2 - E_1)}}{\left(1 + e^{-\beta(E_2 - E_1)}\right)^2}$, et en notant $\varepsilon = E_2 - E_1$, à l'expression :

$$\boxed{c_V = \frac{3}{2}k_B + \frac{1}{k_B T^2} \times \frac{\varepsilon^2 \, e^{-\beta\varepsilon}}{\left(1 + e^{-\beta\varepsilon}\right)^2}}$$

Il est normal que les niveaux d'énergie n'interviennent dans l'expression de c_V que par leur différence. La réécriture de $c_V = \frac{3}{2}k_B \times \left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{3k_B^2 T^2} \times \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{\left(1 + e^{-\beta\varepsilon}\right)^2}\right)$ et l'introduction de la variable sans dimension $x = 1/\beta\varepsilon$ permettent d'écrire :

$$\boxed{c_V = \frac{3}{2}k_B \times \left(1 + \frac{2}{3x^2} \times \frac{e^{-1/x}}{\left(1 + e^{-1/x}\right)^2}\right)}$$

Posons enfin $c_V = \frac{3}{2}k_B \times f(x)$. La courbe ci-dessous représente les variations de $f(x)$ pour $x \in [0,1]$. Dans la mesure où les deux premiers niveaux ont été les seuls pris en compte, il est nécessaire de n'utiliser que le début de cette courbe.



La résolution numérique de $f(x) = 1{,}1$ correspond à une augmentation relative de capacité thermique de 10% et fournit la valeur $x_L = 0{,}193$.

Avec $\varepsilon = E_2 - E_1 = 10{,}2\,\text{eV}$, on obtient alors $T_L \simeq 22800\,\text{K}$. L'énergie d'agitation thermique à cette température est $k_B T_L = 2{,}0\,\text{eV}$ et la différence d'énergie entre les

niveaux deux et trois est $E_3 - E_2 = 1{,}9$ eV. Ceci illustre qu'il faudrait tenir compte des autres états excités dans la détermination de T_L. Une étude plus fine prenant en compte la dégénérescence des états excités permet d'établir que pour une concentration particulaire de $n = 10^{20}$ m^{-3} et à une température de $T = 10\,000$ K le pourcentage d'atomes d'hydrogène ionisés est déjà de 50 %.

38. La loi empirique d'Arrhenius, proposée en 1889, stipule que la constante de vitesse $\tilde{k}$ d'une réaction chimique se met sous la forme :

$$\boxed{\tilde{k} = A\exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)}$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température du milieu réactionnel, A un terme phénoménologique appelé facteur de fréquence et E_a l'énergie d'activation molaire de la réaction.
En notant $R = N_A \times k_B$ et en posant $\varepsilon_a = E_a / N_A$, la relation ci-dessus s'écrit :

$$\boxed{\tilde{k} = A\exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{k_B T}\right)}$$

Selon la statistique de Boltzmann et en l'absence de dégénérescence des niveaux d'énergie, la probabilité dP qu'un système de température T se trouve dans l'état d'énergie ε à $d\varepsilon$ près est $dP = \alpha\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)d\varepsilon = P(\varepsilon)d\varepsilon$.

Si $\varepsilon \in [0, +\infty[$, la normalisation de la loi de probabilité conduit à :

$$\boxed{P(\varepsilon) = k_B T\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$$

La probabilité $\Pi(\varepsilon_a)$ que l'énergie du système soit supérieure à ε_a s'écrit :

$$\boxed{\Pi(\varepsilon_a) = \int_{\varepsilon_a}^{+\infty} P(\varepsilon)d\varepsilon = k_B T\exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{k_B T}\right)}$$

En comparant ce résultat à $\tilde{k} = A\exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{k_B T}\right)$, il apparait clairement que la vitesse d'une réaction chimique est liée à la probabilité que l'énergie des entités réactives dépasse un seuil en énergie.
C'est de là que vient le concept d'énergie d'activation $\boxed{E_a = N_A \times \varepsilon_a}$ qui, comme il est d'usage en chimie, est évaluée pour une mole de matière.

39. Suspension colloïdale et distribution de Maxwell-Boltzmann

a) En régime dilué, la suspension colloïdale au sein du fluide est assimilée à un gaz parfait de pression partielle $P_c = n k_B T$.

b) Soit μ la masse volumique de l'ensemble {fluide, colloïdes}. La masse élémentaire dm d'un volume infinitésimal δV s'exprime de deux façons :

$$dm = \mu \delta V = \underbrace{n \delta V \times v}_{\delta V_c} \times \rho_c + \underbrace{\left(\delta V - n \delta V \times v\right)}_{\delta V_f} \times \rho_f$$

où δV_c désigne le volume occupé par les colloïdes au sein de δV et δV_f le volume restant pour le fluide, avec bien sûr $\delta V = \delta V_c + \delta V_f$. Il vient alors :

$$\mu = \rho_f + nv \times \left(\rho_c - \rho_f\right) = \rho_f + nv \times \tilde{\rho}$$

Traduisons l'équilibre, à l'altitude z, d'un parallélépipède infinitésimal de hauteur dz et de base S. En projection selon Oz, la RFD s'écrit :

$$S \times \left[\left(P_f + P_c\right)_z - \left(P_f + P_c\right)_{z+dz}\right] - \underbrace{\mu S dz}_{dm} g = 0$$

soit encore :

$$\boxed{\frac{d\left(P_f + P_c\right)}{dz} + \left(\rho_f + nv \times \tilde{\rho}\right) g = 0}$$

Le système étant à une température uniforme T, on a $\frac{dP_c}{dz} = k_B T \times \frac{dn}{dz}$, puis :

$$\boxed{\frac{dP_f}{dz} + k_B T \times \frac{dn}{dz} + \rho_f g + nvg \times \tilde{\rho} = 0}$$

c) En régime dilué la présence des colloïdes est sans incidence sur les variations de la pression P_f du fluide, ce qui revient à dire que P_f est solution de l'équation précédente avec $n = 0$. Ceci se note $\frac{dP_f}{dz} + \rho_f g = 0$ et conduit à l'équation :

$$\boxed{\frac{dn}{dz} + \frac{vg\tilde{\rho}}{k_B T} \times n = 0}$$

d) En notant $\boxed{L = \frac{k_B T}{\tilde{\rho} v g}}$ la longueur caractéristique, cette équation différentielle s'intègre en $n(z) = n_0 \, e^{-z/L}$ et numériquement on obtient $L = 44{,}0\ \mu m$.

Soit $m^* = \tilde{\rho} v$ la masse effective d'un colloïde, qui prend en compte la poussée d'Archimède exercée par l'eau. L'expression précédente se met alors sous la forme classique d'une distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$\boxed{n(z) = n_0 \, e^{-m^* g z / k_B T}}$$

e) La taille critique est donnée par $L(a_c) = \dfrac{k_B T}{\tilde{\rho} v g} = a_c$, avec $v = \dfrac{4}{3}\pi a_c^3$, d'où :

$$\boxed{a_c = \left(\frac{3 k_B T}{4\pi \tilde{\rho} g}\right)^{1/4}} \quad \text{et numériquement} \quad \underline{a_c = 272 \text{ nm}}$$

L'équation $L(a_c) = \dfrac{k_B T}{\tilde{\rho} v g} = a_c$ qui définit la frontière entre les états de suspension et de sédimentation peut encore s'écrire $k_B T = m^* g \, a_c$.

Cette frontière correspond à une situation dans laquelle l'énergie d'agitation thermique $k_B T$ est égale à la variation d'énergie potentielle effective associée à une élévation de a_c du colloïde dans le champ de pesanteur.

Si $k_B T \gg m^* g \, a_c$, l'agitation thermique permet l'existence d'un état de suspension. En revanche, si $k_B T \ll m^* g \, a_c$, l'agitation thermique est insuffisante et il y a sédimentation.

Dans la situation étudiée $\underline{a = 50 \text{ nm} \leq a_c = 272 \text{ nm}}$.

Les colloïdes d'or sont en suspension dans l'eau à $T = 300$ K.

f) Le modèle du gaz parfait suppose que la taille caractéristique des particules est négligeable devant la distance qui les sépare. Le volume caractéristique dans lequel se trouve une particule est $1/n$ et la longueur correspondante est $n^{-1/3}$.

Le gaz de colloïdes peut être considéré comme un gaz parfait si : $\boxed{a \ll n^{-1/3}}$

Avec $n = 10^{18}$ m^{-3} cette condition est bien vérifiée : $\underline{a = 50 \text{ nm} \leq n^{-1/3} = 1 \, \mu\text{m}}$.

g) La hauteur infinitésimale δz doit être choisie à l'échelle mésoscopique, ce qui impose la relation d'ordre :

$$\boxed{n^{-1/3} \ll \delta z \ll L}$$

40. Capacité thermique molaire du dihydrogène (*)

a) La distance à l'équilibre r_e entre les deux atomes est donnée par $\left(\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=r_e} = 0$.

Un calcul simple donne $\boxed{r_e = r_0}$

Le développement limité de $V(r)$ au voisinage de la position d'équilibre conduit à l'approximation harmonique du potentiel d'interaction :

$$\boxed{V = V_0 \times \left[-1 + a^2 (r - r_0)^2\right]}$$

La pulsation propre des oscillations au voisinage de cette position d'équilibre s'écrit $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ où $k = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_{r=r_e}$ désigne la constante de raideur du ressort équivalent, $\mu = m_p/2$ la masse réduite et m_p la masse du proton. Il vient ainsi :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{4a^2 V_0}{m_p}}}$$

La température caractéristique T_V de l'excitation des états de vibration de la molécule de H_2 est alors donnée par la relation $k_B T_V = \hbar\omega_0$ soit encore :

$$\boxed{T_V = \frac{2a\hbar}{k_B}\sqrt{V_0/m_p}} \quad \text{et numériquement } \underline{T_V = 6270\ \text{K}}.$$

Pour un solide en rotation à la vitesse angulaire Ω autour d'un axe principal d'inertie Oz, le moment cinétique au point O s'écrit $\vec{L}_O = J\Omega\vec{u}_z = L_O\vec{u}_z$ avec J moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz.

L'expression de l'énergie cinétique est $E_C = \frac{1}{2}\vec{L}_O\vec{\Omega} = \frac{L_O^2}{2J}$. Le quantum de moment cinétique étant $\hbar$, la température T_R caractéristique de l'excitation des états de rotation de la molécule de H_2 est donnée par la relation :

$$\boxed{k_B T_R = \frac{\hbar^2}{2J}}$$

L'expression du moment d'inertie de la molécule se calcule selon $J = 2m_p \times \left(\frac{r_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_p r_0^2$. La température T_R s'écrit alors :

$$\boxed{T_R = \frac{\hbar^2}{k_B m_p r_0^2}} \quad \text{et numériquement } \underline{T_R = 75{,}3\ \text{K}}.$$

b) À une température de $T_1 = 25\ \text{K}$, les états de rotation et de vibration sont gelés. La molécule se comporte comme une particule ponctuelle et $C_{Vm} = \frac{3}{2}R$. Les deux températures suivantes $T_2 = 250\ \text{K}$ et $T_3 = 2500\ \text{K}$ sont comprises dans l'intervalle $[T_R, T_V]$ dans lequel les états de rotation sont excités et ceux de vibration ne le sont pas. Pour ces deux températures $C_{Vm} = \frac{5}{2}R$. Enfin à une température $T_4 = 10000\ \text{K}$ les états de vibration contribuent à l'énergie du système et $C_{Vm} = \frac{7}{2}R$. En résumé :

$T_1 \leq T_R = 75{,}3\ \text{K}$	$T_R \leq T_2 \leq T_3 \leq T_V$	$T_V = 6270\ \text{K} \leq T_4$
$C_{Vm} = \frac{3}{2}R$	$C_{Vm} = \frac{5}{2}R$	$C_{Vm} = \frac{7}{2}R$

41. Capacité thermique molaire de l'atmosphère isotherme

L'énergie moyenne d'une molécule au sein de l'atmosphère isotherme est donnée par $e_{moy} = \frac{5}{2}k_B T + m\,g\,\overline{z}$, où $\overline{z}$ désigne l'altitude moyenne d'une molécule qui se calcule selon $\overline{z} = \dfrac{\int_{z=0}^{+\infty} z \times n_0\, e^{-z/H}\, dz}{\int_{z=0}^{+\infty} n_0\, e^{-z/H}\, dz} = H$ avec $H = \dfrac{k_B T}{mg}$.

L'énergie moyenne d'une molécule d'air s'écrit alors $e_{moy} = \frac{5}{2}k_B T + k_B T = \frac{7}{2}k_B T$.

L'énergie interne molaire de l'atmosphère isotherme a donc pour expression :

$$\boxed{U_m = \frac{7}{2}RT}$$

et sa capacité thermique molaire :

$$\boxed{C_m = \frac{7}{2}R}$$

42. Système à trois niveaux d'énergie

Notons $Z = 1 + e^{-\varepsilon/k_B T} + e^{\varepsilon/k_B T}$. Les probabilités d'occupation des différents niveaux d'énergie notés $-,0,+$ sont respectivement $p_- = \dfrac{e^{\varepsilon/k_B T}}{Z}$, $p_0 = \dfrac{1}{Z}$ et $p_+ = \dfrac{e^{-\varepsilon/k_B T}}{Z}$.

L'énergie moyenne d'un atome s'écrit :

$$\boxed{E_{moy} = p_- E_- + p_0 E_0 + p_+ E_+ = (p_+ - p_-)\varepsilon}$$

En introduisant $\beta = 1/k_B T$, il vient $E_{moy} = \dfrac{\varepsilon\left(e^{-\beta\varepsilon} - e^{\beta\varepsilon}\right)}{1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{\beta\varepsilon}}$ puis $U_m = N_A \times E_{moy}$.

Cette expression de l'énergie interne molaire peut encore s'écrire sous la forme :

$$\boxed{U_m = -N_A\,\varepsilon\,\frac{2\,\text{sh}(\beta\varepsilon)}{1 + 2\,\text{ch}(\beta\varepsilon)}}$$

L'écart quadratique moyen en énergie pour un atome est donné par $(\Delta E)^2 = p_-\left[E_- - E_{moy}\right]^2 + p_0\left[E_0 - E_{moy}\right]^2 + p_+\left[E_+ - E_{moy}\right]^2$, puis en développant :

$$\boxed{(\Delta E)^2 = p_- E_-^2 + p_0 E_0^2 + p_+ E_+^2 - E_{moy}^2} \quad \text{puis} \quad \boxed{(\Delta E)^2 = \frac{\varepsilon^2\left(e^{-\beta\varepsilon}+e^{\beta\varepsilon}\right)}{1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{\beta\varepsilon}} - E_{moy}^2}$$

En prenant en compte l'expression de E_{moy} il vient $(\Delta E)^2 = \frac{\left(4+e^{\beta\varepsilon}+e^{-\beta\varepsilon}\right)}{\left(1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{\beta\varepsilon}\right)^2}\varepsilon^2$ puis finalement :

$$\boxed{\Delta E = \frac{\left(4+e^{\beta\varepsilon}+e^{-\beta\varepsilon}\right)^{1/2}}{\left(1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{\beta\varepsilon}\right)}\varepsilon}$$

L'écart quadratique en énergie molaire de ce système à trois niveaux est donc :

$$\boxed{\Delta U_m = N_A\,\varepsilon \times \frac{\left(4+2\,\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)^{1/2}}{\left(1+2\,\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)}}$$

La capacité thermique molaire s'écrit alors $C_m = N_A \times \frac{\partial E_{moy}}{\partial T} = N_A \times \frac{\partial E_{moy}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \beta}{\partial T}$.

Le calcul de $\frac{\partial E_{moy}}{\partial \beta}$ conduit à l'expression $C_m = \frac{2N_A\varepsilon^2}{k_B T^2} \times \frac{2+\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)}{\left(1+2\,\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)^2}$, qui s'écrit :

$$\boxed{C_m = N_A k_B (\beta\varepsilon)^2 \times \frac{2\left(2+\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)}{\left(1+2\,\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)^2}}$$

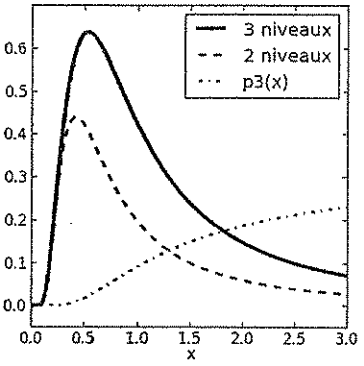
En posant $\beta\varepsilon = \frac{\theta_E}{T} = \frac{1}{x}$, cette capacité thermique s'écrit $\boxed{C_m = R \times f(x)}$ avec :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^2} \times \frac{2\left(2+\mathrm{ch}(1/x)\right)}{\left(1+2\,\mathrm{ch}(1/x)\right)^2}}$$

Le tracé ci-dessous représente en trait plein la fonction $f(x)$, en pointillé le tracé de la fonction équivalente pour un système à deux niveaux d'énergie et en traits mixtes la probabilité d'occupation du niveau d'énergie $+\varepsilon$. Ces courbes illustrent bien le fait que les comportements de ces deux systèmes sont analogues tant que le troisième niveau en énergie n'est pas peuplé.

Ce tracé met en évidence l'influence sur la capacité thermique de l'état d'occupation des différents niveaux d'énergie.

La température limite T_L, en dessous de laquelle les deux premiers niveaux sont les seuls occupés s'obtient en résolvant par exemple $p_3(x_L) = 10^{-3}$. La résolution numérique de cette équation donne la valeur $\underline{x_L = 1{,}54}$ soit $T_L = 1{,}54\frac{\varepsilon}{k_B} = 1{,}54 \times \theta_E$.



43. Fluctuations d'énergie et capacité thermique

À l'aide de $Z=\sum_{i=1}^{n} e^{-E_i/k_BT}=\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta E_i}$, la probabilité pour une particule de se trouver dans l'état d'énergie E_i est :

$$\boxed{p_i=\frac{e^{-E_i/k_BT}}{\sum_{i=1}^{n} e^{-E_i/k_BT}}=\frac{e^{-\beta E_i}}{Z}}$$

L'énergie moyenne d'une particule s'exprime alors sous la forme $<e>=\sum_{i=1}^{n} p_i E_i$.

L'écart quadratique moyen en énergie est donné par :

$$\boxed{(\Delta e)^2=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(E_i-<e>\right)^2=\sum_{i=1}^{n} p_i E_i^2-<e>^2}$$

En utilisant la fonction de partition il vient $<e>=\frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{n} E_i\, e^{-\beta E_i}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$.

En remarquant que $\sum_{i=1}^{n} p_i E_i^2=\frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{n} E_i^2\, e^{-\beta E_i}=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$, l'écart quadratique moyen en énergie s'écrit sous la forme $(\Delta e)^2=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}-\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2$, soit encore :

$$\boxed{(\Delta e)^2=\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)}$$

La contribution c_v d'une particule à la capacité thermique à volume constant du système est $c_v=\frac{\partial <e>}{\partial T}=\frac{\partial <e>}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial T}=\frac{-1}{k_BT^2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)$, soit aussi :

$$\boxed{c_V = \frac{1}{k_B T^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)}$$

Cette relation s'écrit bien sous la forme demandée : $\boxed{c_V = \frac{(\Delta e)^2}{k_B T^2}}$

En passant aux grandeurs molaires on obtient la relation reliant la capacité thermique molaire à volume constant et l'écart quadratique moyen en énergie :

$$\boxed{C_{Vm} = \frac{(\Delta U_m)^2}{k_B T^2}}$$

44. Paramagnétisme à deux états

a) Un moment magnétique $\vec{m}$ plongé dans un champ extérieur $\vec{B}_0$ possède l'énergie $E = -\vec{m}\cdot\vec{B}_0 = -m_z B_0$. L'assemblée de spins étudiée constitue un système à deux niveaux non dégénérés d'énergies :

$$\boxed{E^{\pm} = \mp\mu_B B_0}$$

En introduisant les notations $\varepsilon = \mu_B B_0$ et $\beta = 1/k_B T$, la fonction de partition s'écrit $Z = e^{-\beta\varepsilon} + e^{\beta\varepsilon}$. Le moment magnétique résultant $\vec{M}$ de cette assemblée de dipôles magnétiques prend ainsi la valeur :

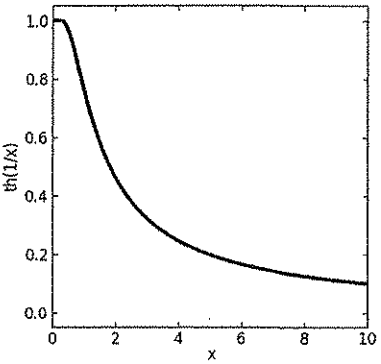
$\vec{M} = \frac{N}{Z}\left(\mu_B e^{\beta\varepsilon} - \mu_B e^{-\beta\varepsilon}\right)\vec{u}_z = N\mu_B\frac{\left(e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}\right)}{\left(e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}\right)}\vec{u}_z$, soit encore :

$$\boxed{\vec{M} = N\mu_B \,\mathrm{th}(a)\,\vec{u}_z}$$

b) En posant $\vec{M} = N\mu_B \,\mathrm{th}(a)\,\vec{u}_z = M\,\vec{u}_z$ et $a = \mu_B B_0/k_B T = 1/x$ il est aisé de représenter les variations de $\frac{M}{N\mu_B} = \mathrm{th}(1/x)$ en fonction de la variable x qui est une variable proportionnelle à T et qui représente le rapport de l'énergie d'agitation thermique $k_B T$ à l'énergie caractéristique du système $\varepsilon = \mu_B B_0$.

Le graphe ci-dessous illustre qu'à basse température ($x \ll 1$ soit $k_B T \ll \mu_B B_0$) le moment magnétique résultant de l'assemblée de spins est saturée à la valeur $M = N\mu_B$. Tous les moments magnétiques sont dans l'état parallèle de plus basse énergie.

En revanche à haute température ($x \gg 1$ soit $k_B T \gg \mu_B B_0$) les états parallèles et antiparallèles deviennent équiprobables et le moment magnétique résultant est nul.



AN : $\mu_B B_0 = 5{,}8\times10^{-5}$ eV et $k_B T = 2{,}5\times10^{-2}$ eV d'où $x = 435 \gg 1$.

La valeur de B_0 pour laquelle à $T = 293$ K on a $k_B T = \mu_B B_0$ est $B_0 = 435$ T !
La valeur de T pour laquelle à $B_0 = 1$ T on a $k_B T = \mu_B B_0$ est $T = 0{,}7$ K !

Dans les conditions choisies $x \gg 1$ et $\text{th}(1/x) \simeq \dfrac{1}{x}$ d'où $\overline{M} \simeq \dfrac{N\mu_B}{x}\vec{u}_z$ soit :

$$\boxed{\overline{M} \simeq \frac{N\mu_B^2}{k_B T}\vec{B}_0}$$

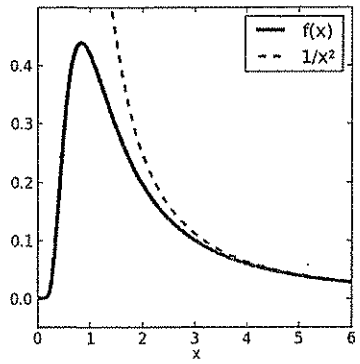
La relation entre $\overline{M}$ et $\vec{B}_0$ est linéaire.

c) Le moment magnétique $\overline{M}$ étant calculé, l'énergie interne U de ce système s'exprime alors selon $U = -\overline{M}\cdot\vec{B}_0 = -N\mu_B B_0\,\text{th}(a) = -N\varepsilon\,\text{th}(1/x)$.
Les variations de l'énergie interne avec la température sont identiques à celles du moment magnétique résultant.
À basse température ($k_B T \ll \mu_B B_0$) l'énergie interne prend approximativement la valeur $U = -N\varepsilon = -N\mu_B B_0$ et à haute température ($k_B T \gg \mu_B B_0$) il vient :

$$\boxed{U \simeq -\frac{N\varepsilon}{x} = -\frac{N\mu_B^2 B_0^2}{k_B T}}$$

Cette dernière expression correspond aux conditions expérimentales usuelles. Elle permet de déterminer l'expression de la capacité thermique $C_{B_0}(T)$ de ce système, à champ constant : $C_{B_0}(T) = \left.\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_{B_0} = \dfrac{N\mu_B^2 B_0^2}{k_B T^2}$.

Le calcul sans approximation conduit au résultat $C_{B_0}(x) = Nk_B \times \dfrac{1/x^2}{\text{ch}^2(1/x)}$ et au tracé de $\dfrac{C_{B_0}(x)}{Nk_B} = f(x)$ ci-dessous, avec en pointillé la loi approchée en $1/T^2$.



d) L'énergie du photon doit être suffisante pour « retourner » un spin de l'état parallèle d'énergie $-\varepsilon$ à un état antiparallèle d'énergie ε.
D'où la condition $h\nu \geq 2\varepsilon$ qui donne :

$$\underline{\lambda} \leq \frac{hc}{2\mu_B B_0} = \underline{3{,}2 \text{ cm}}, \text{ onde centimétrique.}$$

45. Longueur d'écrantage de Debye

a) La charge volumique au sein du fluide, à une distance r du colloïde est :

$$\boxed{\rho(r) = +e \times \left[n_+(r) - n_+(r) \right]}$$

Le système étant maintenu à la température T, la statistique de Maxwell-Boltzmann permet d'écrire :

$$n_+(r) = A \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T} \right) \text{ et } n_-(r) = B \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_B T} \right)$$

Les constantes A et B se déterminent en traduisant que loin du colloïde où le potentiel $V(r)$ tend vers zéro on a $n_+(r) = n_-(r) = n_0$. Il vient $A = B = n_0$, puis :

$$\boxed{\rho(r) = e n_0 \times \left[\exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T} \right) - \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_B T} \right) \right] = -2e n_0 \operatorname{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_B T} \right)}$$

b) L'équation de Poisson reliant le potentiel et la charge volumique $\Delta V + \rho/\varepsilon_0 = 0$ s'écrit ici :

$$\boxed{\Delta V - \frac{2e n_0}{\varepsilon_0} \operatorname{sh}\left(\frac{eV}{k_B T} \right) = 0}$$

Puis, en prenant en compte l'expression du laplacien en coordonnées sphériques à une dimension :

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)=\frac{2en_0}{\varepsilon_0}\mathrm{sh}\left(\frac{eV}{k_BT}\right)}$$

c) Le colloïde porte une charge $Ze\geq 0$. Le potentiel électrostatique est donc maximum au niveau de sa surface et décroit au sein du fluide du fait de l'écrantage. La condition d'étude $eV_0 \ll k_BT$ permet ainsi d'assurer qu'en tout point du fluide $eV \ll k_BT$ et d'écrire la forme approchée $\mathrm{sh}\left(\frac{eV}{k_BT}\right)\simeq\frac{eV}{k_BT}$.

L'équation différentielle vérifiée par le potentiel se note alors :

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)=\frac{2e^2n_0}{\varepsilon_0 k_BT}V=\frac{V}{\lambda_D^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\lambda_D=\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_BT}{2e^2n_0}}}$$

Pour résoudre cette équation différentielle posons $V(r)=\frac{X(r)}{r}$, pour la mettre sous la forme : $\boxed{\frac{d^2X}{dr^2}-\frac{X}{\lambda_D^2}=0}$

Cette équation se résout en $X(r)=X_0\,e^{-r/\lambda_D}+X_1\,e^{+r/\lambda_D}$ et conduit au potentiel $V(r)=\frac{X_0}{r}e^{-r/\lambda_D}+\frac{X_1}{r}e^{+r/\lambda_D}$.

Les constantes X_0 et X_1 se déterminent à l'aide des conditions aux limites du problème $\lim\limits_{r\to+\infty}V(r)=0$ et $\lim\limits_{r\to a}V(r)=V_0$. Il vient ainsi l'expression :

$$\boxed{V(r)=V_0\frac{a}{r}e^{-(r-a)/\lambda_D}}$$

La longueur de Debye $\lambda_D=\sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_BT}{2e^2n_0}}$ apparait comme étant la longueur caractéristique de l'écrantage de la charge portée par le colloïde ou encore la distance jusqu'à laquelle l'action du colloïde se fait sentir.

Pour éliminer V_0 il faut tout d'abord calculer l'expression du champ électrique en un point de la solution : $\vec{E}=-\frac{dV}{dr}\vec{u}_r=aV_0\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r\lambda_D}\right)e^{-(r-a)/\lambda_D}\vec{u}_r$.

L'application du théorème de Gauss à une sphère de rayon $r=a+\tilde{\varepsilon}$, en faisant tendre $\tilde{\varepsilon}$ vers zéro, fournit la relation $V_0=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 a(1+a/\lambda_D)}$ d'où le résultat :

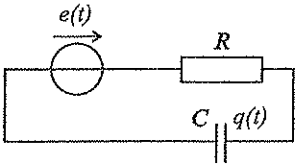
$$\boxed{V(r)=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 a(1+a/\lambda_D)}\times\frac{a}{r}e^{-(r-a)/\lambda_D}}$$

d) Avec les valeurs proposées il vient $\lambda_D = 11\,\text{nm}$ et $\lambda_D/a = 2{,}2\times10^{-2}$. L'épaisseur caractéristique de l'agglomération en surface est négligeable devant le rayon du colloïde. Ceci permet de travailler avec un modèle plus simple dans lequel la surface du colloïde est le plan infini Oxy et la répartition des ions ne dépend plus que la distance z à ce plan. Il s'agit d'une modélisation équivalente à celle effectuée lors de l'étude des variations de pression avec l'altitude pour l'atmosphère isotherme.

46. Étude du bruit Johnson (*)

a) La loi des mailles appliquée au circuit ci-dessous donne la relation :

$$R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=e(t) \text{ soit encore } \frac{1}{\omega_0}\frac{dq(t)}{dt}+q(t)=C\,e(t) \text{ avec } \boxed{\omega_0=1/RC}$$



Le passage aux notations complexes permet d'obtenir facilement la représentation complexe du régime sinusoïdal forcé :

$$\boxed{\underline{q}=\frac{C\,\underline{e}}{1+i\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

L'énergie $U(t)$ stockée dans le condensateur a pour expression $U(t)=\dfrac{1}{2C}q^2(t)$ et sa valeur moyenne est donnée par :

$$\boxed{U_f=<U(t)>=\frac{1}{4C}\underline{q}\,\underline{q}^*=\frac{C}{4}\times\frac{\underline{e}\,\underline{e}^*}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

En utilisant que $\overline{e_f^2}=<e_f^2(t)>=\dfrac{\underline{e}\,\underline{e}^*}{2}$, il vient finalement :

$$\boxed{U_f=\frac{C}{2}\times\frac{\overline{e_f^2}}{1+(2\pi RCf)^2}}$$

b) En utilisant l'hypothèse $d\overline{e^2}=u_0\,df$ et le résultat précédent, on peut écrire :

$$d\overline{U}=\frac{C}{2}\times\frac{u_0\,df}{1+4\pi^2R^2C^2f^2}\text{, puis } \overline{U}=\int d\overline{U}=\int_0^{+\infty}\frac{C}{2}\times\frac{u_0\,df}{1+4\pi^2R^2C^2f^2}$$

En effectuant le changement de variable $x = 2\pi RC f$, on arrive à :

$$\boxed{\overline{U} = \frac{u_0}{4\pi R}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{u_0}{8R}}$$

c) À partir de $U(q) = \frac{q^2}{2C}$ et de $P(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C k_B T}}\exp\left(-\frac{U(q)}{k_B T}\right)$ on calcule :

$$< U >= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q^2}{2C}P(q)\,dq = \frac{1}{\sqrt{2\pi C k_B T}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q^2}{2C}\exp\left(-\frac{q^2}{2C k_B T}\right)dq$$

puis avec le changement de variable $x = \frac{q}{\sqrt{2C k_B T}}$:

$$\boxed{< U >= \frac{k_B T}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{k_B T}{2}}$$

Le théorème d'équipartition de l'énergie donne directement ce résultat.

d) En égalant les expressions $\overline{U} = \frac{u_0}{8R}$ et $< U >= \frac{k_B T}{2}$, il vient $\boxed{u_0 = 4R k_B T}$

La relation $d\overline{e^2} = u(f)df = u_0 df$ conduit, après intégration sur l'intervalle fréquentiel $[f_1, f_2]$, à $\overline{e^2} = \int_{f_1}^{f_2} u_0 df$ puis au résultat : $\boxed{\overline{e^2} = 4R k_B T \times \Delta f}$

e) Avec $T = 100$ mK et $R = 1$ MΩ il vient $\sqrt{u_0} = 2{,}35\times10^{-9}$ V.s$^{1/2}$.

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance