Christian **GARING**
Alain **LHOPITAL**

Les Mille et Une Questions en **PRÉPA**

PHYSIQUE

1re année PCSI

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

ellipses

1re année

PCSI

Les Mille et Une questions de la physique en prépa

Nouveau programme

Christian GARING Alain LHOPITAL

Professeurs en classes préparatoires au lycée Thiers à Marseille

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

ellipses

Dans la collection

Les Mille et Une questions en prépa

dirigée par Christian Garing

1re année

Physique MPSI-PTSI, conforme au nouveau programme 2013, Christian Garing, Alain Lhopital, 624 pages, 2013.

Physique PCSI, conforme au nouveau programme 2013, Christian Garing, Alain Lhopital, 704 pages, 2013.

Chimie MPSI-PTSI, conforme au nouveau programme 2013, Lionel Uhl, 256 pages, 2013.

Chimie PCSI, conforme au nouveau programme 2013, Lionel Uhl, 416 pages, 2013.

Physique-Chimie BCPST, conforme au nouveau programme 2013, Christian Garing, Lionel Uhl, 640 pages, 2013.

2e année

Physique MP/MP-PT/PT*,* Christian Garing, Pierre-Yves Vialatte, 608 pages, 2006.

Physique PSI/PSI,* Christian Garing, Jean-Paul Bros, 528 pages, 2006.

Physique PC/PC,* Christian Garing, 560 pages, 2006.

Chimie MP/MP-PSI/PSI*-PT/PT*,* Stéphane Rédoglia, Lionel Uhl, 192 pages, 2007.

Chimie PC/PC,* Stéphane Rédoglia, Lionel Uhl, 448 pages, 2007.

Physique-Chimie BCPST, Christian Garing, Stéphane Rédoglia, Lionel Uhl, 608 pages, 2007.

Chez le même éditeur

Magnétisme - Statique, Induction et milieux, Christian Garing, 416 pages, 1999.

Ondes mécaniques et diffusion - Ondes 1 nouvelle édition, 45 exercices et problèmes corrigés et commentés, Christian Garing, 416 pages, 1999.

Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques - Ondes 3, 44 exercices et problèmes corrigés et commentés, Christian Garing, 240 pages, 1998.

Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs - Ondes 2 nouvelle édition, 52 exercices et problèmes corrigés et commentés, Christian Garing, 288 pages, 1998.

Électromagnétisme dans la matière - Milieux magnétiques, 46 exercices et problèmes corrigés et commentés, Christian Garing, 208 pages, 1995.

Électromagnétisme dans la matière - Milieux diélectriques, 52 exercices et problèmes corrigés et commentés, Christian Garing, 256 pages, 1995.

ISBN 978-2-7298-8185-6
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2013
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce livre conforme aux nouveaux programmes de 2013 reprend une conception originale imaginée dans l'unique but d'être utile aux élèves. Sous forme d'une batterie de questions courtes, de conseils et d'exercices, il embrasse la totalité du programme de physique de PCSI.

Il doit permettre de préparer efficacement une colle, de faire le point sur ses connaissances avant un devoir surveillé, et d'entamer sereinement les révisions de fin d'année, qu'il s'agisse du passage de 1ère en 2ème année ou de la préparation à l'écrit et à l'oral des concours. Mais pour éviter de travailler par à-coups, il vaut mieux en faire un « compagnon de route », utile de façon régulière pour un travail de fond tout au long de l'année.

Il regroupe tout ce qui est indispensable pour réussir à l'écrit et à l'oral et sera donc utile à tous ceux qui ont à cœur de travailler la physique dans l'objectif des concours et de leur formation personnelle.

La présentation sous cette forme est inédite ; l'ouvrage de première année PCSI comporte 13 chapitres, chacun regroupant de 60 à 80 questions réparties en rubriques :

- Les ordres de grandeur utiles
- Le cours d'abord
- Conseils à suivre ; erreurs à éviter
- Applications directes du cours
- Questions de réflexion ; physique
- Exercices
- Travaux pratiques (selon les cas)

Bien sûr chaque chapitre « questions » est suivi de son chapitre « réponses » **entièrement rédigé** et reconnaissable à sa marge grisée sur le côté droit.

L'esprit de ces rubriques est détaillé ci-après :

Les ordres de grandeur utiles

Cette rubrique donne des valeurs utiles :

- des constantes fondamentales : à l'oral, par exemple, il est bon de connaître la masse et la charge de l'électron, la constante de gravitation, la constante des gaz parfaits,...
- mais aussi des grandeurs courantes (et que l'on ne peut pas ignorer) : la pression atmosphérique en millimètres de mercure, l'indice de réfraction du verre, la masse molaire de l'air,...
- et enfin, une foule de données dont il est bon d'avoir une idée numérique : la vitesse du son dans l'eau, la masse de la Terre, la densité particulaire de l'air,...

Toutes ces grandeurs ont une unité à respecter (oui, une force électromotrice s'exprime en volts !) et, le cas échéant, à convertir en unité du système international avant de passer à une application numérique (non, une masse volumique ne s'utilise pas en $g.cm^{-3}$).

Il est conseillé de (re)lire les tableaux au début de chaque chapitre afin de se faire aux ordres de grandeur, dont la mémorisation vient automatiquement avec la pratique et la réflexion.

Le cours d'abord

La physique n'étant pas une « science contemplative », il est illusoire de croire qu'il suffit de lire le cours pour savoir faire ! L'apprentissage du cours suppose au contraire une implication active, stylo à la main et cahier fermé pour refaire les calculs, les schémas, les démonstrations des théorèmes,...

Une réflexion sur les modèles et les hypothèses s'impose : la signification et la vraisemblance des résultats doivent primer.

Sans ce travail approfondi, pas de miracle : la résolution des exercices et problèmes est vite compromise.

Les questions de cours proposées dans ce livre se posent fréquemment telles quelles aux écrits des concours. Elles n'ont pas vocation à se substituer au cours du professeur, mais elles permettent de « Faire le Point » par l'auto-évaluation des connaissances utiles pour réussir.

Elles sont courtes, précises et sans difficultés et sont regroupées par paragraphes d'intérêt. Il ne s'agit pas d'y répondre par une « formule », mais, comme à l'oral, de conduire un raisonnement à l'aide de phrases étayées par des démonstrations reproduisant une partie du cours. Les résultats essentiels doivent être obligatoirement mémorisés : ils apparaissent encadrés dans la partie « réponses ».

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

Il faut apprendre à être réceptif aux conseils, et non essayer de « réinventer les méthodes ». Car hélas, la 3e loi de Kepler n'est nullement appropriée dans le cas d'une force centrale quelconque, et l'omission du passage en notation complexe pour l'étude d'un système dissipatif en régime forcé tourne vite au cauchemar trigonométrique…

Alors dissipons d'entrée tout malentendu à propos de cette rubrique : les « conseils à suivre » sont prodigués pour aider sincèrement, pas pour contraindre inutilement ; les « erreurs à éviter » sont signalées afin de pas être commises et non pour induire en erreur.

La connaissance du cours n'est rien si elle n'est pas renforcée par des conseils d'application. Cette rubrique est donc à lire plutôt dix fois qu'une, et surtout à faire sienne, sans hésitation ni état d'âme…

Applications directes du cours

Tout exercice sur une partie du programme récemment abordée présente une difficulté par sa nouveauté, tant que les bons réflexes ne sont pas installés, alors qu'il paraîtra élémentaire quelque temps après : c'est cette phase d'apprentissage qu'il faut surmonter sans se décourager.

Cette rubrique regroupe de petits exercices au contenu plus modeste et dont la résolution suppose simplement l'application directe d'un résultat de cours ou d'une technique immédiate de calcul, ce qui n'exclut pas la réflexion. En cas de difficulté, ne pas se précipiter sur la solution, mais revoir la partie correspondante du cours.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

Cette rubrique est faite pour les curieux, ceux qui aiment comprendre le monde qui les entoure. Elle plaira à ceux qui aiment réinvestir leurs connaissances fondamentales dans la résolution de problèmes concrets.

Les questions inciteront le jeune scientifique à penser comme un futur ingénieur : quelles applications imaginer pour un résultat ? et quelle notion scientifique mobiliser pour comprendre un phénomène ?

Les calculs y sont limités, et il faut faire preuve de bon sens ; seules certaines questions sont un peu plus difficiles.

Exercices

Aucune intention d'être exhaustif ici. Chaque chapitre propose néanmoins une liste d'une dizaine d'exercices variés, souvent posés à l'oral des concours ou issus de problèmes d'écrit récents, avec pour intention de faire découvrir la diversité du sujet traité dans le chapitre. Certains énoncés sont « classiques », de difficulté moyenne, présentant un intérêt explicité dans le titre ; d'autres, marqués d'un astérisque (*), soit sont plus originaux, soit nécessitent un peu plus de réflexion...

Le but n'est pas de les apprendre en espérant « tomber dessus » le jour de l'écrit ou de l'oral, mais d'acquérir sur ces exercices les réflexes sains permettant d'en aborder d'autres dans de bonnes conditions.

Il faut, à l'écrit comme à l'oral, être très attentif aux applications numériques qui sont le débouché naturel d'un grand nombre d'exercices ou de problèmes de physique. Pour cela il est très important d'apporter systématiquement, pour chaque application numérique, un commentaire physique sur la valeur que l'on vient de calculer : ordre de grandeur, pertinence, intérêt pour l'étude, vérification d'une hypothèse, compréhension concrète du phénomène étudié, comparaison avec d'autres grandeurs, faisabilité d'une mesure expérimentale...

Un exercice ou une question de problème ne doivent en aucun cas finir sur une valeur numérique non commentée, la seule justification d'une application numérique est ce que l'on peut en dire.

Travaux pratiques

L'ambition de cette partie reste modeste. Elle conclut un bon nombre de chapitres, ceux qui se prêtent particulièrement aux travaux pratiques, et son but n'est pas de proposer des séances de TP toutes faites. En revanche elle regroupe une série de questions simples sur les dispositifs, les montages, les conditions expérimentales, les fonctionnements d'appareils, le pourquoi de telle observation, les ordres de grandeur classiques...

Ce sont de bons exemples de questions pouvant être abordées à la partie orale de TP des concours, celle-ci jouant un rôle important pour départager les candidats.

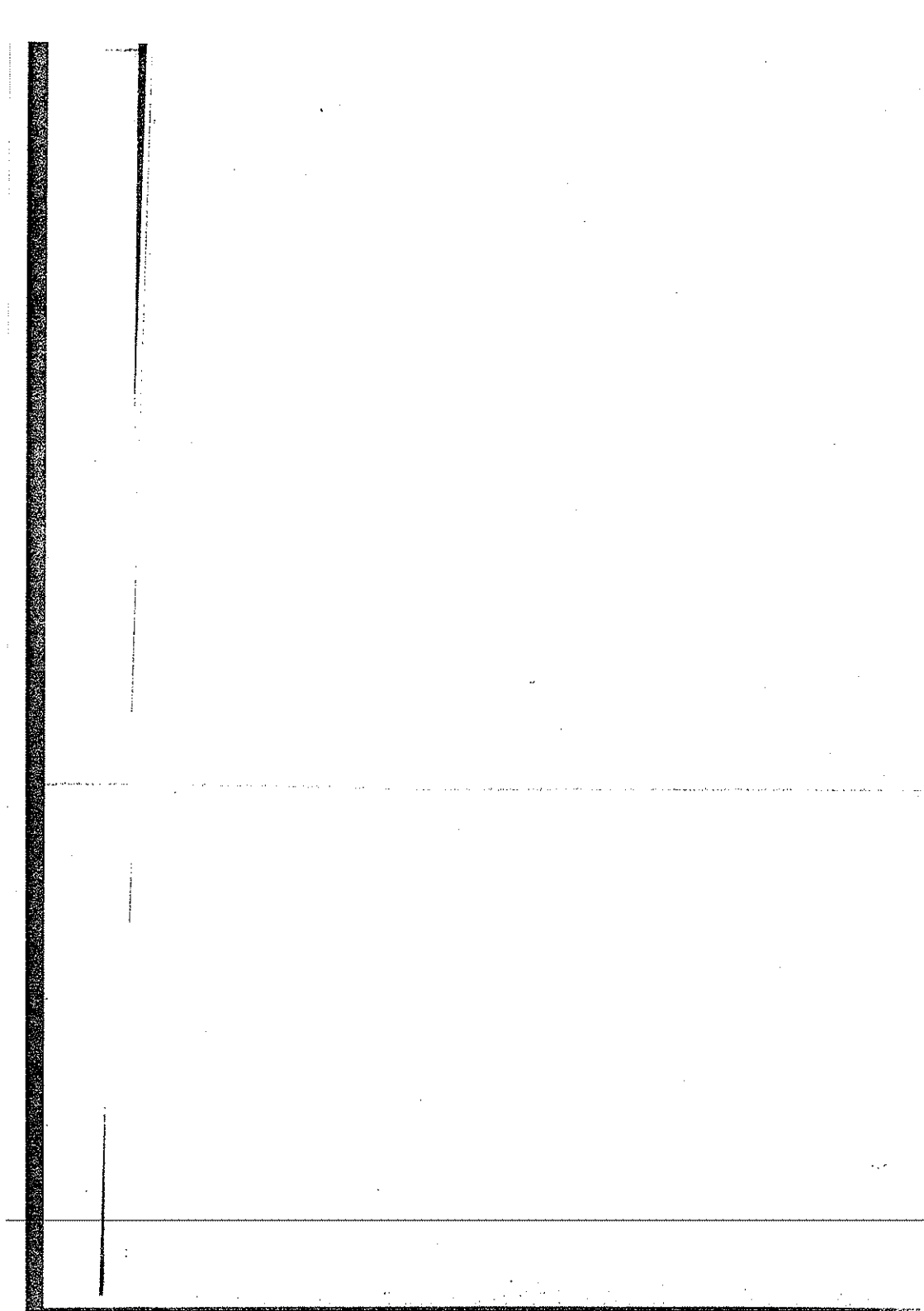
Cette partie est particulièrement orientée, dans l'esprit des nouveaux programmes, vers la mesure et l'exploitation des séries de mesures qui, avec les incertitudes, sont au cœur de la démarche scientifique.

Pour conclure nous exprimons le vœu que ce livre soit utile au plus grand nombre, à ceux qui simplement ont à cœur de travailler la physique parce qu'elle donne lieu à des épreuves de concours et à ceux, heureusement nombreux, qui par curiosité et goût, ont toujours plaisir à étudier cette discipline.

Les auteurs

Sommaire

Chapitres	Questions	Réponses
1 : Signaux harmoniques et propagation	39	55
2 : Optique géométrique	83	103
3 : Approche quantique	137	147
4 : Régimes continu et transitoire	163	181
5 : Régime sinusoïdal forcé et filtrage	219	239
6 : Dynamique du point matériel	271	297
7 : Solide en rotation autour d'un axe fixe	345	361
8 : Oscillateurs et forces centrales	387	403
9 : Statique des fluides	433	447
10 : Propriétés des systèmes thermodynamiques	471	493
11 : Évolution d'un système thermodynamique	541	559
12 : Champ magnétique et force de Laplace	603	617
13 : Induction électromagnétique	641	659



Chapitre 0
■ Compléments mathématiques ■

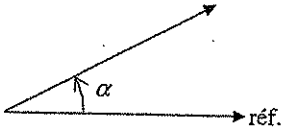
Équation du second degré	10
Angles orientés et trigonométrie	10
Produit scalaire et produit vectoriel	11
Différentielle	12
Calcul de petites variations et somme d'infiniment petits	13
Surfaces et volumes	14
Autres applications du calcul différentiel	15
Une grandeur petite ne doit être prise nulle	15
Les courbes paramétrées et les déphasages	15
Les nombres complexes	16
Dérivation d'un vecteur par rapport à un angle	18
Caractéristiques simples d'une ellipse	18
Centre de masse	18
Équations différentielles en physique	19
Systèmes de coordonnées et vecteur gradient	26
Expression d'une valeur numérique en physique	27
Série de mesures et loi normale	27
Mesurage et incertitudes	31
Vérification d'une loi physique et modèle linéaire	35

Équation du second degré

Avant de chercher les solutions d'une équation $ax^2+bx+c=0$, il est impératif d'obtenir des renseignements sur le signe des racines (ou de leur partie réelle) ; pour cela il suffit de voir le signe de leur somme $S=-b/a$ et de leur produit $P=c/a$. En effet si x_1 et x_2 sont les racines de l'équation, on peut l'écrire $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

Angles orientés

La définition de l'angle formé par une direction quelconque (éventuellement variable) par rapport à une direction de référence (fixe) est indiquée par une flèche allant de la référence vers la direction à définir.
Par exemple en optique géométrique, la référence est la normale au dioptre.



Un choix d'orientation dans le plan contenant l'angle, permet ensuite d'obtenir un angle α algébrique. Sur la **figure a** l'angle α est positif, et sur la **figure b** l'angle α est négatif (sa définition n'a pas changé).

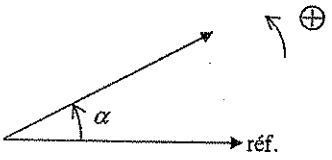


Figure a

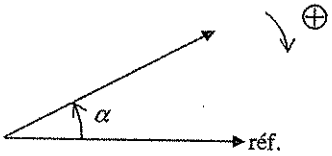
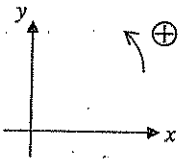
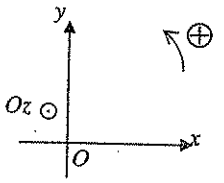


Figure b

Il y a donc deux possibilités d'orientation des angles dans un plan. Pour le choix d'orientation ci-contre, on parle de sens trigonométrique :



En fait cela signifie que la direction de Oz a été choisie dirigée vers l'avant de la figure (choix d'orientation de l'espace, cf. notion de base directe) : on peut dire que l'axe Oz oriente les angles dans le plan auquel il est perpendiculaire.



Trigonométrie

$$\sin\alpha=\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}=\frac{AB}{OB},\quad \cos\alpha=\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}=\frac{OA}{OB}$$

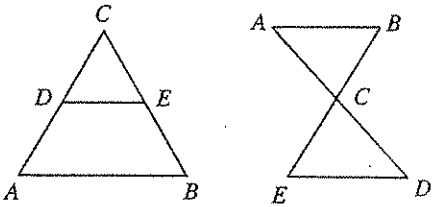
$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{OA}$$

Ici l'angle α n'est pas orienté, sa mesure est prise positive.

Il faut connaître les formules de trigonométrie, en particulier : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \; ; \; \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \; ; \; \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Relation de Thalès : elle concerne deux triangles ayant leurs angles égaux deux à deux ou des côtés parallèles deux à deux (on parle alors de triangles de même "forme", c'est le cas des triangles homothétiques et des triangles semblables), exemples ci-contre.



On a la relation : $\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$

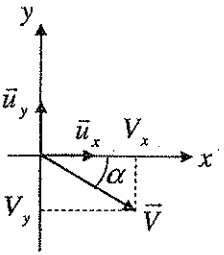
Produit scalaire

$$\boxed{\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y \text{ avec } V_x = \vec{V}\cdot\vec{u}_x \text{ et } V_y = \vec{V}\cdot\vec{u}_y}$$

Théorème de Pythagore : $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ car $V^2 = \vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$

Par définition $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \left\|\vec{V}_1\right\| \left\|\vec{V}_2\right\| \cos(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2})$

Par exemple sur la figure ci-contre, avec l'angle α non orienté (pris positif),



$$V_x = \vec{V}\cdot\vec{u}_x = V\cos\alpha > 0 \text{ et}$$

$$V_y = \vec{V}\cdot\vec{u}_y = V\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -V\sin\alpha < 0 .$$

Rq : Une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs (non nuls) soient orthogonaux est que leur produit scalaire soit nul.

Produit vectoriel

Le produit vectoriel de $\vec{v}_1$ par $\vec{v}_2$ est le vecteur $\vec{w}$, noté $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ et ayant pour composantes, dans une base orthonormée directe :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{v}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Propriétés : $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$

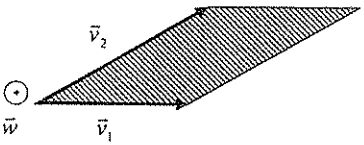
$$\lambda\,(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = (\lambda\,\vec{v}_1) \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \wedge (\lambda\,\vec{v}_2)$$
$$\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$$

Il est possible d'obtenir $\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ sans projeter les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$:

- direction de $\vec{w}$: orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$, donc au plan formé par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (attention $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas *a priori* orthogonaux).
- sens de $\vec{w}$: tel que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w})$ soit direct. Moyens mnémotechniques : tire-bouchon de Maxwell, on tourne le tire-bouchon de $\vec{v}_1$ vers $\vec{v}_2$, il se translate suivant $\vec{w}$. Ou bien la règle des trois doigts de la main droite : pouce suivant $\vec{v}_1$, index suivant $\vec{v}_2$, le majeur indique le sens de $\vec{w}$.
- norme de $\vec{w}$:

$$\left\|\vec{w}\right\| = \left\|\vec{v}_1\right\| \left\|\vec{v}_2\right\| \left|\sin(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})\right|$$

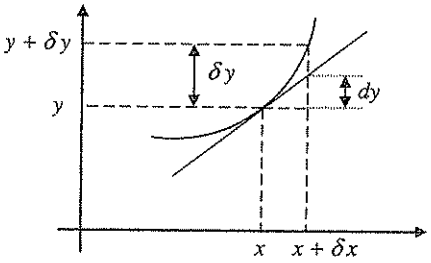
La norme de $\vec{w}$ représente l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.



Rq : Une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs (non nuls) soient colinéaires est que leur produit vectoriel soit nul.

Différentielle

Soit f une fonction réelle, n fois dérivable, d'une variable réelle x. Si x varie de δx, $y = f(x)$ varie de δy. La différence importante entre la variation δy et la différentielle du premier ordre dy de y est indiquée sur le graphe ci-contre.



Si la variation δx de la variable est assez petite, alors δy tend vers la différentielle dy.

Ce résultat est cohérent avec le développement de Taylor de $y = f(x)$:

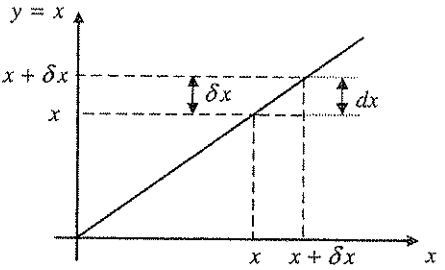
$$f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\,\delta x + \frac{(\delta x)^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{(\delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(\delta x)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

avec $c \in]x, x + \delta x[$; les termes en $\dfrac{(\delta x)^i}{i!}$ étant négligeables devant le terme du 1er ordre $f'(x)\,\delta x$.

Pour cette raison la variation de la fonction $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$ est souvent (abusivement) notée en physique dy. Il faut donc, en fonction du contexte, repérer s'il s'agit d'une petite variation de fonction ou de sa différentielle qui en constitue une valeur approchée au 1er ordre.

De plus il faut se garder de noter tout infiniment petit comme la différentielle d'une fonction, car il existe des quantités infiniment petites qui ne sont pas des différentielles, la notation δ s'impose alors. Exemples : travail élémentaire δW, transfert thermique élémentaire δQ, et *a priori* une "forme différentielle" (bien mal nommée !) $A\,du + B\,dv$.

Traitons le cas de la fonction identité $f(x) = x$:



Si x est la variable alors $\delta x = dx$ (voir ci-dessus) et on peut écrire dans le cas où y fonction quelconque de x :

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

Ce qui fournit une écriture intéressante pour la dérivée : $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

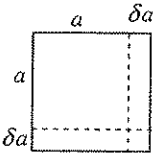
Dans cette relation y et x sont sur le même plan, la distinction fonction et variable s'est estompée, y et x sont des grandeurs variables, au sens physique, dont les différentielles (et donc les petites variations) sont liées par la relation précédente. Dans cette relation dx ou dy peuvent être remplacées par leur expression en fonction d'autres grandeurs dont elles dépendent.

Exemple : $y = k\,x^2$ et $x = \sin(\omega t)$, k et ω sont des constantes
$dy = 2\,k\,x\,dx$ et $dx = \omega \cos(\omega t)\,dt$
on en déduit $dy = 2\,k\,\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t)\,dt$

Calcul de petites variations et somme d'infiniment petits

a) La différentielle est une valeur approchée au 1er ordre de la variation

Prenons l'exemple d'une plaque carrée de côté a, l'aire de sa surface est $S = a^2$. Si on augmente la longueur du côté de δa, la



nouvelle aire est $(a+\delta a)^2 = a^2 + 2a\,\delta a + (\delta a)^2$ où chaque terme s'interprète aisément sur la figure ci-contre.

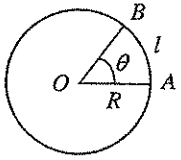
La variation de S est $\delta S = 2a\,\delta a + (\delta a)^2 \approx 2a\,\delta a$.

Or $dS = d(a^2) = 2a\,da$, si δa est infiniment petit il vient $\delta S \approx dS$ au 1er ordre.

b) Si une valeur infiniment petite d'une grandeur peut s'écrire comme une différentielle, alors une somme des infiniment petits correspondants peut être calculée avec une intégrale (voir exemple dans **Surfaces et volumes**).

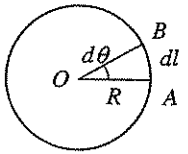
Surfaces et volumes

Triangle : surface $S = \frac{1}{2} B\,h$



Cercle : si R est le rayon, la circonférence est $L = 2\pi R$; plus généralement, la longueur d'un arc intercepté par l'angle au centre θ est $l = \widehat{AB} = R\,\theta$.

Disque : si R est le rayon, la surface est $S = \pi R^2$.



En effet l'aire du secteur limité par l'angle $d\theta$ est au 1er ordre en considérant l'aire du triangle OAB avec $AB \approx \widehat{AB} = R\,d\theta$, soit $\delta S \approx \frac{1}{2} R\,R d\theta$. Or pour $d\theta \to 0$, $\delta S \to dS$ et donc

$dS = \frac{1}{2} R^2\,d\theta$ et

$$S = \int_0^S dS = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta = \frac{1}{2} R^2 \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \pi R^2$$

Cylindre droit : si R est le rayon et h la hauteur, la surface latérale est $S = 2\pi Rh$ et le volume $V = \pi R^2 h$.

Sphère : si R est le rayon, la surface de la sphère est $S = 4\pi R^2$; son volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Quelques éléments de surface et volume :

* élément de surface pour une couronne circulaire entre r et $r+dr$: $2\pi r dr$.
* élément de volume pour une couche cylindrique entre r et $r+dr$: $2\pi r dr h$.
* élément de volume pour une coquille sphérique entre r et $r+dr$: $4\pi r^2 dr$.

Autres applications du calcul différentiel

a) Pour x tel que $|x| \ll 1$, on a $\sin x \approx x$; $\cos x \approx 1 - x^2/2$; $\tan x \approx x$; $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$; $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$; $(1 \pm x)^{\alpha} \approx 1 \pm \alpha x$; $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$; $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$; $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$,...

b) La dérivée d'ordre deux de f s'écrit : $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$; attention numérateur et dénominateur ne peuvent pas ici être séparés, il s'agit d'une écriture symbolique pour $\frac{d(dy\,/\,dx)}{dx}$.

c) Dérivée de fonctions, d'une variable, composées : la grandeur y dépend de x qui dépend de t alors $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$. Comme souvent en physique, la notation y représente ici une grandeur, *a priori* variable, sa notation est inchangée qu'on la considère fonction de x ou de t.

Généralisation : si $u(x,y)$ est une fonction de deux variables, sa différentielle s'exprime en fonction des différentielles de x et y par : $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

Exemples :

1) $u = xy$ donne $du = xdy + ydx$

2) $u = k\,x^{\alpha}\,y^{\beta}$ ..il est alors préférable de différentier :

$\ln(u) = \ln(k) + \alpha \ln(x) + \beta \ln(y)$, ce qui donne $\frac{du}{u} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y}$

3) $PV = nRT$ avec P, V et T variables *a priori*, les différentielles qui sont des valeurs approchées des petites variations, sont liées par $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$

Une grandeur petite ne doit être prise nulle

De la même manière qu'en mathématique une fonction n'est pas « équivalente à zéro », en physique non plus une grandeur petite ne doit être prise nulle ; si elle intervient dans une fonction, il suffit (en général) de prendre le premier terme non nul du développement limité de cette fonction.

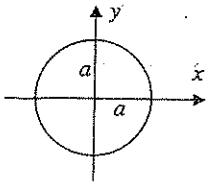
En revanche, à l'ordre 1 en ε, on a simplement

$$\varepsilon.f(\varepsilon) = \varepsilon\left[f(0) + f'(0)\varepsilon + ...\right] \approx \varepsilon.f(0)\,.$$

Les courbes paramétrées et les déphasages

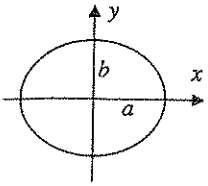
a) Lorsque les coordonnées d'espace x et y dépendent du temps, les deux équations horaires définissent un système paramétré (le paramètre est t) :

$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t) \\ y(t) = a\sin(\omega t) \end{cases}$ soit les équations paramétriques d'un cercle : $x^2 + y^2 = a^2$, de rayon a.



Si les deux amplitudes sont différentes,

$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t) \\ y(t) = b\sin(\omega t) \end{cases}$ la courbe $y(x)$ au lieu d'être inscrite dans un carré de coté $2a$, est inscrite dans un rectangle $(2a, 2b)$, c'est une ellipse.



b) Soient deux grandeurs sinusoïdales synchrones (de même pulsation) :

$\begin{cases} u_1(t) = U_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1) \\ u_2(t) = U_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$ en changeant l'origine des dates avec $\omega t' = \omega t + \varphi_1$

$\begin{cases} u_1(t') = U_1\sqrt{2}\cos(\omega t') \\ u_2(t') = U_2\sqrt{2}\cos(\omega t' + \varphi_2 - \varphi_1) \end{cases}$ que l'on écrit : $\begin{cases} u_1(t) = U_1\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ u_2(t) = U_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

φ est l'avance de phase de u_2 sur u_1 :

si $\varphi > 0$ $u_2(t)$ est en avance sur $u_1(t)$

si $\varphi < 0$ $u_2(t)$ est en retard sur $u_1(t)$

$\varphi = 0 \Rightarrow u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont en phase

$\varphi = \pi \Rightarrow u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont en opposition de phase

Voir les autres cas dans la question **12.** du chapitre **1**.

■ Les nombres complexes

Dans l'écriture $\underline{u} = a + \mathrm{i}\,b$, avec $\mathrm{i}^2 = -1$, a est la partie réelle et b la partie imaginaire.

On définit le module $|\underline{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\underline{u} = |\underline{u}|\left(\frac{a}{|\underline{u}|} + \mathrm{i}\,\frac{b}{|\underline{u}|}\right) \text{ avec } -1 \le \frac{a}{|\underline{u}|} \le 1 \text{ et } -1 \le \frac{b}{|\underline{u}|} \le 1$$

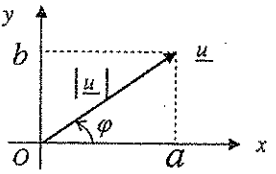
Il existe donc φ tel que $\dfrac{a}{|\underline{u}|} = \cos\varphi$ et $\dfrac{b}{|\underline{u}|} = \sin\varphi$

$\underline{u} = |\underline{u}|(\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi) = |\underline{u}|\,e^{i\varphi}$, φ est l'argument de $\underline{u}$, $\varphi = \arg\underline{u}$ et $\varphi \in]-\pi, +\pi]$

L'argument d'un réel positif est égal à 0, celui d'un réel négatif est égal à π.

On a donc : $\cos\varphi = \dfrac{a}{|\underline{u}|}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{|\underline{u}|}$ et $\boxed{\tan\varphi = \dfrac{b}{a}}$

Interprétation graphique :



Propriétés :

Soit $\underline{u} = \underline{u}_1\,\underline{u}_2 = |\underline{u}_1|\,e^{i\varphi_1}\,|\underline{u}_2|\,e^{i\varphi_2} = |\underline{u}_1|\,|\underline{u}_2|\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$$\boxed{|\underline{u}_1\,\underline{u}_2| = |\underline{u}_1|\,|\underline{u}_2|} \qquad \boxed{\arg(\underline{u}_1\,\underline{u}_2) = \arg(\underline{u}_1) + \arg(\underline{u}_2)}$$

Soit $\underline{u} = \dfrac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \dfrac{|\underline{u}_1|}{|\underline{u}_2|}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

$$\boxed{\left|\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2}\right| = \frac{|\underline{u}_1|}{|\underline{u}_2|}} \qquad \boxed{\arg\left(\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2}\right) = \arg(\underline{u}_1) - \arg(\underline{u}_2)}$$

Ces propriétés montrent l'inutilité de faire apparaître les parties réelle et imaginaire pour un produit ou un rapport de complexes. Le développement d'un produit de complexes ou la multiplication par l'expression conjuguée du dénominateur est, en général, une maladresse compliquant inutilement le calcul.
En physique l'écriture d'un rapport avec dénominateur complexe est autorisée et même recommandée ! Les calculs utilisant les nombres complexes doivent être conduits en gardant soigneusement les factorisations.
Pour chaque facteur complexe, il faut donc être capable de calculer module et argument.

Calcul de l'argument à partir des parties réelle et imaginaire

$$\underline{u} = a + \mathrm{i}\,b \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Attention : $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors que $\varphi \in \left]-\pi, +\pi\right]$, la fonction " $\tan^{-1}$ " des calculatrices donne arctan et pas φ, il faut donc tenir compte des signes de a et de b pour trouver φ.

Si $a > 0$ soit $\cos\varphi > 0$, alors $\varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$

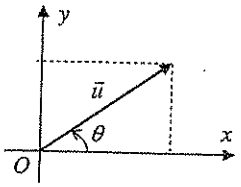
Si $a < 0$ soit $\cos\varphi < 0$, alors : • si $b > 0 \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi$

• si $b < 0 \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi$

Noter le moyen mnémotechnique : $\sin\varphi > 0$ on ajoute π
$\sin\varphi < 0$ on retranche π

Dérivation d'un vecteur par rapport à un angle

Soit $\vec{u}$, unitaire, dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et entièrement défini par l'angle θ qu'il forme avec l'axe polaire Ox. Le vecteur $\vec{u}$ ne dépend que de θ. Sa dérivée par rapport à θ est :



$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \lim_{\delta\theta\to 0}\left(\frac{\vec{u}(\theta+\delta\theta)-\vec{u}(\theta)}{\delta\theta}\right)$ avec

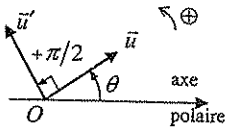
$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y$, soit

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \lim_{\delta\theta\to 0}\left(\frac{\cos(\theta+\delta\theta)-\cos(\theta)}{\delta\theta}\vec{u}_x + \frac{\sin(\theta+\delta\theta)-\sin(\theta)}{\delta\theta}\vec{u}_y\right)$$

et comme $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ ne dépendent pas de θ :

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\vec{u}_x + \frac{d\sin(\theta)}{d\theta}\vec{u}_y = \cos(\theta+\frac{\pi}{2})\,\vec{u}_x + \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\,\vec{u}_y$$, c'est-à-dire un vecteur unitaire qui forme l'angle $\theta+\frac{\pi}{2}$ avec l'axe polaire.

Le vecteur dérivée $\vec{u}'$ de $\vec{u}$ est le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}$.



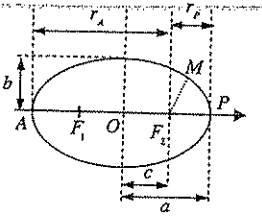
Caractéristiques simples d'une ellipse

L'ellipse est inscrite dans un rectangle de côtés $2a$ et $2b$. La distance a est appelée le demi grand axe, les deux foyers sont distants de $2c$.

L'excentricité est $e = \frac{c}{a}$ avec forcément $0 \le e < 1$ ($e=0$ est un cercle et lorsque e augmente, l'ellipse s'aplatit.

Si le centre attracteur est en F_2, le point A est l'apogée (point le plus éloigné) et le point P est le périgée (point le plus proche). Les distances correspondantes sont :

$r_A = a + c = a(1+e)$ et $r_P = a - c = a(1-e)$.



Attention si l'astre de centre F_2 est la Terre : $r_A = R_T + h_A$ et $r_P = R_T + h_P$.

Centre de masse

Le centre de masse de deux point matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 est le point noté G, barycentre des deux points affectés de leur masse. Si O est un point origine quelconque : $m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{OG}$.

En choisissant O en G on obtient la relation barycentrique : $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$.

Ces relations se généralisent à un système de n points matériels ou au solide, en le découpant en petits éléments de volume.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \overrightarrow{OG}}$$

La relation est associative : les points M_1 et M_2 considérés au début peuvent eux-mêmes être des centres de masse de deux sous-systèmes.

Équations différentielles en physique

Une équation différentielle est une équation reliant une fonction y d'une variable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en physique), la variable x et les dérivées de la fonction y. Elle est donc du type $f(y^{(n)}, \ldots, y'', y', y, x) = 0$. Le plus grand ordre des dérivées de y figurant dans l'équation est l'ordre de l'équation différentielle.

La solution d'une équation différentielle doit toujours être justifiée par une identification précise du type de l'équation différentielle à résoudre. En physique, la plupart des équations différentielles à résoudre sont d'un des types décrits ci-dessous, quand ce n'est pas le cas, l'énoncé donne des indications pour la résolution.

I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Elle relie donc y', y et x.

1. Équation à variables séparables

Dans une équation de la forme $y'F(y) = G(x)$, on peut séparer ce qui concerne y de x.

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ avec dy et dx différentielles, il vient $\boxed{dy\,F(y) = G(x)\,dx}$, on peut alors intégrer chaque membre et en tirer $y(x)$.

Exemple : $y^2 y' = \cos(x)$

$$y^2 dy = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow y^3/3 = \sin(x) + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \left(3\sin(x) + C_2\right)^{1/3}$$

La constante d'intégration C_2 est fixée par les conditions aux limites).

2. Équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants

Il s'agit d'une équation du type $ay' + by = f(x)$ avec a et b deux constantes (réelles en physique), appelées coefficients de l'équation différentielle linéaire. La notion de coefficients n'a de sens que pour une équation différentielle linéaire !

Le caractère linéaire de l'équation différentielle est lié à une propriété de l'équation, dite homogène, associée à l'équation différentielle et définie par : $ay' + by = 0$. Si on écrit

l'équation homogène sous la forme générale $G(y) = 0$, alors G possède une propriété de linéarité par rapport à y, en effet :

$$G(y_1 + y_2) = G(y_1) + G(y_2) \quad \text{et} \quad G(\lambda y) = \lambda\, G(y).$$

$G(y)$ est alors nécessairement du type $ay' + by$. Le second membre $f(x)$ de l'équation différentielle linéaire n'a pas d'influence sur le type de l'équation différentielle.

> La solution $y(x)$ de l'équation $ay' + by = f(x)$ est la somme :
> - de **la** solution générale de l'équation sans second membre ($ay' + by = 0$) ou équation homogène : solution notée y_G

et

> - d'**une** solution particulière de l'équation complète, notée y_P

a. Recherche de y_G solution de $ay' + by = 0$: $y_G = A\,e^{-\frac{b}{a}x}$

b. Recherche de y_P solution particulière de $ay' + by = f(x)$

Méthode 1 : On pose $y = \lambda(x)\ e^{-\frac{b}{a}x}$ et on remplace dans l'équation, on en déduit $\lambda'(x)$ puis $\lambda(x)$.

Méthode 2 : On cherche directement y_P de la même forme que le 2nd membre $f(x)$ (même méthode que pour une équation du second ordre, voir § **II-2-b**).

Cas particulier : $f(x) = C = \text{cste}$, alors y_P est une constante, en remplaçant il vient : $a \times 0 + by_P = C \Rightarrow y_P = \dfrac{C}{b}$. Dans ce cas la solution est $y = \dfrac{C}{b} + A\ e^{-\frac{b}{a}x}$, la constante d'intégration A est déterminée par les conditions initiales ou aux limites.

3. Application à des systèmes physiques

a. Équation différentielle linéaire du 1er ordre avec second membre constant

Soit l'équation $\tau\dfrac{du}{dt} + u = U_0$ avec $U_0 = \text{constante}$, correspondant par exemple à la réponse à un échelon de tension des dipôles $R\,L$ ou $R\,C$. La constante positive τ est un paramètre caractéristique important du système, comme on va le voir par la suite.

La solution est $u = u_G + u_P$ avec :

- u_G solution de l'équation homogène $\tau\dfrac{du}{dt} + u = 0$ soit $u_G = A\,e^{-\frac{t}{\tau}}$.

L'équation homogène correspond à une évolution du système linéaire (au sens différentiel) en l'absence d'apport d'énergie extérieure, par exemple en électrocinétique en l'absence de source de tension ou de courant. Ce qui se traduit notamment par un second membre de l'équation différentielle nul. On dit que le système évolue librement

et pour cette raison u_G est appelée régime libre . Le régime libre peut être observé seul, à condition que le système, évoluant librement, possède initialement de l'énergie (cf. conditions initiales à choisir en conséquence). On retrouve ainsi que le système physique est caractérisé par le premier membre de l'équation différentielle, c'est-à-dire le type de l'équation différentielle au sens mathématique, le second membre traduisant la présence ou non d'un excitateur extérieur et correspondant à des formes mathématiques diverses (dans cet exemple une constante U_0).

On constate que $u_G = A\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ tend vers 0 quand $t \to \infty$ ou plus correctement quand $t \gg \tau$. Ceci est assez général, pour un système physique réel dont la modélisation n'est pas trop simplifiée, le régime libre finit toujours par tendre vers 0 : ceci correspond à une dissipation inéluctable de l'énergie initiale.

▶ u_P solution particulière de l'équation complète est ici du type *constante*, en remplaçant on trouve $u_P = U_0$.

La forme de la solution u_P est imposée par l'excitateur extérieur (le second membre), pour cette raison u_P est appelée régime forcé . Dans cet exemple il s'agit d'un régime forcé continu.

Comme on l'a vu, on a $u_G \to 0$ pour $t \gg \tau$, donc au bout d'une durée suffisante $u \approx u_P$ et on finit toujours par obtenir le régime forcé.

À partir de l'instant initial, on observe donc une évolution en deux étapes temporelles :

- ▶ tant que u_G n'est pas négligeable alors $u = u_G + u_P$, il s'agit du **régime transitoire**, il dure donc de l'ordre de quelques τ
- ▶ **puis** u_G devenant négligeable on a $u \approx u_P$ et on observe le **régime forcé**.

b. Équation différentielle linéaire du 1er ordre avec second membre sinusoïdal

Soit l'équation $\tau\frac{du}{dt} + u = u_0 \cos \omega t$ avec u_0 = constante , correspondant par exemple à la réponse à une excitation en tension sinusoïdale (générateur) des dipôles $R\,L$ ou $R\,C$.

La solution est à nouveau $u = u_G + u_P$ avec :

▶ u_G solution de l'équation homogène $\tau\frac{du}{dt} + u = 0$ soit $u_G = A\,e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Comme précédemment, en l'absence d'excitation, u_G est le régime libre, et u_G tend vers 0 quand $t \to \infty$ ($t \gg \tau$).

▶ u_P solution particulière de l'équation complète est ici recherchée sous la forme d'une fonction de même pulsation ω que l'excitation, mais déphasée (retard φ),

$u_P(t) = U_m \cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant par les représentations complexes des grandeurs sinusoïdales :

$$(j\omega\tau + 1)\underline{u} = u_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = U_m e^{-i\varphi} = \frac{u_0}{1 + j\omega\tau} \quad \text{d'où} \quad U_m = \frac{u_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \omega\tau$$

La forme de la solution u_P est imposée par l'excitateur extérieur (le second membre) ; pour cette raison, u_P est appelé le régime forcé. Dans cet exemple il s'agit d'un régime forcé sinusoïdal.

NB : La détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale $u_G(t) + u_P(t)$!

Comme on l'a vu, on a $u_G \to 0$ pour $t \gg \tau$, donc au bout d'une durée suffisante $u \approx u_P$ et on finit toujours par obtenir le régime forcé. Même conclusion (sous forme d'encadré) qu'au **a.**

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

1. Équation différentielle linéaire du 2e ordre, à coefficients constants, sans second membre

Elle est du type $ay'' + by' + cy = 0$, avec a, b et c des constantes (réelles en physique).

On cherche des solutions y de la forme e^{rx} avec r inconnu, mais constant (indépendant de x). Il vient :

$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$ et ce $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\boxed{ar^2 + br + c = 0}$ (équation caractéristique).

1er cas : $b^2 - 4ac > 0$

L'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 :

$$y = A\ e^{r_1 x} + B\ e^{r_2 x}$$

2ème cas : $b^2 - 4ac < 0$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$r_1 = \alpha + j\beta$ et $r_2 = \alpha - j\beta$ (avec $j^2 = -1$)

$y = e^{\alpha x}[\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)]$ ou bien $y = C\ e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi)$

3ème cas : $b^2 - 4ac = 0$

L'équation caractéristique admet une racine double $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a}$:

$$y = (mx + p)\ e^{r_1 x}$$

Les constantes d'intégration $A, B, \lambda, \mu, C, \varphi, m$ et p sont réelles

2. Équation différentielle linéaire du 2e ordre, à coefficients constants, avec second membre

Elle est du type $ay'' + by' + cy = f(x)$, avec a, b et c des constantes réelles.

> La solution $y(x)$ de l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ est la somme :
> - de **la** solution générale de l'équation sans second membre ($ay'' + by' + cy = 0$) ou équation homogène : solution notée y_G

et

> - d'**une** solution particulière de l'équation complète, notée y_P

a. Recherche de y_G : voir ci-dessus § **II-1.**

b. Recherche de y_P :

▶ Si $f(x) = \text{cste}$, on cherche $y_P = \text{cste}$.

▶ Si $f(x)$ est un polynôme de degré n en x, on cherche y_P sous forme d'un polynôme de degré n. On trouve les coefficients en remplaçant dans l'équation et en identifiant. Si $c = 0$, y_P est un polynôme de degré $n+1$; si $c = 0$ et $b = 0$, y_P est de degré $n+2$.

▶ Si $f(x)$ est du type $k\cos(\omega x)$, on cherche y_P sous la forme $p\cos(\omega x) + q\sin(\omega x)$, on détermine p et q en remplaçant dans l'équation et en identifiant les coefficients des termes en cosinus d'une part et ceux en sinus d'autre part. On peut également, de manière plus efficace, poser y_P de la forme $A\cos(\omega x + \varphi)$ et déterminer A et φ par passage par les complexes (Voir § **II-3 b.** ci-dessous).

ATTENTION : si $\pm j\omega$ sont racines de l'équation caractéristique, alors p et q ne sont pas constants ; il faut alors poser $y_P = x\left[p'\cos(\omega x) + q'\sin(\omega x)\right]$.

▶ Si $f(x)$ est du type $k\,e^{\alpha x}$, on cherche $y_P = \lambda\,e^{\alpha x}$, et λ en remplaçant. Là aussi il ne faut pas que α soit racine de l'équation caractéristique, sinon λ n'est pas une constante ($\lambda = Kx$, si α est racine simple et $\lambda = Kx^2$ si α est racine double).

▶ Si $f(x)$ est une somme de fonctions $F(x) + G(x) + H(x) + \ldots$, on cherche une solution particulière de $ay'' + by' + cy = F(x)$, de $ay'' + by' + cy = G(x)$, etc....

y_P est la somme des solutions particulières (par linéarité de l'équation différentielle).

c. On obtient donc $y = y_G + y_P$, dans y_G il apparaît deux constantes dites d'intégration, elles sont déterminées par les conditions aux limites imposées au système (conditions initiales quand la variable est le temps). **Ces conditions ne doivent être appliquées qu'à la solution complète $y_G + y_P$ et jamais à y_G seule.** La solution particulière y_P (régime forcé) est donc indépendante des conditions « initiales ».

3. Application à des systèmes physiques

a. Équation différentielle linéaire du 2e ordre sans second membre

* cas particuliers :

▶ $(d^2y / dx^2) + \omega^2 y = 0$, ω^2 constante positive, l'équation caractéristique donne $r^2 = -\omega^2 \Rightarrow$ solutions $\pm j\omega$ et $y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$: c'est un oscillateur harmonique.

▶ $(d^2y / dx^2) - \omega^2 y = 0$, ω^2 constante positive, l'équation caractéristique donne $r^2 = \omega^2 \Rightarrow$ solutions $\pm\omega$. Choisir $y = A\,e^{\omega x} + B\,e^{-\omega x}$ lorsque les conditions portent sur $x = \pm\infty$, et $y = A'\mathrm{ch}\,\omega x + B'\mathrm{sh}\,\omega x$ si les conditions portent sur $x = 0$.

* cas général : Soit l'équation $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ avec Q et ω_0^2 deux constantes positives. Elle décrit l'évolution d'un système en régime libre, par exemple oscillateur mécanique amorti par frottement fluide ou en électrocinétique, l'évolution en l'absence de « générateur », des grandeurs électriques dans une association RLC série ou parallèle.

Les constantes positives Q et ω_0 sont des paramètres caractéristiques importants du système, Q est appelé facteur de qualité (l'amortissement est en $\dfrac{1}{Q}$).

Les racines de l'équation caractéristique (au sens de l'équation différentielle linéaire) $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ dépendent du signe du discriminant $\Delta = 4\,\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4\,Q^2} - 1\right)$:

$\Delta < 0$ soit $Q > \dfrac{1}{2}$, cas d'un amortissement faible, les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées à partie réelle négative : $-\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega$

$$u = A\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{-\Delta}\,/\,2 = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q^2}}$$

ce régime libre est qualifié de **pseudopériodique**, la pseudopériode est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$\Delta > 0$ soit $Q < \dfrac{1}{2}$, cas d'un amortissement fort, les racines de l'équation caractéristique sont réelles, leur somme est négative et leur produit positif, elles sont négatives, on les note $-\beta$ et $-\gamma$. $u = B\,e^{-\beta t} + C\,e^{-\gamma t}$ avec $\omega_0^2 = \beta\,\gamma$

ce régime libre est qualifié d'**apériodique**

$\Delta = 0$ soit $Q = \frac{1}{2}$, cette égalité mathématique n'est pas réalisable pour un système réel, il s'agit d'un cas limite théorique intermédiaire entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique, on le qualifie **d'apériodique critique**.

La racine double de l'équation caractéristique est $-\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ et la solution de l'équation différentielle $u = (At + B)\,e^{-\omega_0 t}$.

Dans chaque cas, il apparaît dans l'expression de la solution régime libre, deux constantes d'intégration (car l'équation différentielle est du second ordre), elles sont déterminées par les conditions initiales. Ces conditions initiales doivent être telles que le système possède initialement de l'énergie, si on veut pouvoir observer une évolution non nulle en régime libre. Par exemple, condensateur initialement chargé pour une association RLC, ressort étiré pour un oscillateur mécanique.

Dans les trois cas on constate que u tend vers 0 quand $t \to \infty$ ou plus correctement quand $t \gg 2Q / \omega_0$ ou $t \gg T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. On retrouve avec cette modélisation que le régime libre tend vers 0 du fait de la dissipation inéluctable de l'énergie initiale.

b. Équation différentielle linéaire du 2e ordre avec second membre sinusoïdal

Soit l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = K\cos(\omega t)$ avec Q et ω_0^2 deux constantes positives caractéristiques de l'oscillateur. La pulsation ω est imposée par un excitateur extérieur.

La solution est $u = u_G + u_P$ avec :

- u_G solution de l'équation homogène $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ est donc le régime libre étudié ci-dessus au § **II-2**.

- u_P solution particulière de l'équation complète est ici du type imposé par le second membre soit $u_P = U_m \cos(\omega t - \varphi)$, elle correspond à un régime sinusoïdal forcé dont la pulsation ω est imposée par l'excitateur.

On a vu que quel que soit l'amortissement, u_G tend vers 0 pour Δt assez grand. Cette durée correspond à un régime transitoire pendant lequel $u = u_G + u_P$. On peut par exemple observer un phénomène de battements si ω et ω_0 sont du même ordre de grandeur.

En fin de régime transitoire, u_G est devenue négligeable, on a $u \approx u_P$ et on observe un **régime sinusoïdal forcé**.

L'étude du régime sinusoïdal forcé est la recherche de $u_P = U_m \cos(\omega t - \varphi)$.

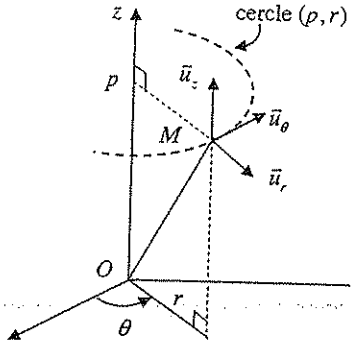
U_m est l'amplitude de la réponse forcée et φ le retard de phase de cette réponse sur l'excitation. U_m et φ ne sont pas des constantes d'intégration, leurs valeurs sont fixées

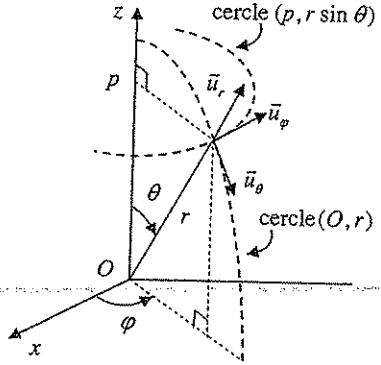
et telles que u_p soit solution de l'équation complète. Il est important de noter que le régime forcé est totalement indépendant des conditions initiales, l'influence des conditions initiales s'éteint en même temps que le régime libre.
La détermination de U_m et φ doit se faire impérativement en passant par les représentations complexes des grandeurs sinusoïdales : $U_m\, e^{j(\omega t-\varphi)}$ et $K\, e^{j\omega t}$. En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$U_m\, e^{-j\varphi}\left(-\omega^2+\frac{\omega_0}{Q}\,j\omega+\omega_0^2\right)=K \quad \text{soit} \quad \boxed{U_m\, e^{-j\varphi}=\frac{K}{\left(\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega_0}{Q}\,\omega\right)}}$$

en prenant $K>0$: $U_m=\dfrac{K}{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+\dfrac{\omega_0^2}{Q^2}\,\omega^2\right)^{1/2}}$ et $\tan\varphi=\dfrac{\omega_0\omega}{Q\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$

Systèmes de coordonnées et vecteur gradient





Soit U une fonction réelle des trois coordonnées d'un point M. U est appelé champ scalaire. On appelle gradient de la fonction scalaire U, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ défini par :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U\right).d\overrightarrow{OM}=dU}$$

Cette relation de définition est indépendante du système de coordonnées. On en déduit les composantes du gradient dans les différents systèmes de coordonnées.

En coordonnées cartésiennes : $dU=\dfrac{\partial U}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial U}{\partial y}\,dy+\dfrac{\partial U}{\partial z}\,dz$

et $d\overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix}dx\\dy\\dz\end{matrix}\right. \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,U=\dfrac{\partial U}{\partial x}\,\vec{u}_x+\dfrac{\partial U}{\partial y}\,\vec{u}_y+\dfrac{\partial U}{\partial z}\,\vec{u}_z}$

En coordonnées cylindriques : $dU = \dfrac{\partial U}{\partial r}\,dr + \dfrac{\partial U}{\partial \theta}\,d\theta + \dfrac{\partial U}{\partial z}\,dz$

et $d\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}U = \dfrac{\partial U}{\partial r}\,\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial U}{\partial z}\,\vec{u}_z}$

En coordonnées sphériques : $dU = \dfrac{\partial U}{\partial r}\,dr + \dfrac{\partial U}{\partial \theta}\,d\theta + \dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\,d\varphi$

et $d\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}U = \dfrac{\partial U}{\partial r}\,\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi}$

Ex : Pour un champ de force conservatif, $\delta W = \vec{f}\,.\,d\overrightarrow{OM} = -dE_p = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p\,.\,d\overrightarrow{OM}$, car E_p est bien une fonction des coordonnées seules, la relation est valable quel que soit $d\overrightarrow{OM}$ donc : $\boxed{\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p}$. La fonction U est dans ce cas l'énergie potentielle.

Expression d'une valeur numérique en physique

La signification d'une valeur numérique comme 2,5 par exemple diffère suivant le contexte.
En Mathématique, il s'agit d'une valeur avec une infinité de 0 après le cinq. On n'en écrit donc aucun. En Mathématique 2,5 c'est $\dfrac{5}{2}$.

Pour une calculatrice (machine réelle), les choses sont un peu différentes : entrer sur votre calculatrice 2,5 suivi d'une douzaine de 0 puis d'un 1, retrancher ensuite 2,5. Les deux nombres, mathématiquement différents, sont égaux pour la calculatrice ! Si ça ne marche pas augmenter le nombre de 0.

En Physique, on indique explicitement avec le nombre de chiffres de la valeur numérique, la précision avec laquelle la valeur est connue :

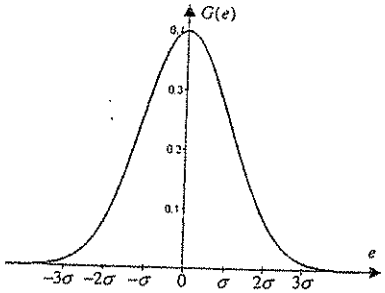
$X = 2{,}5$ signifie $2{,}45 \leq X < 2{,}55$, attention ici 2,45 et 2,55 sont des nombres mathématiques.
$X = 2{,}500$ signifie $2{,}4995 \leq X < 2{,}5005$.

Série de mesures et loi normale

Lors de la mesure d'un mesurande A, de valeur cherchée x_0 (valeur vraie), on note x_i une mesure (provenant d'un mesurage). On appelle erreur l'écart entre une mesure et la valeur vraie : $e_i = x_i - x_0$. La valeur vraie est par nature, inaccessible, donc l'erreur également. En fait, on se sert de l'erreur et de ses propriétés *a priori*, pour obtenir un encadrement de la valeur du mesurande.

On s'intéresse ici au cas où l'erreur est **aléatoire**, c'est-à-dire due à des variations imprévisibles de la mesure x_i (les causes possibles sont développées au paragraphe suivant). Ces variations se traduisent par une dispersion des valeurs e_i.

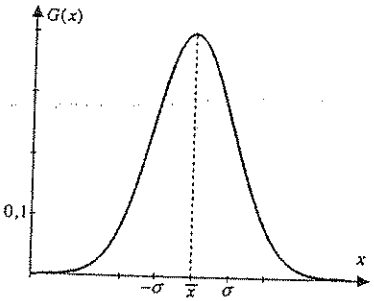
Alors les mathématiques indiquent qu'un **nombre infini** de valeurs de e_i, correspondent à une variable aléatoire E qui suit la loi de Gauss ou loi normale :



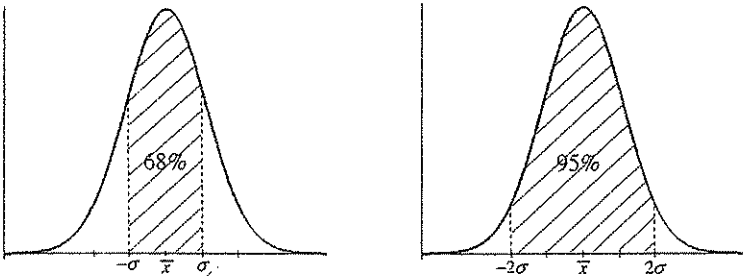
$G(e)$ est une densité de probabilité, c'est-à-dire que la probabilité pour qu'une erreur e_i ait une valeur comprise entre e et $e + de$ est $G(e)\,de$, qui correspond à une aire sous la courbe de Gauss.

La courbe est centrée sur 0 (valeur moyenne qui est aussi la plus probable), la valeur σ est appelée écart-type.

On peut revenir aux mesures x_i, $x_i = x_0 + e_i$, donc un nombre infini de valeurs de x_i correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée sur la valeur moyenne notée $\overline{x}$ (ici x_0) et d'écart-type σ.

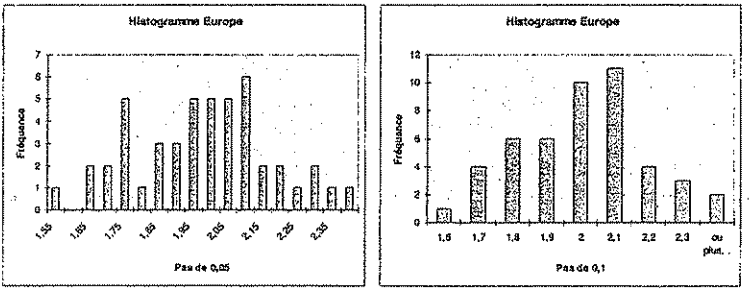


L'aire sous la courbe entre deux valeurs x_1 et x_2 est proportionnelle au nombre de valeurs x_i comprises entre x_1 et x_2. Les propriétés de la loi normale indiquent que 68% des valeurs sont entre $-\sigma$ et σ, et 95% entre -2σ et 2σ :



On peut aussi dire qu'une mesure au hasard a 95% de chance d'avoir une valeur dans $[\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma]$

Lors d'une série réelle de mesures, forcément en nombre fini, on peut être tenté de tracer un histogramme : mesures en abscisse et fréquence d'obtention en ordonnée. Celui-ci a peu de chance de ressembler à une loi normale, même si les erreurs sont aléatoires, car mathématiquement il faut un nombre infini de valeurs. De plus sa forme dépend beaucoup du pas choisi en abscisse pour regrouper (discrétiser) les valeurs de mesure.
Voici, par exemple l'histogramme des mesures du TP Mesure de la masse de Jupiter du chapitre **8.**, avec le satellite Europe, effectuées par plusieurs expérimentateurs. La masse est en 10^{27} kg :



Heureusement, une répartition exactement normale des valeurs x_i n'est pas obligatoire pour le traitement statistique de la série de mesures.
Il est possible sur un nombre fini n de valeurs, de calculer une valeur moyenne et un écart type définis par :

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_n\right)^2}$$

Attention de ne pas confondre ces valeurs et les caractéristiques de même nom de la loi normale. Les résultats sur les pourcentages de répartition des valeurs, vus pour la loi normale, ne s'appliquent pas à cette série finie. Ces formules ne sont pas à connaître, les calculatrices, en mode statistique, les donnent directement.

Comment traiter alors une série d'un nombre n fini de valeurs ? Les mathématiques fournissent la solution.

On considère p séries de n valeurs (n fini) parmi un nombre N infini de valeurs, $N = p\,n$, avec p infini. On montre (théorème limite central) que les valeurs moyennes $\overline{x}_n$ ont une répartition normale de valeur moyenne $\overline{x}$ (la même que la distribution de départ) et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (plus étroit que l'écart-type de la distribution de départ). Ce résultat s'applique même si la distribution initiale (des N valeurs) n'est pas strictement normale.

Considérons une série de n mesures d'une même grandeur. La valeur moyenne de la série $\overline{x}_n$ a donc 95% de chance d'appartenir à $\left[\overline{x} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\,\overline{x} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Ce qui signifie que $\overline{x}_n$ est à moins de $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ de $\overline{x}$, soit :

$$\boxed{\overline{x} \in \left[\overline{x}_n - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\,\overline{x}_n + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

Donc avec une seule valeur $\overline{x}_n$, on a accès à un encadrement de $\overline{x}$, avec une probabilité, on parle de niveau de confiance, de 95% !
Reste le problème de la valeur de σ, remplacé par un estimateur, le seul dont on dispose, l'écart-type de la série finie s_n. Pour compenser, il faut remplacer le 2 par un coefficient de Student t_n qui dépend du nombre de valeurs de la série.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
$t_{95\%}$	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,09	2,02	1,96

Finalement on obtient un intervalle à niveau de confiance de 95% :

$$\boxed{x_0 \in \left[\overline{x}_n - t_n\frac{s_n}{\sqrt{n}}\,,\,\overline{x}_n + t_n\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right]}$$

Si on se contente d'un niveau de confiance moindre de 68%, le coefficient de Student est donné par :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
$t_{68\%}$	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,03	1,01	1

Le coefficient de Student est qualifié de facteur d'élargissement et est souvent noté k. L'incertitude $U = k\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ est appelée incertitude élargie. Les tableaux montre qu'à partir d'une dizaine de valeurs, le facteur d'élargissement est quasiment 1 à 68% et 2 à 95%.

Exemple : voir le TP mesure de la masse de Jupiter, fin de la question **48.** chapitre **8**.

1. Nécessité de l'incertitude

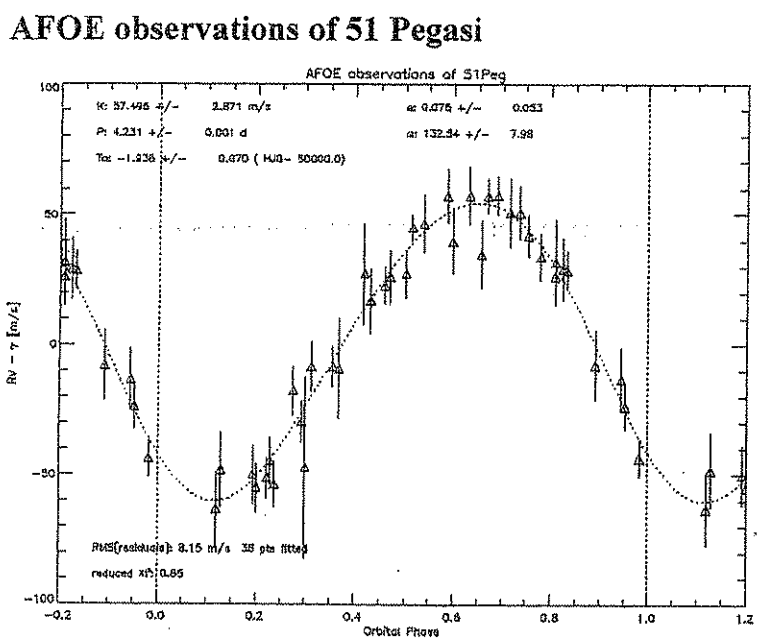
Le résultat du mesurage de la valeur d'un mesurande consiste à définir un intervalle dans lequel on pense avoir une bonne probabilité que se trouve la valeur cherchée. La valeur vraie du mesurande est inaccessible.

Cet intervalle n'est en aucun cas l'écart à une valeur théorique ou une valeur attendue ! En effet, il suffit d'imaginer celui qui mesure une grandeur pour la première fois, où ira-t-il chercher la valeur attendue ?

Exemple : une détermination de la distance Terre-Soleil par Cassini en 1672, utilisant une opposition favorable de Mars et la troisième loi de Képler (1619), donne 146 10^6 km. Il lui faut alors trouver un intervalle dans lequel se trouve la valeur de cette distance, sans référence possible à une valeur théorique puisqu'il est le premier à faire cette mesure.

Préciser l'incertitude sur une mesure est indispensable. Sans l'incertitude, la mesure est inutilisable, elle ne peut pas être exploitée pour valider ou infirmer une théorie ou faire de nouvelles découvertes.

Exemple :



AFOE observations of 51 Pegasi

Precise radial velocity measurements of the star *51 Pegasi* (HR 8729, HD 217014) with the **AFOE** (Advanced These includes 38 observations from July, 1995, through November, 1997.

Le graphe représente la courbe de vitesse radiale de l'étoile 51 Pégase. Les astronomes suisses Michel Mayor et Didier Queloz ont pu, grâce aux incertitudes sur chaque mesure (représentées par les segments verticaux), conclure expérimentalement à la variation sinusoïdale de cette vitesse. Cette variation peut alors s'expliquer par la présence autour de l'étoile d'une planète massive qui par son mouvement entraîne un déplacement de l'étoile autour du centre de masse de l'ensemble. La première planète extrasolaire vient d'être découverte (1997). On conçoit facilement que les astronomes suisses pour conclure sur leur formidable découverte n'ont pas eu accès à la courbe théorique de variation de vitesse de 51 Pégase ! Sans les incertitudes de mesure, la conclusion n'était pas possible.

2. Le but du mesurage

On veut pouvoir écrire comme résultat du mesurage du mesurande A, de mesure X : $A = X \pm U$ ou $A \in [X - U\ ,\ X + U]$ avec un niveau de confiance, par exemple de 95%.

Avec U incertitude absolue élargie

$\frac{U}{|X|}$ incertitude relative (correspondant à un pourcentage)

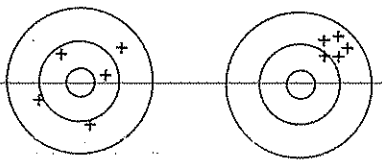
3. Les outils

On appelle erreur l'écart entre une mesure x_i et la valeur vraie : $e_i = x_i - x_0$. La valeur vraie est par nature, inaccessible, donc l'erreur également. En fait, on se sert de l'erreur et de ses propriétés a priori, pour obtenir un encadrement de la valeur du mesurande. Les erreurs sont dues aux instruments de mesure, à l'expérimentateur, au protocole expérimental et à la variabilité éventuelle de la grandeur à mesurer.
Il existe deux types d'erreurs :

- **Erreur aléatoire** : elle est due à des variations imprévisibles de la mesure. Elle se traduit par une dispersion des valeurs lors de mesures répétées dans les mêmes conditions expérimentales. Si la dispersion des valeurs est faible, la mesure est dite **fidèle**. Ce type d'erreur n'affecte pas la moyenne des mesures. En augmentant le nombre de mesures, on peut par traitement statistique réduire ses effets sur l'incertitude de mesure.

- **Erreur systématique** : comme son nom l'indique, elle correspond à une mesure systématiquement décalée par rapport à la valeur vraie, toujours dans le même sens. Elle peut être due à un mauvais étalonnage, au vieillissement d'un appareil ou liée au protocole lui-même. Les **facteurs d'influence** (température, pression...) peuvent être à l'origine de ce type d'erreur. Si elle est décelée (ce qui n'est en général pas simple) on essaye de la corriger (des exemples sont traités dans différentes questions de TP). L'erreur systématique affecte la **justesse** de la mesure. Augmenter le nombre de mesures ne permet pas de réduire son effet sur l'incertitude de mesure.

Une analogie avec une cible de tir à l'arc permet de comprendre la différence entre fidélité et justesse.



cible 1 cible 2

Cible 1 : tirs peu fidèles (tireur débutant), mais juste (l'arc est bien réglé)

Cible 2 : tirs fidèles (tireur expérimenté), mais pas justes (l'arc est déréglé)

On envisage dans un premier temps le traitement des erreurs aléatoires.

4. Mesure directe du mesurande

a) Si on dispose d'une série de mesures, on procède directement au traitement statistique, voir l'exemple à la partie précédente série de mesure et loi normale. La mesure est $X = \overline{x}_n$. L'incertitude-type donnée par le traitement statistique est appelée **évaluation de type A**. Pour pouvoir appliquer cette évaluation, il ne suffit pas de répéter plusieurs fois la mesure, il faut que cette répétition se traduise par une dispersion significative des valeurs. Si on demande à plusieurs personnes de mesurer une même longueur de l'ordre de 10 cm, avec une même règle graduée en mm, toutes les valeurs seront quasiment les mêmes. Il n'y a pas de dispersion significative. La même expérience avec une règle graduée en cm, va produire une dispersion des valeurs, due à l'interpolation, entre deux graduations, différente d'un individu à l'autre, et cette dispersion est significative de l'imprécision liée à la règle peu adaptée.

b) Dans le cas d'une mesure isolée, on procède à l'évaluation des erreurs possibles et à leur contribution à l'incertitude-type sur la mesure. La mesure est X : mesure unique. L'incertitude-type est dans ce cas composée, elle résulte de plusieurs incertitude-type liées à chaque source d'erreur. Ce sont les **évaluations de type B** de l'incertitude-type. Elles s'appuient sur des lois de probabilités supposées a priori.

- **Lecture sur une échelle graduée**

$u = \dfrac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}} \Rightarrow$ à 95%, avec un facteur d'élargissement $k = 2$:

$$\boxed{U = 2 \times u = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{3}}}$$

Ceci signifie que statistiquement on ne peut pas sur chaque mesure faire une erreur maximale d'une graduation.

- **Instrument vérifié de classe α**

Le constructeur indique la classe définie par une limite $\pm\alpha$ (on parle aussi de tolérance) :

$$u = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{à } 95\% : \boxed{U = 2\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$$

- **Instrument étalonné**

Le constructeur indique directement U, en général à 95%.

- **Appareil numérique**

Le constructeur indique pour la précision un pourcentage p de la valeur lue et un nombre N de digit (un digit correspond au dernier chiffre affiché). p correspond à une erreur de calibrage (variable d'un appareil à l'autre), donc

systématique. Elle peut devenir aléatoire si on répète la mesure avec des appareils différents de la même série, et être traitée par une évaluation de type A. N correspond à une erreur aléatoire de type bruit de fond.

$$u = \frac{p \times \text{valeur lue}}{\sqrt{3}} + \frac{N \text{ digit}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = 2\frac{p \times \text{valeur lue} + N \text{ digit}}{\sqrt{3}}} \text{ à 95\%.}$$

Exemples :

Une résistance affiche $R = 200\ \Omega$ avec une tolérance de 2%, alors $\alpha = 200 \times 2\% = 4\ \Omega$ et l'incertitude-type vaut $u = 4/\sqrt{3} \approx 2{,}3\ \Omega$ (au niveau de confiance 68 %) et $U = 2u \approx 4{,}6\ \Omega$ à 95%.
La résistance est donc $R = (200 \pm 5)\ \Omega$ au niveau de confiance 95 %.

Une pipette indique 25 mL avec une tolérance de 0,05 mL, l'incertitude-type sur la mesure du volume est $U = 2 \times 0{,}05/\sqrt{3} \approx 0{,}058$ mL (à 95 % de confiance) donc le volume prélevé est $V = (25{,}00 \pm 0{,}06)$ mL au niveau de confiance 95 %.

Un ampèremètre affiche 5,21 mA, la précision est de $((3\% \pm 1\text{digit})$ qui correspond donc à $U = 2\dfrac{5{,}21 \times 0{,}03 + 0{,}01}{\sqrt{3}} = 0{,}19$ mA, l'intensité mesurée est :

$I = (5{,}2 \pm 0{,}2)$ A au niveau de confiance de 95%..

L'incertitude ne comporte qu'un seul chiffre significatif et la valeur numérique de la mesure doit être cohérente avec cette incertitude quant au dernier chiffre donné.

On obtient enfin l'incertitude-type sur la mesure X en tenant compte de toutes les incertitudes composantes, provenant des diverses sources d'erreur indépendantes, à un même niveau de confiance :

$$\boxed{U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots}}$$

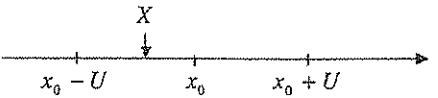
Exemple : seconde partie des TP questions **66.** et **67.** du chapitre **4**.

5. Mesure indirecte du mesurande : propagation des incertitudes

Dans ce cas on cherche à obtenir la valeur d'une grandeur à partir de la mesure effective d'autres grandeurs dont elle dépend. On connaît la relation théorique entre les diverses grandeurs.

Il faut recourir au calcul différentiel, pour relier les incertitudes entre elles. L'incertitude sur la grandeur cherchée se calcule à partir des incertitudes déterminées expérimentalement sur les grandeurs mesurées.

En effet l'incertitude de mesure peut être considérée comme une petite variation autour de la valeur cherchée. Chaque mesure est a priori différente de la valeur exacte (inaccessible) mais a une bonne probabilité d'être à une distance inférieure à l'incertitude de cette valeur exacte (c'est la définition de l'incertitude) :



Il vient donc $\boxed{U = |dX|_{max}}$

L'incertitude composée prend en compte les mesures effectives et leur incertitude-type établies comme au paragraphe **4**, de façon quadratique.

Si $X = Y + Z \Rightarrow dX = dY + dZ \Rightarrow U(X) = \sqrt{U^2(Y) + U^2(Z)}$

Si $X = Y - Z \Rightarrow dX = dY - dZ \Rightarrow U(X) = \sqrt{U^2(Y) + U^2(Z)}$

Si $X = \lambda Y$ et $\lambda = \text{cste} \Rightarrow dX = \lambda dY \Rightarrow U(X) = \sqrt{\lambda^2 U^2(Y)} = |\lambda| U(Y)$

Si $X = Y Z \Rightarrow \dfrac{dX}{X} = \dfrac{dY}{Y} + \dfrac{dZ}{Z} \Rightarrow \dfrac{U(X)}{|X|} = \sqrt{\left(\dfrac{U(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\dfrac{U(Z)}{Z}\right)^2}$

Si $X = \dfrac{Y}{Z} \Rightarrow \dfrac{dX}{X} = \dfrac{dY}{Y} - \dfrac{dZ}{Z} \Rightarrow \dfrac{U(X)}{|X|} = \sqrt{\left(\dfrac{U(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\dfrac{U(Z)}{Z}\right)^2}$

Exemple : TP mesure de la vitesse du son, question **66.** du chapitre **1**, mesure de *f.e.m.* et résistance interne, question **68.** du chapitre **4**, ainsi que les TP question **66.** du chapitre **5** et question **44.** du chapitre **12**.

■ Vérification d'une loi physique et modèle linéaire

Traitons d'un exemple concret. On cherche à vérifier, avec du matériel assez rudimentaire, la partie des lois de la réflexion de Descartes traitant des valeurs des angles d'incidence et de réflexion.

On se sert d'un disque optique, gradué en degré, sur lequel on place un petit miroir plan. Le faisceau incident parallèle, fourni par une simple fente, est envoyé sur le miroir, le point d'incidence étant le centre du disque. En faisant tourner le disque autour d'un axe vertical, on fait varier l'angle d'incidence. On relève les valeurs de $|i|$ et $|r|$, que l'on note i et r, pour diverses valeurs de i.

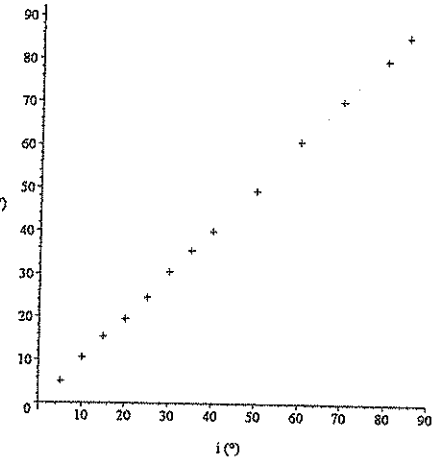
i (°)	0,0	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0	50,0
r (°)	0,0	5,0	10,5	15,5	19,5	24,5	30,5	35,5	40,0	49,5

60,0	70,0	80,0	85,0
61,0	70,5	80,0	85,5

Les valeurs mesurées pour r et i diffèrent sensiblement, ce qui semble en contradiction avec la loi de Descartes $r = i$. Justifier cet écart par l'imprécision des mesures pose un problème de fond. En effet cela revient à considérer la loi de Descartes comme acquise et à conclure, malgré les mesures, à l'égalité des angles : l'expérience ne sert donc à rien si la loi est a priori considérée comme valide !

La démarche est donc de conclure **expérimentalement** à la relation entre i et r, sans a priori sur cette relation. Ceci nécessite de tracer r en fonction de i et d'essayer de conclure à la linéarité.

On trace une droite moyenne, passant "au plus près" des points de mesure. L'existence d'une droite moyenne **n'est pas la preuve** d'une relation linéaire entre r et i. Il s'agit simplement d'une linéarisation du graphe de la fonction $r(i)$ inconnue.



Le raisonnement est alors le suivant : Si la relation $r(i)$ est linéaire, l'écart entre les points de mesure et la droite moyenne est dû à l'imprécision des mesures dont la propriété principale est d'être **aléatoire**. Les incertitudes estimées quantifient cette imprécision. En conséquence les points seront répartis de part et d'autre de la droite moyenne de façon aléatoire.

En conclusion, la relation entre r et i (dans notre étude) est probablement linéaire si :

- Les points de mesure sont de part et d'autre de la droite moyenne
- Les écarts avec la droite moyenne sont cohérents avec l'incertitude estimée des mesures.

L'incertitude sur chaque mesure de r est :

- lecture : graduation en degré $2\frac{1°}{\sqrt{12}} \times 2$ (il y a deux lectures avec le zéro)
- protocole : réglage initial de la normale, systématique, estimée à 0,5°
- appareil : précision des graduations, incertitude négligeable ici

Soit, à 95% , $U = (1{,}15^2 + 0{,}5^2)^{0.5} = 1{,}3°$

Les écarts constatés correspondent aux incertitudes.

On peut ensuite déterminer coefficient directeur et ordonnée à l'origine de la droite moyenne. Le problème de l'erreur systématique liée au réglage de la normale au miroir (référence des angles) et de la position du point d'incidence au centre du cercle peut être contourné en rendant cette erreur aléatoire. Pour cela, la même expérience doit être faite par plusieurs personnes différentes qui ne positionneront pas le miroir de la même façon.

On donne ci-dessous les valeurs du coefficient directeur a et de l'ordonnée à l'origine b de l'équation expérimentale $r = ai + b$, obtenues par 25 expérimentateurs différents.

a	1,09	0,99	1,002	1,06	1,01	1,004	0,997	1,003	1,01	1,01
b	0,00	–0,03	0,04	0,07	0,03	0,05	–0,12	0,02	0,10	0,05

0,996	1,01	1,02	1,00	1,05	1,04	1,003	1,01	0,992	0,960
–0,20	0,02	0,14	0,05	0,00	0,001	0,12	0,03	–0,14	0,02

0,99	1,00	1,001	1,01	0,991
0,02	0,01	0,003	0,01	–0,02

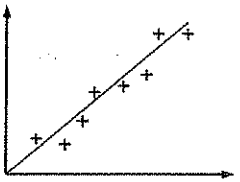
Un traitement statistique donne, à un niveau de confiance de 95% :

$$\overline{a} = 1{,}01\,,\ s_{na} = 0{,}026 \ \Rightarrow\ t_n \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 2{,}1\frac{0{,}026}{\sqrt{25}} \approx 0{,}01$$

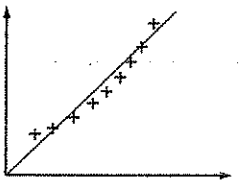
$$\overline{b} = 0{,}011\,,\ s_{nb} = 0{,}075 \ \Rightarrow\ t_n \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 2{,}1\frac{0{,}075}{\sqrt{25}} \approx 0{,}03$$

L'étude statistique conduit à $r = ai + b$, avec $a = 1{,}0$ et $b = 0{,}0$.
La loi est « validée » malgré l'imprécision des mesures.

Remarquons qu'une étude de régression linéaire, avec une calculatrice, ne prouve pas la linéarité même avec un bon coefficient de corrélation. Le tracé effectif des points de mesure est indispensable pour conclure. La régression linéaire peut, après que la linéarité probable a été établie, fournir coefficient directeur et ordonnée à l'origine.
Les deux cas représentés ci-dessous illustrent le problème

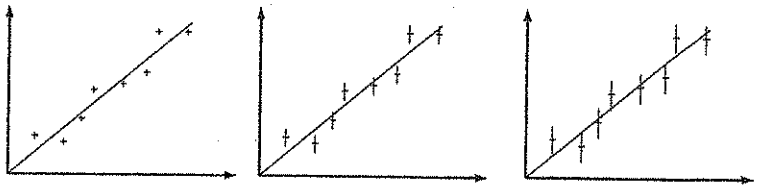


cas 1



cas 2

Dans le premier cas, le phénomène est probablement linéaire, les mesures sont imprécises, le coefficient de corrélation avec la droite moyenne n'est pas bon.
Dans le second cas, le phénomène est sans doute non linéaire avec un bon coefficient de corrélation.
Si la répartition apparaît comme aléatoire, il reste à justifier les écarts à la droite moyenne. Les cas ci-dessous illustrent le problème :



cas A cas B cas C

Dans le cas A, la répartition est compatible avec loi linéaire, il faut justifier les écarts.

Dans le cas B, les incertitudes de mesure n'expliquent pas les écarts observés, la loi est sans doute non linéaire ou les incertitudes ont été sous-estimées.

Dans le cas C, les incertitudes de mesure expliquent les écarts observés, la loi est probablement linéaire.

Une fois la linéarité avérée, on peut avec une régression linéaire, déterminer coefficient directeur a et ordonnée à l'origine b. Certains logiciels fournissent aussi alors l'incertitude sur a et b.

Les TP traitant de la vérification d'une loi sont :

Mesure d'un indice question **64.** chapitre **2**
Comportement linéaire d'un dipôle questions **66.** et **67.** chapitre **4**
Étude d'un régime pseudopériodique question **45.** chapitre **8**

Les TP traitant des erreurs systématiques sont :

Mesure d'une distance focale question **67.** chapitre **2**
Loi des aires question **47.** chapitre **8**
Mesure de la masse de Jupiter question **48.** chapitre **8**

Chapitre 1
Signaux harmoniques et propagation

Les ordres de grandeur utiles

Signaux acoustiques

perception de l'oreille humaine	20 Hz < f < 20 000 Hz
fréquence du La musical	440 Hz
fréquence des infrasons ; des ultrasons	f < 20 Hz ; f > 20 kHz
vitesse du son dans l'air à 20 °C	$c \approx 340\ m.s^{-1}$
vitesse du son dans l'eau	$c \approx 1400\ m.s^{-1}$
vitesse du son dans les solides	$c \approx 3000$ à $5000\ m.s^{-1}$

Signaux électromagnétiques

secteur domestique	f = 50 Hz ($\lambda = 6000$ km)
électrocinétique GBF en TP	f < 100 kHz ($\lambda > 3$ km)
ondes hertziennes pour radio FM	f ≈ 100 MHz ($\lambda \approx 3$ m)
lumière et vision humaine	$f \approx 10^{14}$ à 10^{15} Hz ($0,4\ \mu m < \lambda < 0,8\ \mu m$)
infrarouge ; ultraviolet	$\lambda > 0,8\ \mu m$; $\lambda < 0,4\ \mu m$
célérité de la lumière dans le vide	$c \approx 3,0.10^{8}\ m.s^{-1}$

Le cours d'abord

L'oscillateur harmonique

Un mobile de masse m au point M est accroché à un ressort d'axe horizontal Ox dirigé par un vecteur unitaire $\vec{u}_x$, dont la raideur est k et la longueur à vide l_0.

1. Faire un dessin. Lorsque la longueur du ressort est $l > l_0$, quelle est la force exercée par le ressort sur le mobile et quel est son sens ? Et si $l < l_0$? Réécrire l'expression de cette force en repérant le mobile par une abscisse x comptée à partir de sa position $l = l_0$.

2. Quand dit-on qu'un point matériel est à l'équilibre ? Comment, qualitativement, peut-on distinguer un état d'équilibre stable d'un état d'équilibre instable ? Donner

un exemple simple dans chaque cas. Qu'en est-il pour le système étudié à la question précédente ?

3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la masse m. La force exercée par la tige sur m n'a pas de composante sur l'axe Ox, en l'absence de frottements. Quelles forces agissent suivant Ox ? Appliquer la seconde loi de Newton $\sum \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}(M)$ et donner son expression suivant Ox, on rappelle que suivant Ox :

$$ma_x = \frac{dp_x}{dt} = m\frac{d\dot{x}}{dt} = m\ddot{x}$$

$v_x = \dot{x}$ est la vitesse suivant Ox, dérivée de x par rapport à t, $\ddot{x}$ est la dérivée de $\dot{x}$ par rapport à t, dérivée seconde de x par rapport à t. L'équation obtenue est l'équation différentielle du mouvement de la masse sur la tige Ox.

4. Montrer que $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle. Que vaut alors ω_0 ? Réécrire l'équation différentielle avec ω_0. Comment s'appelle ω_0 pour la fonction harmonique $x(t)$? Quelle est la période T_0 des oscillations ?
a et φ sont des constantes dont la valeur dépend des conditions initiales. Comment s'appelle a pour la fonction $x(t)$? et φ ?

5. Pour un système masse-ressort de mouvement $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$, calculer l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et l'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, puis vérifier que l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ de l'oscillateur est une constante du mouvement ; quelle est son expression ? Commenter.

Propagation d'un signal

6. Comment l'air en contact avec la membrane d'un haut-parleur qui vibre est-il perturbé ? Quelle est la grandeur physique qui traduit la perturbation sonore engendrée ?

7. Qu'appelle-t-on fréquence d'un signal sonore ? À quelle sensation physiologique est-elle associée ? Quelle sont les limites des fréquences audibles par l'oreille humaine ? Quelle est la fréquence du La musical ? Quelle est la gamme de fréquence de la parole ?

8. La corde vibrante est un autre exemple de support le long duquel peut se transmettre un signal mécanique ; visualiser la grandeur physique spatio-temporelle $u(x,t)$ qui traduit la perturbation. Quelles ressemblances et différences peut-on voir avec les signaux sonores ?

9. Un signal est écrit sous la forme $u(x,t) = f(t - x/c)$; que représente cette écriture ? Quelle est la signification et la dimension de c ? Qu'en est-il d'un signal écrit sous la forme $u(x,t) = g(t + x/c)$?

10. Une corde vibrante est excitée de manière sinusoïdale par un vibreur placé en $x = 0$ qui lui impose le mouvement transversal $u(0,t) = u_0 \cos(\omega t)$ de pulsation ω ; une onde progressive sinusoïdale se propage vers les x croissants ; quel est le signal $u(x,t)$? Représenter les deux courbes $u(x_0,t)$ où $x = x_0$ est fixé et $u(x,t_0)$ où $t = t_0$ est fixé et commenter en précisant ce que représente chacune de ces courbes.

11. Établir la relation entre la fréquence f, la longueur d'onde λ (terme à définir) et la célérité c des ondes sinusoïdales de la question précédente et commenter cette relation. Puis réécrire $u(x,t)$ à l'aide de T et de λ.

12. Si $u_1 = u_0 \cos(\omega t)$ et $u_2 = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$, φ est l'avance de phase (algébrique) de $u_2(t)$ sur $u_1(t)$. Reprendre le signal de la question **10.**, $u(0,t) = u_0 \cos(\omega t)$, se propageant vers les x croissants avec une célérité c : $u(x,t) = u_0 \cos(\omega(t - x/c))$. Quel est le retard de phase de $u(x,t)$ sur $u(0,t)$? Interpréter graphiquement les retards de phase de $u(x,t)$ sur $u(0,t)$, pour $x = \dfrac{\lambda}{4}$, $x = \dfrac{\lambda}{2}$, $x = \dfrac{3\lambda}{4}$ et $x = \lambda$.

■ Interférences entre deux ondes mécaniques

13. Une fourche à deux extrémités vibre en frappant la surface de l'eau d'une cuve à onde en deux points S_1 et S_2 ; les vibrations produites en un point M de la surface par ces deux sources s'écrivent respectivement $u_1(M,t)$ et $u_2(M,t)$. Qu'appelle-t-on « principe de superposition » ? À quelle condition deux ondes de même nature peuvent-elle interférer ? Décrire précisément le phénomène observé à l'aide d'une figure même sommaire.

14. Les deux points sources S_1 et S_2 ont pour mouvement des oscillations sinusoïdales de même amplitude, de même fréquence et sont en en phase :

$$u_1(S_1,t) = u_2(S_2,t) = a\cos(\omega t)$$

Pourquoi les signaux arrivant en M sont-ils déphasés ? Calculer le déphasage $\varphi(M)$. Comment utiliser la représentation de Fresnel pour déterminer l'amplitude et la phase de l'onde résultante en M ?

15. Quelle sont les conditions d'interférences constructives ou destructives en M, ? Interpréter les conditions obtenues à l'aide d'un schéma.

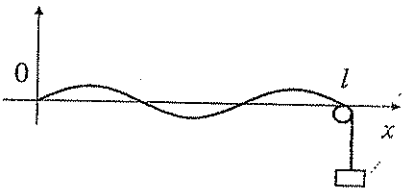
■ Ondes stationnaires

16. Sur une corde vibrante d'axe Ox, on superpose deux ondes sinusoïdales progressives, de même pulsation ω et de même amplitude a, mais se propageant en sens inverse à la même célérité c :

$$u_1(x,t) = a\cos(\omega(t - x/c)) \quad \text{et} \quad u_2(x,t) = a\cos(\omega(t + x/c))$$

Déterminer l'onde résultante $u(x,t)$. Pourquoi parle-t-on d'onde stationnaire ? En donner les caractéristiques (position des nœuds et des ventres).

17. Une corde de Melde de longueur finie l est excitée en $x=0$ par un vibreur (non représenté) de faible amplitude et de fréquence f variable, et passe en $x=l$ sur la gorge d'une poulie. Elle est tendue par une masse m accrochée à l'extrémité de la corde. Décrire le phénomène observé lorsqu'on modifie la fréquence d'excitation f. Quelles conditions aux limites peut-on traduire ? Exprimer la longueur l en fonction de la longueur d'onde λ_n du mode n concerné et en déduire les fréquences des modes propres en fonction de n, l et c. Représenter la corde dans le mode $n=3$.



18. Une corde de guitare de longueur l est fixée à ses deux extrémités ; le guitariste la met en vibration avec son doigt. Est-il possible de préciser dans quel état elle vibre ? Quel lien existe-t-il avec le spectre sonore émis par la corde ?

Diffraction à l'infini

19. De manière générale quand dit-on qu'il y a diffraction ?
Une fente fine de TP de hauteur $b \approx 2$ cm, de largeur $a \approx 0{,}1$ mm est éclairée sous incidence nulle par un faisceau lumineux de longueur d'onde $\lambda \approx 0{,}5$ µm. Faire un dessin et expliquer le phénomène observé. Dans quelle direction angulaire θ_0 est essentiellement envoyée la lumière ? Quelle est alors la largeur de la tache de diffraction sur un écran placé à une distance $D=1$ m du plan de la fente ?

20. On reprend l'expérience avec une ouverture circulaire de diamètre d ; qu'observe-t-on ? Dans quelle direction angulaire θ_0 est essentiellement envoyée la lumière ? Quelle est l'importance pratique des ouvertures circulaires ?

Polarisation rectiligne de la lumière

21. Qu'est-ce qui distingue la grandeur physique qui caractérise la lumière par rapport à celles des ondes mécaniques ? Qu'appelle-t-on lumière naturelle ? Comment fonctionne un polariseur rectiligne ? Quel est son usage ? Établir la loi de Malus sachant que l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré du champ électrique.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Bien distinguer la longueur l du ressort, sa longueur l_0 à vide et son allongement $x = l - l_0$ qui est une grandeur algébrique.

☐ L'équation différentielle de la mécanique est du second ordre et son intégration conduit donc à l'introduction de deux constantes d'intégration (y penser !) ; leur détermination en vue d'obtenir une solution physique au problème suppose la connaissance de la vitesse initiale et de la position initiale du mobile étudié.

☐ Les grandeurs $u(x,t)$ qui représentent les phénomènes ondulatoires sont spatio-temporelles ; il convient donc de bien faire la distinction entre $u(x_0,t)$ qui, pour une corde vibrante par exemple, représente l'élongation d'un point x_0 de la corde en fonction du temps et $u(x,t_0)$ qui représente l'état de la corde entière à un instant t_0 fixé (comme une photographie).

☐ Dans l'écriture $u(x,t) = f(t - x/c)$ d'une onde progressive, bien distinguer $u(x,t)$ qui représente la grandeur physique (élongation, surpression,...) de f la fonction analytique (sinus, exponentielle,...) qui représente sa variation.

☐ Toutes les célérités sont notées c ; une erreur d'étourderie classique consiste à confondre dans les applications numériques $c = 340$ m.s^{-1} pour les ondes acoustiques avec $c = 3.10^8$ m.s^{-1} pour les ondes électromagnétiques.

☐ Ne pas confondre la célérité des ondes ($c = \sqrt{T/\mu}$ par exemple sur une corde) avec la vitesse de vibration d'un élément de corde.

☐ Dans les applications numériques il convient de ne pas oublier le coefficient 2π intervenant entre la pulsation $\omega = 2\pi f$ (en rad.s^{-1}) et la fréquence f (en Hz).

☐ La caractéristique essentielle d'une onde est sa fréquence (liée à la pulsation par $\omega = 2\pi f$) ; elle est conservée lorsque l'onde passe d'un milieu à un autre. En revanche, comme la célérité c change, il en est de même de $\lambda = c/f$ et donc la longueur d'onde λ change d'un milieu à l'autre. En se souvenant que λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période T, il apparaît clairement que λ augmente avec c.

☐ Le choix entre onde progressive et onde stationnaire est imposé par l'existence ou non de conditions aux limites. En espace « illimité », prendre une solution en onde progressive ; en espace « clos », prendre une solution en onde stationnaire, soit directement sous la forme d'un mode, soit par superposition

de deux ondes progressives en sens opposé, l'onde retour étant engendrée par réflexion de l'onde aller sur l'obstacle.

☐ Les ondes stationnaires conduisent, par les conditions aux limites, à des « quantifications » du genre $\sin(\omega l/c)=0 \quad \Rightarrow \quad \omega l/c = n\pi$. Dans cette écriture il est important d'indicer la quantité discrétisée (ce sont les conditions opératoires qui indiquent laquelle), par exemple en écrivant $\omega_n = n\pi c/l$ afin de bien faire apparaître, lorsque l est fixée, la suite ω_n de valeurs possibles pour ω.

☐ Il est faux de croire que la diffraction (par une fente de largeur a par exemple) n'est observable qu'à partir du moment où la taille de l'objet diffractant est de l'ordre de la longueur d'onde ! (voir les questions **19.** et **65.** pour les applications numériques prouvant le contraire) ; d'ailleurs à ce moment-là $\sin\theta_0 = \lambda/a$ serait voisin et même supérieur à 1 ! (et d'un point de vue purement expérimental, la quantité de lumière qui traverse une fente aussi « régulièrement » étroite n'est plus visible à l'œil tellement elle est faible...)

☐ Bien faire la distinction (pour ne pas les confondre) pour une onde lumineuse, entre sa direction de propagation (voir pour cela son terme de phase) et la direction de polarisation (voir le vecteur unitaire qui porte le champ électrique).

Applications directes du cours

L'oscillateur harmonique

22. Un ressort s'allonge de 4 cm lorsqu'on lui suspend une masse de 15 g ; quelle est sa constante de raideur (avec son unité) ? quelle est la période des oscillations ?

23. Deux ressorts (de même longueur) ont des constantes de raideur k_1 et $k_2 > k_1$; lequel est le plus facile à comprimer ?

24. Quelles sont les lois d'association des ressorts en série et en parallèle ?

25. Pour un système masse-ressort d'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, la solution est $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Déterminer les constantes d'intégration dans le cas où :

- la masse est lâchée avec une vitesse initiale nulle, l'élongation du ressort étant A,
- la masse est lancée avec une vitesse initiale v_0 à partir de la position $x=0$.

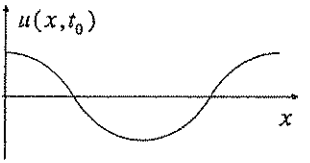
Quelle est la constante de raideur k du ressort sachant que le point M a une masse $m = 100$ g et que la durée mesurée de 10 oscillations est $\tau = 4{,}4$ s ?

Signal sur une corde vibrante

26. Une corde immobile à l'instant initial et suffisamment longue est soumise à un vibreur qui y engendre des oscillations sinusoïdales de fréquence f. Une photographie montre que $\tau = 0{,}06$ s après le début des oscillations la corde est ébranlée sur une longueur correspondant à 3λ. Calculer la fréquence f et la longueur d'onde λ sachant que la célérité est $c = 6$ m.s^{-1}.

27. Dans l'expérience de Melde décrite à la question **17.** une corde vibrante de masse linéique $\mu = 50$ g.m^{-1} (c'est la masse par unité de longueur) est tendue par une masse $m = 500$ g accrochée à l'extrémité libre après la poulie. La célérité des ondes sur une telle corde est donnée par l'expression $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où T est la tension de la corde. Vérifier l'homogénéité de cette expression, commenter les variations de c en fonction de T et μ, puis calculer c dans ce cas.

28. L'onde représentée sur le graphe $u(x,t_0)$ ci-dessous représente-t-elle une onde progressive ou une onde stationnaire ? Justifier soigneusement la réponse.



29. Une corde tendue est attachée à ses deux extrémités en O ($x = 0$) et en A ($x = l$) ; son mouvement est donné par $y(x,t) = b\sin(\omega x / c).\sin(\omega t)$.

De quel type de solution s'agit-il ? Cette solution vérifie-t-elle les conditions aux limites ? Déterminer les pulsations propres ω_n possibles.

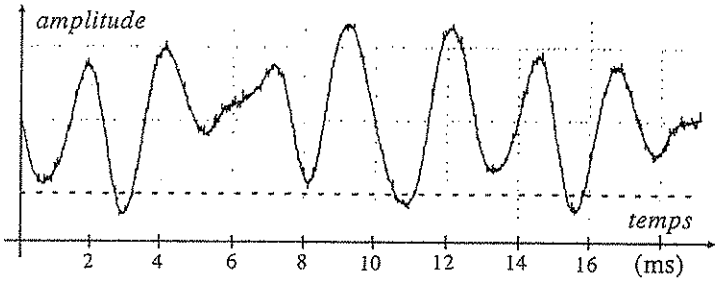
La corde est en acier de masse volumique $\rho = 7{,}87.10^3$ kg.m^{-3}, de diamètre $d = 0{,}30$ mm, de longueur $l = 64$ cm et tendue avec une tension $T = 100$ N.

Calculer la célérité c (la formule est donnée à la question **27.**), la fréquence f_1 du mode fondamental et la longueur d'onde λ_1 correspondante. Faire un schéma de ce mode d'oscillations et interpréter.

Pourquoi un violon joue-t-il plus aigu qu'une contrebasse ?

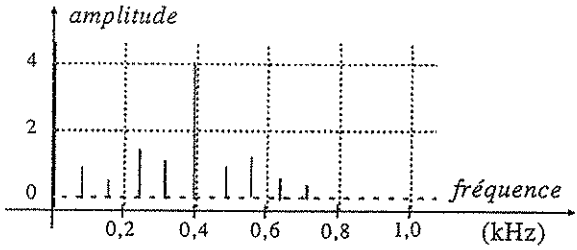
30. Dans l'enregistrement du son produit par une guitare au moyen d'un microphone et d'un amplificateur, c'est la tension produite par l'amplificateur qui est en fait enregistrée. Dans l'étude ci-dessous la corde de mi$_1$ (de fréquence 82,4 Hz) est frappée près du chevalet.

a) Le premier enregistrement concerne la courbe d'amplitude du signal en fonction du temps.



- le signal est-il sinusoïdal ?
- évaluer la fréquence correspondant à la plus grande amplitude

b) Le second enregistrement est une analyse spectrale du signal précédent.



- commenter ce document
- la guitare est-elle accordée ?

c) À quoi pourrait-on s'attendre pour un relevé obtenu après un coup frappé au niveau de la rosace ?

d) Comment s'y prend le guitariste pour jouer d'autres notes sur une corde donnée ?

Signal acoustique

31. Pourquoi une tranche de fluide compressible (comme l'air) est-elle équivalente à un système masse-ressort ? Qu'est-ce qui joue le rôle de force de rappel ? Quelle est l'origine des deux termes de l'énergie acoustique de la tranche ?

32. Une paroi placée en $x = 0$ (de type membrane de haut-parleur) vibre avec un déplacement $u(0,t) = A\cos\omega t$. Quel est à l'abscisse $x > 0$, le déplacement $u(x,t)$ de la tranche de fluide sachant que la célérité des ondes sonores produites est c ? Commenter l'expression obtenue puis réécrire $u(x,t)$ en faisant bien apparaître les deux périodes de l'onde.

33. Quelle est la vitesse du son dans l'air à 20° C ? (la donner d'abord en $m.s^{-1}$ puis en $km.h^{-1}$). Un jour d'orage un observateur entend le tonnerre 3 s après avoir vu l'éclair ; qu'en déduit-il ?

34. L'oreille humaine entend des sons depuis 20 Hz jusqu'à 20 kHz environ. Combien cela représente-t-il d'octaves ? Donner dans l'air les longueurs d'onde correspondantes ainsi que celle de la fréquence 1 000 Hz .

À quelles perceptions physiologiques correspondent la fréquence et l'amplitude d'un son ? Un violoncelle et une clarinette jouent la même note avec la même intensité ; quelles caractéristiques du son permettent de distinguer les deux instruments ?

35. Quelle est la célérité des ondes sonores dans l'eau ? Comparer la longueur d'onde du La musical dans l'air (toujours à 20 °C) et dans l'eau.

36. De quel type d'ondes est-il question lorsque l'on modélise un solide par une chaîne d'atomes reliés par des ressorts ? Quel est l'ordre de grandeur de la célérité de ces ondes ?

37. Battements

a) Deux sources vibratoires ont même amplitude et des fréquences f_1 et f_2 voisines. En un point M où la différence de phase est φ, on écrit :

$$u_1(t) = a\cos(2\pi f_1 t) \quad \text{et} \quad u_2(t) = a\cos(2\pi f_2 t + \varphi)$$

Quel est le mouvement résultant en M ? Tracer le graphe et donner la fréquence f_b des battements en fonction de f_1 et f_2 ; commentaire.

b) Dans un orchestre c'est le hautbois qui donne le La ; comment fait le premier violon pour accorder son instrument ?

38. Justifier par une application numérique pourquoi un professeur parlant devant sa classe peut être entendu par tous ses élèves, aussi bien ceux qui sont devant lui que ceux qui sont situés latéralement.

39. Estimer en degrés le demi-angle θ au sommet du cône de diffraction d'un sonar dont le disque de rayon $r = 5{,}0$ cm émet des ultrasons de fréquence $f = 40$ kHz dans l'eau ($c \approx 1\,400$ m.s^{-1}). Commentaire. Dans quel sens faudrait-il agir sur la fréquence pour augmenter la directivité de ce faisceau ?

■ Signal électromagnétique

40. À quelle vitesse se transmet un signal électrique (variation de courant ou de tension) le long d'une ligne électrique de type câble coaxial ?

* En déduire la longueur d'onde correspondant à la fréquence 50 Hz du secteur. La comparer à la taille d'un circuit électrique domestique ; que peut-on en déduire sur le courant à un instant donné sur un tel circuit ?
* L'information d'un signal télévisé est transmise avec une fréquence de 10 GHz (voir la question **61.**). En déduire la longueur d'onde correspondante et la comparer à la taille d'un câble utilisé : conclusion ?

41. Un four à micro-ondes fonctionne à la fréquence $f = 2{,}45$ GHz ; quelle est la longueur d'onde de ces ondes électromagnétiques ? La comparer à la taille du four ; est-il possible qu'il s'installe un système d'ondes stationnaires ?

42. Les ondes hertziennes se réfléchissent très bien sur les métaux. On souhaite confiner une onde hertzienne de fréquence $f = 320$ MHz et se propageant dans l'air entre deux plaques métalliques planes, parallèles, et formant une cavité résonante. À quelle distance minimale d à évaluer faut-il les placer ? Faire un schéma sachant que les conditions aux limites pour le champ $\vec{E}$ sur les conducteurs sont celles d'une corde fixée aux deux extrémités.
En fait, à cause de légères pertes énergétiques sur les plaques, l'onde stationnaire engendrée s'atténue notablement (après coupure du générateur) au bout de $N \approx 20\,000$ réflexions. Quel temps τ met le système à s'atténuer ? Commentaire.

43. En optique, la diffraction des objets de taille macroscopique (lentille, prisme,...) est-elle visible ? Quelle théorie s'applique alors parfaitement ?

44. Estimer en minutes d'arc la divergence d'un faisceau laser, d'environ 1 mm de diamètre, liée à la diffraction (l'angle d'ouverture que fait le faisceau par rapport à son axe) ; commentaires. Quelle est la taille de ce faisceau, de 1 mm de diamètre au départ de la Terre, lorsqu'il arrive sur la Lune distante de $3{,}8.10^5$ km ?

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

45. Dans un self-service les assiettes sont empilées les unes sur les autres sur un plateau horizontal (souvent dans un chariot mobile) ; au fur et à mesure que les personnes prennent des assiettes, le plateau s'élève, de telle sorte que la première assiette disponible (sur le dessus) reste toujours au même niveau ; expliquer.

46. Lorsque l'alimentation du moteur d'une machine-outil lancée à grande vitesse de rotation est coupée, on constate que pendant la phase de décélération le son émis est de moins en moins aigu ; expliquer.

47. Une corde est pincée en son centre, en $x = l/2$, puis lâchée. Que peut-on prévoir pour son spectre d'émission ?

48. Pourquoi les Indiens d'Amérique collaient-ils leur oreille sur les rails pour détecter l'arrivée d'un train ?

49. Sur un disque compact, le signal sonore (à l'origine analogique) est stocké de manière numérique (« digital » en anglais) avec des états que l'on peut désigner par « 0 » ou « 1 » comme en informatique. À quelle fréquence est échantillonné un disque compact pour couvrir l'ensemble du spectre sonore humain ?

50. Préciser le domaine des ultrasons, en fréquence et en longueur d'onde dans l'air. Citer des espèces animales capables de détecter et / ou d'émettre des ultrasons.

Même question pour les infrasons.

51. Quel est le principe des lunettes à vision nocturne ?

52. Quel temps s'écoule-t-il entre le moment où se produit une éruption solaire et le moment où elle est observable sur la Terre ?

53. La longueur d'onde de la diode laser utilisée dans un lecteur de CD ou dans une imprimante laser se situe dans la fourchette de 770 à 810 nm ; à quel « couleur » cela correspond-il ?
Quel est l'avantage des diodes bleues utilisées dans les blu ray sur les diodes rouges pour la lecture d'informations contenues sur des DVD ?

54. Citer des cas d'observation courante de la diffraction par la lumière. Et pour d'autres types d'ondes ?

55. Lorsqu'une porte est entrebâillée, le bruit extérieur s'entend presque autant que si la porte était ouverte. Pourquoi ? Au fur et à mesure que la porte se ferme, le son devient plus aigu, pourquoi ?

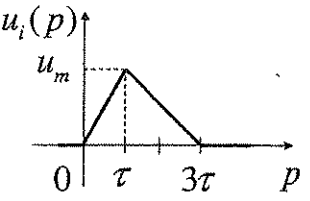
56. Au Futuroscope, à la géode de la Cité des Sciences, à Disneyland ou à la Cité de l'Espace, ou plus récemment dans des salles de cinéma équipées, on peut voir des films en trois dimensions grâce à des lunettes spéciales remises à l'entrée de la salle. Sur quels principes d'enregistrement et de restitution fonctionne ce cinéma 3D ?

57. Quelles sont les ressemblances et différences entre ondes mécaniques (ou élastiques) et ondes électromagnétiques ?

Exercices

58. Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique (*)
Pour l'oscillateur harmonique, établir à partir de l'équation différentielle du mouvement la conservation de son énergie mécanique E_m au cours du temps.

59. Signal réfléchi sur une corde attachée
Un signal dont la forme est indiquée sur le graphe ci-contre se propage sur une corde vibrante. La courbe représente l'élongation $u_i(p)$ de la corde avec $p = t - z/c$.



a) Décrire la nature de cette onde.
b) La corde se trouve dans le demi-espace $z < 0$ et est attachée en $z = 0$. Montrer que cette condition aux limites conduit à une onde réfléchie u_r en opposition de phase sur l'onde incidente u_i.

c) Représenter sur un graphique l'état de la corde réfléchie $u_r(z,t_0)$, en fonction de z à l'instant $t_0 = 4\tau$.

60. Ondes stationnaires sur une corde excitée (*)

Une corde de longueur finie (points d'abscisse $x < l$) est attachée en $x = l$. L'onde aller (ou incidente) est choisie sous la forme : $y_a(x,t) = A\sin(\omega(t - x/c) + \varphi_a)$.

a) Pourquoi doit-on prendre, *a priori*, l'onde retour (ou réfléchie) sous la forme $y_r(x,t) = B\sin(\omega(t + x/c) + \varphi_r)$?

b) Traduire la condition aux limites en $x = l$, en donnant, avec commentaire, la nouvelle expression du déplacement total $y(x,t)$ de la corde sous forme factorisée. On donne $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$.

c) Préciser la position des nœuds et commenter.

d) En réalité l'excitation provient d'un vibreur placé à l'origine et qui impose $y(0,t) = a\cos\omega t$; en déduire l'amplitude $A(x)$ de l'onde résultante. Commentaire sur l'amplitude des ventres.

61. Câble pour signal de télévision

Un signal de télévision est destiné à reconstituer, 50 fois par seconde, une image constituée de 625 lignes de 830 points, pour lesquels trois informations sont à transporter pour les trois couleurs primaires.

a) Quelle doit être la fréquence minimale f de cette information dont le signal est noté $s(t) = \alpha\cos 2\pi ft$?

b) Ce signal sert à moduler légèrement la fréquence F_0 (beaucoup plus élevée, avec $F_0/f > 10^2$) d'une onde électromagnétique dite « porteuse », de tension $u(t) = U_0\cos(2\pi F(t)t)$ et dont la fréquence varie au cours du temps autour de la valeur moyenne $F(t) = F_0(1 + \alpha\cos 2\pi ft)$. Quelle valeur minimale faut-il donner à F_0 ?

c) Quelle est la longueur d'onde correspondant à la fréquence F_0, à comparer à la longueur d'un câble qui relie la parabole réceptrice du faisceau hertzien au téléviseur ? Comparer avec les fréquences électrocinétiques de l'ordre de 1 kHz et conclure.

62. Note fondamentale d'un instrument à vent

Un tuyau sonore peut être le siège d'ondes acoustiques stationnaires qui vont dépendre des conditions aux limites imposées à ses deux extrémités.

La figure ci-contre représente un tuyau cylindrique dont l'extrémité gauche est fermée et l'extrémité droite ouverte sur l'air.

a) Justifier qualitativement que la pression acoustique (l'écart de la pression par rapport à la pression statique) présente un ventre de vibration du côté fermé et un nœud de vibration du côté ouvert.

Un instrument à vent peut être considéré comme un tuyau sonore de longueur L. Il se comporte donc pour certaines fréquences comme un résonateur siège d'un système d'ondes stationnaires de longueur d'onde λ. Ces fréquences sont les modes propres de l'instrument et correspondent aux notes qu'il est capable de générer.

b) La flûte traversière est un instrument considéré comme ouvert à ses deux extrémités. Faire un dessin de l'onde stationnaire dans le tuyau sonore correspondant à la note fondamentale, la note la plus basse générée par l'instrument.

AN : Déterminer la longueur de l'instrument pour que son fondamental soit la note Mi de fréquence $f_1^{fl} = 330$ Hz ; prendre pour la vitesse du son dans l'air $c = 340$ m.s^{-1}.

Exprimer f_1^{fl} en fonction de c et L.

c) L'anche d'une clarinette est assimilée à une extrémité fermée. Refaire un dessin de l'onde stationnaire dans le tuyau sonore correspondant à la note fondamentale, c'est-à-dire de plus grande longueur d'onde.

La clarinette a une longueur L sensiblement identique à celle de la flûte traversière. En déduire la fréquence f_1^{cl} du fondamental de la clarinette ; quel est le plus grave des deux instruments ?

Dans « Pierre et le loup », lequel des instruments Prokofiev a-t-il choisi pour représenter l'oiseau ? le chat ?

d) Montrer que les notes harmoniques sont régulièrement espacées en fréquence et que l'écart Δf entre deux harmoniques successifs est le même pour la flûte traversière et la clarinette ; quel est cet écart ?

63. Cavité sonore pour diapason

Un diapason résonne autour de la fréquence $f_0 = 440$ Hz (le la_3 musical) en émettant un signal assez faible (il sonne peu, on l'approche de l'oreille, mais longtemps). Pour le faire « mieux sonner », on a l'habitude de le fixer sur une cavité de type tuyau sonore (ouvert d'un côté, fermé de l'autre) comme vu à la question précédente ; expliquer pourquoi. Quelle est la taille l_{min} de la plus petite cavité utilisable ?

64. Diffractions comparées par des ouvertures de tailles différentes

Inscrire une ouverture circulaire de diamètre d entre deux ouvertures carrées, l'une extérieure juste plus grande, l'autre intérieure juste plus petite, et comparer la largeur des taches de diffraction pour les trois ouvertures.

65. Diffraction d'un laser par une fente, par un cheveu

Dans l'expérience simple (sans lentilles), un laser He-Ne ($\lambda = 632{,}8$ nm) est envoyé sur une fente fine de largeur a.

a) Pour quelle valeur de a, la tache centrale de diffraction sur un écran placé à $D = 1{,}50$ m de la fente vaut-elle $100\,a$, critère pour une diffraction importante et bien visible ? Comparer alors a à λ.

b) Expliquer qualitativement pourquoi un cheveu et une fente donnent la même figure de diffraction.

Un cheveu placé dans le même faisceau donne, toujours à $D = 1{,}50$ m, une tache centrale de largeur $\Delta x = 3{,}8$ cm ; que peut-on en déduire ?

Travaux pratiques

66. Une corde de Melde horizontale, de masse linéique μ et de longueur l imposée, est tendue par une masse m accrochée à son extrémité au-delà d'une poulie placée en $x = l$; à l'autre extrémité, $x = 0$, elle est excitée par le vibreur d'un électro-aimant de fréquence f fixée. La célérité est donnée par l'expression $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

a) Pourquoi pour une masse m quelconque, la corde vibre-t-elle de manière désordonnée et avec une faible amplitude ? Déterminer la masse m_n qui permet d'obtenir le mode n stable et de grande amplitude.

b) Quel graphe convient-il de tracer pour vérifier cette loi ? Quelle masse faut-il accrocher pour obtenir le mode $n = 3$ lorsque $f = 100$ Hz, $l = 80$ cm pour une corde dont le constructeur indique qu'elle fait 20 g pour 200 m ?

67. Comment avec un haut-parleur et un microphone peut-on simplement mesurer la vitesse des ondes sonores ? Quel domaine de fréquence est-il conseillé d'utiliser ?

68. Un tube de Kundt, avec un haut-parleur dont la fréquence d'émission est de $f = 2{,}0.10^3$ Hz et un petit microphone fixé à l'extrémité d'une tige mobile, permet d'étudier un système d'ondes stationnaires. Le microphone délivre une tension proportionnelle à la surpression, cette tension est envoyée sur un oscilloscope. Le déplacement mesuré du microphone entre 7 nœuds consécutifs est de 51,5 cm dans l'air à 20 °C. Quelle est la célérité du son ? Évaluer l'incertitude de mesure sachant que la fréquence indiquée par le fréquencemètre est 1998,2 Hz et que sa précision est, dans la gamme de mesure 0,1% + 3 digit.

69. Un vibreur de fréquence 60 Hz émet des ondes circulaires à la surface de l'eau d'une cuve à ondes. On provoque l'immobilisation apparente du phénomène avec un stroboscope.

a) Quelle est la fréquence des éclairs ?

b) On profite de l'immobilisation apparente pour faire une mesure approchée de la distance qui sépare la 2e crête de la 12e et on trouve approximativement 5 cm. Quelles grandeurs peut-on en déduire ?

70. Qu'observe-t-on lorsqu'on fait tourner un polariseur entre une source de lumière blanche (type lampe quartz-iode) et un écran ?

71. Quelle expérience simple peut-on mettre en avant pour prouver le caractère vectoriel de la lumière ?

72. On interpose un polariseur entre une source émettant une lumière dont on ignore l'état de polarisation et un écran. Par rotation de ce polariseur (et qui sert donc d'analyseur), on observe sur l'écran un minimum d'éclairement ; que peut-on en déduire ? Préciser la réponse.

73. Un émetteur à cornet (avec diode Gun) relié à une alimentation émet des ondes électromagnétiques de fréquences 10 GHz. Cette fréquence est-elle élevée ou faible ? À quelle longueur d'onde dans le vide correspond-elle ? Un autre cornet récepteur placé dans l'axe du précédent recueille l'onde. Comment faut-il procéder pour qu'un multimètre (utilisé en TP) et branché sur le cornet récepteur indique un signal ?

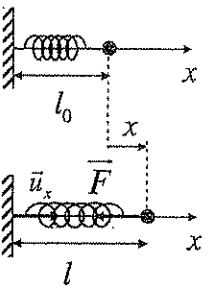
74. On dispose les deux cornets précédents de telle manière que leurs axes soient perpendiculaires et donc le signal s'annule ; comment le récupérer sans modifier la géométrie du système ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

L'oscillateur harmonique

1. L'allongement du ressort, soit l'écart entre sa longueur et sa longueur au repos, est la différence $l - l_0$; la force de rappel qu'exerce le ressort sur le mobile est proportionnelle à l'allongement, k est la constante de raideur ($k > 0$) :



$$\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x}$$

En effet lorsque le ressort est effectivement étiré, $l - l_0 > 0$, la force a tendance à ramener la masse vers la position d'équilibre, d'où le signe $-$. Lorsque le ressort est comprimé, $l - l_0 < 0$, la force à tendance à repousser le mobile ; toujours avec le signe $-$, la projection de la force est cette fois bien positive. L'expression est donc valable dans tous les cas.

En notant $x = l - l_0$ l'allongement relatif (c'est une grandeur algébrique), alors :

$$\boxed{\vec{F} = -kx\vec{u}_x}$$

2. Un système ponctuel est à l'équilibre dans un référentiel donné lorsqu'il y est au repos : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{cste}$ et $\vec{v} = \vec{0}$, O étant un point fixe du référentiel. De son accélération nulle, $\vec{a}(M)_{(R)} = \vec{0}$, on déduit alors par la relation fondamentale de la dynamique, et pour (R) galiléen, la condition nécessaire d'équilibre :

$$\boxed{\sum \vec{f} = \vec{0}}$$

la somme des forces s'appliquant sur lui est nulle.

Rq : Cette condition n'est pas suffisante, car un point matériel soumis à une résultante nulle peut aussi avoir un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel considéré.

Si, légèrement écarté de cette position et lâché avec une vitesse initiale nulle, il y revient spontanément, alors la position d'équilibre est dite stable (une bille au fond d'une cuvette). Si, légèrement écarté de cette position et lâché avec une vitesse initiale nulle, il s'en éloigne davantage, alors la position d'équilibre est dite instable (une bille au sommet d'une bosse).

Dans le cas du ressort, avec les résultats et notations de la question précédente, $x = 0$ est position d'équilibre stable.

3. Les forces s'exerçant sur m sont le poids (vertical), la réaction de la tige sans composante sur Ox (en l'absence de frottements) et la force de rappel du ressort. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m dans le référentiel terrestre (R) supposé galiléen est :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = -kx\vec{u}_x + m\vec{g} + \vec{R}$$

Seule $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$ a une composante suivant $\vec{u}_x$, d'où la projection suivant Ox :

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, il vient l'équation :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

4. À partir de $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$ il suffit de calculer $\dot{x}(t) = -a\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ puis $\ddot{x}(t) = -a\,\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$; en remplaçant dans l'équation différentielle :

$$a\left(-\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right)\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

cette relation doit être vérifié pour tout t, il faut donc $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

L'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est l'équation d'un oscillateur harmonique, elle admet une solution sinusoïdale :

$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)} \quad \text{où} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur ; elle est liée à la fréquence f_0 et à la période T_0 du mouvement par la relation

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$$

a est l'amplitude, $\omega_0 t + \varphi$ est la phase et φ la phase à l'origine (souvent appelée phase tout court).

5. L'énergie mécanique de l'oscillateur est la somme de :

– l'énergie cinétique : $E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

– l'énergie potentielle élastique : $E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

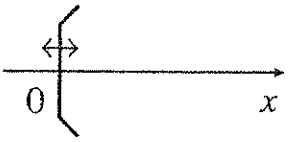
car $k = m\omega_0^2$

d'où le résultat important : $\boxed{E_m = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 = \frac{1}{2}ka^2}$

L'énergie mécanique est bien constante au cours du temps (c'est une constante du mouvement), l'énergie passant de la forme potentielle (masse d'élongation maximale et de vitesse nulle) à la forme cinétique (au passage par la position d'équilibre) et inversement ; elle est proportionnelle au carré de l'amplitude a.

Propagation d'un signal

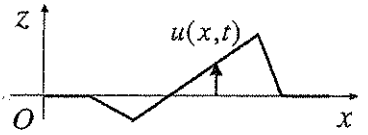
6. La membrane du haut-parleur possède un mouvement vibratoire autour de la position d'équilibre $x = 0$.



Lorsqu'elle se déplace vers les x croissants, elle comprime la tanche d'air placée à sa droite ; celle-ci ne pouvant rester dans cet état de surpression se détend en comprimant la tranche voisine sur sa droite et ainsi de suite : la surpression se répand le long de l'axe Ox comme sur un long ressort à spires non jointives auquel on aurait donné une impulsion vers la droite.
Lorsqu'ensuite la membrane se déplace vers les x décroissants, elle détend la tranche d'air placée à sa droite ; celle-ci ne pouvant rester dans cet état de dépression se comprime en détendant la tranche voisine sur sa droite et ainsi de suite : la dépression se répand le long de l'axe Ox comme sur un long ressort à spires non jointives auquel on aurait donné une impulsion vers la gauche.
La perturbation sonore engendrée dans l'air de proche en proche (et qui va elle-même provoquer l'oscillation du tympan dans l'oreille d'où la sensation sonore) est représentée par la surpression (l'écart entre la pression et la pression statique de l'air) : c'est une grandeur algébrique, positive en cas effectivement de surpression, et négative en cas de dépression.

7. Si le mouvement de la membrane du haut-parleur est harmonique du type $x(t) = a\cos(\omega t)$, alors l'air mis en mouvement par la membrane relaie la perturbation sonore à la même pulsation ; la fréquence $f = \omega / 2\pi$ du signal sonore est la fréquence à laquelle vibre la tranche d'air (le nombre d'allers-retours par seconde), et corrélativement le tympan. Ce dernier par la structure de l'oreille transmet au cerveau une sensation de hauteur du son : une fréquence faible correspond à un son grave et une fréquence élevée à un son aigu. L'oreille humaine entend les sons *grosso modo* de 20 Hz à 20 kHz (ce facteur 10^3 est très important comparé au facteur 2 des fréquences lumineuses perçues par l'œil humain). La fréquence du La musical est 440 Hz. La gamme de fréquence de la parole se situe entre 150 Hz et 3 kHz.

8. Une corde vibrante tendue et excitée par un opérateur en $x = 0$ suivant un mouvement de forme quelconque selon l'axe Oz voit un signal se transmettre le long de l'axe Ox. À l'équilibre la position de la corde s'identifie avec l'axe Ox, la grandeur physique qui



traduit ici la perturbation est l'élongation, c'est-à-dire l'écart que présente la corde par rapport à l'axe Ox ; cette élongation $u(x,t)$ est algébrique, et dépend de deux variables :

- x parce que à $t = t_0$ fixé (une photographie), $u(x,t_0)$ représente la forme de la corde à cet instant
- t parce que à $x = x_0$ fixé (un point de la corde), $u(x_0,t)$ représente l'évolution d'un point choisi de la corde au cours du temps

Les signaux mécaniques ont en commun, pour se propager, de nécessiter la présence d'un milieu matériel (fluide d'un côté, corde de l'autre), sans qu'aucun mouvement global de matière ne soit observé.

Ils se distinguent par le fait qu'un signal sonore est une vibration longitudinale (le tranches d'air vibrent dans la même direction que l'axe Ox de propagation) alors que sur une corde vibrante l'élongation est transversale (un point de la corde vibre perpendiculairement à la direction de l'axe Ox de propagation).

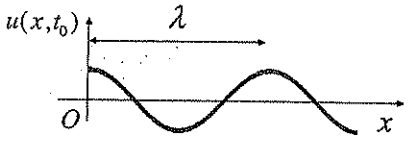
9. Remarquons d'abord que $u(x,t) = f(t - x/c) = f((t - x/c) - 0/c) = u(0, t - x/c)$; cette écriture signifie que le signal en x à l'instant t est le même que celui qu'il y avait en $x = 0$ à l'instant antérieur $t - x/c$ (pour $x > 0$ ici) ; il s'est donc propagé, sans se déformer, dans le sens des x croissants, d'où la notion d'onde progressive.

Et comme x/c est homogène à un temps, on en déduit que c est une vitesse appelée la célérité de l'onde ; c'est à cette vitesse que se propage le signal suivant l'axe Ox.

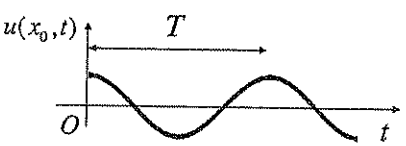
Pour $u(x,t) = g(t + x/c)$ on a affaire à une onde progressive se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants.

10. À cause de la propagation, le signal en x à l'instant t est celui qu'il y avait en $x = 0$ à l'instant antérieur $t - x/c$, d'où $u(x,t) = u(0, t - x/c) = u_0 \cos(\omega(t - x/c))$.

Pour bien se « représenter » cette fonction de deux variables, il faut dessiner deux courbes, chacune fonction d'une seule variable, l'autre étant fixée :



à t_0 fixé



pour x_0 fixé

- la courbe de gauche est $u(x,t_0)$; il s'agit de l'élongation en fonction de x à $t = t_0$ fixé ; elle représente la forme de la corde à cet instant comme si on en avait pris une photographie.
- la courbe de droite est $u(x_0,t)$; il s'agit de l'élongation en fonction de t à $x = x_0$ fixé ; elle représente l'évolution au cours du temps d'un point choisi de la corde et que l'on suit.

11. La question précédente montre que la fonction $u(x,t) = u_0 \cos(\omega(t - x/c))$ est doublement périodique :

– à x_0 fixé, $u(x_0,t)$ est une fonction périodique de t et si on note T la période temporelle, alors on a (à noter que lorsque t augmente, la phase augmente) :

$$\omega((t+T) - x_0/c) = \omega(t - x_0/c) + 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

Cette relation classique est celle vue pour les oscillateurs : T est appelée la période (sans précision) et f est la fréquence.

– à t_0 fixé, $u(x,t_0)$ est une fonction périodique de x et si on note λ la période spatiale, alors on a (à noter que lorsque x augmente, la phase diminue) :

$$\omega(t_0 - (x+\lambda)/c) = \omega(t_0 - x/c) - 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}}$$

λ est appelée la longueur d'onde.

Les deux expressions de ω conduisent à la relation très importante entre période et longueur d'onde :

$$\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{f}}$$

Elle indique que « la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période ».

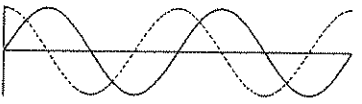
Pour mieux faire apparaître la double périodicité, on écrit l'onde sous la forme :

$$\boxed{u(x,t) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$$

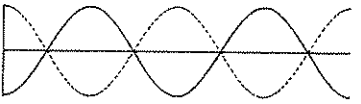
12. $u(x,t) = u_0 \cos(\omega(t - x/c))$ est du type $u_0 \cos(\omega t + \varphi)$, avec φ l'avance de phase (algébrique) de $u(x,t)$ sur $u(0,t)$. Ici $\varphi = -\dfrac{\omega x}{c}$, donc pour $x > 0$, $\varphi < 0$ et $u(x,t)$ est en retard sur $u(0,t)$. Le retard de phase est $-\varphi = \dfrac{\omega x}{c} = 2\pi \dfrac{x}{\lambda}$.

On trace $u(x,t)$ en trait plein et $u(0,t)$ en pointillé.

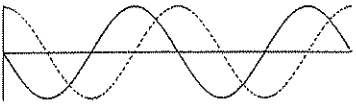
- $x = \dfrac{\lambda}{4}$: $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$ est en retard de $\dfrac{\pi}{2}$ sur $u(0,t)$, ils sont en quadrature de phase.



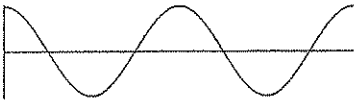
- $x = \dfrac{\lambda}{2}$: $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - \pi)$ est en retard de π sur $u(0,t)$, ils sont en opposition de phase.



• $x = \dfrac{3\lambda}{4}$: $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - \dfrac{3\pi}{2})$ est en retard de $3\pi/2$ sur $u(0,t)$. Ce qui correspond à une avance de $\pi/2$.



• $x = \lambda$: $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - 2\pi) = u_0 \cos \omega t$ est en phase avec $u(0,t)$.



Interférences entre deux ondes mécaniques

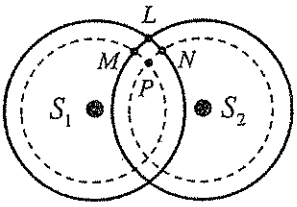
13. Chaque signal issu de S_1 ou S_2 et arrivant en M apporte en ce point sa propre contribution à la déformation de la surface de l'eau ; les déformations produites, si elles sont de faible amplitude, ajoutent leurs effets :

$$u(M,t) = u_1(M,t) + u_2(M,t)$$

C'est le principe de superposition des petits mouvements, valable également pour les autres types d'ondes.

Pendant que ces signaux de même nature se chevauchent on dit qu'ils interfèrent à condition d'être synchrones (de même fréquence), et que leur déphasage reste constant au cours du temps : on dit alors que les sources sont cohérentes.

Dans l'exemple de la cuve à ondes chaque source S_1 et S_2 émet des signaux circulaires qui interfèrent ; sur la figure ci-contre (volontairement réduite), les crêtes sont représentées en trait plein et les creux en pointillé :



- en L, les 2 ondes sont en phase $u_1 = u_2$ et présentent chacune une crête, les ondes ajoutent leurs effets, $u = 2u_1$ et le point L vibre avec une amplitude maximale
- en P, les 2 ondes sont également en phase mais présentent chacune un creux, et le point P vibre également avec une amplitude maximale, mais en opposition de phase avec le point L
- en M ou N, en revanche les 2 ondes sont en opposition de phase $u_1 = -u_2$ (si l'une présente un creux, l'autre présente une crête), et comme les ondes ajoutent leurs effets, $u = u_1 + u_2 = 0$, les ondes annulent leurs effets et les points M et N sont au repos. Dans ce cas on a : mouvement + mouvement = immobilité !

L'ensemble des points ayant même amplitude résultante constituent des franges d'interférence.

14. S'agissant d'ondes progressives, le signal arrivant en M à l'instant t est celui émis en S_1 à l'instant antérieur $t - S_1M/c$ où c est la célérité des ondes sur l'eau d'où :

$u_1(M,t) = a\cos(\omega t - \omega S_1M/c)$ et de même $u_2(M,t) = a\cos(\omega t - \omega S_2M/c)$

que l'on peut écrire :

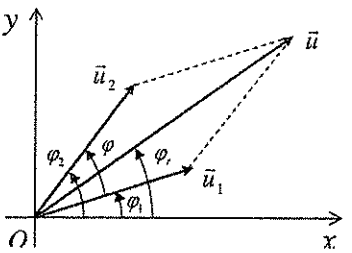
$$u_1(M,t) = a\cos(\omega t - \varphi_1(M)) \quad \text{et} \quad u_2(M,t) = a\cos(\omega t - \varphi_2(M))$$

Les phases $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ dépendent du point M concerné, et sauf à choisir M sur la médiatrice de S_1S_2, on a $S_1M \neq S_2M$, d'où $\varphi_1(M) \neq \varphi_2(M)$: les deux ondes arrivant en M sont déphasées (alors qu'elles étaient émises en phase en S_1 et S_2) parce qu'elles n'ont pas parcouru la même distance.
Le déphasage est :

$$\boxed{\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M - S_1M)} \quad \text{puisque} \quad \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On l'écrit souvent $\varphi(M) = \dfrac{2\pi}{\lambda}\delta(M)$ où $\delta(M) = S_2M - S_1M$ est appelée la différence de marche.

La figure ci-contre comporte la représentation de Fresnel. Chaque signal est représenté par un vecteur dont la norme est proportionnelle à l'amplitude du signal et dont l'angle avec l'axe Ox (origine des phases) représente la phase du signal ; on voit bien que $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Le signal résultant $u(M,t) = u_1(M,t) + u_2(M,t)$ est alors obtenu par la « règle du parallélogramme » pour $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$:



– la norme est $\|\vec{u}\| = 2\|\vec{u}_2\|\cos\dfrac{\varphi}{2} = 2a\cos\dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ (le double de la projection de $\vec{u}_2$ sur $\vec{u}$)

– la phase résultante est $\varphi_r = \varphi_1 + \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$

d'où le signal résultant : $u = \|\vec{u}\|\cos(\omega t - \varphi_r)$

soit $$\boxed{u(M,t) = 2a\cos\left(\frac{\varphi_2(M) - \varphi_1(M)}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\varphi_1(M) + \varphi_2(M)}{2}\right)}$$

résultat que l'on peut obtenir par le calcul à l'aide de la formule d'addition des cosinus : $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.

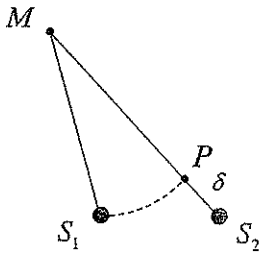
15. Le premier facteur en $2a\cos(\varphi(M)/2)$ représente, en valeur absolue, l'amplitude du signal résultant ; il dépend du point M par le déphasage donné à la question précédente.

* Les interférences sont constructives lorsque l'amplitude est maximale (ici $2a$) :

$$\frac{\varphi(M)}{2} = p\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_2M - S_1M = p\lambda}$$

où p est un entier relatif.

Ce résultat s'interprète aisément à l'aide de la figure ci-contre : un arc de cercle de centre M et de rayon S_1M coupe S_2M en P tel que $S_2M - S_1M = S_2P = \delta$, la différence de marche.



Les sources S_1 et S_2 vibrent en phase ; si les vibrations en P, issues de S_2, sont en phase avec les vibrations en S_1, celles-ci arriveront en phase en M et ajouteront leurs effets. M sera situé sur une frange d'amplitude maximale, puisque les distances S_1M et PM sont égales. Pour cela il suffit que $\delta = S_2P$ soit égale à un multiple entier de longueurs d'onde, soit $S_2M - S_1M = p\lambda$, $p \in \mathbb{Z}$.

* Les interférences sont destructives lorsque l'amplitude est minimale (ici 0) :

$$\frac{\varphi(M)}{2} = \frac{\pi}{2} + p'\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_2M - S_1M = (2p'+1)\frac{\lambda}{2}}$$

où p' est un entier relatif.

Sur la figure, si en P les vibrations issues de S_2 sont en opposition de phase avec les vibrations en S_1, alors ces vibrations arriveront en opposition de phase en M et s'annuleront en ce point (alors situé sur une frange d'amplitude nulle). Pour cela il suffit que $\delta = S_2P$ soit égale à un multiple entier impair de demi-longueurs d'onde, soit $S_2M - S_1M = (2p'+1)\frac{\lambda}{2}$, $p' \in \mathbb{Z}$.

Ondes stationnaires

16. Ces ondes interfèrent et le principe de superposition donne l'amplitude résultante en un point d'abscisse x à l'instant t :

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = a\cos(\omega(t - x/c)) + a\cos(\omega(t + x/c))$$

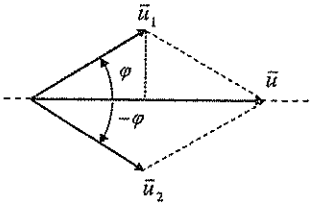
* Il est possible d'utiliser la représentation de Fresnel avec $\varphi = \omega x / c = 2\pi x / \lambda$:

– la norme est $\|\vec{u}\| = 2\|\vec{u}_1\|\cos\varphi$ (le double de la projection de $\vec{u}_1$ sur $\vec{u}$)

– la phase résultante est nulle

d'où le signal résultant : $u = \|\vec{u}\|\cos(\omega t - 0)$

soit $\boxed{u(x,t) = 2a\cos(2\pi x/\lambda)\cos(\omega t)}$



* résultat que l'on peut obtenir facilement à l'aide de la formule d'addition des cosinus :

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$.

Cette onde n'est pas une onde progressive ; on peut écrire $u(x,t) = A(x)\cos(\omega t)$, produit de deux fonction trigonométriques, l'une de l'espace, l'autre du temps.

– le facteur de phase $\cos(\omega t)$ est indépendant de x et ne dépend que de t ; il n'y a plus de propagation de la phase, l'onde fait du « sur place » ; on dit que la phase de l'onde est stationnaire, et par extension que l'onde est stationnaire.
– l'amplitude $A(x) = 2a\cos(2\pi x / \lambda)$ de l'onde résultante dépend de x :

• il existe des points qui, au cours du temps, vibrent avec une amplitude maximale : ce sont <u>les ventres</u>

$$\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi x_p}{\lambda} = p\pi \quad \Rightarrow \quad x_p = p\frac{\lambda}{2} \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{Z}$$

En effet c'est en ces valeurs particulières x_p (de la variable continue x) que l'on observe la position des ventres ; on note que la distance entre deux ventres consécutifs est $x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda}{2}$

• il existe des points d'amplitude nulle et donc $u = 0\ \forall t$: ce sont <u>les nœuds</u>

$$\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi x_{p'}}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + p'\pi \quad \Rightarrow \quad x_{p'} = \left(p' + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad \text{où} \quad p' \in \mathbb{Z}$$

Là aussi la distance entre deux nœuds consécutifs est $x_{p'+1} - x_{p'} = \frac{\lambda}{2}$

Conclusion : la distance entre un nœud et un ventre consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.

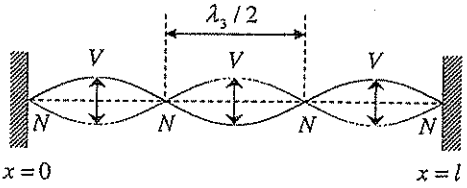
17. La corde constitue un milieu de propagation fermé ; l'onde progressive incidente issue du vibreur se réfléchit sur la poulie, et l'onde réfléchie se superpose à l'onde incidente comme dans la question précédente. Mais à son tour l'onde retour se réfléchit sur le vibreur et ainsi de suite..., il y a des réflexions multiples.
Pour une longueur l et une masse m accrochée fixées, en général on n'observe rien lorsque la fréquence d'excitation f du vibreur est quelconque !
Mais pour une série de valeurs croissantes particulières f_n de cette fréquence (le vibreur est relié à un générateur de fréquence variable), la corde vibre de manière importante en formant d'abord un puis plusieurs fuseaux. La corde joue le rôle d'un résonateur et est alors le siège d'ondes stationnaires (dites résonantes). Lorsque la corde comporte n fuseaux, on dit qu'elle vibre dans un mode propre d'ordre n.
À l'extrémité $x = l$, la corde est immobile, il s'agit d'un nœud de vibration. Et à cause des réflexions multiples l'amplitude des ventres est bien plus importante que celle du vibreur, si bien qu'à l'extrémité $x = 0$, la corde peut être considérée comme immobile, il s'agit donc également d'un nœud de vibration. La distance entre deux nœuds voisins étant $\lambda / 2$ et la corde comportant un nombre entier n de fuseaux, on en déduit :

$$\boxed{l = n\frac{\lambda_n}{2}}$$

où λ_n est la longueur d'onde du mode n.

Les fréquences des modes propres sont alors données par : $\boxed{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2l}}$

Ci-dessous la corde dans le mode $n=3$ (N indique les positions des nœuds et V celles des ventres).

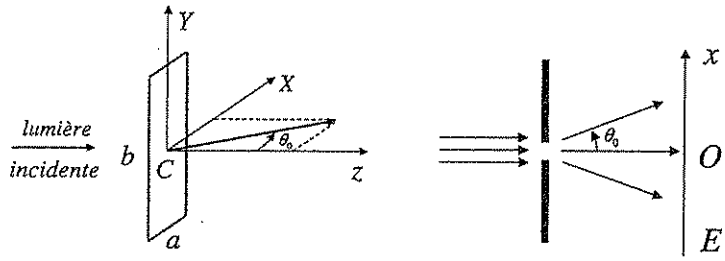


18. De manière générale, une corde fixée aux deux bouts et excitée de manière quelconque ne vibre pas suivant un seul mode propre ; cela dépend de l'endroit où elle est excitée, de la déformation et de la vitesse initiales,... Mais la vibration périodique de la corde peut se décomposer en la superposition d'une multitude de modes propres : on parle du spectre de vibration avec le mode fondamental ($n=1$) et les harmoniques ($n\geq 2$) et on peut alors écrire $f_n = n f_1$. Ces vibrations de la corde sont transmises à l'air, le spectre sonore émis par la corde est donc identique au spectre de vibration de la corde.

Diffraction à l'infini

19. En optique (mais cela est pareil dans les autres domaines de la physique), il y a diffraction chaque fois que la répartition de la lumière derrière une ouverture dans un cache n'est pas celle prévue par la propagation rectiligne de l'optique géométrique. Cela montre qu'il faut systématiquement associer les phénomènes de diffraction à des effets de bords.

L'expérience décrite se limite aux rayons diffractés au voisinage de l'axe optique et concerne une observation à l'infini ou dans le plan focal image d'une lentille de projection (dans la pratique une distance de quelques dizaines de cm suffit).



La hauteur de la fente $b\approx 2$ cm est trop grande vis-à-vis de la longueur d'onde : il n'y a pas de diffraction dans la direction CY. En revanche, la largeur $a\approx 0{,}1$ mm est étroite (bien que grande aussi vis-à-vis de $\lambda\approx 0{,}5$ µm), et la lumière se répartit dans le plan CzX. Le schéma de droite est une vue de dessus, il montre que la lumière s'ouvre dans un cône dont le demi-angle au sommet θ_0, et qui est donné par la formule :

$$\boxed{\sin\theta_0 \approx \theta_0 = \frac{\lambda}{a}}$$

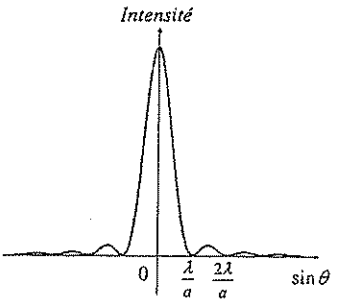
Sur l'écran E on observe une tache qui s'étale suivant Ox perpendiculairement à la direction CY de la fente. Le maximum d'intensité est obtenu en O, c'est-à-dire dans la direction de l'optique géométrique.
Cette formule montre que la diffraction est d'autant plus importante (θ_0 élevé) que la fente est fine (largeur a petite, tout en restant très supérieure à λ).

Si l'écran est placé à une distance $D = 1$ m du plan de la fente, alors la largeur de la tache sur l'écran est, sachant que $\sin\theta_0 \approx \tan\theta_0 = x_0 / D$:

$$2x_0 \approx 2D\theta_0 = 2D\frac{\lambda}{a} = 1 \text{ cm} \quad \text{soit} \quad 100 \text{ fois}$$

supérieure à la largeur de la fente !

En réalité, à côté de cette tache centrale existent des taches latérales, deux fois moins larges et très peu lumineuses comme l'indique le graphe d'intensité ci-contre.

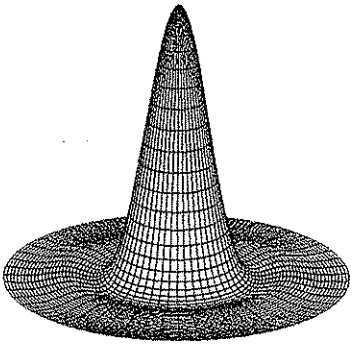


20. Pour une ouverture circulaire, vu la symétrie de révolution autour de Cz, on observe au centre O de l'écran (la direction de l'optique géométrique) une tache brillante appelée tache d'Airy (entourée d'anneaux alternativement sombres et brillants mais très peu lumineux).
L'allure de la répartition de l'intensité lumineuse est celle de la figure ci-contre ; la direction θ_0 correspondant au bord de la tache centrale est donnée par :

$$\boxed{\theta_0 \approx 1{,}22\frac{\lambda}{d}}$$

où d est le diamètre de l'ouverture.

Ce type d'ouverture correspond à des cas pratiques importants :
diaphragmes, lentilles, télescope,...

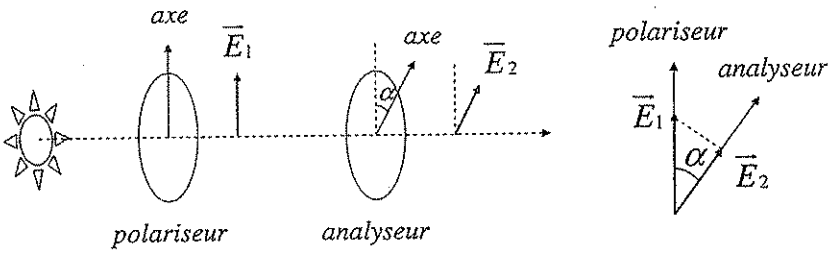


■ Polarisation rectiligne de la lumière

21. La lumière est une onde électromagnétique caractérisée par un champ électrique et un champ magnétique qui sont des grandeurs vectorielles et non des grandeurs scalaires comme dans les exemples précédents. Ces champs sont orthogonaux à la direction de propagation, ce qui fait des ondes électromagnétiques des ondes transversales. Elles n'ont pas besoin de support matériel pour se propager.
Dans une lumière naturelle (celle du Soleil ou des ampoules d'éclairage) cette direction du champ électrique (on peut limiter l'étude à lui seul) n'est pas fixe et change continuellement d'orientation.

Un polariseur ne transmet que les champs électriques parallèles à son axe de transmission et arrête les champs perpendiculaires à cet axe. Il transforme ainsi toute vibration lumineuse en une vibration polarisée rectilignement et ceci parallèlement à son axe de transmission appelé direction de polarisation : c'est un polariseur rectiligne.
En disposant un 2ème polariseur (appelé l'analyseur) derrière le 1er (le polariseur), leurs axes faisant un angle α, et en notant $\vec{E}_1$ le champ sortant du polariseur et $\vec{E}_2$ celui sortant de l'analyseur, on a en norme $E_2 = E_1 \cos\alpha$, soit en intensité lumineuse (proportionnelle au carré de l'amplitude E) :

$$\boxed{I_2 = I_1 \cos^2\alpha}$$ appelée loi de Malus.



Si $\alpha = \pm\pi/2$, $I_2 = 0$ il y a extinction du faisceau ; polariseur et analyseur sont dits croisés.

Applications directes du cours

Oscillateur harmonique

22. La force qui provoque l'allongement Δl est le poids de la masse :

$$mg = k\Delta l \quad \text{d'où} \quad \underline{k = mg/\Delta l = 4 \text{ N.m}^{-1}}$$

Les oscillations se font à la pulsation $\omega = \sqrt{k/m} = 16$ rad.s^{-1}
d'où la période $\underline{T = 2\pi/\omega = 0{,}4 \text{ s}}$.

23. En appuyant sur un ressort avec une force de norme F pour le comprimer, il subit une variation de longueur $\Delta l = F/k$, inversement proportionnelle à k. L'opérateur qui appuie avec la même force sur deux ressorts tels que $k_2 > k_1$ provoque des variations de longueurs $\Delta l_2 < \Delta l_1$. Un ressort à faible raideur (dit mou comme dans un stylo) est donc plus facile à comprimer (ou à étirer) qu'un ressort de grande raideur (dit dur, comme ceux disposés entre deux wagons).

24. Lorsque deux ressorts sont en série, donc soumis à la même force (transmise d'un ressort à l'autre), l'allongement total provoqué par une force de norme F est la somme des allongements :

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \equiv \frac{F}{k_s} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Lorsque deux ressorts sont en parallèle, donc avec un égal allongement ($x = x_1 = x_2$), l'opérateur qui a tiré sur les deux simultanément a exercé une force totale égale à la somme des forces pour étirer chacun :

$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x \equiv k x \text{ d'où } \boxed{k = k_1 + k_2}$$

25. À partir de $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$ il suffit de traduire les conditions initiales par :

- $\dot{x}(t=0) = -a\omega_0 \sin(\varphi) = 0$ soit $\varphi = 0$ par exemple
  et $x(t=0) = a\cos(\varphi) = A$ soit $A = a$

  La solution 1 est donc $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t)}$

- $x(t=0) = a\cos(\varphi) = 0$ soit $\varphi = -\pi/2$ par exemple
  et $\dot{x}(t=0) = -a\omega_0 \sin(\varphi) = v_0$ soit $a = v_0/\omega$

  La solution 2 est donc $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega_0 t)}$

La fréquence d'oscillation est donnée par :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 m$$

avec $T_0 = \tau/10 = 0{,}44$ s, il vient la constante de raideur $\underline{k = 20 \text{ N.m}^{-1}}$.

Rq : Une période (c'est-à-dire la durée d'un aller-retour) de 0,44 s correspond à une fréquence de 2,2 Hz ce qui signifie qu'il y a un peu plus de deux aller-retour par seconde.

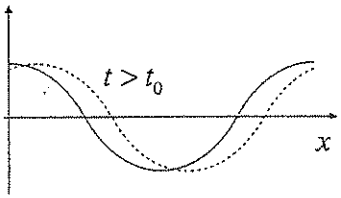
■ Signal sur une corde vibrante

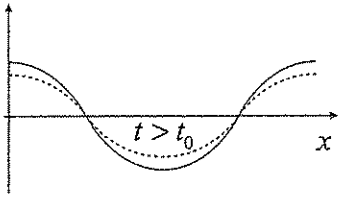
26. La longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période, on a donc $\tau = 3T$ soit une période $T = 0{,}02$ s et une fréquence $\underline{f = 1/T = 50 \text{ Hz}}$. La longueur d'onde est alors $\underline{\lambda = cT = 12 \text{ cm}}$.

27. La tension T s'exprime en $\text{N} \equiv \text{kg.m.s}^{-2}$, la masse linéique μ s'exprime en kg.m^{-1}, ce qui donne bien la vitesse c en m.s^{-1}.
Qualitativement plus on tire fort à la main sur une corde accrochée à l'autre extrémité, plus les oscillations que l'on provoque se propagent vite. En revanche plus la corde est lourde (pour une longueur donnée), plus le signal va lentement.
La tension est donnée par $T = mg \approx 0{,}5 \times 10 = 5{,}0$ N ; par ailleurs $\mu = 0{,}050 \text{ kg.m}^{-1}$, d'où $\underline{c = 10 \text{ m.s}^{-1}}$ ce qui est un ordre de grandeur habituel.

28. Sans autre précision, cette question n'a guère de sens. En effet, une onde est un phénomène spatio-temporel et le graphe donné représente $u(x,t_0)$ en fonction de la variable spatiale x, mais à un instant t_0 fixé. Il faut donc se poser la question de savoir comment évolue ce graphe à un instant ultérieur mais proche $t > t_0$.

Sur les graphes ci-dessous, la courbe d'origine (à l'instant t_0) est représentée en trait plein et la courbe marquant l'évolution (à l'instant $t > t_0$) en trait pointillé.





Il apparaît alors clairement que sur le graphe de gauche, on a affaire à une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants et sur le graphe de droite, à une onde stationnaire, qui fait du « surplace » avec nœuds et ventres.

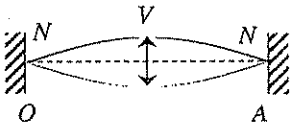
29. La solution proposée est celle d'une onde stationnaire. Les extrémités attachées en O ($x=0$) et en A ($x=l$) correspondent à des nœuds de vibration.

La condition aux limites en $x=0$ soit $y(0,t)=0$, $\forall t$, est satisfaite.

La condition aux limites en $x=l$ soit $y(l,t)=0$, $\forall t$, n'est satisfaite qu'à condition que $\sin(\omega l / c)=0$ ce qui conduit à la quantification $\omega_n = n\pi c / l$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La célérité est $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{T}{\rho \pi d^2 / 4}}$ soit $\underline{c = 424 \text{ m.s}^{-1}}$.

La fréquence du fondamental est $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{c}{2l}$ soit $\underline{f_1 = 331 \text{ Hz}}$ (le Mi aigu à vide d'une corde de guitare).



Dans ce mode $l = \lambda_1 / 2$ ce qui apparaît clairement sur la figure soit $\underline{\lambda_1 = 2l = 1{,}28 \text{ m}}$.

Le nœud à l'extrémité A s'interprète de la manière suivante : l'onde retour est en opposition de phase sur l'onde aller (afin que la somme des deux soit nulle en A), et c'est pour cela qu'elle doit parcourir un aller-retour, c'est-à-dire deux demi-longueur d'onde pour revenir en phase (car la réflexion de l'onde retour en O est également totale et en opposition de phase).

La taille d'un instrument (à cordes comme à vent) conditionne son mode fondamental. La longueur d'onde du fondamental émis par une corde de longueur l fixée aux deux bouts est celle vue précédemment $\lambda_1 = 2l$. Un petit instrument émet ainsi des longueurs d'onde plus petites donc des fréquences plus grandes correspondant à des sons émis plus aigus (penser au piccolo par rapport au basson : plus un instrument est petit, plus le son émis est aigu).

30. Études d'enregistrements

a) Signal temporel

- le signal n'est pas « purement sinusoïdal » (irrégularités en abscisse et en ordonnée), mais constitué d'un fondamental et d'une série d'harmoniques plus ou moins présents (lorsqu'on frappe ou pince une corde, elle ne vibre pas dans un mode unique, mais dans une superposition de modes).
- il apparaît néanmoins que l'un des harmoniques est prépondérant ; entre $t = 2$ ms et $t = 16{,}5$ ms, on compte approximativement 6 périodes, soit $T \approx 2{,}4$ ms et $f \approx 410$ Hz.

b) Signal fréquentiel

- on compte 9 harmoniques dans le spectre, celui d'amplitude le plus important n'est pas ici le fondamental, mais le 5e harmonique ; sa fréquence est d'environ 400 Hz et correspond à la valeur déterminée précédemment. Ces harmoniques sont régulièrement espacés ($f_n = n f_1$) et d'ailleurs $f_5 \approx 400$ Hz sur le graphe conduit à $f_1 = f_5 / 5 \approx 80$ Hz proche de la valeur indiquée dans l'énoncé.
- le 5e harmonique de Mi_1 est $Sol\#_3$ (2 octaves et une tierce), proche de La_3 à 440 Hz ; la guitare semble assez bien accordée, légèrement basse cependant.

c) En frappant la corde à un endroit différent, on crée des ventres de vibration à cet endroit, ce qui modifie la distribution et l'amplitude des harmoniques.

d) Pour pouvoir changer la hauteur (c'est-à-dire la fréquence) de la note jouée sur une corde, on dispose des barrettes métalliques sur le manche ; le guitariste peut ainsi, en appuyant sur la corde à l'aide du doigt (dans une case, espace entre deux barrettes), changer la longueur vibratoire de la corde ; celle-ci étant plus courte, la nouvelle note est forcément plus aiguë.

■ Signal acoustique

31. Une tranche élémentaire de fluide possède une masse. La compressibilité du fluide fait que légèrement comprimé puis lâché, il se détend et inversement, légèrement détendu puis lâché, il se comprime, comme un tronçon de ressort. C'est l'effet différentiel entre les forces de pression exercée à droite et à gauche de la tranche qui joue le rôle de force de rappel.
Pour l'énergie également l'analogie masse-ressort est valable : les deux contributions à l'énergie acoustique sont l'énergie cinétique liée au mouvement de la tranche et l'énergie potentielle élastique liée à sa compressibilité.

32. À cause de la propagation à la célérité c, le signal en x à l'instant t est celui émis en $x = 0$ à l'instant antérieur $t - x/c$ d'où :

$$u(x,t) = u(0, t - x/c) = A\cos(\omega(t - x/c))$$

c'est l'expression une onde progressive sinusoïdale se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants.

La période T (période temporelle) est contenue dans $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; la longueur d'onde λ (période spatiale) est contenue dans $\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; pour mieux faire apparaître la double périodicité de l'onde il est alors plus judicieux d'écrire :

$$\boxed{u(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$$

33. La vitesse du son dans l'air à 20° C est d'environ 340 $m.s^{-1} \approx 1\,200\ km.h^{-1}$.

L'éclair (phénomène optique) se propage à la vitesse de 300 000 $km.s^{-1}$; il est donc vu quasi instantanément. Le tonnerre (phénomène acoustique) se propage à la vitesse de 340 $m.s^{-1}$. En une durée de 3 s, il a parcouru environ 1 km ; c'est à cette distance de l'observateur que la foudre est tombée... (pour parcourir cette distance la lumière met 3 µs !)

34. L'octave (nom féminin) est l'intervalle correspondant à un doublement de fréquence ; il y a donc environ 10 octaves (chercher n tel que $20.10^3 / 20 = 2^n$) dans le spectre audible (et 7 sur un piano).

Pour 20 Hz, $\lambda = 17$ m ; pour 20 kHz, $\lambda = 1{,}7$ cm ; pour 1 000 Hz, $\lambda = 34$ cm.

Plus la fréquence est élevée, plus le son est aigu ; plus l'amplitude est grande, plus le son est fort. Les attaques liées au régime transitoire et le timbre lié au spectre = fondamental + harmoniques (nom masculin) permettent, entre autres, de distinguer deux instruments jouant la même note avec la même intensité.

35. Dans l'eau la célérité des ondes acoustiques est $c_{eau} \approx 1\,400\ m.s^{-1}$, alors que dans l'air $c_{air} \approx 340\ m.s^{-1}$.

Pour une onde la grandeur fondamentale est la fréquence, la même dans tous les milieux. Mais la longueur d'onde étant la distance parcourue par l'onde pendant une période, elle est d'autant plus grande que la célérité du milieu concerné est grande.

Pour le La musical, $f = 440$ Hz, d'où $\lambda_{air} = \frac{c_{air}}{f} \approx 77\ cm < \lambda_{eau} = \frac{c_{eau}}{f} \approx 3{,}20\ m$.

36. Il s'agit de décrire la propagation d'ondes acoustiques (sonores ou ultrasonores) dans un solide ; ce dernier se représente bien à l'échelle microscopique par une chaîne linéaire d'atomes identiques de masse m et dont les interactions « électrostatiques » en dehors de l'équilibre sont modélisées entre atomes voisins par des forces de rappel de constante k.

On comprend ainsi qu'une vibration imposée à une extrémité puisse se propager le long de la chaîne à l'image du son dans un solide.

La vitesse du son dans les solides dépend de leur « dureté » et varie entre 3 000 $m.s^{-1}$ et 5 000 $m.s^{-1}$.

37. Battements

a) Le mouvement résultant a pour élongation (le principe de superposition s'applique mais il n'y a pas d'interférence pour des signaux de fréquences différentes, et donc pas de représentation de Fresnel) :

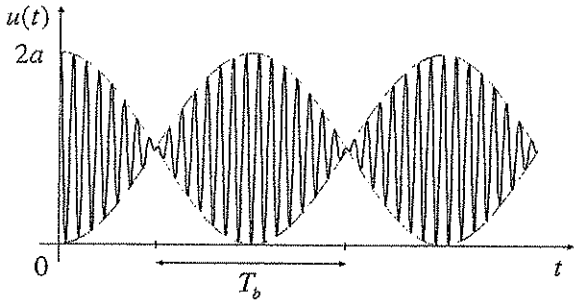
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = a\cos(2\pi f_1 t) + a\cos(2\pi f_2 t + \varphi)$$

à l'aide de la formule d'addition des cosinus : $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

$$u(t) = 2a\cos\left[\pi(f_1 - f_2)t - \varphi/2\right] \times \cos\left[\pi(f_1 + f_2)t + \varphi/2\right]$$

Les fréquences étant très proches, on écrit $f_1 = f_2 + \delta f$ (on suppose ici $f_1 > f_2$), et donc le premier cosinus varie lentement dans le temps ; il est considéré comme une amplitude lentement variable de 0 à $2a$ servant d'enveloppe au second facteur. Dans le second cosinus où intervient la somme, on peut écrire $f_1 \approx f_2$ notée f, valeur quasi commune des deux fréquences et donnant les variations rapides puisque $f \gg \delta f$:

$$u(t) = 2a\cos\left[\pi(\delta f)t - \varphi/2\right] \times \cos\left[2\pi f t + \varphi/2\right]$$



Comme cela est visible sur le graphe, la période T_b des battements correspond à une variation de phase de π du cosinus d'amplitude (et non de 2π !) :

$$\pi(\delta f)T_b = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_b = \frac{1}{T_b} = \delta f = f_1 - f_2}$$

La fréquence des battements est égale à la différence des fréquences des deux mouvements vibratoires. En d'autres termes, les battements s'espacent de plus en plus à mesure que les périodes des deux vibrations deviennent plus voisines.

Sur le graphe ci-dessus on compte 15 oscillations dans un battement, $T_b = 15T$ soit $f_b = \delta f = f/15$; on en déduit donc $\delta f / f = 1/15$.

b) Le violoniste joue un La sur une corde légèrement désaccordée en même temps qu'il entend le La juste du hautbois. La superposition de ces deux sons de fréquences légèrement différentes donne lieu à des battements. Alors il ajuste sa corde de telle manière à baisser la fréquence de ces battements ; lorsqu'elle est nulle (et donc que les battements ont disparu), le La du violon et celui du hautbois ne font plus qu'un : le violon est accordé.

38. Le son émis au niveau des cordes vocales est diaphragmé par la bouche. Une longueur d'onde de 34 cm dans l'air (fréquence vocale de 1 000 Hz) étant grande devant la taille de la bouche, une diffraction importante du son émis se produit et

répartit l'intensité sonore dans une grande ouverture autour de la tête (dans ces conditions la formule $\sin\theta_0 = \lambda / d$ avec $\lambda > d$ ne s'applique évidemment pas ; cela signifie simplement que la diffraction se fait à 180° des deux côtés de la tête).

39. $\theta_0 = 1{,}22\dfrac{\lambda}{d} = 1{,}22\dfrac{c}{2rf} = 0{,}43$ rad $= 24°$ ce qui est énorme et ne confère à ce sonar qu'une très faible directivité. Pour augmenter la directivité, c'est-à-dire réduire θ_0, il faudrait augmenter la fréquence, mais alors les ultrasons seraient davantage absorbés par l'eau...

Signal électromagnétique

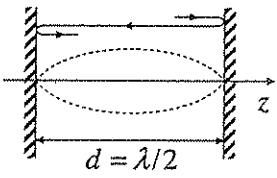
40. Sur une ligne électrique, le signal se propage à la vitesse de la lumière dans le vide, soit $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

Rq : Dans un câble coaxial, il s'agit de la vitesse de l'onde dans l'isolant qui sépare les deux conducteurs, et qui peut être légèrement inférieure (de l'ordre de 2.10^8 m.s^{-1}).

* pour $f = 50$ Hz, $\lambda = c / f = 6\,000$ km bien plus grande que la taille du circuit, ce qui signifie que l'intensité par exemple est, à un instant donnée, la même en tout point du circuit (on dit qu'elle est uniforme ce qui ne l'empêche pas de dépendre du temps) ; on ne parle alors pas d'onde car il manque l'aspect spatial du phénomène.
* pour $f = 10$ GHz, $\lambda = c / f = 3$ cm petite devant la longueur d'un câble ; le courant n'y est donc pas uniforme du tout ; on peut véritablement parler d'une onde de courant dans la mesure où à un instant donné le courant change de sens toutes les demi-longueurs d'onde, soit tous les 1,5 cm (phénomène spatio-temporel).

41. La longueur d'onde est $\lambda = c / f = 12{,}2$ cm ; elle est du même ordre de grandeur que la taille du four, ce dernier faisant typiquement 3λ de largeur et 2λ de hauteur et de profondeur. Cela conduit à la formation d'ondes stationnaires dans l'enceinte qui gênent une cuisson uniforme...(le dispositif est muni d'un brasseur d'onde pour « casser » ces ondes stationnaires ou encore d'un plateau tournant pour qu'un point d'un aliment puisse passer par des nœuds et des ventres, ce qui permet d'homogénéiser la puissance reçue sur les différents points).

42. Les conditions aux limites donnent des nœuds de champ $\vec{E}$ sur les deux plaques (comme une corde fixée aux deux extrémités) ; la distance minimale des deux surfaces est donc $d = \lambda / 2 = c / 2f = 46{,}9$ cm (cavité résonante demi-onde dans le mode $n = 1$).
Cette condition permet à l'onde de faire des aller-retour dans la cavité sans se détruire, et d'y engendrer un système d'ondes stationnaires résonantes.



Pour parcourir une distance totale Nd dans la cavité, il faut à l'onde progressive un temps $\tau = Nd / c \approx 31$ µs.
L'extinction du signal après la coupure est donc quasi immédiate, ou du moins en un temps très court à l'échelle humaine. Ce résultat peut paraître surprenant puisque individuellement le conducteur métallique est un excellent réflecteur. Cependant l'onde va très vite ($300\,000$ km.s^{-1}), ce qui explique le temps τ très court pour effectuer les $20\,000$ allers-retours.

43. En optique, la diffraction est bien visible comme cela a été vu pour la fente à la question **19.** pour des objets de taille inférieure ou égale à 0,1 mm. Pour une lentille ou un prisme dont la taille est de plusieurs cm, c'est-à-dire très grande devant la longueur d'onde, elle n'est ni visible ni gênante. Dans ces conditions l'optique géométrique fondée sur la notion de rayons lumineux se propageant de manière rectiligne s'applique parfaitement.

44. À l'endroit le plus étroit (appelé le waist) le diamètre du faisceau laser vaut $d \approx 1$ mm ; avec une longueur d'onde $\lambda \approx 0{,}6$ µm, la diffraction se fait dans un cône de demi-angle au sommet $\alpha = 1{,}22\dfrac{\lambda}{d} = 0{,}7.10^{-3}$ rad $= 2{,}5'$, ce qui peut sembler très faible, mais qui sur une distance de 1,5 m, comme en TP, augmente la taille du faisceau de 2 mm (le diamètre passe de 1 mm à 3 mm).
L'impact sur la Lune, à 380 000 km, serait alors une tache circulaire de 500 m de diamètre, ce qui conduirait à très peu de lumière réfléchie par les dispositifs mis en place sur la Lune pour les mesures de distance Terre-Lune. En réalité le faisceau laser envoyé sur la Lune est auparavant considérablement élargi grâce à un télescope ; son waist atteint ainsi une largeur de l'ordre du mètre, ce qui donne une divergence bien moindre au faisceau et permet de renvoyer plus d'énergie par le réflecteur lunaire et donc d'en recevoir davantage au niveau du miroir du télescope.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

45. En fait sous le plateau est disposé un ressort, comprimé au début lorsqu'il y a beaucoup d'assiettes sur le plateau. Au fur et à mesure que l'on enlève des assiettes, l'action sur le ressort diminue et il se détend ; le phénomène étant linéaire (5 assiettes enlevées font s'élever le plateau d'un intervalle 5 fois plus grand qu'une seule), il suffit d'ajuster la raideur du ressort pour que l'épaisseur d'une assiette (celle qui vient d'être enlevée) s'identifie à l'allongement correspondant du ressort...

$k = mg / h$, où m et h sont la masse et la hauteur d'une assiette.

46. Le moteur ainsi que le support auquel il est fixé vibrent à une fréquence qui est la fréquence de rotation du moteur ; cet excitateur transmet ses vibrations à l'air sous forme d'ondes sonores. La diminution progressive de la fréquence après la coupure de l'alimentation se traduit par une diminution analogue de la fréquence des sons émis : ceux-ci passent donc des aigus aux graves.

47. L'excitation de cette corde s'effectue au centre : seront donc excités tous les modes ayant un ventre de vibration à cet endroit, c'est-à-dire les modes impairs ($n=1,3,5,7,...$) et seront absents du spectre tous les modes ayant un nœud de vibration à cet endroit, c'est-à-dire les modes pairs ($n=2,4,6,...$) (faire un dessin pour s'en convaincre).

48. La vitesse du son est bien plus grande dans l'acier (ou dans le sol) que dans l'air.

49. Au pire, une sinusoïde $s(t)$ est numérisée sur une période T par un créneau avec « 1 » pour $s(t)>0$ (pendant $T/2$) et « 0 » pour $s(t)<0$ (pendant $T/2$). La fréquence d'échantillonnage doit donc être au moins le double de la fréquence la plus élevée à graver ; l'oreille humaine entend des sons jusqu'à 20 kHz, il faut donc une fréquence d'échantillonnage de 40 kHz. L'industrie du disque compact a retenu une fréquence d'échantillonnage de 44,1 kHz.

50. Les ultrasons concernent les fréquences au-dessus de 20 kHz, ce qui dans l'air correspond à des longueurs d'onde inférieures à 1,7 cm. Sont concernés les chiens (qui répondent au sifflet à ultrasons), les chauves-souris (qui se dirigent en estimant les distances par émission et réception d'ultrasons), les dauphins ($\approx$100 kHz émis pendant 0,1 ms), les baleines...

Les infrasons, de fréquences en dessous de 20 Hz, ce qui dans l'air correspond à des longueurs d'onde supérieures à 17 m, sont utilisés par les éléphants...

51. Le corps humain, à la température de 37 °C, émet dans l'infrarouge un rayonnement électromagnétique dont la longueur d'onde est d'environ 10 µm et donc invisible aux yeux humains. Les lunettes à infrarouge (mises au point initialement par les militaires) permettent aux hommes d'apercevoir de nuit des êtres humains...

52. Pour parcourir 150.10^6 km à la vitesse de 300 000 km.s^{-1}, il faut à la lumière environ 8 min 20 s ; c'est le retard lié au temps de propagation.

53. Les longueurs d'onde dans la fourchette de 770 à 810 nm ne sont plus guère visibles puisqu'au début de l'infrarouge.

Les diodes bleues émettent une lumière de longueur d'onde en gros moitié de celle des diodes précédentes ; la diffraction est donc deux fois moindre, et comme il s'agit d'un problème bidimensionnel (un faisceau doit lire les informations sur la surface d'un disque gravé), la résolution du blu ray est quatre fois supérieure à celle d'une diode rouge classique (puisque sa tache de diffraction est quatre fois plus faible), ce qui permet aux DVD HD (pour Haute Définition) ainsi lus de stocker quatre fois plus d'informations.

54. Diffraction de la lumière.

* En fermant presque complètement les yeux, les bords des deux paupières délimitent une fente ; une lumière quasi ponctuelle regardée de cette sorte s'étire

alors perpendiculairement à cette fente, ce dont on se rend compte en inclinant la tête.

* Une lumière observée à travers l'interstice entre deux doigts voisins fait apparaître des franges liées à la diffraction des bords.

Diffraction d'autres types d'ondes. (chacune à sa propre échelle de longueur d'onde)

* Les ondes hertziennes en GO ($\lambda \approx 100$ m) sont bien mieux diffractées par une colline que les ondes hertziennes en MF ($\lambda \approx 1$ m) et donc mieux captées par un poste sur le versant arrière de cette colline...
* Les vagues (arrivant en ondes planes) sont diffractées en ondes hémisphériques dans le passage entre les extrémités de deux digues protégeant l'entrée d'un port.

55. Les longueurs d'onde acoustiques (surtout celles des sons graves) étant plus grandes que l'ouverture de la porte, le son est diffracté de manière importante et ne se propage donc pas en ligne droite comme des rayons (c'est ce qui explique que d'une pièce à l'autre, on puisse parfaitement entendre, à travers la porte ouverte, une personne sans la voir car les longueurs d'onde optiques sont, elles, trop petites pour être diffractées par une ouverture de porte). Au fur et à mesure que la porte se ferme, les sons de plus courtes longueurs d'onde sont à leur tour de plus en plus diffractés, ce qui correspond à un spectre sonore renforcé dans les aigus.

56. Lors du tournage, ce n'est pas un film qui est enregistré, mais deux films simultanément avec deux caméras proches (pour simuler la vision binoculaire seule responsable du relief) ayant deux points de vue voisins mais pas identiques. Lors de la projection sur écran un polariseur vertical est placé devant l'un des projecteurs et un polariseur horizontal est placé devant l'autre projecteur (synchrone). Les lunettes distribuées contiennent deux simples polaroïds à angle droit fonctionnant en analyseurs ; par exemple le « verre » droit est un polariseur vertical et le gauche un polariseur horizontal. En regardant sans lunettes, l'œil n'étant pas sensible à la polarisation de la lumière, il voit les deux films superposés et décalés donc une image floue. Mais en chaussant ces lunettes spéciales, alors l'œil droit ne voit que l'image polarisée verticalement et l'œil gauche que l'image polarisée horizontalement, d'où l'impression de stéréovision restituée permettant la troisième dimension.

57. Outre la différence sur les célérités et les domaines de fréquences, les ondes mécaniques (de description souvent scalaire) nécessitent un milieu matériel pour se propager alors que les ondes électromagnétiques (de description vectorielle) peuvent se propager dans le vide. Les ondes électromagnétiques dans le vide sont transversales, les ondes élastiques sur une corde également alors que les ondes acoustiques dans un fluide sont longitudinales. Elles subissent toutes réflexion, réfraction, interférences, diffraction et diffusion, chacune à sa propre échelle vis-à-vis de la longueur d'onde.

Exercices

58. Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique (*)

En multipliant par $v = \frac{dx}{dt}$ les deux membres de l'équation du mouvement $m\ddot{x} = -kx$ écrite sous la forme $m\frac{dv}{dt} + kx = 0$, il vient $mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0$

Et par « intégration » $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = 0$, soit $\boxed{\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = \frac{dE_m}{dt} = 0}$

L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ de l'oscillateur, somme de son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et de son énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ est constante au cours du mouvement (système conservatif), ce qui a été vérifié directement à la question 5.

59. Signal réfléchi sur une corde attachée

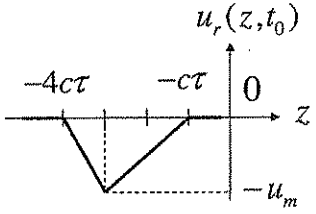
a) La fonction $u_i(t - z/c)$ de l'énoncé représente une onde progressive se propageant dans le sens des z croissants, dénommée par la suite onde incidente.

b) Au point d'attache prend naissance une onde réfléchie se propageant dans le sens des z décroissants et que l'on cherche donc sous la forme $u_r(t + z/c)$. La condition d'immobilité en ce point se traduit par :

$u_i(t - z/c) + u_r(t + z/c) = 0$ valable pour $z = 0$, $\forall t \quad \Rightarrow \quad u_r(t) = -u_i(t)$, $\forall t$

L'onde retour est donc bien à tout instant en opposition de phase avec l'onde aller en $z = 0$ (les deux fonctions ayant même amplitude la réflexion est totale).

c) Si on porte $z = 0$ sur la courbe de l'énoncé, cela donne le signal qui arrive sur le point d'attache entre $t = 0$ et $t = 3\tau$ et s'y réfléchit. À $t_0 = 4\tau$, la réflexion (en opposition de phase) est terminée et le début du signal se trouve en $z = -4c\tau$ et la fin en $z = -c\tau$, d'où la forme de $u_r(z, t_0)$ ci-contre.



60. Ondes stationnaires sur une corde excitée (*)

a) L'onde retour a même pulsation, même célérité, mais diffère *a priori* par l'amplitude et doit tenir compte d'un éventuel déphasage à la réflexion :

$$y_r(x,t) = B\sin(\omega(t + x/c) + \varphi_r)$$

b) La condition en $x = l$ pour l'onde résultante $y(l,t) = y_a(l,t) + y_r(l,t) = 0$, $\forall t$ donne pour seule possibilité $B = -A$ (réflexion totale en opposition de phase) et

$\varphi_r = \varphi_a - 2\omega l/c$, soit pour l'onde résultante, somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$y(x,t) = A\sin(\omega(t - x/c) + \varphi_a) - A\sin(\omega(t + x/c) + \varphi_a - 2\omega l/c)$$

et après factorisation :

$$\underline{y(x,t) = 2A\sin(\omega(l-x)/c)\cos(\omega(t - l/c) + \varphi_a)}$$

Il s'agit d'une onde stationnaire (produit d'une fonction de l'espace par une fonction du temps) obtenue par superposition de deux ondes progressives de même amplitude et de même fréquence se propageant en sens inverse.

c) La position des nœuds est donnée par $\sin(\omega(l-x)/c) = 0, \forall t$ soit puisque $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$: $\frac{2\pi}{\lambda}(l - x_p) = p\pi$

d'où : $\boxed{x_p = l - p\frac{\lambda}{2}}$ pour $0 < x_p \leq l$

On retrouve les positions classiques des nœuds d'une onde stationnaire ; il y a un nœud toutes les demi-longueurs d'onde $\lambda/2$ à partir de l'extrémité fixe $x = l$ (mais on ne peut pas prédire à ce stade ce qui se passe au niveau du vibreur).

d) La condition en $x = 0$ soit $y(0,t) = a\cos\omega t, \forall t$ donne alors $\varphi_a = \omega l/c$ et $2A = \frac{a}{\sin(\omega l/c)}$ d'où l'amplitude :

$$\boxed{A(x) = a\frac{\sin(\omega(l-x)/c)}{\sin(\omega l/c)}}$$

en écrivant l'onde résultante sous la forme $y(x,t) = A(x)\cos\omega t$.

Les pulsations d'excitation ω pour lesquelles les ventres (positions données par $\sin(\omega(l - x_p)/c) = \pm 1$) sont d'amplitude maximale ($\sin(\omega_n l/c) = 0$ soit $l = n\lambda/2$) sont :

$$\boxed{\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{l}}$$

Ainsi l'onde stationnaire devient résonante (en régime forcé) lorsque la pulsation d'excitation du vibreur coïncide avec une des pulsations propres (en régime libre) de vibration de la corde ; en l'absence d'effets dissipatifs ces résonances sont infinies !

61. Câble pour signal de télévision

a) Le calcul est simple ; la fréquence minimale du signal est :

$$f = 50 \times 625 \times 830 \times 3 = 78 \text{ MHz}$$

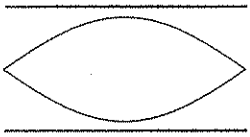
b) L'onde porteuse doit avoir une fréquence $F_0 > 10^2 f \approx 10$ GHz.

c) La longueur d'onde correspondante est $\lambda = c / F_0 = 3$ cm avec $c = 3.10^8$ m.s^{-1} pour une onde électromagnétique sur un câble ; elle est donc effectivement très petite devant la dizaine de mètres du câble qui relie la parabole réceptrice du faisceau hertzien au téléviseur. Rappelons qu'en TP, pour une fréquence de 1 kHz, la longueur d'onde est de 300 km, bien plus grande que la taille du circuit, ce qui signifie que l'intensité par exemple est, à un instant donné, la même en tout point du circuit (on dit qu'elle est uniforme ce qui ne l'empêche pas de dépendre du temps). En revanche sur le câble télé, on peut parler d'une véritable onde de courant : à un instant donné le courant change de sens toutes les demi-longueurs d'onde, soit tous les 1,5 cm.

62. Note fondamentale d'un instrument à vent

a) Du côté fermé la tranche d'air qui vibre contre la fermeture provoque des variations de pression maximale en amplitude : elle y présente un ventre de vibration. Du côté ouvert le système donne sur l'air extérieur ce qui annule la surpression : elle y présente un nœud de vibration.

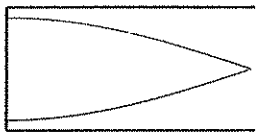
b) La pression présente un nœud aux deux extrémités ; la plus grande longueur d'onde possible (correspondant à la note la plus grave générée par l'instrument) est celle pour laquelle il n'existe qu'un seul ventre entre ces nœuds : on en déduit $L = \lambda_1^{fl} / 2$ (on parle de cavité demi-onde).



AN : $\lambda_1^{fl} = \dfrac{c}{f_1^{fl}} = 1{,}03$ m d'où $L = \dfrac{\lambda_1^{fl}}{2} = 51{,}5$ cm ce qui est la bonne valeur.

Par élimination de λ_1^{fl}, on a $\boxed{f_1^{fl} = \dfrac{c}{2L}}$

c) La pression présente un ventre du côté fermé et un nœud du côté ouvert ; la plus grande longueur d'onde possible (correspondant à la note la plus basse générée par l'instrument) est celle du schéma ci-contre : on en déduit $L = \lambda_1^{cl} / 4$ (on parle de cavité quart-d'onde).



d'où $f_1^{cl} = \dfrac{c}{\lambda_1^{cl}}$ soit $\boxed{f_1^{cl} = \dfrac{c}{4L}}$

La relation $f_1^{cl} = \dfrac{f_1^{fl}}{2}$ montre que la clarinette joue une octave plus bas (= le chat) que la flûte (= l'oiseau) ; c'est l'instrument le plus grave.

De manière identique les figures montrent que $\lambda_1^{cl} = 2\lambda_1^{fl}$.

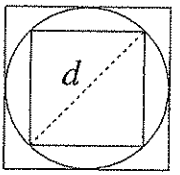
d) Pour la flûte le mode d'ordre n vérifie $L = n\dfrac{\lambda_n^{fl}}{2} \Rightarrow f_n^{fl} = n\dfrac{c}{2L} = n f_1^{fl}$; l'écart entre deux harmoniques successifs est $\Delta f = f_{n+1}^{fl} - f_n^{fl} = \dfrac{c}{2L}$

Pour la clarinette le mode d'ordre n vérifie $L = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda_n^{cl}}{2}$, mais l'écart Δf est le même.

63. Cavité sonore pour diapason

La cavité, ouverte d'un côté (nœud de pression), et fermée de l'autre (ventre de pression), est le siège d'ondes stationnaires résonantes. Dans le mode fondamental $l = \lambda/4$ (cavité quart-d'onde) soit $l = c/4f = 19{,}5$ cm (voir la question précédente). Les réflexions successives sur les extrémités de la cavité se font en phase (ou opposition) et les ondes s'ajoutent sans se détruire (ondes multiples constructives), d'où un son important juste pour cette valeur de fréquence. La cavité adapte l'impédance dans la transmission du son du diapason à l'air et le son est plus fort.

64. Diffractions comparées par des ouvertures de tailles différentes



L'ouverture carrée extérieure de côté d diffracte dans un cône de demi-angle au sommet λ/d.

L'ouverture circulaire de diamètre d diffracte dans un cône de demi-angle au sommet $1{,}22\lambda/d$.

L'ouverture carrée intérieure de diagonale d et donc de côté $d/\sqrt{2}$ diffracte dans un cône de demi-angle au sommet $\sqrt{2}\lambda/d$.

L'encadrement $1 < 1{,}22 < 1{,}41$ montre bien que la tache de diffraction est d'autant plus large que l'ouverture est petite.

65. Diffraction d'un laser par une fente, par un cheveu

a) Il suffit d'écrire que $\sin\theta_0 = \dfrac{\lambda}{a} \approx \tan\theta_0 = \dfrac{50a}{D} \Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{\lambda D}{50}} \approx 0{,}14$ mm.

Alors $a \approx 220\lambda$, ce qui assure bien θ_0 petit.

(Une idée couramment répandue voudrait que la diffraction ne soit correctement observable qu'à partir du moment où $a \approx \lambda$, ce qui est manifestement faux !).

b) Les figures de diffraction d'une fente et d'un fil sont identiques parce que ces deux objets présentent la même géométrie de bord (la diffraction est un effet de bord, donc mêmes bords $\Rightarrow$ même figure de diffraction).

Alors pour un cheveu de diamètre a :

$$\sin\theta_0 = \frac{\lambda}{a} \approx \tan\theta_0 = \frac{\Delta x/2}{D} \Rightarrow a = \frac{2\lambda D}{\Delta x} \approx 50\ \mu\text{m}$$

Travaux pratiques

66. Ondes stationnaires sur une corde vibrante.

a) Les réflexions successives (avec des déphasages quelconques) conduisent à des interférences destructives, la corde n'étant pas excitée à une de ses fréquences propres. En cas de faibles pertes, le mouvement du vibreur peut être assimilé à un nœud et donc les modes de vibration sont ceux d'une corde fixée aux deux bouts.

La quantification donne $\frac{\omega}{c_n} = 2\pi f\sqrt{\frac{\mu}{T_n}} = \frac{n\pi}{l}$ et conduit à :

$$\boxed{m_n = \frac{T_n}{g} = \frac{\mu}{g}\left(\frac{2fl}{n}\right)^2}$$

b) La succession de beaux modes d'ordre n s'obtient en ajustant la masse m. Plutôt que de tracer m_n en fonction de $1/n^2$, il est plus simple de tracer $1/\sqrt{m_n}$ en fonction de n, puis de mesurer la pente expérimentale, voir la partie validation d'une loi dans le chapitre **0**.

AN : Le mode $n = 3$ s'obtient pour une masse $\underline{m_3 \approx 29\ \text{g}}$.

67. On branche un générateur basses fréquences (donnant la fréquence f) en parallèle sur le haut-parleur afin qu'il émette un son sinusoïdal et sur la voie 1 d'un oscilloscope. Le signal électrique produit par le microphone est, après amplification, branché sur la voie 2. En éloignant le microphone du haut-parleur, le signal Y_2 se décale par rapport au signal Y_1 (preuve que l'onde captée est progressive) ; la longueur d'onde λ est la distance (mesurée) parcourue par le microphone entre deux positions successives où les deux signaux sont en phase.
La célérité est alors donnée par $c = \lambda f$.
Pour ne pas avoir une longueur d'onde trop grande et pour pouvoir en mesurer plusieurs, il ne faut pas prendre une fréquence trop petite, mais plutôt $f \geq 2$ kHz.

68. Entre 7 nœuds successifs il y a $6\times\frac{\lambda}{2} = 3\lambda \Rightarrow \underline{\lambda = 17{,}2\ \text{cm}}$.

Expérimentalement il est facile d'avoir la fréquence (soit directement sur le GBF, soit au fréquencemètre) ; cette expérience sert donc essentiellement à déterminer la célérité $\underline{c = \lambda f = 344\ \text{m.s}^{-1}}$.

L'incertitude sur c est du type incertitude composée (voir la partie incertitude du chapitre **0**) : $\frac{U(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{U(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{U(f)}{f}\right)^2}$

L'incertitude sur λ est une incertitude-type de type B, elle est due à l'incertitude de mesure de la longueur 3λ qui a deux composantes : la lecture sur la règle (2 lectures) dont les graduations sont en mm et l'appréciation du zéro (nœud de pression) sur l'oscilloscope estimée expérimentalement à $\pm$ 1 mm. Il n'y a pas, à proprement parlé, de mesures avec l'oscilloscope. On choisit un facteur d'élargissement 2 :

$$U(3\lambda) = 2\sqrt{\left(2\frac{10^{-3}}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(10^{-3}\right)^2} \approx 0{,}0023\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad U(\lambda) = 7.7.10^{-4}\ \text{m}$$

L'incertitude sur la mesure de f est de type B également :

$$U(f) = 2\sqrt{\left(\frac{0{,}1\times 1998}{100\times\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{3\times 0{,}1}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 2{,}33\,\text{Hz}$$

Finalement $\dfrac{U(c)}{c} = \sqrt{\left(\dfrac{7.7.10^{-4}}{17.10^{-2}}\right)^2 + \left(\dfrac{2.33}{1998}\right)^2} \approx 0{,}005 \quad \Rightarrow$

$$U(c) \approx 0{,}005\times 344 \approx 2\ \text{m.s}^{-1} \text{ et } \boxed{c = (344 \pm 2)\ \text{m.s}^{-1}}$$

La valeur tabulée 343,4 m.s^{-1}, à 20°C, est dans la fourchette de mesure.
Attention l'écart à cette valeur tabulée n'est pas l'incertitude de mesure.

69. Le stroboscope envoie des éclairs à une fréquence réglable par l'utilisateur.

a) Il vaut mieux commencer par une fréquence élevée et la baisser ; la première fois que le système d'onde paraît immobile est obtenu lorsque le temps entre deux éclairs est exactement égal au temps que met une crête à remplacer la précédente, c'est-à-dire la période. La fréquence des éclairs est alors de 60 Hz. À noter que pour des sous-multiples le système paraît également immobile ! (par exemple à 30 Hz, il s'écoule deux périodes entre deux éclairs consécutifs).

Rq : En commençant par une fréquence faible à augmenter, la fréquence des signaux est celle pour laquelle le système paraît immobile pour la dernière fois...

b) On a $10\lambda = 5$ cm soit $\underline{\lambda = 0{,}5\ \text{cm}}$; on peut alors en déduire la célérité des ondes progressives sur l'eau : $\underline{c = \lambda f = 30\ \text{cm.s}^{-1}}$.

70. La rotation du polariseur laisse l'éclairement de l'écran invariant puisque la lumière naturelle issue de la source n'est pas polarisée.

71. Si l'on dispose l'un derrière l'autre deux polariseurs dont les axes font entre eux un angle α, on obtient à la sortie du 2ème polariseur (appelé analyseur) un faisceau dont l'intensité I est reliée à l'intensité I_0 du faisceau ayant franchi le 1er polariseur par la relation $I = I_0 \cos^2\alpha$ (loi de Malus, montre à la question **21.**). Les variations de l'éclairement de l'écran par rotation de l'analyseur sont une preuve du caractère vectoriel de la lumière.

72. Si ce minimum est nul, la lumière est polarisée rectilignement. Si ce minimum n'est pas nul, l'onde est polarisée d'une autre manière, par exemple deux polarisations rectilignes qui ne sont pas de même axe et déphasées entre elles...

73. Cette question n'est pas pertinente ! Une fréquence de 10 GHz (correspondant à $\lambda = 3$ cm, ondes dites centimétriques) est certes faible par rapport aux fréquences des ondes lumineuses, de l'ordre de 10^{14} à 10^{15} Hz, mais reste très élevée par rapport aux fréquences utilisées en TP dans les circuits électrocinétiques (inférieures à 1 MHz) et même par rapport aux ondes hertziennes (radio en MF à environ 100 MHz).
Aucun multimètre utilisé couramment en TP n'est sensible à une fréquence aussi élevée. Il est alors nécessaire de moduler l'amplitude du signal fourni par l'alimentation de l'émetteur, par exemple à la fréquence de 50 Hz du secteur. L'onde hyperfréquence (de 10 GHz) sert alors de porteuse et le multimètre sur calibre mV AC détecte seulement la modulation à 50 Hz, preuve néanmoins de la transmission du signal originel.

74. Ces ondes sont entièrement réfléchies par une plaque métallique, qu'il suffit de placer à 45 ° des axes (à la façon d'un « miroir ») pour retrouver le signal.

Chapitre 2
■ Optique géométrique ■

Les ordres de grandeur utiles

La lumière

vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3.10^8$ m.s^{-1}
constante de Planck	$h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s
longueur d'onde (visible)	$400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$
fréquence (visible)	$4.10^{14} \text{ Hz} < \nu = c/\lambda < 8.10^{14} \text{ Hz}$
énergie du photon (visible)	$1{,}5 \text{ eV} < E = h\nu < 3 \text{ eV}$

L'œil

pouvoir séparateur	$\varepsilon \approx 1' \approx 3.10^{-4}$ rad (soit 1 mm à 1 m de distance)
profondeur de champ d'un œil normal	PP ≈ 25 cm et PR = ∞

Indices lumineux

vide ; air	$n = 1$; $n = 1{,}00029$ $(n - 1 \approx 3.10^{-4})$
eau ; verre ordinaire ; flint	$n = 1{,}33$; $n \approx 1{,}5$; $n \approx 1{,}8$

En TP

lentille convergente ; divergente	$f' \approx 10$, 20 ou 50 cm ; $f' \approx -10$ cm
précision du goniomètre	1 minute d'arc = $2{,}9.10^{-4}$ rad

Le cours d'abord

■ Définitions et lois de l'optique géométrique

1. Donner deux caractéristiques physiques importantes d'un faisceau lumineux. Quand et pourquoi parle-t-on de lumière monochromatique ? Comment est définie la longueur d'onde ? Qu'est-ce que la lumière visible ? La lumière blanche ?

2. Quelle inégalité, concernant les dimensions des systèmes, faut-il respecter pour être dans le cadre de l'optique géométrique ? Est-elle vérifiée dans le cas des systèmes optiques usuels ? Citer des cas où l'optique géométrique ne s'applique pas.

3. Comment est défini l'indice de réfraction d'un milieu transparent ? Pourquoi sa valeur est-elle toujours supérieure ou égale à un ?

4. Comment se propage la lumière dans un milieu homogène ? Qu'est-ce qu'un rayon lumineux ?

5. Définir la notion de « dioptre » et en donner des exemples. Comment est défini le plan d'incidence en un point d'un dioptre ?

6. Énoncer les deux lois de Descartes-Snell aussi bien pour le rayon réfléchi que pour le rayon réfracté (en évitant de se limiter aux seules formules...). Comment savoir si, lors d'une réfraction, le rayon s'écarte ou se rapproche de la normale ? Que n'indique pas l'optique géométrique en ce qui concerne les rayons réfléchi et réfracté en un même point d'un dioptre ?

7. Dans quel cas parle-t-on de réfraction limite ? Donner l'expression de $\sin i_l$. Définir proprement la notion de réflexion totale et donner des exemples pratiques d'utilisation de ce phénomène.

Formation d'images

8. Donner la définition précise de « objet » et « image », ainsi que de « réel(le) » et « virtuel(le) ». Faire pour chacune des quatre possibilités (OR, OV, IR et IV) un schéma avec quelques rayons.

9. Comment appelle-t-on un système optique possédant un axe de symétrie de révolution ? Quelle propriété possède un rayon se propageant suivant l'axe optique ?

10. Indiquer la nature des rayons arrivant sur un système centré en provenance : a) d'une source ponctuelle à l'infini sur l'axe ; b) d'une source ponctuelle à l'infini en dehors de l'axe ; c) d'une source étendue à l'infini.

11. Que signifient les notions de « stigmatisme » et d'« aplanétisme » ?

12. Le stigmatisme rigoureux est une propriété rare ; quels arguments font que dans la pratique on peut se contenter d'un stigmatisme approché ? Énoncer pour un système centré les conditions de Gauss permettant un stigmatisme approché. Comment peut-on, en pratique, observer dans les conditions de Gauss ?

Miroirs plans et dioptres plans

13. Quelle propriété remarquable possède un miroir plan ? Rappeler les caractéristiques : position de l'image, grandissement,... Montrer sur un schéma et en s'appuyant sur une interprétation en terme de faisceau, que l'image d'un objet réel par un miroir plan est virtuelle et inversement ; en donner une application dans chaque cas.

14. Un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n et n' est-il stigmatique ? Quelles sont les conditions de stigmatisme approché ? Ces conditions étant respectées,

établir une relation de conjugaison qui lie la position du point objet A et celle de son image A'.

15. Un observateur, face à une étendue d'eau calme et plane, regarde un poisson se trouvant dans l'eau. Pourquoi voit-il une image de ce poisson, sans utiliser de dispositif particulier pour se placer dans les conditions de Gauss ? Estimer par rapport à la profondeur réelle, la profondeur apparente de l'image du poisson dans l'eau ; quel est son grandissement ? Conclure par rapport à l'observation courante dans cette situation.

Les lentilles minces

16. Quelle inégalité définit une lentille « mince » ? Quelle conséquence en tire-t-on pour un rayon passant par son centre ? Comment sont définis les foyers et comment sont-ils placés par rapport à la lentille ? Distinguer les deux cas de lentilles en précisant si les foyers sont réels ou virtuels. Comment s'exprime la distance focale et quel est son signe ? Comment est définie la vergence ?

17. Comment construire de façon précise l'image d'un objet plan perpendiculaire à l'axe, dans le cadre du stigmatisme approché ? Quelle est alors la représentation d'une lentille mince dans le cadre de cette construction ?

18. Par quelle(s) construction(s) obtient-on le rayon émergent correspondant à un rayon incident quelconque ?

19. On rappelle les relations de conjugaison des lentilles.

- Origine au centre optique (formule de Descartes) :

en notant $x = \overline{OA}$ et $x' = \overline{OA'}$ $\boxed{\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}}$ qu'indiquent les signes de x et x' ?

- Origines aux foyers (formule de Newton) :

en notant $\sigma = \overline{FA}$ et $\sigma' = \overline{F'A'}$: $\boxed{\sigma\sigma' = -f'^2}$

- Le grandissement transversal est défini par $\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}}$

Quelles caractéristiques de l'image indique-t-il ?

Les expressions du grandissement pour les lentilles minces sont :

$$\boxed{\gamma = \frac{x'}{x} = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}}$$

L'image est homothétique de l'objet par rapport à quel point ?

20. On associe deux lentilles minces de même axe et de distances focales f_1' et f_2'.

* Les lentilles sont accolées (l'interstice $e = \overline{O_1O_2} \approx 0$) ; quelle est la distance focale f' de la lentille mince équivalente ? Justifier l'utilisation de la vergence exprimée en dioptries.
* Les deux lentilles sont dissociées ($e = \overline{O_1O_2} \neq 0$) et on définit l'intervalle optique Δ par $\Delta = \overline{F_1'F_2}$; à quelle condition le système est-il afocal (définir ce terme) ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Les angles de réflexion et de réfraction (pour l'application de la loi de Descartes) sont toujours définis par rapport à la normale au dioptre (et non pas par rapport au dioptre).

☐ L'angle de réfraction limite i_l n'existe que si l'on passe dans un milieu plus réfringent, c'est-à-dire d'indice plus grand. À l'inverse le phénomène de réflexion totale ne peut exister que lors du « passage » dans un milieu moins réfringent.

☐ La recherche de l'image d'un objet à distance finie doit commencer par un dessin avec une construction soignée en suivant les recommandations ci-dessous :
– utiliser trois rayons particuliers fléchés (avec 1, 2 ou 3 flèches) dans l'ordre suivant : 1. le rayon qui passe par le centre et qui n'est pas dévié, 2. le rayon qui arrive parallèlement à l'axe et qui ressort par le foyer image et enfin 3. le rayon qui arrive par le foyer objet et qui ressort parallèlement à l'axe. Sans oublier que l'axe optique constitue lui-même le support d'un rayon. Si la figure comporte plusieurs constructions, deux rayons suffisent ;
– caractériser l'image construite par ses trois propriétés dans l'ordre : réelle ou virtuelle, droite ($\gamma > 0$) ou renversée ($\gamma < 0$), plus grande ($|\gamma| > 1$) ou plus petite ($|\gamma| < 1$) que l'objet ;
– ne pas oublier de caractériser l'opération réalisée par la lentille en terme de faisceau : le faisceau incident, s'il est divergent (objet réel) est-il rendu plus ou moins divergent (image virtuelle) ou convergent (image réelle) ? le faisceau incident, s'il est convergent (objet virtuel) est-il rendu plus ou moins convergent (image réelle) ou divergent (image virtuelle) ? (voir les questions **26.** et **27.**).
S'exercer à construire l'image d'un objet (d'abord réel puis virtuel) par une lentille (d'abord convergente puis divergente).

☐ L'image d'un point A sur l'axe ne peut pas être obtenue avec les rayons particuliers, confondus avec l'axe. Il est très maladroit de surcharger inutilement la figure en utilisant un objet fictif AB, en construisant son image $A'B'$ et enfin en déduisant A' par aplanétisme ! La méthode générale de tracé d'un rayon quelconque passant par A donne A' immédiatement, avec un

minimum de construction (laisser apparente la détermination du foyer secondaire).

☐ Ne pas parler d'image si le stigmatisme n'est pas avéré.

☐ Ne pas confondre objet et image : on ne voit pas un objet à travers une lentille, mais son image (pour une observation dans le cadre des conditions de Gauss).

☐ On utilise souvent l'expression « image nette » il s'agit de préciser une netteté maximale dans le cadre d'un stigmatisme approché et en aucun cas de distinguer une image nette parmi d'autres qui ne le seraient pas !

☐ Ne pas évoquer « le foyer » ou « le plan focal » d'une lentille puisque dans chaque cas il y en a deux, mais bien préciser « le foyer objet » ou « le foyer image » d'une part et « le plan focal objet » ou « le plan focal image » d'autre part.

☐ Foyer objet F et foyer image F' ne sont pas conjugués !

☐ Il faut être bien conscient que les constructions théoriques d'image, traduisant le stigmatisme approché des lentilles minces, n'utilisent pas des rayons réels. C'est la raison pour laquelle dans ces constructions les angles sont quelconques, alors que dans la réalité, seuls les rayons peu inclinés permettent d'obtenir une image. En conséquence, indépendamment de leur valeur sur le schéma de construction théorique d'image, il faut, pour tout angle α, considérer :
$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$.
En effet cette approximation est à l'origine même du stigmatisme approché et de l'existence de l'image construite !

☐ Il peut être utile de connaître les formules de conjugaison, même si l'énoncé doit les rappeler. Cela permet de mieux s'adapter aux changements de notation (par exemple $\overline{OA}$ noté x ou p ou d...). Respecter évidemment les notations de l'énoncé.

☐ Choisir entre « formule de Descartes » et « formule de Newton » en fonction des données de l'énoncé ou du résultat cherché (position par rapport au centre ? au sommet ? au foyer ?). Les formules de Newton permettent souvent de conclure plus rapidement. Les expressions de γ découplées par rapport à A et A' sont souvent intéressantes.

☐ Toutes les grandeurs en optique géométrique sont algébriques, c'est-à-dire qu'elles ont un signe ! Ainsi il faut traduire « on photographie un objet à une distance de 5 m ». par $x = \overline{OA} = -5$ m, si l'axe optique est orienté dans la direction de la lumière incidente.

C'est le cas aussi des distances focales, des grandissements,...

Une erreur de signe est de ce fait très mal vue et conduit bien sûr à des applications numériques fantaisistes.

☐ Le grandissement transversal est défini, de façon générale, par $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ qui n'est pas une expression du grandissement. Le grandissement n'est pas caractéristique d'un système, il dépend du couple (A, A').

☐ L'approximation des petits angles, du type $\tan\alpha \approx \alpha$, suppose que l'angle soit exprimé en radians. Il faut s'exercer à convertir des minutes ou secondes d'arc en radians ou l'inverse comme en TP. Rappelons que π rad correspondent à 180°, que 1° est constitué de 60' (minutes d'arc) et que 1' est constituée de 60'' (secondes d'arc).

☐ Lorsqu'un objet est à l'infini (ou du moins à très grande distance par rapport à la distance focale par exemple), il est interdit de le dessiner sur la figure ; tout point de l'objet envoie alors des rayons parallèles entre eux (plus ou moins inclinés sur l'axe optique du système en fonction du point choisi).

☐ Lorsque l'étude porte sur un système de deux lentilles disjointes par exemple, l'image donnée par la première devient objet pour la seconde et l'application successive de deux formules de conjugaison (avec origines différentes !) conduit vite à une formule littérale lourde ; il faut dans ce cas préférer les applications numériques intermédiaires et éviter de substituer une formule littérale dans l'autre.

☐ Un objet virtuel pour un système optique S peut toujours être considéré comme l'image réelle d'un système optique précédent S'. Le système S étant placé trop près de S' empêche les rayons de se couper réellement.

☐ L'unité pratique usuelle dans le commerce, pour les distances focales de lentilles utilisées en TP ou celles des objectifs d'appareils photos, de projecteurs,...est souvent le millimètre ; s'en souvenir et convertir en mètre avant l'application numérique.

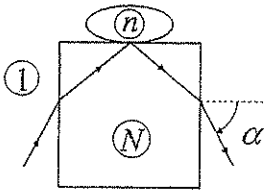
☐ L'unité de vergence est la dioptrie, symbole δ, qui s'identifie à 1 m^{-1}.

Applications directes du cours

Réflexion - Réfraction

21. Un rayon lumineux dans l'air tombe sur la surface d'un liquide ; il fait un angle $\alpha = 56°$ avec le plan horizontal. La déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté est $\theta = 13{,}5°$. Quel est l'indice n du liquide ?

22. Un réfractomètre de Pulrich est constitué d'un bloc de verre de section rectangulaire d'indice N connu, sur lequel on a déposé une goutte d'un liquide d'indice n inconnu. On observe un faisceau de rayons parallèles à la limite réfraction – réflexion totale et on mesure l'angle α correspondant.
Établir l'expression de n en fonction de N et de α.
AN : Calculer n sachant que $N = 1{,}626$ et $\alpha = 60°00'$.



23. Un disque en liège de rayon r flotte sur l'eau d'indice n ; il soutient une tige placée perpendiculairement en son centre.
Quelle est la longueur h de la partie de la tige non visible pour un observateur dans l'air ? Citer les phénomènes mis en jeu.

24. Une personne de taille 1,80 m se tient debout devant une glace plane verticale. Quelle hauteur minimale doit avoir cette glace pour que la personne s'y voie entièrement ? Ce résultat dépend-il de la distance à laquelle se trouve la personne ? Si la glace possède cette dimension minimale, à quelle hauteur convient-il de la placer ?

25. Un rayon lumineux tombe sur un miroir plan ; le miroir tourne d'un angle α, de combien tourne le rayon réfléchi ?

■ Lentilles minces

Pour toutes les questions utiliser les relations données question **19.**.

26. Construire l'image d'un objet réel (d'abord avant F puis après F) par une lentille convergente. Interpréter le résultat en terme de faisceau. Reprendre avec un objet virtuel.

27. Qu'observe-t-on lorsqu'on envoie un faisceau convergent sur une lentille divergente (deux cas sont à distinguer : objet virtuel proche de la lentille, avant F, et objet éloigné, après F) ?

28. Déterminer graphiquement l'image donnée par une lentille mince sphérique **convergente**, utilisée dans les conditions de Gauss, des objets plans suivants perpendiculaires à l'axe optique orienté dans le sens de la lumière incidente. Préciser dans chaque cas les caractéristiques de l'image obtenue (c'est-à-dire réelle ou virtuelle, droite ou renversée, plus grande ou plus petite que l'objet) :

objet réel avant le foyer objet et tel que : $-\infty < \overline{OA} < 2f$ (attention $f < 0$)

objet réel avant le foyer objet et tel que : $2f < \overline{OA} < f$

objet réel entre le foyer objet et le centre optique, tel que : $f < \overline{OA} < 0$

objet virtuel tel que : $0 < \overline{OA} < +\infty$

Décrire l'évolution de l'image lorsque le point objet A décrit l'axe optique ; pour cela s'aider des positions particulières de A : avant F, à $2f'$ de O, en F, en O.

29. Dans le cas d'une lentille mince sphérique **divergente**, reprendre les constructions comme à la question **28.**, en déterminant les divers cas intéressants.

30. L'objectif d'un appareil photographique est assimilé à une lentille convergente (L) de distance focale $f' = 50$ mm. La distance d entre (L) et la pellicule (P) où se forme l'image est variable pour permettre la mise au point. On désire photographier des objets dont la distance à (L) varie entre $D = 0{,}60$ m et $D \to \infty$. Donner les valeurs d_{min} et d_{max} correspondantes ; commentaire.

31. On souhaite projeter un objet lumineux AB sur un écran E placé à une distance D de AB à l'aide d'une lentille convergente de distance focale f'.

Montrer qu'il faut $\boxed{D \geq 4f'}$; condition à retenir.

Il y a alors deux positions possibles, distantes de d, pour la lentille ; en quoi diffèrent-elles ? Il est conseillé de faire un seul schéma avec les deux situations. Exprimer f' en fonction de D et d. Ce calcul correspond à la méthode de Bessel utilisée en TP.

32. Un joaillier veut voir un petit diamant 5 fois plus grand qu'il n'est en réalité, et cela, quand il le tient à 4 cm derrière une loupe (équivalente à une lentille convergente). Quelle doit être la distance focale de la loupe ?

33. La Lune est vue sous un diamètre angulaire $\alpha = 31'$ (minutes d'arc) ; convertir cet angle en radians. On en fait l'image sur un écran à l'aide d'une simple lentille convergente de distance focale $f' = 50$ cm. Où est placé l'écran et quel est le diamètre de l'image ?

34. Un objet virtuel est placé à 2 cm d'une lentille divergente de distance focale -3 cm. Faire la construction de l'image à l'échelle et déterminer sa position ainsi que le grandissement transversal, sur le dessin et par le calcul.

35. Comment déterminer graphiquement, pour une lentille convergente, le couple de points conjugués, pour un grandissement transversal donné, par exemple $\gamma = 2$? Même question avec une lentille divergente.

36. Projecteur de diapositives

On désire projeter un objet lumineux AB sur un écran E placé à une grande distance D de AB à l'aide d'une lentille convergente. Sachant que le grandissement souhaité, en valeur absolue, est $a = |\gamma| > 1$, exprimer la distance focale f' en fonction des données.

AN : De l'objet à l'image, on souhaite passer de 3,0 cm (côté moyen d'une diapositive) à 2,0 m pour $D = 5{,}0$ m ; que doit valoir f' ?

37. Principe d'une lunette astronomique

Une lunette est constituée de deux lentilles convergentes et l'objet est à l'infini, vu sous un angle α petit. L'objectif ($f_1' = 100$ cm) donne une petite image observée à travers l'oculaire ($f_2' = 2$ cm) afin d'être vue à l'infini sous un angle α'.

Faire un dessin et donner le grossissement $G = \alpha' / \alpha$ de la lunette. Cette lunette astronomique peut-elle servir à des observations terrestres ? Expliquer.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

Pour toutes les questions utiliser les relations données question **19.**.

38. La phrase « Je te vois, donc tu me vois » illustre-t-elle correctement le principe du retour inverse de la lumière ? Une glace sans tain suit-elle ce principe ?

39. Pour des jumelles d'une certaine taille, la distance entre les centres des objectifs d'entrée est supérieure à la distance moyenne entre les deux yeux ; comment est-ce possible ?

40. Un thermomètre à mercure est constitué d'une gaine cylindrique de mercure remplissant un tube creux, coaxial, en verre. Pourquoi le diamètre apparent de la gaine de mercure est-il supérieur à son diamètre réel ?

41. Un milieu « non homogène » possède un indice de réfraction variant d'un point à un autre ; le milieu est dit stratifié en couches lorsque l'indice ne varie que suivant une direction (Oz par exemple) et donc qu'il reste néanmoins uniforme dans un plan perpendiculaire (ici tout plan xy). Quelle conséquence en déduit-on sur la trajectoire du rayon lumineux ?

* Un cristallisoir est rempli d'eau sucrée (le sucre a été déposé en grande quantité au fond sans remuer). Un faisceau laser arrive dans cette solution ; montrer qu'il est dévié, dans quel sens ?
* Comment l'indice de l'air évolue-t-il avec l'altitude terrestre ? Comment est alors dévié un rayon pénétrant dans l'atmosphère ? Quel problème pose aux astronomes cette réfraction atmosphérique pour la détermination des positions des étoiles ?
* Comment doit varier l'indice d'une fibre optique du centre vers le bord, pour qu'un rayon puisse avoir une trajectoire d'allure sinusoïdale ? Intérêt ?
* Qu'appelle-t-on « mirage » ?

42. Expliquer le principe d'un dispositif optique simple (appelé « oeil de chat ») constitué de trois miroirs plans perpendiculaires en forme de coin, et qui renvoie un faisceau laser dans la direction incidente. Dans quel but un tel système a-t-il été disposé sur la Lune lors de la première mission Apollo en 1969 ?

43. Montrer qualitativement, avec les lois de la réfraction (sur les deux dioptres) appliquées à des rayons (faire le dessin) venant parallèlement à l'axe, qu'une lentille, formée de deux dioptres sphériques et à bord mince, fait converger le faisceau vers l'axe optique ; justifier le nom d'une telle lentille. Et pour une lentille à bord épais ?

44. Où converge un faisceau de rayons incidents parallèles, d'inclinaison quelconque sur l'axe d'une lentille convergente ?

45. En tenant compte de la nature ondulatoire de la lumière et des vitesses différentes en fonction de l'indice, montrer qu'un faisceau de rayons parallèles arrivant sur un dioptre plan, avec une incidence quelconque est réfracté suivant la loi de Descartes.

46. Avec un système optique de type microscope ou viseur, on souhaite faire une observation visuelle de l'image fournie ; doit-elle être réelle ou virtuelle ? Avec un système optique du type projecteur, on souhaite observer la projection de l'image par réflexion sur un écran ; doit-elle être réelle ou virtuelle ?

47. Un laser est un faisceau lumineux cylindrique dont le diamètre est de l'ordre du millimètre. Comment procéder pour élargir ce faisceau jusqu'à lui donner un diamètre de quelques centimètres, en utilisant une lentille divergente et une lentille convergente ?

48. Pythéas fait la sieste après avoir posé ses lunettes à côté de lui sur l'herbe. Le Soleil brille et au bout d'un certain temps, l'herbe s'enflamme. Pythéas cherche à récupérer ses lunettes mais ne les voit pas car il est très myope (il ne voit que les objets très proches). Commentaire !

49. Rappeler par des schémas le principe de la loupe, avec et sans accommodation pour l'observateur (en expliquant ce que cela signifie).

50. L'œil myope a un cristallin trop convergent (l'image d'un objet lointain se forme en avant de la rétine). Quel type de verres correcteurs faut-il prescrire à un myope qui voit flou au delà de 2 m , avec quelle vergence exprimée en dioptries ?

51. L'œil est astigmate lorsque le cristallin n'est pas sphérique, par exemple lorsqu'il a un rayon de courbure différent dans deux directions perpendiculaires de son plan moyen. Montrer par un dessin qu'il n'existe plus alors de foyer image ponctuel, d'où la gêne ; comment peut-on y remédier ?

52. L'ophtalmologiste, en faisant effectuer des tests de lecture « ZU » commence en lumière blanche et finit toujours avec des filtres vert et rouge ; pourquoi ?

53. Quand on parle d'un appareil photo 24×36 (donc forcément argentique !), que signifient les nombres 24 et 36 ? En quelle unité sont-ils ? Quelle est la (distance) focale d'un objectif standard ? Donner les gammes de focales pour un grand angle, un téléobjectif. Qu'est-ce qu'un zoom ? Quelle différence y a-t-il entre une pellicule de 100 et une de 400 ISO ?

54. La cellule ou capteur CCD (acronyme de Charged Couple Device = dispositif à transfert de charge) d'un appareil photo numérique est une puce à 20 pattes de petite taille : un rectangle de 8,8 mm sur 6,6 mm pour un appareil de 4 MégaPixels. Quelle est la taille du pixel (pour Picture Element = photosite), supposé de forme carré ? Pourquoi doit-il être petit ?

Exercices

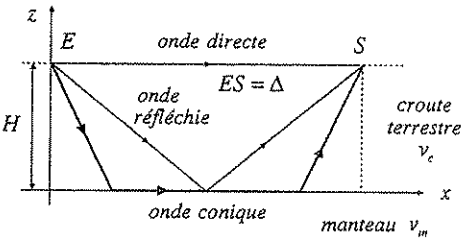
Pour toutes les questions utiliser les relations données question **19.**.

55. Propagation des ondes sismiques (*)

À la suite d'un séisme, des ondes sismiques se propagent à partir de l'épicentre E. On suppose que ces ondes ont un comportement analogue à celui des ondes lumineuses : leur propagation est rectiligne dans un milieu homogène et vérifie les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction. On assimile la séparation croûte terrestre / manteau à un dioptre plan. Dans la croûte terrestre, la vitesse de propagation des ondes est v_c et dans le manteau $v_m > v_c$. On peut faire apparaître l'équivalent d'un indice pour chaque milieu en notant $n_c = c/v_c$ l'indice pour la croûte terrestre et $n_m = c/v_m$ l'indice pour le manteau (c est une vitesse de référence).

a) Montrer que, pour une onde incidente provenant de la croûte terrestre et faisant un angle d'incidence i avec la normale au dioptre, il existe un angle limite i_l au-delà duquel la réfraction n'est plus possible. Exprimer i_l en fonction de v_c et v_m. Qu'observe-t-on pour $i > i_l$?

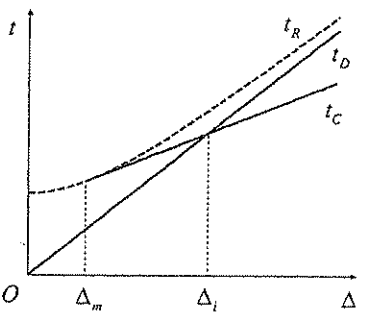
Lorsqu'un séisme a lieu, le sismographe S enregistre 2 ou 3 signaux : une onde directe, une onde réfléchie et une onde nommée « conique », qui frappe le dioptre avec l'angle limite i_l, se propage dans le manteau en rasant la surface de séparation, puis ressort avec le même angle.



Sur la figure, H représente l'épaisseur de la croûte terrestre et Δ la distance entre l'épicentre E du séisme et la station sismique S.

b) Déterminer la distance minimale Δ_m entre l'épicentre et le sismographe, pour que l'onde conique puisse être détectée, en fonction de H, v_c et v_m.

c) Le sismographe est placé à une distance $\Delta > \Delta_m$. Calculer, en fonction de H, Δ, Δ_m, v_c et v_m, les temps de parcours des 3 ondes, t_D pour l'onde directe, t_R pour l'onde réfléchie et t_C pour l'onde conique. On donne ci-contre les graphes t_D, t_R et t_C en fonction de Δ. Préciser le comportement des courbes lorsque $\Delta \gg H$.

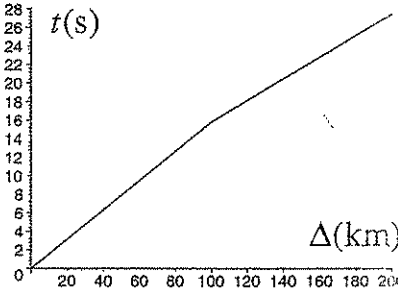


Déterminer la distance Δ_l à partir de laquelle l'onde la plus rapide n'est plus l'onde directe.

d) Dans le cas où l'onde sismique est émise à une distance $\Delta < \Delta_m$, exprimer la profondeur de la croûte terrestre H en fonction de la durée τ qui sépare l'arrivée d'une onde directe et d'une onde réfléchie.

AN : Dans les Alpes, on a relevé une valeur $\tau = 3{,}91$ s, à une distance épicentrale $\Delta = 105{,}5$ km ; la vitesse d'une onde sismique dans la croûte terrestre au niveau des Alpes est environ $v_c = 6{,}25$ km.s^{-1} ; déterminer la profondeur H.

Pour déterminer de façon plus précise la constitution du globe terrestre, les géophysiciens provoquent des explosions détectées par un réseau de stations sismiques. Ainsi il est possible de relever le temps de détection t le plus court (moment des premières variations du sismographe) en fonction de Δ. Le graphe obtenu est reproduit ci-contre.



e) Comment interpréter cette courbe par rapport au graphe obtenu en c) ? Quelles ondes sont ainsi détectées ?
AN : À partir de la figure, déterminer v_m, v_c, H et Δ_m.

56. Image par une lame à faces parallèles

a) Une lame à faces parallèles d'épaisseur e est constituée d'un verre d'indice n ; elle est placée dans l'air. L'objet est un point A, l'image finale, si elle existe, le point A'. Déterminer $\overline{AA'}$ dans les conditions de Gauss. Ce résultat reste-t-il vrai en dehors du domaine paraxial ?

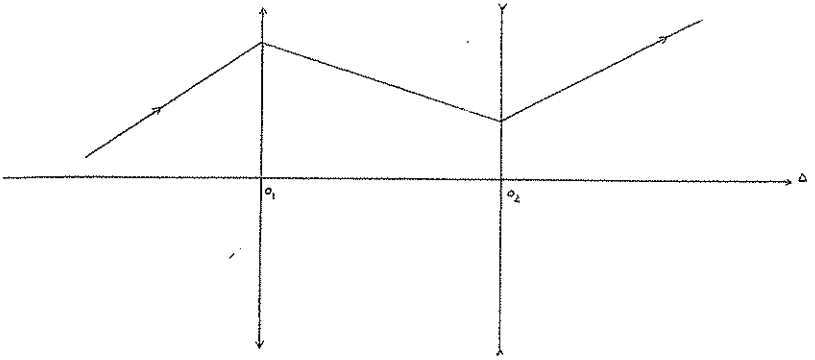
b) Un amateur de poissons visite un parc aquatique où les aquariums ont une épaisseur de verre de 60 cm. Situé à 20 cm devant la vitre, il observe un requin marteau nageant à 1,0 m devant lui. À quelle distance le squale semble-t-il être pour l'observateur ? (les indices de l'air, de l'eau et du verre sont respectivement : $n_a = 1{,}00$, $n_e = 1{,}33$ et $n_v = 1{,}50$).

57. Étude graphique d'un doublet

Un doublet de deux lentilles minces L_1 (convergente) et L_2 (divergente), de centre O_1 et O_2 est représenté ci-dessous. Sur la gauche un rayon incident pénètre dans le système et émerge sur la partie droite, la figure est à l'échelle 1/1.

a) Trouver graphiquement la position des foyers principaux objet et image de chaque lentille, notés respectivement F_1 et F_1' pour L_1 et F_2 et F_2' pour L_2. On fera clairement apparaître la construction graphique.

b) Définir le foyer principal objet F et le foyer principal image F' de l'ensemble du doublet. Déterminer graphiquement les positions de F et F'.



58. Appareil photographique

L'objectif d'un appareil photographique est modélisé par une lentille mince convergente de distance focale $f' = 38{,}0$ mm. Le diaphragme d'ouverture de l'objectif a un diamètre réglable : $2R = \dfrac{f'}{N}$, où N, appelé nombre d'ouverture, peut varier de 2,0 à 11,0. Les bagues de réglage d'ouverture des objectifs sont graduées avec N. La pellicule argentique a une structure granulaire ; la tache image d'un objet ponctuel a le diamètre d'un grain : $a = 30$ µm.

a) L'objectif est mis au point sur l'infini.

1) On photographie, à $D = 2{,}0$ km, le plus haut pylône du viaduc de Millau de hauteur $h = 343$ m (19 m de plus que la tour Eiffel). Où se trouve l'image, et donc la pellicule ? Calculer la hauteur h' de cette image.

2) Calculer, en fonction de N, a et f', la distance minimale D_m d'un point objet A à l'objectif qui donne une image aussi nette qu'un point à l'infini. Faire l'application numérique pour les deux valeurs extrêmes de N et conclure.

b) L'objectif est mis au point sur un coureur de 100 m, situé à $p = 30$ m, se déplaçant perpendiculairement à l'axe optique avec une vitesse $V = 36$ km.h^{-1}. Quel temps de pose maximal (durée d'exposition) peut-on choisir pour que le mouvement du coureur ne détériore pas la netteté de la photographie ?

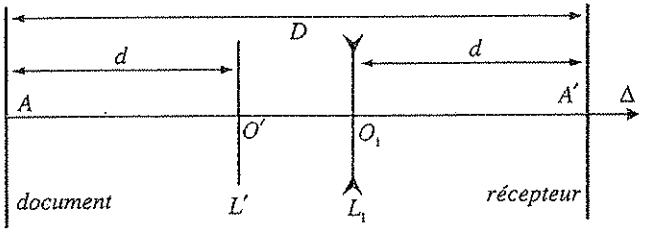
59. Objectif de photocopieur

Un objectif de photocopieur permet la formation de l'image d'un document sur une surface photosensible. La reproduction du document, format A4, peut être faite dans le même format ou dans un format A3 (surface double) ou dans un format A5 (surface moitié). Ces réglages se font en modifiant les positions respectives des lentilles à l'intérieur de l'objectif.

La distance document-récepteur est $D = 384$ mm ; on place une première lentille mince divergente L_1, de distance focale image $f'_1 = -90$ mm, à $d = 180$ mm du récepteur.

a) La lentille L_1 peut-elle donner une image du document sur le récepteur ?

b) On ajoute alors une lentille mince L' devant le lentille L_1 à $d = 180$ mm du document.



1) La lentille L' peut-elle être divergente ?
2) Quelle doit-être la distance focale image f' de la lentille L' pour obtenir une image réelle du document sur le récepteur ?
3) En déduire le grandissement γ_1 de l'association des deux lentilles et indiquer le type de tirage réalisé : A4 en A3 ou A4 en A5.

c) En fait la lentille L' est constituée de deux lentilles accolées L_2 et L_3, L_2 étant identique à L_1. Calculer la distance focale image f'_3 de L_3. Quelle est la nature de L_3 ?

d) On glisse alors la lentille L_3 afin de l'accoler à L_1. Montrer que l'image du document reste sur le récepteur et calculer le grandissement γ_2 correspondant à cette nouvelle association, en déduire le type de tirage obtenu.

60. L'œil

L'œil peut être modélisé, en première approximation, par une lentille convergente de distance focale variant dans certaines limites (le cristallin) et par une surface sensible analogue à un écran (la rétine).

Vision distincte

L'œil voit nettement un objet lorsque l'image qu'en donne le cristallin se forme sur la rétine. Pour qu'il en soit ainsi, l'œil « accommode » en faisant varier la courbure du cristallin.

Lorsque l'œil n'accommode pas, un objet vu nettement est situé en un point appelé *Punctum Remotum* (PR). Pour un œil normal, celui-ci se trouve à l'infini ; pour un œil myope, il est plus rapproché.

L'accommodation permet de voir nettement des objets à distance finie : la distance minimale d'observation correspond au *Punctum Proximum* (PP). Dans la suite on note *pp* la distance séparant le PP du cristallin.

Un œil myope particulier est équivalent à une lentille convergente dont le centre optique est à une distance $\delta = 1{,}52$ cm du fond de l'œil. La distance focale vaut

$f_1 = 1{,}50$ cm quand l'œil n'accommode pas et elle vaut $f_2 = 1{,}37$ cm lorsqu'il accommode au maximum.

a) Faire un schéma avec un œil myope regardant un objet à l'infini ; commentaire.

b) Quelles sont les limites de vision distincte ? Comparer à un œil normal.

Pouvoir séparateur

L'expérience montre que deux images ponctuelles a' et b' sur la rétine ne sont différenciées par le cerveau que si elles sont écartées au moins d'une distance minimum d. Les points objets correspondants ne sont donc différenciés que si l'angle sous lequel l'œil les voit est supérieur à une valeur limite ε (le pouvoir séparateur).

c) Sachant que ε est de l'ordre d'une minute d'angle (soit 3.10^{-4} rad), déterminer la distance minimale ab des deux points a et b que peut distinguer un œil normal de $pp = 25$ cm ; quel est dans ce cas la distance focale f du cristallin et la distance $d = a'b'$ des images ? Calculer également ab pour un œil myope de $pp = 7{,}5$ cm et conclure.

61. Grossissement commercial d'une loupe

α est l'angle sous lequel est vu un petit objet à l'œil nu lorsqu'il est placé à la distance minimale de vision nette (*punctum proximum*) $pp = 25$ cm. α' est l'angle sous lequel est vue l'image à l'infini de ce même objet (donc sans accommodation) à travers une lentille convergente de distance focale f'. Les angles sont arithmétiques (non orientés).

Donner le grossissement commercial défini par $G_c = \alpha' / \alpha$.

Une loupe porte l'inscription ×4 ; quelle est sa distance focale f' ?

62. Le microscope

Le microscope permet d'observer des objets proches mais minuscules, qui ont un diamètre trop petit pour être distingués à l'œil nu.

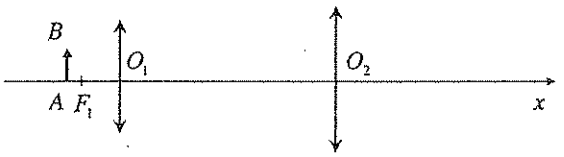
Principe

Un microscope peut être considéré comme un système de deux lentilles minces convergentes :

– l'objectif, très convergent, de centre O_1, de distance focale $f_1' = \overline{O_1F_1'} = 4{,}0$ mm

– l'oculaire, de centre O_2, de distance focale $f_2' = \overline{O_2F_2'} = 4{,}0$ cm

centrés toutes les deux sur le même axe et distantes de $D = \overline{O_1O_2}$



a) Représenter, sans respecter l'échelle, la marche d'un faisceau de 3 rayons issus du point B d'un objet AB légèrement en avant de F_1 (A étant sur l'axe optique) dans les deux cas suivants :
- la distance objectif – oculaire D est telle que l'image de AB donnée par l'objectif (image intermédiaire A_1B_1) se forme entre O_1 et F_2 ;
- D est telle que A_1B_1 se forme entre F_2 et O_2.

Expliquer quel cas convient pour un microscope.

b) La distance D est fixée par construction à 20 cm . La mise au point se fait par déplacement de l'ensemble objectif – oculaire par rapport à l'objet. Déterminer les positions de l'image intermédiaire A_1B_1 et de l'image finale $A'B'$, repérées respectivement par $\overline{O_1A_1}$ et $\overline{O_2A'}$ d'un objet se trouvant en A tel que $\overline{O_1A} = -4{,}1$ mm . Déterminer également le grandissement γ du système en fonction des grandissements γ_1 et γ_2 de chaque lentille et faire l'AN.

Mise au point et profondeur de champ

Pour éviter à l'œil la fatigue de l'accommodation lors d'une observation qui peut être longue, l'image $A'B'$ doit être à l'infini pour un œil normal.

c) Où doit se former l'image intermédiaire pour qu'il en soit ainsi ? Donner la position de l'objet dans ce cas, au $1/1000^e$ de mm.

d) Déterminer la profondeur de champ maximale, c'est-à-dire la distance Δx entre la position d'un objet vu sans accommoder et celle d'un objet vu en accommodant au maximum pour un œil normal (PR à l'infini, $pp = 25$ cm), placé en F_2' foyer principal image de l'oculaire. Conclure, compte tenu de la valeur numérique de Δx , sur la façon de mettre au point avec un microscope.

Puissance et grossissement (ces grandeurs sont prises positives)

On définit la puissance d'un microscope par la quantité $P = \alpha' / AB$, α' étant le diamètre apparent de l'image finale (c'est-à-dire l'angle sous lequel on la voit) et AB la dimension de l'objet (P est exprimée en dioptries).

e) Refaire une construction à 3 rayons faisant apparaître α', dans le cas de la vision à l'infini. Calculer P_i (puissance intrinsèque) définie comme la puissance dans le cas de la vision à l'infini. Application numérique.

On définit le grossissement par $G = \alpha' / \alpha$, rapport des diamètres apparents à travers le microscope en vision à l'infini et à l'œil nu au *Punctum Proximum*.

f) Relier G à P_i et pp . Application numérique pour l'œil de $pp = 25$ cm .

63. Lunette astronomique

On représente une lunette astronomique par deux lentilles minces convergentes : l'objectif L_1 de focale $f_1' = 80$ cm , diamètre $D = 60$ mm , et l'oculaire L_2 de focale $f_2' = 6{,}0$ mm .

La lunette est réglée à l'infini (c'est-à-dire qu'elle donne d'un objet à l'infini une image à l'infini).

a) Quelle est la distance h entre L_1 et L_2 ? Quel est l'intérêt de ce réglage ?

b) Représenter sur un schéma, sans respecter l'échelle, le devenir d'un rayon incident faisant un angle α avec l'axe optique et émergeant sous un angle α' dans les conditions de Gauss.

c) Déterminer l'expression du grossissement angulaire $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ de la lunette en fonction de f_1' et f_2'.

d) Au moment de l'observation : la distance Terre-Mars est égale à $7{,}0.10^7$ km, diamètre de Mars 6 800 km ; la distance Terre-Lune est égale à $3{,}8.10^5$ km, diamètre de la Lune 3 400 km. Si on estime l'angle maximal sous lequel l'observateur voit l'image, à environ 30°, cet observateur voit-il Mars en entier ? Même question pour la Lune.

e) Tous les rayons incidents qui pénètrent dans l'objectif de la lunette donnent des rayons émergents qui, à la sortie de l'instrument, passent à l'intérieur d'un cercle appelé « cercle oculaire » ; montrer qu'il s'agit de l'image de l'objectif par l'oculaire.

1) Établir la relation qui lie le diamètre d du cercle oculaire, le diamètre D de l'objectif et le grossissement G.
2) Quelle est la position du cercle oculaire par rapport à l'oculaire ?
3) Où faut-il placer l'œil pour avoir une observation optimale ? Quelle taille maximale le cercle oculaire ne doit-il pas dépasser *a priori*, lors d'une observation visuelle ?

f) Lorsqu'on observe une étoile à l'aide de la lunette, l'image paraît ponctuelle. Quel est alors l'intérêt de la lunette ?

Travaux pratiques

64. La vérification expérimentale de la loi de Descartes sur la réfraction est conduite avec un dioptre air / plexiglas ; l'étude doit permettre une mesure de l'indice du plexiglas.
Le matériel utilisé est assez rudimentaire : disque optique (voir la partie vérification d'une loi physique du chapitre **0**) et un hémi cylindre de plexiglas. Le point d'incidence est le centre du disque sur lequel se trouvent les graduations. L'incidence i varie par rotation du disque, ce qui permet le relevé des valeurs expérimentales de i (angle d'incidence) et r (angle de réfraction). Ci-dessous sont portées directement les valeurs de $\sin i$ et $\sin r$:

$\sin i$	0	0,09	0,195	0,34	0,50	0,64	0,765	0,87	0,94
$\sin r$	0	0,065	0,1	0,235	0,34	0,44	0,51	0,59	0,64

Faire une étude graphique des données expérimentales, conclure sur la loi de Descartes et donner une mesure de l'indice du plexiglas avec son incertitude.

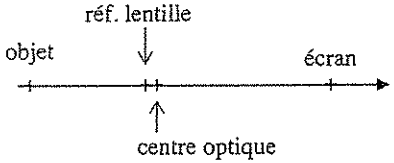
65. On dispose d'une lentille non marquée ; comment savoir si elle est convergente ou divergente ?

66. Un objet de petite taille (miroir d'un Michelson d'environ 2 cm) doit être projeté sur un écran à distance fixe (environ 1,50 m). Laquelle des deux lentilles marquées 100 mm ou 200 mm en donne le meilleur grandissement ?

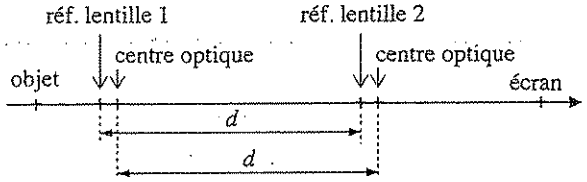
67. Méthode d'autocollimation. On accole une lentille mince convergente de distance focale f' et un miroir plan. On éclaire ce dispositif au moyen d'un petit objet lumineux. Montrer que lorsque celui-ci est à une distance f' du dispositif, l'image se forme dans le plan de l'objet. À quoi sert cette méthode ?

68. **Méthode de Bessel**

Pour la mesure de la distance focale d'une lentille convergente, on peut utiliser la méthode d'autocollimation (mesure unique) ou les relations de conjugaison (traitement graphique possible), ces deux méthodes présentent une erreur systématique liée à la position inconnue du centre optique de la lentille réelle (d'épaisseur non nulle). On mesure en effet les distances objet-lentille et écran-lentille, en considérant une référence pour la position de la lentille systématiquement décalée par rapport au centre optique inaccessible.



Dans la méthode de Bessel (voir la question **31.**), on mesure la distance entre deux positions de la lentille (le décalage systématique se simplifie dans la différence). L'autre mesure est la distance écran-objet qui ne présente pas ce problème.



Pour $D > 4f'$, si d est la distance entre les deux positions possibles de la lentille :

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

Une série de mesure permet un traitement statistique.
Ci-dessous des mesures expérimentales :

D (cm)	60	70	80	90	100	120	130
d (cm)	15,6	31,5	42,6	54,3	66,2	86,6	97,1

Comment la relation de Bessel peut-elle être validée graphiquement ?
Encadrer la distance focale par un traitement statistique.

69. Une lentille convergente donne d'un objet O, sur un écran E, une image nette et plus grande que l'objet. L'écran est déplacé de façon telle que la distance OE augmente; de quel côté (sans calcul) faut-il déplacer la lentille pour retrouver l'image ? Est-elle plus grande ou plus petite que la précédente ?

70. Quelles méthodes peut-on proposer pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente ? Quelles sont les avantages et inconvénients de chacune de ces méthodes ? Comment procéder pour mesurer la distance focale d'une lentille divergente ?

71. Est-ce une bonne idée en focométrie de diaphragmer la lentille pour améliorer le stigmatisme et la précision des mesures en augmentant la netteté des images ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Définitions et lois de l'optique géométrique

1. La puissance lumineuse transportée et la nature spectrale (ou « couleur »). La lumière peut être décrite comme une onde (électromagnétique). Si l'onde est sinusoïdale (on dit harmonique), elle est caractérisée par sa pulsation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, où f est la fréquence et T la période.

   Les sources lumineuses émettent en général une superposition d'ondes de différentes fréquences ou pulsations.

   L'œil distingue les ondes lumineuses de pulsations différentes sous forme de couleurs différentes. Pour cette raison la lumière composée d'ondes de même pulsation est appelée monochromatique.

   Les ondes électromagnétiques se propagent *dans le vide* à la vitesse $c \approx 3.10^8\ \text{m.s}^{-1}$. Dans un milieu matériel transparent une onde lumineuse se propage à une vitesse inférieure qui dépend de sa pulsation. Par définition la longueur d'onde (période spatiale) est $\lambda = vT$ où v est la vitesse de l'onde. La longueur d'onde dépend donc non seulement de la pulsation de l'onde monochromatique, mais aussi du milieu dans lequel elle se propage !

   La caractéristique spectrale est donc fondamentalement la pulsation, néanmoins on utilise souvent pour cette caractéristique la longueur d'onde dans le vide (en imposant donc le milieu). Ceci est quasi systématique en optique géométrique où les longueurs d'onde dans le vide sont souvent appelées longueurs d'onde, et servent à décrire la caractéristique spectrale de l'onde lumineuse.

   L'œil n'est sensible qu'aux $\lambda \in [400\ \text{nm}, 800\ \text{nm}]$, 400 nm correspondant sensiblement au violet et 800 nm au rouge ($1\ \text{nm} = 10^{-9}\ \text{m}$). Il s'agit de valeurs numériques de longueurs d'onde dans le vide.

   Ceci ne correspond qu'à une très petite partie du spectre. En dessous de 400 nm on a le domaine de l'ultraviolet et au-dessus de 800 nm le domaine de l'infrarouge.

   Le maximum de sensibilité de l'œil correspond à $\lambda = 560$ nm (jaune-vert).

   La superposition de tous les λ visibles donne une lumière blanche. Mais à l'inverse avec seulement quelques λ répartis sur le spectre visible, la lumière apparaît à l'œil comme blanche.

   En optique géométrique, sauf indication contraire de l'énoncé, la lumière est monochromatique.

2. Pour être dans le cadre de l'optique géométrique, il faut que les dimensions des systèmes étudiés soient très grandes devant la longueur d'onde de la lumière

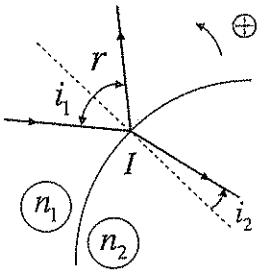
($\lambda \approx 0{,}5$ µm) soit typiquement $d \geq 1000\lambda \approx 0{,}5$ mm ; c'est le cas des systèmes optiques usuels (lentilles, prisme,...) qui mesurent toujours plusieurs cm. L'optique géométrique ne s'applique pas lorsque la lumière passe par une fente très fine (il se produit alors un phénomène de diffraction) ou lorsqu'elle traverse une solution avec particules (diffusion).

3. La vitesse de la lumière dans un milieu transparent est $\boxed{v = c/n}$ où $c = 300.000$ km/s $= 3.10^8$ m.s^{-1} est la vitesse de la lumière dans le vide et n l'indice du milieu (sans unité) aussi appelé indice de réfraction (plus n est grand, plus le milieu est dit réfringent). Comme $v \leq c$, on a toujours $n \geq 1$.
La vitesse et donc l'indice dépendent de la pulsation de l'onde : l'indice n dépend de la longueur d'onde (sous-entendu dans le vide).

4. Dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite. Un rayon lumineux matérialise la trajectoire de l'énergie lumineuse entre deux points de l'espace ; c'est la limite d'un faisceau dont la section est très petite (on parle aussi de pinceau lumineux, comme avec un laser). En cas de réflexion(s) ou de réfraction(s), le rayon lumineux est constitué d'une suite de segments de droite.

5. On appelle dioptre la surface polie (irrégularités de la surface inférieures à λ) séparant deux milieux d'indices différents, par exemple le dioptre plan qui sépare un plan d'eau (très) calme et l'air, le dioptre sphérique qui sépare une lentille en verre et l'air...Le plan d'incidence en un point d'un dioptre est le plan défini par le rayon incident en ce point et la normale au dioptre en ce point.

6. 1ère loi de Descartes : les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence, de l'autre côté de la normale par rapport au rayon incident.



2e loi de Descartes : (les angles sont orientés par rapport à la normale, algébriquement suivant le sens indiqué)

– pour la réflexion : $\boxed{r = -i_1}$

– pour la réfraction : $\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$

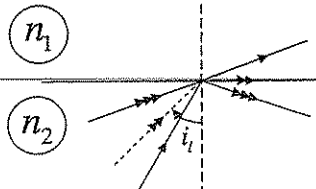
Pour cette dernière relation :

$n_2 > n_1 \Rightarrow \sin i_2 < \sin i_1$ (si i_1 et i_2 sont positifs) ou plus généralement $|i_2| < |i_1|$, soit :

« En passant dans un milieu plus réfringent, le rayon se rapproche de la normale », c'est le cas sur la figure.

L'optique géométrique ne prévoit pas les intensités lumineuses relatives des faisceaux réfléchi et réfracté par rapport au faisceau incident.

7. Supposons $n_2 > n_1$ (les rayons se rapprochent de la normale) et considérons i_1 et i_2 positifs ; lorsque i_1 passe de 0 à $\pi/2$, i_2 passe de 0 à i_l



avec $\boxed{\sin i_l = n_1 / n_2 < 1}$: i_l est l'angle de réfraction limite.

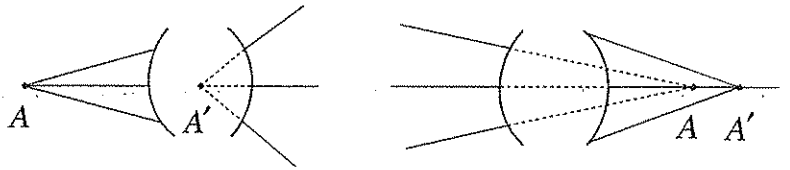
Si maintenant la lumière vient du milieu 2 vers le milieu 1 (les rayons s'écartent de la normale), le passage peut se faire tant que $i_2 < i_l$ (rayon 1), mais pour un angle d'incidence supérieur à l'angle limite (rayon 3), le rayon ne sort plus du milieu 2 : le dioptre se comporte comme un miroir, il y a réflexion totale (avec $r = -i_2$), on utilise le qualificatif *totale* par opposition à la réflexion partielle qui existe toujours.

La réflexion totale ne peut se produire que lors du passage dans un milieu moins réfringent, elle se produit dès que l'angle d'incidence dépasse i_l.

Applications : la fibre optique, la fontaine lumineuse, et pour l'interface verre / air ($i_l = 42° < 45°$), le prisme à réflexion totale (périscope, jumelles, viseur d'appareil photo...).

Formation d'images

8. Un point objet est un point de rencontre des rayons lumineux (ou de leurs prolongements) arrivant sur le système (les rayons incidents). Un point image est un point de rencontre des rayons lumineux (ou de leurs prolongements) ressortant du système (les rayons émergents).
Il faut pour cela suivre les rayons dans le sens de la propagation de la lumière (c'est-à-dire en général de gauche à droite).
Lorsque les rayons se rencontrent effectivement, on dit que le point objet ou point image est réel. Lorsque seuls les prolongements des rayons se rencontrent, on dit que le point objet ou point image est virtuel.



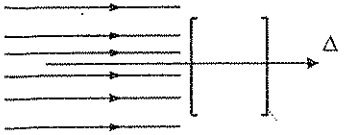
Dessin de gauche : A est un objet réel et A' est une image virtuelle (observable à l'œil mais non projetable).
Dessin de droite : A est un objet virtuel et A' est une image réelle (peu observable à l'œil mais projetable).
Ces définitions peuvent être mises en défaut si un second système est placé après le système étudié. Supposons que pour le système étudié, A' soit une image réelle, et qu'un second système, placé derrière le système étudié ait sa face d'entrée avant le point A' : les rayons ne se coupent plus en A', mais seulement leurs prolongements. Pourtant A' reste une image réelle du système étudié et se comporte comme un objet virtuel pour le second système.

Il est plus sûr d'utiliser les définitions suivantes, pour un système dioptrique :
Un objet est réel s'il se trouve avant la face d'entrée, virtuel s'il est après.
Une image est réelle si elle se trouve après la face de sortie, virtuelle si elle est avant.

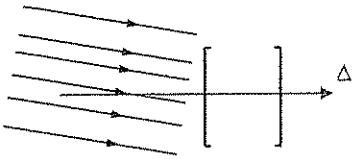
Les définitions s'appliquent à un système avec miroir (catadioptrique), lorsque la face d'entrée est aussi la face de sortie.

9. C'est un système centré.
Un rayon arrivant suivant l'axe optique n'est pas dévié (ni décalé). En effet au point d'intersection avec l'axe optique, dioptres et miroirs du système ont pour normale l'axe optique Δ lui-même.

10. a) Si la source ponctuelle est à l'infini sur l'axe, le système reçoit un faisceau de rayons parallèles et parallèles à l'axe optique. L'étendue de ce faisceau est arbitrairement grande.



b) Si la source ponctuelle est à l'infini en dehors de l'axe, c'est le cas précédent avec une rotation du système. Le système reçoit un faisceau de rayons parallèles, inclinés sur l'axe optique d'un angle égal à l'angle entre l'axe optique et la ligne de visée.



c) Source étendue à l'infini (exemples : le Soleil, la Lune). On la considère comme un ensemble de sources ponctuelles. Le système reçoit un ensemble de faisceaux parallèles, d'inclinaisons comprises, par exemple, entre 0 et α (source au-dessus de l'axe, base sur l'axe) ou entre $-\alpha/2$ et $+\alpha/2$ (source centrée sur l'axe), si α est l'angle sous lequel on voit la source étendue.

11. Un système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple de point A et A' si tout rayon passant par A avant traversée du système passe par A' après cette traversée : on dit alors que les points A et A' sont conjugués par rapport au système.
Si A est un point objet, A', conjugué de A, est appelée image de A.
Un système optique centré et stigmatique (tout point objet a une image) est aplanétique si l'image d'un objet plan, perpendiculaire à l'axe optique, est plane et également perpendiculaire à l'axe.

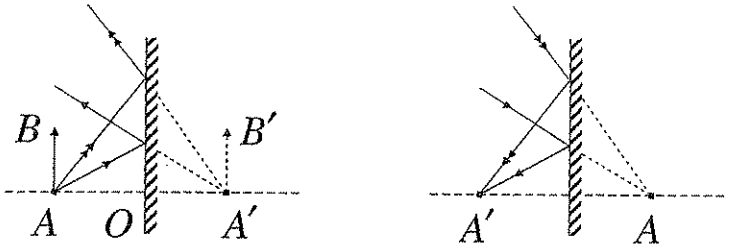
12. Même s'il y avait stigmatisme du point de vue de l'optique géométrique, les propriétés ondulatoires de la lumière font que les images ne sont pas rigoureusement ponctuelles, mais sont des taches de diffraction. Par ailleurs le pouvoir de résolution de l'œil (lié à la taille des cellules rétiniennes) ou la taille des grains d'une émulsion photographique ou celle des pixels d'un appareil numérique font que l'on peut se contenter d'un stigmatisme approché (voir cette notion sur l'exemple du dioptre plan, question **14.**).
Dans les conditions de Gauss, les rayons coupent les dioptres près de l'axe optique et les inclinaisons des rayons sur l'axe sont faibles.
On peut se placer dans ces conditions, en limitant les dimensions de la face d'entrée du système, autour du point d'intersection avec l'axe optique, grâce à un diaphragme.

Miroirs plans et dioptres plans

13. Un miroir plan est rigoureusement stigmatique : tout rayon passant par un point objet A, « passe » après réflexion par un même point A'. Le point A' est l'image de A, il est symétrique de l'objet par rapport au miroir :

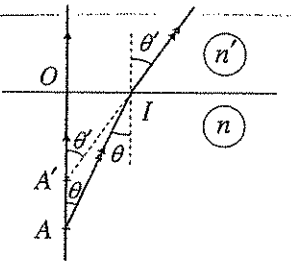
$$\boxed{\overline{OA'} = -\overline{OA}}$$

L'invariance par translation le long du miroir assure l'aplanétisme avec un grandissement : $\boxed{\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1}$



Sur le schéma de gauche A est un objet réel, son image A' est virtuelle ; le faisceau divergent issu de A continue de diverger après réflexion sur le miroir en semblant provenir de A' (c'est le principe de l'éclairage indirect). Sur le schéma de droite A est un objet virtuel, son image A' est réelle ; le faisceau convergent continue de converger après réflexion sur le miroir (miroir de renvoi pour l'observation latérale à l'extrémité d'un télescope par exemple).
Dans tous les cas, objet et image sont de nature différente.

14. Sur la figure ci-contre, on a $n' > n$ (le rayon 2 s'écarte de la normale). O est le point du dioptre sur la normale au dioptre passant par le point objet A. La recherche d'un point image éventuel se fait sur cette normale car le rayon 1 issu de A et arrivant sur le dioptre sous incidence normale n'est pas dévié. Le rayon d'inclinaison θ recoupe, après réfraction, la normale au point A'. Le point A' n'est pas l'image de A, un rayon issu de A et d'inclinaison différente de θ, recoupe la normale en un point différent de A'. La position du point A' dépend de la position du point A mais aussi de l'angle θ ! Le dioptre plan n'est pas stigmatique.

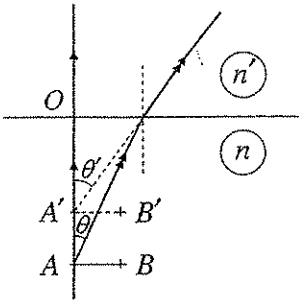


Précisons par le calcul : $\overline{OA'} = -\dfrac{\overline{OI}}{\tan\theta'} = \overline{OA}\dfrac{\tan\theta}{\tan\theta'}$. Or la loi de Descartes en I, $n\sin\theta = n'\sin\theta'$, montre que le rapport des sinus étant constant, le rapport des tangentes ne l'est pas ; ce qui confirme l'étude précédente. Cependant si les angles d'incidence θ et de réfraction θ' sont assez petits, $\dfrac{\tan\theta}{\tan\theta'} \approx \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \dfrac{n'}{n}$. Il vient

alors $\overline{OA'} = \overline{OA}\,\frac{n'}{n}$, la position de A' ne dépend plus du rayon choisi, tous les rayons issus de A passent par A' : il y a stigmatisme approché si les rayons sont peu inclinés sur la normale. Cette normale joue le rôle d'un axe optique et on retrouve une partie des conditions de Gauss pour le stigmatisme approché. La relation de conjugaison du dioptre plan est dans ces conditions :

$$\boxed{\frac{\overline{OA'}}{n'} = \frac{\overline{OA}}{n}}$$

15. $n = 1{,}33$ est l'indice de l'eau, $n' = 1$ celui de l'air. L'observateur, s'il est loin de O, voyant une ombre, se rapproche naturellement du point O pour avoir une « meilleure image » et les rayons reçus par son œil sont alors peu inclinés sur la normale. Les conditions du stigmatisme approché sont réalisées. La relation de conjugaison du dioptre plan, $\frac{\overline{OA'}}{n'} = \frac{\overline{OA}}{n}$ donne une profondeur apparente $\overline{OA'} = 0{,}75\ \overline{OA}$, donc un objet à une profondeur réelle de 40 cm sous l'eau est « vu » (en fait son image) dans l'air à une profondeur apparente de 30 cm (l'effet de contraction des jambes dans une piscine, la pêche aux moules, l'expérience de la règle brisée,...).



L'invariance par translation le long du dioptre conduit à un grandissement linéaire :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1}$$

Mais l'image, plus proche, est vue sous un angle plus grand, elle apparaît donc plus grosse que l'objet, on peut parler de grossissement angulaire par :

$$G = \theta' / \theta = n / n' = 1{,}33$$

■ Les lentilles minces

16. Une lentille sphérique est dite mince (modèle théorique) si son épaisseur est très petite, notamment devant les rayons de courbure des deux dioptres sphériques qui la constituent. Alors un rayon passant par son centre optique O (quasiment confondu avec son centre) n'est pas dévié (la très faible translation est négligeable).

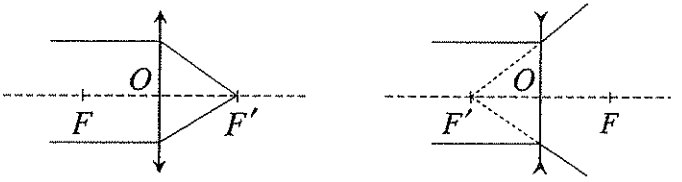
L'expérience, avec une lentille réelle, montre que les rayons parallèles et parallèles à l'axe, provenant d'un point objet à l'infini sur l'axe, ne se recoupent pas en un même point après traversée de la lentille. Ce qui établit l'astigmatisme de la lentille (même si elle se comporte comme une lentille mince).

Cependant, si en diaphragmant, on ne laisse passer que les rayons proches de l'axe, alors tous les rayons émergents se recoupent quasiment en un même point. Ce qui établit expérimentalement un stigmatisme approché. Le « point » image obtenu, sur l'axe est par définition le foyer principal image.

Expérimentalement on constate pour les lentilles minces un stigmatisme et un aplanétisme approchés dans les conditions de Gauss, pour tous les points objet sur l'axe ou proches de l'axe.

Il existe deux types de lentilles minces : convergente et divergente.
Les foyers dont l'existence n'a de sens que dans le cadre du stigmatisme approché, sont définis par :
Le foyer image F' est le point conjugué d'un point objet à l'infini sur l'axe, c'est-à-dire que des rayons incidents parallèles à l'axe donnent des rayons émergents passant par F'.
Le foyer objet F est le point conjugué d'un point image à l'infini sur l'axe, c'est-à-dire que des rayons incidents passant par F donnent des rayons émergents parallèles à l'axe.
Les foyers, lorsque le milieu de propagation de part et d'autre est le même, sont symétriques par rapport au plan de la lentille : $\boxed{\overline{OF'} = -\overline{OF}}$. Pour une lentille convergente les foyers image et objet sont réels ; ils sont virtuels pour une lentille divergente.
La distance focale (image) est définie par $\boxed{f' = \overline{OF'}}$; elle est donc positive pour une lentille convergente et négative pour une lentille divergente (en orientant l'axe optique dans le sens de la lumière incidente).
Pour une lentille mince la vergence est définie par $\boxed{V = \frac{1}{f'}}$ elle s'exprime en m^{-1} ou dioptrie (δ). En orientant l'axe optique dans le sens de la lumière incidente, la vergence d'une lentille convergente est positive.

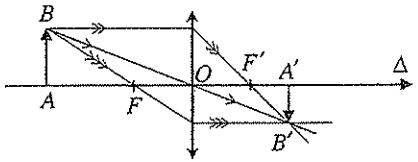
La détermination de l'image d'un point par une lentille ne peut pas se faire avec les lois de Descartes sur les deux dioptres qui la constituent, car cela conduit à l'astigmatisme ! Si on essaie de faire un tracé dans les conditions de Gauss, alors les angles très petits conduisent à une très grande imprécision.
Pour la détermination théorique des images dans le cadre du stigmatisme, on utilise une construction géométrique qui s'appuie sur la notion de foyers et de centre optique. Dans le cadre de cette construction les lentilles doivent être représentées par un segment sans épaisseur.



17. Les traits de la construction géométrique sont souvent, de façon abusive, appelés rayons. On trace donc le cheminement théorique (lentille stigmatique) de deux rayons issu d'un point objet, leur intersection après traversée donnant la position de l'image. Les « rayons » particuliers utilisés sont :

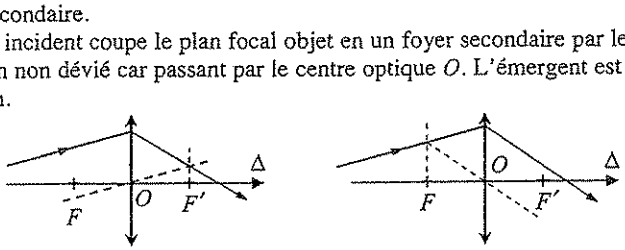
- Tout rayon passant par le centre optique O n'est ni dévié ni décalé.

- Tout rayon incident parallèle à l'axe optique passe par le foyer principal image F' après traversée ou en semble issu.
- Tout rayon incident « passant » par le foyer principal objet F est parallèle à l'axe optique après traversée.



Si le point objet est sur l'axe, les trois rayons particuliers sont confondus avec l'axe et ne peuvent être utilisés. On se sert alors de la notion de foyer secondaire et un seul rayon suffit car l'image est sur l'axe (voir la question **18.**).

18. La construction utilise la notion de foyer secondaire objet ou image. Il y a deux possibilités dont la première est la plus courante :
- un rayon passant par O et parallèle au rayon considéré ; non dévié il recoupe le plan focal image au foyer secondaire image cherché. L'émergent passe par ce foyer secondaire.
- le rayon incident coupe le plan focal objet en un foyer secondaire par lequel passe un rayon non dévié car passant par le centre optique O. L'émergent est parallèle à ce rayon.



19. L'axe optique est orienté dans le sens de la lumière incidente. Alors $x<0$ désigne un objet réel, $x>0$ un objet virtuel, $x'>0$ une image réelle et $x'<0$ une image virtuelle.

Si $\gamma > 0$ l'image est droite (dans le même sens que l'objet)

Si $\gamma < 0$ l'image est renversée

Si $|\gamma| > 1$ l'image est plus grande que l'objet

Si $|\gamma| < 1$ l'image est plus petite que l'objet

L'image est homothétique de l'objet par rapport au centre O : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

20. Dans tous les cas, la 1ère lentille donne d'un objet A une image intermédiaire A_1 qui sert d'objet à la 2ème lentille ; l'image définitive est A'. Les formules de conjugaison successives sont :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'}.$$

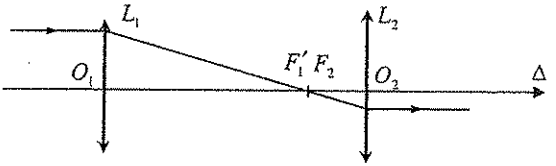
* Dans le cas des lentilles minces accolées, on a $O_1 \approx O_2$ noté O ; alors la somme membre à membre des deux formules précédentes donne :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{f'}}$$

Ceci est la formule de conjugaison d'une lentille mince équivalente de distance focale f'. Dans ces conditions ce sont les inverses des distances focales qui s'additionnent, soit en posant $V = -1/f = 1/f'$ (c'est la vergence exprimée en dioptries) :

$$\boxed{V = V_1 + V_2}$$

* Lorsque les lentilles sont disjointes, il est possible de réaliser $\Delta = \overline{F_1'F_2} = 0$, c'est-à-dire de confondre le foyer image de la première avec le foyer objet de la seconde ; alors un rayon incident parallèle à l'axe et qui passe par F_1', passe par F_2, donc il donne lieu à un émergent parallèle à l'axe. Autrement dit, l'image d'un objet à l'infini est à l'infini comme si le système n'avait pas de foyers (à distance finie) : on dit qu'il est afocal (voir les exemples aux questions **37.**, **47.** ou **63.**).

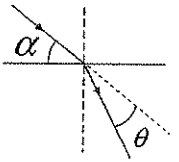


Applications directes du cours

■ Réflexion - Réfraction

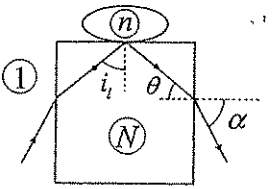
21. La définition des angles (peu courante, car toujours par rapport à la normale) et la loi de Descartes donnent :

$$1.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = n.\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \theta)\right) \Rightarrow \boxed{n = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)} = 1{,}6}$$



22. La réflexion totale sur l'interface verre – goutte se produit sous angle de réfraction limite i_l, les valeurs de i_l, θ et α ne dépendent pas de la position de la goutte sur le bloc.

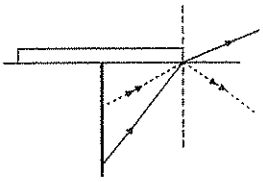
i_l est donné par $\sin i_l = \frac{n}{N} (< 1)$, $\theta = \frac{\pi}{2} - i_l$ (angles complémentaires dans un triangle rectangle), et la loi de Descartes pour la réfraction de sortie s'écrit $N \sin\theta = 1 \sin\alpha$.



Alors $\sin\alpha = N\cos i_l = N\sqrt{1-n^2/N^2}$ soit $\boxed{n=\sqrt{N^2-\sin^2\alpha}}$

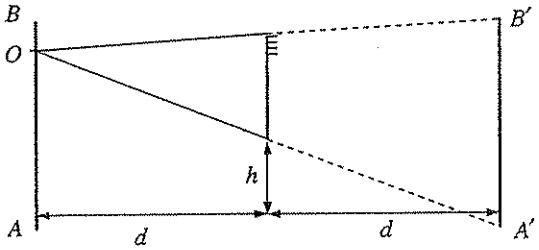
AN : $\underline{n=1{,}376}$ correspondant effectivement à l'indice d'un liquide.

23. De l'eau vers l'air les rayons s'écartent de la normale ; le rayon en trait plein montre que l'extrémité inférieure de la tige est visible de l'extérieur. Le point d'incidence considéré est le plus proche possible de la tige (bord du disque) car il correspond aux angles d'incidences minimaux. En revanche le rayon en pointillé qui arrive sur le dioptre avec un angle d'incidence supérieur ou égal à l'angle de réfraction limite subit une réflexion totale : la partie supérieure de la tige n'est pas visible de l'extérieur.



Pour l'incidence limite i_l définie par $\sin i_l = 1/n$, la géométrie donne $\tan i_l = r/h$ d'où $\boxed{h=\sqrt{n^2-1}\,r}$. On suppose ici l'observateur dans des conditions d'observation proches des conditions de Gauss, lui permettant d'avoir une image satisfaisante, par le dioptre plan, de la tige.

24. Un simple dessin de l'objet (réel) regardant son image (virtuelle) montre que la hauteur de glace utile est de $l = A'B'/2 = AB/2 = 90$ cm (la moitié de la taille de l'individu), résultat indépendant de la distance de l'individu à la glace et de la position des yeux.

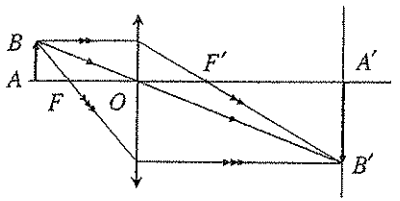


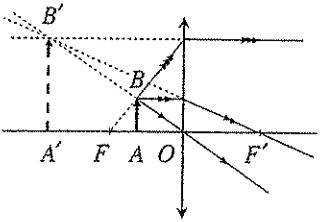
L'œil « voit » l'image A' si le rayon $A'O$ passe par le miroir. Si l'on estime que la distance des yeux au sommet de la tête est d'environ 10 cm, alors il faut placer le miroir à $h = 85$ cm du sol, valeur indépendante de d.

25. Le miroir et sa normale tournent de α, donc l'angle d'incidence et corrélativement l'angle de réflexion varient chacun de α dans le même sens ; le rayon réfléchi tourne donc de $\boxed{2\alpha}$

Lentilles minces

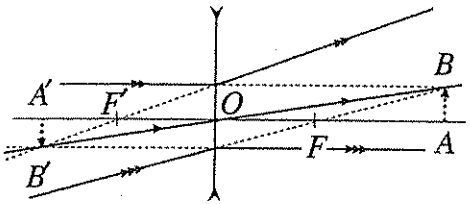
26. Pour une lentille convergente, en rapprochant l'objet réel de la lentille, on passe lorsque A est à gauche de F d'une image réelle renversée (plus ou moins grande que l'objet) à, lorsque A est entre F et O, une image virtuelle droite, plus grande que l'objet ; c'est-à-dire que le faisceau incident divergent dans tous les cas, devient convergent dans le premier cas (à gauche), mais reste divergent (certes moins) dans le second cas (à droite).

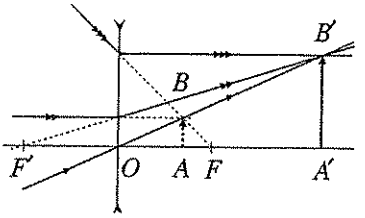




Lorsque l'objet est virtuel (A à droite de O), il est défini par un faisceau convergent sur la lentille ; la lentille le transforme alors en un faisceau encore plus convergent, d'où une image réelle, plus petite que l'objet (s'exercer à le faire).

27. À noter que dans ce cas l'objet est forcément virtuel puisque les rayons incidents ne se croisent qu'après la lentille (A à droite de O).
Lorsque le faisceau est peu convergent (A à droite de F , figure de gauche), la lentille divergente arrive à le rendre divergent ; alors l'image est elle-même virtuelle, renversée et plus ou moins grande par rapport à l'objet. Lorsque le faisceau est très convergent (A entre O et F , figure de droite) la lentille divergente n'arrive pas à le faire diverger, il est simplement rendu moins convergent ; alors l'image est réelle, droite et plus grande que l'objet.



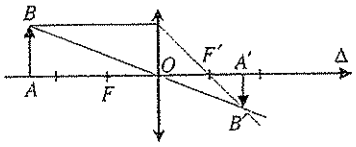


28. Les constructions se font avec les rayons particuliers, comme dans la question **26.** :
Les divers cas correspondent à un objet réel ou virtuel et à un objet de part et d'autre du foyer principal objet. Le cas intermédiaire $\overline{OA} = 2f$ est la position de Silbermann, $\overline{OA'} = 2f'$ et $\gamma = -1$.
Avec une lentille convergente, l'image est réelle sauf dans le cas d'un objet réel entre F et O (cas de la loupe).

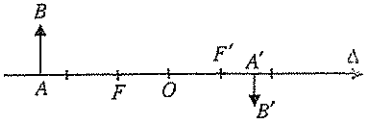
On remarque que lorsque A parcourt l'axe optique de $-\infty$ à $+\infty$, A' se déplace dans le même sens. Quand A est à l'infini, A' est en F'. Quand A se rapproche, A' s'éloigne, donc en grandissant. Pour A à $2f'$ de O, A' est symétrique par rapport à O et $\gamma = -1$, c'est la position de Silbermann. Quand A s'approche de F, A' s'éloigne à l'infini, toujours renversée et en grandissant. Quand A passe le point F, A' bascule de $+\infty$ à $-\infty$ et se redresse. Quand A se déplace de F à O, A' le suit et ils se rejoignent en O où $\gamma = 1$. Ensuite A, virtuel, va de O à $+\infty$, alors que A' reste confinée entre O et F' qu'elle atteindra quand A sera à l'infini.

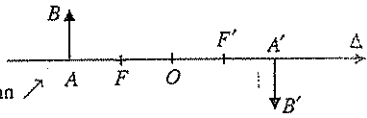
Lentille convergente

a) Objet réel avant F

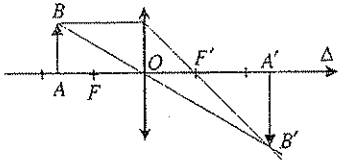


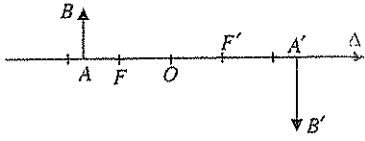
$\overline{OA} < 2f$; image réelle et $-1 < \gamma < 0$



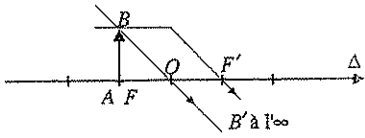


Silbermann ↗





$2f < \overline{OA} < f$; image réelle et $\gamma < -1$



b) Objet réel entre F et O

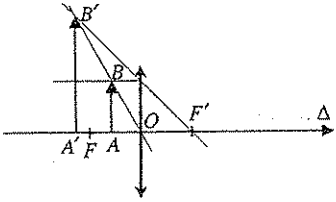
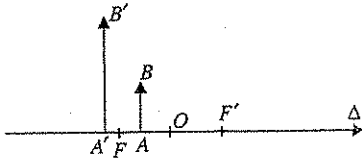
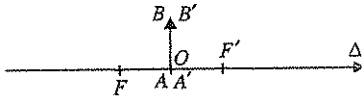
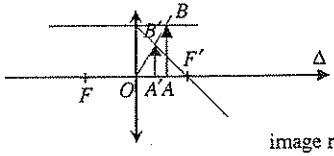


image virtuelle et $\gamma > 1$





c) Objet virtuel



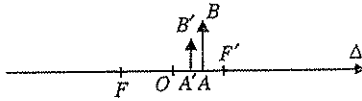
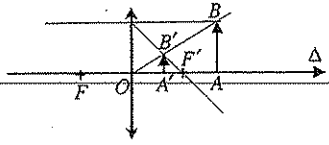
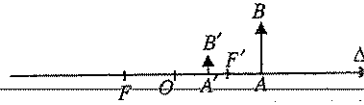


image réelle et $0 < \gamma < 1$





29. Les divers cas, et résultats de la construction géométrique, sont :

Lentille divergente

a) Objet réel

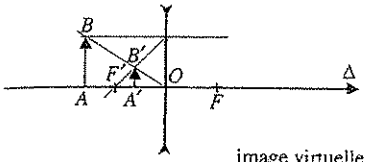
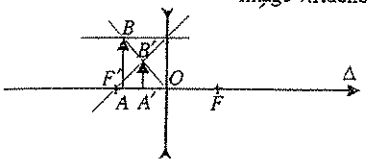
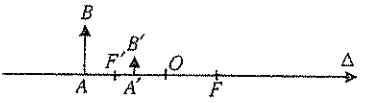
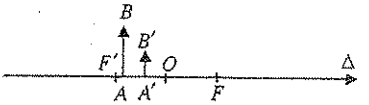


image virtuelle et $0 < \gamma < 1$







b) Objet virtuel entre O et F

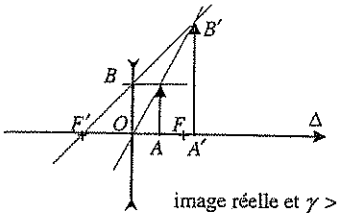
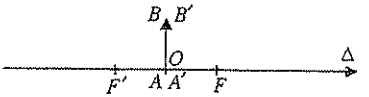
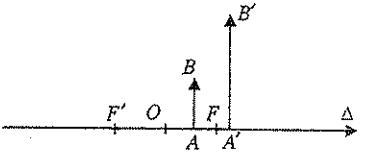
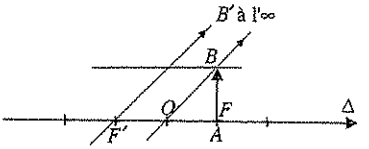


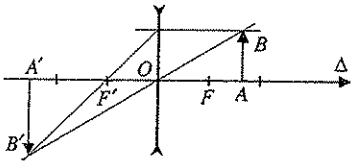
image réelle et $\gamma > 1$



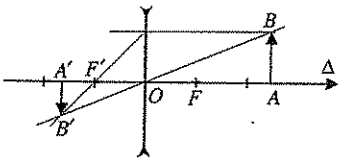




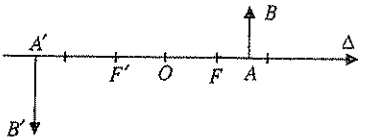
c) Objet virtuel au-delà de F

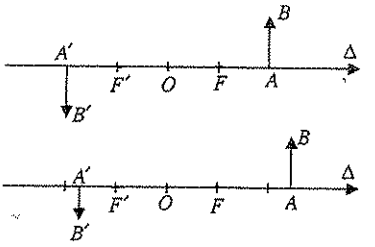


$f < \overline{OA} < 2f$; image virtuelle et $\gamma < -1$



$2f < \overline{OA}$; image virtuelle et $-1 < \gamma < 0$





- objet réel : image virtuelle, droite, plus petite que l'objet.
- objet virtuel entre O et F : image réelle, droite, plus grande que l'objet.
- objet virtuel après F, $f < \overline{OA} < 2f$: image virtuelle, renversée, plus grande que l'objet.
- objet virtuel après F, $2f < \overline{OA}$: image virtuelle, renversée, plus petite que l'objet.

Pas d'image réelle d'un objet réel avec une lentille divergente.

Comme à la question précédente A et A' se déplace dans le même sens, ils se retrouvent en O avec $\gamma = 1$. Quand A passe le point F, A' bascule de $+\infty$ à $-\infty$ et se renverse.

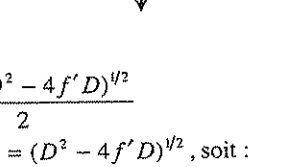
30. $\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{-D} = \dfrac{1}{f'} \Rightarrow d = \dfrac{f'}{1 - f'/D}$ avec Δ dans le sens incident ($x = -D$ et $x' = d$)

Pour $D = \infty$, $\underline{d_{min} = f' = 50 \text{ mm}}$ (prévisible) et pour $D = 0{,}6$ m, $\underline{d_{max} = 54{,}5 \text{ mm}}$, ce qui donne une faible course de 4,5 mm pour la mise au point (obtenue par rotation d'une bague qui déplace l'objectif par rapport à la pellicule). L'objet reste loin de la lentille par rapport à la distance focale, l'image est proche de F'.

31. $\dfrac{1}{x'} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f'}$ et $x' - x = D$ soit $x^2 + Dx + f'D = 0$ en éliminant x' ; il y a au moins une solution réelle si $\Delta \geq 0 \Rightarrow f' \leq \dfrac{D}{4}$ ce qui établit la condition demandée.

- $D = 4f' \Rightarrow$ une seule solution :

  $\overline{OA} = -\dfrac{D}{2} = -2f'$ alors $\overline{OA'} = 2f'$ et $\gamma = -1$. A et A' sont alors symétriques par rapport à la lentille. Position de Silbermann.



- $D > 4f' \Rightarrow$ deux solutions :

  $$\frac{-D + (D^2 - 4f'D)^{1/2}}{2} \text{ et } \frac{-D - (D^2 - 4f'D)^{1/2}}{2}$$

  Les 2 positions de la lentilles sont espacées de $d = (D^2 - 4f'D)^{1/2}$, soit :

  $$\boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$$

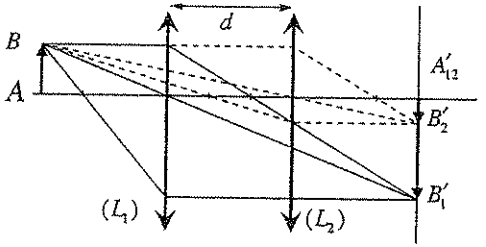
  Cette relation permet plusieurs mesures de f' pour des valeurs différentes de D : c'est la méthode de Bessel.

Pour $\boxed{f' \leq D/4}$; il existe donc deux positions de la lentille, symétriques par rapport au milieu $D/2$, et qui donnent chacune une image nette sur l'écran l'une plus grande que l'objet (lorsque la lentille est plus proche de l'objet) et l'autre, plus petite que l'objet (lorsque la lentille est plus proche de l'écran) tel que le produit des grandissements soit égal à 1.

Le produit des racines de l'équation en x, $x^2+Dx+f'D=0$, est $P=x_1x_2=f'D$. En éliminant x et en gardant x' dans les équations du début, il vient $x'^2-Dx'+f'D=0$ de même Δ et dont le produit des racines est $P'=x'_1x'_2=f'D=P$, d'où le produit des grandissements :

$$\boxed{\gamma_1\gamma_2=\frac{x'_1}{x_1}.\frac{x'_2}{x_2}=1}$$

La situation se voit clairement sur le même schéma, où les traits pleins correspondent à la position (L_1) de la lentille et les traits en pointillé à la situation (L_2) avec $\overline{A'_1B'_1}.\overline{A'_2B'_2}=\overline{AB}^2$.



32. La construction est faite à la question **28.** ; l'objet est réel ($x=-4$ cm <0) et l'image virtuelle ($x'<0$) et il faut s'attendre à $f'>4$ cm.

Les formules de conjugaison et du grandissement donnent :

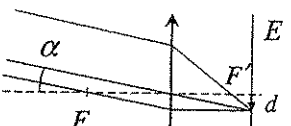
$$\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}=\frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma=\frac{x'}{x}$$

L'élimination de x' conduit facilement à : $\boxed{f'=-\frac{\gamma}{\gamma-1}x}$

AN : $\underline{f'=5 \text{ cm}}$, une loupe est une lentille de courte focale.

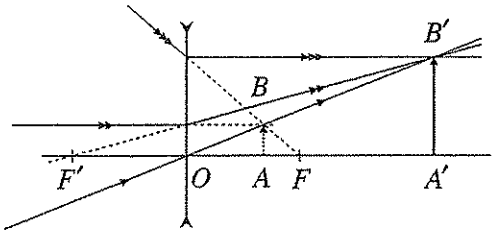
33. Conversion : $31'=\frac{31}{60}\times\frac{\pi}{180}=9{,}0.10^{-3}$ rad.

La Lune est à l'infini (alors un point n'envoie que des rayons parallèles entre eux), il faut donc placer l'écran dans le plan focal image de la lentille.



On a $\boxed{d=f'\tan\alpha=f'\alpha}$ soit $\underline{d=0{,}45 \text{ cm}}$ où l'approximation concerne α exprimé en radians.

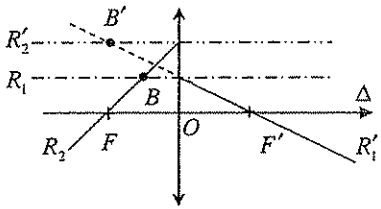
34. Il faut comprendre ici $x=\overline{OA}=+2$ cm et $f'=\overline{OF'}=-3$ cm.



Faire le dessin avec soin.

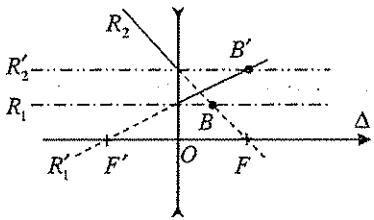
$$\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \boxed{x'=\frac{f'x}{f'+x}=6\text{ cm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{x'}{x}=+3}$$

35. On trace d'abord deux « rayons » parallèles à l'axe et à distance d et $2d$; quelque part sur R_1 il y a B et sur R_2' il y a B'. L'émergent R_1' correspondant à R_1 passe par F', son intersection avec R_2' donne B'.



L'incident R_2 correspondant à R_2' passe par F, son intersection avec R_1 donne B. On en déduit A et A' par aplanétisme.

Même méthode avec la lentille divergente.



36. Projecteur de diapositives

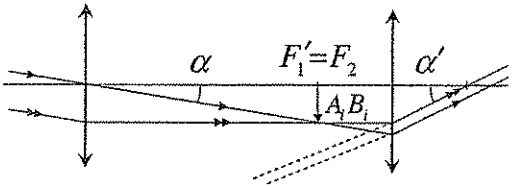
Attention aux signes : $\frac{x'}{x}=-a$ et $D=x'-x$ donnent $x=-\frac{D}{1+a}$ et $x'=\frac{aD}{1+a}$

et, avec la formule de conjugaison $\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}=\frac{1}{f'}$, on obtient $\boxed{f'=\frac{aD}{(1+a)^2}}$

A.N. : $a=\frac{2}{0{,}03}$; $\underline{f'=73\text{ mm}}$

La diapositive est alors à 74 mm de la lentille (proche de F), l'encombrement est raisonnable pour le projecteur. $\gamma<0$, il faut placer la diapositive à l'envers.

37. Principe d'une lunette astronomique



Pour que l'image soit vue à l'infini, il faut faire coïncider F_1' et F_2 (système afocal). En effet l'image par l'objectif est dans le plan focal image de cette lentille, qui doit être le plan focal objet de l'oculaire pour que l'image définitive soit à l'infini. On note A_iB_i l'image intermédiaire. Les angles ne sont pas orientés, en valeur absolue :

$$\alpha' = \frac{A_iB_i}{f_2'} = \frac{f_1'\alpha}{f_2'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1'}{f_2'} = 50}$$

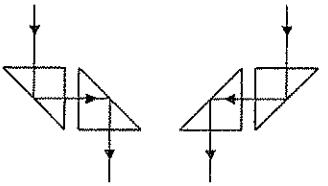
(la focale de l'objectif sur celle de l'oculaire).

L'image est renversée ce qui n'est pas gênant pour une observation astronomique ; en revanche cela ne convient pas pour des observations terrestres, il suffit alors de remplacer l'oculaire convergent par un oculaire divergent (en conservant $F_1' = F_2$) pour obtenir une image droite (s'en assurer par la construction) : c'est la lunette de Galilée, et qui pour $F_1' \neq F_2$, permet de regarder des objets à distance finie.

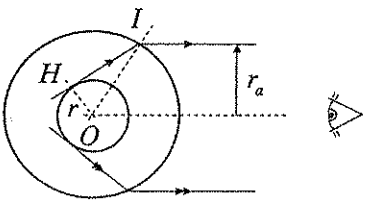
Questions de réflexion ☐ Physique pratique

38. Pas tout à fait, car la vision n'implique que l'œil (et pas le reste du corps !). Il vaut mieux dire « Si je peux voir ton oeil, alors tu peux voir mon oeil ».
Une glace sans tain suit évidemment le principe du retour inverse de la lumière, mais ce principe ne renseigne pas sur l'énergie lumineuse transportée par les deux faisceaux inverses…

39. Les rayons lumineux sont déviés par deux prismes (rectangles isocèles) tête-bêche accolés (pour réduire les pertes par réflexion) utilisant la réflexion totale $i = 45° > i_l = 42°$ (pour un verre d'indice 1,5) ; ceci permet de rapprocher les deux faisceaux incidents.



40. I est le point du tube de verre tel que HI soit tangent à la gaine de mercure et donnant un rayon extérieur parallèle à l'axe pour une vision éloignée. Le dessin montre clairement que le rayon apparent r_a de la gaine est supérieur au rayon réel r.



$n \sin i_1 = 1.\sin i_2 \Rightarrow n\frac{r}{R} = \frac{r_a}{R}$ d'où $\boxed{r_a = nr}$

La valeur maximale pour r_a est R : l'observateur voit un tube entièrement rempli de mercure.

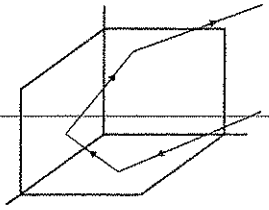
À noter qu'en plus de la face avant de la colonne de mercure, la réfraction permet de voir une partie de la face arrière...

41. D'un dioptre à l'autre le rayon est réfracté $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = ... = n_p \sin i_p$; une succession de petits segments conduisent alors (par passage à la limite) à une trajectoire courbe pour les rayons lumineux.

* L'indice du mélange augmente avec la concentration en sucre, le rayon laser est dévié vers le bas, vers les indices croissants (dans le sens de $\overrightarrow{\text{grad}}\, n$, grandeur définie plus tard dans l'année).
* L'air se raréfiant avec l'altitude, son indice passe de $n = 1{,}0003$ au niveau du sol à $n = 1{,}0000$ à l'entrée de l'atmosphère. Cette différence étant très faible, un rayon provenant d'une étoile est légèrement dévié en se rapprochant continûment de la normale (et ce d'autant plus que le rayon est initialement incliné), ce qui conduit à faire une petite erreur d'environ 1' pour $\alpha = 45°$ sur sa position angulaire (son inclinaison α mesurée par rapport à la verticale est légèrement sous-évaluée). Cette réfraction atmosphérique explique également la forme légèrement aplatie du Soleil au couchant...
* Du centre vers le bord d'une fibre optique, l'indice décroît faiblement (en gros de 1,50 au centre à 1,49 au bord (rayon de la fibre : 20 µm). L'intérêt d'une trajectoire sinusoïdale réside dans le fait qu'en s'éloignant de l'axe, la lumière va plus vite (quand l'indice diminue, la vitesse augmente) ce qui compense l'allongement du trajet géométrique par rapport au rayon axial (et conduit ainsi pour les différents rayons à un chemin optique stabilisé, notion qui sera définie en seconde année). Ceci permet un bon stigmatisme, réduit l'élargissement temporel d'une impulsion par rapport à une fibre à saut d'indice (rayon en dents de scie par réflexion totale sur une gaine moins réfringente) et permet ainsi une augmentation de la quantité d'informations à transmettre par unité de temps le long d'une fibre de longueur donnée.
* Par temps très chaud (dans le désert ou l'été sur une route goudronnée) l'air dilaté près du sol (sur quelques dizaines de cm) est un peu moins dense conduisant à un indice qui augmente vers le haut dans cette couche. Les rayons lumineux dans cette couche sont alors courbes avec une concavité vers le haut et l'observation d'une image renversée (le mirage) donne l'illusion d'une surface miroitée.

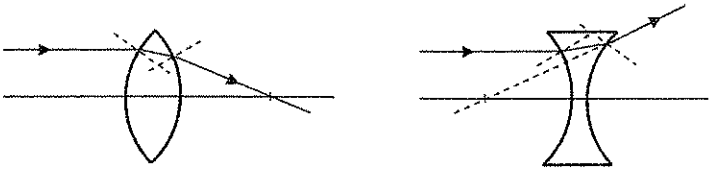
42. Soit $Oxyz$ le dièdre rectangle attaché au dispositif et soit $\vec{u} = (a,b,c)$ le vecteur unitaire selon lequel le faisceau y rentre.

Chacune des trois réflexions planes successives (une sur chacun des trois miroirs) inverse une des composantes du vecteur $\vec{u}$; le faisceau ressort finalement dans la direction $(-a,-b,-c)$ qui est celle du vecteur $-\vec{u}$. Ce dispositif placé sur la Lune a permis de mesurer précisément la distance Terre-Lune



(environ 380 000 km avec une précision de quelques cm) en mesurant avec précision le temps de parcours d'un aller retour du faisceau laser (environ 2,5 s avec une précision de 0,1 ns !).

43. Les lentilles considérées ici ne vérifient pas le modèle lentille mince. Pour une lentille à bord mince (dessin de gauche), le rayon incident subit deux réfractions qui le rapprochent de l'axe et rend le faisceau convergent : la lentille est dite convergente. Pour une lentille à bord épais (dessin de droite), le rayon incident subit deux réfractions qui l'éloignent de l'axe et rend le faisceau divergent : la lentille est dite divergente.



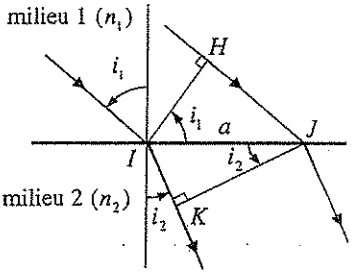
44. En un point du plan focal image (plan perpendiculaire à l'axe et passant par F') qui est le foyer secondaire image correspondant à cette inclinaison.

45. L'onde est en phase en I et H pour le faisceau incident et en J et K pour le faisceau réfracté. Il faut donc que les temps de parcours sur HJ et IK soient égaux :

$$\frac{IK}{v_2} = \frac{HJ}{v_1} \Rightarrow \frac{a \sin i_2}{c/n_2} = \frac{a \sin i_1}{c/n_1}$$

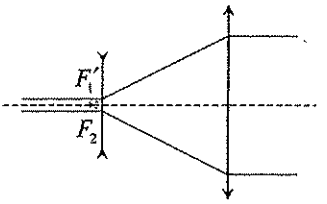
soit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

ce qui redonne la loi de Descartes.



46. L'œil placé juste en sortie de l'instrument ne peut observer directement et aisément (en regardant dans le sens inverse de l'arrivée de la lumière) que des images virtuelles (pour voir une image réelle, il faut se placer à $pp \approx 25$ cm en arrière et très peu de rayons arriveront dans l'œil). Il peut en revanche voir facilement par diffusion l'image réelle qu'un système a projetée sur un écran.

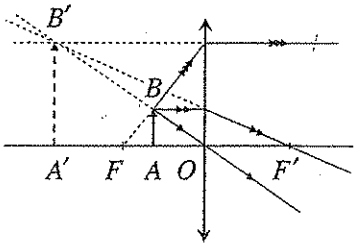
47. On peut associer deux lentilles, la première divergente de très courte focale f_1' (<0) et la deuxième convergente de grande focale f_2' à condition de faire coïncider le foyer image F_1' de la première avec le foyer objet F_2 de la seconde. Si D est le diamètre du faisceau final et d celui du faisceau initial, alors $D/f_2' = -d/f_1'$, soit pour $d = 2$ mm et $D = 3$ cm, $\underline{f_2' = -15 f_1'}$



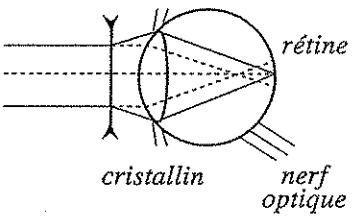
NB : Ce système est préférable à celui de deux lentilles convergentes et qui obligerait un passage réel aux foyers ($F_1' = F_2$) imposant localement une forte intensité (avec risque d'ionisation de l'air).

48. Le fait que Pythéas, scientifique Massaliote, ait vécu à une époque (le IV^e siècle avant J.-C.) à laquelle les lunettes n'existaient pas n'est pas la bonne réponse ! Si l'herbe s'enflamme, c'est que les verres sont convergents, prescrits à des hypermétrope, la correction de la myopie nécessite des verres divergents... cette histoire est donc une galéjade ! (voir également la question **50.** ci-dessous).

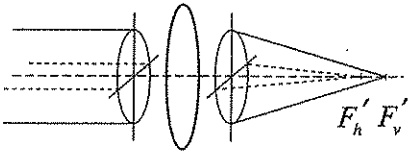
49. Il faut placer l'objet AB à agrandir derrière une lentille convergente (par rapport aux yeux), à une distance de la lentille inférieure à la distance focale. Si A est entre F et O, l'image $A'B'$, virtuelle, droite, et plus grande que l'objet, se trouve à distance finie de l'observateur ; celui-ci est donc obligé d'accommoder (modifier la focale du cristallin) pour la voir nette, ce qui fatigue l'œil. Si A est en F, l'image est rejetée à l'infini, ce qui en permet l'observation sans accommodation (œil au repos) et donc sans fatigue.



50. Afin que le faisceau soit moins convergent dans l'œil (sans lentille le faisceau en pointillé converge avant la rétine et donc l'objet à l'infini apparaît flou), il faut d'abord le faire diverger en plaçant une lentille divergente devant l'œil. Tout objet au-delà de 2 m (vu flou sans lunette) doit être ramené par le verre correcteur à une distance apparente de moins de 2 m (image virtuelle, droite et plus petite que l'objet) auquel cas il est vu net. L'objet à l'infini, $x = -\infty$, est lui ramené à la distance maximale $x' = -2$ m, ce qui suppose $f' = -2$ m soit un verre de vergence $V = 1/f' = -0{,}5\ \delta$



51. Un faisceau cylindrique arrive sur l'œil (dont seul le cristallin au centre est représenté). Les rayons en trait plein sont dans le plan vertical (celui de la feuille) dans lequel la courbure du cristallin est moins forte ; ils convergent donc plus loin, en F_v'. Les rayons en pointillé sont dans le plan horizontal (perpendiculaire à la feuille) dans lequel la courbure du cristallin est plus forte ; ils convergent donc plus près, en F_h'. Le foyer image est constitué du



segment $F_h'F_v'$ d'où la gêne ; ce défaut est corrigé avec des lentilles dites « cylindriques » dont la courbure dépend du plan considéré.

52. Les tissus constituant l'œil sont des milieux faiblement dispersifs ; et donc si l'indice du cristallin (la lentille de l'œil) dépend légèrement de la longueur d'onde, c'est-à-dire de la couleur, alors il en est de même pour la distance focale. Le vert et le rouge convergent donc (pour un œil normal) un peu avant ou après la rétine (l'écran de l'œil).
L'ophtalmologiste propose d'abord une correction approchée en lumière blanche à un œil myope ou hypermétrope ; en fin de test, suivant que le patient voit mieux avec un filtre rouge ou un filtre vert, il saura si le verre proposé sous-corrige ou sur-corrige, ce qui lui permet d'affiner la correction.

53. 24 mm sur 36 mm est la taille de la partie des anciennes pellicules argentiques impressionnée à chaque photographie (soit les dimensions intérieures du cadre d'une ancienne diapositive). La (distance) focale d'un objectif standard (lentille convergente) est de 50 mm. Un grand angle qui offre un grand champ d'une vue paraissant plus éloignée, a une plus courte focale (28 à 35 mm), et un téléobjectif qui permet de rapprocher un petit champ, a une focale plus grande (70 à 200 mm). Un zoom est un objectif muni d'une bague dont la rotation permet par déplacement relatif de lentilles, d'obtenir un objectif de focale variable (comme le cristallin de l'œil par action musculaire).
La pellicule de 400 ISO est plus sensible que celle de 100 ISO ; elle permet par exemple de faire des photographies d'intérieur avec moins de luminosité et sans flash, mais son grain (de l'ordre de quelques $1/100^{ème}$ de mm) est plus gros, ce qui réduit la taille des agrandissements.

54. Si a est le côté du pixel exprimé en µm, alors $8{,}8.10^3 \times 6{,}6.10^3 = 4.10^6 a^2$ soit $\underline{a \approx 4\ \mu m}$ (en réalité le capteur présente $2400 \times 1800 = 4{,}32$ MegaPixels). La taille du pixel conditionne la résolution de l'image car plus le nombre de points d'analyse est important, mieux les détails sont restitués.

Exercices

55. Propagation des ondes sismiques (*)

a) Dans le passage de la croûte au manteau, la vitesse des ondes augmente ($v_c < v_m$ soit $n_c > n_m$) et donc les « rayons » s'écartent de la normale.

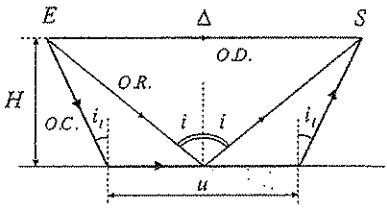
$$n_c \sin i = n_m \sin i' \quad \text{n'est possible que si} \quad \sin i' = \frac{n_c}{n_m} \sin i \leq 1$$

($i' = 0$ correspondant à l'émergence rasante)

$$\text{d'où} \quad \boxed{i \leq i_l = \arcsin \frac{n_m}{n_c} = \arcsin \frac{v_c}{v_m}} \quad (1)$$

i_l est l'angle de réfraction limite ; pour $i > i_l$, la réfraction n'est plus possible, il y a réflexion totale sur le manteau.

b) Il apparaît sur la figure que l'onde conique peut être détectée tant que la distance u est strictement positive (pour $u = 0$, l'onde réfléchie et l'onde conique coïncident).



or $\Delta = u + 2H \tan i_l$

et donc $u > 0 \implies \Delta > \Delta_m = 2H \tan i_l$

ou encore $\boxed{\Delta_m = 2H \tan\left(\arcsin \frac{v_c}{v_m}\right)}$ (2)

c) L'onde directe et l'onde réfléchie se propagent toutes les deux dans la croûte à la vitesse v_c, alors que l'onde conique effectue une partie dans le manteau à une vitesse supérieure v_m, et donc bien que son trajet soit plus long, son temps de parcours peut être plus court si u est suffisamment grand.

$$\boxed{t_D = \frac{\Delta}{v_c}} \quad \text{et} \quad \boxed{t_R = \frac{2}{v_c}\sqrt{H^2 + \Delta^2/4} = \frac{1}{v_c}\sqrt{\Delta^2 + 4H^2}}$$

Avec $u = \Delta - \Delta_m$, on a :

$$\boxed{t_C = \frac{1}{v_c}\sqrt{\Delta_m^2 + 4H^2} + \frac{1}{v_m}(\Delta - \Delta_m)}$$

Les valeurs asymptotiques de t_R et t_C sont : $t_R \approx \frac{\Delta}{v_c}$ comme t_D, et $t_C \approx \frac{\Delta}{v_m}$

On constate bien que le graphe de t_R est toujours au-dessus de celui de t_D, mais les deux ont la même branche asymptotique. Quant à celui de t_C pour $\Delta > \Delta_m$, il est toujours en dessous de celui de t_R, mais pas toujours au-dessus de celui de t_D !

La distance Δ_l à partir de laquelle l'onde conique est plus rapide que l'onde directe s'obtient par $t_D = t_C$, soit :

$$\boxed{\Delta_l = \frac{\Delta_m}{v_m - v_c}\left(v_m\sqrt{1 + 4H^2/\Delta_m^2} - v_c\right)} \quad (3)$$

d) Par définition $\tau = t_R - t_D = \frac{1}{v_c}\sqrt{\Delta^2 + 4H^2} - \frac{\Delta}{v_c}$, qui se résout en :

$$\boxed{H = \frac{v_c \tau}{2}\sqrt{1 + 2\Delta / v_c \tau}}$$

AN : $\underline{H = 38 \text{ km}}$ donne un ordre de grandeur de l'épaisseur de la croûte terrestre.

e) Pour $\Delta < \Delta_i$, on détecte l'onde directe : $t_D = \dfrac{\Delta}{v_c}$ (pente $\dfrac{1}{v_c}$)

Pour $\Delta > \Delta_i$, on détecte l'onde conique : $t_D = cste + \dfrac{\Delta}{v_m}$ (pente $\dfrac{1}{v_m} < \dfrac{1}{v_c}$)

La rupture de pente pour $\Delta = \Delta_i$ était prévue au graphe de la question c) ; l'observation expérimentale est bien conforme à la prévision.

AN : On relève les pentes : $\Delta < \Delta_i$, $1/v_c \approx 16/100 \Rightarrow \underline{v_c = 6{,}2 \text{ km.s}^{-1}}$

$\Delta > \Delta_i$, $1/v_m \approx 12/100 \Rightarrow \underline{v_m = 8{,}3 \text{ km.s}^{-1}}$

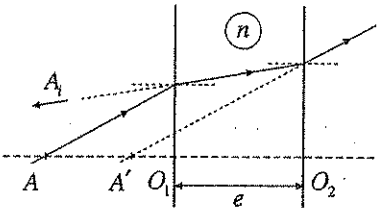
La rupture de pente se fait pour $\Delta_i \approx 100$ km ;

(2) $\Rightarrow \dfrac{\Delta_m}{H} = 2\tan\left(\arcsin\dfrac{v_c}{v_m}\right) = 2{,}27$ (2')

(3) $\Rightarrow \underline{\Delta_m = 43 \text{ km}}$ et (2') $\Rightarrow \underline{H = 19 \text{ km}}$, du même ordre de grandeur.

56. Image par une lame à faces parallèles

a) Notons d'abord que par double réfraction avec des milieux extrêmes identiques, le rayon sortant est parallèle au rayon entrant (il a subi une simple translation). Par ailleurs AO_1O_2, la normale aux dioptres passant par A, est un rayon ; l'image A', *si elle existe*, se trouve donc sur cet axe. Il en est de même pour le point intermédiaire A_1 (non représenté sur la figure), image de A par le premier dioptre et qui sert d'objet au second. Attention pour trouver la position de A_1 et de A', il ne faut surtout pas utiliser les lois de Descartes qui traduisent l'astigmatisme du système. Il faut se servir de la relation de conjugaison établie à la question **14.** traduisant le stigmatisme approché du dioptre plan.



1er dioptre : $A \to A_1$: $\dfrac{n}{\overline{O_1A_1}} = \dfrac{1}{\overline{O_1A}} \Rightarrow \overline{O_1A_1} = n\overline{O_1A}$ (1)

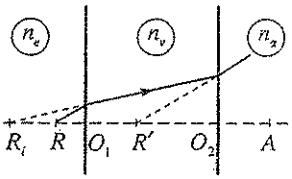
2ème dioptre : $A_1 \to A'$: $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} = \dfrac{n}{\overline{O_2A_1}} \Rightarrow \overline{O_2A_1} = n\overline{O_2A'}$ (2)

(1) − (2) $\Rightarrow \overline{O_1A_1} - \overline{O_1A_1} = n\left(\overline{O_1A} - \overline{O_1A'}\right)$ soit $\overline{O_1O_2} = n\left(\overline{O_1O_2} + \overline{A'A}\right)$ d'où

$$\boxed{\overline{AA'} = \frac{n-1}{n} e}$$

Résultat non valable en dehors du domaine paraxial car les formules de conjugaison (1) et (2) supposent les conditions de Gauss.

b) Sur la figure, R est la position du Requin et A celle de l'Amateur de poissons ; les conditions de Gauss sont *a priori* respectées. L'énoncé donne $\overline{O_1O_2} = 60$ cm, $\overline{O_2A} = 20$ cm, on déduit alors de $\overline{RA} = 1{,}00$ m que $\overline{O_1R} = -20$ cm.



On note R_i l'image (intermédiaire) que donne le 1er dioptre (eau / verre) de R ; elle sert d'objet au 2e dioptre (verre / air) qui en donne une image finale R'.

1er dioptre : $R \to R_i$: $\dfrac{n_e}{\overline{O_1R}} = \dfrac{n_v}{\overline{O_1R_i}}$ $\Rightarrow$ $\overline{O_1R_i} = \dfrac{n_v}{n_e}\overline{O_1R} = -22{,}5$ cm

d'où $\overline{O_2R_i} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1R_i} = -82{,}5$ cm

2e dioptre : $R_i \to R'$: $\dfrac{n_v}{\overline{O_2R_i}} = \dfrac{n_a}{\overline{O_2R'}}$ $\Rightarrow$ $\overline{O_2R'} = \dfrac{n_a}{n_v}\overline{O_2R_i} = -55{,}0$ cm

La distance apparente du squale à l'observateur est : $\overline{R'A} = \overline{R'O_2} + \overline{O_2A}$

soit $\underline{\overline{R'A} = 75{,}0 \text{ cm}}$

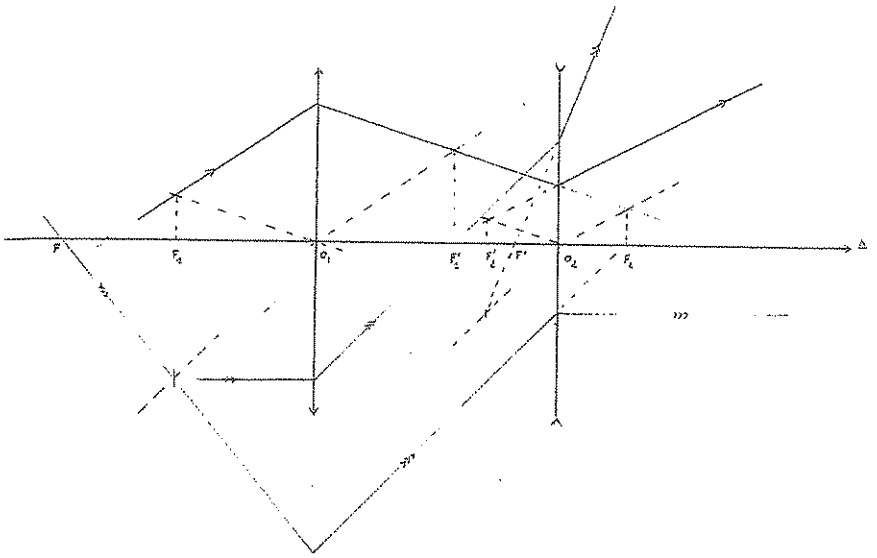
L'image du requin plus proche, est vue sous un angle plus grand, le requin paraît plus gros.

57. Étude graphique d'un doublet

On utilise les foyers secondaires.

Le foyer image F' du système, est l'image d'un point à l'infini sur l'axe, il est sur l'axe. C'est l'intersection avec l'axe de l'émergent correspondant à un incident parallèle à l'axe.

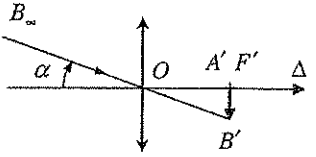
De même le foyer objet F est sur l'axe, à l'intersection avec l'incident correspondant à un émergent parallèle à l'axe. On peut faire la construction à « l'envers » en partant de l'émergent parallèle à l'axe.



58. Appareil photographique

a) La mise au point sur l'infini consiste à mettre la pellicule dans le plan focal image de l'objectif.

1) $\overline{OA} = -D$, et $D \gg f'$, l'image est donc dans le plan focal image, elle est renversée.



$A'B' = f'\alpha$ avec $\alpha = \dfrac{h}{D} \Rightarrow \boxed{h' = h\dfrac{f'}{D}}$

AN : $h' = 6{,}5$ mm, le pylône tient en entier sur le négatif (dimension 24 mm par 36 mm) avec ce choix de focale.

2) Si l'objet est ponctuel à l'infini sur l'axe, son image est en F'.
Si l'objet est ponctuel, réel, à distance finie assez grande devant f', son image A' se forme légèrement après F'.
La pellicule est dans le plan focal. La tache image correspond à la même netteté qu'un point si son diamètre est inférieur ou égal au diamètre d'un grain de la pellicule.
Soit b le diamètre de la tache image de A dans le plan focal. Les relations dans les triangles de sommet A' et la relation de conjugaison donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{b/2}{\overline{OA'} - f'} = \dfrac{R}{\overline{OA'}} \\ \dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'} \\ D = -\overline{OA} \end{cases} \Rightarrow b = 2R\frac{f'}{D}$$, ce qui avec la condition $b \leq a$ donne :

$$\boxed{D \geq D_m = 2R\frac{f'}{a} = \frac{f'^2}{Na}}$$

AN : $N = 2{,}0 \Rightarrow D_m = 24$ m

$N = 11{,}0 \Rightarrow D_m = 4{,}4$ m

La plage de netteté, de D_m à l'infini (appelée profondeur de champ), augmente quand on diminue l'ouverture en diaphragmant.

b) $p = -\overline{OA}$ et l'image (donc la pellicule) est à $p' = \overline{OA'}$.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow p' = \frac{pf'}{p - f'} \approx f' \text{ car } p \gg f'$$

L'image est nette si le déplacement du point image sur la pellicule, pendant la durée d'exposition de dépasse pas le diamètre du grain. En Δt le point objet parcourt $V\Delta t$ et le point image $\gamma V\Delta t$, avec $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\dfrac{p'}{p} < 0$

La condition $|\gamma| V\Delta t \leq a$ conduit finalement à $\boxed{\Delta t \leq \dfrac{pa}{f'V}}$

AN : $\Delta t \leq 2{,}4.10^{-3}$ s $\approx \dfrac{1}{400}$ s, « vitesse » d'obturation accessible aux appareils photographiques.

59. Objectif de photocopieur

a) L'objet est réel, la lentille divergente fournit une image virtuelle, donc pas sur le récepteur.

b) 1) Si L' est divergente, alors l'image est virtuelle, donc dans l'espace objet réel de L_1 et l'image définitive est virtuelle. L' est convergente.

2) $A \xrightarrow{L'} A_1 \xrightarrow{L_1} A'$, $\dfrac{1}{\overline{O'A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O'A}} = \dfrac{1}{f'}$ (1) et $\dfrac{1}{\overline{O_1A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} = \dfrac{1}{f_1'}$ (2)

(2) $\Rightarrow \overline{O_1A_1} = \dfrac{\overline{O_1A'}f_1'}{f_1' - \overline{O_1A'}}$ et (1) $\Rightarrow f' = \dfrac{\overline{O'A_1}\,\overline{O'A}}{\overline{O'A} - \overline{O'A_1}}$

avec $\overline{O'A_1} = \overline{O'O_1} + \overline{O_1A_1} = D - 2d + \dfrac{\overline{O_1A'}f_1'}{f_1' - \overline{O_1A'}}$

AN : $\underline{\overline{O'A_1} = 84 \text{ mm}}$ et $\underline{f' = 57{,}3 \text{ mm}}$, on a bien $f' > 0$

3) $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}}\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma\gamma' = \dfrac{\overline{O'A_1}}{\overline{O'A}}\dfrac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A_1}}$

AN : $\underline{\gamma_1 = -1{,}4}$; soit $S' = \gamma_1^2 S = 2S$, tirage A4 en A3.

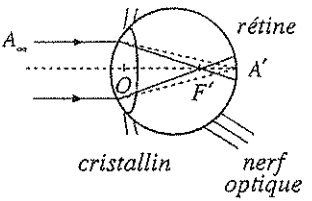
c) L_2 et L_3 accolées sont équivalente à L', d'après la question **20.** : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_3}$

On en déduit $f'_3 = 35{,}0$ mm, L_3 est convergente.

d) Le système est L_1 en O' et $(L_3 \cup L_1)$ en O_1. Or le comportement symétrique des lentilles conduit à $(L_3 \cup L_1) \equiv (L_1 \cup L_3) \equiv L'$. De plus d'après le retour inverse de la lumière, A et A' conjugués par L' et L_1, le sont par L_1 et L'. On avait A' image de A par le premier système, maintenant A est l'image de A', soit $\gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1} = -0{,}71$; soit $S' = \gamma_2^2 S = 0{,}5S$, tirage A4 en A5.

60. L'œil

a) Le schéma ci-contre considère les rayons parallèles à l'axe d'un objet A_∞ à l'infini. Pour un œil normal (en pointillé) l'image se forme sur la rétine. Pour un œil myope (en trait plein) dont le cristallin est trop convergent (f_1 et f_2 sont inférieurs à δ), l'image se forme en avant de la rétine ; elle apparaît donc floue.



b) La formule de Descartes s'écrit $\frac{1}{\delta} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$ soit $x = -\frac{\delta f}{\delta - f}$.

Il faut bien comprendre qu'ici $x' = \overline{OA'} = \delta$ est fixe ; la distance focale f' du cristallin est variable, ce qui permet de voir des objets de position x variable.

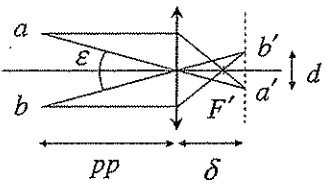
l'œil n'accommode pas : $f_1 = 1{,}50$ cm $\Rightarrow$ $x_1 = -1{,}14$ m

l'œil accommode au maximum : $f_2 = 1{,}37$ cm $\Rightarrow$ $x_1 = -13{,}9$ m

L'œil normal lorsqu'il n'accommode pas voit jusqu'à l'infini, alors que pour l'œil myope le PR est proche. En revanche l'œil myope voit plus près qu'un œil normal dont $pp = 25$ cm.

Conclusion : le myope voit moins bien de loin (la correction est envisagée à la question **50.**), mais mieux de près.

c) On distingue d'autant mieux deux objets rapprochés qu'ils sont près de l'œil ; il faut donc les amener au *Punctum Proximum*. Sur la figure ci-contre la lentille représente le cristallin et l'écran la rétine.



– l'œil normal accommode et fixe la focale

f avec $\frac{1}{\delta} - \frac{1}{-pp} = \frac{1}{f}$ $\Rightarrow$ $f = 1{,}43$ cm

La figure montre que $\underline{ab} \approx \varepsilon \times pp = \underline{75\ \mu m}$; au niveau de la rétine cela correspond à une distance $\underline{d = a'b'} \approx \varepsilon\,\delta = \underline{4{,}6\ \mu m}$.

– pour l'œil myope, $f = 1{,}26$ cm car $pp = 7{,}5$ cm d'où $\underline{ab} \approx \varepsilon \times pp = \underline{22{,}5\ \mu m}$

L'œil myope pouvant voir de plus près possède donc un meilleur pouvoir séparateur.

61. Grossissement commercial d'une loupe

En vision directe $\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{AB}{pp}$. Pour que l'image soit à l'infini (principe de la loupe sans accommodation, voir la question **49.**), il suffit de placer l'objet dans le plan focal objet de la lentille, alors $\alpha' \approx \tan\alpha' = AB / f'$.

Le grossissement commercial est $\boxed{G_c = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{pp}{f'}}$

Ce résultat indique que plus une loupe est convergente (f' petit), plus son grossissement commercial est grand.

AN : $G_c = 4$ donne $\underline{f' = 6\ cm}$, ordre de grandeur classique.

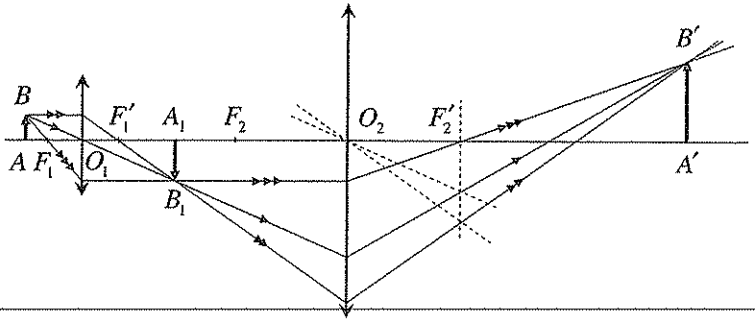
62. Le microscope

a) Bien sûr des figures à l'échelle sont impossibles ; ce qui importe, ce sont les constructions des 3 rayons qui permettent de suivre l'évolution du faisceau initial. Pour déterminer les émergents après l'oculaire, il faut s'aider de rayons auxiliaires (en pointillé) passant par O_2 et qui vont jusqu'au plan focal image passant par F_2'.

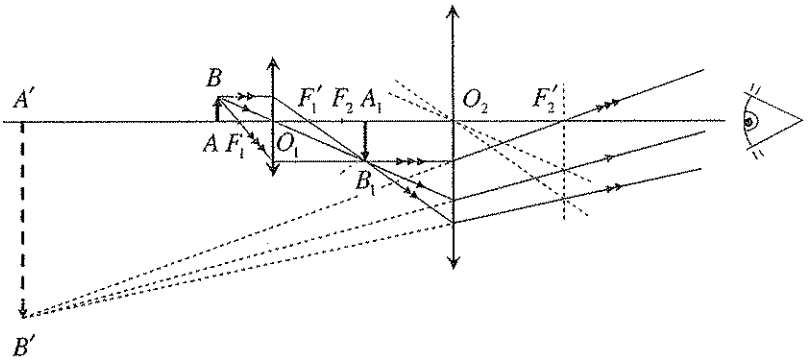
– dans le premier cas, l'image $A'B'$ est réelle (et serait donc projetable sur un écran !), ce qui ne convient pas pour une vision directe à l'oeil.

– dans le second, l'image $A'B'$ est virtuelle (plus grande et renversée) et peut s'observer par vision directe (l'oculaire sert de loupe pour voir A_1B_1) : cela convient donc pour un microscope.

Pour $D = \overline{O_1O_2}$ grand, A_1B_1 se forme entre O_1 et F_2



Pour D plus petit, A_1B_1 se forme entre F_2 et O_2



b) Formule de Descartes pour l'objectif : $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'} \Rightarrow \underline{\overline{O_1A_1} = 16{,}4 \text{ cm}}$

On est bien dans le cas de la 2ème figure avec $\overline{A_1O_2} = \overline{O_1O_2} - \overline{O_1A_1} = 3{,}6 \text{ cm} < f_2'$

Formule de Descartes pour l'oculaire : $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{1}{f_2'} \Rightarrow \underline{\overline{O_2A'} = -36{,}0 \text{ cm}}$

(ce qui confirme que l'image est virtuelle et suffisamment éloignée).
Le grandissement total est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_2 . \gamma_1 \Rightarrow \gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \times \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = 10 \times (-40) \Rightarrow \underline{\gamma = -400}$$

La valeur est élevée, c'est l'intérêt du microscope.

c) Pour que $A'B'$ soit à l'infini, il faut que A_1B_1 soit dans le plan focal objet (passant par F_2) de l'oculaire, d'où $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_2} = 16{,}0$ cm ; la position de l'objet est donnée par $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'} \Rightarrow \underline{\overline{O_1A} = -4{,}102 \text{ mm}}$ contre $-4{,}1$ mm à la question b) (A étant très près de F_1, la position de A_1 est très sensible).

d) Lorsque l'œil n'accommode pas, on est dans la situation de la question précédente et $\underline{\overline{O_1A} = -4{,}102 \text{ mm}}$.

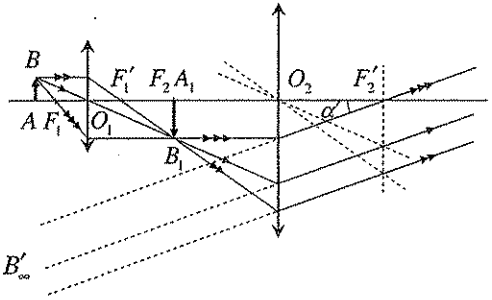
Lorsque l'œil accommode au maximum, sachant qu'il est placé en F_2', l'image à voir $A'B'$ est telle que $\overline{A'F_2'} = pp$. La formule de conjugaison de Newton pour l'oculaire : $\overline{F_2A_1}.\overline{F_2'A'} = -f_2'^2 \Rightarrow \overline{F_2A_1} = 0{,}64$ cm.

La formule de conjugaison de Descartes pour l'objectif $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'}$ avec $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_2} + \overline{F_2A_1} = 16{,}64$ cm conduit à $\underline{\overline{O_1A} = -4{,}098 \text{ mm}}$

d'où $\underline{\Delta x = 0{,}004 \text{ mm} = 4 \text{ µm}}$

On dispose donc d'une très faible latitude de mise au point ; l'ordre de grandeur justifie le recours à une vis micrométrique.

e) Dans le cas de la vision à l'infini, le schéma est le suivant :



Par définition $P_i = \dfrac{\alpha'}{AB}$, avec comme l'indique la figure $\alpha' \approx \tan\alpha' = \dfrac{A_1B_1}{f_2'}$,

d'où $\boxed{P_i = \dfrac{|\gamma_1|}{f_2'}}$

AN : $|\gamma_1| = 16/0{,}41 = 39$ et $\underline{P_i = 9{,}8.10^2 \text{ dioptries}}$, exprime les possibilités du microscope, ce n'est pas un grossissement, sa valeur n'est pas directement interprétable.

f) Le grossissement est $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ avec $\alpha' \approx \dfrac{A_1B_1}{f_2'}$ et $\alpha \approx \dfrac{AB}{pp}$ (à l'œil nu)

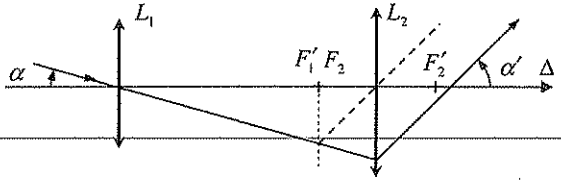
d'où $\boxed{G = \dfrac{|\gamma_1|\, pp}{f_2'} = P_i\, pp}$

AN : $\underline{G = 2{,}4.10^2}$, ce qui indique seulement l'ordre de grandeur du grossissement réel (car α est ici une référence normalisée).

63. Lunette astronomique

a) Il faut $F_1' \equiv F_2$, soit $h = f_1' + f_2'$, le système est afocal ; l'image à l'infini permet une observation sans accommoder, donc sans fatigue oculaire.

b)



c) $\boxed{G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$, $G < 0$ traduit le fait que l'image est renversée.

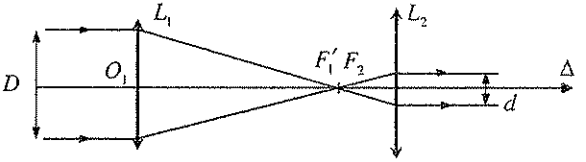
d) L'objet est étendu à l'infini : $\alpha = \dfrac{diamètre}{distance}$, $|\alpha'| = \alpha \dfrac{f_1'}{f_2'}$

Pour Mars : $|\alpha'| = 1{,}3.10^{-2}$ rad $< \dfrac{\pi}{6}$, Mars est vu en entier

Pour la Lune : $|\alpha'| = 1{,}2$ rad $> \dfrac{\pi}{6}$, on ne voit qu'une partie de la Lune

e) Tous les rayons arrivant sur l'objectif émergent en passant par son image par l'oculaire.

$\boxed{|G| = \dfrac{D}{d}}$



Soit O le centre du cercle oculaire, c'est l'image de O_1 par L_2 de centre O_2 :

$\dfrac{1}{\overline{O_2O}} - \dfrac{1}{\overline{O_2O_1}} = \dfrac{1}{f_2'}$, avec $\overline{O_2O_1} = -806$ mm, soit $\overline{O_2O} = 6{,}04$ mm.

Le cercle oculaire est pratiquement en F_2' et $d = 0{,}45$ mm.

Il faut placer l'œil au niveau du cercle oculaire dont le diamètre doit être inférieur au diamètre de la pupille de l'œil (de l'ordre de 3 à 4 mm).

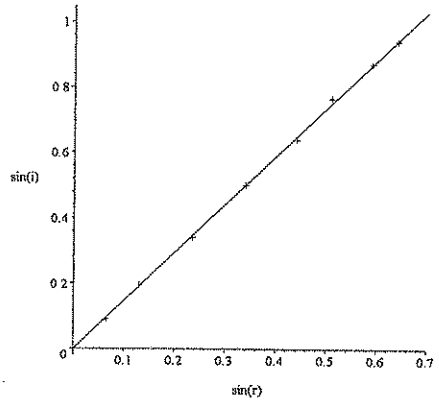
f) L'objectif de la lunette (le miroir primaire pour un télescope) joue le rôle de collecteur de lumière grâce à son grand diamètre, ce qui permet de voir des objets de faible luminosité. Le grossissement, qui varie suivant l'oculaire utilisé, n'est pas essentiel (sauf pour le problème de la taille du cercle oculaire).

Travaux pratiques

64. Les points de mesures portés sur un graphe $\sin i$ en fonction de $\sin r$ sont placés aléatoirement de part et d'autre d'une droite moyenne, ce qui indique un alignement probable.

Les incertitudes de mesure des angles avec ce dispositif correspondent à l'estimation faite dans la partie vérification d'une loi physique du chapitre **0** : U de l'ordre de 1,3°, ce qui justifie les écarts à la droite moyenne. La relation est probablement linéaire, ce qui valide, à la précision de l'expérience, la loi de la réfraction : $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \text{cste}$. Une régression linéaire fournit le coefficient directeur, indice du milieu 2 par rapport à l'air : $n = 1{,}47$. Pour estimer la précision de cette mesure on peut, la linéarité ayant été établie, estimer graphiquement l'écart entre les

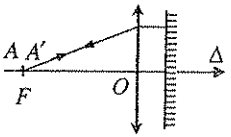
coefficients directeurs de deux droites moyennes plausibles, on obtient : $1{,}45 < n < 1{,}49$.



65. Il suffit d'observer sa main à travers la lentille placée très près ; si elle est agrandie, la lentille est convergente (cas de la loupe), si elle est rapetissée, elle est divergente (justification aux questions **28.** et **29.**). Si la différence de taille n'est pas appréciable, le test n'est pas concluant, on peut alors observer un objet lointain (à une distance supérieure *a priori* à la distance focale inconnue), l'image est droite si la lentille est divergente, renversée si elle est convergente.

66. C'est la lentille de plus courte focale qui donne le meilleur grandissement (pour s'en convaincre, penser au rayon qui passe par le centre de la lentille...).

67. Un dessin établit immédiatement la propriété, indépendante de la distance lentille-miroir.



Le calcul montre (on admet ici ce résultat) que réciproquement la formation de A' en A, avec un grandissement de -1, ne se produit que si A est en F. Il existe une autre solution, mais avec un grandissement de $+1$ et pour une distance lentille-miroir supérieure à f', ce qui a peu de risque de se produire expérimentalement.

Cette méthode sert donc à la détermination de la distance focale d'une lentille convergente (on applique alors le miroir plan contre la lentille) ou pour le réglage à l'infini de la lunette d'un goniomètre (mettre le réticule dans le plan focal de l'objectif de la lunette).

68. Méthode de Bessel

Pour valider graphiquement la relation il faut se ramener au test d'une relation linéaire. On peut par exemple tracer $D^2 - d^2$ en fonction de D, une fois la linéarité établie, le coefficient directeur donne $4f'$ (avec une incertitude sur f' 4 fois plus petite que celle sur le coefficient directeur).

On peut aussi, la linéarité ayant été établie ou admise, faire un traitement statistique avec 7 valeurs :

D (cm)	60	70	80	90	100	120	130
d (cm)	15,6	31,5	42,6	54,3	66,2	86,6	97,1
f' (cm)	13,99	13,96	14,33	14,31	14,04	14,38	14,37

$$\overline{f'} = 14{,}2\ ,\ s_{na} = 0{,}19 \iff t_u \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 2{,}45\frac{0{,}19}{\sqrt{7}} \approx 0{,}18$$

$\boxed{14{,}0\text{ cm} < f' < 14{,}4\text{ cm}}$ avec un niveau de confiance de 95%

69. La situation est celle de la question **31.** où la lentille est dans la position (L_1) avec $|\gamma_1| > 1$. Penser à $\sigma\sigma' = -f'^2$; si l'on éloigne l'image du foyer image, alors il faut rapprocher l'objet du foyer objet, c'est-à-dire qu'en éloignant l'écran il faut rapprocher la lentille de l'objet ; la nouvelle image est encore plus grande que la précédente (attention lorsque la lentille est dans la position (L_2) avec $|\gamma_1| < 1$, les résultats sont inversés).

70. Pour une lentille convergente, on peut avoir une estimation rapide en projetant sur une feuille l'image d'une source éloignée comme le Soleil ou autre. Il y a mieux :

- la méthode d'autocollimation (voir la question **67.**) : rapide et simple, mesure unique mais la précision peut être améliorée grâce au grandissement de –1.
- Les relations de conjugaison : avec une série de mesures, un traitement graphique est possible, ce qui permet de mieux cerner les incertitudes de mesure. La méthode est longue et délicate dans les cas où objet et / ou image sont virtuels.
- la méthode de Bessel (voir la question **68.**) : pour $D > 4f'$, si d est la distance entre les deux positions possibles de la lentille, alors

$$\boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$$

et une série de mesure permet aussi un traitement graphique ou statistique. L'avantage décisif de cette méthode provient de la façon de mesurer les distances sur les bancs d'optique. Dans les méthodes précédentes, on mesure les distances objet-lentille et écran-lentille, ce qui entraîne une erreur systématique liée à la position inconnue du centre optique de la lentille réelle (d'épaisseur non nulle). Dans la méthode de Bessel, on mesure la distance entre deux positions de la lentille (le décalage systématique se simplifie dans la différence) et la distance écran-objet qui ne pose pas de problème.

- la méthode de Silbermann : c'est un cas particulier de Bessel, les deux positions de la lentille sont communes, théoriquement au centre. Curieusement alors que l'on fait une mesure unique, cette méthode est la plus précise. On recherche $|\gamma| = 1$, c'est-à-dire une image de la même taille que l'objet en déplaçant la lentille et l'écran ; alors

$$\boxed{f' = D/4}$$

La mesure de D est indépendante de la position réelle de la lentille, on s'affranchit de l'appréciation de la netteté de l'image. Couramment on constate que lorsque le grandissement de -1 est réalisé (au mieux par encadrement) la lentille n'est pas nécessairement en position centrale, mais sa position ne sert pas dans la mesure. De plus mesurer $4f'$ permet de diviser l'incertitude de mesure sur la distance D par 4.

Pour une d'une lentille divergente, il faut l'associer en doublet accolé avec une lentille convergente de distance focale connue (ou mesurée) afin que l'ensemble soit équivalent à une lentille convergente (la vergence est additive). En effet les méthodes précédentes ne sont valables (à l'exception des relations de conjugaison) que pour les lentilles convergentes.

71. En diaphragmant, on améliore effectivement le stigmatisme, mais on augmente aussi la profondeur de champ (voir la question **58.**). La plage, longitudinale, de netteté relative est alors plus grande et les pointés encore moins précis !

Chapitre 3

Approche quantique

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

constante de Planck	$h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s
célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}
constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}

L'atome et ses constituants

charge de l'électron	$-e$ avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}91.10^{-30}$ kg ($mc^2 = 0{,}51$ MeV)
charge du proton ; du neutron	$e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; 0
masse du proton ≈ masse du neutron	$M = 1{,}67.10^{-27}$ kg ≈ 1840 m_e ($Mc^2 = 940$ MeV)

Le spectre électromagnétique et l'énergie du photon

électron-volt	1 eV = $1{,}60.10^{-19}$ J
infrarouge	$\lambda > 0{,}8$ µm ; E ≈ 0,1 eV (< 1,5 eV)
lumière visible	0,4 µm < λ < 0,8 µm ; E ≈ 1 eV (1,5 eV < E < 3 eV)
ultraviolet	$\lambda < 0{,}4$ µm ; E ≈ 10 eV (> 3 eV)
rayons X	10^{-12} m < λ < 10^{-8} m ; E ≈ 10 keV

Le cours d'abord

Dualité onde-particule

1. Citer des expériences où la lumière se décrit bien à l'aide d'ondes. Qu'appelle-t-on lumière monochromatique ? Que note-t-on λ ?
   Situer sur une échelle de longueurs d'onde, les ondes électromagnétiques correspondant à des rayonnements visibles, ultraviolets UV, et infrarouges IR.

2. Décrire sommairement l'effet photoélectrique où un électron est extrait d'un métal par un rayonnement électromagnétique ; quelle est sa caractéristique essentielle ? Quel autre aspect du rayonnement met-il en évidence ?

3. La dualité onde-particule conduit à associer à une onde électromagnétique de longueur d'onde dans le vide λ, de fréquence ν, un photon d'énergie E. Rappeler d'abord la relation entre λ et ν (c est la vitesse de la lumière dans le vide) en précisant les unités, puis donner la relation (dite de Planck-Einstein) entre E et ν d'une part, et entre E et λ de l'autre. Quelle est l'unité de la constante de Planck h ?

4. La quantité de mouvement (grandeur cinétique liée au mouvement) du photon est donnée par la relation $p = \frac{E}{c}$; en déduire la longueur d'onde λ de l'onde associée au photon en fonction de sa quantité de mouvement p.

5. Donner la relation de Louis de Broglie qui conduit à associer à toute particule (et non seulement au photon) de quantité de mouvement p une onde de longueur d'onde λ.
Les deux applications numériques suivantes relèvent de la mécanique classique où la quantité de mouvement et l'énergie cinétique d'une particule de masse m et de vitesse v sont $p = mv$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (ces formules ne s'appliquent pas pour des particules relativistes).
AN 1 : Calculer λ pour un électron de faible énergie cinétique $E_c = 10$ eV (c'est l'énergie d'un électron accéléré par une différence de potentiel de 10 V). Citer une application.
AN 2 : Calculer λ pour un objet macroscopique en mouvement comme une balle de ping-pong de masse $m = 2{,}3$ g à la vitesse $v = 5$ m.s^{-1}.
Conséquence ?

Interprétation probabiliste et inégalité de Heisenberg

6. Quelle différence notoire existe-t-il dans la description de trajectoires de particules entre la mécanique newtonienne à l'échelle macroscopique et la mécanique quantique à l'échelle microscopique ?

7. Décrire qualitativement une expérience d'interférences lumineuses en termes probabilistes « particule par particule ».

8. Énoncer à l'aide d'une phrase le principe d'incertitude d'Heisenberg. Comment s'exprime-t-il si, suivant un axe Ox, la position x d'une particule est précisée à Δx près et la quantité de mouvement $p_x = mv_x$ à Δp_x près ? Commenter cette inégalité.

Aspect quantique de l'oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique de masse m est astreint à osciller suivant un axe Ox ; sa de constante de raideur est k.

9. Point de vue de la mécanique classique

- Rappeler l'expression de la pulsation d'oscillation ω en fonction de k et m.
- Former l'expression de l'énergie mécanique E, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique, en fonction des variables p (quantité de mouvement), x (allongement) et des constantes m et ω.

10. Introduction de l'inégalité d'Heisenberg

- Pourquoi un oscillateur quantique ne peut-il pas être au repos ($p = 0$ et donc $x = 0$ pour un oscillateur libre) ?
- On pose $x = 0 + \Delta x$ et $p = 0 + \Delta p$ les valeurs minimales des grandeurs qui dans ce cas s'identifient à leur indétermination. Si on note $\Delta x = a$, que peut-on dire sur Δp ? En déduire une inégalité sur E en fonction de la variable a et des constantes $\hbar$, m et ω.

11. Énergie de point zéro de l'oscillateur harmonique quantique

- Cette inégalité est écrite $E \geq f(a)$; pour quelle valeur de a, la fonction $f(a)$ est-elle minimale ?
- Exprimer alors la valeur minimale E_{min} de l'énergie (appelée énergie de point zéro) en fonction de $\hbar$ et ω ; commentaire.
- Montrer que l'existence de cette énergie minimale est liée au confinement spatial de l'oscillateur.

■ Particule dans un puits de potentiel infini

Une particule de masse m est astreinte à se déplacer librement sur un axe Ox entre deux points O et A distants de a l'un de l'autre. Cela revient à dire que la particule est enfermée dans une « boîte » de longueur a avec des murs infiniment hauts.

12. Minimum d'énergie.

- Tracer l'énergie potentielle souvent appelée potentiel et notée $V(x)$, et en déduire l'énergie E de la particule en fonction de son énergie cinétique E_c.
- Justifier que le confinement spatial de la particule conduise à une énergie minimale E_{min} à évaluer en fonction de $\hbar$, m et a ; commentaires.

13. Quantification des niveaux d'énergie.

- Déduire des conditions aux limites que l'état associée à la particule est une superposition d'ondes stationnaires ; quelle analogie est-il possible d'invoquer ?
- Déterminer l'énergie E_n du niveau n en fonction de E_1, énergie du niveau fondamental (à exprimer en fonction des données) et de n ; commentaires. Comparer E_{min} et E_1.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Pour une particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique dans ce référentiel sont respectivement en mécanique newtonienne (dite classique) :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{et} \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2, \text{ soit } \quad E_c = \frac{p^2}{2m}.$$

Pour évaluer la longueur d'onde de de Broglie, ces expressions sont souvent suffisantes pour une particule matérielle (comme un électron accéléré sous une faible différence de potentiel, un neutron thermique, un atome froid,...), car son aspect quantique apparaît d'autant plus qu'elle est à basse énergie (avec $\lambda = h/p$ et h en 10^{-34}, λ est d'autant plus observable que p est petit).

Attention, ces relations ne s'appliquent pas :

* pour les particules matérielles de haute énergie (dites relativistes)
* pour le photon dont la masse est nulle et la vitesse égale à celle de la lumière.

☐ Une particule peut être décrite par la mécanique classique lorsque son énergie cinétique est faible devant son énergie de masse mc^2 (cela revient à dire que sa vitesse v est faible devant c). Inversement une particule doit être décrite en mécanique relativiste lorsque son énergie cinétique dépasse le dixième de son énergie de masse mc^2 (dans la pratique pour $v \geq c/10$). Les questions **28.** et **37.** précisent ce point.

☐ L'inégalité d'Heisenberg est connue en français sous l'expression « Relation d'incertitude... ». Cela ne concerne pas une « incertitude » liée à l'imperfection des appareils de mesure ou autre, mais bien une « indétermination » d'origine fondamentale, inscrite dans les lois de la nature ; il serait plus convenable de parler de « Relation d'indétermination... ». D'ailleurs Heisenberg lui-même a vite abandonné les mots « Unsicherheit » (incertitude) et « Ungenauigkeit » (inexactitude) pour n'utiliser que « Unbestimmtheit » (indétermination).

☐ Il ne faut pas penser que la lumière est de temps en temps, ou par hasard une onde ou un ensemble de photons. Dans sa dualité, la lumière est en même temps onde et particules.

– Cependant lorsque la lumière se propage, cette propagation est décrite par une onde et caractérisée comme telle (réflexion, réfraction, diffusion, interférences, diffraction...)

– Et lorsque la lumière interagit avec la matière, elle se manifeste photon par photon. Ceci signifie que le photon se matérialise ou pas, de façon totalement aléatoire, mais avec une probabilité proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique de l'onde associée.

☐ Il ne faut pas penser non plus que ce que nous appelons « matière » est fondamentalement différent de la lumière. Même si cela est peu intuitif à notre échelle c'est aussi une dualité avec l'onde associée qui caractérise son mouvement (exemple de la diffraction des électrons dans un microscope électronique). La lumière a tout de même une particularité : comme les électrons ou les protons, les photons ont une énergie, une quantité de mouvement, un moment cinétique, mais ils n'ont pas de masse ; c'est d'ailleurs cette propriété qui leur permet d'atteindre la vitesse c dans le vide.

Applications directes du cours

Dualité onde-particule

14. Quel est l'ordre de grandeur, en électron-volt, de l'énergie d'un photon correspondant à un rayonnement :

a) visible : $\lambda = 550$ nm b) UV : $\lambda = 100$ nm c) IR : $\lambda = 10$ µm ?

Plus généralement, situer sur une échelle de longueurs d'onde, les ondes électromagnétiques correspondant à une lumière visible, un rayonnement ultraviolet UV, un rayonnement infrarouge IR. Y porter également l'échelle correspondante de fréquence et d'énergie. Comment doit-on justifier les dénominations « infra » et « ultra » ?

15. Dans l'effet photoélectrique avec une plaque de zinc, le travail d'extraction est $W_S = 4{,}3$ eV ; rappeler cette notion et indiquer dans quel domaine se situe le seuil λ_S en longueur d'onde ?

16. Par rapport à la balle de ping-pong traitée à la question **5.**, lequel de ces deux objets macroscopiques a le plus de chance de manifester son aspect ondulatoire ?

- un grain de poussière (de diamètre 1 µm), de masse $m = 10^{-7}$ g animé d'une vitesse $v = 1$ mm.s^{-1}
- une voiture roulant à grande allure (proposer une application numérique) ?

17. Un neutron thermique est un neutron de faible énergie. Si l'on note m sa masse et v sa vitesse, son énergie cinétique moyenne d'agitation thermique à la température absolue T est donnée par la relation :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

où $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} est la constante de Boltzmann et $m = 1{,}67.10^{-27}$ kg.

Exprimer la longueur d'onde associée à un tel neutron en fonction de la température puis faire l'application numérique pour une température $T = 300$ K (soit 27°C). Expliquer pourquoi et comment ces neutrons peuvent conduire à une diffraction.

Interprétation probabiliste et inégalité de Heisenberg

18. Reprendre le grain de poussière de la question **16.** de masse $m = 0{,}1\ \mu g$; on souhaite préciser son abscisse à $\pm 0{,}1\ \mu m$ près sur l'axe Ox. Évaluer l'imprécision sur la vitesse v_x de ce grain et commenter ce résultat.

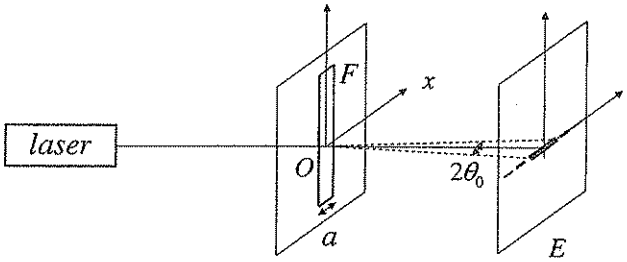
Justifier pour cette application numérique le choix du grain de poussière et non de la balle de ping-pong ou de la voiture également traitées précédemment.

19. Dans le modèle de Bohr (prendre le cas d'un atome d'hydrogène), l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r et de quantité de mouvement $p = mv$ autour du proton. Les orbites permises vérifient néanmoins une règle de quantification (du moment cinétique) : $r\,p = n\hbar$ (nécessaire à l'obtention des niveaux d'énergie).

- Rappeler la relation d'incertitude entre Δr et Δp, et en déduire une inégalité entre $\dfrac{\Delta r}{r}$ et $\dfrac{\Delta p}{p}$ compte tenu de la règle de quantification.
- Pour qu'on puisse parler de l'électron en termes classiques, quelles inégalités faut-il imposer aux indéterminations Δr et Δp sur sa position et sa quantité de mouvement ?

Les deux résultats sont-ils compatibles ? Que peut-on en déduire ?

20. Dans une expérience de diffraction d'une onde de longueur d'onde λ par une fente fine F de largeur a suivant Ox, la lumière se répartit derrière la fente (sur un écran E) dans un cône dont le demi-angle θ_0 au sommet est donné par la formule vue au chapitre **1** : $\sin\theta_0 = \lambda / a$.



Montrer comment le principe d'incertitude d'Heisenberg permet de retrouver ce résultat dans le cadre d'une interprétation corpusculaire de la lumière.

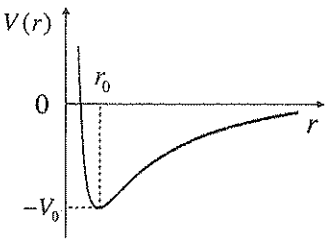
L'oscillateur harmonique quantique

21. En réalité les états stationnaires accessibles à l'oscillateur harmonique ont des énergies quantifiées données par l'expression :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\ n \in \mathbb{N}$$

Quelle est l'énergie du plus bas niveau ? La comparer à E_{min} obtenue à la question **11.** et commenter.
Quelle différence existe-t-il avec les niveaux d'énergie d'une particule dans un puits de potentiel infini ?

22. Ci-contre l'allure du potentiel d'interaction entre les deux atomes d'une molécule diatomique en fonction de la distance r de leurs noyaux.



- Commenter la forme de cette courbe ; quelle interprétation peut-on donner à r_0 ? à V_0 ?
- Pourquoi la molécule, pour ses états de vibration, peut-elle être modélisée par un oscillateur harmonique ? Quels sont ses niveaux d'énergie ?
- Dans quel domaine des ondes électromagnétiques une telle molécule peut-elle absorber un rayonnement ?

■ Particule dans un puits de potentiel infini

23. On piège une particule de masse $m = 10^{-30}$ kg dans un puits d'extension $a = 1{,}5.10^{-10}$ m. Calculer l'énergie de l'état fondamental et faire un commentaire sur la situation décrite et l'ordre de grandeur obtenu.

24. Dans un noyau atomique, un nucléon peut se déplacer suivant un diamètre, soit sur une distance d'environ $a = 5.10^{-15}$ m (5 fermis). Le nucléon est ainsi emprisonné dans le noyau du fait de l'interaction, dite forte, entre le nucléon considéré et les $(A-1)$ autres nucléons. Calculer les niveaux d'énergie E_n du nucléon de masse $m = 1{,}67.10^{-27}$ kg dans ce modèle.

25. Reprendre le grain de poussière (de diamètre 1 µm) de la question **16.** de masse $m = 0{,}1$ µg animé d'une vitesse $v = 1$ mm.s^{-1}. On l'enferme dans un boîte de largeur $a = 0{,}1$ mm (100 fois sa taille).

- Comparer sa longueur d'onde de de Broglie à la dimension de la boîte et conclure.
- Donner l'expression de ses niveaux d'énergie, comparer à son énergie cinétique et retrouver n.
- Pourquoi a-t-on l'impression que l'énergie du grain de poussière est continue ?

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

26. Quelle différence essentielle existe-t-il en salle de TP d'optique entre le spectre émis par une lampe à vapeur de mercure (par exemple) et une lampe blanche de type quartz-iode ?

27. Un gaz chauffé dans une ampoule scellée passe dans un état excité. Lors de la désexcitation il y a émission d'une onde lumineuse. Dans le cas du néon, l'émission correspond à une transition électronique entre deux niveaux atomiques séparés de 1,75 eV. Calculer la longueur d'onde correspondante. De quelle gamme du spectre électromagnétique s'agit-il ? Justifier alors pourquoi les tubes fluorescents à usage domestique – dits tubes néon – ne contiennent en réalité pas de néon.

28. La relativité restreinte (Einstein 1905) conduit à une relation générale entre l'énergie E d'une particule, sa quantité de mouvement p (une grandeur cinétique liée à son mouvement) et sa masse m :

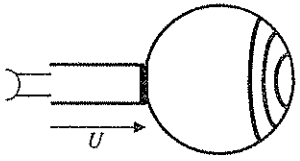
$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$

* À quel résultat conduit cette relation dans le cas d'une particule de masse nulle comme le photon ? En déduire alors la relation entre la longueur d'onde λ de l'onde associée au photon et sa quantité de mouvement p.
* Quelle est l'énergie (dite énergie de masse) d'une particule de masse m au repos ? Calculer l'énergie de repos d'un électron, d'un proton en les exprimant en eV.

29. En 1926 Davisson et Germer montrent expérimentalement qu'un pinceau d'électrons réfléchis par la surface d'un cristal de nickel donnait, sur une plaque photographique, des taches de diffraction analogues à celle que von Laue avaient observées pour les rayons X. Que prouvent ces expériences ?

30. Comment expliquer la course au gigantisme des accélérateurs de particules depuis plusieurs dizaines d'années ?

31. Un canon à électrons (obtenus par thermo-émission) fourni un faisceau d'électrons accélérés sous une différence de potentiel U de quelques dizaines de volts et qui bombarde un échantillon de matière. Derrière l'échantillon, on observe une série d'anneaux.



De quel phénomène s'agit-il ? En augmentant la tension d'accélération U prédire comment évolue le rayon des anneaux (on rappelle que l'énergie cinétique acquise par un électron est alors égale à U exprimée en eV).

32. Citer un fait expérimental qui a conduit à l'hypothèse de quantification de l'énergie d'une particule confinée dans l'espace.

33. Pour l'atome de Bohr, montrer que la condition de quantification sur le moment cinétique (soit $r\,p = n\hbar$ vue à la question **19.**) n'est rien d'autre qu'une condition d'interférences constructives sur la circonférence des ondes de matière ; commentaire.

Exercices

34. Flux de photons dans un faisceau laser

Un laser Hélium-Néon émet une lumière rouge quasi monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 633$ nm. La puissance P du faisceau est de 1,0 mW (comme en salle de TP), la section circulaire du faisceau a un diamètre $d = 2{,}0$ mm.

a) Déterminer en J et en eV l'énergie E d'un photon.

b) Calculer la puissance surfacique ϕ qui traverse la section.

c) Quel est le flux N_t de photons, c'est-à-dire le nombre de photons par seconde dans le faisceau ?

35. La lumière ultraviolette en chimie

En chimie organique, les énergies des liaisons simples entre deux atomes dans une molécule sont de l'ordre de $E_0 = 350$ kJ.mol^{-1}.

(à titre documentaire 348 pour une liaison C–C, 308 pour une liaison C–N, 413 pour une liaison C–H)

Rappelons qu'il s'agit de l'énergie minimale à fournir pour rompre une mole de liaisons.

a) Quelle relation doit vérifier la longueur d'onde d'une lumière capable de rompre les molécules organiques ? Faire l'application numérique en utilisant la constante d'Avogadro $N_A = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1} et les valeurs données dans la rubrique « Les ordres de grandeur utiles » en début de chapitre.

b) La chirurgie réfractive de l'œil qui consiste à retoucher la cornée en vaporisant sa surface a vraiment connu son essor à partir de l'utilisation des lasers UV impulsionnels (appelés laser excimer) dans les années 1990.
Expliquer pourquoi de telles interventions ne sont pas envisageables avec un laser émettant dans le domaine visible.

c) Plus généralement en chimie, justifier le rôle particulier du rayonnement de courte longueur d'onde dans de nombreuses réactions, comme de nombreuses polymérisations par exemple.

36. Effet photoélectrique

Il est recommandé d'avoir vu les questions **2.** et **15.** avant d'aborder cet exercice.

Une photocathode en potassium est éclairée par une lampe spectrale au mercure. On utilise différents filtres optiques afin de sélectionner à chaque fois une longueur d'onde λ émise par la lampe, et on mesure l'énergie cinétique maximale E_c des électrons produits par effet photoélectrique.

Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

λ (nm)	254 UV	297 UV	334 UV	365 UV	405 violet	436 bleu	546 vert	577/579 jaune
E_c (eV)	2,60	1,89	1,43	1,11	0,77	0,55	rien	rien

a) Ces énergies cinétiques sont-elles modifiées lorsqu'on augmente la puissance émise par la lampe ?

b) Déterminer la valeur de la constante de Planck h.

c) Pourquoi n'observe-t-on rien avec la raie verte et les raies jaunes du mercure ? Calculer le travail d'extraction W_S des électrons du potassium.

d) En déduire la longueur d'onde maximale λ_S qui permet d'obtenir un effet photo-électrique sur le potassium.

37. Longueurs d'onde associées à des électrons

Rappeler en eV l'énergie de masse (ou énergie de repos) mc^2 d'un électron.

a) Un électron accéléré par une différence de potentiel de 40 V possède une énergie cinétique $E_c = 40$ eV. Cet électron est-il classique ou relativiste ? Que vaut sa quantité de mouvement p ? Calculer la longueur d'onde λ associée à cet électron. Pour quel type d'applications peut-on l'utiliser ?

b) Un électron accéléré par un accélérateur de particules puissant possède une grande énergie $E = 1$ GeV. Cet électron est-il classique ou relativiste ? Que vaut sa quantité de mouvement p donnée par la formule $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Calculer la longueur d'onde λ associée à cet électron. Pour quel type d'applications peut-on l'utiliser ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

■ Dualité onde-particule

1. Les expériences d'interférences (lumière + lumière = 4 fois lumière ou lumière + lumière = obscurité) ou de diffraction de la lumière se décrivent et se comprennent facilement par le caractère ondulatoire de la lumière comme cela a été vu au chapitre **1.**. La lumière monochromatique est constituée d'une seule couleur du spectre (par opposition à la lumière blanche), à laquelle on attribue une longueur d'onde λ qui est celle de la période spatiale de l'onde électromagnétique progressive se propageant dans le vide à la célérité $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

L'ultraviolet (UV) s'étend en gros de 10 nm à 400 nm = 0,4 µm, le spectre visible de 400 nm = 0,4 µm à 800 nm = 0,8 µm, et l'infrarouge (IR) de 0,8 µm à 1 000 µm = 1 mm. Un diagramme plus complet est proposé à la question **14.**.

2. L'effet photoélectrique (Hertz 1887) consiste en l'émission d'électrons par un métal recevant un rayonnement électromagnétique. Il se produit par exemple pour une lame de zinc éclairée par des radiations ultraviolettes, mais ne se produit pas lorsque cette même lame est éclairée par de la lumière visible, même pour un faisceau intense. La caractéristique essentielle du phénomène réside dans l'existence d'un seuil ν_S pour la fréquence ν du rayonnement reçu, en l'occurrence $\nu > \nu_S$. L'existence de ce seuil montre que le rayonnement (ultraviolet, lumière ou autre) se comporte alors comme des petits grains d'énergie, appelés photons, ce qui met en évidence l'aspect corpusculaire de la lumière. Les photons sont sans masse et voyagent à la célérité de la lumière.

3. C'est la relation pour les ondes vue au chapitre **1** : $\boxed{\lambda = \frac{c}{\nu}}$

avec λ en m, c en m.s^{-1} et ν en Hz.

La relation de Planck-Einstein donnant l'énergie d'un photon en fonction de la fréquence ν ou de la longueur d'onde λ de l'onde associée est :

$$\boxed{E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}}$$

avec h constante de Planck en J.s.

Elle montre que les échanges d'énergie entre le rayonnement et la matière ne se font pas de manière continue mais par quantités élémentaires d'énergie proportionnelles à la fréquence du rayonnement ; on dit que les échanges sont quantifiés.

4. Avec la relation de la question précédente, la quantité de mouvement du photon s'écrit :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

5. Louis de Broglie a généralisé en 1923 la relation précédente à toute particule (y compris matérielle, classique ou relativiste) ; elle conduit à associer à une particule de quantité de mouvement p (aspect corpusculaire) une onde de longueur d'onde λ (aspect ondulatoire) :

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

Les deux aspects onde (onde de matière) et particule sont complémentaires.

AN 1 : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2mE_c} = 1{,}7.10^{-24}$ kg.m.s^{-1}

et $\underline{\lambda = 3{,}9.10^{-10} \text{ m} = 0{,}39 \text{ nm}}$

Cette longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la taille des atomes. Il y a donc possibilité de diffraction des électrons de cette gamme d'énergie par des mailles cristallines (comme pour les rayons X), permettant l'accès à la structure de la matière à très petite échelle.

AN 2 : Pour un objet du monde macroscopique, la balle de ping-pong :

$p = mv = 1{,}1.10^{-2}$ kg.m.s^{-1} et $\underline{\lambda = 6.10^{-32} \text{ m}}$.

Cette longueur d'onde est infime par rapport à tout ce qui existe ; l'aspect ondulatoire du mouvement de la balle de ping-pong est donc indécelable.

Interprétation probabiliste et inégalité de Heisenberg

6. En mécanique classique, à l'échelle macroscopique, la trajectoire d'un mobile (position et vitesse) est parfaitement connue ; cela signifie qu'à un instant donné, il est possible de préciser simultanément la position et la vitesse du mobile, sous-entendu avec une précision théorique parfaite, limitée seulement par les possibilités de mesures.

En mécanique quantique, à l'échelle microscopique, ces certitudes doivent être abandonnées (en particulier la notion de trajectoire n'a plus de sens) et il convient de parler de probabilité de présence. Par exemple on ne peut pas attribuer à un électron une trajectoire autour du noyau ; comme dans le cours de chimie, on parle alors d'orbitales dans lesquelles il faut évoquer la probabilité de présence de l'électron.

7. L'expérience d'interférences lumineuses est la suivante : une fente source fine F de direction l'axe Y éclaire un cache opaque dans lequel sont disposées deux fentes fines F_1 et F_2 (les fentes d'Young) de même direction que F. L'observation se fait

sur un écran E placé en arrière, le long d'un axe x perpendiculaire à l'axe des fentes.

On observe suivant l'axe x des franges plus ou moins lumineuses parallèles à la direction des fentes. En description ondulatoire, les ondes issues de F_1 et F_2 interfèrent en chaque point M de l'écran E et l'intensité lumineuse observée dépend de leur déphasage :

– si les deux ondes arrivant en M sont en phase alors :

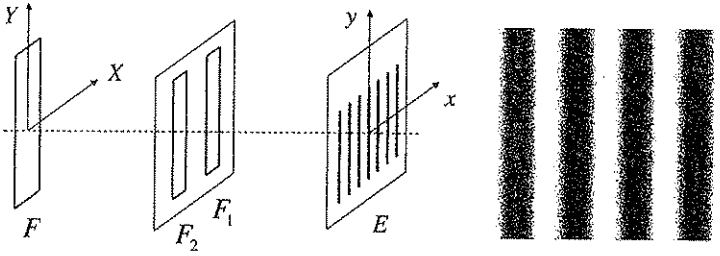
$$lumière + lumière = 4 \times lumière$$

les amplitudes s'ajoutent et l'intensité lumineuse (proportionnelle au carré de l'amplitude) est 4× celle d'une onde seule : on observe une frange brillante,

– si les deux ondes arrivant en M sont en opposition de phase alors :

$$lumière + lumière = obscurité$$

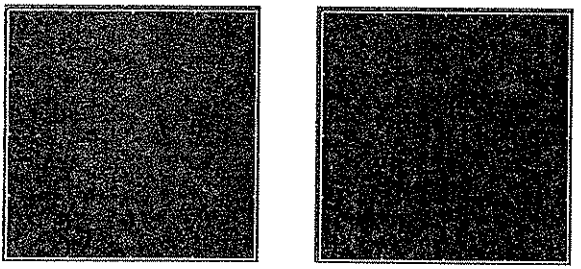
les amplitudes s'annulent et l'intensité lumineuse est nulle : on observe une frange sombre.



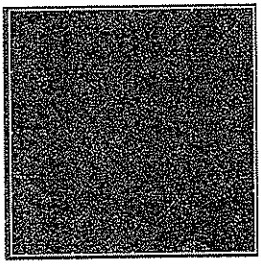
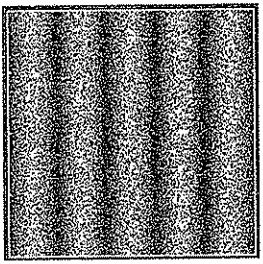
Lorsque l'une des deux fentes est obstruée, on obtient sur l'écran une intensité uniforme I_1 (en pratique, il s'agit de la répartition de l'intensité lumineuse correspondant à la figure de diffraction de la fente ouverte). En revanche, lorsque les deux fentes sont ouvertes, on observe sur l'écran une répartition de l'intensité $I(x) \neq I_1 + I_2$: l'intensité de la somme n'est pas la somme des intensités.

Comment peut-on expliquer ce phénomène dans le cadre d'une théorie purement corpusculaire ? Pour cela on émet les photons un par un et on place devant l'écran une caméra CCD ultra-sensible enregistrant le phénomène :

– pour un temps de pose suffisamment court pour que le nombre de photons reçu sur la caméra soit faible, on constate que chaque photon produit un impact bien localisé et non pas une figure d'interférence de faible intensité !



– pour un temps de pose suffisamment long pour recevoir un grand nombre de photons, la caméra montre que les franges se reconstituent.

En réalité, on observe que les photons (qui n'interagissent pas entre eux) arrivent de manière aléatoire sur la caméra, chacun produisant un impact localisé, et ce n'est que lorsqu'un grand nombre d'entre eux est arrivé sur le détecteur que se reconstitue la figure d'interférence.

Conclusion : les photons étant tous émis de la même manière et cependant n'arrivant pas tous au même endroit sur l'écran, on peut seulement dire que la probabilité qu'il frappe l'écran en x est proportionnelle à l'intensité $I(x)$. Cela conduit à abandonner la notion de trajectoire du photon et en particulier à ne pas se poser la question de savoir par quelle fente est passé le photon.
Les prévisions sur le comportement d'un photon ne peuvent être que du type probabiliste.
Les aspects corpusculaire et ondulatoire de la lumière sont inséparables puisque la lumière se comporte à la fois comme une onde et un corpuscule.

8. Le principe d'incertitude d'Heisenberg (1925) affirme qu'il est impossible de connaître simultanément la position et la quantité de mouvement d'une particule avec une précision parfaite.
Si la position x est précisée à Δx près et la quantité de mouvement p_x à Δp_x près, alors :

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \hbar}$$

où $\hbar = h / 2\pi$ est la constante de Planck réduite (divisée par 2π).
On voit bien que plus on cherche à préciser la position par exemple (Δx diminue), moins bien sera connue la vitesse (Δv_x augmente) et inversement.
Si à l'échelle microscopique, les indéterminations sont importantes, elles sont, vu la petitesse de $\hbar$, trop faibles à l'échelle macroscopique pour être décelées par les moyens de mesure, et la mécanique classique reste alors parfaitement adaptée.
Rq : $\hbar$ reste une limite inférieure ; il existe des cas où le produit $\Delta x \Delta p_x$ peut être plus grand (comme à la question **12.**)

Aspect quantique de l'oscillateur harmonique

9. Point de vue de la mécanique classique

- On a vu au chapitre **1.** que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ soit $k = m\omega^2$.
- L'énergie de l'oscillateur est $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, et avec $p = mv$:

$$\boxed{E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}$$

10. Introduction de l'inégalité d'Heisenberg

- $\Delta p = 0$ (plus d'indétermination) ne permet pas de satisfaire le principe d'incertitude $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ ($\Delta x = 0$ non plus).
- Avec $\Delta x = a$ l'indétermination sur x, celle sur p est donnée par l'inégalité d'Heisenberg : $\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{a}$.

$$\text{Alors } E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2 \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2.$$

11. Énergie de point zéro de l'oscillateur harmonique quantique

- Il vient $f(a) = \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$; sa dérivée est $f'(a) = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + m\omega^2 a$

  elle s'annule ($f'(a) = 0$) pour $a_{min}^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ (il s'agit bien d'un minimum, il est facile de vérifier que pour cette valeur $f''(a_{min}) > 0$)
- Alors vu l'inégalité sur E, la valeur minimale de l'énergie est donnée par :

$$E_{min} = f(a_{min}) = \frac{\hbar^2 m\omega}{2m\hbar} + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_{min} = \hbar\omega}$$

L'énergie minimale de l'oscillateur harmonique quantique n'est donc pas nulle (comme celle de l'oscillateur harmonique classique). Ceci est un effet purement quantique.

Rq : Dans le calcul de l'expression de l'énergie minimale $E_{min} = f(a_{min})$ ci-dessus, il apparaît que les deux contributions (énergie cinétique et énergie potentielle élastique) sont égales, comme c'est le cas en valeur moyenne pour l'oscillateur harmonique classique.

Rq : Un calcul exact en mécanique quantique donne : $E_{min} = \frac{\hbar\omega}{2}$.

La relation d'incertitude ne prévoit pas ce facteur 2, mais seulement l'ordre de grandeur.

- Dans $E_{min} = \hbar\omega$, en éliminant ω à l'aide de l'expression $a_{min}^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$, il vient :

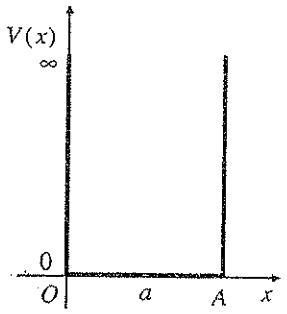
$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{ma_{min}^2}$$

Cette expression montre bien que plus l'oscillateur est confiné ($\Delta x = a$ petit), plus son énergie minimale est élevée.

Particule dans un puits de potentiel infini

12. Minimum d'énergie.

- Le potentiel $V(x)$ est celui tracé ci-contre : il est nul dans la boîte où la particule se déplace librement et infini sur les bords car elle est emprisonnée entre deux murs de hauteur infranchissable. On parle de particule dans un puits de potentiel infini.
  Comme $E = E_c + V(x)$, et que $V(x) = 0$ dans la boîte, on en déduit $E = E_c$, l'identité entre l'énergie de la particule et son énergie cinétique.



- On utilise la relation de Heisenberg : $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, avec une localisation de la particule en x sur l'intervalle $[0,a]$ soit $\Delta x \leq a$, il vient $\Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{\Delta x} = \dfrac{\hbar}{a}$.

  Et puisque $E = E_c = \dfrac{p^2}{2m}$, on en déduit l'énergie minimale de la particule :

$$E_{min} = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{h^2}{8\pi^2 ma^2}$$

  En mécanique classique, une particule peut prendre toutes les énergies possibles (y compris l'énergie nulle lorsqu'elle est au repos). En mécanique quantique, l'énergie de la particule ne peut être nulle car il en serait de même de la quantité de mouvement et $\Delta p_x = 0$ (absence d'indétermination) est incompatible avec le principe d'incertitude d'Heisenberg. Par ailleurs il apparaît que cette énergie minimale est d'autant plus importante que la particule est davantage confinée (a petit).

  Rq : Cette valeur est bien un minimum fixé par la relation d'incertitude, mais ce minimum n'est pas forcément atteint. Pour s'en convaincre ici, il suffit d'observer le résultat de la question suivante qui donne la valeur exacte de E_{min} et qui est notablement plus grande que la précédente.

13. Quantification des niveaux d'énergie.

- À cause de la structure du potentiel, la particule reste confinée entre O et A : sa probabilité de présence est nulle à l'extérieur du puits.
  L'onde associée se réfléchit sur chaque extrémité et il apparaît une onde stationnaire dont les deux points O et A sont des nœuds comme les extrémités d'une corde vibrante fixée aux deux bouts immobiles. L'amplitude de l'onde est nulle en ces deux points par nullité de la probabilité de présence aux extrémités.
  Si a est la largeur du puits, le système d'ondes stationnaires ne peut s'établir qu'à la condition (vue au chapitre **1**) :

$$a = n\frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

- La longueur d'onde associée à la particule est donnée par la relation de Louis de Broglie :

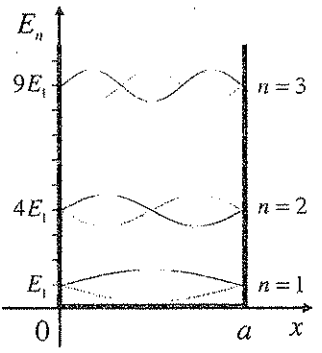
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad (2) \quad \text{puisque} \quad E = E_c = \frac{p^2}{2m}$$

d'où l'énergie E notée E_n par élimination de λ entre les relations (1) et (2) :

$$\boxed{E_n = n^2 E_1,\ n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{avec} \quad \boxed{E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

La particule liée possède des niveaux d'énergie quantifiés, ce qui signifie que l'énergie ne peut prendre que des valeurs discrètes.

La quantification des niveaux d'énergie indique que le système réagit comme un résonateur à fréquences multiples. Chaque onde stationnaire (pour n différent) détermine un état énergétique différent, comme on observe divers modes de vibration stationnaire d'une corde vibrante. L'état le plus général est une superposition d'ondes stationnaires.



On s'aperçoit qu'à un facteur π^2 près, E_1 coïncide avec E_{min} (en fait la résolution de l'équation de Schrödinger confirme l'expression exacte de E_1, alors que E_{min} est une valeur approchée).

E_1 est en $1/a^2$, c'est donc bien la localisation dans le puits qui entraîne une valeur non nulle du plus bas niveau d'énergie ; il s'agit là d'un phénomène purement quantique.

Applications directes du cours

■ Dualité onde-particule

14. L'énergie E d'un photon est relié à la longueur d'onde λ par la relation :

$$E = h\nu = hc/\lambda$$

En exprimant E en eV et λ en nm, il vient la formule semi-numérique : $E = 1\,241/\lambda$

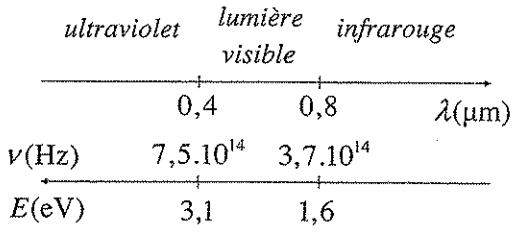
a) visible : $E = 2{,}25$ eV b) UV : $E = 12{,}4$ eV c) IR : $E = 0{,}12$ eV

De manière générale, on peut retenir :

10 eV pour l'UV, 1 eV pour le visible et 0,1 eV pour l'IR.

L'ultraviolet (UV) s'étend en gros de 10 nm à 400 nm = 0,4 µm, le spectre visible de 400 nm = 0,4 µm à 800 nm = 0,8 µm, et l'infrarouge (IR) de 0,8 µm à 1 000 µm = 1 mm. La fréquence et l'énergie des photons correspondant aux limites

du domaine visible sont $\nu = 3{,}7.10^{14}$ Hz et $E = 1{,}6$ eV pour le rouge et $\nu = 7{,}5.10^{14}$ Hz et $E = 3{,}1$ eV pour le violet.



Les dénominations « infra » et « ultra » sont relatives à la fréquence ou à l'énergie par rapport au domaine visible, et non pas à la longueur d'onde (ici donnée dans le vide).

15. L'effet photoélectrique (émission d'électrons par un métal recevant un rayonnement électromagnétique) ne se produit que si les photons associés à l'onde incidente ont une énergie suffisante :

$$E = h\nu > h\nu_S = W_S$$

W_S étant l'énergie nécessaire pour extraire un électron (travail d'extraction).

L'inégalité précédente se réécrit avec la longueur d'onde :

$$E = \frac{hc}{\lambda} > \frac{hc}{\lambda_S} = W_S \quad \Rightarrow \quad \lambda < \lambda_S = \frac{hc}{W_S}$$

AN : $\lambda < \lambda_S = 0{,}29$ μm ; ce domaine est dans l'ultraviolet comme pour la plupart des métaux.

16. Aucun, car il est impossible de mettre en évidence, dans le domaine macroscopique, le caractère ondulatoire de la matière !

- pour le grain de poussière, notablement moins massique que la balle de ping-pong et bien plus lent : $p = 1.10^{-13}$ kg.m.s^{-1} et $\lambda = 6.10^{-21}$ m.
  Le commentaire est inchangé par rapport à la balle de ping-Pong.
- quant à la longueur d'onde d'une voiture roulant à vive allure, elle est encore plus petite que celle de la balle de ping-pong ! Avec $m = 1\,200$ kg, $v = 130$ km.h^{-1} on a $p = 4{,}3.10^{3}$ kg.m.s^{-1} et $\lambda = 1{,}5.10^{-38}$ m.

17. On a $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_BT \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{3mk_BT}$ d'où $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_BT}}$

Une température $T = 300$ K conduit à $\lambda = 0{,}15$ nm.

Cette longueur d'onde est de l'ordre de la distance entre les atomes dans un réseau cristallin ; un faisceau de neutrons thermiques tombant sur un cristal de $NaCl$ ou $CaCl_2$ peut donc donner naissance à des phénomènes de diffraction analogues à ceux observés avec des rayons X dont la longueur d'onde est du même ordre. L'expérience a été conduite avec succès pour la première fois en 1947.

Interprétation probabiliste et inégalité de Heisenberg

18. L'énoncé impose une position précisée à $\Delta x = 10^{-7}$ m près.

D'après l'inégalité de Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \Rightarrow \Delta p_x = m\Delta v_x \geq \dfrac{\hbar}{\Delta x}$ et finalement :

$$\Delta v_x \geq \frac{h}{2\pi m \Delta x} = 1{,}0.10^{-20} \text{ m.s}^{-1}$$

Ce résultat signifie qu'il est alors impossible de connaître la vitesse à mieux que 10^{-20} m.s^{-1} près ! Dans la pratique ceci n'introduit aucune restriction puisqu'aucun appareil n'est capable d'atteindre une telle précision sur la vitesse (variation relative $\Delta v_x / v_x = 10^{-14}$ si $v_x \approx 1$ µm.s^{-1}). L'indétermination est si petite que l'inégalité de Heisenberg n'a pas de conséquence à l'échelle macroscopique. La vitesse et la position peuvent être connues simultanément avec la meilleure précision (l'imprécision sur la mesure est largement supérieure à celle liée à l'inégalité d'Heisenberg) et la mécanique classique est parfaitement adaptée.

La longueur d'onde associée au grain de poussière est plus grande que celles associées à la balle de ping-pong ou à la voiture, c'est donc pour le grain de poussière que l'on a la plus grande indétermination sur les paramètres de la trajectoire, et pourtant, cela n'a aucune conséquence à cette échelle. L'inégalité d'Heisenberg (et de manière plus générale la mécanique quantique) concerne en premier lieu le domaine microscopique.

19. On note Δr et Δp les indéterminations sur la position r et la quantité de mouvement p de l'électron.

- La relation d'incertitude d'Heisenberg s'écrit $\Delta r \Delta p \geq \hbar$; en introduisant les grandeurs relatives :

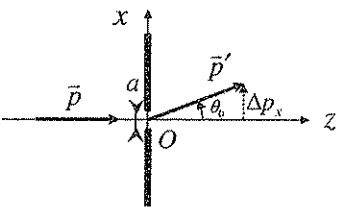
$$\frac{\Delta r}{r}\frac{\Delta p}{p} \geq \frac{\hbar}{rp}, \text{ et à l'aide de la règle de quantification, } \frac{\Delta r}{r}\frac{\Delta p}{p} \geq \frac{1}{n} \quad (1)$$

- Pour traiter l'électron atomique au sens de la mécanique classique, il faudrait que les indéterminations sur sa position et sa quantité de mouvement soient négligeables devant r et p respectivement :

$$\Delta r \ll r \text{ et } \Delta p \ll p \text{, ce qui entraînerait } \frac{\Delta r}{r}\frac{\Delta p}{p} \ll 1 \quad (2)$$

Les résultats (1) et (2) sont incompatibles ! (sauf si $n \gg 1$). La relation d'incertitude conduit donc à rejeter l'image semi-classique des orbites de Bohr.

20. Ox est l'axe perpendiculaire à la direction Oz, celui de la lumière incidente ; c'est selon cet axe que la largeur de la fente est a (le schéma ci-contre est une vue de dessus).
Un photon incident se propage suivant Oz avec une quantité de mouvement $\vec{p}$. Au moment de franchir la fente de largeur a, l'indétermination sur sa position transversale



(suivant Ox) est $\Delta x = \pm\frac{a}{2}$ (on a l'information que le photon traverse la fente).

Le principe d'incertitude d'Heisenberg conduit alors à une indétermination Δp_x sur la quantité de mouvement latérale : $|\Delta x||\Delta p_x| \geq \hbar \Rightarrow |\Delta p_x| \geq \frac{2\hbar}{a}$

Avec une petite composante Δp_x (inexistante avant la fente) le photon ne sort alors plus parallèlement à l'axe, mais dans une direction donnée par le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}'$, de même norme que $\vec{p}$ (l'énergie du photon est inchangée), et donc $p' = p = \frac{h}{\lambda}$.

La lumière émerge dans un cône dont le demi-angle au sommet est donné par :

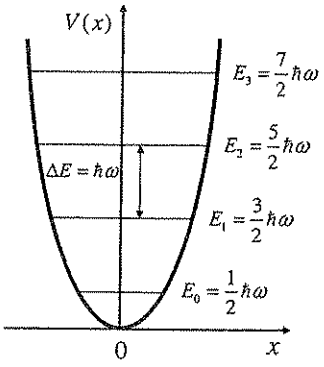
$$\sin\theta_0 = \frac{\Delta p_x}{p'} = \frac{2\hbar/a}{h/\lambda} = \frac{\lambda}{\pi a}$$

On retrouve donc le fait que l'angle de diffraction est d'autant plus important que la longueur d'onde est grande et que la fente est fine.

Rq : Il faut ne pas s'inquiéter de la présence du facteur π, ceci n'est pas significatif car la relation d'incertitude est à prendre en ordres de grandeur.

L'oscillateur harmonique quantique

21. Traçons le potentiel $V(x) = \frac{1}{2}k x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ (ou énergie potentielle) comme à la question **12.** et rajoutons les niveaux d'énergie comme à la question **13.**.



L'énergie du niveau le plus bas ($n = 0$) est $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (valeur exacte) ; l'énergie minimale évaluée à la question **11.** était $E_{min} = \hbar\omega$ (calcul approché). Il est remarquable de voir ces deux résultats coïncider (il ne faut pas se formaliser sur le facteur ½).

Les niveaux d'énergie sont ici équidistants contrairement au cas de la particule dans un puits de potentiel infini ; l'intervalle constant ($\Delta E = \hbar\omega$) entre deux niveaux successifs d'énergie est une des caractéristiques de l'oscillateur harmonique.

22. Vibration d'une molécule diatomique

- Pour r très grand ($r \gg r_0$) les deux atomes n'interagissent pas et le potentiel tend vers zéro. Lorsque r diminue (avec $r > r_0$), les forces attractives (entre électrons d'un atome et noyau de l'autre) se mettent en place avant l'établissement d'une liaison chimique (partage des électrons) jusqu'au passage par un minimum d'énergie en $r = r_0$: c'est la distance entre les deux noyaux dans la position de

stabilité de la molécule. À plus petite distance ($r < r_0$), les forces de répulsion entre noyaux empêchent le rapprochement et le potentiel croît. V_0 est l'énergie de dissociation de la molécule (l'énergie qu'il faut fournir à la molécule pour séparer les atomes).

- Le fond de la cuvette de potentiel peut être assimilé à une parabole d'équation :

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2(r - r_0)^2$$

Cela permet de retrouver le potentiel de l'oscillateur harmonique et ses niveaux d'énergie quantifiés de la question précédente : ici $E_n = -V_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

La variable étant $r - r_0$, cette description d'une molécule diatomique concerne ses états de vibration.

- Le passage de l'état d'énergie $E_0 > -V_0$ à l'état d'énergie E_1 peut se faire par absorption d'un photon d'énergie $E_1 - E_0 = \hbar\omega$ dont le cours de chimie nous apprend qu'il se situe dans l'infrarouge.

■ Particule dans un puits de potentiel infini

23. L'énergie de l'état fondamental dans un puits infini a été déterminée à la question **13.** :

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$$

L'application numérique fournit $E_1 = 2{,}4.10^{-18}$ J ≈ 15 eV et concerne l'électron dans un atome d'hydrogène lié au proton par une interaction électromagnétique (même si le puits n'est pas infini). On retrouve ici une valeur voisine de l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène soit 13,6 eV.

Un modèle plus réaliste conduit à des niveaux quantifiés d'énergie $E_n = -\frac{13{,}6 \text{ eV}}{n^2}$.

Le puits infini, modèle simple, fournit déjà les bons ordres de grandeur pour l'évolution de particules confinées.

24. Les niveaux d'énergie sont donnés à la question **13.** par :

$$E_n = n^2 E_1 \quad \text{avec} \quad E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$$

L'application numérique fournit $E_1 = 1{,}3.10^{-12}$ J $\approx 8{,}2$ MeV, ce qui est bien l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison par nucléon. Là aussi le puits de potentiel infini doit être corrigé pour obtenir un bon accord avec les résultats expérimentaux.

25. Puits de potentiel pour une particule macroscopique.

- La longueur d'onde du grain de poussière a été déterminée à la question **16.** : $\lambda = 6.10^{-24}$ m, infime par rapport à la taille de la boîte $a = 0{,}1$ mm.

La condition d'obtention d'une onde stationnaire, $a = n\frac{\lambda}{2}$, conduit directement à la valeur $n = 3.10^{19}$, mode de vibration colossalement grand (pour la corde vibrante on se limite à $n = 10$).

- Les niveaux d'énergie sont donnés à la question **13.** par :

$$E_n = n^2 E_1 \quad \text{avec} \quad E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$$

L'application numérique fournit $E_1 = 5{,}5.10^{-53}$ J, soit $E_n = 5{,}5.10^{-53} n^2$ (J).

L'énergie cinétique du grain de poussière est $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 5.10^{-14}$ J

Dans un puits infini l'énergie s'identifie à l'énergie cinétique ; la condition $E_n = E_c$ conduit également à la valeur précédente de $n = 3.10^{19}$.

- Le passage au niveau d'énergie immédiatement voisin demande une énergie :

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (n+1)^2 E_1 - n^2 E_1 \approx 2nE_1 = 3{,}3.10^{-33} \text{ J} \quad \text{(pour } n \text{ grand)}$$

soit en variation relative : $\frac{\Delta E}{E_n} \approx \frac{2}{n} = 7.10^{-20}$.

Il apparaît donc que pour le grain de poussière (et plus encore pour un objet macroscopique) la variation relative d'énergie d'un niveau à l'autre est infime, et c'est ce qui donne l'illusion que l'énergie est à cette échelle une grandeur « parfaitement » continue.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

26. Le spectre émis par les atomes excités lors des transitions entre niveaux électroniques quantifiés est un spectre de raies ; en TP d'optique sur le goniomètre, les lampes spectrales (qui émettent essentiellement dans le visible et l'ultraviolet) donnent sur fond noir un ensemble discret de raies de couleur différente. Alors que la caractéristique d'une lampe blanche est d'émettre un spectre continu.

27. Lors de la désexcitation, il y a émission d'une onde lumineuse dont l'énergie est égale à l'écart entre les niveaux atomiques : $\Delta E = hc/\lambda$ soit $\lambda = 709$ nm. La radiation émise appartient au domaine du visible (rouge). Seuls les tubes néons utilisés pour les enseignes lumineuses de coloration rouge contiennent du néon. Les tubes fluorescents d'usage domestique et qui donnent une lumière blanche, eux, contiennent de l'argon. Ce sont surtout des tubes au mercure, qui fournissent des UV et qui nécessitent donc un revêtement fluorescent sur les parois du tube pour obtenir de la lumière visible (comme d'ailleurs les lampes fluo-compactes).

28. Relation d'Einstein : $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

* Pour $m = 0$ (un photon par exemple), on a $p = \frac{E}{c}$

or l'énergie du photon est $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$, d'où $\boxed{p = \dfrac{h}{\lambda}}$

On retrouve la relation de Louis de Broglie ; en réalité de Broglie a simplement généralisé cette relation à toute particule (y compris les particules de masse non nulle). Sous la forme $\lambda = h / p$, elle conduit à associer une onde (dite onde de matière) à toute particule matérielle.

* Une particule matérielle au repos possède une quantité de mouvement nulle ($p = 0$) ; alors l'énergie de repos (ou énergie de masse) est donnée par la célèbre formule :

$$\boxed{E = mc^2}$$

Pour l'électron, $E = 0{,}51$ MeV ; pour le proton, $E = 940$ MeV.

29. Les expériences de Davisson et Germer (1926) confirment l'hypothèse de Louis de Broglie et sa relation qui permet de traiter une particule comme une onde ; en particulier l'énergie des électrons utilisés était telle qu'il leur correspondait une longueur d'onde dans le domaine des rayons X, leur permettant d'être diffractés par le réseau cristallin comme ces derniers dans l'expérience de von Laue. La longueur d'onde des électrons déduite des expériences était bien celle prévue par la formule de Louis de Broglie.

30. Les particules (électrons, protons,...) accélérées par des accélérateurs puissants à des vitesses proches de celle de la lumière permettent d'engranger des énergies colossales bien supérieures à leur énergie de masse. Ces particules ultra-relativistes ont alors une énergie $E \approx p / c$ (voir la question **3735.**) et leur longueur d'onde associée par la formule de Louis de Broglie $\lambda = h / p \approx hc / E$ est d'autant plus petite que leur énergie est élevée. Or la taille de ce que l'on peut « sonder » dans la matière est de l'ordre de la longueur d'onde. Les constituants les plus infimes de la matière ne peuvent donc être étudiés que par des longueurs d'onde très courtes, donc des particules de très hautes énergies.
Le gigantisme concerne les grands accélérateurs comme le LHC (*Large Hadron Collider*), dont les anneaux de stockage ont une circonférence de 26,7 km, les protons pouvant atteindre les 7 TeV ($1\ \text{TeV} = 10^{12}$ eV).

31. L'application numérique 1 de la question **5.** montre que la longueur d'onde associée à un électron accéléré sous une différence de potentiel de 10 V est de l'ordre de 0,4 nm. Les anneaux observés sont donc des anneaux de diffraction puisque cette longueur d'onde (comme celle des rayons X) est du même ordre de grandeur que la maille cristalline. En augmentant la tension U, on augmente l'énergie cinétique E_c des électrons et la longueur d'onde $\lambda = h / p = \lambda / \sqrt{2mE_c}$ diminue. L'angle de diffraction étant proportionnel à λ, il faut s'attendre à une diminution du rayon des anneaux.

32. Les études de spectres de raies de lampes spectrales (les électrons sont confinés dans les atomes).

33. La condition de quantification $r\,p = n\hbar$ s'écrit :

$$p = \frac{n\hbar}{r} = \frac{nh}{2\pi r} \quad \text{à identifier à} \quad p = \frac{h}{\lambda}, \text{ d'où } \boxed{2\pi r = n\lambda}$$

La circonférence de l'orbite (de rayon r) est un multiple de la longueur d'onde de de Broglie, comme un aller-retour sur une corde vibrante (utilisé à la question **13.**).

Exercices

34. Flux de photons dans un faisceau laser

a) L'énergie d'un photon est $E = hc/\lambda = 3{,}14.10^{-19}\ \text{J} = 2{,}0\ \text{eV}$.

b) La puissance surfacique (ou densité de flux surfacique) est le rapport de la puissance P à la section $S = \pi d^2/4$ du faisceau :

$$\varphi = P/S = 318\ \text{W.m}^{-2}$$

c) La puissance P est le produit du nombre de photons N_t par seconde qui traverse la section du faisceau par l'énergie E d'un photon :

$$P = N_t E \quad \Rightarrow \quad N_t = P/E = 3{,}2.10^5 \text{ photons par seconde}.$$

Rq : Augmenter la puissance du laser, c'est augmenter le flux de photons, sans toucher à l'énergie du photon (autrement dit, le faisceau devient plus intense, mais sa couleur n'est pas modifiée).

35. La lumière ultraviolette en chimie

a) La lumière interagit avec les molécules photon par photon.
Un photon « utile » doit être capable de rompre une liaison, et donc posséder une énergie $E_{photon} = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ supérieure à l'énergie d'une seule liaison $E_l = \frac{E_o}{N_A}$:

$$E_{photon} > E_l \quad \Rightarrow \quad h\frac{c}{\lambda} > \frac{E_o}{N_A} \quad \text{soit} \quad \boxed{\lambda < \frac{hcN_A}{E_o}}$$

AN : $\lambda < 3{,}4.10^{-7}\ \text{m} = 0{,}34\ \mu\text{m}$, le photon doit donc être dans le domaine UV.

b) On pourrait croire naïvement qu'un laser rouge (de mise en œuvre bien plus simple) peut faire l'affaire à condition d'être assez puissant.
Il n'en est rien : quel que soit leur nombre, les « photons rouges » ne peuvent pas casser les liaisons chimiques des protéines (essentiellement du collagène) qui constituent la cornée ; s'ils sont bien absorbés par la matière, c'est pour en augmenter la température, ce qui conduit à des combustions dans le dioxygène de l'air. La cornée se détruirait alors pour devenir noire et collante, ce qui n'est guère adapté au problème…

Les « photons UV » eux, cassent la plupart des liaisons et transforment les molécules organiques en petits morceaux passant en phase gazeuse (à condition d'être assez nombreux, d'où l'intérêt de travailler avec des fortes puissances pendant des temps courts, c'est-à-dire en impulsions).
On obtient alors une surface propre et nette à l'échelle de la longueur d'onde, pouvant jouer son rôle de réfraction de la lumière avec la courbure optimale calculée par l'ophtalmologiste qui programme le laser.

c) La lumière UV, même avec des puissances modestes (peu de photons par unité de temps), casse les liaisons chimiques pour former des intermédiaires réactionnels appelés radicaux, le plus souvent en phase gazeuse.
Elle joue un rôle d'initiateur dans les réactions chimiques, qui peuvent se propager à partir de ces radicaux, dans des mécanismes réactionnels en chaîne.
On peut ainsi qualifier les photons UV de « ciseaux chimiques » dans de nombreuses réactions.

Rq : Pour rendre l'initiation plus facile, on peut utiliser des peroxydes (molécules possédant une liaison simple O–O comme l'eau oxygénée). L'énergie de cette liaison fragile étant bien plus faible (environ 145 kJ/mol) la lumière visible est alors efficace.

36. Effet photoélectrique

a) Non, les énergies cinétiques ne sont pas changées car augmenter la puissance de la lampe revient à émettre davantage de photons par unité de temps comme cela a été vu à la question **34.**, mais cela ne modifie en rien l'énergie de chaque photon qui ne dépend que de sa longueur d'onde. (En revanche, le nombre d'électrons émis par unité de temps, dit courant d'émission, est proportionnel au flux incident de photons).

b) L'énergie $h\nu = hc / \lambda$ de chaque photon sert, lorsqu'elle est suffisante, au travail d'extraction W_S d'un électron du potassium, l'excédent étant emporté sous forme d'énergie cinétique par cet électron :

$$\frac{hc}{\lambda} = W_S + E_c$$

Le tracé de la courbe $E_c(1/\lambda)$ conduit à une droite dont la pente est identifiable au produit hc ; la connaissance de $c = 3.10^8$ m.s^{-1} conduit à la valeur de la constante de Planck : $h \approx 6{,}6.10^{-34}$ J.s.

c) Les énergies associées aux raies verte ou jaunes ne sont pas suffisantes pour vaincre le travail d'extraction et aucun électron n'est alors émis.
W_S est l'ordonnée à l'origine de la droite précédente : on obtient

$$W_S = 2{,}3 \text{ eV} \quad \text{(les tables donnent } W_S = 2{,}29 \text{ eV)}$$

d) La longueur d'onde maximale λ_S est obtenue pour $E_c = 0$ soit :

$$\lambda_S = \frac{hc}{W_S} \approx 540 \text{ nm}$$

On comprend pourquoi la raie verte et les raies jaunes du mercure ne conviennent pas.

37. Longueurs d'onde associées à des électrons

Pour $m = 0{,}9.10^{-30}$ kg et $c = 3.10^8$ m.s^{-1}, on a $mc^2 = 8{,}1.10^{-14}$ J $= 0{,}51$ MeV.

a) Dans ce cas $E_c \ll mc^2$ et l'électron est classique ; la mécanique classique donne $\vec{p} = m\vec{v}$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, soit en éliminant la vitesse :

$$p = \sqrt{2mE_c} = 3{,}4.10^{-24} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

d'où la longueur d'onde : $\lambda = \frac{h}{p} = 0{,}2$ nm.

Il s'agit de l'ordre de grandeur de la taille des atomes ou des distances interatomiques dans un cristal. Ces électrons « lents » sont donc très bien diffractés par la matière et permettent d'étudier par exemple les états de surface d'un métal.

b) Ici $E \gg mc^2$, l'électron est ultra-relativiste (et puisque $E = E_c + mc^2$, on en déduit $E_c \approx E$).

La quantité de mouvement p est donnée par la formule d'Einstein :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c} \approx \frac{E}{c} \text{ puisque } E \gg mc^2$$

(ce qui redonne l'expression utilisée pour le photon, autre particule relativiste, mais de masse nulle et de vitesse c).

Alors $p = 5{,}3.10^{-19}$ kg.m.s^{-1} soit $\lambda = \frac{h}{p} = 1{,}2.10^{-15}$ m.

Avec ces électrons de haute énergie il devient possible d'explorer la structure des noyaux atomiques dont les dimensions sont de l'ordre de cette longueur d'onde (10^{-15} m est appelé un « fermi »).

Chapitre 4
■ Régimes continu et transitoire ■

Les ordres de grandeur utiles

Composant usuels en TP

résistance	$R \approx 1$ à 10 kΩ
inductance d'une bobine	$L \approx 10$ mH
capacité d'un condensateur	$C \approx 1$ nF à 1 µF

Constantes de temps des dipôles classiques

constante de temps du dipôle RC $\tau = RC$	$R = 1$ kΩ, $C = 0{,}1$ µF $\tau = 0{,}1$ ms
constante de temps du dipôle RL $\tau = L/R$	$R = 1$ kΩ, $L = 10$ mH $\tau = 10$ µs
fréquence d'oscillation d'un dipôle LC $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$	$L \approx 10$ mH, $C \approx 0{,}1$ µF $f_0 \approx 5$ kHz

Le dipôle RLC en TP

fréquence propre d'un RLC	$L \approx 10$ mH, $C \approx 0{,}1$ µF $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} \approx 5$ kHz
facteur de qualité ($R \approx 50\ \Omega$ du générateur) RLC série	$Q = L\omega_0 / R \approx 5$
bande passante résonance d'intensité	$\Delta f = \frac{f_0}{Q} \approx 1$kHz

Diode

diode idéale : tension de seuil ; « résistances » : diode bloquée / conductrice	$V_s = 0$; bloquée $R = \infty$; passante $R_{dynamique.} = 0$
diode réelle : tension de seuil ; « résistances » : diode bloquée / conductrice	$V_s \approx 0{,}6$ V ; bloquée $R \approx 10^9\ \Omega$; passante $R_{dyn.} \approx 100\ \Omega$

Caractéristiques d'appareils

résistance de sortie d'un générateur BF	$R_s \approx 50\ \Omega$
fréq. max. d'utilisation d'un GBF en TP	$f \approx 100$ kHz à 1 MHz

entrée d'un oscilloscope	$C_e \approx 30$ pF // $R_e \approx 1$ MΩ
entrée d'un voltmètre numérique	$R_e \approx 10$ MΩ
Bande passante d'un multimètre	quelques dizaines de kHz maximum
Voltmètre numérique	AC (f < 1 kHz) : 2% + 3 DC : 0,09% + 2
Milliampèremètre numérique	AC : (f < 1 kHz), 1,5% + 3 DC : 0,5% + 3
Ohmmètre numérique	(< 600 Ω) : 0,5% + 2 (> 600 Ω) : 0,5% + 1

EDF

tension efficace et fréquence du secteur	230 V ; 50 Hz
prix du kWh (hors abonnement)	environ 10 centimes d'euro TTC

Le cours d'abord

Se référer d'abord à la partie dérivée et différentielle du chapitre **0**.

Les lois et les conventions de l'électrocinétique

1. Qu'appelle-t-on charge électrique ? Que signifient les propriétés de conservation et de quantification de la charge électrique ? Qu'est-ce qu'un porteur de charge ? Qu'est-ce qu'un milieu conducteur électrique ?

2. Rappeler la définition d'un courant électrique. À quoi sert l'orientation d'un conducteur électrique ? Quelle est la différence entre courant électrique et intensité du courant électrique ? Qu'est-ce qu'un courant continu (ou stationnaire) ?

3. Expliquer ce que signifie « approximation des régimes quasi stationnaires » ?

4. Rappeler la loi des nœuds. S'applique-t-elle en régime variable ?

5. Quels sont les choix d'orientation appelés « convention récepteur » et « convention générateur » pour un dipôle quelconque ? Donner explicitement, pour chaque orientation, la relation entre tension et intensité d'abord pour un conducteur ohmique puis pour une source de tension réelle (voir dans la partie TP le comportement de ces dipôles).

6. Établir la puissance électrocinétique reçue par un dipôle quelconque. Qu'appelle-t-on fonctionnement récepteur et fonctionnement générateur d'un dipôle ? Quel est le rapport avec les termes « actif » et « passif » qualifiant la nature d'un dipôle ?

7. Qu'appelle-t-on l'effet Joule ?

8. Établir les lois d'association série et parallèle de deux résistances R_1 et R_2. Que peut-on dire dans chaque cas de la puissance totale P_T dissipée, en fonction de la puissance P_1 et P_2 dissipée dans chacune d'entre elles ?

9. Rappeler par un schéma et son résultat le principe d'un diviseur de tension ; puis d'un diviseur d'intensité. Préciser clairement les conditions de validité de ces lois.

10. Dans la représentation symbolique d'un réseau (ou circuit électrique), qu'appelle-t-on nœud, branche et maille ? Donner un exemple pour chaque terme. Dans cette représentation, les liaisons entre les dipôles sont des fils de résistance nulle ; cela signifie-t-il que l'on néglige la résistance des fils du montage réel ?

11. Que traduit la loi des mailles ? En donner une expression générale, avec schéma.

12. Sous quel nom regroupe-t-on loi des mailles et loi des nœuds ? Quelle est l'importance de ces lois en électrocinétique ?

Dipôles et association

13. Commenter l'expression de la résistance d'un conducteur cylindrique (conduction axiale) de section S et de longueur l : $R = l / \sigma S$.

14. Définir de façon théorique ce que serait une source de tension idéale. À quelle condition une source réelle de tension se comporte-t-elle comme une source idéale ?

15. L'association de dipôles passifs, par exemple de type conducteurs ohmiques, conduit-elle à un circuit ou à un nouveau dipôle ? Citer des associations simples.

16. L'association de dipôles actifs, par exemple de type sources de tension, peut s'interpréter comme un nouveau dipôle dit équivalent. Traiter de l'association série de deux sources de tension.

17. L'association d'un dipôle actif et d'un dipôle passif conduit à un circuit. Que signifie résoudre ce réseau ? Définir le point de fonctionnement et le déterminer dans le cas de l'association d'une source de tension et d'un conducteur ohmique.

18. Rappeler, en indiquant bien le sens de l'intensité et la flèche de tension, la relation entre tension et intensité aux bornes d'un condensateur parfait de capacité C, puis d'une bobine parfaite d'inductance L. Donner, en les justifiant, les modélisations d'un condensateur réel et d'une bobine réelle.

19. Dans une branche contenant un condensateur parfait, quelles sont les deux relations possibles entre intensité du courant électrique et charge du condensateur suivant les choix de l'orientation du conducteur et de la variable charge du condensateur ?

20. À partir de la puissance reçue, déterminer l'énergie emmagasinée dans une bobine d'inductance L et traversée par un courant d'intensité i. Quelle est l'énergie

emmagasinée dans un condensateur de capacité C aux bornes duquel la tension est u ? (connaître les résultats et savoir faire les démonstrations).

21. Quelle est la grandeur électrique continue dans une branche comportant une bobine, et pourquoi ? Quelle est la grandeur électrique continue dans une branche contenant un condensateur, et pourquoi ?

22. Une source de tension (de *f.e.m.* notée E) de résistance interne R_g est branchée sur une résistance d'utilisation R_u ; à quelle condition sur R_u la puissance reçue par R_u est-elle maximale ?

Pour les questions suivantes se référer à la partie Équations différentielles du chapitre 0.

Le dipôle RC et le dipôle RL

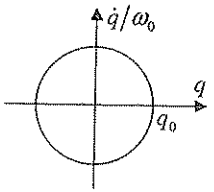
23. Définir une évolution en régime libre. Établir les équations différentielles d'évolution en régime libre des variables i et u_C pour le dipôle RC, puis des variables i et u_L pour le dipôle RL. Sous quelle forme pourrait-on écrire une équation valable pour tous les cas ?

24. Un dipôle RC série est fermé à $t = 0$ sur une source idéale de tension continue E ; $u(0^-) = 0$, déterminer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur et tracer son graphe. Donner l'expression de la durée caractéristique τ d'évolution de ce dipôle et la placer sur le graphe. Interpréter qualitativement la forme de la courbe. Indiquer approximativement où finit le régime transitoire et où commence le régime forcé continu.
Montrer que l'on peut obtenir les valeurs des diverses grandeurs en régime forcé continu sans calculs (c'est-à-dire sans passer par l'équation différentielle).

Le dipôle LC en régime libre

25. Écrire l'équation différentielle d'un dipôle LC en régime libre et en déduire la pulsation propre d'oscillation ω_0 de ce système. Que peut-on dire de cette modélisation ?

26. On donne ci-contre le graphe, appelé trajectoire de phase, de $\frac{\dot{q}}{\omega_0}$ en fonction de q, pour des conditions initiales données. Justifier l'allure circulaire de la courbe. Pourquoi la trajectoire est-elle fermée ? Qu'obtiendrait-on pour un graphe $\dot{q}(q)$? Indiquer le sens de parcours de la trajectoire de phase.

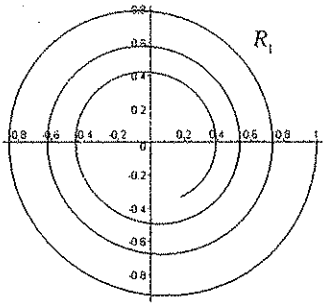


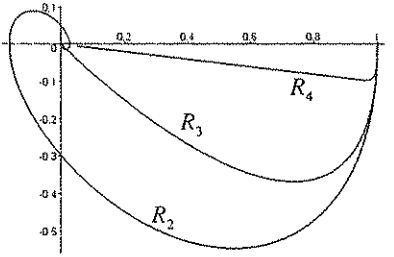
27. Montrer que l'énergie de ce système est constante au cours du temps et expliquer qualitativement les oscillations.

Le dipôle RLC

Ces questions peuvent être complétées par l'étude de l'oscillateur mécanique en régime libre vu aux questions **1.** à **4.** du chapitre **8**.

28. Pour un dipôle RLC série, en régime libre, on observe, en fonction de la valeur de R, les trajectoires de phase ci-dessous, de type $\dot{x}(x)$ avec x variable réduite $x = \frac{q}{q_0}$ et sur une même durée. On a respectivement : $R_1 \ll R_2 < R_3 < R_4$. Les valeurs de L et C sont constantes. Décrire l'évolution de $q(t)$ suivant les valeurs de R.





29. Dans le cas d'un dipôle RLC série en régime libre, pourquoi tous les régimes sont-ils amortis (proposer deux justifications) ? Comment est définie la résistance critique R_c ? Quel type de régime obtient-on (raisonner physiquement) pour $R > R_c$? pour $R < R_c$? Quel est des trois régimes, celui dont le retour à l'équilibre est le plus rapide ? Quelle est la seule manière d'obtenir un régime sinusoïdal non amorti ?

30. Normaliser l'écriture de l'équation différentielle régissant l'évolution en régime libre du RLC série, en posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ appelé facteur de qualité. Décrire les divers régimes d'amortissement en fonction de Q. Faire le lien avec la question **28.**.

31. Toujours pour le dipôle RLC série en régime libre, donner la forme de la fonction $u_C(t)$, tension aux bornes de C dans le cas du régime pseudopériodique. Définir les courbes enveloppes ; les extrema de $u_C(t)$ sont-ils sur ces courbes enveloppes ? Donner l'allure du graphe de $u_C(t)$, en précisant les zéros de $u_C(t)$, les points de contact avec les courbes enveloppes et les extrema de $u_C(t)$. Définir le décrément logarithmique δ et comparer la pseudo-période T à la période propre T_0 ; quelle relation lie ces trois grandeurs ?

32. Quel est le lien entre durée du régime libre et facteur de qualité ?

33. Un dipôle *RLC* série est fermé à $t = 0$ sur une source idéale de tension continue E ; de quelle nature est le régime forcé dans ce cas ? Donner sans passer par l'équation différentielle les valeurs de i, u_L et u_C en régime forcé.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ En régime continu, des deux orientations conventionnelles possible de l'intensité, il est préférable de choisir celle qui correspond au sens réel du courant s'il est prévisible (par exemple : à l'extérieur d'un générateur continu, le courant va du + vers le –) afin que $i > 0$.

☐ Les lois de l'électrocinétique sont simples, mais les grandeurs y sont algébriques. L'application de la loi des mailles et des nœuds par exemple ne supporte pas de négligence sur les signes. On peut s'aider de flèches de tension aux bornes de chaque dipôle d'une maille avant d'écrire la loi des mailles. Par ailleurs, dans un circuit à plusieurs branches, il peut se faire qu'une résistance se retrouve en « convention générateur » ou un générateur en « convention récepteur »..., donc attention aux signes, une erreur étant toujours très mal vue.

☐ Ne pas confondre le courant électrique et la variable qui sert à le décrire : l'intensité du courant électrique. Notamment le sens du courant est lié au déplacement réel des porteurs de charge, qui ne dépend en aucun cas du choix d'orientation du conducteur, alors que le signe de l'intensité est évidemment lié au choix d'orientation.

☐ Dans le cours d'électrocinétique en Physique, le qualificatif « continu » correspond à des sources de tension dont la *f.e.m.* est indépendante du temps. Pour un réseau linéaire, l'équation différentielle a donc un second membre constant (au cours du temps) et le régime forcé est continu.
Attention ce même terme « continu » est utilisé en électrotechnique pour des courants dont l'intensité ne change pas de signe, ce qui est beaucoup moins restrictif.

☐ Lors du choix des variables intensité de chaque branche d'un réseau électrique, il faut tenir compte tout de suite de la loi des nœuds pour limiter le nombre de variables. Les équations de maille fournissent le nombre d'équations nécessaire à la résolution (c'est-à-dire égal au nombre de variables puisque le problème a une solution unique). Avec les équations de branche, les relations $i(u)$ aux bornes de chaque branche ($i = u/R$, $i = Cdu/dt$,...), on peut se ramener à un système dont les inconnues sont les tensions (en général préférable) ou les intensités ou un panachage des deux (voir la question **37.**).

☐ Ne pas commencer à transformer les équations issues des lois générales, sans s'être assuré que le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues, et que ces équations sont indépendantes.

☐ Ne pas confondre réseau et dipôle. Un dipôle ou un réseau dipolaire possède, comme son nom l'indique, deux bornes et ne correspond pas à un réseau ou circuit électrique. Les réseaux sont des associations de dipôles telles que plus aucune borne libre n'apparaisse. Une caractéristique de dipôle, comme par exemple la résistance, ne s'applique pas à un réseau, parler de résistance d'un circuit par exemple n'a aucun sens.

☐ Résoudre un réseau en continu (on se place en régime forcé continu), c'est exprimer par exemple l'intensité du courant dans chaque branche en fonction uniquement des résistances et *f.e.m.* des sources de tension (donnés dans l'énoncé ou sur le schéma). On peut aussi exprimer de la même façon les tensions aux bornes de chaque dipôle.
Souvent l'énoncé ne demande qu'une seule de ces grandeurs, on n'utilise pas alors la résolution générale, mais on adapte la méthode à la grandeur cherchée, notamment avec les diviseurs de tension et d'intensité (voir la question **36.**).

☐ En électrocinétique le terme régime est beaucoup utilisé et dans des sens différents. Bien distinguer : le régime libre ; le régime transitoire et le régime forcé ; les régimes forcés particuliers (continu, sinusoïdal). Voir les **I.3** et **II.3** dans la partie Équations différentielles du chapitre **0**.
Dans le régime libre on distingue aussi divers régimes d'amortissement : régime pseudopériodique, régime apériodique, régime apériodique critique (voir la question **30.**).

☐ On peut utiliser les caractéristiques statiques des dipôles, notamment pour trouver un point de fonctionnement, en régime lentement variable et dans le cadre de l'A.R.Q.S.

☐ Les constantes d'intégration d'une équation différentielle se trouvent souvent par continuité de la charge (ou tension) aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant à travers une bobine. Elles s'appliquent à la solution générale de l'équation et jamais à une partie de la solution.

☐ Les conditions initiales n'ont aucune influence sur un régime forcé, voir les **I.3** et **II.3** dans la partie Équations différentielles du chapitre **0**. Dans une solution en régime forcé, il n'y a aucune constante d'intégration.

☐ Une équation contenant la dérivée d'une grandeur cherchée ne permet pas d'obtenir cette grandeur par une simple intégration irréfléchie ! Il faut chercher d'abord s'il s'agit bien d'une équation différentielle, ensuite reconnaître son type avant de la résoudre avec la méthode adaptée.

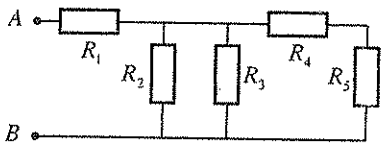
☐ Les formules d'association série ou parallèle et les diviseurs de tension et d'intensité, ne s'appliquent qu'en régime continu aux réseaux linéaires, comportant donc des conducteurs ohmiques et des sources linéaires. En effet ils nécessitent des relations de branches $i(u)$ linéaires au sens de la proportionnalité : $i = k\,u$. Ils ne sont donc pas valables en régime variable (transitoire ou forcé non continu) en présence de bobines ou de condensateurs.

☐ La linéarité des dipôles de type C ou L, en régime variable, est une linéarité au sens différentiel entre i et u à leurs bornes. Elle ne permet pas l'utilisation des théorèmes du continu rappelés dans le point précédent. En revanche elle permet d'aboutir, pour des réseaux de ce type (dits linéaires), à une équation différentielle linéaire.

Applications directes du cours

Les lois de l'électrocinétique en régime continu

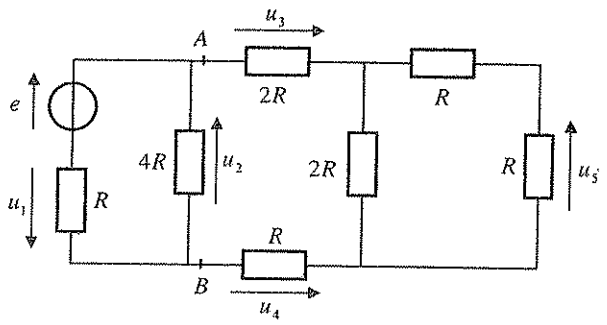
34. Dans le dipôle AB ci-contre, indiquer si parmi les couples suivants, les résistances sont en série ou en parallèle, et dans l'affirmative, donner la résistance équivalente : R_1 et R_2 ; R_1 et R_4 ; R_2 et R_3 ; R_3 et R_4 ; R_3 et R_5 ; R_4 et R_5 ?



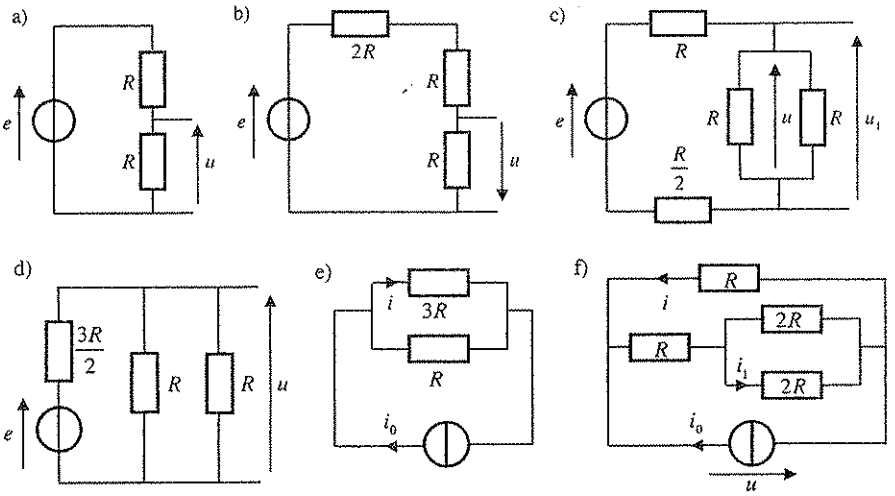
Avec quel groupement dipolaire R_1 est-elle en série ?

Exploiter ce résultat pour donner l'expression de la résistance équivalente R_{AB} du dipôle.

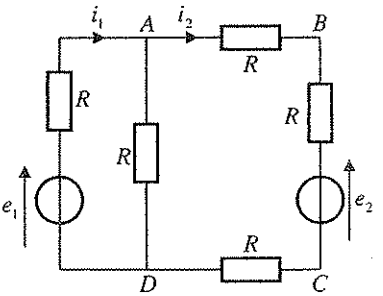
35. Pour le réseau ci-dessous donner les valeurs des tensions u_k en fonction de e sans poser aucune équation, ni faire de calculs écrits.



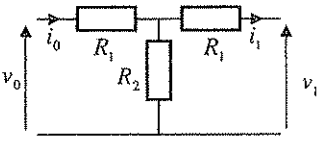
36. Pour chaque circuit ci-dessous, donner les tensions u et u_1 en fonction de e ou bien les intensités i et i_1 en fonction de i_0 sans poser aucune équation, ni faire de calculs écrits.



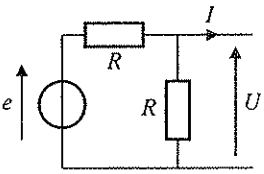
37. Le réseau ci-contre est linéaire en régime continu.
Montrer que les deux variables intensité choisies permettent d'exprimer toute grandeur électrique. Écrire le nombre nécessaire d'équations de maille ; comment assurer leur indépendance ?
Résoudre et exprimer i_1 et i_2 en fonction de e_1, e_2 et R.



38. S'appliquer à écrire soigneusement la loi des nœuds et la loi des mailles dans la partie de circuit ci-contre et en déduire les grandeurs de sortie v_1 et i_1 en fonction de grandeurs d'entrée v_0 et i_0.

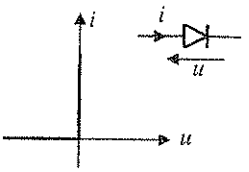


39. Tracer la caractéristique statique et en régime lentement variable du dipôle ci-contre.

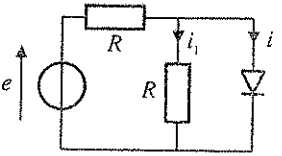


Dipôles non linéaires

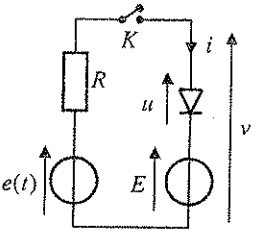
40. On donne ci-contre le symbole d'une diode et la caractéristique du modèle diode idéale. Décrire le fonctionnement de ce dipôle électrocinétique.



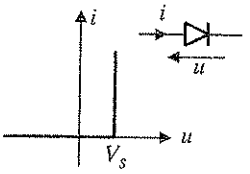
41. Déterminer i_1 dans le réseau ci-contre (où la diode est idéale) et en déduire l'intensité du courant i dans la diode. Faire le calcul de deux façons d'abord graphiquement avec le point de fonctionnement, puis avec les équations de maille.
On donne $e = 10$ V et $R = 200\ \Omega$.



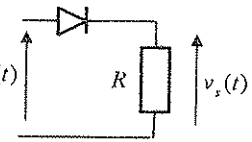
42. Dans le circuit ci-contre, la diode est idéale.
La *f.e.m.* du générateur est $e(t) = U \sin \omega t$, et E = cste avec $E < U$.
À $t = 0$ on ferme l'interrupteur K, exprimer $v(t)$ et représenter sur le même graphe $e(t)$ et $v(t)$.



43. La diode utilisée ici possède une tension seuil $V_S = 0{,}6$ V et sa caractéristique linéarisée par morceaux est donnée ci-contre.

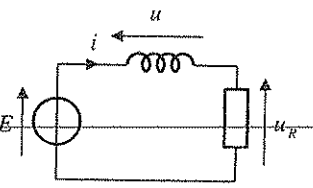


Dans le réseau ci-contre, $v_e(t) = V_0 \sin \omega t$ avec $V_0 > V_S$, représenter $v_e(t)$ et $v_s(t)$ sur le même graphe, en faisant apparaître clairement les phénomènes.

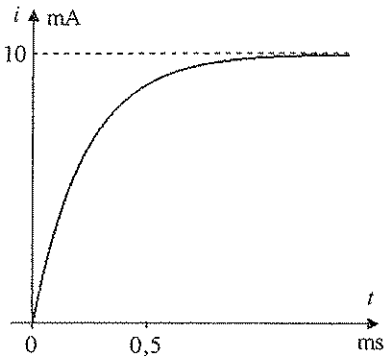


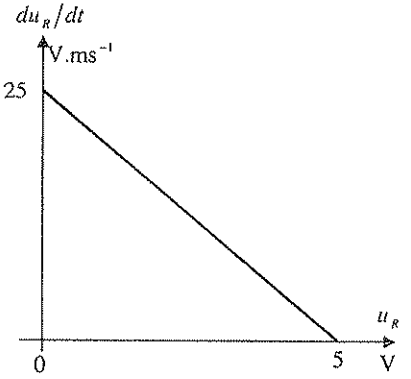
Régimes libres et réponses à un échelon de tension

44. Un dipôle RL série est fermé à $t = 0$ sur une source idéale de tension continue E. On donne les relevés expérimentaux ci-dessous : $i(t)$ et $u_R(u_R)$, u_R est la tension aux bornes du conducteur ohmique. En déduire le fonctionnement et toutes les caractéristiques du dipôle RL : valeurs de R, L, E, la



constante de temps τ et l'équation différentielle régissant le fonctionnement.



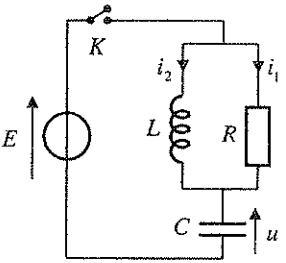


45. Dans le circuit ci-contre, E = cste ; à $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Pour $t < 0$, i_1, i_2 et u sont nuls.

Déterminer les valeurs de i_1, i_2, u et $\frac{du}{dt}$ aux dates suivantes :

a) à $t = 0^+$

b) au bout d'un temps très long.

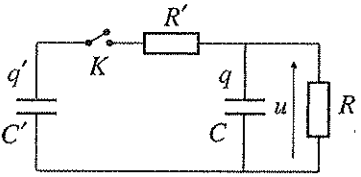


46. Dans le réseau ci-contre, on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ avec les conditions initiales suivantes :

$q'(t = 0) = q'_0$ (C' est initialement chargé)

$q(t = 0) = 0$ (C est initialement déchargé)

a) Établir l'équation différentielle donnant la tension $u(t)$ aux bornes du dipôle RC.



b) Existe-t-il une relation à satisfaire entre les grandeurs R, R', C et C' pour que la tension u puisse osciller ? Mener deux raisonnements, l'un physique, l'autre par le calcul, pour argumenter la réponse.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

47. Quelles sont les ordres de grandeur des vitesses suivantes, concernant les porteurs de charge dans un métal (électrons libres) et le courant électrique : vitesse d'agitation thermique, vitesse d'ensemble des porteurs correspondant à un courant électrique et vitesse de propagation d'une variation du courant ?

48. Un dipôle qui n'est pas une association de conducteurs ohmiques peut-il se comporter comme un conducteur ohmique ?

49. Comment déterminer la résistance équivalente d'un dipôle constitué d'une association de conducteurs ohmiques alors que cette association n'est ni série ni parallèle ? Chercher un exemple.

50. Dans une guirlande lumineuse, comment sont placées les ampoules, en série ou en parallèle ?

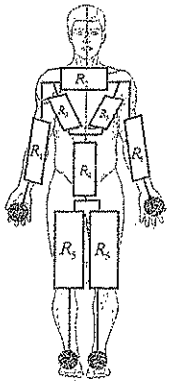
51. Une source de tension peut-elle fonctionner en récepteur ? Raisonner sur sa caractéristique.

52. Pourquoi la longévité d'une batterie s'apprécie-t-elle en A.h (batterie 12 V de voiture par exemple) ou en mA.h (pour les piles d'un appareil photo par exemple) ?

53. La section du fil électrique pour un éclairage ($I_{max} \approx 16$ A) est de 1,5 mm^2 et pour une cuisinière ($I_{max} \approx 32$ A) de 6 mm^2. Pourquoi cette différence ?

54. Quel est, dans une installation domestique, le rôle d'un fusible ? d'une terre ? d'un disjoncteur différentiel ?

55. En terme de conduction électrique, on modélise le corps humain selon le schéma ci-contre. On donne : $R_1 = 460\,\Omega$, $R_2 = 80\,\Omega$, $R_3 = 125\,\Omega$, $R_4 = 15\,\Omega$ et $R_5 = 840\,\Omega$. Le disjoncteur différentiel domestique coupe le courant si la différence entre l'intensité entrante et l'intensité sortante atteint 30 mA.



a) Comment justifier la valeur élevée des résistances bras-jambes et la faible valeur de R_4 ?

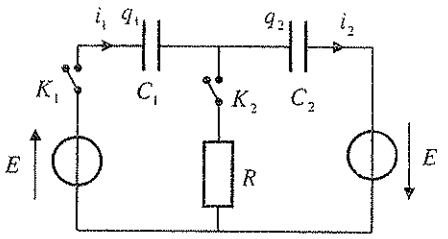
b) Si l'on touche un fil porté à un potentiel de 220 V par rapport à la terre, et que l'on n'est pas équipé de semelles isolantes, le disjoncteur coupera-t-il le courant ?

c) Si maintenant on met un index dans chacun des trous d'une prise de courant, les fusibles de l'installation sont-ils protecteurs (ils sont choisis pour fondre au-delà d'une intensité de 6 A) ? L'opération précédente est-elle dangereuse sachant que, si un courant d'intensité supérieure à 20 mA traverse pendant quelques millisecondes un corps humain, il y a risque de tétanisation mortelle ?

d) Les travailleurs utilisant des appareils électriques dans des milieux très conducteurs ont un système d'alimentation électrique fonctionnant sous très basse tension. Quelle doit être la valeur maximale de cette tension ?

56. Les oiseaux peuvent se poser sur des câbles haute tension sans s'électrocuter, pourquoi ?

57. Dans le circuit ci-contre, K_1 et K_2 étant ouverts, les deux condensateurs sont initialement déchargés. E = cste .

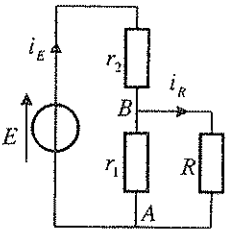


a) L'interrupteur K_2 restant ouvert, on ferme K_1 pendant un temps assez long (à préciser) ; déterminer les valeurs des charges q_1 et q_2 définies sur le schéma.

b) On ferme alors l'interrupteur K_2 ; déterminer les nouvelles valeurs q_1' et q_2' des charges q_1 et q_2 au bout d'un temps très long (à préciser). Quelle quantité d'électricité Q a traversé la résistance R ?

Exercices

58. Rendement d'un montage potentiométrique



Le rendement η de ce diviseur de tension est le rapport P_R de la puissance dissipée dans la résistance de charge R à la puissance P_E fournie par la source de tension E.

Exprimer η en fonction de r_1, r_2 et R.

AN : $r_1 = 750\ \Omega$; $r_2 = 250\ \Omega$; $R = 80\ \Omega$;

commenter.

59. Alimentation électrique du TGV

Dans cette partie de problème les grandeurs électriques sont sinusoïdales (régime forcé sinusoïdal) et caractérisées par leur valeur efficace. Considérer dans tous les calculs ces grandeurs comme continues (constantes) de valeur leur valeur efficace.

La puissance électrique est fournie au TGV à partir de sous-stations électriques $SS_{i=1,\ldots,n}$ que l'on assimilera à des sources idéales de tension efficace $E = 25$ kV et de fréquence $\nu = 50$ Hz . Ces sous stations sont implantées le long de la voie et espacées d'une distance $d = 60$ km . Elles sont reliées par un fil conducteur, la caténaire, suspendu au dessus des rails. La motrice TGV reçoit l'alimentation de la caténaire par un contact glissant appelé pantographe situé sur son toit. Tous les moteurs de la motrice sont montés en parallèle entre le pantographe et les rails qui servent de liaison masse à la terre. On peut schématiser le circuit d'alimentation sur la figure 1.

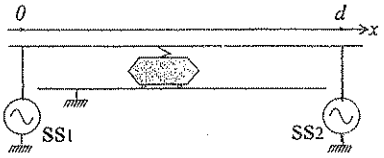


FIG. 1 – Schéma d'alimentation du TGV

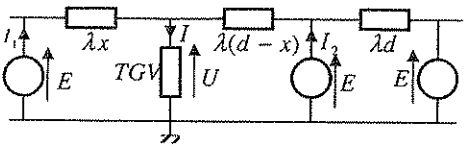


FIG.1 bis

Pour notre étude se placer dans les conditions suivantes : le fil de la caténaire de section $s = 1{,}47\ \text{cm}^2$ est en cuivre de résistivité $\rho = 1{,}72.10^{-8}\ \Omega.\text{m}$. La tension des sous-stations étant $E = 25\ \text{kV}$, on suppose que l'intensité efficace du courant circulant dans les moteurs est constante (indépendante de x) et vaut $I = 600\ \text{A}$. Le rail rectiligne est confondu avec l'axe Ox dont l'origine est placée à la dernière sous-station électrique atteinte par le TGV. La variable x est donc définie modulo d.

a) Calculer la résistance R totale de la caténaire entre deux sous-stations, et la résistance linéique λ en $\Omega.\text{km}^{-1}$. Faire l'application numérique. Peut-on négliger les différences de phases entre les divers points de la ligne entre deux sous-stations ?

b) Déterminer les intensités $I_1(x)$ et $I_2(x)$ délivrées par les sous-stations encadrant le TGV situé en x ainsi que la valeur $U(x)$ de la tension effectivement disponible aux bornes de la motrice située en x. Exprimer alors la puissance P dissipée par effet Joule dans la caténaire. Voir figure 1bis.

c) Localiser la position x_m de la motrice qui correspond à un minimum de la tension d'alimentation des moteurs. Exprimer alors cette tension minimale en fonction de E, R et $I = I_1 + I_2$. Déterminer la valeur maximale P_m de la puissance dissipée en fonction de R et I. Commenter ces résultats ainsi que les diverses applications numériques afférentes.

d) Le dispositif réel d'alimentation dispose en fait d'un second fil (appelé «feeder») identique à la caténaire et déployé entre les deux sous-stations voisines. Au milieu du parcours un contact est établi avec le fil de la caténaire, aboutissant à la schématisation de la figure 2. On montre que la tension $Uf\ (x)$ aux bornes de la motrice s'écrit maintenant :

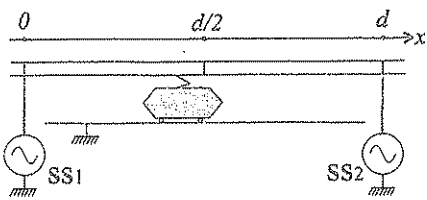


FIG. 2 – Alimentation avec feeder

$$U_f(x) = E - \lambda \frac{x(2d - 3x)}{2d} I \quad \text{pour} \quad 0 \le x \le \frac{d}{2}$$

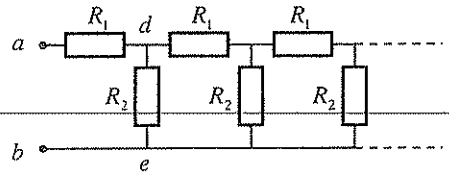
Calculer la tension U_f aux bornes de la motrice en $x = \dfrac{d}{2}$, ainsi que sa valeur minimale.

Représenter sur un même graphique les fonctions U et U_f pour $x \in [0, d/2]$.

Commenter le rôle du feeder.

60. Modélisation d'une fibre nerveuse (*)

On considère le réseau dipolaire infini ci-contre (appelé chaîne atténuatrice) constitué de cellules élémentaires du type ($adeb$) et on note R_T la résistance



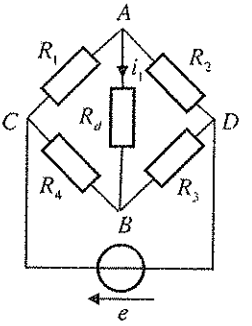
équivalente du dipôle (on admet qu'il existe une limite finie) entre a et b.

a) En comparant les résistances de la partie à droite de (ab) et de la partie à droite de (de), déterminer R_T en fonction de R_1 et R_2.

b) Montrer que si la tension appliquée à l'entrée du réseau est $V_{ab} = V_0$, alors $V_{de} = V_0/(1+\beta)$ et exprimer le coefficient β en fonction de R_T, R_1 et R_2. En déduire la tension V_n, après n cellules élémentaires, en fonction de V_0, β et n.

AN : Pour un axone non myélinisé $R_i = 0{,}35\ \text{M}\Omega$ et $R_2 = 1{,}1\ \text{G}\Omega$; la longueur d'une cellule élémentaire est $ad = 10\ \mu\text{m}$. Déterminer l'atténuation de la différence de potentiel sur une distance de 2,0 mm.

61. Pont de Wheatstone



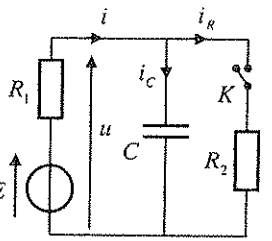
Dans le circuit ci-contre appelé pont de Wheatstone, la résistance R_d est la résistance interne d'un détecteur de courant (microampèremètre). Le pont est dit « équilibré » quand l'intensité i_1 du courant dans le microampèremètre est nulle.

a) Si le pont est équilibré, que vaut la d.d.p. $V_A - V_B$?

b) Établir une condition nécessaire sur R_1, R_2, R_3, R_4 pour que le pont soit équilibré. Cette condition est-elle suffisante ?

c) Le pont de Wheatstone permet des mesures précises de résistance, décrire un protocole expérimental de mesure avec un pont de Wheatstone.

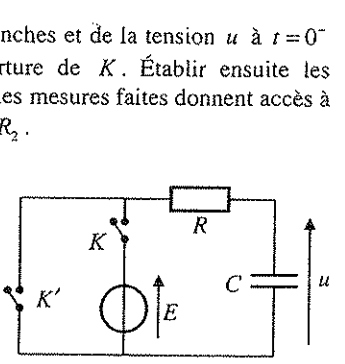
62. Décharge et recharge d'un condensateur



En début d'expérience, l'interrupteur K est ouvert depuis un temps très long (à préciser). Puis il est fermé à l'instant $t = 0$ et l'on constate que la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur évolue avec une constante de temps $\tau = 2{,}0$ ms. Au bout d'un laps de temps (très supérieur à τ), l'interrupteur est rouvert et cette fois la tension aux bornes du condensateur évolue avec une constante de temps $\tau' = 10$ ms.

Donner les valeurs des intensités dans les trois branches et de la tension u à $t = 0^-$ et $t = 0^+$, préciser la valeur de u à la réouverture de K. Établir ensuite les expressions littérales de τ et τ', puis montrer que les mesures faites donnent accès à la valeur numérique du rapport des résistances R_1 / R_2.

63. Un autre aspect de la linéarité (*)



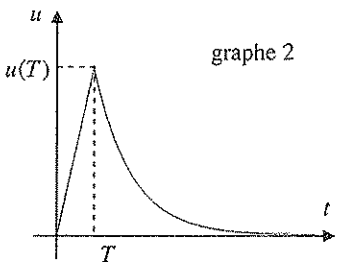
Dans le réseau ci-contre pour $t < 0$, les interrupteurs K et K' sont ouverts et le condensateur est déchargé. À $t = 0$, on ferme K (K' restant ouvert).

a) Quelle est la loi d'évolution $u(t)$ aux bornes du condensateur ? Tracer le graphe de la

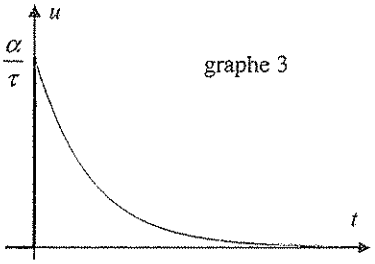
fonction $u(t)$. Préciser la constante de temps τ d'évolution.

b) À la date $t = T$ (attention T est quelconque, pas nécessairement grand), on rouvre l'interrupteur K en fermant simultanément K'. Donner $u(t)$ depuis l'instant $t = 0$ jusqu'à $t \gg T$. Tracer le graphe de $u(t)$.

c) On étudie la déformation de la courbe représentative de $u(t)$ lorsque l'on donne à T des valeurs décroissantes, tout en augmentant E de telle sorte que le produit $E \times T$ reste constant. On obtient le graphe 2 ci-dessous, justifier qualitativement.



graphe 2

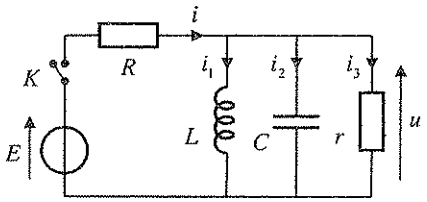


graphe 3

d) On envisage maintenant le cas limite $T \to 0$ et $E \to +\infty$, toujours avec $E\,T = \alpha = \text{cste}$. On obtient le graphe 3 ci-dessus. Comparer cette réponse à la réponse à l'échelon de tension (appelée aussi réponse indicielle) étudiée au a) ; que représente ce graphe 3 par rapport à la réponse indicielle ? Ce résultat était-il prévisible ? Pour répondre, comparer aussi l'échelon de tension appliqué dans le cas de la réponse indicielle et la tension appliquée au dipôle RC dans ce cas limite.

64. Réponse à un échelon de tension d'un dipôle *RLC* parallèle

Le schéma du montage est indiqué ci-contre. La source de tension est idéale de *f.e.m.* E constante. Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et la bobine idéale n'est parcourue par aucun courant. À $t = 0$, on ferme K.



a) Déterminer, par raisonnement direct, les valeurs de u, i, i_1, i_2 et i_3 à la date $t = 0^+$ et pour $t \to +\infty$ (concept à préciser).

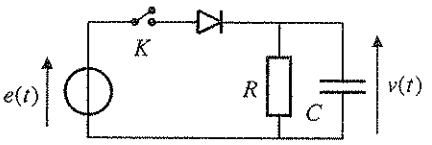
b) Établir l'équation différentielle vérifiée par i_3, en posant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{R r C \omega_0}{R + r} = \frac{R r}{(R + r) L \omega_0}.$$

c) Donner la relation entre R, r, L et C pour que le régime soit de type pseudopériodique et exprimer $i_3(t)$ dans ce cas.

65. Détecteur de crêtes

Le schéma du montage est indiqué ci-contre. La source de tension est idéale de *f.é.m.* $e(t) = E\sin(\omega t)$, la diode est idéale (voir sa caractéristique et son fonctionnement question **40.**) et on considère $RC \gg T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé, à $t = 0$, on ferme K.



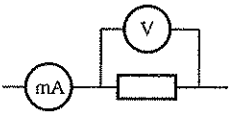
a) Étudier, en commençant par le cas diode passante, la tension $v(t)$. Représenter sur le même graphe $e(t)$ et $v(t)$.

b) Justifier l'utilisation possible de ce montage en détecteur de crêtes. Comment choisir RC pour suivre par exemple les maxima d'un régime pseudopériodique ?

Travaux pratiques

Les multimètres ont les spécifications suivantes.
Voltmètre : AC ($f < 1$ kHz) : 2% + 3 ; DC : 0,09% + 2 ; résistance d'entrée 10 MΩ
Milliampèremètre : AC ($f < 1$ kHz) : 1,5% + 3 ; DC : 0,5% + 3
Ohmmètre : (< 600 Ω) 0,5% + 2 ; (> 600 Ω) 0,5% + 1

66. On veut établir la relation entre tension et intensité, pour un dipôle conducteur métallique. On relève, avec deux multimètres, tension aux bornes et intensité :

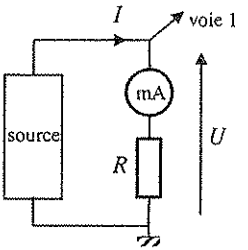


U (V)	–4,816	–3,428	–2,749	–1,832	–0,964	0,830
I (mA)	–9,68	–6,88	–5,51	–3,68	–1,94	1,67

1,356	2,410	3,538	4,669	5,165	
2,73	4,83	7,10	9,39	10,37	

Faire une étude graphique des mesures expérimentales et conclure sur la loi d'Ohm.

67. On étudie maintenant un dipôle actif de type source. Les mesures sont faites à l'oscilloscope (précision des amplificateurs 3%) en couplage DC pour la tension, et avec un milliampèremètre pour l'intensité. On fait varier la résistance R et on relève tension aux bornes et intensité. La résistance d'entrée de l'oscilloscope est de 10 MΩ. On utilise, sur l'oscilloscope, les amplifications 0,5 V/div. puis 0,2 V/div.



U (V)	2,7	2,5	2,25	1,65	1,40	1,30
I (mA)	0	2,46	4,62	7,89	9,45	12,0

0,80	0,64	0,16			
14,35	16,57	19,84			

Faire une étude graphique des mesures expérimentales et conclure sur un modèle de comportement de la source.

68. Après avoir établi le comportement linéaire d'un réseau dipolaire en régime continu, comme à la question précédente, on veut mesurer la *f.e.m.* et la résistance interne de la source de Thévenin équivalente. On effectue, avec un multimètre les mesures suivantes :

a) La tension à vide (seul le voltmètre est branché en sortie) est $U_0 = 2{,}743\,\text{V}$.

b) On place ensuite en sortie du réseau dipolaire une résistance de valeur R réglable et on mesure la tension à ses bornes. On fait varier R et quand la tension est égale à $\frac{U_0}{2}$, on débranche la résistance et on la mesure avec le multimètre en fonction ohmmètre. Il indique $R_1 = 129{,}4\ \Omega$.

En déduire e et r avec leur incertitude de mesure.

69. À quoi sert le bouton « chopé/alterné » d'un oscilloscope analogique ? Quand faut-il s'en servir ?

70. Quelle différence (chiffrée) existe-t-il entre une bobine réelle et une inductance pure ? Quelle différence (chiffrée) existe-t-il entre un condensateur réel et une capacité pure ?

71. Comment déterminer expérimentalement le temps τ de charge d'un dipôle RC ?

72. Pourquoi expérimentalement n'est-il pas possible de voir des oscillations sinusoïdales pour une association bobine-condensateur, correspondant à l'étude théorique du dipôle LC de la question **25.** ? Qu'observe-t-on lorsqu'un tel système est attaqué par une fonction créneau (un échelon de tension périodique) dont on choisit correctement la gamme de fréquences ?

73. Indiquer les branchements à effectuer sur le montage de la question **64.** pour observer à l'oscilloscope la tension $u(t)$. Quel problème se pose-t-il si on veut visualiser simultanément $u(t)$ et $R\,i(t)$?

On choisit : $R = r = 1{,}0\ \text{k}\Omega$, $C = 1{,}0\ \mu\text{F}$ et $L = 10\ \text{mH}$. Quel est l'ordre de grandeur du temps caractéristique d'évolution de la tension $u(t)$?

Comment procéder pour visualiser $u(t)$:

a) avec un oscilloscope analogique ?

b) avec un oscilloscope numérique ?

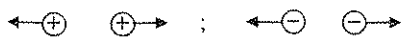
74. Une diode (utiliser la modélisation de la question **43.**) est utilisée pour redresser une tension sinusoïdale $u(t)$; chiffrer les précautions à prendre sur $u(t)$ pour que la tension redressée soit conforme aux attentes.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Les lois et les conventions de l'électrocinétique

1. La charge est une caractéristique d'une particule qui fait qu'elle subit l'interaction électromagnétique.
On distingue deux classes de charges électriques :
charges négatives (classe de l'électron)
charges positives (classe du proton)

Deux charges de même signe se repoussent : 

Deux charges de signes contraires s'attirent :

La charge est toujours conservée ; la charge totale d'un système fermé (n'échangeant pas de matière avec l'extérieur) est donc constante. Ce qui signifie que si des charges positives sont formées par exemple par ionisation, des charges négatives apparaissent en même quantité dans le système.

La charge est quantifiée : il existe une charge élémentaire notée e et qui vaut $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
Cela signifie qu'il n'existe pas de particule libre ayant une charge entre 0 et e ou entre e et $2e$.

L'électron porte la charge $-e$ et le proton la charge $+e$.

Cette quantification n'apparaît pas à l'échelle macroscopique où les échanges de charges même très faibles se font par milliards de charges élémentaires. Du coup la charge apparaît comme une grandeur continue.

Un porteur de charge est une particule qui possède une charge électrique.
Un milieu conducteur électrique est un corps à l'intérieur duquel des charges électriques peuvent être mises en mouvement sous l'action d'une force aussi petite soit-elle. Elles se déplacent librement dans le conducteur, par exemple :

- métaux : les porteurs de charge sont les électrons libres (ou électrons de conduction), ce sont des porteurs $\ominus$.
- électrolytes (solutions ioniques) : il y a deux types de porteurs, les cations (porteurs $\oplus$) et les anions (porteurs $\ominus$).

Rq : En général les conducteurs sont globalement neutres, les déplacements des porteurs ne correspondent pas à une apparition de charge, mais seulement à une répartition différente dans l'espace.

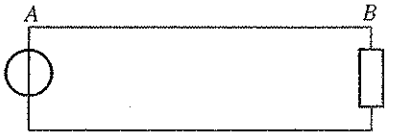
2. Un courant électrique correspond à un déplacement d'ensemble de charges électriques. Cela ne correspond pas aux déplacements microscopiques dus à l'agitation thermique, de valeur moyenne nulle.
En pratique il s'agit du déplacement d'ensemble de porteurs de charge : électrons dans un métal, ions dans un électrolyte, sous l'effet par exemple, d'une action extérieure du type tension électrique.
Le sens du courant est le sens de déplacement des porteurs de charge positive.
L'orientation du conducteur permet de décrire, de façon mathématique, le sens du courant : le sens du courant est positif s'il est dans le sens d'orientation, le sens du courant est négatif s'il est dans le sens opposé au sens d'orientation. Attention positif et négatif s'appliquent au sens du courant et pas au courant !
L'intensité i du courant électrique est une variable mathématique algébrique décrivant le courant électrique pour deux de ses caractéristiques : le signe de i correspond au sens du courant et $|i|$ correspond à la grandeur de ce courant (c'est-à-dire s'il est important ou faible). L'intensité s'exprime en $C.s^{-1}$, soit en ampères (A), il s'agit (en valeur absolue) du débit de charge à travers une surface donnée.
On remarque que l'intensité ne dépend donc pas que du courant électrique qu'elle est censée décrire, mais aussi d'une surface à travers laquelle passent les charges et qui apparaît dans sa définition : on parle d'intensité à travers une surface. On verra plus tard qu'il existe une grandeur plus fondamentale : le vecteur densité de courant.
Dans le cas d'un conducteur filiforme, la surface est implicitement une section du fil.
Courant et intensité sont donc radicalement différents. Le courant est un phénomène physique, son sens n'a rien à voir avec l'orientation. L'intensité du courant est une variable mathématique algébrique, son signe dépend du choix d'orientation.
Si i = cste , indépendante du temps, en tout point : le régime est dit continu.

3. Il s'agit de l'A.R.Q.S. :
   a) Considérons d'abord un régime continu : toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps. Soit une portion de conducteur filiforme comprise entre deux sections A et B. On a donc i_A et i_B indépendants du temps. Si la charge « entrant » en A pendant dt , $dq_A = i_A\,dt$ était différente de celle « sortant » en B, $dq_B = i_B\,dt$, alors cette différence constante au cours du temps se traduirait par une augmentation de la charge (en valeur absolue) dans le volume compris entre A et B. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse régime continu. Donc $dq_A = dq_B$ et $\boxed{i_A = i_B}$ l'intensité du courant est la même en tout point d'une même branche du circuit.

   b) Dans le cas d'un régime variable, les grandeurs électriques dépendent du temps. Le raisonnement précédent ne peut plus s'appliquer car la charge dans l'élément de volume entre A et B peut varier avec t ! *A priori* on peut avoir $i_A \neq i_B$ au même instant. Plus précisément, c'est ce qui se passe : i dépend du temps et du

point du circuit car la variation dans le temps de l'intensité ne peut pas se répercuter instantanément en tout point du circuit (la vitesse de propagation de l'information est très grande mais finie, de l'ordre de $c \approx 3.10^8\ \text{m.s}^{-1}$).

$$i_B(t) = i_A\left(t - \frac{AB}{c}\right)$$



Pour avoir $i_A(t) \approx i_B(t)$, il faut :

$\frac{AB}{c} \ll$ durée caractéristique d'évolution du courant, par exemple la période T si l'intensité est une fonction périodique du temps.

C'est l'A.R.Q.S. : si la variation de $i(t)$ est assez lente pour pouvoir négliger la durée de propagation, on considère que $i(t)$ est la même, à chaque instant, en tout point d'une même branche.

Numériquement :

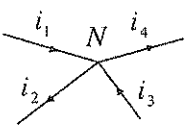
- à 50 Hz $AB \ll cT = \frac{3.10^8}{50} \approx 6000\,\text{km}$, à l'échelle d'une ville, à 50 Hz, l'ARQS est respectée.
- à 1 GHz $AB \ll cT = \frac{3.10^8}{10^9} \approx 30\,\text{cm}$, dans un ordinateur tous les centimètres comptent.

Pour bien comprendre l'A.R.Q.S., on peut utiliser l'analogie entre le courant électrique et le déplacement des maillons d'une chaîne de vélo : à partir de l'immobilité, on provoque une mise en mouvement, par action du plateau, quasi simultanée de tous les maillons (c'est l'A.R.Q.S.), mais on conçoit que tous ne se mettent pas en mouvement simultanément. Ce sont ceux proches du plateau qui commencent à bouger en premier, et ceux vers le pignon avec un léger retard. La vitesse de mise en mouvement de l'ensemble de la chaîne dépend de sa tension. En régime stationnaire il y a un déplacement d'ensemble avec la même vitesse en tout point de la chaîne (comme pour le courant électrique).

4. La loi des nœuds est relative à la conservation de la charge (les électrons de conduction) ; elle traduit que la somme des charges arrivant effectivement en un point est égale à la somme des charges qui en repartent, condition nécessaire au régime continu.
Au nœud N, les i_k représentant les intensités algébriques on a :

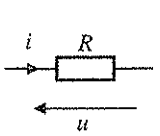
$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 \quad \text{soit} \quad \boxed{\sum_k \varepsilon_k i_k = 0}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si flèche est dirigée vers N
avec $\varepsilon_k = -1$ si flèche part de N

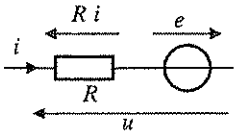


Cette loi est valable en régime variable, à tout instant, dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.).

5. Les dipôles et leur représentation sont étudiés dans la partie TP.
En convention récepteur, (flèches de tension et d'intensité en sens opposé) :

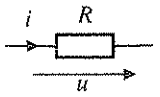


$u = R\,i$

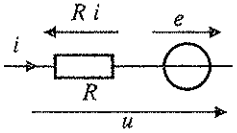


$u = R\,i - e$

En convention générateur, (flèches de tension et d'intensité dans le même sens) :



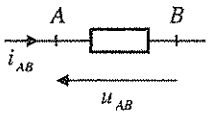
$u = -R\,i$



$u = e - R\,i$

Ces relations sont valables avec u, i et e algébriques. Remarquer qu'en série les tensions s'ajoutent, en tenant compte du sens des flèches.

6. Un dipôle AB quelconque traversé par un courant d'intensité i_{AB} et dont la tension aux bornes est $u_{AB} = V_A - V_B$, reçoit (algébriquement) pendant dt, en A, le travail $dq\ V_A$ et cède (algébriquement) pendant dt, en B, le travail $dq\ V_B$. Il reçoit



donc algébriquement $\delta W = dq\,(V_A - V_B) = i_{AB}\ dt\ u_{AB}$, et la puissance $P = \dfrac{\delta W}{dt}$.

La puissance algébrique reçue par un dipôle quelconque est $\boxed{P = u_{AB}\ i_{AB}}$

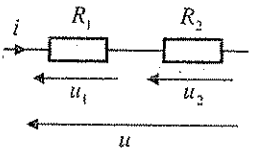
Si $P > 0$ le dipôle fonctionne en récepteur.
Si $P < 0$ le dipôle fonctionne en générateur.

Récepteur ou générateur ne qualifie pas un type de dipôle mais un mode de fonctionnement. Un condensateur, par exemple, fonctionne en régime sinusoïdal forcé alternativement en récepteur et en générateur. En revanche actif et passif sont des qualificatifs de type de dipôle. Pour un dipôle passif : $u = 0 \Rightarrow i = 0$, ce qui n'est pas le cas d'un dipôle actif. Pour un dipôle actif il existe des conditions de fonctionnement pour lesquelles il peut fournir du travail sur une durée arbitrairement grande.

Assez couramment cependant le terme «générateur» est utilisé pour désigner un dipôle actif fonctionnant en générateur !

7. La puissance reçue par un conducteur ohmique est donc $P = u_{AB} i_{AB} = R i_{AB}^2 > 0$, un conducteur ohmique est donc toujours récepteur. Le travail électrique ainsi reçu est ensuite entièrement restitué sous forme de chaleur, c'est l'effet Joule. Ce que devient cette chaleur dégagée dépend du dispositif réel, cela ne relève plus de l'électrocinétique, mais plutôt de la thermodynamique. Une partie de cette chaleur peut être captée par l'élément matériel constituant le conducteur ce qui augmente son énergie interne et donc sa température. La chaleur peut aussi être évacuée vers l'extérieur (ventilation) et la température du conducteur reste alors constante.

8. Si R_1 et R_2 sont en série, alors elles sont parcourues par le même courant d'intensité i ; en notant u_1 et u_2 les tensions à leurs bornes, orientées dans le même sens, la tension totale est :

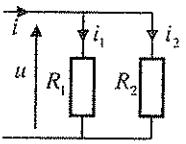


$u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i$ ou encore $u = R_{éq} i$

avec $\boxed{R_{éq} = R_1 + R_2}$

La puissance totale dissipée est $P_T = R_{éq} i^2 = R_1 i^2 + R_2 i^2$ soit $\boxed{P_T = P_1 + P_2}$

Si R_1 et R_2 sont en parallèle, alors elles ont leurs bornes communes et sont soumises à la même tension u ; en notant i_1 et i_2 les intensités des courants qui les traversent, orientées dans le même sens, l'intensité dans la branche principale est :



$$i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u \quad \text{ou encore} \quad i = \frac{u}{R_{éq}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

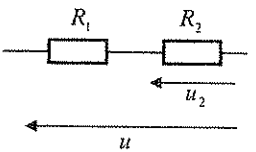
$$\boxed{R_{éq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

La puissance totale dissipée est $P_T = \dfrac{u^2}{R_{éq}} = \dfrac{u^2}{R_1} + \dfrac{u^2}{R_2}$ soit également $\boxed{P_T = P_1 + P_2}$

9. Diviseur de tension. Lorsque deux résistances R_1 et R_2 sont parcourues par le même courant d'intensité i, alors u_2, la tension aux bornes de l'une, est une fraction (proportionnelle à R_2) de la tension totale u aux bornes de l'ensemble :

$$u_2 = R_2 i = R_2 \frac{u}{R_1 + R_2}$$

soit $\boxed{u_2 = u \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}$



condition : R_1 et R_2 en série.

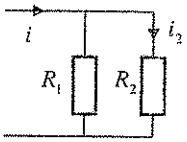
Ce résultat se généralise à n résistances en série : la tension se divise proportionnellement aux résistances.

Diviseur d'intensité. Lorsque n résistances R_j en parallèle sont soumises à la même tension u, alors i_k, l'intensité du courant qui traverse R_k, est une fraction (proportionnelle à la conductance $G_k = \frac{1}{R_k}$) de l'intensité du courant total i qui traverse l'ensemble :

$$i_k = \frac{u}{R_k} \text{ et } i = \frac{u}{R_{eq}} = \left(\sum_j \frac{1}{R_j}\right) u \quad \text{soit} \quad \boxed{i_k = i \frac{G_k}{\sum_j G_j}}$$

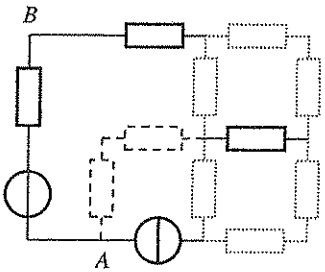
Dans le cas particulier de deux résistances seulement en parallèle :

$$i_2 = i \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \Rightarrow \boxed{i_2 = i \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$



Attention au sens des flèches de définition des deux intensités.

10. Un nœud est un point du réseau relié à plus de deux dipôles ($N \geq 3$). Une branche est l'ensemble des dipôles en série entre deux nœuds (dans le cadre de l'ARQS ils sont à tout instant parcourus par un courant dont l'intensité à la même valeur en tout point de la branche). Une maille est un parcours fermé, constitué de branches et ne passant qu'une fois au plus par un nœud donné.



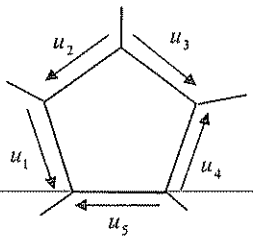
..... une maille

- - - - une branche

A est un noeud, B non.

Les liaisons entre dipôles sur les schémas représentatifs ne correspondent pas aux fils réels de liaison du circuit. On prend en compte la résistance du fil réel en ajoutant en série dans la branche un conducteur ohmique de résistance correspondante.

11. Le long d'une maille, la somme des différences de potentiel rencontrées est nulle car en revenant au point de départ, on retrouve le même potentiel. Plus précisément la somme des tensions, prenant en compte leur définition (sens de la flèche), est nulle :
Le long de la maille représentée (les branches sont symbolisées par de simples traits) :



$$u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 = 0$$

Plus généralement : $\boxed{\sum_k \varepsilon_k u_k = 0}$

$\varepsilon_k = +1$ si on rencontre d'abord la pointe de la flèche (car $u_{AB} = V_A - V_B$)

$\varepsilon_k = -1$ si la flèche est dans le sens de parcours de la maille.

Les u_k de la formule sont algébriques, leurs signes n'ont rien à voir avec les ε_k.

Il est possible aussi d'écrire directement que la tension entre deux points est égale à la somme des tensions aux bornes des branches ou des dipôles qui relient ces deux points. Voir par exemple la question **5.** (tension aux bornes d'une source).

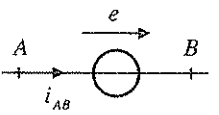
12. Loi des mailles et loi des nœuds constituent les lois de Kirchhoff. Ce sont les lois fondamentales de l'électrocinétique, valables en régime variable dans le cadre de l'A.R.Q.S. et indépendantes de la linéarité ou non des équations de branches. Ces lois fournissent le nombre nécessaire et suffisant d'équations pour résoudre le réseau.

Dipôles et association

13. La résistance d'un conducteur ohmique cylindrique augmente si sa longueur augmente (ce qui paraît normal), diminue si la conductivité σ du matériau augmente (c'est un meilleur conducteur), diminue si la section augmente (plus le conducteur a un grand diamètre et plus sa résistance est petite : le courant passe plus facilement).

14. Une source idéale de tension est un dipôle qui maintient à ses bornes une tension constante c'est-à-dire indépendante de l'intensité du courant qui la traverse.
Ce dipôle théorique est représenté par :

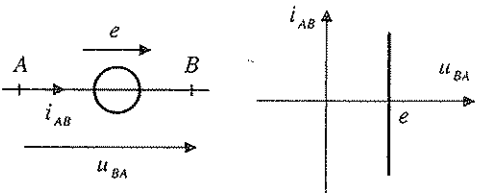
e est la force électromotrice (*f.e.m.*)



En convention « générateur »

$$u_{BA} = e = \text{cste}$$

d'où la caractéristique.

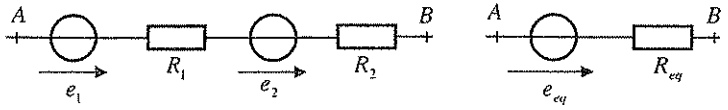


Pour une source réelle la pente de la caractéristique est $1/R$, pour être idéale il faut donc que la résistance interne $R \to 0$. Elle se comporte comme une source idéale si on place à ses bornes une résistance d'utilisation $\boxed{R_u \gg R}$ ou en circuit ouvert ($R_u \to +\infty$).

15. Un circuit formé de conducteurs ohmiques n'a aucun intérêt, pas d'énergie disponible. On considère plutôt l'association entre deux bornes conduisant à un

réseau dipolaire passif. Par exemple des associations série ou parallèle (voir la question **8.**). Attention la notion d'association série par exemple n'a pas de sens pour un circuit, elle ne s'applique qu'à une structure dipolaire.

16. En série les tensions s'ajoutent, donc $e_{eq} = e_1 + e_2$ (si les deux flèches des *f.e.m.* sont dans le même sens), les deux résistances internes sont en série donc $R_{eq} = R_1 + R_2$.

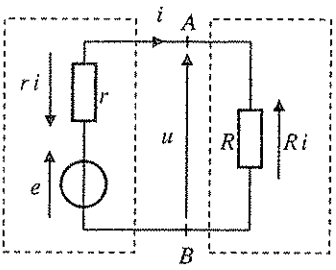


17. On cherche l'intensité i et la tension u_{AB}

Méthode 1 :

$\begin{cases} u = e - ri \\ u = Ri \end{cases}$ le système de 2 équations à 2 inconnues donne :

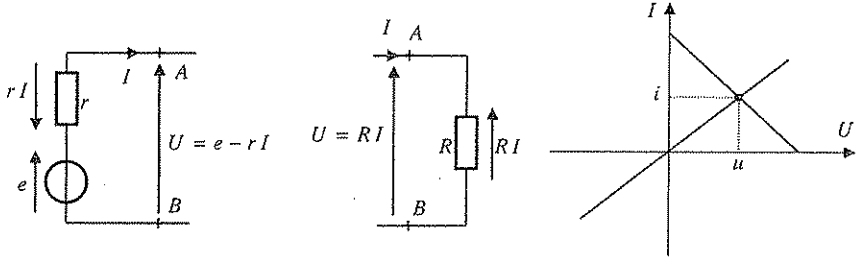
$$\boxed{i = \frac{e}{R + r}}$$



Méthode 2 :

On trace les deux caractéristiques des deux dipôles associés, en gardant les orientations. Le fonctionnement ne peut se faire qu'avec des valeurs communes pour les deux dipôles $\Rightarrow$ les coordonnées u et i du point de fonctionnement.

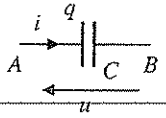
Attention aux notations dans le tracé des caractéristiques, u et i sont réservées pour le point d'intersection.



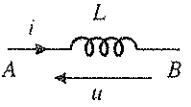
Cette méthode du point de fonctionnement marche aussi avec des dipôles non linéaires.

18. Un condensateur parfait soumis à une tension u_{AB} acquiert une charge $q_A = C\,(V_A - V_B) = C\,u_{AB}$. Il vient $q_B = -q_A$, indépendamment du signe de q_A.

Avec les orientations choisies : $q = C\,u$ et $i = +\frac{dq}{dt}$ (voir la question **19.**), les relations sont : $\boxed{u = \frac{q}{C} \text{ ou } i = C\frac{du}{dt}}$

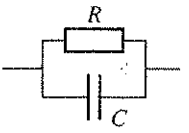


Une bobine parfaite parcourue par un courant variable est le siège de phénomènes dits d'induction qui créent une tension à ses bornes : $u_{AB} = L\dfrac{di_{AB}}{dt}$

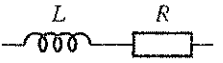


Avec les orientations choisies : $\boxed{u = L\dfrac{di}{dt}}$

Un condensateur réel est fabriqué avec un isolant qui n'est pas parfait, des charges peuvent passer d'une armature à l'autre à travers l'isolant, ce qui peut se modéliser par une résistance, de grande valeur, en parallèle sur un condensateur parfait, d'où le modèle RC parallèle. R est appelée résistance de fuite.

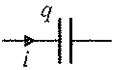


Une bobine réelle possède une résistance correspondant au fil avec lequel elle est fabriquée, d'où le modèle RL série.



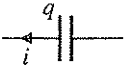
19. Suivant les choix des variables algébriques intensité et charge, la relation est différente :

Avec le choix ci-contre, si q (peu importe son signe) augmente, soit $\dfrac{dq}{dt} > 0$, alors cela signifie que des charges positives arrivent sur l'armature portant la charge q et donc $i > 0$, et :



$$\boxed{i = +\frac{dq}{dt}}$$

(pour $q > 0$ et $i > 0$, cela correspond à une charge du condensateur)

Dans l'autre cas : 

et $\boxed{i = -\dfrac{dq}{dt}}$

Le signe moins ne signifie en aucun cas que i soit négatif, mais seulement que les valeurs algébriques de i et $\dfrac{dq}{dt}$ sont opposées.

(pour $q > 0$ et $i > 0$, cela correspond à une décharge du condensateur)

20. Conformément à la question **6.**, la puissance reçue par une bobine est :

$$P(t) = u_{AB}(t)\, i_{AB}(t) = L\frac{di_{AB}}{dt} i_{AB} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i_{AB}^2\right)$$

d'où son énergie magnétique (liée à la présence du champ $\vec{B}$ dans la bobine) :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} L i^2}$$

La puissance reçue par un condensateur est :

$$P(t) = u_{AB} i_{AB} = u_{AB} C \frac{du_{AB}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_{AB}^2\right)$$

d'où son énergie électrique (liée à la présence du champ $\vec{E}$ entre les armatures) :

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}}$$

21. L'énergie emmagasinée dans un dipôle est une grandeur continue dans le temps (sinon la puissance reçue – donc fournie par un générateur – serait infinie !). L'intensité à travers une bobine est donc continue et il en est de même de la tension (et de la charge) aux bornes d'un condensateur.

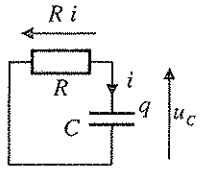
22. La puissance reçue par la charge R_u est $P = R_u i^2 = R_u \dfrac{E^2}{(R_g + R_u)^2}$.

La condition $\dfrac{dP}{dR_u} = 0$ conduit facilement à la relation $\boxed{R_u = R_g}$ dite d'adaptation d'impédance.

Le dipôle RC et le dipôle RL

23. Le régime libre correspond à une évolution en l'absence d'apport d'énergie extérieure, soit, en électrocinétique, en l'absence de source.

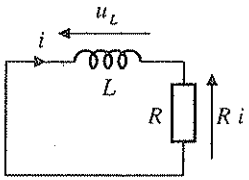
Dipôle *RC* : Après choix des variables, il vient



$$\begin{cases} i = \dfrac{dq}{dt} \\ u_C = \dfrac{q}{C} \\ R\,i + u_C = 0 \end{cases}$$

Système de trois équations à trois inconnues (i, q et u_C). Après élimination évidente, il vient : $RC \dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$ ou bien $RC \dfrac{di}{dt} + i = 0$

Dipôle *RL* : Après choix des variables, il vient



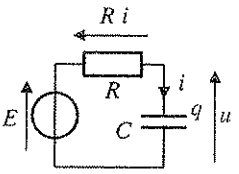
$$\begin{cases} u_L = L \dfrac{di}{dt} \\ u_L + R\,i = 0 \end{cases}$$

Système de deux équations à deux inconnues (i et u_L). Après élimination évidente, il vient : $\dfrac{L}{R} \dfrac{du_L}{dt} + u_L = 0$ ou bien $\dfrac{L}{R} \dfrac{di}{dt} + i = 0$

Il s'agit dans tous les cas d'un système linéaire du premier ordre : $\boxed{\tau \dfrac{dy}{dt} + y = 0}$

24. Pour le dipôle RC série attaqué par un échelon de tension E à $t = 0$, il vient :

$$\begin{cases} E = R\,i + u \\ u = \dfrac{q}{C} \\ i = \dfrac{dq}{dt} \end{cases}$$

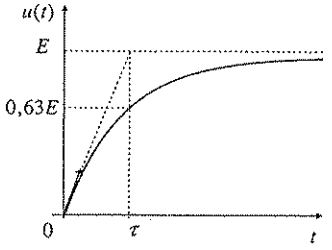


On a alors l'équation différentielle : $\tau \dfrac{du}{dt} + u = E$ avec $\boxed{\tau = RC}$

La solution est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre $K\,e^{-t/\tau}$ et de la solution particulière constante E, soit $u(t) = K\,e^{-t/\tau} + E$; la condition initiale est $u(0^+) = u(0^-) = 0$ car u aux bornes du condensateur est continue et à $t = 0^-$ la charge est nulle, ce qui donne $K = -E$, d'où :

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

La durée τ est celle pour laquelle la tangente à l'origine coupe l'asymptote $u = E$.



Au début (à la fermeture de l'interrupteur) le condensateur est déchargé et sa tension est nulle ; la différence de potentiel aux bornes de la résistance est donc importante (elle vaut E) ce qui génère un courant ($i = u_R / R$) qui charge le condensateur (on notera la discontinuité de l'intensité à $t = 0$). Mais au fur et à mesure que le condensateur se charge, sa tension s'élève et comme celle du générateur reste constante, la différence de potentiel aux bornes de la résistance diminue et donc l'intensité du courant également, ce qui ralentit la charge. Le phénomène s'arrête lorsque $u = E$ et $i = 0$.

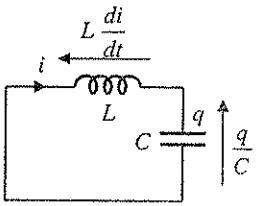
Le régime transitoire dure quelques τ ; pour $t = 5\tau$ par exemple, la partie u_G de la solution n'est plus que le millième du régime forcé $u_P = E$. Après ces quelques τ, le régime forcé continu ($u = E$ et $i = 0$) est établi.

Le régime forcé s'obtient sans passer par l'équation différentielle de la façon suivante : le générateur de *f.e.m.* constante impose un second membre constant, donc le régime forcé est continu et toutes les grandeurs sont constantes en régime forcé ; les grandeurs en régime forcé sont notées avec un indice ∞, il vient :

$$i_\infty = \frac{dq_\infty}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad u_\infty = E + 0 = E\,.$$

Le dipôle LC en régime libre

25. Régime libre signifie que le système est abandonné à lui-même, en l'absence de générateur dans le circuit. Pour que l'évolution ne corresponde pas à des valeurs constamment nulles, il faut disposer d'énergie au départ : à l'instant initial le condensateur est chargé ou bien un courant traverse la bobine.



Loi des mailles et relation entre variables fournissent le nombre d'équations nécessaire :

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}+\dfrac{q}{C}=0 \\ i=\dfrac{dq}{dt} \end{cases} \quad \text{il vient} \quad \boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0} \quad \text{du type} \quad \frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2 q=0$$

Cette équation différentielle admet comme solution des oscillations sinusoïdales de pulsation :

$$\boxed{\omega_0=1/\sqrt{LC}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{LC\omega_0^2=1}$$

La solution est $q(t)=q_0\cos(\omega_0 t)$ si l'on note q_0 la charge initiale du condensateur ($q(0^+)=q(0^-)=q_0$ car $q(t)$ est continue comme $i(t)$) ; les autres grandeurs $u_C(t)$ (en phase avec $q(t)$) et $i(t)$ (en quadrature avec $q(t)$) sont également sinusoïdales de même fréquence.

Cette modélisation est assez éloignée de la réalité car les fils de liaison et la bobine ne peuvent pas avoir une résistance nulle. En pratique le régime purement sinusoïdal prévu par ce modèle n'est pas observé (voir un peu plus loin le dipôle *RLC*).

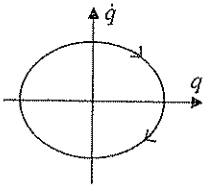
26. L'étude de la question précédente, avec les conditions initiales choisies donne :

$$\begin{cases} q(t)=q_0\cos(\omega_0 t) \\ \dot{q}(t)=-q_0\,\omega_0\sin(\omega_0 t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=q_0\cos(\omega_0 t) \\ \dot{q}/\omega_0=-q_0\sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

soit les équations paramétriques d'un cercle : $q^2+(\dot{q}/\omega_0)^2=q_0^2$

La courbe fermée indique le caractère périodique du mouvement.

Pour $\dot{q}(q)$, la courbe au lieu d'être inscrite dans un carré de coté $2q_0$, est inscrite dans un rectangle $(2q_0, 2q_0\,\omega_0)$, c'est une ellipse. On trouve le sens de parcours d'une trajectoire de phase en considérant l'ordonnée d'un point de la trajectoire de phase : par exemple si en ce point $\dot{q}>0$ alors $q\nearrow$ à partir de ce point.



27. En multipliant les deux membres de l'équation $L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0$ de la question **25.** par $i=\frac{dq}{dt}$, il vient $Li\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=0$ soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)=0$, et avec les notations de la question **20.** : $\frac{d}{dt}(E_m+E_e)=0$.

Ce résultat fait apparaître que l'énergie électromagnétique du circuit est constante au cours du temps. Au cours des oscillations l'énergie est alternativement balancée de la forme électrique (dans le condensateur) à la forme magnétique (dans l'inductance). Un phénomène analogue se produit en mécanique dans l'étude des oscillations non amorties d'une masse accrochée à un ressort : $\frac{d}{dt}(E_c+E_p)=0$.

Le dipôle RLC

28. Pour une valeur très petite de la résistance (cas R_1), les changements de signe de q et $\dot{q}$ indiquent des oscillations. Mais on n'a plus l'oscillateur harmonique du cas LC (courbe ≠ cercle) et les oscillations ne sont pas périodiques (la courbe n'est pas fermée). Le point O attracteur de la trajectoire de phase et la diminution de « l'amplitude » montrent une diminution de l'énergie. Ceci est cohérent avec la présence du conducteur ohmique dissipant l'énergie électrique par effet Joule.

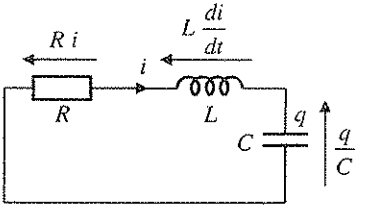
Quand R augmente (cas R_2) l'amortissement est plus rapide : sur la durée d'observation, le point O est pratiquement atteint.

Pour R_3 et R_4, q ne change pas de signe, il n'y a plus d'oscillations ; $\dot{q} < 0$ indique une fonction $q(t)$ décroissante.

L'évolution des trajectoires de phase montrent l'existence d'une valeur théorique de R (R_c résistance critique) correspondant au passage du régime d'oscillations amorties au régime sans oscillations (appelé apériodique). Cette valeur, d'après le graphe, est comprise entre R_2 et R_4, R_3 en est une valeur approchée.

Il est clair que l'amortissement est moins rapide (O non atteint) dans le cas R_4 que dans le cas R_3.

29. La loi des mailles pour un dipôle RLC série en régime libre est $Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0$.



En multipliant les deux membres par $i=\frac{dq}{dt}$, il vient $Ri^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)=0$ soit avec les notations de la question **20.** : $\frac{d}{dt}(E_m+E_e)=-Ri^2<0$.

Ce résultat fait apparaître que la dissipation par effet Joule est responsable de la diminution de l'énergie totale (magnétique et électrostatique) du circuit ; on dit que le régime est amorti.

L'équation différentielle s'écrit aussi : $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$ car $i=\frac{dq}{dt}$.

À noter d'abord, pour l'équation caractéristique $Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0$, que les deux racines sont soit réelles négatives, soit complexes conjuguées à partie réelle négative (puisque leur produit $c/a=1/LC>0$ et leur somme $-b/a=-R/L<0$), ce qui montre que le régime est amorti dans tous les cas, suite à la présence bien sûr de la résistance R dissipative.

La résistance critique pour laquelle $\Delta=0$ vaut $\boxed{R_c=2\sqrt{L/C}}$

Conformément à la résolution des équations différentielles (chapitre **0**), pour $R<R_c$, une faible résistance conduit à un régime pseudopériodique amorti (des oscillations contenues entre deux exponentielles décroissantes, $\Delta<0$) et pour $R>R_c$, une forte résistance conduit à un régime apériodique amorti (par exponentielles décroissantes, $\Delta>0$).
Comme on l'a vu à la question **28.**, le régime apériodique critique est celui pour lequel le retour à l'équilibre est le plus rapide (il était utilisé dans les appareils de mesure à cadre mobile).

Seule l'absence de résistance ($R=0$) conduit à des oscillations non amorties, celles du dipôle LC en régime libre, de pulsation :

$$\boxed{\omega_0=1/\sqrt{LC}}$$

30. L'équation de la tension $u_c=\frac{q}{C}$ aux bornes du condensateur est :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt}+\omega_0^2u_c=0 \quad \text{avec} \quad \frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2=1/LC\,.$$

Il s'agit de l'équation différentielle étudiée au paragraphe **II-3.a)** du chapitre **0**.

Suivant les valeurs de Q (inversement proportionnel à l'amortissement) on obtient les divers régimes observés expérimentalement :

$\Delta<0$ soit $Q>\frac{1}{2}$, cas d'un amortissement faible, les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées à partie réelle négative : $-\frac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega$

$$u_c=A\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t+\varphi) \quad \text{avec} \quad \omega=\sqrt{-\Delta}/2=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

ce régime libre est qualifié de **pseudopériodique**, la pseudopériode est $T = \frac{2\pi}{\omega}$. L'étude complète est faite à la question suivante.

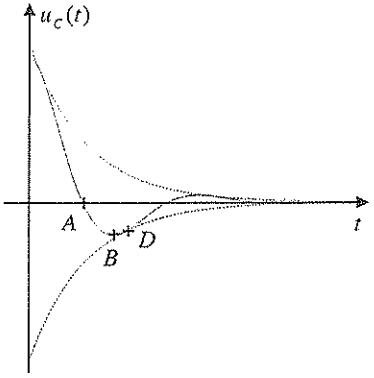
$\Delta > 0$ soit $Q < \frac{1}{2}$, cas d'un amortissement fort, les racines de l'équation caractéristique sont réelles, leur somme $(-\frac{\omega_0}{Q})$ est négative et leur produit (ω_0^2) positif, elles sont négatives, on les note $-\beta$ et $-\gamma$.
$u_c = B\,e^{-\beta t} + C\,e^{-\gamma t}$ avec $\omega_0^2 = \beta\,\gamma$
ce régime libre est qualifié d'**apériodique**.

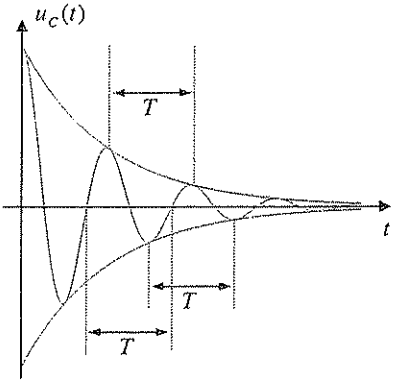
$\Delta = 0$ soit $Q = \frac{1}{2}$, il s'agit d'un cas limite théorique intermédiaire entre le régime pseudopériodique et le régime apériodique, on le qualifie **d'apériodique critique**.
La racine double de l'équation caractéristique est $-\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ et la solution de l'équation différentielle $u_c = (At + B)\,e^{-\omega_0 t}$.

31. Dans le cas du régime pseudopériodique ($Q > \frac{1}{2}$), la solution s'écrit :

$$u_c = A\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$-Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \le Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t + \varphi) \le Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$, les courbes $\pm A\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ apparaissent comme des courbes enveloppes pour $u_C(t)$.
Les points de contact avec les courbes enveloppes se produisent aux dates t telles que $\cos(\omega t + \varphi) = \pm 1$, alors que les extrema (définis par $\frac{du_C}{dt} = 0$) se produisent aux dates t telles que $-\frac{\omega_0}{2Q}\cos(\omega t + \varphi) - \omega\sin(\omega t + \varphi) = 0$, c'est-à-dire graphiquement un peu avant le point de contact avec la courbe enveloppe.
Les zéros de $u_C(t)$ se produisent aux dates t telles que $\cos(\omega t + \varphi) = 0$.
La périodicité des fonctions trigonométriques montre que l'écart temporel entre deux points particuliers successifs du même type est $\frac{\pi}{\omega}$. On appelle pseudopériode la durée $T = \frac{2\pi}{\omega}$ qui apparaît un peu partout sur le graphe de $u_C(t)$.
Avec les conditions initiales : condensateur chargé sous la tension U_0 et $i(0^-) = 0$, il vient $A = U_0\cos\varphi$ et $\tan\varphi = -\frac{1}{2Q}\frac{\omega_0}{\omega}$.





Le point A est un zéro, B un minimum et D un point de contact.

L'amplitude maximale décroît de façon exponentielle, en effet deux maxima consécutifs sont séparés de T et leur rapport, si le premier est atteint à t_1 est :

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t_1}\cos(\omega t_1 + \varphi)}{A\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t_1+T)}\cos[\omega(t_1+T)+\varphi]} = e^{+\frac{\omega_0}{2Q}T} \quad \text{car} \quad \omega T = 2\pi$$

Le décrément logarithmique δ est le logarithme népérien du rapport de deux maxima successifs, d'où $\delta = \ln e^{\frac{\omega_0}{2Q}T} = \frac{\omega_0}{2Q}T \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\omega_0}{2Q}T}$

Il résulte de la définition de ω, la relation entre la pseudopériode T et la période propre T_0 : $T^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right) = T_0^2 \Rightarrow T^2 = T_0^2 + T^2/4Q^2$.

d'où avec δ la relation cherchée, dans laquelle δ dépend de T :

$$\boxed{T^2/T_0^2 = 1 + \delta^2/4\pi^2}$$

En cas de faible amortissement $Q \gg 1$ et $\delta \ll 1$, et donc $T \approx T_0$ bien que T légèrement supérieure à T_0, mais l'écart est du second ordre.

32. Pour $Q > \frac{1}{2}$, l'amortissement des oscillations est en $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$, la durée du régime libre (ou du régime transitoire en cas de second membre à l'équation différentielle) diminue si Q diminue.

Pour $Q < \frac{1}{2}$, $u_c = B\,e^{-\beta t} + C\,e^{-\gamma t}$ avec $\omega_0^2 = \beta\,\gamma$, prenons $\beta < \omega_0$ et $\gamma > \omega_0$, quand $t \nearrow$ on a $u_c \approx B\,e^{-\beta t}$ qui décroit moins vite que $e^{-\omega_0 t}$ (cas $Q = \frac{1}{2}$), donc la durée du régime libre diminue si Q augmente.
Comme le montrait le portrait de phase de la question **28.**, la durée du régime libre est plus petite pour le régime apériodique critique.

33. Les notations sont celles de la question **29.**, le régime forcé s'obtient sans passer par l'équation différentielle de la façon suivante : le générateur de *f.e.m.* constante impose un second membre constant, donc le régime forcé est continu et toutes les grandeurs sont constantes en régime forcé, donc :

$$u_{L\infty} = L\frac{di_\infty}{dt} = 0\ ;\ i_\infty = \frac{dq_\infty}{dt} = 0\ ;\ E = 0 + 0 + u_{C\infty} \text{ et } q_\infty = CE$$

Applications directes du cours

■ Les lois de l'électrocinétique en régime continu

34. R_1 et R_2 ne sont ni en série (elles ne sont pas parcourues par le même courant), ni en parallèle (elles n'ont pas leurs deux bornes communes).
R_1 et R_4 ne sont ni en série, ni en parallèle.

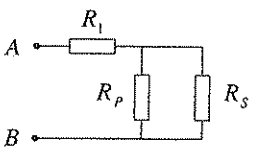
R_2 et R_3 sont en parallèle : leur résistance équivalente est $R_P = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.

R_3 et R_4 ne sont ni en série, ni en parallèle.

R_3 et R_5 ne sont ni en série, ni en parallèle.

R_4 et R_5 sont en série (la situation n'est pas la même que pour R_1 et R_2) ; leur résistance équivalente est $R_S = R_4 + R_5$.

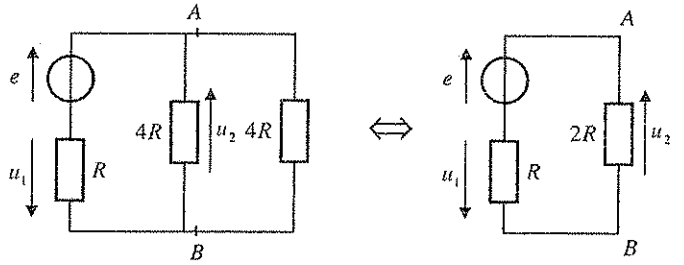
On peut alors redessiner le réseau dipolaire précédent sous la forme ci-contre (l'emplacement « topologique » de R_S à l'ancienne place de R_4 ou à l'ancienne place de R_5 est sans importance) ; il apparaît alors que R_1 est en série avec l'association



$R_P \parallel R_S$, d'où la résistance équivalente R_{AB} du dipôle :

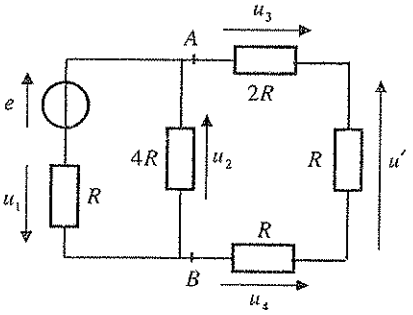
$$R_{AB} = R_1 + \frac{R_P R_S}{R_P + R_S} = R_1 + \frac{R_2 R_3 (R_4 + R_5)}{R_2 R_3 + (R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}$$

35. Déterminer d'abord la résistance équivalente au réseau dipolaire résistif à droite de AB. En commençant par les deux résistances, à droite, en série, de résistance équivalente $R + R = 2R$, association en parallèle avec la résistance $2R$, ce qui donne R. Cette résistance équivalente R est en série avec $2R$ et R : soit $R_{AB} = 4R$.



Un diviseur de tension donne : $u_2 = e\,\frac{2R}{2R+R} = \frac{2}{3}e$ et $u_1 = +e\,\frac{R}{R+2R} = \frac{e}{3}$

Ensuite réintégrer progressivement les branches remplacées par leur équivalent pour retrouver les tensions demandées.



$$u_3 = -u_2\,\frac{2R}{2R+R+R} = -\frac{u_2}{2} = -\frac{e}{3}$$

$$u_4 = u_2\,\frac{R}{4R} = \frac{e}{6}$$

de plus $u' = u_4 = \frac{e}{6}$

On en déduit $u_5 = \frac{u'}{2} = \frac{e}{12}$

36. Utiliser les diviseurs :

a) $u = e\,\frac{R}{2R} = \frac{e}{2}$

b) $u = -e\,\frac{R}{4R} = -\frac{e}{4}$

c) Remplacer $R \parallel R$ par $\frac{R}{2}$ en série avec R et $\frac{R}{2}$, $u = u_1 = e\,\frac{R/2}{2R} = \frac{e}{4}$;
se rappeler que seules comptent les liaisons entre les dipôles et pas la forme des fils !

d) C'est le même circuit que le c).

e) $i = i_0 \dfrac{1/3R}{1/3R + 1/R} = \dfrac{i_0}{4}$ ou plus rapidement dans le cas de deux résistances seulement en parallèle $i = i_0 \dfrac{R}{3R + R} = \dfrac{i_0}{4}$

f) La résistance équivalente de la branche centrale est 2R donc

$$i = -i_0 \frac{2R}{2R + R} = -\frac{2\,i_0}{3} \; ; \; u = R\,i = -\frac{2}{3} R\,i_0 \; ; \; i_1 = \frac{1}{2}(i + i_0) = \frac{i_0}{6}$$

37. Les deux intensités données suffisent pour orienter toutes les branches, comme indiqué sur le schéma ci-après.

Il faut deux équations indépendantes, elles sont fournies par la loi des mailles. L'indépendance des équations de maille est assurée en choisissant des mailles telles que chaque maille choisie possède au moins une branche n'appartenant qu'à elle.

Maille *ADA* : $R\,(i_1 - i_2) - e_1 + R\,i_1 = 0$

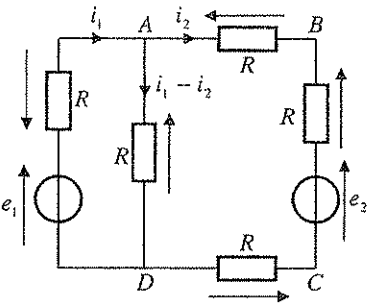
Maille *ABCDA* :

$R\,i_2 + R\,i_2 + e_2 + R\,i_2 - R\,(i_1 - i_2) = 0$

$$\begin{cases} 2R\,i_1 - R\,i_2 = e_1 & (1) \\ -R\,i_1 + 4R\,i_2 = -e_2 & (2) \end{cases}$$

$2 \times (2) + (1)$ donne i_2, on remplace dans (1) ce qui donne i_1 :

$$\boxed{i_2 = \frac{e_1 - 2\,e_2}{7R} \; ; \; i_1 = \frac{4\,e_1 - e_2}{7R}}$$



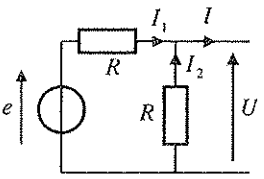
38. Écrire par exemple: $v_0 - v_1 = R_1(i_0 + i_1)$ (1) et $v_0 - R_1 i_0 = R_2(i_0 - i_1)$ (2) ;

(2) donne directement i_1 ; reporté dans (1), on a v_1 d'où le résultat :

$$\boxed{v_1 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_0 - R_1 \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_0} \quad \text{et} \quad \boxed{i_1 = -\frac{1}{R_2} v_0 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_0}$$

39. On oriente :

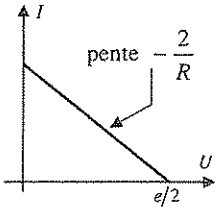
$$\begin{cases} U = e - R\,I_1 \\ U = -R\,I_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{e - U}{R} - \frac{U}{R} \quad \text{soit}$$



$$\boxed{U = \frac{e}{2} - \frac{R}{2} I}$$ le réseau dipolaire est équivalent

à une source de Thévenin de *f.e.m.* $\dfrac{e}{2}$ et résistance interne $\dfrac{R}{2}$

Sa caractéristique est :

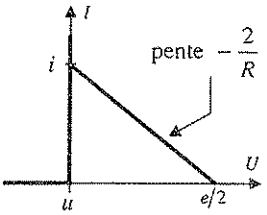


Dipôles non linéaires

40. La caractéristique montre un dipôle non symétrique (le sens du branchement est déterminant lors de son utilisation). Le symbole représentatif est lui-même non symétrique. Le dipôle est non linéaire, même si la caractéristique du modèle diode idéale est linéarisée par morceaux. Le dipôle est passif : sa caractéristique statique passe par O. Le fonctionnement est :

$$i = 0 \quad \text{tant que} \quad u < 0 \quad \text{(sens dit bloqué)}$$
$$u = 0 \quad \text{tant que} \quad i \geq 0 \quad \text{(sens dit passant)}$$

41. On retrouve la diode aux bornes du réseau dipolaire étudié à la question **39.**, le point de fonctionnement est l'intersection des caractéristique tracées pour les mêmes U et I.



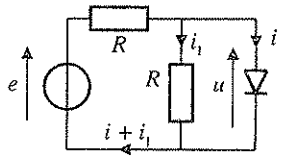
Il vient $u = 0$ et $i = \dfrac{2}{R}\dfrac{e}{2} = \dfrac{e}{R}$

On déduit de $u = R i_1$: $i_1 = 0$

Autre méthode possible, par le calcul car la caractéristique de l'élément non linéaire est linéarisée par morceaux.

Les équations du circuit proposé sont :

$$\begin{cases} u = R\, i_1 \\ e = R\,(i + i_1) + R\, i_1 \\ \text{caractéristique } i(u) \text{ de la diode} \end{cases}$$



soit 3 inconnues (i, i_1 et u) et 3 équations dont une non linéaire.

L'hypothèse diode passante, $u = 0$, conduit à $\boxed{i_1 = 0}$ et $\boxed{i = \dfrac{e}{R}}$

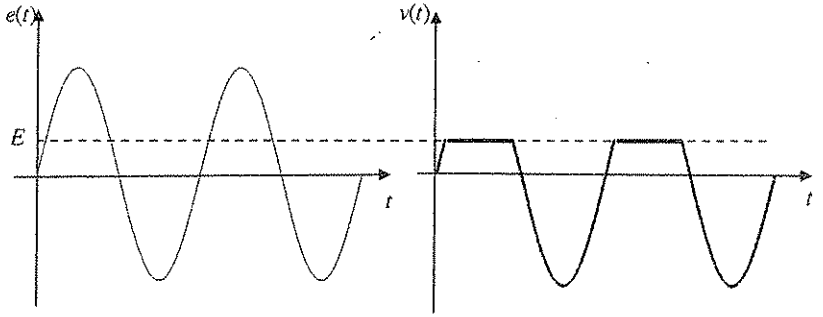
Avec les valeurs numériques $e > 0 \Rightarrow i > 0$, ce qui valide l'hypothèse.

42. Les équations du circuit proposé sont :

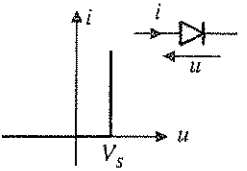
$$\begin{cases} v = U \sin \omega t - R\, i \\ v = E + u \\ \text{caractéristique } i(u) \text{ de la diode} \end{cases}$$

soit 3 inconnues (i, v et u) et 3 équations dont une non linéaire.

- L'hypothèse diode passante, $u = 0$, conduit à $\boxed{v = E}$ et $R\,i = U \sin \omega t - E$; la validité de l'hypothèse $i \geq 0$ correspond à $U \sin \omega t \geq E$.
- L'hypothèse diode bloquée, $i = 0$, conduit à $\boxed{v = U \sin \omega t}$ et $u = U \sin \omega t - E$; la validité de l'hypothèse $u < 0$ correspond à $U \sin \omega t < E$.



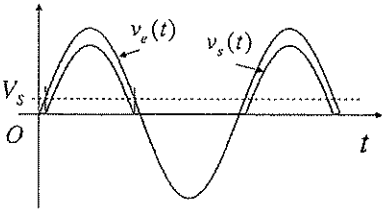
43. La caractéristique linéarisée de la diode est donnée ci-contre.



$i = 0$ tant que $u < V_S$

$u = V_S$ tant que $i \geq 0$

On a un redressement monoalternance avec seuil. Pour $v_e(t) < V_S$, la diode est bloquée et $v_s(t) = 0$. Pour $v_e(t) \geq V_S$, la diode est passante et $v_s(t) = v_e(t) - V_s$ (l'effet de seuil s'atténue lorsque $V_0 \gg V_S$).



Régimes libres et réponses à un échelon de tension

44. Au début (à la fermeture de l'interrupteur) l'intensité est nulle, la différence de potentiel aux bornes de la résistance est donc nulle ($u_R = Ri$) et la variation de $i(t)$, $\dfrac{di}{dt}$, est donc maximale. Au fur et à mesure que le courant s'installe, la différence de potentiel aux bornes de la résistance croît et donc celle aux bornes de l'inductance décroît, l'intensité augmente alors avec une pente plus douce. Le phénomène s'arrête lorsque $u = 0$ et donc $i_0 = E/R$. On lit sur le graphe $i_0 = 10\,\text{mA}$. Quand i ne varie plus, $u_R = 0$, la trajectoire de phase donne $E = R i_0 = 5\,\text{V}$ et donc $R = \dfrac{5}{10^{-2}} = 500\,\Omega$.

L'allure de la trajectoire de phase permet d'écrire : $\dot{u}_R = a - b u_R$, soir un système d'ordre 1 : $\dot{y} + \frac{1}{\tau} y = c$. La mesure de b nous fournit donc la constante de temps τ.

On lit $b = \frac{25.10^3}{5} = 5.10^3\,\text{s}^{-1}$ et on obtient : $\tau = 2.10^{-4}\,\text{s} = 0{,}2\,\text{ms}$. La constante c de l'équation différentielle vaut $25\,\text{V.ms}^{-1}$, qui correspond bien à $\frac{E}{\tau} = \frac{5}{0{,}2} = 25\,\text{V.ms}^{-1}$.

On peut également lire sur le graphe $i(t)$, la valeur de τ pour $i = 0{,}63\, i_0$ ou avec l'intersection de la tangente à l'origine et la direction asymptotique ($i = i_0$). Les deux redonnent $\tau = 0{,}2\,\text{ms}$, ce qui confirme la variation en $1 - \text{e}^{-t/\tau}$ et le système du premier ordre.

Le régime transitoire dure quelques τ ; pour $t = 5\,\tau = 1\,\text{ms}$ par exemple, on a quasiment le régime forcé $i_0 = E / R$.

45. Les équations du circuit proposé sont :

$$\begin{cases} E = R\, i_1 + u & (1) \\ L \dfrac{di_2}{dt} = R\, i_1 & (2) \\ i_1 + i_2 = C \dfrac{du}{dt} & (3) \end{cases}$$

soit 3 inconnues (i_1, i_2 et u) et 3 équations

a) i_2 et u sont continues : $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$ et $u(0^+) = u(0^-) = 0$

$(1) \Rightarrow R\, i_1(0^+) = E - u(0^+) = E \Rightarrow i_1(0^+) = \frac{E}{R}$

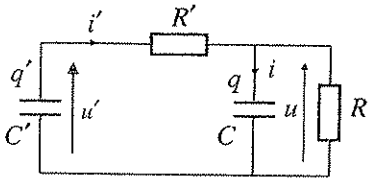
$(3) \Rightarrow i_1(0^+) + 0 = C \frac{du}{dt}(0^+) \Rightarrow \frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$

b) Pour $t \to \infty$, il s'établit un régime forcé continu : i_1, i_2, u et du / dt sont des constantes.

$u_\infty = \text{cste} \Rightarrow \left(\frac{du}{dt}\right)_\infty = 0$; (2) avec $i_{2\infty} = \text{cste} \Rightarrow i_{1\infty} = 0$; (3) donne alors $i_{2\infty} = 0$; $(1) \Rightarrow u_\infty = E - R\, i_{1\infty} = E$

46. a) Les orientations choisies sur le schéma ci-contre conduisent à :

$$i' = -\frac{dq'}{dt} \quad \text{et} \quad i = +\frac{dq}{dt}$$



Alors avec $q' = C'u' \Rightarrow i' = -C'\frac{du'}{dt}$

(1) et $q = Cu \Rightarrow i = C\frac{du}{dt}$ (2)

Les lois de Kirchhoff donnent :

$$u' = R'i' + u \quad (3) \quad \text{et} \quad u = R(i' - i) \quad (4)$$

On a ainsi 4 équations aux 4 inconnues u, u', i et i' ; de cet ensemble de relations différentielles, il faut éliminer les variables en ne gardant que u.

$$(1) \text{ et } (3) \text{ donnent : } u' = -R'C'\frac{du'}{dt} + u \quad (3')$$

$$(1), (2) \text{ et } (4) \text{ donnent : } u = R\left(-C'\frac{du'}{dt} - C\frac{du}{dt}\right) \quad (4')$$

Pour éliminer $\frac{du'}{dt}$, on calcule $\frac{(3')}{R'} - \frac{(4')}{R}$: $\frac{u'}{R'} - \frac{u}{R} = \frac{u}{R'} + C\frac{du}{dt}$ (5)

Et enfin, on dérive (5) et on y élimine $\frac{du'}{dt}$ par (4') ; il vient alors :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R'C} + \frac{1}{R'C'}\right)\frac{du}{dt} + \frac{1}{RCR'C'}u = 0}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du 2nd ordre, linéaire, homogène (régime libre), à coefficients constants, et qui admet *a priori* tout type de solution…

b) Les circuits électriques oscillants passifs sont nécessairement constitués d'un condensateur et d'une inductance ; or cette dernière est absente du réseau proposé (et ne peut être simulée par un réseau RC passif). D'où l'impossibilité d'obtenir des oscillations avec un réseau constitué seulement de condensateurs et de résistances.

Confirmons ce résultat par un calcul, le type de solution, pseudopériodique ($\Delta < 0$) ou apériodique ($\Delta > 0$), étant déterminé par le signe du discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R'C} + \frac{1}{R'C'}\right)^2 - \frac{4}{RCR'C'} = \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R'C} - \frac{1}{R'C'}\right)^2 + \frac{4}{R'^2CC'} > 0$$

ce qui confirme l'impossibilité d'obtenir un régime pseudopériodique ou apériodique critique.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

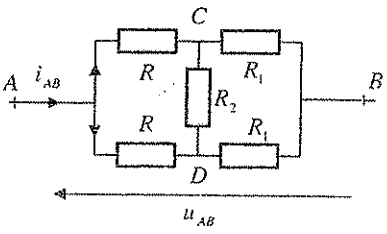
47. À température ordinaire, la vitesse d'agitation thermique est de l'ordre de 10^6 m.s^{-1}, mais ces mouvements sont désordonnés et le vecteur vitesse moyen, sur l'ensemble des porteurs à un instant, est nul. Pour un métal la vitesse d'ensemble des électrons de conduction, correspondant à un courant électrique (fil parcouru par un courant de 1 A), est de l'ordre de 0,1 mm.s^{-1} ! Ces deux vitesses ne doivent pas être confondues avec la vitesse d'établissement par exemple d'un courant, qui est la vitesse de propagation de l'information soit $c = 3.10^8$ m.s^{-1} (voir l'A.R.Q.S. question **3.**).

48. Oui, il suffit d'une relation $u_{AB} = R\, i_{AB}$ avec R constante (indépendante de i_{AB}) positive.

49. Supposer que le dipôle est soumis à une tension u_{AB}, calculer i_{AB} et en déduire $R = \frac{u_{AB}}{i_{AB}}$. Essayer aussi de simplifier les associations en utilisant les symétries éventuelles.

Exemple : dans le réseau dipolaire résistif ci-contre, il n'y a aucune association simple de résistances.

Le plan contenant AB et auquel CD est perpendiculaire est un plan de symétrie, donc $V_C = V_D$ et l'intensité dans R_2 est nulle quelle que soit u_{AB}, on peut enlever R_2. Le réseau dipolaire simplifié donne $R_{eq} = \frac{1}{2}(R_1 + R)$. On pouvait aussi réunir les points C et D et obtenir le même résultat.



50. En parallèle pour éviter qu'elles ne cessent toutes de briller lorsque l'une d'entre elles est grillée. Par ailleurs, pour une tension donnée, cela n'oblige alors pas à limiter leur nombre.

51. Pour une source de tension $u_{BA} = e - R\, i_{AB}$

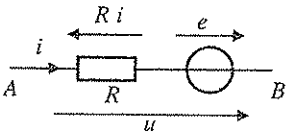
La puissance reçue $P = u_{AB}\, i_{AB}$ devient donc ici en convention générateur : $P = -u\, i$.

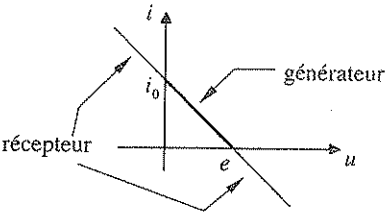
Pour $P > 0$ le fonctionnement de la source de tension est récepteur. Les modes de fonctionnement sont indiqués sur la caractéristique.

Les piles rechargeables fonctionnent ainsi, en générateur dans l'appareil qu'elles alimentent, et en récepteur lorsqu'on les recharge.

Ceci montre bien qu'il ne faut pas confondre source de tension et « générateur ».

Attention certaines sources de tension n'acceptent pas de fonctionner en récepteur.





52. Ce qui compte pour une batterie c'est la charge totale qu'elle est capable de délivrer et plus concrètement la durée sur laquelle elle est capable de débiter une intensité donnée ; l'unité en (m)A.h étant plus parlante qu'en (m)C. En multipliant cette « capacité » par la tension nominale de la batterie, on a le travail électrique que peut fournir cette batterie.

53. Plus l'intensité demandée est élevée, plus la résistance du conducteur doit être faible pour maintenir à un niveau insignifiant son échauffement par effet Joule dans le fil d'alimentation. Or la résistance des fils diminue lorsque leur section augmente (elle est inversement proportionnelle à sa section, voir la question **13.**) et donc à intensité constante, un gros fil s'échauffe moins qu'un fil mince.

54. Pour éviter une trop forte intensité dans un circuit ou dans un appareil (ce qui pourrait l'endommager), on place en entrée un fusible, constitué d'un fil conducteur qui fond rapidement lorsque l'intensité qui le traverse dépasse une valeur déterminée, souvent importante.
Les appareils électroménagers sont reliés à la terre par une liaison très conductrice établie entre la carcasse métallique de l'appareil et le sol. Si un fil d'alimentation touche de façon accidentelle la carcasse de l'appareil, un circuit peut s'établir entre ce fil et la terre (sans passer par le corps de la personne qui touche l'appareil...).
Avec le même contact accidentel, en cas de liaison à la terre défectueuse, une personne en contact avec la carcasse métallique sera soumise à la tension du réseau via la terre (chaussures non isolantes) Dans ce cas une partie du courant qui entre dans l'installation ne ressort pas par le chemin normal ; ce courant de fuite est détecté par un disjoncteur différentiel qui coupe l'alimentation et évite l'électrocution.

55. a) Les liquides présents dans l'estomac ou les intestins sont plus conducteurs que les muscles ou les os des membres $\Rightarrow$ R_4 plus faible.

b) Entre une main et les pieds : $R_{eq} = R_1 + \dfrac{R_3(R_2 + R_3)}{2R_3 + R_2} + R_4 + \dfrac{R_5}{2}$ et $I = \dfrac{U}{R_{eq}}$

A.N. $R_{eq} = 966\,\Omega$ et $I = 2{,}4.10^2$ mA, le disjoncteur coupe l'alimentation.

c) Entre les deux mains : $R_{eq} = 2R_1 + \dfrac{2R_3R_2}{2R_3 + R_2}$ et $I = \dfrac{U}{R_{eq}}$

A.N. $R_{eq} = 981\,\Omega$ et $I = 2{,}3.10^2$ mA, le fusible ne fondra pas alors que l'intensité du courant dépasse largement la valeur mortelle.

d) La tension conduisant à un courant maximal de 20 mA dans le corps humain d'environ 1 kΩ est d'environ 20 V (valeur réglementaire 24 V).

56. Ils ne sont en contact qu'avec un seul fil $\Rightarrow$ d.d.p. nulle (de plus l'écart entre les pattes est insuffisant compte-tenu de la très faible résistance du câble).

57. a) À $t = 0$, les condensateurs sont déchargés et le circuit est mis sous tension (interrupteur K_1 fermé) ; la résistance en série avec les condensateurs étant considérée comme nulle, la constante de temps est nulle et la charge des condensateurs instantanée. Le régime forcé continu est établi : $i_1 = i_2 = 0$ car q_1 et q_2 sont constantes, de plus $\dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dq_2}{dt} \Rightarrow q_1 = q_2 + \text{cste}$, soit avec les conditions initiales et la continuité des charges : $q_1 = q_2 = q$ (qui s'interprète

aussi sous la forme $-q_1+q_2=0$, l'armature droite de C_1 et l'armature gauche de C_2 forment un système isolé de charge initiale nulle).

L'équation de maille donne : $2E=\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_2}{C_2}=q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$ d'où

$$\boxed{q=\frac{2C_1C_2}{C_1+C_2}E}$$

b) Les constantes de temps sont maintenant RC_1 et RC_2, au bout d'un temps grand devant ces constantes, le régime forcé continu est établi : $i_1=0$ et $i_2=0$, donc la différence de potentiel aux bornes de la résistance est nulle, d'où $q_1'=C_1E$ et $q_2'=C_2E$ conformément aux équations de maille.

La charge Q ayant traversé la résistance R est la somme des variations de charges de l'armature droite de C_1 et de l'armature gauche de C_2 :

$$Q=(-q_1'+\cancel{q})+(q_2'-\cancel{q}) \text{ soit } \boxed{Q=(C_2-C_1)E}$$

Rq : Si $C_1=C_2$: $q_1'=q_2'=q$ et $Q=0$; la fermeture de l'interrupteur ne provoque aucun transfert de charges.

Exercices

58. Rendement d'un montage potentiométrique

La puissance absorbée par la résistance de charge est $P_R=Ri_R^2$; l'intensité i_R dans la résistance R est donné par $i_R=\frac{r_1}{r_1+R}i_E$ (diviseur d'intensité) où i_E est l'intensité dans la branche du générateur, orientation dans le même sens que i_R, d'où :

$$P_R=\frac{Rr_1^2}{(r_1+R)^2}i_E^2$$

La puissance délivrée par la source idéale est $P_E=Ei_E$ avec $E=\left(r_2+\frac{r_1R}{r_1+R}\right)i_E$ soit :

$$P_E=\left(r_2+\frac{r_1R}{r_1+R}\right)i_E^2$$

d'où le rendement $\boxed{\eta=\frac{P_R}{P_E}=\frac{Rr_1^2}{(r_1+R)\left[r_2(r_1+R)+r_1R\right]}}$

AN : $\underline{\eta=0,20}$

Ce rendement est faible, 80 % de l'énergie est reçue et dissipée par les résistances r_1 et r_2.

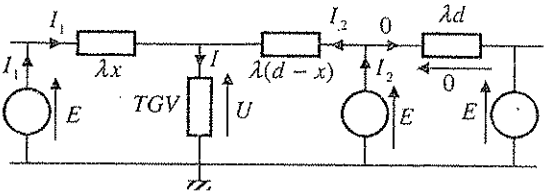
59. Alimentation électrique du TGV

a) $R = \rho\dfrac{d}{s}$ et $\lambda = \dfrac{R}{d} = \dfrac{\rho}{s}$

A.N. : $\lambda = 1{,}2.10^{-4}\ \Omega.\text{m}^{-1} = 1{,}2.10^{-1}\ \Omega.\text{km}^{-1}$ et $R = 7{,}0\ \Omega$ valeur faible due à une section importante.

$i(t)$ sinusoïdale sera la même en tout point dans le cadre de l'A.R.Q.S., à 50 Hz il faut $d \ll 6000$ km (voir la question **3.**).

b) Aux bornes de λd (section 2) la tension est nulle $\Rightarrow$ intensité nulle $\Rightarrow$ I_2 dans $\lambda(d-x)$ et I_1 dans λx. L'intensité dans la motrice est donc $I = I_1 + I_2$. Avec l'équation de maille :



$$-E + \lambda x I_1 - \lambda(d-x)I_2 + E = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2\frac{d-x}{x} = I - I_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= I\frac{x}{d} \\ I_1 &= I\frac{d-x}{d} \\ U &= E - \lambda x I_1 = E - \frac{\lambda x(d-x)}{d}I \end{aligned}}$$

La puissance reçue (et dissipée) par la caténaire est :

$$P = \lambda x I_1^2 + \lambda(d-x)I_2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \lambda I^2\frac{x(d-x)}{d}}$$

c) $\dfrac{dU}{dx} = -\dfrac{\lambda I}{d}(d-2x) \quad \Rightarrow$

x	0	$d/2$	d
dU/dx		$-$ 0 $+$	
U	E	↘	↗ E

U est minimale pour $x_m = \dfrac{d}{2}$, $\boxed{U(x_m) = E - \dfrac{RI}{4} < E}$

de même $\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{\lambda I^2}{d}(d-2x) \Rightarrow P$ est minimale pour $x_m = \dfrac{d}{2}$ et

$$\boxed{P_m = \frac{\lambda I^2}{d}\frac{d^2}{4} = \frac{RI^2}{4}}$$

A.N. : $U_{\min} = 24.10^3$ V légèrement inférieure à $E = 25$ kV

$P_m = 630$ kW dissipée par effet Joule alors que la motrice reçoit

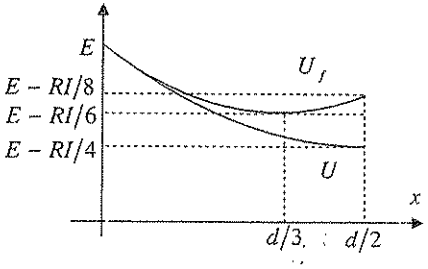
$$UI = 14{,}4 \text{ MW}$$

Une valeur de d pas trop grande, diminue la baisse de tension et limite les pertes, car R est proportionnel à d.

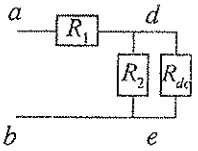
d) $U_f(d/2) = E - \dfrac{RI}{8}$; le minimum de U_f est atteint pour $2d - 3x - 3x = 0$,

soit $x_{fm} = \dfrac{d}{3}$ $\boxed{U_{f\min} = E - \dfrac{RI}{6}}$

le feeder diminue la chute de tension entre deux sous-stations.



60. Modélisation d'une fibre nerveuse (*)



a) Notons R_{de} la résistance de la partie à droite de (de), dont l'existence est admise. Cette résistance (entre d et e) est donc placée en parallèle sur la résistance R_2 de la première cellule. L'ensemble $R_2 \,\|\, R_{de}$ étant en série avec R_1, la résistance entre a et b vaut :

$$R_{ab} = R_1 + R_2 \,\|\, R_{de}$$

La résistance totale R_T tendant vers une limite, on a, puisque le nombre de cellules est important : $R_T \approx R_{ab} \approx R_{de}$

La valeur limite vérifie donc $R_T = R_1 + \dfrac{R_2 R_T}{R_2 + R_T}$ soit $R_T^2 - R_1 R_T - R_1 R_2 = 0$

Cette équation du second degré n'admet qu'une seule solution positive :

$$\boxed{R_T = \frac{1}{2}\left(R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}\right)}$$

b) On reconnaît un diviseur de tension, la tension V_{de} aux bornes de $R_2 \,\|\, R_T$ est une fraction de la tension $V_{ab} = V_0$ aux bornes de $R_1 + R_2 \,\|\, R_T$, d'où le résultat :

$$V_{de} = \frac{R_2 \,\|\, R_T}{R_1 + R_2 \,\|\, R_T} V_{ab} = \frac{1}{\dfrac{R_1}{R_2 \,\|\, R_T} + 1} V_0$$

On a donc bien V_{de} du type $\boxed{V_{de} = \dfrac{V_0}{1+\beta}}$ avec $\boxed{\beta = R_1\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_T}\right)}$

Après n cellules élémentaires : $\boxed{V_n = \dfrac{V_0}{(1+\beta)^n}}$

AN : On calcule d'abord $R_T = 19{,}8$ MΩ ; $\beta = 1{,}8.10^{-2}$; $n = 200$

Alors $\frac{V_{200}}{V_0} \approx \frac{1}{35} = 2{,}8\ \%$; le signal s'est donc atténué de 97 % !

Seul un axone myélinisé peut transmettre une information sur une distance de l'ordre du mètre.

61. Pont de Wheatstone

a) R_d n'est pas infinie, à l'équilibre $V_A - V_B = 0$.

b) Le pont étant équilibré, $i_1 = 0$ donc les résistances R_1 et R_2 sont en série, ainsi que R_3 et R_4. Par divisions de tension il vient :

$$V_C - V_A = e\,\frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad V_C - V_B = e\,\frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

soit avec $V_A = V_B$ et $e \neq 0$: $\boxed{R_1 R_3 = R_2 R_4}$

Cette condition est suffisante car $e \neq 0$, $R_1 + R_2 \neq 0$ et $R_3 + R_4 \neq 0$

c) Si on cherche R_1, on impose R_4/R_3 et on règle R_2 pour annuler le courant dans le détecteur. Il s'agit d'une mesure relative, la précision dépend de la sensibilité du détecteur de courant. Cette méthode était utilisée avant l'avènement des appareils numériques.

62. Décharge et recharge d'un condensateur

Pour $t < 0$, K étant ouvert pendant une durée grande devant R_1C, un régime continu est établi : $i(0^-) = 0 = i_C(0^-)$ et $u(0^-) = E$; K ouvert $\Rightarrow i_R(0^-) = 0$

1ère phase. ($t > 0$), les équations, loi des mailles, loi des nœuds et relation entre variables, sont :

$$\begin{cases} u = E - R_1\, i & (1) \\ u = R_2\, i_R & (2) \\ i = i_R + i_C & (3) \\ i_C = C\,\dfrac{du}{dt} & (4) \end{cases}$$

soit 4 équations pour 4 inconnues

La continuité de u donne : $u(0^+) = u(0^-) = E$

$$(1) \Rightarrow i(0^+) = 0\ ;\ (2) \Rightarrow i_R(0^+) = \frac{E}{R_2}\ ;\ (3) \Rightarrow i_C(0^+) = -\frac{E}{R_2}$$

Au bout d'un temps suffisant, un nouveau régime continu s'établit :

$$u_\infty = \text{cste} \Rightarrow i_{C\infty} = 0 \Rightarrow i_\infty = i_{R\infty} \Rightarrow \text{avec (1) et (2)}\ \ i_\infty = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad \text{et}$$

$$u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,E$$

L'équation différentielle, par exemple en u, s'obtient en éliminant toutes les inconnues autres que u.

(1) donne i en fonction de u, (2) i_R en fonction de u, (4) i_C en fonction de $\frac{du}{dt}$, on remplace ensuite dans (3) :

$$\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}\frac{du}{dt} + u = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}C}$$

Pour une durée grande devant τ, on retrouve la valeur u = cste = u_∞

Rq : Dans l'expression de τ apparaît la résistance $R_1 \| R_2$; ceci peut se voir (sans calcul) en remplaçant dans le schéma initial le générateur de Thévenin par un générateur de Norton, alors R_2 vient en parallèle sur R_1 et l'on revient à une représentation de Thévenin.

2ème phase. À la réouverture de K, on a la réponse à un échelon de tension d'un dipôle RC série.

Dans ce cas la constante de temps τ' est entièrement imposée par R_1, soit

$$\boxed{\tau' = R_1 C}$$

Le rapport des constantes de temps élimine C : $\frac{\tau'}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{\tau'}{\tau} - 1}$

AN : $R_1 / R_2 = 4{,}0$, avec les valeurs proposées les résistances sont du même ordre de grandeur.

63. Un autre aspect de la linéarité (*)

a) Se référer au calcul et au graphe de la question **24.** avec $u(0^+) = u(0^-) = 0$:

$$u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{et} \quad \tau = R\,C$$

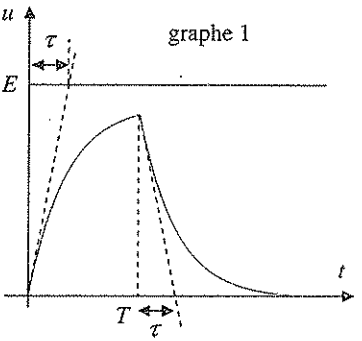
b) À partir de $t = T$ l'évolution est celle d'un dipôle RC en régime libre : $\tau \frac{du}{dt} + u = 0$ avec comme conditions initiales :

$u(T^+) = u(T^-) = E\left(1 - e^{-T/\tau}\right)$

La solution est $u(t) = \lambda\, e^{-t/\tau}$ et $\lambda\, e^{-T/\tau} = E\left(1 - e^{-T/\tau}\right)$, soit :

$$\boxed{u(t) = E\left(e^{T/\tau} - 1\right)e^{-t/\tau}}$$

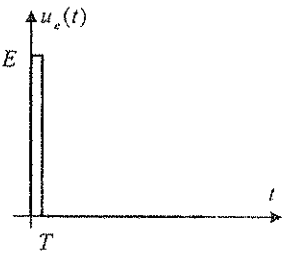
(voir le graphe 1 ci-contre)



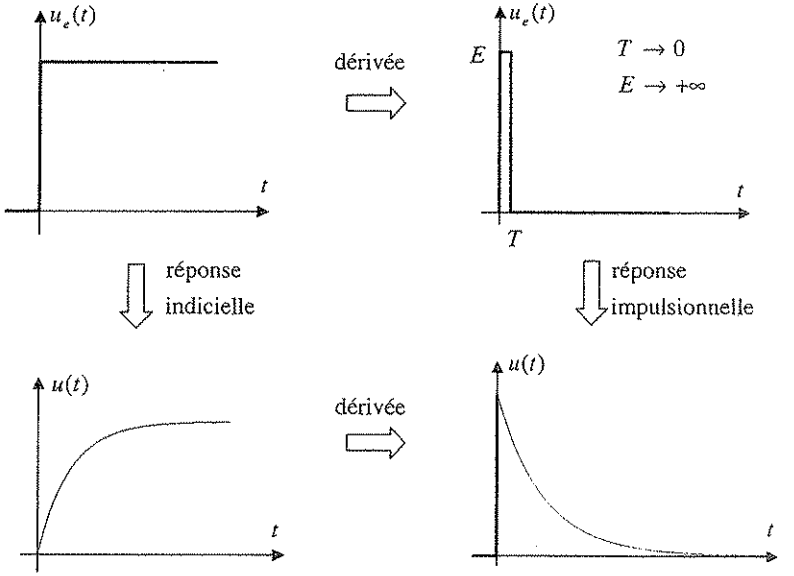
c) Seule la première phase de 0 à T est modifié. Quand T décroît, la diminution de $u(T)$, visible sur le graphe 1, est compensée par l'augmentation de E. De plus la croissance devient linéaire car pour $T \ll \tau$, u(t) s'identifie à la tangente à l'origine du graphe 1.

d) Le graphe 3 montre que la réponse $u(t)$ correspond alors à la dérivée de la réponse indicielle du a).

Il s'agit de la réponse à un signal $u_e(t)$, représenté ci-contre et qui n'est plus un échelon de tension, mais qui tend vers une impulsion, représentant par ailleurs la dérivée de l'échelon de tension.



Finalement :



On voit que la réponse à la dérivée est la dérivée de la réponse, ce qui illustre la linéarité du système.

64. Réponse à un échelon de tension d'un dipôle *RLC* parallèle

Les équations données par loi des mailles, loi des nœuds et relation entre variables, sont :

$$\begin{cases} E = R\,i + r\,i_3 & (1) \\ u = r\,i_3 & (2) \\ u = L\dfrac{di_1}{dt} & (3) \\ i = i_1 + i_2 + i_3 & (4) \\ i_2 = C\dfrac{du}{dt} & (5) \end{cases}$$

soit 5 équations pour 5 inconnues : i, i_1, i_2, i_3, u

a) La continuité de u donne : $u(0^+) = u(0^-) = 0$ et celle de i_1 : $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$

$(2) \Rightarrow i_3(0^+) = 0$; $(1) \Rightarrow i(0^+) = \dfrac{E}{R}$; $(4) \Rightarrow i_2(0^+) = \dfrac{E}{R}$

Au bout d'un temps suffisant (durée grande devant les diverses constantes de temps possibles : rC, RC, $\dfrac{L}{R}$, $\dfrac{L}{r}$ et $2\pi\sqrt{LC}$), un régime continu s'établit :

$$u_\infty = \text{cste} \Rightarrow i_{2\infty} = 0 \; ; \; i_{1\infty} = \text{cste} \Rightarrow u_\infty = 0 \Rightarrow i_{3\infty} = 0$$

(1) puis $(4) \Rightarrow i_\infty = \dfrac{E}{R} = i_{1\infty}$

b) Le plan de calcul est : remplacer i dans (1) avec (4), dériver l'équation obtenue et remplacer alors i_2 avec (5) en fonction de u et $\dfrac{di_1}{dt}$ avec (3) en fonction de u, remplacer alors u en fonction de i_3 avec (2). L'équation est :

$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{R + r}{RrC}\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC}\,i_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_3}{dt} + \omega_0^2\,i_3 = 0$$

c) L'écriture est normalisée, le discriminant de l'équation caractéristique est $4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4\,Q^2} - 1\right)$, le régime est pseudopériodique si $Q > \dfrac{1}{2}$, soit :

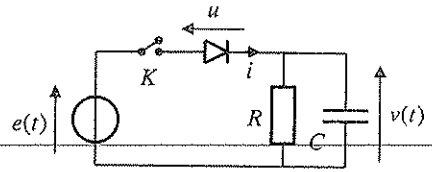
$$\frac{2Rr}{R + r} > \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

La solution est alors : $i_3(t) = A\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos\left(\omega\,t + \varphi\right)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

65. Détecteur de crêtes

Les équations sont :

$$\begin{cases} e = u + v \\ i = i_R + i_C = \dfrac{v}{R} + C\dfrac{dv}{dt} \\ i(u) \text{ de la diode} \end{cases}$$



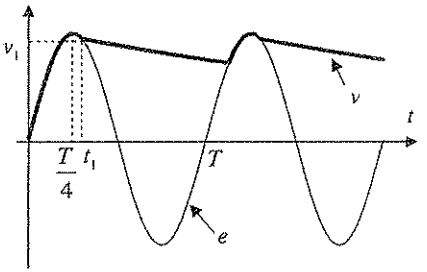
soit 3 équations dont une non linéaire et 3 inconnues.

a) L'hypothèse diode passante : $u = 0$ et $i \geq 0$, conduit à $\boxed{v = e}$ et $i = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = \frac{E}{R}\sin\omega t + CE\omega\cos\omega t$, la condition diode passante est donc vérifiée tant que le sinus et le cosinus sont positifs, soit de 0 à $\frac{T}{4}$ et jusqu'à t_1 tel que $\tan\omega t_1 = -RC\omega$. La date t_1 est proche de $\frac{T}{4}$ car $RC\omega \gg 1$.

L'hypothèse diode bloquée : $i = 0$ et $u < 0$ conduit à l'équation d'évolution du dipôle RC en régime libre, soit :

$$\boxed{v(t) = v_1\, e^{-(t-t_1)/RC}}$$

et avec $u = e - v$, la condition de validité est $e < v$.

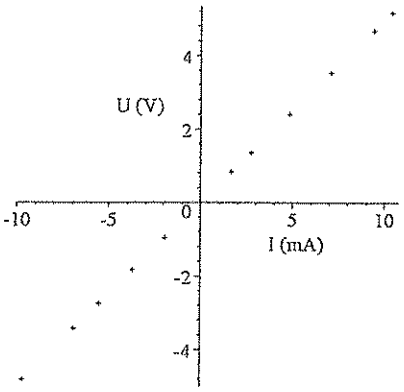


b) Pour des oscillations amorties en régime pseudopériodique, il faut $RC \gg T$ avec T la pseudopériode, mais aussi que la décroissance de $v(t)$ soit suffisante pour atteindre les maxima décroissants successifs. En considérant les courbes enveloppes en $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$, il faut $e^{-t/RC} < e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ soit $RC < \frac{2Q}{\omega_0}$. La condition est :

$$\boxed{T \ll RC < \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{QT_0}{\pi}}$$

Travaux pratiques

66. Les points de mesures portés sur un graphe $U(I)$ indiquent un alignement probable.



On estime les incertitudes.

- Sur U : lecture sur le voltmètre

$$\text{de } 2\sqrt{\left(\frac{0{,}09\times 5}{100\times\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2\times 0{,}001}{\sqrt{3}}\right)^2}\approx 0{,}006\,\text{V à 95\% pour 5 V,}$$

$$\text{à } 2\sqrt{\left(\frac{0{,}09\times 1}{100\times\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2\times 0{,}001}{\sqrt{3}}\right)^2}\approx 0{,}003\,\text{V à 95\% pour 1 V.}$$

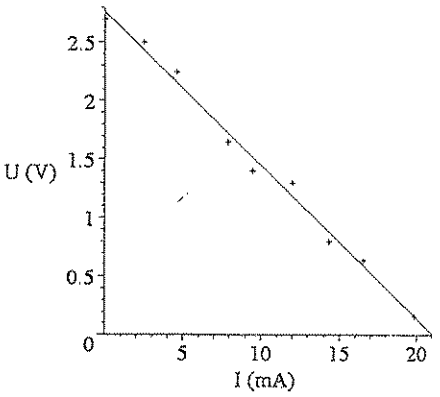
- Sur I : lecture sur le milliampèremètre

$$\text{de } 2\sqrt{\left(\frac{0{,}5\times 10}{100\times\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{3\times 0{,}01}{\sqrt{3}}\right)^2}\approx 0{,}07\,\text{mA à 95\% pour 10 mA,}$$

$$\text{à } 2\sqrt{\left(\frac{0{,}5\times 1}{100\times\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{3\times 0{,}01}{\sqrt{3}}\right)^2}\approx 0{,}04\,\text{mA à 95\% pour 1 mA.}$$

La résistance d'entrée du voltmètre rend négligeable l'intensité du courant qui le traverse , une correction de l'intensité I est inutile.
Les incertitudes justifient les écarts (très faibles) à la droite moyenne. Le comportement linéaire est expérimentalement avéré à 95%.
Une régression linéaire donne une pente $R = (498 \pm 3)\,\Omega$ et une ordonnée à l'origine 0,00 V. Le dipôle est appelé conducteur ohmique et obéit à la loi d'Ohm : $U_{AB} = R\,I_{AB}$

67. Les points de mesures portés sur un graphe $U(I)$ et placés aléatoirement de part et d'autre d'une droite moyenne, indiquent un alignement probable.



On estime les incertitudes.

- Sur U : mesure à l'oscilloscope (2 lectures, graduation 0,1 V pour 0,5 V/div., et appareil)

$2\sqrt{\left(\frac{3\times 2}{100\times\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{0,1}{\sqrt{12}}\times 2\right)^2}\approx 0,14\,\text{V}$ à 95% pour 2 V, soit une incertitude relative $\frac{0,14}{2}\approx 0,07$ de l'ordre de 7%.

- Sur I : lecture sur le milliampèremètre

$2\sqrt{\left(\frac{0,5\times 15}{100\times\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{3\times 0,01}{\sqrt{3}}\right)^2}\approx 0,09\,\text{mA}$ à 95% pour 15 mA, soit une incertitude relative $\frac{0,1}{15}\approx 0,007$ de l'ordre de 0,7%.

Noter que la valeur de R n'intervient pas dans la mesure.
Les incertitudes justifient les écarts (essentiellement sur U) à la droite moyenne. Le comportement linéaire est expérimentalement avéré à 95%.
Une régression linéaire donne une pente $-r=-131\,\Omega$ et une ordonnée à l'origine 2,76 V. Le dipôle se comporte comme une source linéaire, il obéit à la loi $U_{AB}=e-rI_{BA}$. On l'appelle modèle de Thévenin, e est la *f.e.m.* et r est appelée résistance interne.

68. La *f.e.m.* e de la source de tension correspond à la tension à vide aux bornes du dipôle, on peut la mesurer avec un voltmètre de grande résistance interne (il faut $R_{\text{voltmètre}}\gg r$ résistance interne de la source réelle) pour que la condition $I=0$ soit vérifiée lors de la mesure. C'est ici le cas car $R_{\text{voltmètre}}=10\,\text{M}\Omega$ et l'étude préalable donne r de l'ordre de 130 Ω. Il vient $e=U_0=2,743\,\text{V}$. Les erreurs de mesures ne concernent que le multimètre numérique :

$$2\sqrt{\left(\frac{0,09\times 2,743}{100\times\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2\times 0,001}{\sqrt{3}}\right)^2}\approx 0,004\,\text{V} \Rightarrow \boxed{e=(2,743\pm 0,004)\,\text{V}}$$

La résistance interne r se mesure par la méthode de la résistance adaptée. Si on place une résistance aux bornes d'une source de tension, il est facile de montrer (avec un diviseur de tension) que si cette résistance a la valeur r, la tension à ses bornes est $\frac{e}{2}$. En réglant la valeur de la résistance on a affiché sur le voltmètre la valeur $\frac{U_0}{2}\approx\frac{e}{2}$, la valeur mesurée de R_1 est une mesure de r : $r = 129,4\ \Omega$.

Les erreurs de mesure concernent ici la mesure de R_1 et la mesure $\frac{U_0}{2}$, dans la mesure de R_1, il faut prendre en compte l'ohmmètre et l'erreur de méthode lorsque l'on prend U_0 au lieu de e.

$$U_1(R_1)=2\sqrt{\left(\frac{0,5\times 129,4}{100\times\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2\times 0,1}{\sqrt{3}}\right)^2}\approx 0,78\,\Omega$$

De plus $\frac{U_0}{2}=e\frac{R_1}{R_1+r} \Rightarrow R_1=r\frac{U_0}{2e-U_0} \Rightarrow$

$$\frac{dR_1}{R_1}=\frac{dU_0}{U_0}-\frac{d(2e-U_0)}{2e-U_0}\approx 2\frac{dU_0}{U_0} \quad \text{soit} \quad \frac{U_2(R_1)}{R_1}=2\frac{U(U_0)}{U_0}\approx\frac{0,004}{2,74}\approx 0,14\%$$

Finalement : $U(R_1)=\sqrt{U_1^2(R_1)+U_2^2(R_1)}\approx\sqrt{0,78^2+0,19^2}\approx 0,8\,\Omega$

Il vient : $\boxed{R_1=(129,4\pm 0,8)\,\Omega}$ les valeurs trouvées sont cohérentes avec les valeurs déterminées par l'étude graphique.

69. L'oscilloscope analogique bi courbe permet la représentation temporelle de deux signaux. L'existence d'une seule base de temps nécessite un commutateur passant d'un signal à l'autre, ce qui conduit à deux modes de fonctionnement possibles en dual :

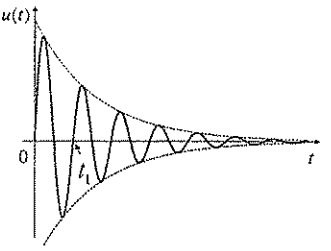
- mode alterné (bouton sorti) : le spot décrit un des signaux pendant un balayage entier de l'écran (un aller du spot), puis commute sur l'autre pendant le balayage suivant et ainsi de suite (conseillé aux fréquences habituelles et surtout en haute fréquence pour éviter le pointillé du mode découpé).
- mode découpé (bouton enfoncé) : le commutateur passe à très haute fréquence (de l'ordre de 500 kHz) d'un signal à l'autre ce qui permet à chaque balayage de dessiner simultanément les deux courbes en pointillé (conseillé en basse fréquence pour éviter le clignotement du mode alterné).

70. Une bobine de transformateur, dont l'inductance est typiquement de 10 mH, possède en série une petite résistance (celle de ses 500 tours de fil de cuivre) de l'ordre de quelques Ω. Un condensateur courant de capacité 0,1 µF possède en parallèle une grande résistance (celle de son diélectrique) de l'ordre de quelques centaines de kΩ.

71. Sur un oscilloscope analogique, on peut appliquer la « méthode des 90 % ». Le temps τ de charge d'un condensateur est lié à sa tension $u(t)$ par $u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. L'instant t_1 après la fermeture de l'interrupteur où $u(t_1) = 0{,}9E$ (E est la tension du générateur) est donné par $t_1 = \tau \ln 10$. La détermination expérimentale de t_1 sur l'écran d'un oscilloscope (le signal est à 90 % de sa valeur asymptotique) conduit à $\tau \approx t_1 / 2{,}3$.

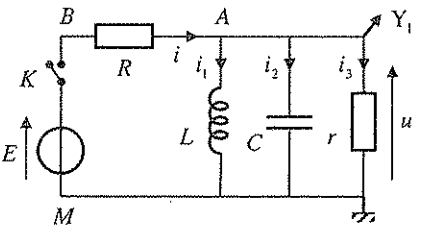
Sur un oscilloscope numérique, on affiche avec un curseur horizontal 63% de la valeur asymptotique, et on lit, grâce à un curseur vertical, à l'intersection avec la courbe $u(t)$ la durée τ. En effet $u(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63\,E$.

72. Le dipôle LC n'est pas parfait, il y a la résistance r de la bobine (plus accessoirement celle des fils) ; on observe alors bien des oscillations, mais leur amplitude n'est pas constante, mais assez rapidement amortie au cours du temps comme prévu à la question **30.** (par ailleurs le créneau n'est pas délivré par un générateur de tension parfait, mais qui présente une résistance interne de l'ordre de 50 Ω).



Pour visualiser entièrement la décroissance de ce régime pseudopériodique amorti, le créneau doit avoir une période suffisante (de l'ordre de plusieurs pseudopériodes t_1) pour ne pas interrompre la décroissance en le relançant prématurément, ce qui suppose une fréquence du créneau bien inférieure à la fréquence de l'oscillateur.

73. Le point commun entre l'entrée sur l'oscilloscope et le générateur doit être la masse, d'où le branchement. Le problème de la visualisation simultanée de u et Ri est qu'il faudrait placer la masse de l'oscilloscope en A, le point commun pour les entrées Y_I et Y_{II}, mais cette masse est commune avec celle du générateur (par l'intermédiaire de la prise de terre) qui se trouve en M. Tous les dipôles entre A et M seraient court-circuités. La seule possibilité est d'utiliser une sonde différentielle entre AB et l'entrée Y_{II} de l'oscilloscope, pour isoler physiquement le point A de la masse.



$$\text{La pseudopériode est } T = \frac{2\pi}{\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right)^{1/2}} = 0,63 \text{ ms}$$

a) Avec un oscilloscope analogique il faut répéter le phénomène un grand nombre de fois, pour pouvoir le voir. On envoie à l'entrée du montage un signal carré, correspondant ainsi à la répétition de plusieurs échelons de tension. Pour laisser

le temps au dipôle de revenir aux mêmes conditions initiales, il faut que la période du signal carré soit assez grande devant la pseudopériode. On peut prendre $T_{Carré} = 10\,T \approx 6$ ms.

b) Avec un oscilloscope numérique, on peut faire l'acquisition de la réponse à l'échelon de tension directement. Compte tenu de la rapidité du phénomène, un déclenchement manuel est impossible, il faut faire un déclenchement synchronisé.

74. Pour minimiser l'effet de la tension de seuil de la diode, il faut prendre $U_{max} \approx 10\text{ V} \gg V_{seuil} \approx 0{,}6\text{ V}$. Par ailleurs une diode suit mal pour des fréquences élevées, il convient de ne pas dépasser quelques centaines de Hz (une tension de 1 V à 10 kHz donne un résultat contre toute attente !).

Chapitre 5

Régime sinusoïdal forcé et filtrage

Les ordres de grandeur utiles

Ils sont regroupés au début du chapitre précédent, page 163.

Le cours d'abord

Régime variable

1. Rappeler les définitions d'un signal variable périodique, de sa valeur moyenne. Qu'appelle-t-on composante continue, composante alternative de ce signal ?

2. Définir la valeur efficace d'un signal périodique. Calculer la valeur efficace d'un signal alternatif sinusoïdal. Quelle est la relation entre valeur efficace, valeur moyenne et valeur efficace de la composante alternative d'un signal périodique quelconque?

Le régime sinusoïdal forcé (noté RSF)

3. Qu'appelle-t-on complexe associé à une grandeur sinusoïdale ? Revoir ensuite l'utilisation des complexes dans le chapitre **0**. Idem pour la représentation de Fresnel.

4. Qu'appelle-t-on régime sinusoïdal forcé ? Pourquoi les lois de Kirchhoff s'écrivent-elles avec les représentants complexes des grandeurs électriques en régime sinusoïdal forcé ?

5. Rappeler les expressions des impédances complexes, notées $\underline{Z}$, des dipôles linéaires en régime variable de type conducteur ohmique de résistance R, bobine parfaite d'inductance L et condensateur parfait de capacité C. Préciser dans chaque cas la relation entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$. Que représente arg $(\underline{Z})$? Quelle est sa valeur dans chacun des cas précédents ? Donner la représentation de Fresnel dans chaque cas.

6. Quel est l'intérêt de la notation complexe ? Que devient l'équation différentielle d'un réseau linéaire en RSF ? Quelles conséquences cela a-t-il sur la façon de résoudre ce réseau ?

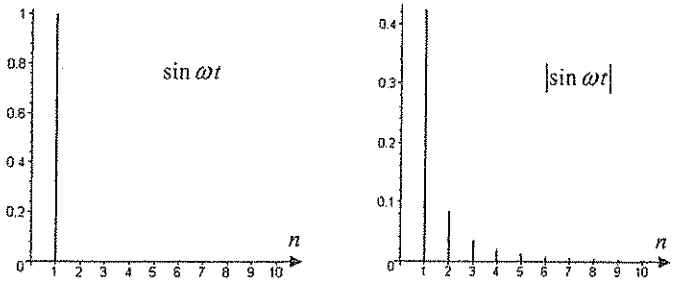
7. Un dipôle aux bornes duquel la tension est $u_{AB}(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ est traversé par un courant d'intensité $i_{AB}(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$. Quelle est la puissance moyenne P reçue par ce dipôle ? Change-t-elle suivant que le dipôle est actif ou passif ? Dépend-elle du signe de φ ? Quelle est la puissance moyenne reçue par un conducteur ohmique ? une bobine parfaite ? un condensateur parfait ?

Composition spectrale d'un signal périodique

8. Qu'est-ce que la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique ? Qu'appelle-t-on spectre des fréquences ?

9. Quelle est la relation entre la valeur efficace de la composante alternative du signal périodique $s(t)$ et les valeurs efficaces de ses harmoniques ?

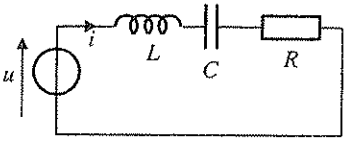
10. Commenter les spectres des fréquences, donnés ci-dessous, des signaux $s_1(t) = S_m \sin\omega t$ et $s_2(t) = |S_m \sin\omega t|$.



Le dipôle RLC série en régime sinusoïdal forcé

Les notations sont communes aux questions **11.** à **15.**.

11. Un dipôle *RLC* série est alimenté par un générateur de tension de pulsation ω et de valeur efficace U =cste : $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ Quelle tension permet d'étudier la réponse en intensité en RSF : $i = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$?



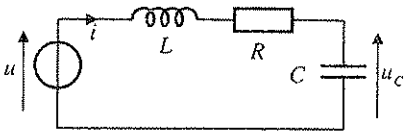
12. Pourquoi parle-t-on de réponse fréquentielle ? Donner l'allure de $I(\omega)$ et $\varphi(\omega)$. Définir la phénomène de résonance d'intensité ; pour quelle pulsation se produit-il ? Que vaut $|\underline{Z}|$ pour cette valeur de ω ? Commenter.

13. Définir la bande passante $\Delta\omega$, puis le facteur de qualité Q du dipôle *RLC* série.

14. Que représente, pour les grandeurs u et i, $\arg \underline{Z}$? Expliquer qualitativement sa valeur à la résonance d'intensité. Que sait-on des variations de φ dans la bande passante, et sur l'ensemble du spectre de fréquence ? Retrouver le signe de φ avec la construction de Fresnel.

15. Écrire la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_R}{\underline{u}} = \dfrac{\underline{U}_R}{\underline{U}}$. La mettre sous forme canonique en utilisant uniquement la pulsation réduite $x = \omega / \omega_0$, avec ω_0 la pulsation propre du dipôle RLC, et le facteur de qualité Q. Décrire les propriétés du filtre ainsi défini.

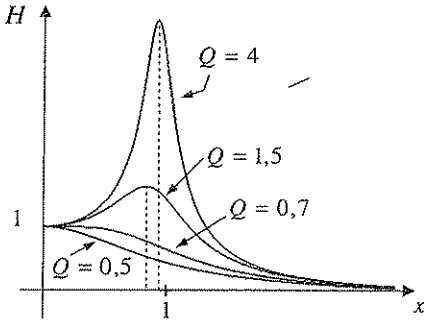
16. Considérer à présent la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et écrire la fonction de transfert :

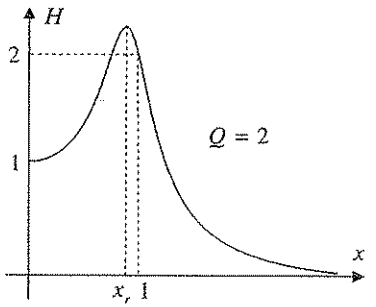


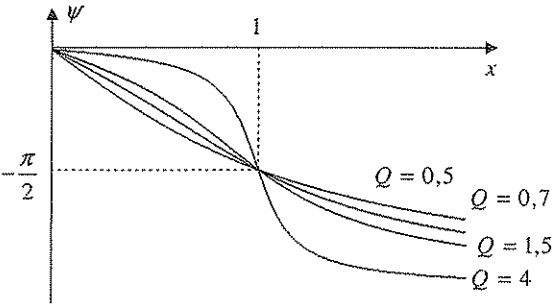
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_C}{\underline{u}} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = H(\omega)\, e^{j\psi(\omega)}$$

La mettre sous forme canonique en utilisant uniquement la pulsation réduite $x = \omega / \omega_0$, avec ω_0 la pulsation propre du dipôle RLC, et le facteur de qualité Q. Que vaut ψ en fonction de φ défini à la question **12.** ? Que représente-t-il pour les grandeurs $u_C(t)$ et $u(t)$?

17. (suite de la question **16.**) On donne ci-dessous le graphe de $H(x)$ pour diverses valeurs de Q, un graphe plus détaillé pour $Q = 2$ et le graphe de $\psi(x)$. Justifier que $\psi(x = 1) = -\dfrac{\pi}{2}$ pour toute valeur de Q, que la résonance se produise pour $x = 1$ quand Q est très grand. Pour quelles valeurs de Q y a-t-il une résonance ? Et si elle a lieu, pour quelle pulsation ? Quelle est la limite de ψ pour $x \to \infty$?







18. (suite de la question **17.**) Étudier la fonction $H(x)$; pour quelles valeurs de Q se produit-il une résonance ? Pourquoi l'appelle-t-on résonance de charge ? Exprimer la pulsation ω_r de résonance de charge (lorsqu'elle existe) en fonction de ω_0 et Q. Que vaut la tension aux bornes du condensateur à la pulsation ω_0 ? Que représente alors le facteur de qualité Q dans le cas $Q > 1$?

Filtres

19. Définir et orienter un quadripôle. Préciser la signification des tensions d'entrée et de sortie. Quelles sont les conditions particulières d'étude d'un quadripôle et pourquoi ?

20. On peut représenter graphiquement une fonction de transfert à l'aide d'un diagramme de Bode. De quoi est-il constitué ? Quel est son intérêt ?

21. Filtre fondamental du premier ordre. Donner sa définition (fonction de transfert), un exemple simple, son comportement en haute fréquence (HF) et en basse fréquence (BF). Faire l'étude de $H(x) = \left|\underline{H}(jx)\right|$, x pulsation réduite, et en déduire le type de ce filtre. Donner l'allure de $H(x)$ et $\arg\left(\underline{H}(jx)\right)$ en fonction de x. Préciser les pulsations de coupure. Tracer le diagramme asymptotique de Bode en amplitude.

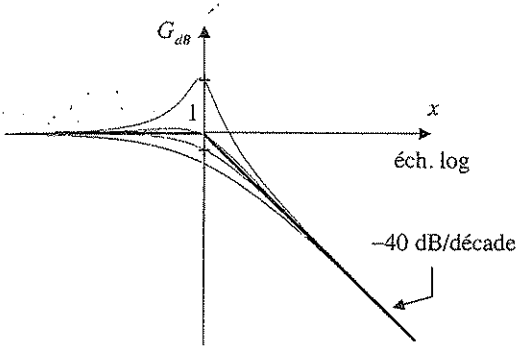
22. Filtre passe-haut du premier ordre. Donner sa définition (fonction de transfert), un exemple simple, son comportement en haute fréquence (HF) et en basse fréquence (BF). Faire l'étude de $H(x) = \left|\underline{H}(jx)\right|$, x pulsation réduite, et en déduire le type de ce filtre. Donner l'allure de $H(x)$ et $\arg\left(\underline{H}(jx)\right)$ en fonction de x. Préciser les pulsations de coupure. Tracer le diagramme asymptotique de Bode en amplitude.

23. Définir un filtre du second ordre, justifier l'écriture canonique du dénominateur :

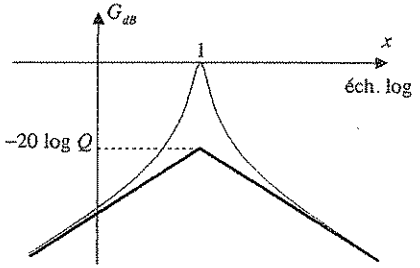
$$1 - x^2 + j\frac{x}{Q}$$

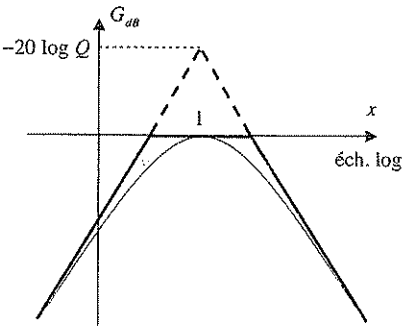
24. Filtre fondamental du second ordre. Donner sa définition (fonction de transfert), un exemple simple. En vous aidant de l'étude de la résonance de charge dans un *RLC*

série (questions **16.** à **18.**), donner le comportement en fréquence d'un filtre fondamental du second ordre ainsi que le graphe $H(x) = \left|\underline{H}(jx)\right|$, x pulsation réduite. Distinguer suivant les valeurs de Q la nature du filtre. Donner l'allure de $\arg\left(\underline{H}(jx)\right)$ en fonction de x. Justifier le diagramme de Bode en amplitude donné ci-dessous pour diverses valeurs de Q $(4, 1, 1/\sqrt{2}$ et $0,5)$, le diagramme asymptotique est en trait épais et les diagrammes réels en trait fin :



25. Filtre passe-bande du second ordre. Donner sa définition (fonction de transfert), un exemple simple, En vous aidant de l'étude de la résonance d'intensité dans un *RLC* série (questions **11.** à **15.**), donner le comportement en fréquence d'un filtre passe-bande du second ordre ainsi que le graphe $H(x) = \left|\underline{H}(jx)\right|$, x pulsation réduite. Donner l'allure de $\arg\left(\underline{H}(jx)\right)$ en fonction de x. Justifier le diagramme de Bode en amplitude donné ci-dessous pour $Q > 1$ (graphe de gauche) et pour $Q < 1$ (graphe de droite), le diagramme asymptotique est en trait épais et le diagramme réel en trait fin :





26. Donner la modélisation d'un amplificateur linéaire. Qu'appelle-t-on amplificateur idéal ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Ne pas confondre signal alternatif (sa valeur moyenne est nulle) et signal sinusoïdal qui est un signal alternatif particulier (de forme sinusoïdale).

☐ Un signal périodique quelconque, non sinusoïdal, a une période et une fréquence (l'inverse de la période), mais on ne peut pas lui associer de pulsation (celle-ci concernerait le fondamental de sa décomposition en série de Fourier).

☐ Parler d'avance de phase ou de retard de phase n'a de sens que pour des signaux sinusoïdaux synchrones (de même pulsation). Éviter le terme « déphasage » auquel tout le monde ne donne pas le même sens et préférer « avance de phase » ou « retard de phase » sans ambiguïté. Le déphasage correspond, d'après les normes AFNOR, au retard de phase.

☐ En régime sinusoïdal forcé (en particulier avec un terme dissipatif), il faut automatiquement passer en notation complexe, même si l'énoncé n'invite pas explicitement à le faire. Souligner les grandeurs complexes afin de ne pas les confondre avec les grandeurs réelles associées.

☐ Utiliser le moyen mnémotechnique : l'avance de phase de « $u_1(t)$ sur $u_2(t)$ » est égale à l'argument de « $\underline{u}_1$ sur $\underline{u}_2$ », soit $\arg\left(\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2}\right)$. Revoir la partie Nombres complexes au chapitre **0**.

☐ Pour traduire par le calcul une question physique du type « À quelle condition sur ω, $u(t)$ et $i(t)$ sont-ils en phase ? », il suffit d'écrire $\arg\frac{\underline{u}}{\underline{i}}=0$ ou $\frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ réel positif.
Et pour la question « À quelle condition sur ω, $u(t)$ et $i(t)$ sont-ils en opposition de phase ? », il suffit d'écrire $\arg\frac{\underline{u}}{\underline{i}}=\pi$ ou $\frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ réel négatif.

☐ Dans les applications numériques, ne pas confondre la pulsation ω (en rad.s^{-1}) et la fréquence f (en Hz) et bien penser au facteur 2π de la relation $\omega=2\pi f$.

☐ Se méfier des significations différentes des flèches de tension à l'entrée et à la sortie d'un quadripôle, voir la question **19.**.

☐ L'expression pour le facteur de qualité $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$ n'est valable que pour un *RLC* série. Dans le cas d'un second ordre différent, il faut établir l'expression de Q grâce à l'écriture canonique du dénominateur de la fonction de transfert.

☐ Dans un diagramme de Bode, la position de l'axe des ordonnées (gain en dB par exemple) n'a aucune signification : l'axe des abscisses est en échelle logarithmique, la fréquence nulle est rejetée à $-\infty$. Éviter de placer cet axe des ordonnées au bord de la feuille de papier semi-log.

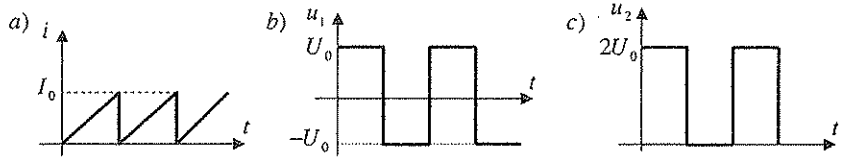
☐ Le terme amplificateur est plutôt utilisé pour les quadripôles actifs qui traitent de la même façon « toutes » les fréquences du signal d'entrée (bande passante très large) et donc amplifient sans déformer le signal : cas d'une fonction de transfert constante. Le terme filtre s'utilise pour les quadripôles, actifs ou passifs, qui sélectionnent certaines fréquences. On peut aussi qualifier le quadripôle par la façon dont il transforme le signal d'entrée : intégrateur, dérivateur.

☐ Dans les problèmes et les exercices, on utilise souvent les passe-bas comme « moyenneur ». Un passe-bas à fréquence de coupure haute bien choisie permet de ne récupérer en sortie que la composante continue du signal d'entrée et donc sa valeur moyenne.

Applications directes du cours

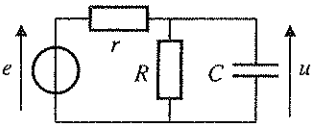
■ Régime variable

27. Quelle est la valeur moyenne du signal représenté en a) ? Quelles sont les valeurs moyenne et efficace des signaux représentés en b) et c) ?



■ Le régime sinusoïdal forcé (noté RSF)

28. Dans le réseau ci-contre, $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$, exprimer $u(t)$ en RSF.



29. Soient les associations :

a) dipôle RC série ;

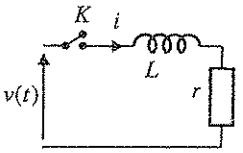
b) dipôle RL parallèle ;

c) dipôle R en série avec un dipôle LC parallèle ;

* Calculer les impédances complexes équivalentes de chaque association. Dans chaque cas exprimer le module et l'argument de l'impédance complexe.
* Que deviennent ces impédances lorsque ω tend vers 0 puis vers l'infini ? Quelle est la signification physique de ces limites pour ω ?
* Pouvait-on prévoir sans calculs le comportement de chaque impédance équivalente en haute et basse fréquence ?
* Calculer numériquement module et argument de chaque impédance équivalente avec : $f = 50$ Hz ; $R = 100\ \Omega$; $L = 100$ mH ; $C = 1{,}0\ \mu$F

30. Établissement du courant dans un dipôle *rL*

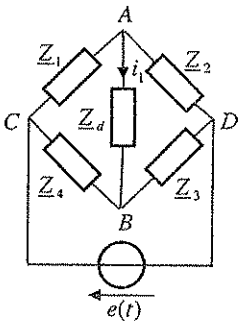
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K (donc $i = 0$ pour $t < 0$) ; la bobine résistive est alimentée par la tension $v(t) = V\sqrt{2}\cos\omega t$.



Chercher la solution du régime permanent sous la forme $i_p(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$ en donnant I et φ, puis donner l'expression $i(t)$ en régime transitoire en notant $\tau = L/r$; commentaire.

31. Pont de Maxwell

Dans le circuit ci-contre de type pont, la source d'alimentation a une *f.e.m.* $e(t)$ fonction sinusoïdale du temps, l'impédance $\underline{Z}_d$ est l'impédance interne d'un détecteur de courant (microampèremètre). Le pont est dit « équilibré » en RSF quand l'intensité du courant dans le microampèremètre est nulle.



Si le pont est équilibré, que vaut la d.d.p. $\underline{V}_A - \underline{V}_B$?

Établir une condition nécessaire sur les impédances $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ et $\underline{Z}_4$ pour que le pont soit équilibré.

Cette condition est-elle suffisante ?

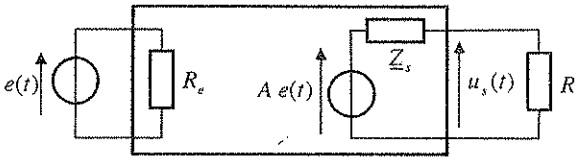
Les ponts en RSF permettaient notamment des mesures précises d'impédances.

Exemple : Dans le pont de Maxwell, $\underline{Z}_1$ est l'impédance d'une bobine réelle, $\underline{Z}_3$ l'impédance d'un condensateur de capacité C_3 en parallèle avec une résistance R_3, $\underline{Z}_2 = R_2$ une résistance, et $\underline{Z}_4 = R_4$ une résistance.

Déterminer, à l'équilibre, la résistance R_1 et l'inductance L_1 de la bobine en fonction de R_2, R_3, R_4 et C_3. Décrire un protocole expérimental de mesure de R_1 et L_1.

32. Étude expérimentale d'un amplificateur

On modélise un quadripôle amplificateur comme ci-dessous, avec R_e infinie.



Le gain A est réel. On applique à l'entrée $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$, avec $E = 1{,}0$ mV, et on mesure pour deux valeurs de R la tension efficace de sortie. On obtient :

Pour $R = 16{,}0\ \Omega$, $U_s = 0{,}67$ V

Pour $R = 8{,}0\ \Omega$, $U_s = 0{,}50$ V

a) On constate lors des mesures que les signaux de sortie gardent la même valeur efficace quelle que soit la fréquence. Que peut-on en déduire pour $\underline{Z}_s$?

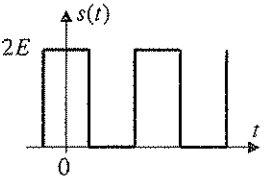
b) Déterminer le gain A et l'impédance de sortie $\underline{Z}_s$.

c) L'amplificateur étant alimenté par $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$, comment choisir la résistance R pour qu'elle reçoive une puissance maximale à E = cste ?

Composition spectrale d'un signal périodique

33. $s(t) = s_0 + \dfrac{4E}{\pi}\left(\cos(\omega_1 t) - \dfrac{1}{3}\cos(3\omega_1 t) + \dfrac{1}{5}\cos(5\omega_1 t) - \dfrac{1}{7}\cos(7\omega_1 t) + ...\right)$

est la décomposition en série de Fourier du signal ci-contre :



T étant la période : $f_c = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{1}{T}$. Représenter le spectre des fréquences, à l'échelle, jusqu'au rang 10.

Pourquoi la décomposition ne comporte-telle que des termes en cosinus ?

Généraliser pour la décomposition spectrale d'un signal $s(t)$ suivant que la composante alternative $s_a(t) = s(t) - s_0$ est paire ou impaire.

Le dipôle RLC série en régime sinusoïdal forcé

34. Montrer, à partir de l'impédance équivalente, que si la bande passante pour la tension aux bornes de R d'un dipôle RLC série, en RSF, est l'intervalle $[f_1, f_2]$, alors la fréquence de résonance f_0 est : $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$.

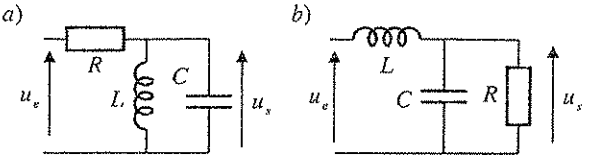
35. Un dipôle RLC série est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de fréquence f variable et d'amplitude $E_m = 100$ V. La valeur efficace de l'intensité

est maximale ($I_{maxi} = 0{,}71$ A) pour une fréquence f_0. Pour les fréquences $f_1 = 7{,}3$ kHz et $f_2 = 13{,}6$ kHz, elle vaut 0,50 A.

Déterminer les valeurs numériques approchées de la fréquence de résonance d'intensité du circuit, du facteur de qualité Q, de la résistance R, de l'inductance L, de la capacité C, et des valeurs efficaces des tensions u_C et u_L à la résonance d'intensité.

Filtres

36. Pour les deux filtres suivants, établir la fonction de transfert complexe en tension et l'identifier en la mettant sous forme canonique.

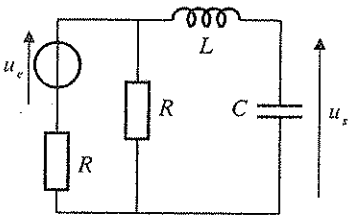


Dans le cas b), étudier le cas $R = \sqrt{\dfrac{L}{2C}}$

37. Un filtre a pour fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{-2}{1 + j\omega\tau}$, préciser :

a) la nature du filtre
b) le gain maximal en dB
c) la (ou les) fréquence(s) de coupure
d) $u_s(t)$ est-elle en avance ou en retard sur $u_e(t)$?

38. Dans le circuit ci-contre, $\underline{H}$ est le rapport $\underline{U}_s / \underline{U}_e$, avec $R = \sqrt{\dfrac{L}{2C}}$ il s'écrit :



$$\underline{H} = \frac{N}{1 - x^2 + \dfrac{jx}{Q}}$$

Trouver les propositions exactes :

a) $Q = 1/\sqrt{2}$ et $u_c(t)$ passe par un maximum.

b) $Q = 1/\sqrt{2}$ et $u_c(t)$ ne passe pas par un maximum.

c) $Q = 1/2\sqrt{2}$ et $u_c(t)$ ne passe pas par un maximum.

d) $Q = \sqrt{2}$ et $u_c(t)$ passe par un maximum.

39. Un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{\left(1 + j\omega / \omega_0\right)^2}$.

Trouver les propositions exactes :

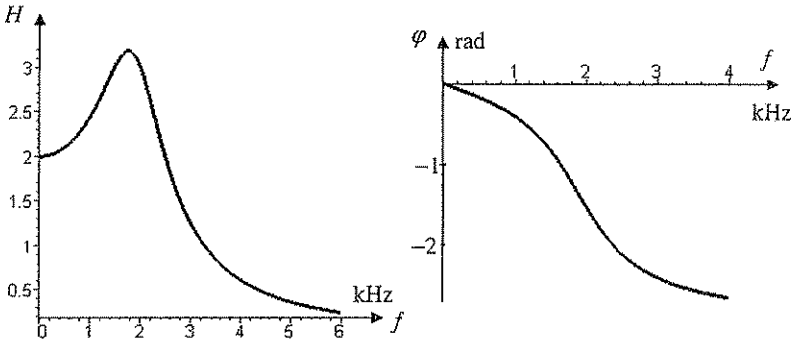
a) Le filtre est un filtre de Butterworth d'ordre 2 (filtre fondamental du second ordre de coefficient $Q = 1/\sqrt{2}$).

b) Le filtre est un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_0.

c) Le filtre est un filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_0.

d) Le filtre est un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_0\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

40. Les variations avec la fréquence du module et de l'argument de la fonction de transfert d'un filtre fondamental du second ordre sont représentées ci-dessous, à l'échelle. Déterminer graphiquement : le transfert statique, la fréquence de résonance, la bande passante à -3dB, la fréquence propre et la valeur de Q.



41. Le même signal $s(t)$ périodique, dont le spectre des fréquences est donné figure 1, est envoyé à l'entrée de trois quadripôles différents. On procède à l'analyse spectrale du signal de sortie pour chacun. Quelles caractéristiques de chaque quadripôle peut-on en déduire ?

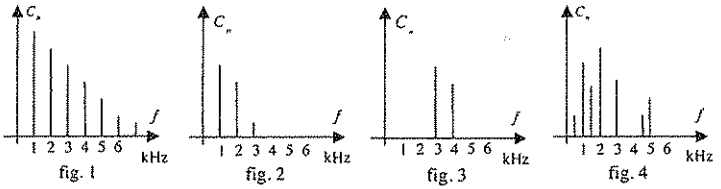


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

42. On applique à l'entrée d'un filtre un signal $u(t) = u_0 + U_m \cos\left(\omega t\right)$, où u_0 est une constante. On donne $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2{,}0$ kHz, qu'obtient-on, de façon approchée, en sortie pour les filtres suivants :

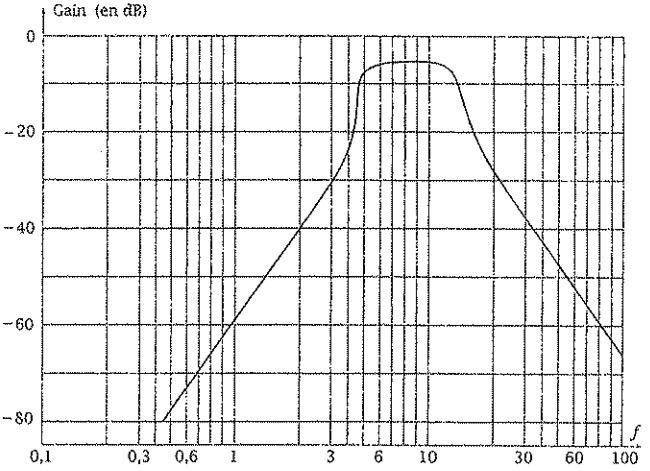
a) Un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure haute $f_h = 1{,}0$ kHz ?

b) Un filtre passe-bande du second ordre de fréquence de résonance $f_0 = 2{,}5$ kHz et de facteur de qualité $Q = 2$?

c) Un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure basse $f_b = 3{,}0$ kHz ?

Mêmes questions si le signal appliqué à l'entrée est un signal carré alternatif de période $T' = 1{,}0.10^{-3}$ s (voir la question **33.**).

43. Le diagramme de Bode en amplitude d'un filtre est représenté ci-dessous, les fréquences sont en kHz, l'échelle est logarithmique :



a) Quel est le gain maximal ?
b) Quelle est la bande passante à –3 dB ?
c) Quelles sont les pentes des asymptotes ?
d) On envoie à l'entrée du filtre un signal carré alternatif de fréquence 3 kHz, qu'obtient-on approximativement en sortie ? Ce signal de sortie peut-il être considéré comme harmonique ?

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

44. Lors de l'étude du comportement en haute ou basse fréquence d'une impédance, on est parfois conduit à négliger un imaginaire pur devant un réel, ou l'inverse. Justifier la validité de ce calcul.

45. Rechercher les ordres de grandeur des puissances mises en jeu dans un téléphone portable, un néon, une ampoule, un téléviseur, un four à micro-ondes, un fer à

repasser, une machine à laver,..., une centrale électrique. Sachant que le prix du kWh est d'environ 0,10 €TTC, estimer le coût horaire d'une télévision en marche.

46. Comment avec un dipôle *RLC* alimenté avec un générateur sinusoïdal de 12 V, peut-on récupérer 60 V aux bornes du condensateur (ou de l'inductance) ? Expliquer en quoi ce résultat n'est pas en contradiction avec la loi d'Ohm.

47. Sur quel principe fonctionne la réception d'un poste radio ?

48. Quel est le principe d'un système antivol fréquent dans les grands magasins et qui, s'il n'est pas désactivé, déclenche une alarme lors du passage par un portillon ?

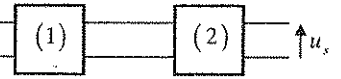
49. Un synthétiseur est un appareil produisant des sons à l'aide de circuits électriques. Quel type de circuit faut-il choisir pour régler la hauteur, le timbre et l'intensité du son ?

50. Quels sont les principes de la compression MP3 utilisée pour que les fichiers informatiques de musique soient jusqu'à dix fois moins volumineux que les fichiers audio natifs (au format WAV par exemple) sans perte notable de qualité ? (penser à utiliser un raisonnement spectral plutôt que temporel).

51. Lors de l'étude de la résonance d'intensité, la bande passante est définie en considérant une diminution de la réponse correspondant en amplitude à $I_{maxi}/\sqrt{2}$. Pourquoi ne pas avoir choisi plus simplement $I_{maxi}/2$? À quel affaiblissement en décibel cela correspond-il ?

52. Soit un filtre fondamental du second ordre à coefficient $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, mais dont la résonance est peu marquée (Q est faible), comment savoir si son comportement est celui d'un passe-bas ou d'un passe-bande ?

53. Soient $\underline{H}_1(j\omega)$ et $\underline{H}_2(j\omega)$ les fonctions de transfert complexes en tension, de deux quadripôles, calculées dans les conditions habituelles (voir la question **19.**). On réalise le montage en cascade ci-contre.



Dans quelles conditions a-t-on $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \underline{H}_1\,\underline{H}_2$? Pour répondre utiliser la modélisation linéaire des amplificateurs vue à la question **26.** ; les conditions portent sur les résistances d'entrée et de sortie.

54. Comment obtenir de façon simple le diagramme de Bode asymptotique en amplitude correspondant à une fonction de transfert écrite sous forme factorisée, avec des termes du premier degré en $j\omega$? Prendre par exemple :

$$\frac{1 + j\,\omega/\omega_1}{(1 + j\,\omega/\omega_2)(1 + j\,\omega/\omega_3)}.$$

55. Quelle est la relation entre les pentes des asymptotes, dans un diagramme de Bode asymptotique en amplitude d'un quadripôle, et l'action de ce quadripôle sur la tension d'entrée $u_e(t)$.

56. Quel lien formel existe-t-il entre le dénominateur de la fonction de transfert complexe en tension et l'équation différentielle régissant l'évolution en régime libre ? Illustrer avec par exemple le filtre fondamental du premier ordre.

57. Fonction retard

On appelle fonction retard une fonction qui, à tout signal d'entrée $e(t)$, associe un signal de sortie $s(t)$ égal à $e(t-\tau)$ quel que soit t, où τ constant est le retard (Figure 1).

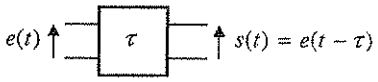


Figure 1

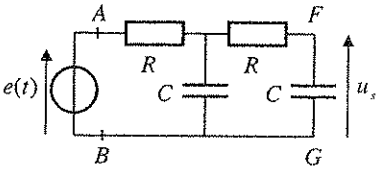
Pour une entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, exprimer $s(t)$, et donner la fonction de transfert complexe : $\underline{F} = \underline{S}/\underline{E}$. Que vaut le module de $\underline{F}$? Tracer l'argument de $\underline{F}$ en fonction de la fréquence en échelle linéaire.

58. Quelle différence y a-t-il, dans la composition spectrale d'un signal, après traitement par un quadripôle linéaire ou par un quadripôle non linéaire ? Citer des exemples.

Exercices

59. Filtre du second ordre

Un générateur de tension sinusoïdal, de force électromotrice $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et de résistance interne négligeable, alimente un réseau constitué de deux condensateurs identiques de capacité C et de deux résistors identiques de résistance R connectés suivant le schéma de la figure ci-contre.



On considère le quadripôle de bornes d'entrée A et B et de bornes de sortie F et G :

- Préciser les conditions d'étude d'un quadripôle.
- Prévoir sans calcul le comportement du quadripôle en haute et basse fréquence.
- Établir, en fonction de R, C et ω la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U_s}}{\underline{E}}$.
- Montrer que $\underline{H}$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{H_0}{1 - x^2 + jx/Q}$, avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, exprimer H_0, ω_0 et Q.
- Que représente H_0 ?
- Faire l'étude de $H(x)$ et tracer le graphe de $H(\omega)$. Retrouve-t-on le comportement prévu au début ?

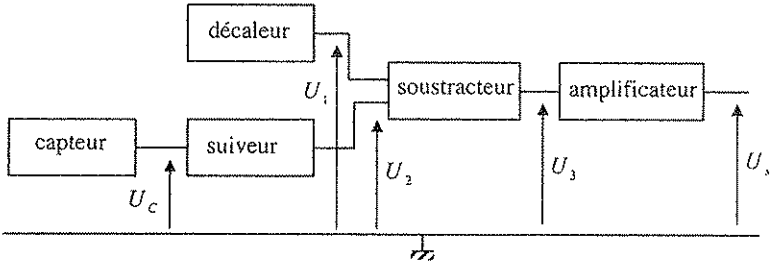
60. Réalisation d'un teslamètre

Un champ magnétique se mesure en tesla (symbole T). Le capteur est appelé sonde à effet Hall ; le constructeur donne la relation exprimant la tension de sortie U_C du capteur en fonction de la valeur du champ magnétique B :

$U_C = V_{cc}/2 + \lambda B$ avec $\lambda = 13\ \text{V.T}^{-1}$ et V_{cc} une tension positive constante.

On place une chaîne électronique en sortie de capteur afin d'obtenir une tension de sortie U_s proportionnelle à B : $U_s = K B$ avec $K = 1{,}0.10^2\ \text{V.T}^{-1}$

La chaîne est la suivante :



Les fonctions réalisées par les divers éléments sont :

suiveur : amplificateur idéal délivrant $u_s(t) = u_e(t)$

soustracteur : système à deux entrées e_1 et e_2 délivrant

$$u_s(t) = \frac{R_2}{R_1}\left(e_2(t) - e_1(t)\right)$$

amplificateur : quadripôle délivrant $u_s(t) = \left(1 + \frac{R_4}{R_5}\right) u_e(t)$

décaleur : quadripôle délivrant $u_s(t) = \left(\frac{R_6 - R_5}{R_6 + R_5}\right) V_{cc}$

Les R_k sont les résistances de résistors utilisés par les divers éléments.

a) Quel est l'intérêt du montage suiveur ?

b) Quel est le rôle du décaleur ?

c) On désire avoir $U_3 = U_2 - U_1$ puis $U_s = K B$. En déduire les valeurs des rapports $\frac{R_1}{R_2}$, $\frac{R_3}{R_4}$ et $\frac{R_5}{R_6}$.

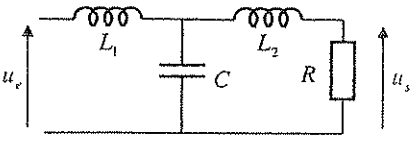
61. Étude et réalisation d'un filtre passe-bas

On veut réaliser un filtre de Butterworth d'ordre 3 défini par le module de sa fonction de transfert en tension : $H = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (x)^6}}$

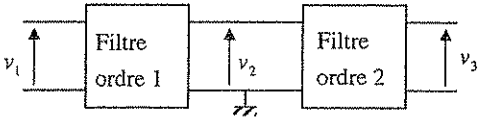
a) Montrer qu'une fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}$ répond à la question.

b) Étudier et représenter le diagramme de Bode asymptotique en amplitude de cette fonction de transfert.

c) On considère le quadripôle ci-contre :
Établir la fonction de transfert complexe en tension.
Calculer, en fonction de R et ω_0, les valeurs de L_1, L_2 et C pour que ce filtre soit un filtre de Butterworth d'ordre 3.



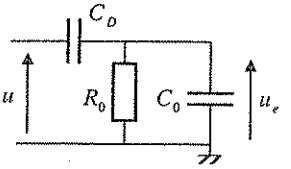
d) Justifier que l'on puisse réaliser, de façon théorique, le filtre de Butterworth d'ordre 3 en associant en cascade un filtre fondamental d'ordre 1 et un filtre fondamental d'ordre 2. Préciser la valeur du facteur de qualité du filtre d'ordre 2.



62. Couplage AC et DC d'une entrée d'oscilloscope

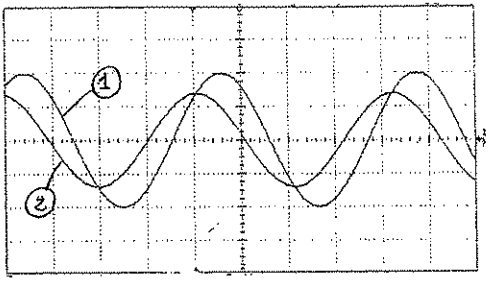
Lorsque l'on applique une tension $u(t)$ à l'entrée d'un oscilloscope, celle-ci est envoyée à l'entrée d'un amplificateur dont on peut considérer l'impédance d'entrée comme constituée d'une association parallèle conducteur ohmique de résistance R_0 et condensateur de capacité C_0. On prendra $R_0 = 1{,}0$ MΩ et $C_0 = 13$ pF.

De plus suivant le mode de couplage, $u(t)$ est envoyée directement à l'entrée de l'amplificateur vertical (mode DC) ou appliquée préalablement à un condensateur de capacité C_D (mode AC). En mode AC l'impédance d'entrée se présente donc sous la forme ci-contre :



a) Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U_e}}{\underline{U}}$ correspondant au couplage AC. Simplifier $\underline{H}$ en considérant $C_D \gg C_0$. Quelle est la nature du filtre ? Que vaut la tension $u'_e(t)$ appliquée à l'entrée de l'amplificateur en couplage DC ?

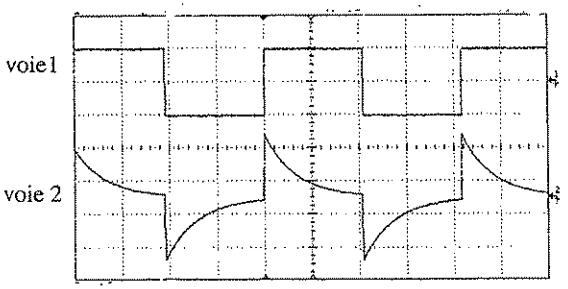
b) Dans le but de déterminer expérimentalement la fréquence de coupure à −3 dB du filtre constitué par le couplage AC et la valeur de C_D, on réalise la manipulation suivante : on applique la même tension sinusoïdale $u(t)$ sur l'entrée 1 (couplage DC) et sur l'entrée 2 (couplage AC) et on fait varier la fréquence de $u(t)$ jusqu'à l'obtention de l'oscillogramme ci-dessous (celui-ci a été obtenu sur un oscilloscope numérique donc à mémoire).



Les amplifications verticales sont de 1 V/div. ; la base de temps de 20 ms/div. Les voies 1 et 2 sont indiquées sur les courbes.

Mesurer $\frac{U_2}{U_1}$ et $\varphi_{2/1}$, que peut-on en conclure sur la valeur de la fréquence de $u(t)$ à cet instant ? En déduire la valeur C_D, et vérifier l'hypothèse $C_D \gg C_0$.

c) Le choix du couplage d'entrée AC peut donc perturber l'observation des signaux basse fréquence. L'oscillogramme ci-dessous a été obtenu avec un signal carré envoyé sur la voie 1 (couplage DC) et simultanément sur la voie 2 (couplage AC) :



Les amplifications verticales sont de 2 V/div. ; la base de temps de 100 ms/div. Expliquer comment on peut interpréter la déformation observée avec le couplage AC en terme de "dérivation" du signal carré $u(t)$, d'abord à partir de l'oscillogramme, puis de façon théorique à partir de la fonction de transfert obtenue au a).

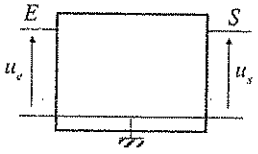
Travaux pratiques

63. Quel type de grandeur mesure un multimètre numérique en régime variable, s'il est en mode DC ? en mode AC ? en mode AC+DC ?
Comment faut-il placer l'appareil dans un circuit électrique, s'il fonctionne en voltmètre ? en ampèremètre ?

64. Sur un oscilloscope à deux voies on visualise deux tensions sinusoïdales de même fréquence mais déphasées. Comment savoir laquelle est en avance ? Comment procéder pour mesurer un déphasage avec un oscilloscope analogique ?

65. Dans l'étude d'un dipôle *RLC* , le GBF sinusoïdal est branché sur la voie 1 et la tension aux bornes de R sur la voie 2 d'un oscilloscope. En faisant varier la fréquence, la tension crête à crête du générateur apparaît en gros constante, sauf parfois autour de la résonance d'intensité où elle peut diminuer légèrement, pourquoi ? Comment procéder alors pour déterminer correctement la bande passante ?

66. Un filtre passif fonctionne en sortie ouverte (courant de sortie nul) en régime sinusoïdal.



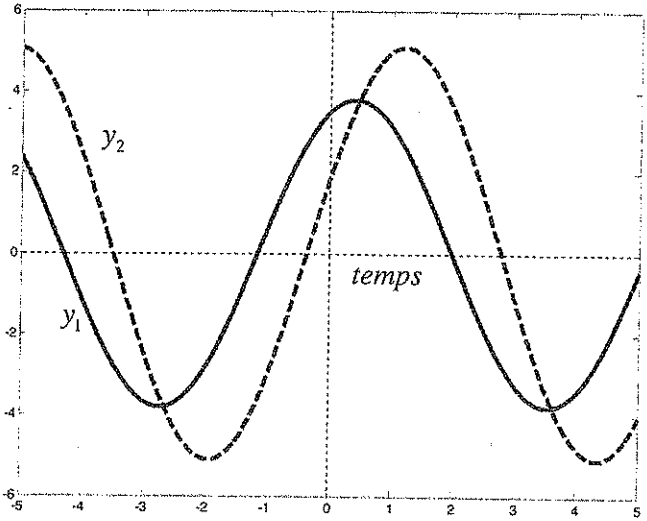
On visualise sur un oscilloscope analogique la tension d'entrée u_e délivrée par un GBF, et la tension de sortie u_s en fonction du temps. Un fréquencemètre mesure une fréquence de 652 Hz .

On obtient le graphe de la figure ci-dessous. La tension d'entrée est sur la voie 1, représentée sur l'écran par un trait plein, et la tension de sortie est sur la voie 2, représentée sur l'écran par un trait pointillé. L'abscisse et l'ordonnée sont toutes deux graduées en carreaux de l'oscilloscope.

L'amplificateur de la voie 1 est sur la positon 10 mV/carreau et celui de la voie 2 sur la position 5 mV/carreau .

a) Représenter sur un schéma clair le circuit de branchement, en faisant figurer l'oscilloscope, le GBF, le fréquencemètre, la masse du montage.

b) Mesurer sur le schéma (pour cette fréquence) le gain, puis le gain en décibels, et l'avance de phase φ de la sortie par rapport à l'entrée. Préciser les incertitudes.



67. Un filtre est alimenté par un GBF délivrant une tension sinusoïdale d'amplitude constante. Comment procéder pour mesurer la (ou les) fréquence(s) de coupure à -3 dB ?

68. On étudie en TP un filtre passe-bande du deuxième ordre en régime sinusoïdal, et on observe simultanément à l'oscilloscope les tensions d'entrée et de sortie. Comment repérer la fréquence de résonance, et comment la mesurer avec précision ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Régime variable

1. La valeur moyenne de $s(t)$ périodique de période T est : $\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(t)dt$.

Le signal est dit alternatif si sa valeur moyenne est nulle (ce qui ne signifie pas qu'il soit sinusoïdal !). Il vient :

$$\boxed{s(t) = s_0 + s_a(t)}$$

avec s_0 valeur moyenne ou composante continue et $s_a(t)$ composante alternative.

2. La valeur efficace de $s(t)$, périodique de période T, est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de $s(t)$, soit :

$$\boxed{S = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} s^2(t)dt \right)^{1/2}}$$

Si $u(t) = U_m \cos(\omega t)$, alternative sinusoïdale, un calcul simple donne :

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{2T} \int_t^{t+T} (1 + \cos(2\omega t))dt = \frac{1}{2T}(T + 0)$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}} \quad \text{soit} \quad u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

De façon générale :

$$\langle s^2 \rangle = \langle (s_0 + s_a)^2 \rangle = \langle s_0^2 \rangle + 2 s_0 \langle s_a \rangle + \langle s_a^2 \rangle = s_0^2 + 0 + S_a^2$$

car s_0 est constant et s_a alternative, la valeur efficace S de $s(t)$ est donc :

$$\boxed{S = \sqrt{s_0^2 + S_a^2}}$$

où S_a est la valeur efficace de la composante alternative.

Le régime sinusoïdal forcé (noté RSF)

3. À $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ on associe le complexe :

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad j^2 = -1$$

Avec la correspondance module-amplitude et argument-phase instantanée.

L'amplitude complexe est : $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$

La valeur efficace complexe : $\boxed{\underline{U} = U\,e^{j\varphi}}$ soit $\boxed{\underline{u} = \underline{U}_m\,e^{j\omega t}}$

$\underline{U}$ est l'affixe d'un point M du plan complexe. Dans la construction de Fresnel, on associe à $\underline{U}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

4. Soit un réseau constitué de dipôles de type R , L ou C et un (ou plusieurs) générateur(s) dont la grandeur de commande est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω (la même pour tous les générateurs). L'équation différentielle régissant l'évolution est linéaire. Pour un réseau réel, la durée du régime transitoire est limitée, en régime forcé toutes les grandeurs électriques sont des fonctions sinusoïdales de pulsation ω, celle imposée par le générateur.

Si $u_k(t) = U_k\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_k)$ à la date t, alors à la date $t + \dfrac{T}{4}$,

$$u_k\left(t + \frac{T}{4}\right) = U_k\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_k\right) = -U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi_k\right)$$

La loi des mailles $\sum_k \varepsilon_k u_k(t) = 0$ correspond à $\sum_k \varepsilon_k \operatorname{Re}\left(\underline{u}_k(t)\right) = 0$ et son écriture à la date $t + \dfrac{T}{4}$: $\sum_k \varepsilon_k \operatorname{Im}\left(\underline{u}_k(t)\right) = 0$; soit $\boxed{\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k(t) = 0}$

Réciproquement, $\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k(t) = 0 \Rightarrow \sum_k \varepsilon_k u_k(t) = 0$ car la partie réelle d'un complexe nul est nulle.

Les lois de Kirchhoff sont donc valables en RSF avec les représentants complexes.

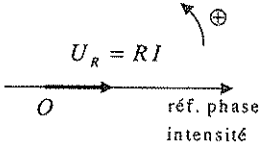
5. Pour un dipôle linéaire en régime variable, avec les orientations ci-contre, on a en RSF :

$$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}$$

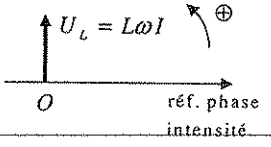
Pour une résistance, $\underline{Z} = R$; une bobine parfaite, $\underline{Z} = jL\omega$; un condensateur parfait, $\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$

$\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\dfrac{\underline{u}}{\underline{i}}\right)$ est donc l'avance de phase de $u(t)$ sur $i(t)$

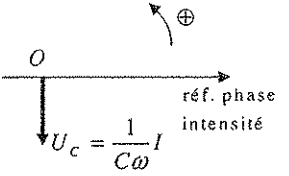
$\arg(R) = 0$, car R est un réel positif, aux bornes d'une résistance la tension est en phase avec l'intensité.



$\arg(jL\omega) = \dfrac{\pi}{2}$, aux bornes d'une bobine la tension est en quadrature avance sur l'intensité.



$\arg\left(\frac{1}{jC\omega}\right) = -\frac{\pi}{2}$, aux bornes d'un condensateur la tension est en quadrature retard sur l'intensité.



6. Grâce à des relations du type : $\frac{d\underline{u}}{dt} = j\omega\,\underline{u}$, les équations de branches différentielles en régime variable, deviennent linéaires (au sens de la proportionnalité) en RSF à condition d'utiliser les représentants complexes des grandeurs électriques.
La théorie des réseaux linéaires en régime continu (vue au chapitre **4**) s'appuyait sur les lois de Kirchhoff et la linéarité des équations de branches (relations affines entre u et i). Or en RSF les lois de Kirchhoff s'écrivent avec les complexes et les équations de branches sont linéaires en représentation complexe.
Toutes les méthodes et théorèmes du continu s'appliquent en RSF à condition d'utiliser les grandeurs complexes associées, notamment :
- lois d'associations d'impédances formellement identiques à celles des résistances
- diviseurs de tension et d'intensité

7. La puissance instantanée reçue par le dipôle est :

$$p(t) = u_{AB}\, i_{AB} = 2\,U\,I\,\cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi)$$

après avoir transformé le produit des cosinus en somme :

$$p(t) = U\,I\,\cos\varphi + U\,I\,\cos(2\omega t - \varphi)$$

La valeur moyenne de $\cos(2\omega t - \varphi)$, alternatif, étant nulle, la valeur moyenne P de $p(t)$ est de façon évidente la composante continue : $U\,I\,\cos\varphi$

$$\boxed{P = < u(t)\,i(t) > = U\,I\cos\varphi}$$

L'expression est générale, valable pour un dipôle passif ou actif.
U et I sont les valeurs efficaces, $\cos\varphi$ est appelé le facteur de puissance.
Le signe de φ n'intervient pas dans la valeur de P : ainsi elle ne dépend pas pour un dipôle passif du fait qu'il soit inductif (l'intensité est en retard sur la tension soit $\varphi > 0$ ou $\mathrm{Im}(\underline{Z}) > 0$) ou capacitif (l'intensité est en avance sur la tension soit $\varphi < 0$ ou $\mathrm{Im}(\underline{Z}) < 0$).

Pour un conducteur ohmique, $\varphi = 0$ et $P = U\,I = RI^2$.

Pour une bobine parfaite, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $P = 0$.

Pour un condensateur parfait, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et $P = 0$.

Seuls les conducteurs ohmiques reçoivent de la puissance en moyenne, qu'ils dissipent par effet Joule. Alors que bobines et condensateurs parfaits alternent les phases de fonctionnement récepteur et générateur et ne reçoivent aucune puissance en moyenne.

Composition spectrale d'un signal périodique

8. Un signal $s(t)$ périodique de période T (fréquence $f = \frac{1}{T}$), peut se décomposer en :

$$\boxed{s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]}$$

avec : s_0 valeur moyenne de $s(t)$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$

On peut aussi écrire $\boxed{s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \Phi_n)}$

avec : $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ et $\tan(\Phi_n) = -\frac{B_n}{A_n}$

Ceci en identifiant $\cos(n\omega t + \Phi_n) = \cos\Phi_n \cos n\omega t - \sin\Phi_n \sin n\omega t$

Le terme $C_1 \cos(\omega t + \Phi_1)$ est le fondamental du signal

Le terme $C_n \cos(n\omega t + \Phi_n)$ est l'harmonique de rang n

Le spectre des fréquences est le graphe « bâtons » amplitude C_n en fonction de $n\omega$ ou de n. Il indique de façon claire la nature spectral du signal : quels sont les harmoniques qui le composent et leur importance relative.
Il ne suffit pas cependant pour décrire totalement le signal, notamment pour obtenir le signal à partir de ses harmoniques (synthèse de Fourier) les phases à l'origine Φ_n sont nécessaires.

9. On écrit $s(t) = s_0 + s_a(t)$ avec s_0 valeur moyenne et $s_a(t)$ composante alternative.
La valeur efficace S_a de la composante alternative est telle que : $S_a^2 = \langle s_a^2(t) \rangle$, or $s_a^2(t) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \Phi_n)\right]^2$, expression dans laquelle on trouve des termes en :

$2C_n \cos(n\omega t + \Phi_n).C_p \cos(p\omega t + \Phi_p)$ alternatifs, de valeur moyenne nulle

$C_n^2 \cos^2(n\omega t + \Phi_n)$ de valeur moyenne $\frac{C_n^2}{2}$ carré de la valeur efficace de l'harmonique de rang n.

Finalement $\boxed{S_a = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right)^2}}$ avec (voir question **2.**) : $\boxed{S = \sqrt{s_0^2 + S_a^2}}$

10. Le signal harmonique est bien sûr son propre fondamental et la décomposition spectrale ne comporte qu'un seul terme.
Dans la décomposition de $s_2(t) = |S_m \sin\omega t|$, on voit plusieurs harmoniques d'amplitude décroissante avec le rang. Le traitement non linéaire de $S_m \sin\omega t$

(application d'une valeur absolue) entraîne un enrichissement du spectre. La valeur moyenne ou composante continue de $s_2(t)$ n'a pas été représentée ici.

Le dipôle RLC série en régime sinusoïdal forcé

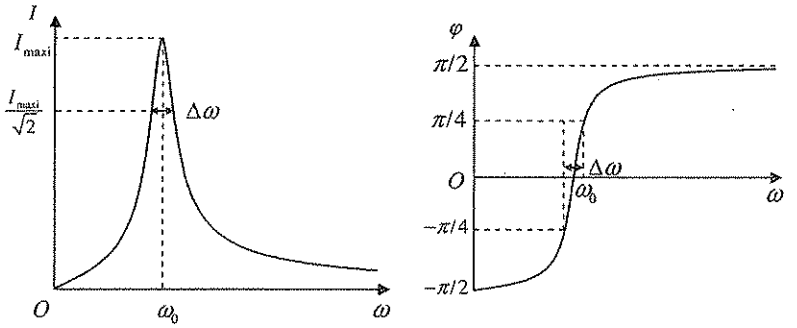
11. La tension aux bornes du conducteur ohmique, proportionnelle à l'intensité, permet l'étude de $i(t)$.

12. On étudie la réponse en RSF en fonction de la pulsation ω (donc de la fréquence) imposée par le générateur, ce qui conduit à parler de réponse fréquentielle.
Un diviseur de tension donne :

$$R\underline{I} = \underline{U}\,\frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} \quad \text{et donc} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(L\omega - 1/C\omega\right)}$$

$$\text{d'où} \quad I(\omega) = \frac{U}{\left(R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2\right)^{1/2}} \quad \text{et}$$

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \arctan\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right)$$



La valeur efficace I passe par un maximum (phénomène de résonance) pour :

$$\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$$

valeur pour laquelle le dénominateur, qui seul dépend de ω, est maximal (c'est la somme de deux carrés dont un seul dépend de ω).
Pour $\omega = \omega_0$, pulsation propre, $\underline{Z} = R$ et $|\underline{Z}|$ est minimal rendant I maximal à U constant.

13. La bande passante est l'intervalle dans lequel l'intensité est supérieure à $I_{maxi}/\sqrt{2}$ (la courbe est reproduite à la question précédente), soit $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, avec ω_1 et ω_2 solutions de :

$$\frac{U}{\left(R^2+\left(L\omega-1/C\omega\right)^2\right)^{1/2}}=\frac{U}{\sqrt{2}\,R}\quad\Rightarrow\quad 2R^2=R^2+(L\omega-1/C\omega)^2$$

d'où $(L\omega-1/C\omega)=\pm R$

On obtient deux équations du second degré ayant le même discriminant Δ :

$$L\omega^2+R\omega-1/C=0\quad\text{et}\quad L\omega^2-R\omega-1/C=0$$

chacune n'admettant qu'une seule solution positive ayant un sens (le produit des racines est négatif pour chaque équation)

Les solutions s'écrivent avec $\omega_1<\omega_2$:

$$\omega_1=\frac{-R+\sqrt{\Delta}}{2L}\quad\text{et}\quad\omega_2=\frac{R+\sqrt{\Delta}}{2L}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\Delta\omega=\frac{R}{L}}$$

Le facteur de qualité est :

$$\boxed{Q=\omega_0/\Delta\omega}$$

La bande passante est d'autant plus étroite (filtre sélectif) que le facteur de qualité est élevé.

Pour le dipôle *RLC* série : $\boxed{Q=\dfrac{L\omega_0}{R}=\dfrac{1}{RC\omega_0}=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

14. $\underline{U}=\underline{Z}\,\underline{I}\ \Rightarrow\ \arg\underline{Z}=\arg\left(\dfrac{\underline{u}}{\underline{i}}\right)$ soit l'avance de phase de $u(t)$ sur $i(t)$. Le graphe de $\varphi(\omega)$ est représenté à la question **12.**.

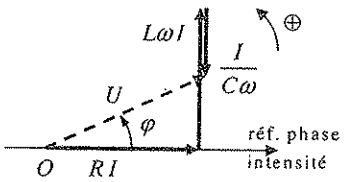
On constate que $\varphi=0$ (et $\underline{Z}=R$) à la résonance d'intensité ; la tension aux bornes du condensateur compense alors exactement celle aux bornes de la bobine ($jL\omega_0-j/C\omega_0=0$, elles sont en opposition de phase entre elles) comme si le générateur était uniquement branché sur la résistance, d'où le déphasage nul.

Dans la bande passante φ varie « vite » de $-\pi/4$ (circuit capacitif) à $+\pi/4$ (circuit inductif), ce qui représente la moitié de sa variation de $\omega\to 0$ ($\varphi=-\pi/2$) à $\omega\to\infty$ ($\varphi=+\pi/2$).

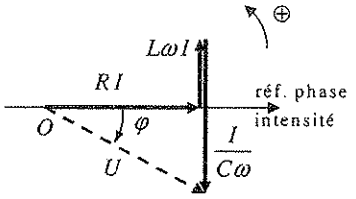
L'équation de maille $R\,\underline{I}+jL\omega\,\underline{I}+\underline{I}/jC\omega=\underline{U}$ s'écrit avec les valeurs instantanées réelles :

$$RI\cos\omega t+L\omega I\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{I}{C\omega}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=U\cos(\omega t+\varphi)$$

On peut représenter la somme des termes avec une construction de Fresnel :



Si $\omega>\omega_0$ alors $I\,L\omega>\dfrac{I}{C\omega}$ et $\varphi>0$



Si $\omega < \omega_0$ alors $I L\omega < \dfrac{I}{C\omega}$ et $\varphi < 0$

15. On a avec un diviseur de tension :

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{R}{R + j(L\omega - 1/C\omega)}$$

en posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et en remplaçant avec $Q = L\omega_0 / R = 1/RC\omega_0$:

$$\boxed{\frac{\underline{U}_R}{U} = \frac{1}{1 + jQ(x - 1/x)} = \frac{jx/Q}{1 - x^2 + jx/Q}}$$

Comme le montrent les graphes de la question **12.**, il s'agit d'un filtre passe-bande de fréquence centrale réduite $x = 1$, indépendante de Q, et de bande passante réduite $\Delta x = 1/Q$.

16. Comme précédemment :

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}} = \frac{1/jC\omega}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$$

et sous forme canonique :

$$\boxed{\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + jx/Q}}$$

En notant ψ l'avance de phase de u_C sur u :

$$\psi = \arg \underline{H} = \arg\left(\frac{\underline{u}_C}{\underline{u}}\right) = \arg\left(\frac{\underline{u}_C\ \underline{i}}{\underline{i}\ \underline{u}}\right) = \arg\left(\frac{\underline{u}_C}{\underline{i}}\right) - \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right)$$

et puisque $u_C(t)$ est en quadrature retard sur $i(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\psi = -\varphi - \dfrac{\pi}{2}}$

Ce qui correspond bien au graphe de la question suivante.

17. $\underline{H}(jx) = \dfrac{1}{1 - x^2 + jx/Q}$ montre que pour $x = 1$, $\underline{H}$ est imaginaire d'argument $-\dfrac{\pi}{2}$ quelle que soit la valeur de Q.

De plus si Q est très grand pour $x \to 1$, le dénominateur de $\underline{H}$ tend vers 0, ce qui correspond donc à la résonance.

Le graphe indique une résonance pour $Q > 0{,}7$ (valeur théorique $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ calculée à la question suivante). On a $x_r < 1$.

Pour $x \to \infty$, $\underline{H} \approx \dfrac{1}{-x^2}$ qui tend vers 0 et est d'argument $-\pi$.

18. $H(x) = \dfrac{1}{\left(\left(1-x^2\right)^2 + x^2/Q^2\right)^{1/2}}$

sa dérivée s'annule pour $x = 0$ et pour $x = x_r = \sqrt{1 - 1/2Q^2}$ si $Q \geq 1/\sqrt{2}$.

Pour $Q \leq 1/\sqrt{2}$ (amortissement important), H est une fonction décroissante de x : il n'y a pas de résonance. La courbe pour $Q = 1/\sqrt{2}$ est la courbe $Q = 0{,}7$ du graphe de la question précédente. En revanche, pour $Q > 1/\sqrt{2}$ (amortissement faible), H passe par un maximum.

Pour les grandes valeurs de Q, x_r est proche de 1 ; quand Q diminue, x_r tend vers 0, valeur qu'il atteint pour $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; ensuite il n'y a plus de maximum.

Quand H est maximal, la valeur efficace U_C est maximale et comme cette tension est proportionnelle à la charge du condensateur, on parle de résonance de charge. Elle se produit donc pour la pulsation :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 1/2Q^2}} \quad \text{mais seulement si} \quad Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ω_r est d'autant plus proche de ω_0 que Q est grand.

Pour $\omega = \omega_0$, $H(x = 1) = Q$ et la tension efficace aux bornes du condensateur vaut :

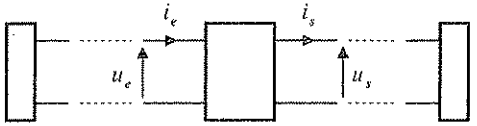
$$\boxed{U_C = QU_0}$$

ce qui justifie pour $Q > 1$ la dénomination de facteur de surtension. Il faut bien se rendre compte que la tension aux bornes du condensateur est alors supérieure à celle délivrée par le générateur (voir aussi la question **46.**).

La figure de droite donne la courbe pour $Q = 2$; la résonance de tension (le maximum) est obtenu pour $x_r < 1$, et pour $x = 1$ (résonance d'intensité), on a bien $U_C/U = 2$.

Filtres

19. Un quadripôle est un élément à quatre bornes, en général associé à deux dipôles : générateur de commande à l'entrée et dipôle utilisation (qualifié parfois de « dipôle charge ») en sortie :



On rencontre aussi, en électronique, une orientation de i_s dans l'autre sens (vers le quadripôle).
Si le quadripôle et les dipôles associés sont linéaires, un générateur sinusoïdal impose un régime forcé sinusoïdal.

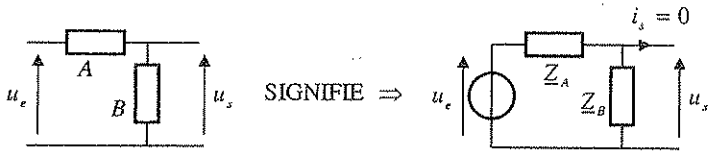
Une fonction de transfert est définie par : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{X}_s}{\underline{X}_e}$ où $\underline{X}_s$ et $\underline{X}_e$ sont les valeurs efficaces complexes de grandeurs de sortie et d'entrée. On utilise le plus souvent la fonction de transfert complexe en tension $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$.

L'étude en RSF apparaît comme fondamentale car :

> la réponse à une somme de fonctions est la somme des réponses (système linéaire)
> une fonction périodique peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales (décomposition en série de Fourier)

Le problème de la fonction de transfert est qu'elle dépend des dipôles associés et elle perd donc tout intérêt si elle n'est pas caractéristique du quadripôle. Or si le dipôle de commande à l'entrée est une source idéale de tension, par exemple, et si la sortie est ouverte, alors la fonction de transfert est caractéristique du quadripôle seul. La condition sortie ouverte qui paraît très restrictive est en fait assez souvent réalisée : il suffit que l'impédance du dipôle utilisation soit assez grande devant l'impédance de sortie du quadripôle (voir aussi la question **53.**)

Tout ceci est sous-entendu dans une question du type : « Étudier le quadripôle suivant » suivie du schéma, qu'il faut donc interpréter de la façon suivante :



$u_e(t)$ sinusoïdale et RSF

20. Un diagramme de Bode est constitué de *deux* courbes, représentant en fonction du logarithme décimal de la pulsation (ou de la fréquence) :

- le gain en décibel défini par $G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\log\left(\dfrac{U_s}{U_e}\right)$,
- l'argument $\varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \varphi_s - \varphi_e$.

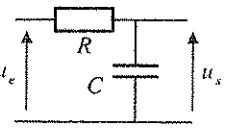
L'emploi d'une échelle logarithmique permet de décrire le comportement du système sur de grands intervalles de fréquence et de définir des diagrammes dits « asymptotiques », voir par exemple la question **21.**

21. La fonction de transfert complexe en tension est : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jx}}$

* Exemple simple de réalisation :

Il vient par diviseur de tension $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

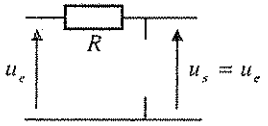
Et par identification : $H_0 = 1$; $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$



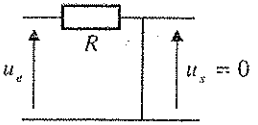
* En BF ($x \to 0$ ou plus correctement $\omega \ll \omega_0$), $\underline{H} \to H_0$; H_0 est le transfert statique.

En HF ($x \to +\infty$ ou plus correctement $\omega \gg \omega_0$), $\underline{H} \to 0$

On retrouve ce comportement par analyse directe de l'exemple :



BF



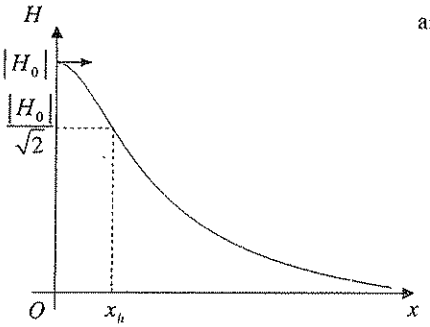
HF

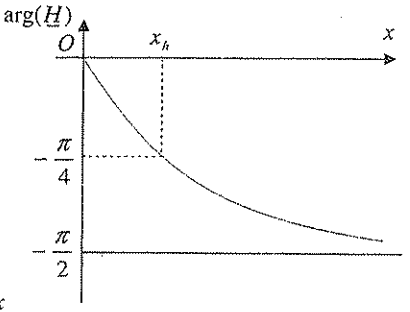
* $H(x) = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1 + x^2}}$ est une fonction décroissante de x : c'est un filtre passe-bas.

La coupure haute se fait pour $\dfrac{|H_0|}{\sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{x_h = 1}$

$\arg(\underline{H}) = -\arctan x$ si $H_0 > 0$ et $\arg(\underline{H}) = \pi - \arctan x$ si $H_0 < 0$

$u_s(t)$ est en retard sur $u_e(t)$ dans le cas $H_0 > 0$ (cas du graphe ci-dessous)





* Étude asymptotique, on prend $H_0 = 1$:

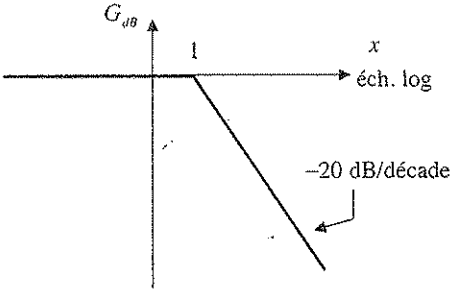
$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = -10 \log\left(1 + x^2\right)$$

$x \ll 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$, asymptote horizontale

$x \gg 1 \Rightarrow G_{dB} = -20 \log x$, asymptote de pente -20 dB/décade passant par le point (1,0)

Rq : Pour $x = x_h = 1$, la diminution en décibels à la fréquence de coupure par rapport au maximum correspond à :

$$\Delta G_{dB} = 20 \log H(x_h) - 20 \log H(0) = 20 \log \frac{H(x_h)}{H_0} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -10 \log 2 \approx -3\,\text{dB}$$

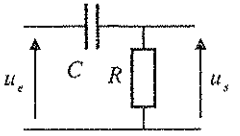


22. La fonction de transfert complexe en tension est : $\boxed{\underline{H} = K \dfrac{jx}{1 + jx}}$

* Exemple simple de réalisation :

Il vient par diviseur de tension $\underline{H} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

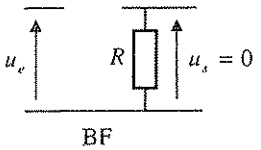
Et par identification : $K = 1$; $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

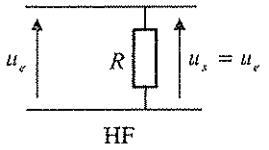


* En BF ($x \to 0$ ou plus correctement $\omega \ll \omega_0$), $\underline{H} \to 0$

En HF ($x \to +\infty$ ou plus correctement $\omega \gg \omega_0$), $\underline{H} \to K$

On retrouve ce comportement par analyse directe de l'exemple :



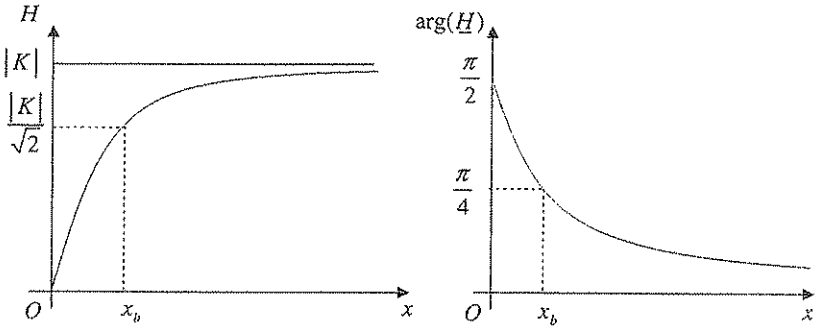


* $H(x) = \dfrac{|K|\,x}{\sqrt{1 + x^2}}$ est une fonction croissante de x : c'est un filtre passe-haut.

La coupure basse se fait pour $\dfrac{|K|\,x}{\sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{|K|}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{x_b = 1}$

$\arg\left(\underline{H}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ si $K > 0$ et $\arg\left(\underline{H}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ si $K < 0$

$u_s(t)$ est en avance sur $u_e(t)$ dans le cas $K > 0$ (cas du graphe ci-dessous)

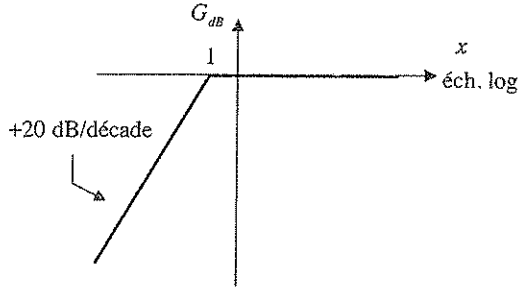


* Étude asymptotique, on prend $K = 1$:

$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 20 \log(x) - 10 \log\left(1+x^2\right)$$

$x \ll 1 \Rightarrow G_{dB} = 20 \log x$, asymptote de pente +20 dB/décade passant par le point (1,0)

$x \gg 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$, asymptote horizontale



23. Le dénominateur de la fonction de transfert est un polynôme du second degré en $j\omega$, il s'écrit : $a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 = a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0} j\omega - \frac{a_2}{a_0}\omega^2\right)$

ce qui fixe ω_0 et x, avec le terme en ω^2 : $x^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$;

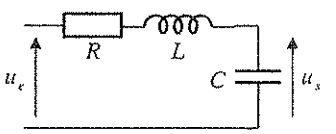
puis : $a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0} j\omega - x^2\right) = a_0\left(1 + \frac{jx}{Q} - x^2\right)$ ce qui fixe Q avec le terme en $j\omega$ compte tenu de la valeur de ω_0. Le coefficient a_0 fait alors partie de la constante multiplicative.

La fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = \frac{\underline{N}}{\underline{D}}$, $\underline{N}$ et $\underline{D}$ sont des polynômes en $j\omega$.

24. La fonction de transfert complexe en tension est : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 - x^2 + \dfrac{jx}{Q}}}$

* Exemple simple de réalisation :
Il vient par diviseur de tension

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$



Et par identification (dans l'ordre !) :

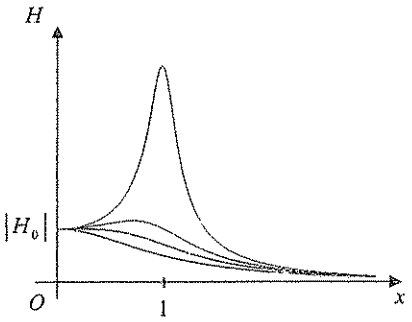
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \; ; \; Q = \frac{1}{RC\omega_0} \; ; \; H_0 = 1$$

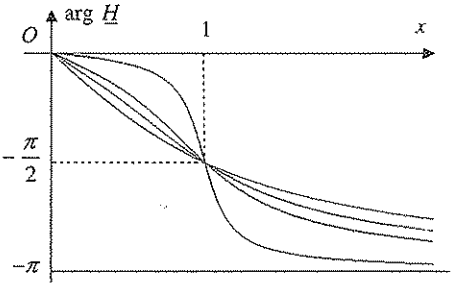
* Tous les résultats sur la résonance de charge s'appliquent ici (voir les questions **16.** à **18.**).

Le filtre est un passe-bas, mais il existe un maximum de $H(x)$ pour $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et le comportement est celui d'un passe-bande si $Q \gg \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ on a un filtre de Butterworth d'ordre 2.

* $H(x)$ et $\arg \underline{H}$ (pour $H_0 > 0$) sont représentés ci-dessous pour les valeurs $4, 1, 1/\sqrt{2}$ et $0,5$ de Q. H_0 représente le transfert statique.
Le maximum de $H(x)$ est atteint pour

$$x_r = \sqrt{1 - 1/2Q^2} \quad \text{si} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad x_r \to 1 \quad \text{si} \quad Q \gg 1$$





* Étude asymptotique, on prend $H_0 = 1$:

$$G_{dB} = 20 \log\left(H(x)\right) = -10 \log\left(\left(1 - x^2\right)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right)$$

$x \to 0 \Rightarrow G_{dB} = 0$, asymptote horizontale

$x \to \infty \Rightarrow G_{dB} = -40 \log x$, asymptote de pente -40 dB/décade passant par le point (1,0)

On retrouve les asymptotes du diagramme proposé.
Les diagrammes réels pour les valeurs de Q égales à : $4, 1, 1/\sqrt{2}$ et $0,5$ ont été placés sur le diagramme asymptotique.

Pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a un passe-bas avec une meilleure coupure en haute fréquence (−40 dB/décade) que le passe-bas du premier ordre (−20 dB/décade).

Pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, en remarquant que $G_{dB}(x = 1) = -20 \log\left(\frac{1}{Q}\right) = 20 \log Q$:

- si $Q > 1$ alors $G_{dB}(x = 1) > 0$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote,
- si $Q < 1$ alors $G_{dB}(x = 1) < 0$ et la courbe est en dessous de l'asymptote.

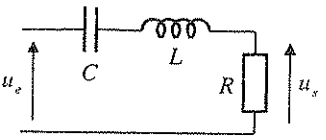
25. La fonction de transfert complexe en tension est : $\boxed{\underline{H} = K \dfrac{jx/Q}{1 - x^2 + \dfrac{jx}{Q}}}$

Mais pour l'étude mathématique, il est préférable d'utiliser l'expression obtenue en divisant numérateur et dénominateur par jx/Q :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{K}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

* Exemple simple de réalisation :
Il vient par diviseur de tension

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$



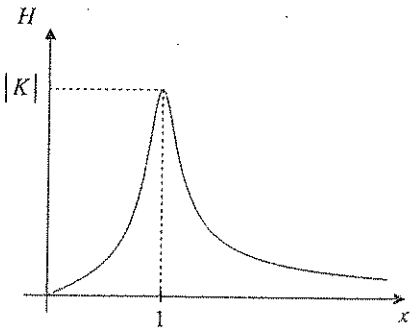
Et par identification :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \; ; \; Q = \frac{1}{RC\omega_0} \; ; \; K = 1$$

* Tous les résultats sur la résonance d'intensité s'appliquent ici (voir les questions **12.** à **15.**).
Le filtre est un passe-bande. Quelle que soit la valeur de Q, il existe un maximum de $H(x)$ atteint pour $x = 1$ soit $\omega = \omega_0$.

$H(x)$ est représenté ci-contre pour une valeur quelconque de Q.

$H_{max} = |K|$ est atteint pour $x_r = 1$



~~$\arg\left(\underline{H}(jx)\right) = \arg(R\,\underline{i}) - \arg(\underline{u_e}) = -\varphi_{u_e/i}$ et $\varphi_{u_e/i}$ a été tracé à la question **12.**~~

* Étude asymptotique, on prend $K = 1$:

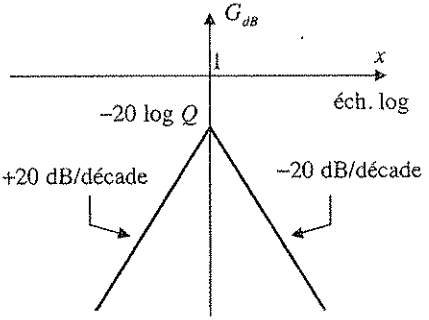
$$G_{dB} = 20 \log\left(H(x)\right) = -10 \log\left(1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right)$$

$x \to 0 \Rightarrow G_{dB} = 20 \log x - 20 \log Q$, asymptote de pente +20 dB/décade

$x \to \infty \Rightarrow G_{dB} = -20 \log x - 20 \log Q$, asymptote de pente −20 dB/décade

Le point de croisement des asymptotes est ($x = 1$, $G_{dB} = -20 \log Q$)

Le diagramme asymptotique avec $Q > 1$:

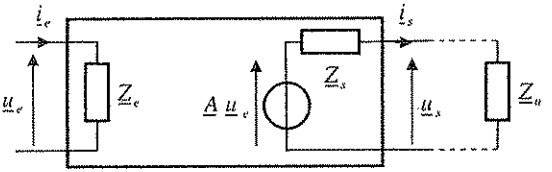


Pour les diagrammes réels on distingue les cas :

$Q > 1$: résonance aiguë, filtre sélectif, $G_{dB\,max}$ est au-dessus du point de croisement des asymptotes (graphe de gauche de l'énoncé).

$Q < 1$: résonance floue, filtre peu sélectif, $G_{dB\,max}$ est en dessous du point de croisement et on peut affiner le diagramme asymptotique (graphe de droite de l'énoncé).

26. Un quadripôle amplificateur est linéaire si $u_s = A\,u_e$ en sortie ouverte. Une description simple de ce comportement est la modélisation :



Ce modèle respecte bien $\underline{u}_s = \underline{A}\,\underline{u}_e$ en sortie ouverte ($\underline{i}_s = 0$). La sortie se comporte comme un générateur de Thévenin de *f.e.m.* $\underline{A}\,\underline{u}_e$, commandée par $\underline{u}_e$.

$\underline{Z}_e$ est l'impédance d'entrée, $\underline{Z}_s$ l'impédance de sortie. Le plus souvent on les choisit purement résistives. $\underline{Z}_s$ résistive se mesure par la méthode de la résistance adaptée, voir la question **68.** chapitre **4**.

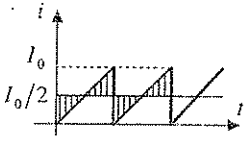
L'amplificateur est actif si la puissance en sortie est supérieure à celle en entrée, ce comportement est différent de celui des quadripôles formés d'éléments passifs qui sont plutôt qualifiés de filtres (passifs).

L'amplificateur est idéal si : $\boxed{\underline{Z}_s = 0 \text{ et } \underline{Z}_e \to \infty}$

Applications directes du cours

Régime variable

27. La solution géométrique est évidente : $\langle i \rangle = I_0/2$



De même : $\langle u_1 \rangle = 0$ et $\langle u_2 \rangle = U_0$

Les valeurs efficaces s'obtiennent avec :

$u_1^2 = U_0^2 = \text{cste} \Rightarrow U_1 = U_0$

u_2^2 vaut $4U_0^2$ sur une demi-période et 0 sur la suivante : $\langle u_2^2 \rangle = 2U_0^2$ et $U_2 = \sqrt{2}U_0$

Or $u_2 = U_0 + u_1$, on retrouve bien $U_2 = \sqrt{U_0^2 + U_1^2} = \sqrt{2}U_0$.

Le régime sinusoïdal forcé (noté RSF)

28. Avec un diviseur : $\underline{U} = \underline{E}\,\dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z} + r}$ et $\underline{Z} = \dfrac{R/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$

$$\boxed{\underline{U} = \underline{E}\,\frac{R}{R + r + jrRC\omega}}$$

On revient aux réels avec module et argument :

$$U = E\,\frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + (rRC\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{e}}\right) = -\arg\,(R + r + jRC\omega) = -\arctan\left(\frac{RrC\omega}{R+r}\right)$$

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

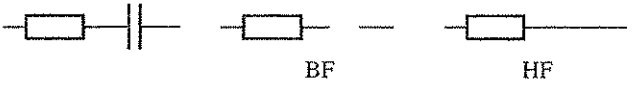
29. a) RC série

* $\underline{Z} = R + \dfrac{1}{jC\omega}$; $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}$; $\arg \underline{Z} = \arctan\left(-\dfrac{1}{RC\omega}\right)$

* $\omega \to 0$ signifie $\omega \ll \dfrac{1}{RC}$ ou BF $\Rightarrow$ $\underline{Z} \to \infty$ comme $\dfrac{1}{jC\omega}$

$\omega \to \infty$ signifie $\omega \gg \dfrac{1}{RC}$ ou HF $\Rightarrow$ $\underline{Z} \to R$

* Prévision avec les comportements en BF et HF des dipôles :



* AN : $R = 100\ \Omega$; $1/C\omega = 3{,}2\ \text{k}\Omega$, donc, à cette fréquence on est en BF :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}\ ;\ |\underline{Z}| = 3{,}2\ \text{k}\Omega \quad \text{et} \quad \arg \underline{Z} = -\frac{\pi}{2}$$

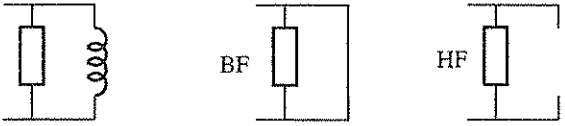
b) RL parallèle

* $\underline{Z} = \dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega}$; $|\underline{Z}| = \dfrac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$; $\arg \underline{Z} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$

* $\omega \to 0$ signifie $\omega \ll \dfrac{R}{L}$ ou BF $\Rightarrow$ $\underline{Z} \to 0$ comme $jL\omega$

$\omega \to \infty$ signifie $\omega \gg \dfrac{R}{L}$ ou HF $\Rightarrow$ $\underline{Z} \to R$

* Prévision avec les comportements en BF et HF des dipôles :



* AN : $R = 100\ \Omega$; $L\omega = 31\ \Omega$ donc pas d'approximation possible :

$$|\underline{Z}| = 30\ \Omega \quad \text{et} \quad \arg \underline{Z} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{31}{100}\right) = 1{,}3\ \text{rad}$$

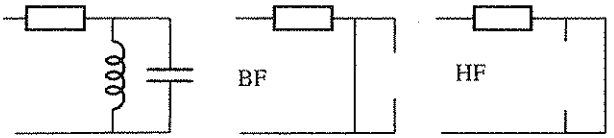
c) LC parallèle en série avec R

* $\underline{Z} = R + \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$;

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{(L\omega)^2}{\left(1 - LC\omega^2\right)^2}}\ ;\ \arg \underline{Z} = \arctan\left(\frac{L\omega}{R\left(1 - LC\omega^2\right)}\right)$$

* $\omega \to 0$ signifie BF $\Rightarrow$ $\underline{Z} \to R$
$\omega \to \infty$ signifie HF $\Rightarrow$ $\underline{Z} \to R$

* Prévision avec les comportements en BF et HF des dipôles :



* AN : $R = 100\ \Omega$; $L\omega = 31\ \Omega$; $1/C\omega = 3,2\ \text{k}\Omega$

donc $LC\omega^2 \ll 1$ mais R et $L\omega$ sont du même ordre : RL série

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 105\ \Omega \quad \text{et} \quad \arg \underline{Z} = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 0,30\ \text{rad}$$

30. Établissement du courant dans un dipôle *rL*

L'équation différentielle est $L\dfrac{di}{dt} + ri = v(t)$.

Le régime forcé à la pulsation ω de la source est une solution particulière de l'équation, obtenue facilement en passant en notation complexe :

$$\underline{i}_p = \frac{V\sqrt{2}\,e^{j\omega t}}{r + jL\omega} \equiv I\sqrt{2}\,e^{j\omega t}e^{-j\varphi} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{L\omega}{r} > 0$$

montrant que l'intensité dans l'inductance est bien en retard sur la tension imposée.

Le régime libre est la solution générale de l'équation homogène $L\dfrac{di}{dt} + ri = 0$ soit :

$$i_l(t) = Ce^{-t/\tau}$$

La constante C ne peut se déterminer que sur la solution générale du régime transitoire $i(t) = i_p(t) + i_l(t)$ par la condition initiale de continuité de l'intensité du courant dans la bobine $i(t=0) = 0$ d'où le résultat :

$$\boxed{i(t) = I\sqrt{2}\left(\cos(\omega t - \varphi) - \cos\varphi\, e^{-t/\tau}\right)}$$

Au bout d'un temps de l'ordre de quelques τ, la partie $i_l(t)$ aura disparu et il ne restera que le régime permanent forcé $i_p(t)$.

31. Pont de Maxwell

$\underline{Z}_d$ n'est pas infinie, donc à l'équilibre $\underline{V}_A - \underline{V}_B = 0$.

Le pont étant équilibré, $\underline{i}_1 = 0$ donc les impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ sont en série, ainsi que $\underline{Z}_3$ et $\underline{Z}_4$. Par divisions de tension il vient :

$$\underline{V}_C - \underline{V}_A = \underline{E}\,\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \text{et} \quad \underline{V}_C - \underline{V}_B = \underline{E}\,\frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

soit avec $\underline{V}_A = \underline{V}_B$ et $\underline{E} \neq 0$: $\boxed{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_3 = \underline{Z}_2\,\underline{Z}_4}$

Cette condition n'est pas suffisante, il faut $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \neq 0$ et $\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 \neq 0$; en effet ces sommes peuvent être nulles dans le cas où les impédances sont des imaginaires purs.

Exemple : La condition d'équilibre donne $\left(R_1 + jL_1\omega\right)\dfrac{R_3}{1 + jR_3C_3\omega} = R_2R_4$, ne surtout pas multiplier par l'expression conjuguée, mais écrire :

$R_1 + jL_1\omega = \dfrac{R_2R_4}{R_3}\left(1 + jR_3C_3\omega\right)$ et égaler parties réelles et parties imaginaires :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3} \text{ et } L_1 = R_2 R_4 C_3}$$

Pour les mesures de R_1 et L_1, il faut d'abord équilibrer le pont en continu (équilibre indépendant de L_1 dans ce cas) en réglant R_2 à R_3 et R_4 connus ; puis en RSF régler la valeur C_3 pour rendre i_1 le plus petit possible, on en déduit L_1.

32. Étude expérimentale d'un amplificateur

Avec un diviseur : $\underline{U}_s = \dfrac{R}{R + \underline{Z}_s} A \underline{E}$ et en valeurs efficaces : $U_s = \dfrac{R}{|R + \underline{Z}_s|} AE$,

A est réel. Pour que U_s soit indépendant de ω il faut que $\underline{Z}_s$ soit réel.

La méthode utilisée est du même type que celle de la résistance adaptée vue à la question **68.** du chapitre **4**. Numériquement :

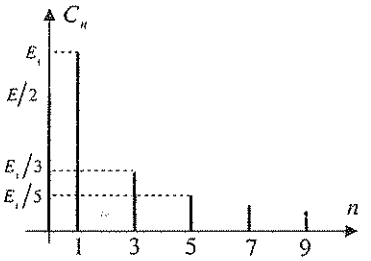
$$\begin{cases} 16.10^{-3} A = 0{,}67(16 + Z_s) \\ 8.10^{-3} A = 0{,}50(8 + Z_s) \end{cases} \Rightarrow A = 1{,}0.10^3 \text{ et } Z_s = 8{,}0\ \Omega$$

La puissance moyenne reçue par R est $P = RI^2 = \dfrac{U_s^2}{R} = \dfrac{A^2 E^2 R}{(R + Z_s)^2}$, le calcul est celui de l'adaptation d'impédance vue à la question **22.** du chapitre **4**. P est maximale pour :

$$\boxed{R = Z_s}$$

Composition spectrale d'un signal périodique

33. La valeur moyenne est $\dfrac{E}{2}$, en notant E_1 l'amplitude du fondamental de fréquence f_1, l'amplitude de l'harmonique de rang 3, de fréquence $3f_1$, est $\dfrac{E_1}{3}$.



Si la composante alternative $s_a(t) = s(t) - s_0$ est paire, alors $s_a(-t) = s_a(t)$. C'est le cas proposé dans l'énoncé. Alors la somme $s_a(t) + s_a(-t) = 2s_a(t)$ ne comporte évidemment que des termes en cosinus, les termes en sinus de signes opposés s'annulent.

De la même façon, si la composante alternative $s_a(t) = s(t) - s_0$ est impaire, alors $s_a(-t) = -s_a(t)$. Alors la différence $s_a(t) - s_a(-t) = 2s_a(t)$ ne comporte évidemment que des termes en sinus.

Le dipôle RLC série en régime sinusoïdal forcé

34. L'intensité efficace est la même pour les fréquences f_1 et f_2 ; il en est donc de même des modules de l'impédance :

$$(L\omega_1 - 1/C\omega_1)^2 = (L\omega_2 - 1/C\omega_2)^2 \Rightarrow (L\omega_1 - 1/C\omega_1) = -(L\omega_2 - 1/C\omega_2)$$

(l'autre solution avec un signe + correspond à la même fréquence)

alors $L(\omega_1 + \omega_2) = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{\omega_1} + \dfrac{1}{\omega_2}\right) \Rightarrow LC\omega_1\omega_2 = 1$ d'où le résultat $\boxed{f_0 = \sqrt{f_1 f_2}}$

Rq : Ce résultat peut aussi être établi en formant le produit $\omega_1\omega_2$ à la question **13.**

35. $[f_1, f_2]$ est à peu près la bande passante puisque l'intensité pour f_1 et f_2 est réduite d'un facteur de l'ordre de $\sqrt{2}$ sur celle de f_0. On peut alors obtenir des valeurs approchées pour les composants du circuit.

La fréquence de résonance est alors donnée par la relation $f_0 \approx \sqrt{f_1 f_2} \approx 10$ kHz.

Le facteur de qualité est défini par $Q = f_0 / \Delta f \approx 1{,}6$.

La résistance est donnée (à la résonance) : $R = E / I_{maxi} \approx 1{,}0.10^2\ \Omega$ car $E = 71$ V.

L'inductance par $L = RQ/\omega_0 \approx 2{,}5$ mH et la capacité par $C = 1/L\omega_0^2 \approx 0{,}10\ \mu$F.

Les tensions efficaces aux bornes de L et C sont égales à la résonance et valent $U_{L,C} = I_{maxi}/C\omega_0 = L\omega_0 I_{maxi} = QE \approx 1{,}1.10^2$ V.

Filtres

36. Se servir dans chaque cas d'un diviseur de tension :

a) $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}}$ et $\underline{Z} = \dfrac{jL\omega / jC\omega}{jL\omega + 1/jC\omega} = \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{jL\omega / R}{1 - LC\omega^2 + jL\omega/R}}$$

C'est un passe-bande du second ordre.

L'identification donne : $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$; $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$; $K = 1$

On remarque qu'ici Q augmente quand R augmente, le dipôle n'est pas un RLC série.

b) $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}' + jL\omega}$ et $\underline{Z}' = \dfrac{R/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jL\omega/R}}$$

C'est un fondamental du second ordre.

L'identification donne : $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$; $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$; $H_0 = 1$

$R = \sqrt{L/2C} \Rightarrow Q = 1/\sqrt{2}$; filtre de Butterworth d'ordre 2

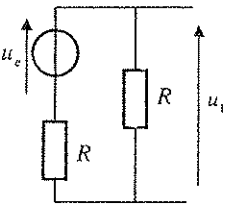
37. a) C'est un passe-bas du premier ordre.

b) $G_{dB\,max} = 20 \log H_{max} = 20 \log H_0 = 20 \log 2 = 6$ dB

c) $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\tau}$

d) $\arg\left(\dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}\right) = \pi - \arctan(\omega\tau) > 0$ car $\arctan(\omega\tau) \in \left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

38. La caractéristique du réseau dipolaire linéaire ci-contre, a été étudié à la question **39.** du chapitre **4**. Il se comporte comme une source de tension de $f.e.m.\ u_e(t)/2$ et de résistance interne $R/2$.



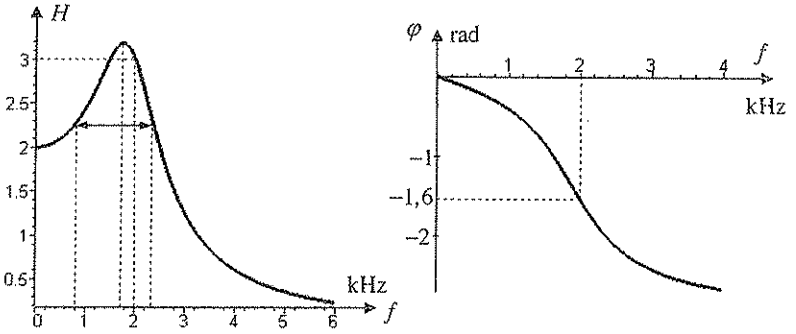
Le circuit est donc un RLC série de résistance $\dfrac{R}{2}$ commandé par la tension $\dfrac{u_e}{2}$; donc $Q = \dfrac{L\omega_0}{R/2} = \sqrt{2}$.

Le filtre est un fondamental du second ordre de coefficient $Q > 1/\sqrt{2}$, $u_s(t)$ passe par un maximum ; proposition d).

39. $\underline{H} = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ donc $Q = \dfrac{1}{2}$ c'est un fondamental du second ordre de coefficient Q inférieur à $1/\sqrt{2}$. La coupure se produit pour $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ soit

$\boxed{x_c = \sqrt{\sqrt{2} - 1}}$ proposition d).

40. L'argument entre 0 et $-\pi$ indique un transfert statique positif et le graphe $H(f)$ donne $H_0 = 2{,}0$. La valeur $-\dfrac{\pi}{2} \approx -1{,}6$ rad donne $f_0 = 2{,}0$ kHz.



On reporte f_0 sur le graphe $H(f)$ qui donne $QH_0 \approx 3{,}0$ (voir la question 18.), soit $Q \approx 1{,}5$. On lit d'autre part la fréquence de résonance $f_r \approx 1{,}7$ kHz, $H_{max} \approx 3{,}3$, on en déduit $\frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ et la bande passante $\Delta f \approx 1{,}5$ kHz. On remarque que la bande passante ne correspond pas ici précisément à $\frac{f_0}{Q}$, car Q est faible, la résonance floue et la courbe n'est pas symétrique de part et d'autre de f_0.

41. Le quadripôle 1 coupe les fréquences élevées de $s(t)$ sans modifier les valeurs des fréquences basses, c'est un filtre linéaire passe-bas. Il n'est pas idéal car il modifie les valeurs relatives des amplitudes.
Le quadripôle 2 laisse passer une bande de fréquences présente dans $s(t)$, c'est un filtre passe-bande. Il est sans doute idéal car il ne modifie pas les valeurs relatives des amplitudes.
Le quadripôle 3 fait apparaître de nouvelles fréquences, il enrichit le spectre. C'est un système non linéaire.

42. a) Le filtre est idéal, f est coupée et u_0 passe. La sortie est continue : $u_s = u_0$.
Ce filtre permet d'extraire la valeur moyenne du signal $s(t)$.

b) $\Delta f = \frac{f_0}{Q} \approx 1{,}25$ kHz soit $f_b \approx 1{,}9$ kHz et $f_h \approx 3{,}1$ kHz. Donc la composante continue est coupée, la composante alternative sinusoïdale passe (avec une atténuation de l'ordre de $1/\sqrt{2}$). La sortie est sinusoïdale de fréquence f.

c) Passe-haut idéal, f et u_0 sont coupées, $u_s = 0$.

Le signal est carré de fréquence $f' = 1{,}0$ kHz, le spectre contient les fréquences $f', 3f', 5f', \ldots$:

a) $u_s(t)$ est sinusoïdale de fréquence f'.

b) $\Delta f = [1{,}9 \text{ kHz}, 3{,}1 \text{ kHz}] \Rightarrow u_s(t)$ est sinusoïdale de fréquence $3f'$

c) Le fondamental seul est coupé $\Rightarrow u_s(t)$ est un carré moins le fondamental, ce qui ne donne rien de reconnaissable.

43. Mesurer sur le graphe :

a) $G_{dB\,max} = -5$ dB

b) $\Delta f = [5\text{ kHz}, 12\text{ kHz}]$ mesures faites à -8 dB

c) Les pentes sont d'environ $+60$ dB/décade et -60 dB/décade

d) Seul l'harmonique de fréquence 9 kHz passe, on obtient le signal sinusoïdal correspondant en sortie, quasi harmonique car la forme de la courbe donne une forte atténuation en dehors de la bande passante.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

44. Soit $\underline{z} = a + jb$, avec a et b positifs, $\underline{z} = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{j\varphi}$ et $\varphi = \arctan \dfrac{b}{a}$

$$\text{Si } b \gg a \quad \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} \to b \\ \varphi \to \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad a + jb \to jb$$

$$\text{Si } b \ll a \quad \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} \to a \\ \varphi \to 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a + jb \to a$$

Les calculs de limites peuvent être conduits dans les expressions complexes sans distinguer réels et imaginaires.

45. Pour un téléphone portable $P \approx 2$ W ; un néon $P = 10$ à 40 W ; une ampoule électrique $P = 25$ à 150 W ; un téléviseur $P \approx 50$ à 100 W ; un four à micro-ondes $P \approx 800$ W, un fer à repasser $P \approx 1$ kW, une machine à laver $P \approx 3$ kW ; une centrale électrique $P \approx 1$ GW.
Une émission de 1 h revient à environ 0,01 €(1 centime d'euro !).

46. Il faut d'abord fixer la fréquence du générateur sinusoïdal à la fréquence de résonance du dipôle RLC ; un facteur de qualité $Q = 5$ explique alors la surtension (en valeurs efficaces) de la tension aux bornes du condensateur (ou de l'inductance) par rapport à celle du générateur (cette notion est développée à la question **18.**).
La loi des mailles consistant à dire pour le circuit $GBF - RLC$ (dans cet ordre) $12 = 12 + 60 + 60$ est évidemment incorrecte car la loi d'Ohm n'est pas additive pour les valeurs efficaces ! Elle doit s'écrire pour les grandeurs instantanées ou valeurs efficaces complexes $12 = 12 + j60 - j60$, résultat qui rappelle bien qu'à la résonance d'intensité, la tension aux bornes de la résistance est en phase avec celle du générateur et que les tensions aux bornes du condensateur et de l'inductance, en opposition de phase entre elles, sont en quadrature avec les précédentes.

47. Un récepteur de radio est basé sur le phénomène de résonance d'un circuit « LC » oscillant à haute fréquence (environ 100 MHz en FM). On ajuste la fréquence propre du circuit en faisant varier la capacité du condensateur. Ceci permet de ne recevoir qu'une station à la fois.

48. Le dispositif plat d'environ 3 cm de côté (collé par exemple sur les boîtiers des disques compacts ou l'intérieur de la couverture d'un livre) est constitué simplement d'une spirale conductrice (l'inductance, enroulée comme le fil d'une bobine) dont les extrémités sont reliées à deux petits conducteurs carrés séparés par un isolant (le condensateur). Il s'agit donc d'un circuit électrique de type LC. Entre les bras du portillon règne un signal électromagnétique alternatif dont la fréquence élevée (de l'ordre de la dizaine de MHz) est réglée sur la fréquence $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ de l'antivol ; au passage de l'antivol, il y a résonance et le dispositif émetteur dans le portique fournit alors une énergie importante au circuit antivol ; cette augmentation de l'intensité du courant dans le dispositif du portillon provoque le déclenchement du signal d'alarme.

49. La hauteur (liée à la fréquence) est fixée par un oscillateur ; le timbre (lié à la superposition dosée de plusieurs harmoniques) est obtenue par un filtre (ou par filtrage) ; quant à l'intensité (liée à l'amplitude), elle est réglée par un amplificateur de gain variable.

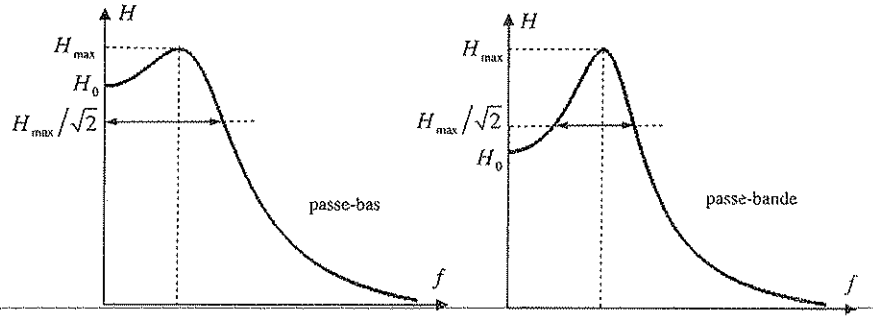
50. La compression MP3 utilise une analyse spectrale sur chaque intervalle de temps d'un signal musical. Puis, dans le spectre obtenu, elle élimine les composantes inutiles. Par exemple : si on a la présence dans le signal d'une amplitude spectrale importante à 500 Hz et d'une faible amplitude spectrale à 490 Hz, on peut sans conséquence audible supprimer la seconde (effet de masquage). En simplifiant ainsi le spectre, on allège évidemment le fichier. Il ne reste plus ensuite qu'à reconstituer le signal avec ce spectre « amaigri ». Ces opérations de codage – décodage ne posent aucun problème avec les ordinateurs modernes.

51. Pour $I = \frac{I_{maxi}}{\sqrt{2}}$, la puissance reçue par la résistance est $P = RI^2 = \frac{RI_{maxi}^2}{2} = \frac{P_{maxi}}{2}$.

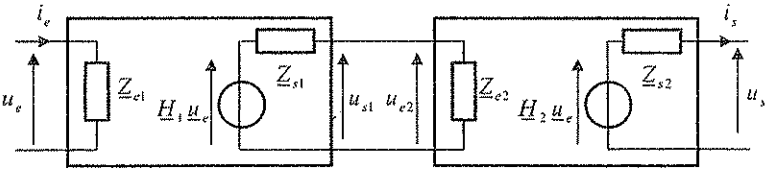
Le rapport le plus simple $1/2$ a bien été choisi, mais pour la puissance !

Rappelons qu'une réduction d'un facteur $\sqrt{2}$ correspond à une diminution de 3 dB.

52. Le comportement sera celui d'un passe-bande si la valeur $G_{dB} = G_{dB,max} - 3$ fait apparaître une fréquence de coupure basse. Ce qui est illustré dans les deux cas ci-dessous :



53. Il s'agit d'un problème important des montages électroniques. Il faut utiliser la modélisation linéaire des amplificateurs :



$\underline{H} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_{e2}} \dfrac{\underline{U}_{s1}}{\underline{U}_e} \neq \underline{H}_1 \underline{H}_2$! En effet la tension u_{s1} ne correspond pas à une sortie ouverte (hypothèse de validité de $\underline{H}_1$).

$$\underline{U}_{e2} = \underline{U}_{s1} = \underline{H}_1 \underline{U}_e \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \quad \text{et} \quad \underline{U}_s = \underline{H}_2 \underline{U}_{e2}$$

On en tire : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{\underline{H}_2 \underline{U}_{e2}}{\underline{U}_e} = \underline{H}_2 \underline{H}_1 \dfrac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}}}$

Finalement : $\underline{H} = \underline{H}_2 \underline{H}_1$ si $\underline{Z}_{e2} \gg \underline{Z}_{s1}$ (cas sortie ouverte)

ou si $\boxed{\underline{Z}_{s1} = 0}$

Cette dernière condition est très souvent vérifiée pour les quadripôles amplificateurs (modèle idéal $u_s(t)$ indépendant de i_s), ce qui permet de faire le produit des fonctions de transfert, même lorsque l'impédance d'entrée d'un étage n'est pas infinie ! Une condition bien pratique dont il faut avoir conscience.

54. $G_{dB} = 20 \log \left(\dfrac{\left(1 + \omega^2/\omega_1^2\right)}{\left(1 + \omega^2/\omega_2^2\right)\left(1 + \omega^2/\omega_3^2\right)} \right)^{1/2}$

$G_{dB} = 10 \log \left(1 + \omega^2/\omega_1^2\right) - 10 \log \left(1 + \omega^2/\omega_2^2\right) - 10 \log \left(1 + \omega^2/\omega_3^2\right)$

$G_{dB} = G_1 - G_2 - G_3$, il suffit donc après l'étude asymptotique des termes d'ordre un (très simple) d'ajouter ou soustraire, éventuellement graphiquement, pour obtenir le diagramme de Bode asymptotique en amplitude de la fonction de transfert factorisée.

55. Imaginons une relation entre les tensions de sortie et d'entrée en RSF : $\underline{u}_s = \dfrac{K}{j\omega} \underline{u}_e$,

alors $\underline{u}_e = \dfrac{1}{K} j\omega \underline{u}_s$ et $u_e(t) = \dfrac{1}{K} \dfrac{du_s}{dt}$, $u_s(t)$ est donc une primitive de $u_e(t)$. Le montage est un intégrateur théorique. Pour un intégrateur théorique la fonction de

transfert est donc $\underline{H} = \dfrac{K}{jx}$ et $G_{dB} = 20 \log |K| - 20 \log x$, soit une droite de pente −20 dB/décade.

Pour un dérivateur théorique $\underline{H} = K\,jx$ et $G_{dB} = 20 \log |K| + 20 \log x$, soit une droite de pente +20 dB/décade.

Donc si le diagramme asymptotique, d'une fonction de transfert d'un filtre quelconque, fait apparaître des pentes

de + 20 dB/décade ⇒ dérivateur dans la plage de fréquences correspondantes

de – 20 dB/décade ⇒ intégrateur dans la plage de fréquences correspondantes

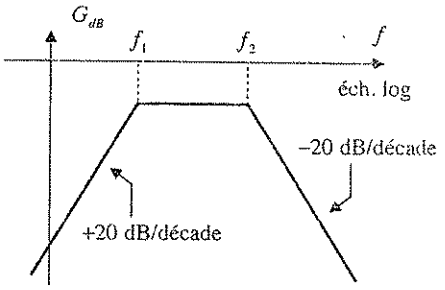
Exemple : pour le passe-bande du second ordre ci-contre avec Q petit,

si $f < f_1 \left(f \ll f_1\right)$: dérivateur

si $f > f_2$: intégrateur

si $f \in \left[f_1 , f_2\right]$: amplificateur

Ce résultat se généralise, avec les pentes multiples de 20 dB/décade : par exemple une pente de – 40 dB/décade correspond à un double intégrateur.



56. Pour un fondamental du premier ordre réalisé avec un dipôle RC (exemple de la question **21.**) : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + jRC\omega}$ que l'on peut écrire :

$$\underline{u_s}(t) + jRC\omega\,\underline{u_s}(t) = H_0\,\underline{u_e} \quad \text{et avec} \quad j\omega\,\underline{u_s} = \frac{d\underline{u_s}}{dt}$$

$$\underline{u_s}(t) + RC\frac{d\underline{u_s}(t)}{dt} = H_0\,\underline{u_e}$$; les grandeurs réelles vérifient la même équation :

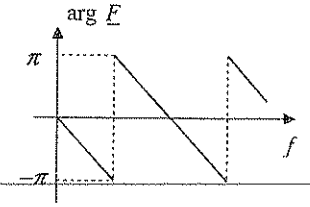
$$u_s(t) + RC\frac{du_s(t)}{dt} = H_0 u_e$$

Cette équation différentielle est vérifiée en RSF, or l'équation différentielle régissant l'évolution du système linéaire est unique, c'est elle pour tous les régimes. De façon plus générale, le dénominateur de la fonction de transfert correspond formellement à l'évolution en régime libre. Dans l'écriture normalisée, par exemple pour les systèmes du second ordre, on retrouve pour les coefficients du polynôme de degré 2 en $j\omega$ au dénominateur, les coefficients de l'équation différentielle homogène du régime libre.

57. Fonction retard

$s(t) = E_m \cos\left(\omega t - \omega\tau\right)$; $\underline{F} = \mathrm{e}^{-j\omega\tau}$;

$|\underline{F}| = 1$ et $\arg \underline{F} = -\omega\tau = -2\pi f\tau$

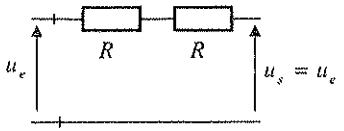


58. Un quadripôle linéaire ne peut que supprimer des fréquences présentes dans le signal d'entrée (bande passante) : c'est un appauvrissement du spectre.
Un quadripôle non linéaire permet de créer des fréquences qui n'existaient pas dans le signal d'entrée : c'est un enrichissement du spectre. Exemples : signal carré en sortie d'un quadripôle logique commandé par un signal sinusoïdal, redressement mono alternance avec une diode.

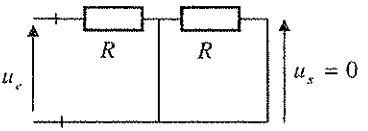
Exercices

59. Filtre du second ordre

Sortie ouverte et source idéale sinusoïdale à l'entrée.
Étude préalable en hautes et basses fréquences

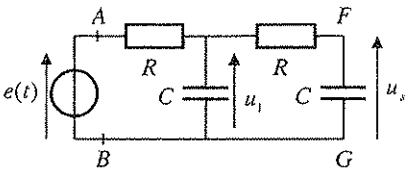


BF



HF

Utiliser deux diviseurs de tension pour établir la fonction de transfert :



$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_1} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}}$$

avec $\underline{Z} \equiv (R, C \text{ série}) \,||\, (C)$:

$$\underline{Z} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega(2 + jRC\omega)}$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_e} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega(2 + jRC\omega)} \quad \frac{jC\omega(2 + jRC\omega)}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega}$$

$$\boxed{\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega}}$$

Il s'agit d'un filtre fondamental du second ordre : $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$; $Q = \dfrac{1}{3}$; $H_0 = 1$

H_0 est le transfert statique, $H(x)$ est une fonction décroissante de x car $Q < 1/\sqrt{2}$ (voir l'étude à la question **24.**) conformément à l'étude préalable.

60. Réalisation d'un teslamètre

a) Le suiveur (amplificateur idéal d'impédance de sortie nulle) isole le capteur de la chaîne de mesure, le capteur branché sur le suiveur (impédance d'entrée infinie)

ne délivre aucune puissance. De façon plus générale l'impédance de sortie de chaque étage est nulle, ce qui permet de réutiliser les fonctions définies en sortie ouvertes.

b) La tension continue du décaleur permet de supprimer la composante $V_{cc}/2$.

c) $U_2 = U_e$; $U_3 = \dfrac{R_2}{R_1}(U_2 - U_1)$; on choisit $U_1 = +\dfrac{V_{cc}}{2}$ avec $\boxed{R_6 = 3R_5}$

en remplaçant : $U_s = \left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right)\dfrac{R_2}{R_1}\lambda B$

L'énoncé impose $\boxed{R_1 = R_2}$ soit $\boxed{\dfrac{R_3}{R_4} = \dfrac{\lambda}{K - \lambda} = 0,15}$

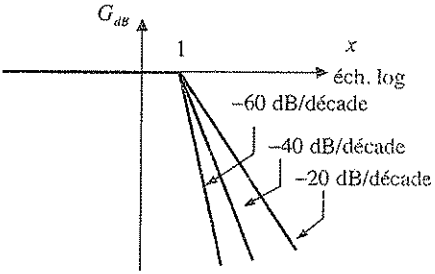
61. Étude et réalisation d'un filtre passe-bas

a) $H(x) = \left[\left(1 - 2x^2\right)^2 + \left(2x - x^3\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + x^6\right)^{-\frac{1}{2}}$

b) $H(x)$ est une fonction décroissante de x et $G_{dB} = -10 \log\left(1 + x^6\right)$:

en BF, $G_{dB} = 0$, et en HF, $G_{dB} = -60 \log x$, donc coupure à -60 dB/décade en HF.

La coupure est meilleure qu'avec un filtre passe-bas du second ordre (-40 dB/décade), de façon générale, elle s'améliore quand l'ordre du filtre augmente et le filtre tend vers un filtre passe-bas idéal.



c) Avec deux diviseurs successifs, en notant $\underline{u}_1$ la tension aux bornes du condensateur :

$\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_1} = \dfrac{R}{R + jL_2\omega}$ et $\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_e} = \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z} + jL_1\omega}$ (attention $\underline{Z}$ et pas $\dfrac{1}{jC\omega}$!) avec :

$$\underline{Z} = \frac{(R + jL_2\omega)\,1/jC\omega}{R + jL_2\omega + 1/jC\omega} = \frac{(R + jL_2\omega)}{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}$$

On remplace dans $\underline{H} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_1}\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_e}$:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{L_1 + L_2}{R}\,j\omega + L_1C\,(j\omega)^2 + \dfrac{L_1L_2C}{R}\,(j\omega)^3}$$

Soit l'expression voulue, par identification des coefficients du polynôme en $j\omega$:

$$\begin{cases} \dfrac{L_1 + L_2}{R} = \dfrac{2}{\omega_0} \\ L_1 C = \dfrac{2}{\omega_0^2} \\ \dfrac{L_1 L_2 C}{R} = \dfrac{1}{\omega_0^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \dfrac{3R}{2\omega_0} \\ L_2 = \dfrac{R}{2\omega_0} = \dfrac{L_1}{3} \\ C = \dfrac{4}{3R\omega_0} \end{cases}$$

d) Il faut que les impédances de sortie des filtres 1 et 2 soient nulles, alors $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$. On veut un numérateur constant, on choisit donc des filtres fondamentaux. On peut obtenir un dénominateur de degré 3 avec un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2.

$$\underline{H}_3 = \frac{H_0}{(1 + jx)\left(1 + \dfrac{jx}{Q} + (jx)^2\right)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx\left(1 + \dfrac{1}{Q}\right) + (jx)^2\left(1 + \dfrac{1}{Q^2}\right) + (jx)^3}$$

On obtient le fonction de transfert du a) en prenant $\boxed{Q = 1}$

62. Couplage AC et DC d'une entrée d'oscilloscope

a) Avec un simple diviseur : $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}_{osc}}{\underline{Z}_{osc} + \underline{Z}_{C_D}} = \dfrac{jR_0 C_D \omega}{1 + jR_0(C_0 + C_D)\omega}$, il s'agit donc d'un passe-haut du 1er ordre.

Avec $C_D \gg C_0 \Rightarrow \underline{H} = \dfrac{jR_0 C_D \omega}{1 + jR_0 C_D \omega}$

En couplage DC, on a évidemment $u_e'(t) = u(t)$

b) $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U}_e}{\underline{U}} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$, on mesure, avec une incertitude (lecture + amplificateur) de l'ordre de 4% pour U et 6% pour φ) :

$\dfrac{U_2}{U_1} = 0{,}72 \pm 0{,}03$ et $\varphi_{2/1} = +2\pi\dfrac{0{,}4}{3{,}4} = 0{,}74\,\text{rad} \Rightarrow \varphi_{2/1} = (0{,}74 \pm 0{,}04)\,\text{rad}$

Or pour $f = f_0 = \dfrac{1}{2\pi R_0 C_D}$, $H = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ et $\arg(\underline{H}) = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}78\,\text{rad}$.

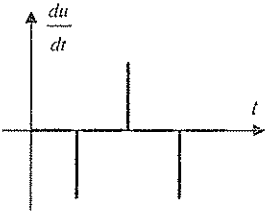
La mesure correspond à peu près à $f = f_0$, on mesure :

$$T_0 = 20.10^{-3}\frac{3{,}4}{0{,}8} \approx 8{,}5.10^{-2}\,\text{s} \Rightarrow \underline{f_0 \approx (11{,}8 \pm 0{,}1)\,\text{Hz}}.$$

La fréquence de coupure est d'environ 12 Hz.

On en déduit $C_D = \dfrac{1}{2\pi R_0 f_0} \approx 13.10^{-9}\,\text{F} = 13\,\text{nF}$ ce qui vérifie $C_D \gg C_0 = 12\,\text{pF}$.

c) La dérivée théorique de $u(t)$ est une suite de pics correspondants aux discontinuités de $u(t)$.



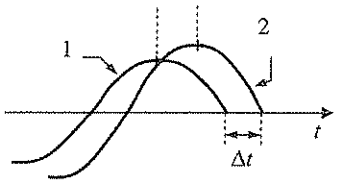
$u = u_C + u_e$; quand $u = \text{cste} = U$, $u_C = U$ et $u_e = 0$; quand u s'annule, u_C continue garde sa valeur et u_e prend donc la valeur $-U$ à cet instant et est discontinue ; le condensateur se décharge ensuite avec la constante de temps $R_0 C_D$, d'où le graphe observé.

Autre interprétation, le filtre est un passe-haut du 1er ordre, donc le diagramme de Bode dans les basses fréquences a une pente de +20 dB/décade et ceci jusqu'à environ 12 Hz. Il se comporte donc comme un dérivateur. La période mesurée de $u(t)$ est $T_1 \approx 0{,}4$ s soit $f_1 \approx 2{,}5$ Hz. Donc les harmoniques f_1, $3f_1$ et $5f_1$ sont dérivées, ce qui donne approximativement la dérivée.

Travaux pratiques

63. En mode DC : il mesure la valeur moyenne ou composante continue.
En mode AC : il mesure la valeur efficace de la composante alternative.
En mode AC + DC : il mesure la valeur efficace du signal complet.
La plupart des multimètres mesurent la valeur efficace vraie (TRMS) et ne sont plus limités aux signaux sinusoïdaux comme les voltmètres analogiques.
L'ampèremètre (de faible résistance) doit être placé en série avec le dipôle à travers lequel doit être mesurée l'intensité, et le voltmètre (de grande résistance) en parallèle sur le dipôle aux bornes duquel doit être mesurée la différence de potentiel.

64. Sur l'écran de l'oscilloscope la sinusoïde en avance « passe » par un maximum *avant* l'autre, c'est-à-dire que le maximum de la sinusoïde en avance se trouve *à gauche* du maximum de l'autre sinusoïde.
Sur l'exemple ci-contre : 1 est en avance sur 2 et



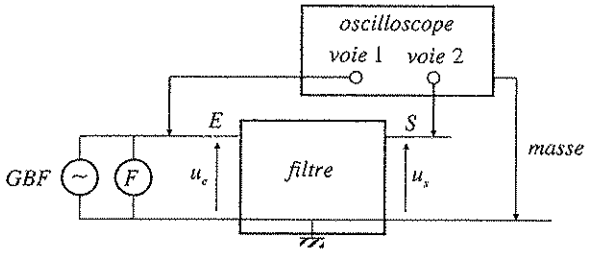
$$\boxed{|\varphi| = 2\pi \frac{\Delta t}{T}}$$

S'assurer avant la mesure que les deux zéros sont bien superposés.
Les oscilloscopes numériques fournissent des mesures automatiques, attention cependant de donner une valeur de φ comprise entre $-\pi$ et π.
Sur un oscilloscope analogique on peut estimer le déphasage par une méthode proportionnelle : étendre à l'aide des boutons discret puis continu de la base de temps une demi-période (soit 180°) de la 1ère sinusoïde sur 9 carreaux (chaque carreau représente alors 20° et chacune des 5 graduations d'un carreau représente

4°) ; le décalage de la 2ème sinusoïde (évalué en carreaux) donne rapidement une valeur approximative de son déphasage (si les zéros sont superposés !).

65. Le générateur réel délivre une tension $u(t) = e - R_g i(t)$ dont la valeur, à cause de sa résistance interne $R_g \approx 50\ \Omega$, dépend du courant débité, donc de la demande (l'impédance) du circuit. C'est à la résonance où le courant est maximal que la tension délivrée par le générateur est minimale. Il s'agit du problème plus général de l'adaptation d'impédances. Pour faire une détermination correcte de la bande passante par la réduction d'amplitude de facteur $\sqrt{2}$, on peut y remédier en intercalant un amplificateur idéal suiveur (d'impédance de sortie nulle) entre le générateur et le dipôle (voir la question **60.**).

66. a) *F* représente le fréquencemètre sur le schéma. Attention, les masses du GBF, du fréquencemètre et de l'oscilloscope, doivent être communes.



b) On mesure les tensions crête à crête sur le schéma (dans une unité quelconque, attention au rapport d'amplification). On lit alors à la fréquence de travail :

$\dfrac{\text{amplitude de } u_s}{\text{amplitude de } u_e} = 0{,}67$, d'où le gain en dB : $G_{dB} = 20\log(0{,}67) = -3{,}5$ dB

L'incertitude sur chaque amplitude est due à 2 lectures + appareil (3%) : les graduations correspondent à 2 mV (voie 1) et 1 mV (voie 2)

Sur $2U_{sm}$: $2\sqrt{\left(\dfrac{3\times 50}{100\times\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{12}}\times 2\right)^2} \approx 2{,}08\,\text{mV}$

Sur $2U_{em}$: $2\sqrt{\left(\dfrac{3\times 80}{100\times\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{12}}\times 2\right)^2} \approx 3{,}6\,\text{mV}$

Sur le rapport r : $\dfrac{U}{r} = \sqrt{\left(\dfrac{U(U_{sm})}{U_{sm}}\right)^2 + \left(\dfrac{U(U_{em})}{U_{em}}\right)^2} \approx \sqrt{\left(\dfrac{2{,}08}{50}\right)^2 + \left(\dfrac{3{,}6}{80}\right)^2}$

$$\frac{U}{r} \approx 6\% \Rightarrow \boxed{r = 0{,}67 \pm 0{,}04}$$

L'avance de phase de la sortie par rapport à l'entrée à cette fréquence est :

$\varphi = 2\pi \dfrac{\text{décalage temporel}}{\text{période}} = -0{,}78$ rad, la sortie est en retard sur l'entrée.

Décalage temporel et période sont mesurés avec une unité quelconque.
En négligeant l'incertitude sur la période, la fréquence étant donnée par le fréquencemètre. Avec une incertitude d'environ 5% sur le décalage temporel :

$$\frac{U(\varphi)}{\varphi} = \frac{U(\Delta t)}{\Delta t} \approx 5\% \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = (0{,}78 \pm 0{,}04) \text{ rad}}$$

67. Balayer d'abord rapidement, en augmentant la fréquence du GBF, l'ensemble du spectre pour avoir une idée du comportement global du filtre (est-ce un passe-bande, un passe-bas... ?). Il est en effet facile de voir comment évolue l'amplitude de la sortie avec la fréquence, sans régler la base de temps. Ensuite, repérer la (ou les) fréquence(s) donnant un gain maximum, donc une amplitude maximale puisque l'amplitude d'entrée est constante. Mesurer alors le nombre de carreaux crête à crête de ce maximum, le diviser par $\sqrt{2}$, ce qui correspond à une perte de 3 unités pour le gain en décibels, et ajuster la fréquence pour afficher cette valeur crête à crête sur l'écran ; la fréquence trouvée est une fréquence de coupure à –3 dB.
Si le filtre est un passe-bande, il y a deux fréquences à mesurer. Leur différence est alors la largeur de la bande passante en fréquence du filtre.
La valeur choisie pour l'amplitude d'entrée importe peu puisque, par linéarité, la sortie lui est proportionnelle. Mais attention, on doit rester dans le domaine linéaire.

68. Dans ce cas, il n'est pas recommandé de chercher le maximum d'amplitude de sortie pour trouver la résonance. Par définition, un maximum correspond à une dérivée nulle, ce qui confère une mauvaise précision à une mesure où on repère une grandeur qui varie peu.
La phase φ de la sortie par rapport à l'entrée, en revanche, varie rapidement en ce point. Pour un passe-bande, elle vaut soit 0 (non inverseur, cas du *RLC* série) soit π (inverseur) et sa pente est maximale. La méthode la plus précise consiste donc, à partir des courbes d'entrée et de sortie sur les deux voies de l'oscilloscope à passer en position X-Y (tracé de la sortie en fonction de l'entrée). Les deux sinusoïdes d'entrée et de sortie étant déphasées, on obtient en général une ellipse. Mais à la résonance, l'ellipse devient un segment (car u_s et u_e sont alors proportionnelles), la précision de la mesure de fréquence est optimale. L'incertitude-type associée à l'appréciation du segment est bien plus petite que celle associée à l'appréciation du maximum (erreur de méthode), qui est prédominante dans l'incertitude de mesure de la fréquence (lecture + appareil).

Chapitre 6

Dynamique du point matériel

Les ordres de grandeur utiles

constante de gravitation	$G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$
accélération de la pesanteur (terrestre)	$g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

La Terre

jour solaire moyen	$T_m = 1$ jour $= 24$ h $= 86400$ s
jour sidéral	$T_s = 23$h 56min 04s $= 86164$ s
vitesse de rotation propre	$\omega = 2\pi/T_s = 7{,}3.10^{-5}\ rad.s^{-1}$
rayon (périmètre) dans modèle sphérique	$R_T = 6370\ km \approx 6{,}4.10^3\ km$ ($\approx 40\ 000$ km)
masse	$M_T \approx 6{,}0.10^{24}$ kg
champ de gravitation à la surface (modèle sphérique)	$A_0 = GM_T/R_T^2 \approx g_0 \approx 9{,}81\ m.s^{-2}$
masse volumique moyenne (modèle sphérique)	$\rho_T = 3M_T/4\pi R_T^3 \approx 5\ g.cm^{-3} = 5.10^3\ kg.m^{-3}$
altitude d'un satellite géostationnaire	$h \approx 36\ 000$ km
vitesse de libération à partir du sol	$v_l = \sqrt{2GM_T/R_T} \approx 11{,}2\ km.s^{-1}$
vitesse et période d'un satellite de basse altitude	de l'ordre de $8\ km.s^{-1}$ et 1h 30 min
rayon de son orbite = distance Terre-Soleil	1 unité astronomique = d_{ST} ≈ 150 millions km
période de révolution autour du Soleil	1 année = A = 365,25 jours
vitesse moyenne sur son orbite	$v_o \approx 2\pi d_{ST}/A \approx 30\ km.s^{-1}$
âge de la Terre	$\approx 4{,}5$ milliards d'années

La Lune

lunaison (période entre deux pleines lunes)	L = 29,5 jours
période orbitale = période de rotation propre	$T_L = 27{,}3$ jours $\quad 1/T_L = 1/L + 1/A$
distance Terre-Lune	$d_{TL} = 380\ 000$ km $\quad (T_L^2/d_{TL}^3 = 4\pi^2/GM_T)$
masse	$M_L \approx M_T/81 \approx 7{,}4.10^{22}$ kg
champ de gravitation à la surface (modèle sphérique)	$g_{0L} = GM_L/R_L^2 \approx g_0/6 \approx 1{,}7\ m.s^{-2}$
diamètre apparent	$\alpha_L = 32' \approx 0{,}5°$

Le Soleil

distance Terre-Soleil	$d_{ST} \approx 150.10^6$ km soit 8min 20s pour la lumière
masse	$M_S \approx 2{,}0.10^{30}$ kg $\quad (A^2/{d_{ST}}^3 = 4\pi^2/GM_S)$
rayon	$R_S \approx 700\,000$ km
diamètre apparent	$\alpha_S = \alpha_L = 32' \approx 0{,}5° \quad \alpha_S = 2R_S/d_{ST}$
température au centre	$T_c \approx 15$ millions de K
température en surface	$T_s \approx 5700$ K
puissance rayonnée	$P_S \approx 4.10^{26}$ W

L'Univers

âge de l'Univers	≈ 15 milliards d'années

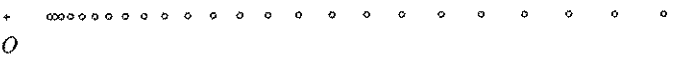
Les constantes

permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} ; $1/4\pi\varepsilon_0 = 9{,}0.10^9$ F^{-1}.m
célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}
charge de l'électron	$-e$ avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}9.10^{-30}$ kg ($E = m_ec^2 \approx 0{,}51$ MeV)
charge et masse du proton	e et $m_p = 1{,}7.10^{-27}$ kg $\approx 1850\ m_e$

Cinématique du point

1. Qu'est ce qu'un référentiel ? Pourquoi doit-on le définir avant de parler de mouvement ? Qu'est ce qui distingue un repère et un référentiel ? Définir la vitesse d'un point mobile (vitesse instantanée) à partir du vecteur vitesse moyen. Montrer que la vitesse est tangente à la trajectoire. Comment est défini le vecteur accélération ? À quoi sert-il ?

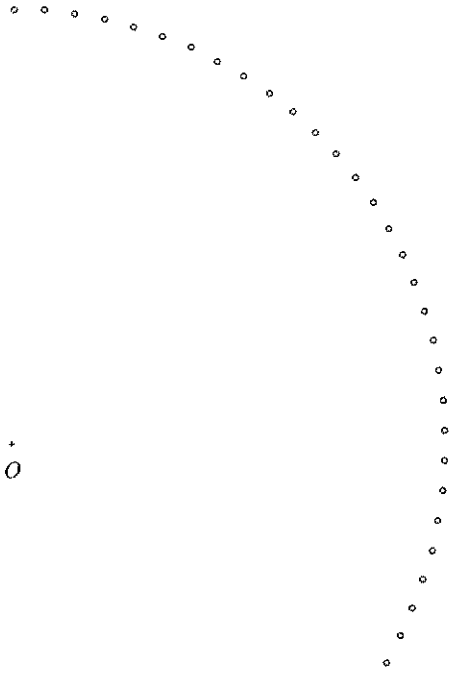
2. On enregistre le mouvement d'un palet glissant sur un banc à coussin d'air incliné sur l'horizontale. On relève les positions successives d'un même point du palet, au cours du temps, à intervalle de temps réguliers $\Delta t = 20$ ms :



Dans quel référentiel le mouvement est-il étudié ? Quelle est la trajectoire ? Dessiner en divers points un vecteur proportionnel au vecteur vitesse instantané, en l'assimilant au vecteur moyen sur 80 ms. Que constate-t-on pour la norme et la direction du vecteur vitesse ?

Dessiner en deux points au moins, un vecteur proportionnel au vecteur accélération instantané, en l'assimilant au vecteur moyen sur 80 ms. Que constate-t-on pour la norme et la direction du vecteur accélération ? Peut-on faire un lien avec les caractéristiques du vecteur vitesse ?

3. On enregistre le mouvement d'un palet glissant sur une table à coussin d'air horizontale, le palet est relié à un point fixe O du référentiel terrestre par un fil inextensible, qui reste tendu pendant tout l'enregistrement. On relève les positions successives d'un même point du palet (point d'accrochage du fil), au cours du temps, à intervalle de temps réguliers $\Delta t = 20$ ms :



Répondre aux mêmes questions qu'à la question **2.**

4. Quel est le vecteur position d'un point M en projection sur une base cartésienne ? Comment s'expriment sa vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ et son accélération $\vec{a}(M)_{(R)}$, par rapport à un référentiel (R), en projection sur une base cartésienne ?

5. Dans quel cas est-il intéressant de définir un système de coordonnées polaires ? Définir la base locale polaire. Quel est le vecteur position d'un point M en projection sur la base locale polaire ?
Comment se projettent la vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ et l'accélération $\vec{a}(M)_{(R)}$, par rapport à un référentiel (R), sur la base locale polaire ?

6. Dans quel cas est-il intéressant de définir un système de coordonnées cylindriques ? Définir la base locale cylindrique. Quel est le vecteur position d'un point M en projection sur la base locale cylindrique ?
Comment se projettent la vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ et l'accélération $\vec{a}(M)_{(R)}$, par rapport à un référentiel (R), sur la base locale cylindrique ?

7. Dans quel cas est-il intéressant de définir un système de coordonnées sphériques ? Définir la base locale sphérique. Quel est le vecteur position d'un point M en projection sur la base locale sphérique?
Comment se projettent la vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$, par rapport à un référentiel (R), sur la base locale sphérique ?

8. Quelle est la définition d'un mouvement uniforme ? Quels sont les caractéristiques d'un mouvement rectiligne ? Énoncer une condition nécessaire et suffisante de mouvement rectiligne et uniforme d'un point.

9. Si $\vec{a}(M)_{(R)} = \overrightarrow{\text{cste}}$, le mouvement est-il rectiligne uniformément varié ? Avec cette contrainte (accélération constante), quelle est la trajectoire dans le cas général ?

10. Définir un mouvement circulaire. Quel système de coordonnées est le mieux adapté ? Comment s'expriment les vecteurs vitesse et accélération dans la base locale correspondante ?

11. Donner toutes les caractéristiques du mouvement circulaire uniforme et commenter.

12. Pour un mouvement plan quelconque, relier les composantes du vecteur $\vec{a}$ et les variations du vecteur $\vec{v}$. Quelle est alors la base naturelle pour projeter $\vec{a}$?

Lois de Newton et modélisation des forces

13. Énoncer le principe d'inertie. Pourquoi a-t-il été aussi difficile à trouver ?

14. Définir la quantité de mouvement d'un point, puis d'un système de points. Dans quel cas la quantité de mouvement d'un système de points s'exprime-t-elle simplement en fonction de $\vec{v}_G$?

15. Énoncer la relation fondamentale de la dynamique (ou loi de la quantité de mouvement) pour un point matériel dans un référentiel galiléen. Puis dans le cas d'un système fermé.

16. **Dynamique du point libre** : Dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, un projectile P de masse m est lancé du point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ inclinée d'un angle α sur l'horizontale (axe Ox). On note Oz la verticale ascendante et on choisit $v_{0z} > 0$. On ne tient pas compte ici des frottements dans l'air.

a) Déterminer l'équation de la trajectoire.
b) En supposant la vitesse initiale imposée en norme, déterminer la direction à lui donner (l'angle de tir α est variable) pour obtenir la plus grande portée au sol.
c) Quelle est l'expression de « la flèche » ?

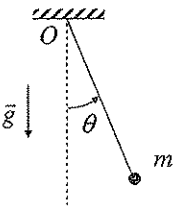
17. Les mouvements du point libre dans le champ de pesanteur diffèrent notablement de ceux établis à la question précédente (voir question **40.**). Il faut prendre en compte les frottements sur l'air. Rappeler les principales modélisations de la force de frottement fluide.

18. Dynamique du point lié : Quel problème se pose dans l'étude du mouvement d'un point contraint dans ses déplacements par un support matériel ?

19. Donner, en les justifiant, les lois de Coulomb sur le frottement solide de glissement.

20. Comment modélise-t-on la force de rappel élastique exercée par exemple par un ressort sur une de ses extrémités ? Étudier le mouvement d'une masse m, accrochée à un ressort horizontal (l'autre extrémité étant fixe), et mobile, sans frottements, sur une tige horizontale.
Tracer le portrait de phase de cet oscillateur.

21. Le pendule simple
Une bille de masse m est accrochée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable, de longueur l et suspendu en un point O fixe du référentiel terrestre. Dans cette question, on fait l'hypothèse d'un mouvement plan du pendule.



a) Établir l'équation différentielle du mouvement par application de la relation fondamentale de la dynamique. Dans l'hypothèse des petites amplitudes, quelle est la solution $\theta(t)$ sachant que le pendule a été lâché avec une vitesse initiale nulle dans la position $\theta = \theta_0$.
b) Quelle est la période T_0 des oscillations ? Commenter. Proposer une application numérique.

■ Énergie mécanique

22. Rappeler la définition du travail et de la puissance d'une force. Citer des cas de nullité de la puissance.

23. Calculer le travail d'une force constante. Peut-on appliquer ce résultat au poids ?

24. Énoncer puis démontrer le théorème de l'énergie cinétique (ou loi de l'énergie cinétique).

25. Définir un champ de force puis un champ de force conservatif. Quelle est la propriété fondamentale des champs de force conservatifs ?

26. À quelle condition peut-on écrire une conservation de l'énergie mécanique et pourquoi parle-t-on dans ce cas d'intégrale première du mouvement ?

27. Quelles sont les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique ?

28. Comment utiliser l'intégrale première de l'énergie pour étudier un mouvement, dans le cas d'un système conservatif à un paramètre ? Considérer les deux cas particuliers : barrière d'énergie potentielle et puits d'énergie potentielle.

Étude de l'équilibre

29. Quand dit-on qu'un point matériel est à l'équilibre ? Comment, qualitativement, peut-on distinguer un état d'équilibre stable d'un état d'équilibre instable ? Donner un exemple simple dans chaque cas.

30. Si le système considéré est à un paramètre (variable linéaire x ou angulaire θ) et **conservatif**, comment l'équilibre se traduit-il sur son énergie potentielle ?

31. Dans ce cas, proposer un développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de l'équilibre (il est conseillé d'introduire $\varepsilon = x - x_e$). Comment distinguer alors un état d'équilibre instable d'un état d'équilibre stable ? Dans ce dernier cas, qu'appelle-t-on approximation harmonique et quelle est alors la pulsation d'oscillation au voisinage de l'équilibre ?

Mouvements de particules chargées

32. Comment décrit-on l'interaction entre particules chargées ? Comment peut-on créer un champ électrique uniforme ? Quelle relation existe-t-il alors entre champ et différence de potentiel ? Comment peut-on créer un champ magnétique uniforme ?

33. Quelle est la puissance de la force de Lorentz ? Que peut-on dire des normes relatives des forces électromagnétiques et gravitationnelles ?

34. Une particule de masse m et de charge q, possède une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ au point O. À partir du point O où elle passe à $t = 0$, elle subit l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et indépendant du temps.

a) Étudier le cas où $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$ sont colinéaires.

b) Étudier le cas où $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$ sont orthogonaux.

35. Une particule de masse m et de charge q (de signe quelconque) se déplace à la vitesse $\vec{v}_0$ dans un référentiel galiléen. À partir de l'instant $t = 0$, elle pénètre dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ $(B > 0)$, uniforme et constant, $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux. Les sources de $\vec{B}$ sont immobiles dans le référentiel déjà cité.

a) Montrer que la trajectoire est plane. Utiliser l'expression de l'accélération dans la base de Frenet et montrer que la vitesse est constante en norme.

b) Montrer que la trajectoire est un cercle. Exprimer le rayon R du cercle en fonction de p_0 (quantité de mouvement), $|q|$ et B. Montrer que la période T est indépendante de v_0. Dessiner la trajectoire orientée et le champ $\vec{B}$ dans le cas $q<0$ et si à $t=0$, la particule est en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ La mécanique est une science fondamentalement vectorielle ; les flèches sur les vecteurs sont obligatoires et une égalité du genre « $\overrightarrow{vecteur} = scalaire$ » est à proscrire ; un effort est donc demandé sur l'exactitude et la précision des notations, car la négligence ou la désinvolture consistant à écrire $\vec{F} = -kx$, $m\vec{g} + \vec{R} = 0$, $\vec{v} = r\omega$,...sont mal perçues aux concours !

☐ Ne pas confondre les points et les vecteurs, notamment un point possède des **coordonnées** (qui peuvent être des grandeurs de nature différente : longueur, abscisse, angle) mais un vecteur possède des **composantes** (qui ont toutes la même unité) en projection sur une base vectorielle. Pour éviter la confusion, ne noter en colonne que les composantes de vecteur et jamais les coordonnées d'un point.

☐ Ne pas utiliser le terme repère à la place de référentiel (voir question **1.**).

☐ Il est primordial de bien distinguer référentiel d'étude et base de projection. Pour un mouvement donné d'un point matériel, le vecteur vitesse par exemple est parfaitement défini, à tout instant, par choix du référentiel d'étude ; une fois ce vecteur défini on peut le projeter sur n'importe quelle base fixe ou mobile par rapport au référentiel. La projection sur une base fixe du référentiel (base cartésienne) n'est absolument pas nécessaire et complique en général inutilement les calculs.

☐ Vitesse et accélération en physique signifie vecteur vitesse et vecteur accélération (ce qui diffère du langage courant). Il ne faut pas confondre $\frac{d\vec{v}}{dt}$ (c'est $\vec{a}$) et $\frac{dv}{dt}$ (c'est a_T, accélération tangentielle, « l'accélération » du langage courant).

☐ Il faut bien distinguer la notation r (parfois aussi notée ρ) des coordonnées cylindriques représentant la distance d'un point M à l'axe Oz de la notation r

en coordonnées sphériques représentant la distance du point M à l'origine O, comme pour les forces en $1/r^2$.

☐ Les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires doivent être sues par cœur (voir les questions **5.**).

☐ Les équations horaires (ou paramétriques) d'un mouvement sont, par exemple dans le plan en coordonnées cartésiennes, les relations qui donnent $x(t)$ et $y(t)$. La trajectoire du mobile s'obtient en éliminant le paramètre temps t, ce qui conduit à l'équation de la trajectoire $y = f(x)$.

☐ Veiller à ne pas considérer le vecteur $\vec{u}_\theta$ comme tangent à la trajectoire ! Ce n'est vrai que dans le cas très particulier du mouvement circulaire, et encore en considérant comme pôle le centre du cercle ! (voir les questions **36.** et **37.** pour éviter cette erreur).

☐ Utiliser dans les exercices de cinématique la remarque de cohérence très importante suivante : le vecteur accélération est *toujours* dans la concavité de la trajectoire, c'est-à-dire du même côté que la trajectoire par rapport à la tangente (voir question **12.**).

De même le produit scalaire : $\vec{a} \,.\, \vec{v}$ indique les variations de $\|\vec{v}\|$:

$$\vec{a} \,.\, \vec{v} > 0 \;\Rightarrow\; \|\vec{v}\| \text{ croît et } \vec{a} \,.\, \vec{v} < 0 \;\Rightarrow\; \|\vec{v}\| \text{ décroît.}$$

☐ Commencer par faire un dessin représentant le système à étudier. Éviter les situations particulières : coïncidences d'axes, angles trop proches de 45° (le sinus et le cosinus y sont trop voisins !). Toujours choisir des abscisses positives et des angles positifs sur le schéma (en indiquant les orientations) et inférieurs à $\pi / 2$.

☐ Comme dans tout problème de mécanique, il faut d'abord :
- ➤ définir le système étudié : en général, il est évident, sauf s'il est composé de plusieurs parties auquel cas une réflexion préalable s'impose sur les avantages-inconvénients de telle partie du système.
- ➤ préciser le référentiel d'étude (R), en général le référentiel du laboratoire (ou le référentiel terrestre) considéré comme galiléen, et qu'il convient de représenter symboliquement sur la figure.
- ➤ faire l'inventaire des forces en les représentant sur la figure voir conseil qui suit.

☐ Attention de ne représenter *a priori* sur le schéma que les forces parfaitement connues, ce qui n'est pas le cas des forces de réaction qu'il faut traiter avec prudence.
- ➤ Pour un point mobile sur un axe, la réaction normale n'est connue ni en direction (elle est dans le plan auquel l'axe est perpendiculaire) ni en norme. Elle *ne doit pas* être dessinée *a priori*. Elle ne sera connue que lorsque le mouvement sera connu.

- Pour un point mobile sur une surface, la direction de la réaction normale est connue mais pas sa norme ; la représenter alors avec une norme sans aucun rapport avec les autres forces.
- La tension d'un fil : sa direction et son sens sont connus, mais pas sa norme ; la représenter avec une norme sans aucun rapport avec les autres forces.
- La force de rappel élastique exercée par un ressort : sa direction est connue mais pas son sens qui dépend de l'allongement du ressort ; il ne faut la représenter qu'avec prudence. Pour projeter, utiliser la modélisation algébrique donnée à la réponse de la question **20.**.

☐ Le poids se note simplement $m\vec{g}$; la notation $\vec{P}$ est inutile.

☐ La relation fondamentale de la dynamique (RFD) conduit à une relation vectorielle écrite dans un référentiel d'étude (R). Il est ensuite nécessaire pour l'exploiter de la projeter sur une base de projection.
Il faut d'abord choisir un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème posé (direction privilégiée : cartésiennes, axe privilégié : cylindriques, point privilégié : polaires ou sphériques) et exprimer les vecteurs caractéristiques du mouvement, notamment $\vec{a}$, dans la base locale correspondante.
Les projections de la relation fondamentale sont quasiment imposées en dynamique du point lié, où il faut éliminer les forces de réaction, partiellement inconnues, pour pouvoir déterminer le mouvement.

☐ Attention aux expressions pièges « poids et réaction se compensent » ou « poids et réaction normale se compensent » invoquées avant l'étude du mouvement ! Elles supposent en effet que les forces de réaction seraient connues a priori, ce qui est évidemment faux. Les forces de réaction dépendent des autres forces **et** du mouvement (accélération), on n'y accède qu'après l'écriture du principe fondamental. Voir la question **42.** pour bien comprendre la différence entre $\vec{R}_n$ et $-m\vec{g}$, ainsi que toutes les questions de dynamique du point lié.

☐ Il convient de numéroter les équations scalaires, d'y faire référence lorsqu'on les utilise, de compter le nombre d'équations et le nombre d'inconnues avant de se lancer dans la résolution.

☐ L'équation différentielle issue de la RFD est du second ordre et son intégration conduit donc à l'introduction de deux constantes d'intégration (y penser !) ; leur détermination en vue d'obtenir une solution physique au problème suppose la connaissance de la vitesse initiale et de la position initiale du mobile étudié.

☐ Avant d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique, il faut bien préciser les deux instants entre lesquels on compte l'écrire. Si toutes les forces qui interviennent sont conservatives (notamment les champs de force qui dérivent d'une énergie potentielle), alors la conservation de l'énergie mécanique s'impose car elle conduit en général à moins d'erreurs (il est plus facile d'écrire la variation d'énergie potentielle de pesanteur que de recalculer le travail du poids...).

☐ L'énergie potentielle de pesanteur augmente avec l'altitude ; l'écriture $E_p = mgz$ suppose l'axe Oz suivant la verticale ascendante, il reste à préciser le choix de l'origine de cette énergie potentielle.

☐ Dans le cas particulier d'une masse suspendue à un support fixe à l'aide d'un fil inextensible (pendule), la tension du fil exercée sur la masse est radiale alors que la vitesse de celle-ci est orthoradiale (puisque le fil est de longueur constante) : la tension ne travaille donc pas. C'est le cas aussi d'une réaction normale, dans le référentiel lié au support, en l'absence de frottement.

☐ Le contact d'un mobile avec un support est rompu lorsque la réaction normale $\vec{R}_n$ qu'exerce le support sur le mobile s'annule.

☐ Pour un système conservatif à un paramètre, l'équilibre se traduit sur son énergie potentielle par $\frac{dE_p}{dx} = 0$ en variable linéaire x, ou $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ en variable angulaire θ.

Il ne faut pas dériver par rapport au temps : ~~$\frac{dE_p}{dt} = 0$~~ (confusion avec $\frac{dE_{méc.}}{dt} = 0$).

L'écriture $\frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0$ signifie qu'on a d'abord dérivé par rapport à x, puis on y a porté $x = x_e$, et pas l'inverse !

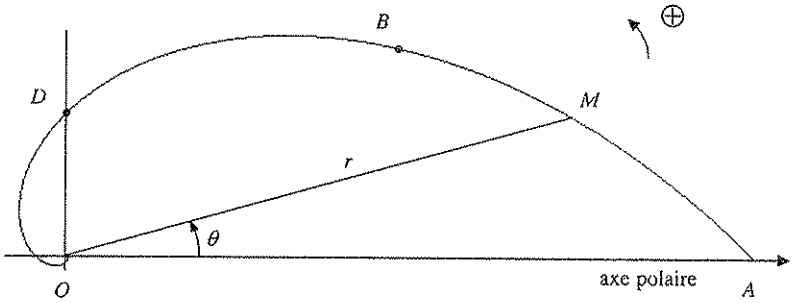
☐ Le champ électrique est toujours orienté vers les potentiels décroissants ; on dit couramment « du + vers le − ».

☐ Dans l'étude du mouvement d'une particule chargée soumise à un champ magnétique, la force magnétique est $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (avec $\vec{v}$ *a priori* inconnue), et pas $q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ (avec $\vec{v}_0$) qui ne sert qu'à la fin du calcul pour trouver le centre du cercle.

Applications directes du cours

Cinématique du point

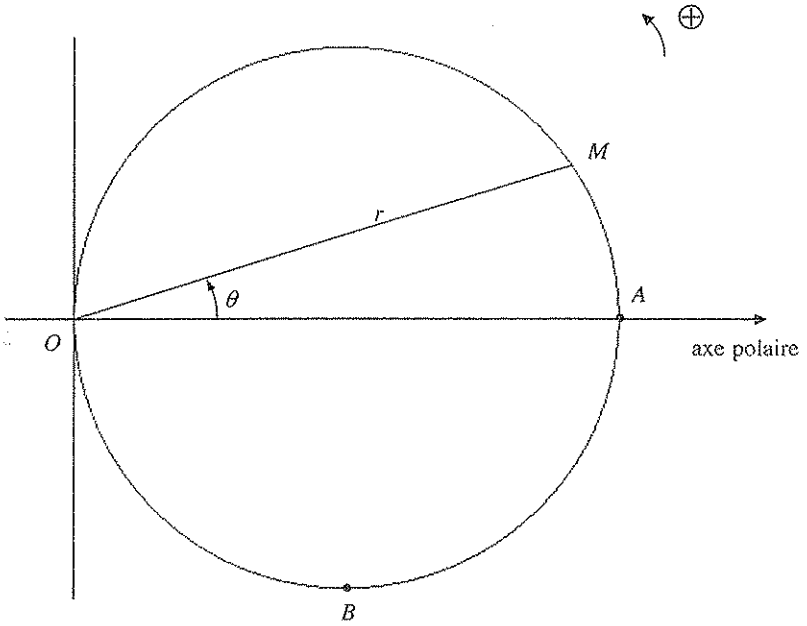
36. On repère la position d'un point M se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ de pôle O. L'allure de la trajectoire pour θ variant de 0 à 2π est :



Il décrit une spirale logarithmique d'équation : $r = a\,e^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a constante positive.

1. Dans un premier temps la loi horaire est $\theta = \omega t$ où la vitesse angulaire ω est une constante positive.
   a) Dessiner aux points A, B et D les vecteurs de la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
   b) Exprimer dans cette base locale les vecteurs vitesse et accélération du point matériel.
   c) Calculer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?
   d) Donner les composantes du vecteur vitesse aux points :
   $$A(\theta = 0) \text{ et } D(\theta = \pi/2) \text{ en fonction de } a \text{ et } \omega,$$
   et celle du vecteur accélération aux mêmes points en fonction de a et ω^2.
   En précisant l'échelle choisie pour $a\omega$ et $a\omega^2$, dessiner les vecteurs vitesse et accélération aux points A et D. Commenter.
2. Dans un deuxième temps le mouvement est uniforme de vitesse v_0. Trouver la loi horaire vérifiée par θ en prenant $\theta = 0$ pour $t = 0$.

37. Le point M de la question précédente décrit maintenant une trajectoire d'équation $r = d\cos\theta$ avec d constante positive et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$; son allure est donnée ci-après.
La loi horaire est $\theta = \omega t$ où la vitesse angulaire ω est une constante positive.



a) Dessiner aux points A et B les vecteurs de la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

b) Exprimer dans cette base locale les vecteurs vitesse et accélération du point matériel.

c) Donner les composantes du vecteur vitesse aux points $A(\theta = 0)$ et $B(\theta = -\pi/4)$ en fonction de d et ω, et celle du vecteur accélération aux mêmes points en fonction de d et ω^2. En précisant l'échelle choisie pour $d\omega$ et $d\omega^2$, dessiner les vecteurs vitesse et accélération aux points A et B.

d) Calculer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?
Calculer la norme du vecteur accélération et déterminer le rayon de courbure de cette trajectoire en un point quelconque. Interpréter ce résultat.

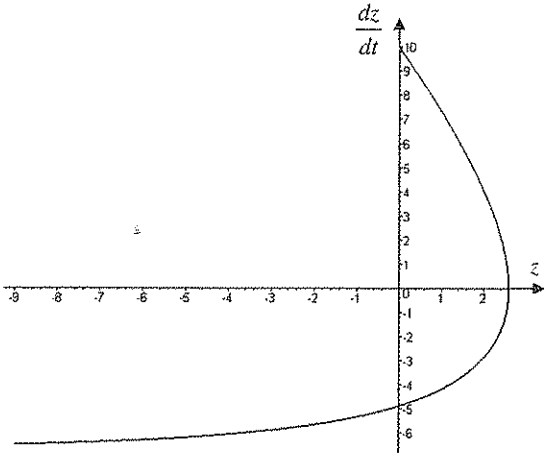
Lois de Newton et modélisation des forces

38. Une tige rectiligne verticale, de longueur $l = 80$ cm, lâchée avec une vitesse initiale nulle, tombe en chute libre dans le vide. Elle passe, au cours de sa chute, par un trou ménagé dans une plaque horizontale de faible épaisseur. Quand son extrémité inférieure atteint le trou, sa vitesse est $v = 5{,}0$ m.s^{-1}.
– quelle est sa vitesse v' lorsque son extrémité supérieure sort du même trou ?
– quelle est la durée T du passage de la tige à travers le trou ?

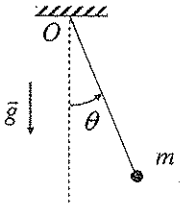
39. Exprimer l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique décrit à la question **20.**.

Montrer que l'on peut retrouver, à partir de cette énergie, l'équation différentielle du mouvement donnée par la relation fondamentale de la dynamique.
Montrer que la valeur de l'énergie mécanique est fixée par l'amplitude du mouvement harmonique.

40. On étudie le mouvement d'une balle, assimilable à un point matériel libre, dans le référentiel terrestre galiléen. Sa trajectoire est rectiligne, suivant la verticale du lieu Oz orientée vers le haut. On donne la trajectoire de phase ci-dessous : $\dot{z}$ en fonction de z. Les graduations sont en mètre pour z et mètre par seconde pour $\dot{z}$. Décrire le plus précisément possible le mouvement de la balle et ce que l'on peut en déduire sur les forces qu'elle subit.



41. Une bille de masse m est accrochée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable, de longueur l et suspendu en un point O fixe du référentiel terrestre galiléen. On fait l'hypothèse d'un mouvement plan du pendule.



a) On lâche la bille avec une vitesse nulle dans une position initiale faisant un angle θ_0 avec la verticale. Quelle est sa vitesse lors de son passage par la position verticale ?

b) Développer une méthode énergétique pour l'étude du mouvement. Établir la période de ce pendule, en considérant que θ reste petit.

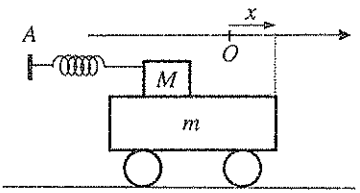
c) On lâche maintenant la bille avec une vitesse nulle dans une position initiale faisant un angle $\theta_0 = \pi/2$ avec la verticale. Exprimer, en fonction de θ la tension du fil à tout instant ; quelle est sa norme au passage par la verticale, commenter.

42. Une tige rectiligne Δ (axe Ox) horizontale tourne autour d'un axe vertical OZ avec une vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \text{cste} = \omega$, $\theta = (OX, Ox)$; $(OXYZ)$ est un repère fixe du référentiel (R) galiléen. Sur la tige Δ, peut coulisser sans frottement un anneau de masse m, assimilable à un point matériel.

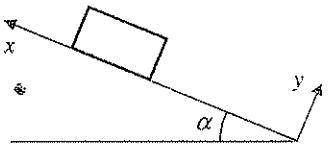
a) Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ {c'est-à-dire $x(\theta)$} de la trajectoire de l'anneau dans le référentiel (R) . À $t = 0$, $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$.

b) En déduire la réaction $\vec{R}$ appliquée par la tige sur l'anneau.

43. Un chariot de masse m se déplace sans frottements sur le sol. Sur ce chariot se trouve un bloc de masse M, le coefficient de frottement solide de glissement entre le bloc et le chariot est k. La constante de raideur du ressort est K et le point A est immobile.
Initialement $x = 0$ et le ressort est détendu, sa longueur est sa longueur à vide. On déplace très lentement le chariot, pour quelle(s) valeur(s) de x le bloc glisse-t-il sur le chariot ?



44. Un bloc de masse m est posé sur un plan incliné faisant l'angle α avec le plan horizontal. Le coefficient de frottement solide de glissement est égal à k.
On augmente progressivement α à partir de la valeur 0. Pour quelle valeur de α le bloc se met-il à glisser? À quoi peut servir cette expérience ? Décrire le mouvement dans le cas du glissement.



Énergie mécanique

45. Un point matériel est mobile sans frottement sur un plan horizontal ; on repère sa position par des coordonnées polaires de pôle O. Il est soumis à une force qui dérive de l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2} K_1 r^2 + \frac{K_2}{r}$, où r est la coordonnée distance du point matériel au point O et K_1 et K_2 sont deux constantes positives.

a) Exprimer cette force en admettant qu'elle est constamment colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

a) Montrer que, par rapport au point O, cette force est répulsive à faible distance et attractive à grande distance.

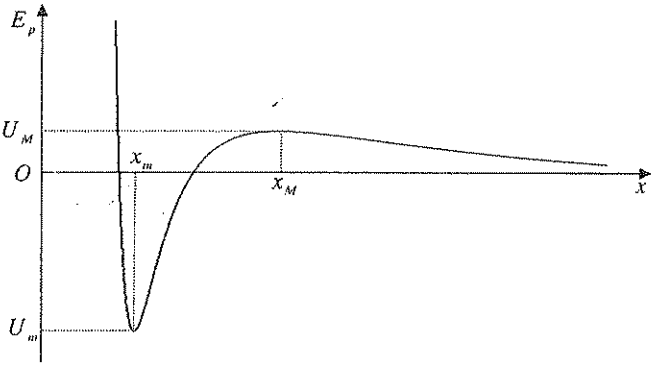
b) On fixe maintenant l'angle θ, le problème est alors à un paramètre : r. Déterminer la (ou les) position(s) d'équilibre du point. Étudier leur stabilité.

46. Un point matériel, de masse m, est mobile sans frottement sur un axe horizontal et soumis à un champ de force conservatif qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$ dont le graphe, à l'échelle, est donné ci-dessous :

Si l'énergie mécanique E du point matériel a pour valeur E_1 telle que $E_1 = U_m/2$, mesurer sur le graphe les valeurs approchées possibles de x en fonction de x_m .

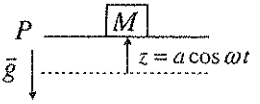
Si l'énergie mécanique E a pour valeur E_2 telle que $0 < E_2 < U_M$, le système est-il en état lié ou de diffusion ?

Quelle vitesse (norme et sens) doit avoir le point matériel, placé en $x = x_m$, pour s'échapper à l'infini ? Exprimer cette vitesse de libération en fonction de U_m, U_M et m.



47. L'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique de la question **20.** est-elle changée si le dispositif qui était horizontal est à présent vertical ? Expliquer soigneusement.

48. Un plateau oscillant horizontal P est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude a et de pulsation ω. Un corps M de masse m est posé sur P.



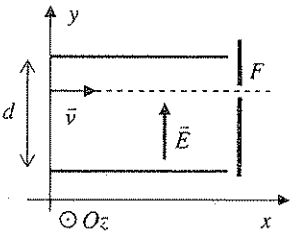
* Calculer la pulsation critique ω_0 en-dessous de laquelle M ne décolle jamais de P ; quelle est alors l'accélération du plateau, à tout instant et sa valeur maximale ?

* Pour $\omega > \omega_0$ (on peut prendre par exemple $\omega = 2\omega_0$), décrire qualitativement ce qui se passe si on pose le corps M sur P à $t = 0$ précisément.

■ Mouvements de particules chargées

49. Un électron libre, de vitesse initiale négligeable, est d'abord accéléré sous une différence de potentiel $\Delta V = 10$ kV. Quelle est alors sa vitesse v_0 au moment où il est injecté dans un appareil de Crookes dans lequel règne un champ magnétique $B = 5.10^{-3}$ T ? Que valent le rayon R du cercle trajectoire ainsi que la période T du mouvement ?

50. Des particules de charge $q > 0$ pénètrent avec une vitesse $\vec{v}$, dans un espace où règne un champ électrique uniforme, créé par deux plaques conductrices chargées distantes de d. La d.d.p. entre les plaques est U. Il règne aussi dans le même espace un champ magnétique uniforme orthogonal à $\vec{v}$.



a) Montrer que pour une valeur particulière v_0 de $\|\vec{v}\|$ et en choisissant le sens de $\vec{B}$, les particules peuvent avoir un mouvement rectiligne uniforme et passer par la fente F.
A.N. : $B = 0{,}10\,\text{T}$; $E = 1{,}0.10^4\,\text{V.m}^{-1}$

b) Le faisceau est constitué d'ions ${}_2^4\text{He}^{2+}$ et ${}_2^3\text{He}^{2+}$, de masses respectives $m_1 = 6{,}6.10^{-27}\,\text{kg}$ et $m_2 = 5{,}0.10^{-27}\,\text{kg}$. Ces ions, avant d'arriver dans le dispositif, ont été accélérés, à partir d'une vitesse négligeable, sous une même tension U_0. Montrer qu'en choisissant convenablement U, on peut recueillir l'un ou l'autre des isotopes en F.
A.N. : $U_1 = 100\,\text{V}$ permet de recueillir ${}_2^4\text{He}^{2+}$, quelle valeur U_2 de U permet-elle de recueillir ${}_2^3\text{He}^{2+}$?

51. Dans le demi-espace $x > 0$, règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}_1 = B_0\,\vec{u}_z$, et dans le demi-espace $x < 0$, règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}_2 = \frac{B_0}{2}\,\vec{u}_z$. Une particule de masse m et charge $q > 0$ est placée au point origine O, à $t = 0$, avec une vitesse $\vec{v} = v_0\,\vec{u}_x$, $v_0 > 0$.
a) Décrire et dessiner la trajectoire de la particule.
b) Définir et calculer la vitesse de « dérive » dans la direction Oy.
c) Reprendre les calculs avec dans le demi-espace $x < 0$ un champ magnétique uniforme $\vec{B}_2 = -B_0\,\vec{u}_z$.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

52. Quels sont les ordres de grandeur des durées suivantes ?
a) la période d'un électron autour d'un proton dans l'atome d'hydrogène
b) le temps de pose d'un appareil photo
c) la durée moyenne d'utilisation d'un sac plastique, le temps moyen de survie sur la bande d'arrêt d'urgence d'une autoroute
d) la période d'un satellite de basse altitude
e) la durée du mandat d'un maire, la durée de la cotisation pour une retraite à taux plein, l'échéance prévisionnelle d'épuisement des ressources en hydrocarbures
f) le temps de demi-vie du carbone 14 (qui sert aux datations), l'âge de la grotte Cosquer
g) l'apparition de l'homme sur Terre
h) la période de révolution du Soleil autour du centre galactique
i) l'âge de la Terre, de l'Univers

53. Quels sont les ordres de grandeur des distances suivantes ?
a) la taille des objets étudiés en nanotechnologie
b) la taille d'un globule rouge
c) l'épaisseur d'une feuille d'aluminium alimentaire, d'une feuille de papier
d) le diamètre d'un cheveu

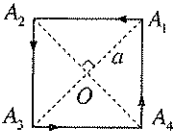
e) la taille du plus grand poisson, de l'arbre le plus haut
f) l'altitude de vol d'un avion commercial
g) l'altitude de la station orbitale ISS (station spatiale internationale)
h) les distances Terre-Lune et Terre-Soleil
i) la distance de l'étoile la plus proche du système solaire

54. Quels sont les ordres de grandeur des vitesses suivantes ?
a) la vitesse de croissance par jet atomique sur un substrat monocristallin
b) la vitesse d'éloignement de la Lune par rapport à la Terre, la vitesse d'éloignement de l'Amérique par rapport à l'Afrique dans la dérive des continents
c) la vitesse d'ascension d'un parapente, la vitesse moyenne lors d'une course de 100 m (record du monde 9,58 s établi par Usain Bolt en 2009)
d) la vitesse de l'air dans le nez lors d'un éternuement, la vitesse d'un avion à l'atterrissage
e) la vitesse linéaire de l'étoile 51 Peg. dans son mouvement dû à l'existence de la première planète extra solaire découverte
f) la vitesse du son dans l'air, la vitesse moyenne des molécules dans l'air
g) la vitesse d'un satellite de basse altitude
h) la plus grande vitesse atteinte par un objet macroscopique de fabrication humaine
i) la vitesse de la lumière dans le vide

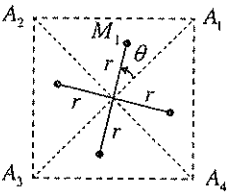
55. L'accélération s'exprime en « mètres par secondes au carré » ; comment faut-il comprendre physiquement « au carré » ?

56. On imagine l'expérience suivante : une corde est tendue sur le pourtour de la Terre, supposée sphérique, à même le sol, dans un plan méridien ; on rajoute ensuite 1 m supplémentaire de corde et la nouvelle corde est alors disposée de manière circulaire de telle sorte que son centre coïncide avec celui du modèle sphérique de la Terre. De combien s'est-elle élevée du sol ? Commentaire.

57. Quatre mouches sont aux sommets d'un carré $A_1A_2A_3A_4$ tel que $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = a$. La mouche M_i se dirige constamment vers la mouche M_{i+1} (on pose $M_5 \equiv M_1$) avec une vitesse de norme constante V.



a) On cherche la trajectoire suivie par chaque mouche, ainsi que les équations horaires définissant le mouvement sur ces trajectoires. Pour cela on peut remarquer que les quatre mouches jouent un rôle identique et donc que le système est invariant, à chaque instant, par rotation de $\pi/2$ autour de O. Les positions, à un instant quelconque, sont celles représentées sur la figure ci-contre. On repère la mouche M_1 par ses coordonnées polaires r et θ.



Établir les équations horaires $r(t)$ et $\theta(t)$, puis l'équation de la trajectoire d'une mouche.

b) Au bout de quelle durée τ les mouches vont-elles se rencontrer ?

c) Quelle est la distance L parcourue par chaque mouche ?

58. Comment peut-on comprendre qu'un mobile en mouvement circulaire, même uniforme, soit soumis à une accélération ?

59. En 1604, Galilée par sa loi de la chute des corps apprivoise le temps (pour la première fois dans l'histoire des sciences) en en faisant une variable mathématique (avant la mécanique de Newton) : « Dans le vide, la vitesse acquise est proportionnelle à la durée de chute et indépendante de la masse et de la nature du corps » (d'où $z = gt^2/2$). Résultat capital qui vient contredire la théorie d'Aristote sur le mouvement, laquelle postulait depuis près de deux millénaires que « la vitesse de chute était d'autant plus élevée que la corps était massif ». Selon Aristote donc, une grosse boule tombe plus vite qu'une petite plus légère. Galilée imagine alors l'expérience de pensée suivante : il relie les deux boules par une corde...Par quel double raisonnement sur ce système arrive-t-il à rendre la théorie d'Aristote contradictoire ?

60. Un système fermé est évidemment de masse constante, la réciproque est-elle vraie ?

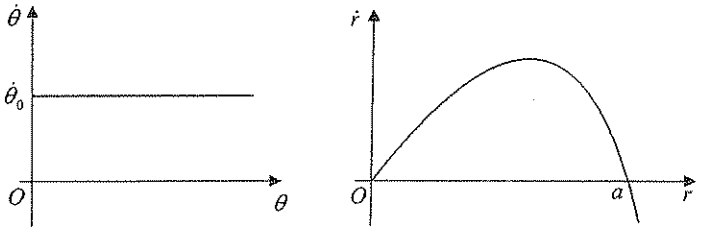
61. Si on coupe un ressort en deux parties inégales, les deux ressorts obtenus auront-ils la même constante de raideur ?

62. Le balancier d'une horloge (à l'ancienne) est un pendule mobile autour d'un axe horizontal passant par le point O et constitué d'une tige et d'un poids de centre de masse G ; la distance OG est variable car le poids est calé au moyen d'une vis réglable. L'horloge avance ; que faut-il faire ?

63. Citer deux exemples de force non conservative, une qui diminue l'énergie mécanique et une qui l'augmente.

64. Si l'on considère que l'écriture du travail élémentaire δW d'une force sous la forme $-dE_p$ établit qu'elle dérive d'une énergie potentielle, pourquoi la relation issue du théorème de l'énergie cinétique (valable pour une force quelconque !) $\delta W = dE_c$ n'a évidemment pas cette signification ?

65. Le mouvement plan d'un point matériel, repéré par des coordonnées polaires, est décrit par les trajectoires de phase ci-dessous.



a) Montrer que la position $r = 0$ est une position d'équilibre instable.
b) Montrer que le point matériel peut avoir une trajectoire circulaire.
c) Donner l'allure des trajectoires dans le plan du mouvement et décrire ce mouvement en considérant à l'instant initial $r(0) = r_0 > a$, puis $r(0) = r_0 < a$.

66. Expliquer qualitativement pourquoi la chute « libre » avec frottement de l'air conduit à une vitesse limite. Exprimer cette vitesse limite dans les deux cas de modélisation vus à la question **17.**.
En considérant un modèle de frottement en $-\lambda \vec{v}$ pour le mouvement étudié à la question **40.**, donner une valeur approchée du coefficient λ (on prend : $m = 100$ g).

67. Un mobile soumis à la pesanteur et à une force de frottement fluide opposée à la vitesse est lancé avec une vitesse initiale inclinée d'un angle sur l'horizontale. Quel raisonnement simple (les calculs de trajectoire sont superflus...) permet de prouver que sa vitesse (en norme) est minimale *après* le sommet de la trajectoire ?

68. Montrer que l'énergie potentielle d'une charge test placée en un point de l'espace où règne un champ $\vec{E}$ s'identifie au travail d'un opérateur pour l'amener de manière quasi statique de l'infini à la position finale $\vec{r}$ dans le champ $\vec{E}$.

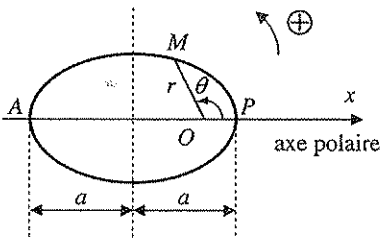
69. Quelle est la vitesse acquise par un électron (initialement de vitesse négligeable) accéléré sous une différence de potentiel de 250 kV ? Commentaire.

70. Pourquoi les champs magnétiques sont-ils si utiles dans les « accélérateurs » de particules ? Et pour quelle raison les électroaimants conventionnels ont-ils été remplacés par des aimants supraconducteurs ?

Exercices

71. Cinématique d'un satellite terrestre (*)

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M, est en orbite autour de la Terre. Il décrit, dans un référentiel lié au centre de la Terre O et à des axes Ox, Oy et Oz dirigés vers des étoiles lointaines, une trajectoire plane. Il est repéré par ses coordonnées polaires r et θ de pôle O.



Sa trajectoire est une ellipse d'équation : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ où p et e sont deux constantes positives caractéristiques de la trajectoire : p est appelé le paramètre et e l'excentricité. La trajectoire est décrite dans le sens des θ croissants.

a) Déterminer les expressions littérales de p et e en fonction de r_P et r_A (cf. figure), P est le point de l'ellipse le plus près du point O et A en est le point le plus éloigné. Faire les applications numériques en prenant :

$$a = 16.10^3 \text{ km et } OP = 8{,}0.10^3 \text{ km}.$$

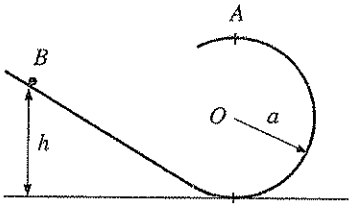
b) Dans ce type de mouvement, l'accélération est radiale. Démontrer qu'alors la quantité $r^2\dot{\theta}$ reste constante au cours du mouvement ; on la note C.
Montrer que dans ces conditions les vitesses en P et A sont orthoradiales.
Exprimer C en fonction de r_P et de v_P norme du vecteur vitesse en P. En déduire la valeur numérique de C. Donnée : $v_P = 8{,}6 \text{ km.s}^{-1}$.

c) Déterminer puis calculer v_A, la vitesse de M au point A. Comparer cette vitesse à v_P et commenter.

d) Exprimer la surface « balayée » par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ pendant dt. En utilisant le résultat établi au b), justifier que le satellite décrive son orbite suivant la loi de aires : le vecteur position balaye des aires égales pendant des durées égales. Interpréter alors le résultat du c).

72. Looping dans une gouttière

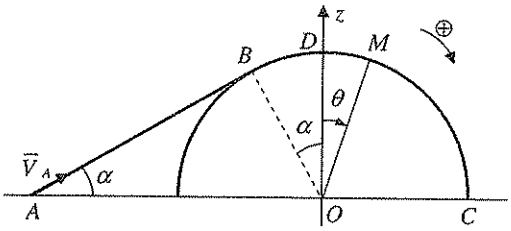
Une gouttière a l'allure ci-contre :
On lâche un point matériel de masse m, du point B avec une vitesse initiale nulle. Le mouvement se fait sans frottements et dans le plan vertical. De quelle hauteur h doit-on lâcher le point matériel pour qu'il effectue un tour complet du cercle intérieur (c'est-à-dire pour qu'il passe le point A) ?



Pour quelles valeurs de h, le point matériel quitte-t-il la gouttière dans la partie circulaire ? Dans ce cas, donnez la relation entre h et le point de « décollage ».

73. Franchissement d'une bosse

Un palet M de masse m, assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste contenue dans un plan vertical. Elle est composée d'une portion rectiligne AB, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, tracée sur une sphère, de rayon R et d'angle $\widehat{BOC} = \pi/2 + \alpha$ (cf. figure). α est un angle arithmétique, non orienté. Le palet initialement lancé depuis A avec une vitesse de norme V_A et glisse sans frottement sur la piste. On désigne par g la norme du champ de pesanteur.



a) Montrer que le palet ne peut pas décoller entre A et B.

b) À quelle condition sur V_A, le point B est-il atteint ?

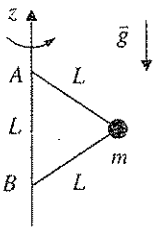
c) À quelle condition sur V_A n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet de la sphère ?

d) Le palet ayant franchi le sommet sans décoller, pour quelle valeur θ_d de θ quittera-t-il la piste après le sommet ? Comparer θ_d et α.

74. Un pendule tournant

Une bille, masse m, est attachée à deux fils inextensibles, de longueur L, fixés en A et B tels que $AB = L$.

La bille convenablement lancée, puis abandonnée, a un mouvement circulaire uniforme dans un plan horizontal (les fils étant tendus).



a) Exprimer la tension de chaque fil en fonction de m, L, g et ω, vitesse angulaire du mouvement circulaire de la bille.

b) Quelle est la vitesse angulaire minimale pour que les fils restent tendus ?

75. Pendule oscillant sur un plan incliné (*)

Un pendule simple, de masse m assez petite pour être considérée comme ponctuelle, est accrochée à un fil inextensible de longueur L. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point A fixe dans le référentiel terrestre galiléen.

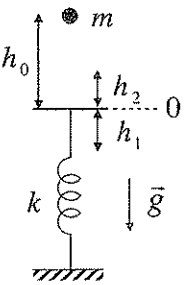
Le point A est un point d'un plan incliné formant un angle α (constant) avec l'horizontale. La masse m oscille en glissant avec frottements sur le plan incliné, le coefficient de frottement solide est k. Le fil du pendule reste donc dans un plan parallèle au plan incliné.

La masse m lâchée avec une vitesse nulle du point M_1 (AM_1 fait l'angle $\theta_1 > 0$ avec la ligne de plus grande pente) remonte en un point M_2 qu'elle atteint avec une vitesse nulle (AM_2 fait l'angle $\theta_2 < 0$ avec la ligne de plus grande pente).

Exprimer k en fonction de α, θ_1 et θ_2.

76. Oscillations amorties d'un plateau

Une boule (de pâte à modeler) de masse $m = 250$ g tombe en chute libre (vitesse initiale nulle) d'une hauteur $h_0 = 40$ cm sur un plateau immobile, de masse négligeable, et supporté par un ressort. On considère, qu'au moment du contact, il n'y a pas de perte d'énergie mécanique. La boule a donc la même vitesse juste avant le contact et juste après lorsqu'elle est solidaire du plateau et se met à osciller avec lui.



a) Sachant que le ressort a pour raideur $k = 500$ N.m^{-1}, déterminer la hauteur h_1 dont s'affaisse le plateau. Quelle est la hauteur maximale h_2 atteinte par la boule lors des oscillations ? Commentaire.

b) En réalité les oscillations sont amorties et le système finit par s'immobiliser. Calculer la hauteur d'équilibre h_e et commenter la relation entre h_1, h_2 et h_e.

En déduire la variation d'énergie mécanique ΔE du système entier entre la situation h_0 et la situation h_e ; commenter son signe.

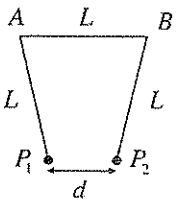
77. Équilibre de masses chargées électriquement

Deux particules ponctuelles P_1 et P_2 de charge q_1 et q_2 (algébriques) interagissent par une force électrostatique. La force exercée par P_1 sur P_2 est :

$$\vec{f}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{12}$$

où r est la distance entre les deux points et $\vec{u}_{12}$ un vecteur unitaire dirigé de P_1 vers P_2. La constante $1/4\pi\varepsilon_0$ vaut $9{,}0.10^9$ u.SI.

Les deux particules P_1 et P_2 de même masse $m = 10$ g et de même charge q en valeur absolue sont suspendues à des fils de longueur $L = 30$ cm. Les points d'ancrage A et B des fils sont distants également de L. À l'équilibre, la distance entre les particules est $d = 20$ cm.



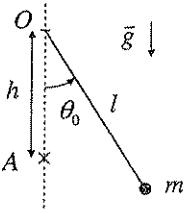
a) Que peut-on dire du signe des deux charges ? Quel est l'angle α que font les fils avec la verticale ?

b) Calculer q.

c) Déterminer la tension d'un fil à l'équilibre.

78. Pendule contrarié

Une masse ponctuelle m est accrochée à l'aide d'un fil sans masse de longueur l au point fixe O ; on la lâche avec une vitesse nulle et avec un angle θ_0. On suppose le mouvement dans un plan vertical. À la verticale de O, en un point A à la distance $h < l$, est fixé un clou, de section négligeable (on suppose que m a la même vitesse juste avant et juste après le contact du fil en A).

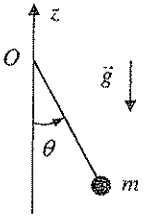


À quelle condition sur θ_0, la masse fait-elle un tour entier autour de A, fil tendu ?

79. Le mouvement d'un pendule simple est-il plan ? (*)

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle m accrochée à un fil inextensible de longueur L. Ce fil est fixé à un point O fixe dans le référentiel terrestre galiléen.

La position de m est repérée par l'angle θ que forme le fil avec la verticale Oz (voir figure). L'exercice se propose de démontrer que si la masse m est lâchée, écartée de θ_0, avec une vitesse initiale nulle, alors le mouvement est plan dans le plan défini par la direction initiale du fil et la verticale.



On utilise des coordonnées cylindriques d'axe Oz, notées r, φ et z.

a) Représenter sur un schéma clair ces coordonnées et montrer que $r = L \sin\theta$.

b) Projeter la relation fondamentale de la dynamique, appliquée à m, sur $\vec{u}_\varphi$ et en déduire une relation simple entre r et $\dfrac{d\varphi}{dt}$.

c) En déduire qu'avec les conditions initiales choisies, le mouvement est plan. Quelles conditions initiales plus générales entraînent un mouvement plan du pendule ?

80. Rebonds d'une balle : portrait de phase

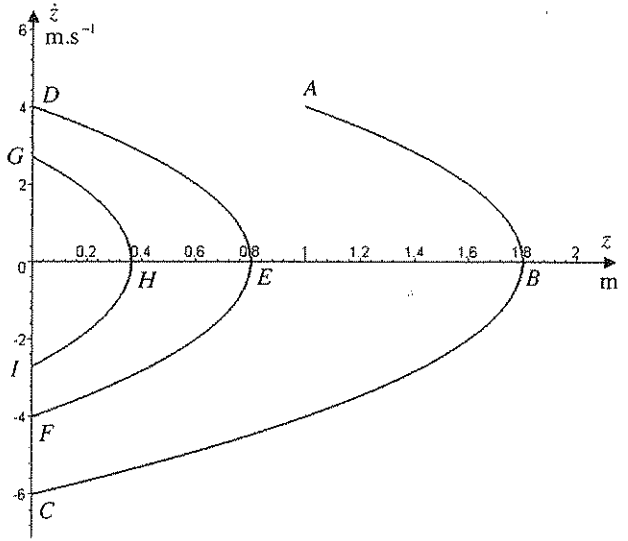
Une balle en caoutchouc de masse m est considérée comme un point matériel. L'étude du mouvement s'effectue dans le référentiel terrestre galiléen. L'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante.

À l'instant initial, $t=0$, on lance la balle M avec une vitesse $\overline{v_0}$ suivant l'axe Oz ascendant à partir d'un point de hauteur h par rapport au sol, on prendra $h = 1{,}0\,\text{m}$. On néglige tout frottement.

a) Déterminer, en fonction de g, v_0 et t, les expressions de la vitesse $v_z(t) = dz/dt$ et de la position $z(t)$. Préciser les expressions de la **norme** notée v_s de la vitesse et de l'instant t_s quand la masse touche le sol, en fonction de v_0, g et h.

b) Donner une expression de z en fonction de v_z, v_0 et h. Étudier et tracer la courbe $z(v_z)$.

c) Déduire simplement du graphe précédent, la trajectoire de phase v_z en fonction de z pour $t \in [0, t_s]$. On précisera les points remarquables.



d) On donne ci-dessus la trajectoire de phase pour une durée supérieure à t_s. Justifier le sens de parcours *ABCDEFGHI*. Comment expliquer le passage de *C* à *D* ? Comment déduit-on du graphe que l'énergie mécanique de la balle diminue

sur une durée supérieure à t_s ? Estimer la perte d'énergie mécanique entre C et D (on prendra $m = 0{,}10\,\text{kg}$ et $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$). Entre quels autres points peut-on retrouver cette diminution d'énergie ?

81. Molécule diatomique

On considère une molécule diatomique formée de deux atomes M_1 et M_2 ponctuels, partiellement ionisés et de charges respectives $q_1 = +\delta e$ et $q_2 = -\delta e$.

L'énergie potentielle d'interaction entre les atomes est assez bien représentée par :

$$U(r) = -\frac{\delta^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{A}{r^9}$$, avec A constante positive et r la distance M_1M_2.

Pour simplifier M_1 est immobile dans un référentiel galiléen, et l'étude concerne le mouvement de M_2 (de masse m) sur un axe passant par M_1 et fixe dans ce référentiel galiléen. La seule force s'exerçant sur M_2 est donc due à M_1 et dérive de l'énergie potentielle d'interaction.

a) Indiquer si chacun des termes de l'énergie potentielle correspond à une force attractive ou répulsive. Donner une signification physique de ces termes.

b) Donner l'allure du graphe de $U(r)$

c) Donner la valeur $r = r_e$ à l'équilibre. L'équilibre est-il stable ?

d) Exprimer au voisinage de la position d'équilibre.

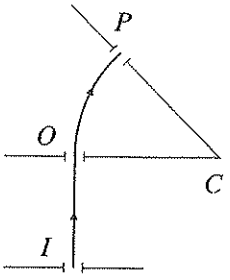
(utiliser pour cela $f(r_e + dr) = f(r_e) + \left(\frac{df}{dr}\right)_{r_e} dr$)

Identifier avec une force de rappel élastique, comment s'exprime la constante de raideur k correspondante en fonction de δe, ε_0 et r_e ?

e) Trouver la fréquence de vibration de la molécule en fonction de δe, ε_0, r_e et m.

82. Sélecteur de masse

Des ions or Au^+ sont produits juste avant le point I avec une vitesse négligeable ; ils sont d'abord accélérés par un champ électrique uniforme $\vec{E}$ dans la zone entre I et O, puis déviés par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ dans le secteur de centre C entre O et P.



a) Quel doit être le sens du champ $\vec{E}$? Donner la valeur numérique de la vitesse v_0 des ions au passage par O, sachant que les plans équipotentiels perpendiculaires à IO sont aux potentiels $V_I = 0$ et $V_O = -46{,}3\,\text{kV}$, et que la masse molaire de l'or est $M_{Au} = 197\,\text{g.mol}^{-1}$.

b) Quel doit être le sens du champ $\vec{B}$ pour que les ions soient déviés comme sur la figure ? Quel doit être la valeur de sa norme B pour que C soit le centre de la trajectoire sachant que $r_0 = CO = 0{,}5\,\text{m}$?

Il peut exister dans le jet initial, des ions de même charge que les ions Au^+, mais de masse voisine, extraits et accélérés en même temps que ces derniers. Le tableau périodique donne : ${}^{195}_{78}Pt$, ${}^{197}_{79}Au$ et ${}^{200}_{80}Hg$.

c) Expliquer en quoi ce système d'accélération et de déflexion joue le rôle de sélecteur de masse. Comment r_0 dépend-il de m ? Faire une figure avec m_1 passant en P et $m_2 < m_1$.

d) En P est placée une fente symétrique de largeur totale D. Estimer la plus grande valeur de D qui permet de ne sélectionner que les ions Au^+.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

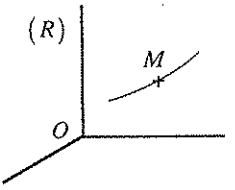
■ Cinématique du point

1. Un référentiel est un objet (**solide**) par rapport auquel on étudie le mouvement, par exemple d'un point M. L'étude des déplacements de M nécessite des mesures de durées, le référentiel comprend donc aussi **une horloge**. La nature du mouvement de M (trajectoire, vitesse...) dépend du référentiel choisi

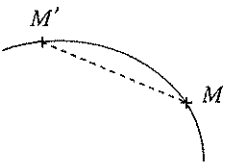
Le solide de référence pouvant être quelconque, on le représente symboliquement par un point et trois axes (appelé aussi repère).

En théorie, nommer ces axes n'a aucune utilité, les prendre perpendiculaires n'est pas indispensable.

La représentation peut faire penser à un simple repère, mais le référentiel nécessite aussi une horloge, le terme repère n'est pas approprié.



Entre deux positions M (à la date t) et M' (à la date $t + \Delta t$) le vecteur vitesse moyen est $\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$. La trajectoire (ou courbe), ensemble des positions de M au cours du temps, est quelconque. $\overrightarrow{MM'}$ est porté par la corde MM' et correspond bien à la notion de direction moyenne entre M et M'.



La vitesse en M est définie comme la limite quand $M' \to M$ (soit $\Delta t \to 0$) du vecteur vitesse moyen. $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$. Il résulte de cette définition que la direction du vecteur vitesse est la position limite de la corde quand $M' \to M$, qui par définition est la **tangente à la courbe en M.**

Soit O un point fixe du référentiel (R) :

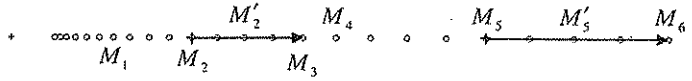
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)$$

$$\vec{v}(M)_{(R)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(M)_{(R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

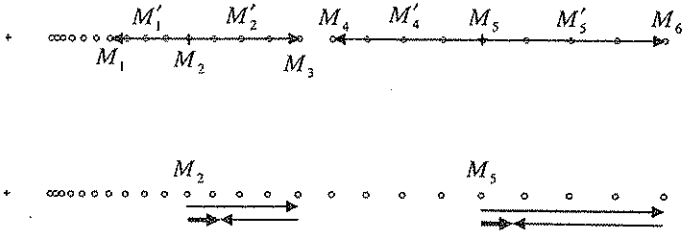
Par ailleurs... $\boxed{\vec{a}(M)_{(R)} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$

Le vecteur accélération $\vec{a}(M)_{(R)}$ caractérise les variations du vecteur vitesse, comme le vecteur vitesse caractérise les variations du vecteur position.

2. Le référentiel d'étude est le banc (référentiel terrestre), O est un point fixe du référentiel. La trajectoire est imposée : le mouvement est rectiligne. Le vecteur vitesse en M_2' est approximé par le vecteur vitesse moyen entre M_2 et M_3 (séparés de 80 ms), lui-même proportionnel au vecteur $\overrightarrow{M_2M_3}$. On constate que $\vec{v}$ est porté par la droite support du mouvement et que $\|\vec{v}\|$ augmente au cours du temps.



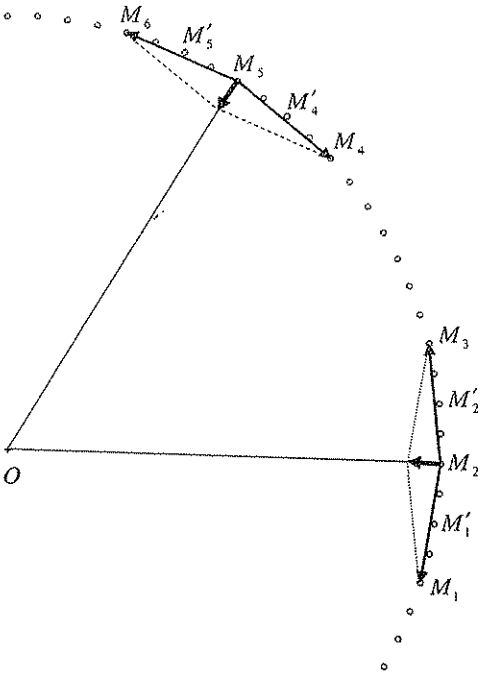
Pour l'accélération en M_2, par exemple, on utilise $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(M_2') - \vec{v}(M_1')}{\Delta t}$. Sur les schémas on a porté $\vec{v}(M_2')$ et $-\vec{v}(M_1')$, puis réalisé la somme (flèche épaisse), ce qui donne $\Delta\vec{v}$ proportionnel à $\vec{a}$. Le vecteur accélération est porté par la droite support du mouvement, $\|\vec{a}\|$ semble constante.



Le vecteur accélération traduit les variations de $\vec{v}$. La direction de $\vec{v}$ ne changeant pas, l'accélération déterminée graphiquement traduit une variation de la norme de $\vec{v}$ constatée au début de la question.

3. Le référentiel d'étude est la table (référentiel terrestre), O est un point fixe du référentiel. La trajectoire est imposée, le fil tendu impose une distance constante de M à O : la trajectoire est un cercle de centre O. Les constructions utilisent les mêmes approximations et méthodes qu'à la question précédente.

En décalant, par exemple $\overrightarrow{M_2M_3}$ en M_2', la vitesse (proportionnelle à $\overrightarrow{M_2M_3}$) apparaît bien tangente à la trajectoire. Sa norme est constante.
Le vecteur accélération est dirigé vers O, donc porté par un rayon, sa direction est perpendiculaire à la tangente en M. La norme de $\vec{v}$ étant constante, l'accélération non nulle traduit donc une variation de la direction de $\vec{v}$ (évidente pour un mouvement circulaire).



4. La base cartésienne (base vectorielle de projection) est une base très particulière, elle est associée aux axes du référentiel. Les vecteurs (unitaires) de la base sont portés par ces axes, ils sont donc fixes dans le référentiel (R). Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, dans cette base, sont les coordonnées cartésiennes du point M. Attention il s'agit d'un cas particulier, ce n'est pas une définition générale des composantes du vecteur position.

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}$$

où $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont les vecteurs unitaires de la base cartésienne.

Vitesse dans (R), avec les dérivées des vecteurs de la base nulles dans (R) :

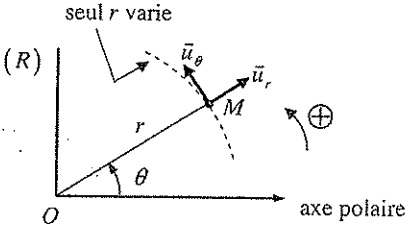
$$\boxed{\vec{v}(M)_{(R)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R)} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z}$$

Accélération dans (R) :

$$\boxed{\vec{a}(M)_{(R)} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{(R)}}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{(R)} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z}$$

5. Pour un mouvement dans un plan, si un point du plan joue un rôle particulier pour le système étudié, la distance à ce point est un paramètre important de l'étude. On construit un système de coordonnées dont la première coordonnée est cette distance. En coordonnées cartésiennes, cette distance s'exprime de façon compliquée : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si r variait seule, le point M se déplacerait suivant la droite OM, le vecteur $\vec{u}_r$ est dans la direction de ce déplacement, unitaire et dans le sens des r croissants.
Si θ variait seule, le point M se déplacerait sur le cercle de centre O et de rayon r, le vecteur $\vec{u}_\theta$ est dans la direction de ce déplacement (tangent à ce cercle), unitaire et dans le sens des θ croissants.



Le vecteur position s'exprime très simplement dans la base locale polaire (une seule composante :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$$

Pour exprimer le vecteur vitesse, on cherche les composantes du vecteur déplacement $d\overrightarrow{OM}$, en considérant successivement les déplacements dus à une variation dr de r, puis $d\theta$ de θ. Si r varie seule le déplacement (sur OM) est $dr\,\vec{u}_r$, si θ varie seule le déplacement (sur cercle (O, r)) est $r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$:

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v}(M)_{(R)} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}$$

Il s'agit bien de la vitesse par rapport au référentiel (R), projetée sur une base locale mobile, $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dépendent de θ qui dépend de t.

Pour exprimer le vecteur accélération, on dérive $\vec{v}$ dans (R), pour les dérivations de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, voir le chapitre **0.**

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

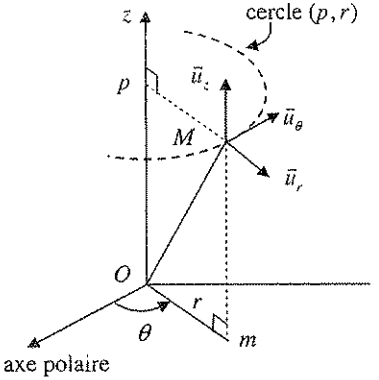
avec : $\left(\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_{(R)} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\left(\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{(R)} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

$$\boxed{\vec{a}(M)_{(R)} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta}$$

Cette relation, très utile, doit être mémorisée.

6. Si un axe de l'espace joue un rôle particulier pour le système étudié (par exemple rotation autour d'un axe), la distance à cet axe est un paramètre important de l'étude. On construit un système de coordonnées dont la première coordonnée est cette distance. Si on note Oz l'axe privilégié, on retrouve avec le plan perpendiculaire, l'équivalent du plan polaire de la question précédente. Ce qui montre l'intérêt de

garder la notation r pour la distance à l'axe, $r = Om = pM$. Les vecteurs de la base locale, associée au système de coordonnées, sont définis de la même façon. On ajoute le vecteur $\vec{u}_z$, unitaire et dans la direction du déplacement si seule z varie.
Les composantes des vecteurs sur $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ sont qualifiées respectivement de radiale, orthoradiale et axiale.



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z}$$

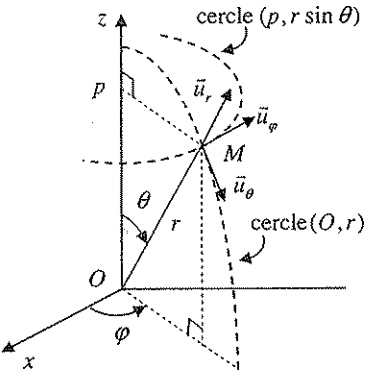
Malgré les apparences le vecteur position dépend bien de θ, car $\vec{u}_r$ en dépend. En revanche il n'a aucune composante orthoradiale (sur $\vec{u}_\theta$).
De même qu'à la question précédente, on obtient le vecteur déplacement :
$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$, on en déduit :

$$\boxed{\vec{v}(M)_{(R)} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z}$$

Pour le vecteur accélération, on ajoute seulement le terme $\ddot{z}\,\vec{u}_z$, puisque $\vec{u}_z$ est fixe dans (R) :

$$\boxed{\vec{a}(M)_{(R)} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z}$$

7. Si un point de l'espace joue un rôle particulier pour le système étudié (par exemple centre attracteur gravitationnel), la distance à ce point est un paramètre important de l'étude. On construit un système de coordonnées dont la première coordonnée est cette distance. L'angle θ est la colatitude et φ la longitude. Si on note O le point privilégié, on retrouve dans le plan $(OM$, réf. $Oz)$, l'équivalent du plan polaire de la question **5.**. Les vecteurs de la base locale, associée au système de coordonnées, sont définis de la même façon. On ajoute le vecteur $\vec{u}_\varphi$, unitaire et dans la direction du déplacement si seule φ varie (tangent au cercle $(p,\ r\sin\theta)$).



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$$

Malgré les apparences le vecteur position dépend bien de θ et de φ, car $\vec{u}_r$ en dépend. C'est dans la base locale sphérique que son expression est la plus simple.
De même qu'à la question précédente, on obtient le vecteur déplacement :

$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$, on en déduit :

$$\boxed{\vec{v}(M)_{(R)} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi}$$

8. Un mouvement est uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante :

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \text{cste}}$$

Cette définition s'applique quelle que soit la trajectoire.

Le mouvement est rectiligne si la trajectoire est une droite.

$$\boxed{\text{Un mouvement rectiligne et uniforme si et seulement si } \vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}}}$$

Ce qui s'écrit aussi : $\vec{a} = \vec{0}$.

9. Écrivons $\vec{a} = a_0\,\vec{u}_y$ et projetons sur une base cartésienne :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = a_0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = a_0 t + \dot{y}_0 \\ \dot{z} = \dot{z}_0 \end{cases}$$

Pour que le mouvement soit rectiligne, il faudrait : $\dot{x}_0 = 0$ et $\dot{z}_0 = 0$, ce qui n'est pas vérifié si la vitesse initiale a une composante dans une direction orthogonale à celle de $\vec{a}$.

Avec les conditions initiales ($\dot{x}_0 \neq 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$) et $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$\begin{cases} x = \dot{x}_0 t \\ y = \dfrac{1}{2} a_0 t^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{a_0}{2\,\dot{x}_0^{\,2}}\,x^2$$

la trajectoire est parabolique (voir aussi la question **16.**).

10. La trajectoire est un cercle. Le mouvement est plan, on choisit le plan $z = 0$. On prend un système de coordonnées polaires avec le pôle O au centre du cercle, ce qui permet de traduire simplement que la distance du point M au centre du cercle est constante avec $r = \text{cste} = R$. Il vient $\dot{r} = 0$ et $\dot{z} = 0$, on note $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse angulaire (pas nécessairement constante).

* la vitesse est orthoradiale : $\boxed{\vec{v}(M)_{(R)} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\omega\,\vec{u}_\theta}$ si le pôle O est le centre du cercle et $\boxed{v = R\omega}$. On remarque que dans ce cas la vitesse tangente à la trajectoire est porté par $\vec{u}_\theta$, donc que $\vec{u}_\theta$ est ici le vecteur tangent. Ceci est dû au choix du pôle au centre du cercle, ce n'est pas un résultat général (voir question **36.**)

* l'accélération est : $\boxed{\vec{a}(M)_{(R)} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = -\dfrac{v^2}{R}\,\vec{u}_r + \dfrac{dv}{dt}\,\vec{u}_\theta}$

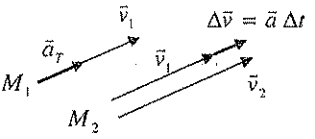
11. Pour un mouvement circulaire uniforme, dont le centre est le pôle des coordonnées polaires :

$$\boxed{\vec{v}(M)_{(R)} = R\,\omega\,\vec{u}_\theta} \quad \text{avec} \quad \omega = \text{cste}\,, \text{et} \quad \boxed{\vec{a}(M)_{(R)} = -R\,\omega^2\,\vec{u}_r}$$

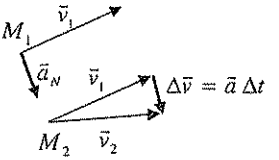
L'accélération du mouvement circulaire uniforme n'est pas nulle, le vecteur accélération, dirigé dans ce cas vers le centre du cercle, décrit les variations de la direction du vecteur vitesse (c'est le cas de l'étude question **3.**).

12. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \approx \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$

Les variations de $\|\vec{v}\|$ sont décrites par la composante tangentielle $\vec{a}_T$ de $\vec{a}$. En effet si $\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{v}_1$, $\Delta\vec{v} = \vec{a}\,\Delta t$ est colinéaire à $\vec{v}_1$ et donc $\vec{v}_2$ est colinéaire à $\vec{v}_1$, seule la norme change. C'est le cas traité à la question **2.**.



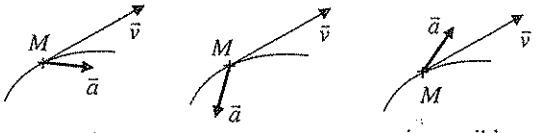
Les variations de la direction de $\vec{v}$ sont décrites par la composante orthogonale à la tangente (dite normale) $\vec{a}_N$ de $\vec{a}$. En effet si $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$, $\Delta\vec{v} = \vec{a}\,\Delta t$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et donc $\|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\|$ (car $\Delta\vec{v}$ très petit), seule la direction change. C'est le cas traité à la question **3.**.



En considérant $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$, le changement de direction de $\vec{v}$ créé par $\vec{a}_N$ entraîne une courbure de la trajectoire dans le même sens :

$\vec{a}$ est toujours dans la concavité de la trajectoire

Ce que l'on peut illustrer par :



Il apparaît ainsi une base naturelle, locale, associée à la trajectoire et non à un système de coordonnées. Elle est définie par le vecteur tangent $\vec{T}$ (unitaire, tangent à la courbe et dont le sens oriente la trajectoire) et le vecteur normal $\vec{N}$ (unitaire, dirige la normale principale et de sens dans la concavité).
Les composantes de $\vec{a}$, dans cette base (appelée base de Frenet) s'obtiennent en généralisant l'expression vue à la question **10.** :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_C}\vec{N}}$$

Ce qui revient à considérer (hors point singulier) la courbe, au voisinage de M comme un petit arc de cercle de rayon R_C. R_C est appelé rayon de courbure en M. Sur une courbe qui n'est pas un cercle, la valeur de R_C peut changer en tout point.

Lois de Newton et modélisation des forces

13. « Il existe des référentiels, dits galiléens, dans lesquels le mouvement de tout point matériel isolé est rectiligne et uniforme. » Ce qui signifie que l'état naturel d'un point soumis à aucune interaction (ou à des interactions qui se compensent) est un mouvement rectiligne uniforme et non l'immobilité qui n'est qu'une possibilité.
L'expérience de la vie courante incite à croire (de façon erronée) que le mouvement nécessite une action sur le système, alors que cette action ne fait en général que compenser une autre force, par exemple des frottements.
Il a fallu attendre Galilée pour trouver ce principe et Newton pour l'énoncer.
Le principe d'inertie contient aussi la définition d'une classe de référentiels dits galiléens. Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Voir la définition de la translation rectiligne d'un solide au chapitre 7.

14. Pour un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ à la date t dans un référentiel (R) :

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}}$$

Pour un système de points M_i de masse m_i :

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \sum_i \frac{d\left(m_i \overrightarrow{OM_i}\right)}{dt}$$

pour la suite du calcul il faut bien comprendre qu'écrire

$$\sum_i \frac{d\left(m_i \overrightarrow{OM_i}\right)}{dt} = \frac{d\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\right)}{dt}$$

nécessite une somme qui ne dépende pas du temps, il faut donc que le système soit constitué en permanence des mêmes points : il est dit **fermé**.

Par définition du centre d'inertie G (ou barycentre des masses) :

$$\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\right) = M\,\overrightarrow{OG}$$

où M est la masse totale du système.
Il vient alors pour la quantité de mouvement (ou résultante cinétique) du système **fermé**, de centre d'inertie G :

$$\vec{p} = \frac{d\,M\,\overrightarrow{OG}}{dt} = M\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt} = M\,\vec{v}_G$$

Le système étant fermé, sa masse M est évidemment constante.

Pour un système fermé : $\boxed{\vec{p} = M\,\vec{v}_G}$

15. Relation fondamentale de la dynamique (Newton 1687), ou loi de la quantité de mouvement, pour un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\sum \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\vec{a}(M)_{(R)}}$$

le premier membre représente la somme des forces s'exerçant sur le point matériel.

Pour un système fermé de points :

$$\sum_i \vec{f}_i = \sum_i \frac{d\,\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \frac{d\,(M\,\vec{v}_G)}{dt} = M\,\vec{a}_G$$

Théorème de la résultante cinétique, pour un système fermé : $\boxed{\sum \vec{f} = M\,\vec{a}(G)_{(R)}}$

16. Dynamique du point libre

a) La RFD appliquée au projectile dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) donne avec comme seule force le poids : $\vec{a}(P)_{(R)} = \vec{g}$.

Il s'agit d'un mouvement à accélération constante.

En projection sur Oy : $\ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = \text{cste} = 0$ (d'après les conditions initiales) $\Rightarrow y = \text{cste} = 0$, le mouvement est plan dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$.

En projection sur Ox (axe horizontal tel que $v_{0x} > 0$) et sur Oz verticale ascendante :

sur Ox : $\dfrac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ puis $x(t) = (v_0 \cos\alpha)t$ car $x(0) = 0$;

en l'absence de force suivant Ox, la projection du mouvement sur Ox est uniforme.

sur Oz : $\dfrac{dv_z}{dt} = -g \Rightarrow v_z(t) = -gt + v_{0z} = v_0 \sin\alpha - gt$,

puis $z(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2$ car $z(0) = 0$; c'est un mouvement classique de chute libre avec vitesse initiale.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps entre les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ soit :

$$\boxed{z = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2}$$ équation d'une parabole d'axe parallèle à Oz.

b) L'intersection de la trajectoire avec le sol défini par $z = 0$ donne deux possibilités : $x_s = 0$ à éliminer car il correspond au point de lancement et $x_s = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ dont la valeur dépend de l'angle de tir α ; la portée x_s est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$ soit $\boxed{\alpha = 45°}$ et vaut $x_s^{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$.

c) La flèche est l'altitude maximale H atteinte par le projectile P. Il est inutile pour trouver le maximum de la parabole de procéder à une dérivation, la fonction étant symétrique par rapport à ce maximum, il se situe à la moitié de la portée, soit :

$$x_F = \frac{x_s}{2} = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \quad \text{d'où} \quad H = z(x_F) \text{ et après calcul } \boxed{H = z(x_F) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

17. La force de frottement fluide (appelée aussi traînée) qu'exerce un fluide sur les corps en mouvement est toujours opposée au vecteur vitesse : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où $\alpha > 0$. Il s'agit bien sûr de la vitesse *relative* du corps par rapport au fluide, et pas de la vitesse dans n'importe quel référentiel. La force est la même que le corps se déplace dans le fluide ou que le fluide s'écoule le long du corps : ce qui permet l'utilisation de soufflerie pour les mesures de cette force de frottement.
Pour α, on utilise justement l'étude expérimentale, l'expression de la force de frottement fluide est une *modélisation* empirique :

▶ Pour des vitesses faibles : α est sensiblement une constante, notée λ (c'est-à-dire F proportionnel à v) :

$$\boxed{\vec{F} = -\lambda\vec{v}}$$

▶ Pour des vitesses importantes et sur une plage limitée de vitesse, α est à peu près proportionnel à v (c'est-à-dire F proportionnel à v^2) :

$$\boxed{\vec{F} = -k\|\vec{v}\|\vec{v} \quad \text{soit} \quad \|\vec{F}\| = k\,v^2}$$

Ce modèle conduit à des équations différentielles non linéaires !

Pour des raisons de simplicité des calculs le premier modèle est le plus souvent utilisé.

18. La force exercée par le support sur le point matériel est une force de réaction. Elle n'a pas d'existence propre, elle n'apparaît que si d'autres forces s'exercent. Sa valeur dépend des autres forces appliquées **et** du mouvement !
La relation fondamentale s'écrit : $\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$ où $\vec{a}$ et $\vec{R}$ sont inconnues, ce qui pose problème pour la résolution. Une connaissance partielle de la force de réaction peut permettre de trouver des projections qui éliminent la force de réaction et rend possible l'intégration.

Cas d'un point mobile sur une courbe (par exemple anneau coulissant sur un fil de fer), le point ne peut pas quitter la courbe, la liaison est bilatérale. On décompose la force de réaction exercée par le support sur le « point matériel » en une composante tangente à la courbe, notée $\vec{R}_t$ (force de frottement solide), et une composante normale $\vec{R}_n$ dans le plan perpendiculaire à la tangente à la courbe. Dans ce cas, la direction de $\vec{R}_t$ est unique, alors que la direction de $\vec{R}_n$ n'est pas connue *a priori*.

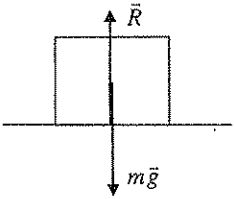
Cas d'un point mobile sur une surface, le point peut quitter la surface, la liaison est unilatérale. Même décomposition, mais cette fois c'est la direction de $\vec{R}_n$ qui est unique et connue.

Si la liaison est sans frottement : $\vec{R}_t = \vec{0}$. On peut alors projeter sur des directions où $\vec{R}$ n'a pas de composante.

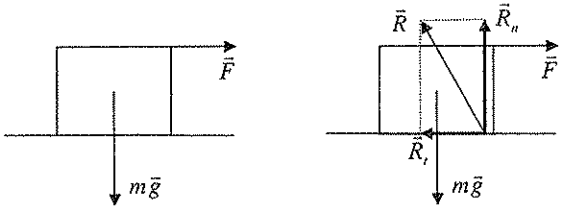
Attention à ne pas confondre la normale au support $\vec{n}$ et la normale à la trajectoire $\vec{N}$. Par exemple si un point mobile sur une surface plane a un mouvement circulaire uniforme, la normale à la trajectoire (dirigée vers le centre du cercle) et la normale à la surface sont orthogonales.

19. Il s'agit du frottement d'un solide sur un autre, rien à voir avec les frottements fluides déjà étudiés.
Considérons le cas particulier d'une boîte posée sur une table horizontale.

Situation 1 : la boîte est immobile dans le référentiel terrestre galiléen : $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont nuls, donc
$\sum \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$, donc $\vec{R} = \vec{R}_n = -m\vec{g}$



Situation 2 : On applique une force supplémentaire $\vec{F}$ horizontale sur un des coins de la boîte :



Si $\|\vec{F}\|$ n'est pas trop grande, la boîte reste immobile : $\sum \vec{f} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

Donc $\vec{R}$ a changé, elle s'est adaptée aux nouvelles forces appliquées, ce qui montre bien qu'elle n'a pas d'existence propre.

Faisons l'étude suivant les valeurs de $\|\vec{F}\|$:

Tant que $\|\vec{F}\| < F_0$ (valeur limite expérimentale), la boîte reste immobile.

Si $\|\vec{F}\| > F_0$, la boîte glisse.

Interprétation :

Si $\|\vec{F}\| < F_0$, équilibre $\Rightarrow \begin{cases} \|\vec{R}_t\| = \|\vec{F}\| < F_0 \\ \|\vec{R}_n\| = mg \end{cases}$ donc quand $\|\vec{F}\| \nearrow$: $\|\vec{R}_t\| \nearrow$

Si $\|\vec{F}\| > F_0$, on a toujours $\|\vec{R}_n\| = m\,g$ mais la boîte glisse car $\|\vec{R}_t\|$ ne peut plus augmenter pour compenser $\|\vec{F}\|$. Ainsi F_0 apparaît comme la plus grande valeur possible de $\|\vec{R}_t\|$: $F_0 = \|\vec{R}_t\|_{max}$

L'étude expérimentale montre que $\|\vec{R}_t\|_{max}$ dépend :

- de la nature des surfaces en contact
- de la façon dont la boîte appuie sur la table (et pas seulement du poids) donc de $\|\vec{R}_n\|$

Finalement la loi de Coulomb donne : $\|\vec{R}_t\|_{max} = k\|\vec{R}_n\|$

Les lois de Coulomb sur le frottement solide de glissement d'un solide sur un autre dans le cas général sont donc :

Si immobilité relative (pas de glissement) : $\|\vec{R}_t\| < k\|\vec{R}_n\|$
Si glissement : $\|\vec{R}_t\| = k\|\vec{R}_n\|$

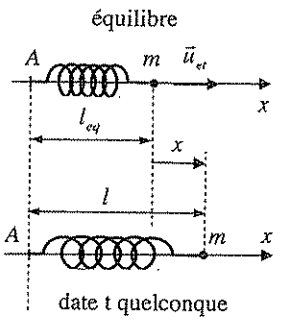
Remarques :

a) On peut distinguer un coefficient statique k_s et un coefficient dynamique k_d $(k_d < k_s)$: pas de glissement tant que $\|\vec{R}_t\| < k_s\|\vec{R}_n\|$ et si glissement $\|\vec{R}_t\| = k_d\|\vec{R}_n\|$.

b) Dans le cas de l'immobilité, la direction de $\vec{R}_t$ est imposée par les autres forces. S'il y a glissement, $\vec{R}_t$ est colinéaire à la vitesse de glissement et dans le sens opposé.

c) L'absence de frottements se traduit par $k = 0$

20. Pour un ressort, la force de rappel élastique exercée sur une extrémité est $\vec{f} = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}_{et}$ où $(l - l_0)$ est l'allongement algébrique (l_0 longueur à vide) et $\vec{u}_{et}$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens des étirements *pour l'extrémité considérée*. Si on oriente l'axe Ox dirigeant le ressort dans le sens des étirements pour cette extrémité : $\vec{u}_{et} = \vec{u}_x$.



La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m dans le référentiel terrestre (R) supposé galiléen est, en l'absence de frottement solide :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = -k(l - l_0)\,\vec{u}_x + m\vec{g} + \vec{R}_n$$

La réaction $\vec{R}_n$ est orthogonale à Ox, d'où en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -k(l - l_0)$$

À l'équilibre : $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \boxed{l_{eq} = l_0}$

On choisit l'origine de l'axe des x à la position d'équilibre : $x = l - l_{eq} = l - l_0$

en posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, il vient :

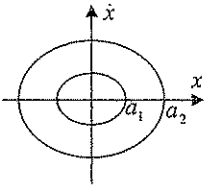
$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0, la solution est $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$ où l'amplitude a et la phase à l'origine φ dépendent des conditions initiales.

La période est $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, elle est indépendante de l'amplitude a, propriété importante et non intuitive des oscillateurs harmoniques. On parle d'isochronisme des oscillations.

Traçons le portrait de phase $\dot{x}(x)$. On obtient pour une trajectoire de phase :

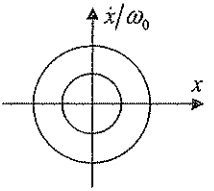
$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$



et en changeant l'origine des dates :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

équation d'une ellipse dans le diagramme $(x, \dot{x})$.

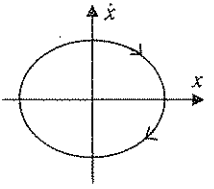


On peut obtenir des cercles, plus simple à identifier expérimentalement, en traçant $\dot{x}/\omega_0$ en fonction de x :

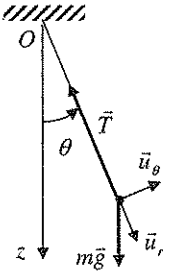
Remarques :

a) Les courbes fermées indiquent le caractère périodique du mouvement.

b) On trouve le sens de parcours d'une trajectoire de phase en considérant l'ordonnée d'un point de la trajectoire de phase : par exemple si en ce point $\dot{x} > 0$ alors $x \nearrow$ à partir de ce point.



21. Le système est la bille ; elle est soumise à deux forces : son poids et la tension $\vec{T}$ exercée par le fil colinéaire au fil, mais dont la valeur n'est pas connue (elle dépend de $\theta(t)$).
Il est donc judicieux d'écrire la RFD en la projetant sur la base polaire et en particulier sur la direction orthoradiale $\vec{u}_\theta$ pour éliminer $\vec{T}$; ceci suppose de connaître l'accélération en



polaires et en particulier $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = l\ddot{\theta}$ car $r = l = cste$ (mouvement circulaire non uniforme) :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta} \quad (1)$$

Avec θ petit et donc $\sin\theta \approx \theta$, (1) s'écrit $\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{l}\theta = -\omega_0^2\theta$

On obtient un oscillateur harmonique **linéarisé**, conduisant à une solution harmonique $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$; les conditions initiales de position et de vitesse $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ conduisent à :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t}$$

La pulsation du mouvement $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ est indépendante de la masse du pendule et de l'amplitude θ_0 des oscillations (cf. oscillateur harmonique).

La période du pendule est $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

Il y a isochronisme des petites oscillations, puisqu'il faut θ petit pour le modèle oscillateur harmonique.
Pour $l = 1\,\text{m}$, horloge comtoise (de parquet) T est de l'ordre de 2 s, elles « battent » la seconde (demi-oscillation). Pour une horloge de cheminée, l de l'ordre de $0,25\,\text{m}$ (le quart de la longueur précédente), la période sera deux fois plus petite : 1 seconde.

■ Énergie mécanique

22. Le travail de la force $\vec{f}$ s'exerçant sur un mobile en M qui, pendant l'intervalle de temps dt se déplace de $d\vec{r} = \vec{v}(M)_{(R)}dt$ dans (R), est :

$$\boxed{\delta W_{(R)} = \vec{f}.d\vec{r}} \quad \text{soit} \quad \delta W_{(R)} = \vec{f}.\vec{v}(M)_{(R)}dt \quad (\text{en J})$$

La puissance de la force est le travail par unité de temps :

$$\boxed{P_{(R)} = \frac{\delta W_{(R)}}{dt} = \vec{f}.\vec{v}(M)_{(R)}} \quad (\text{en W})$$

Les cas de nullité de la puissance de la force $\vec{f}$ appliquée au point M sont :

- $\vec{v}(M)_{(R)} = \vec{0}$; un corps immobile ne peut pas recevoir de puissance
- $\vec{f} \perp \vec{v}(M)_{(R)}$; par exemple, la puissance du poids d'un objet est nulle lorsque celui-ci est déplacé horizontalement (on dit que le poids ne travaille pas).

23. $\vec{f}$ est la même en tout point $\Rightarrow$ $\boxed{W_{M_1 \to M_2} = \vec{f}.\overrightarrow{M_1M_2}}$ en effet :

$$W_{M_1 \to M_2} = \int_{\overset{\frown}{M_1 M_2}} \vec{f}.d\left(\overrightarrow{OM}\right) = \vec{f}.\int_{M_1}^{M_2} d\left(\overrightarrow{OM}\right) = \vec{f}.\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\right) = \vec{f}.\overrightarrow{M_1M_2}$$

Ce résultat s'applique au poids dans la mesure où le modèle $\vec{g} = \overrightarrow{\text{cste}}$ est valable. Soit des déplacements horizontaux limités (ordre de 100 km !) et des variations d'altitude limitées (inférieures à environ 30 km). Comme le poids est porté par définition par la verticale du lieu et en orientant l'axe Oz vers le haut :

$$W_{A \to B}(m\vec{g}) = mg(z_A - z_B) \quad \text{avec } z \text{ altitude}$$

Remarquer que le signe du travail du poids est en général prévisible et sa cohérence avec le déplacement doit être vérifiée.

24. La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants dans le référentiel (R) est égale à la somme des travaux dans (R) de **toutes** les forces appliquées entre ces deux instants.

On multiplie scalairement par la vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ la relation fondamentale de la dynamique $m\vec{a}(M)_{(R)} = \sum \vec{f}$:

$$m\vec{v}(M)_{(R)}.\left(\frac{d\vec{v}(M)_{(R)}}{dt}\right)_{(R)} = \sum \vec{f}.\vec{v}(M)_{(R)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2(M)_{(R)}\right) = \frac{dE_{C(R)}}{dt} = \sum P_{(R)}}$$

ce qui représente le théorème de la puissance cinétique ; sommé entre t_1 et t_2, il vient :

$$\boxed{E_{C2(R)} - E_{C1(R)} = \sum \int_{\overset{\frown}{M_1 M_2}} \vec{f}.d\left(\overrightarrow{OM}\right) = \sum W_{1 \to 2(R)}}$$

ou plus couramment $\boxed{\Delta E_C = \sum W}$

25. Une force s'appliquant sur un point matériel est appelée champ de force si elle ne dépend en chaque point de l'espace *que* des coordonnées d'espace du point.

Un champ de force est conservatif s'il existe une fonction scalaire, notée E_p, des coordonnées *seulement* telle que $\delta W = -dE_p$.

C'est-à-dire que le travail élémentaire du champ de force est une différentielle (les variables étant les coordonnées uniquement).

La conséquence sur le travail de ces forces est la suivante :

$$W_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1 M_2} \delta W = \int_{M_1}^{M_2} -dE_p = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

Le travail est indépendant du chemin suivi.

26. Parmi l'ensemble des forces qui s'appliquent sur M, il faut distinguer :

- les champs de forces conservatifs, travail élémentaire $\delta W_1 = -dE_p$
- les forces dont le travail est nul, travail élémentaire $\delta W_2 = 0$
- les autres forces, travail élémentaire $\delta W_3 = \delta W_{\text{autres}}$

Le théorème de l'E_C donne : $dE_C = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 = -dE_P + 0 + \delta W_{autres}$

Soit $d\left(E_C + E_P\right) = \delta W_{autres}$; on pose alors

$$\boxed{E = E_C + E_P} \quad \text{avec } E \text{ énergie mécanique}$$

Un système soumis à des champs de force conservatifs et à des forces de travail nul est dit conservatif :

$$dE = d\left(E_C + E_P\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{E = \text{cste}}$$

Si d'autres forces s'appliquent, on les qualifie de non conservatives, leur travail élémentaire est noté δW_{nc} :

$$dE = d\left(E_C + E_P\right) = \delta W_{nc} \quad \text{soit} \quad \boxed{E \neq \text{cste}}$$

De façon générale on a $\boxed{\Delta(E_c + E_p) = \sum W_{nc}}$

En l'absence de forces non conservatives, soit $\sum W_{nc} = 0$, l'énergie mécanique $E = E_c + E_p$ du système se conserve, soit au cours du mouvement :

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

Contrairement à la relation fondamentale de la dynamique (équation différentielle du second ordre), l'équation de conservation de l'énergie ne fait intervenir que des dérivées premières (vitesse dans l'énergie cinétique), d'où le nom d'intégrale première du mouvement.

27. Pour le poids : $\delta W = m\vec{g}.d\vec{r} = (-mg\vec{u}_z).(dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) = -mgdz$; ceci s'écrit sous forme d'une différentielle $\delta W = -dE_p$ avec

$$\boxed{E_p = mgz + cste}$$

l'axe Oz étant orienté suivant la *verticale ascendante* et en fixant la constante arbitrairement.

Pour un ressort, la force de rappel élastique exercée sur une extrémité est $\vec{f} = -k\left(l - l_0\right)\vec{u}_{ét}$ où $(l - l_0)$ est l'allongement algébrique (l_0 longueur à vide) et $\vec{u}_{ét}$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens des étirements *pour l'extrémité considérée*. Si on oriente l'axe Ox dirigeant le ressort dans le sens des étirements pour cette extrémité : $\vec{u}_{ét} = \vec{u}_x$ et $\delta W = \vec{f}.d\overrightarrow{OM} = -k(l - l_0)\vec{u}_x.dx\vec{u}_x$; or le déplacement dx de M est dû à une variation dl de la longueur du ressort (l'autre extrémité étant fixe), donc :

$$\delta W = -k(l - l_0).dl = -k(l - l_0).d(l - l_0) \quad \text{soit une différentielle} \quad \delta W = -dE_p$$

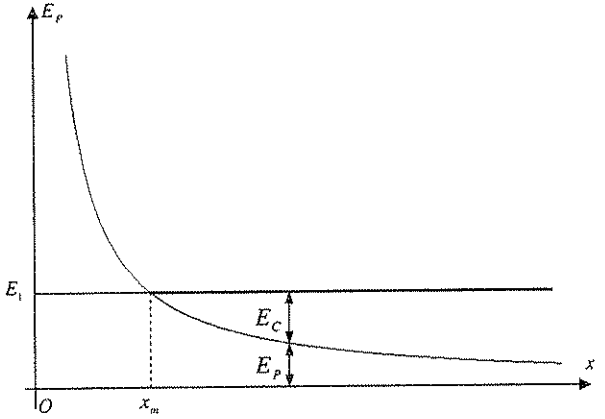
$$\text{avec} \quad \boxed{E_p = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2}$$

de constante nulle en choisissant l'énergie potentielle élastique nulle lorsque l'allongement $(l - l_0)$ est nul.

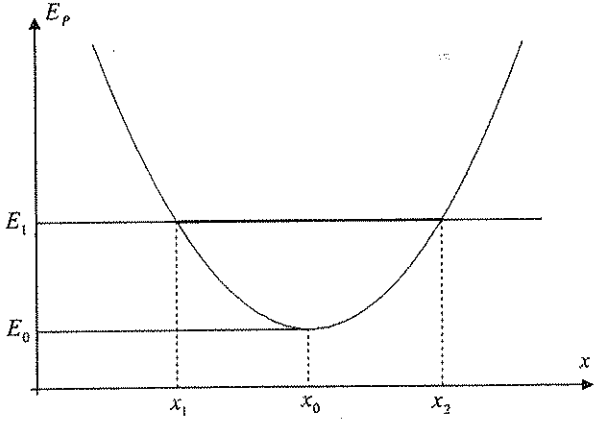
Rq : L'énergie potentielle élastique ne dépend que de l'allongement algébrique et en aucun cas du choix de l'origine sur Ox. Son expression est inchangée si les deux extrémités sont mobiles.

28. Pour un système conservatif à un paramètre : $E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + E_p(x) = \text{cste}$; la valeur de la constante E est fixée par les conditions initiales. Les valeurs de x autorisées correspondent à $\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right) \geq 0$. On trace le graphe de la fonction $E_p(x)$, sur lequel on porte la valeur E et on traduit $E_p(x) \leq E$.

a) Barrière d'énergie potentielle, $E_p(x) = K/x$



Seules valeurs de x autorisées : $x \geq x_m$; le point s'éloigne à l'infini en transformant son énergie potentielle en énergie cinétique. Si on veut s'approcher plus près de O (diminuer x_m) il faut augmenter E.



b) Puits d'énergie potentielle, $E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \text{cste}$ (graphe ci-dessus).

Si $E = E_1$, les seules valeurs de x autorisées sont $x \in [x_1, x_2]$: système lié

Si $E = E_0$, la seule valeur de x autorisée est $x = x_0$: système à l'équilibre

Étude de l'équilibre

29. Un système ponctuel est à l'équilibre dans un référentiel donné lorsqu'il y est au repos : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{cste}$ et $\vec{v} = \vec{0}$, O étant un point fixe du référentiel. De son accélération nulle, $\vec{a}(M)_{(R)} = \vec{0}$, on déduit alors par la relation fondamentale de la dynamique et pour (R) galiléen que :

$$\boxed{\sum \vec{f} = \vec{0}}$$

la somme des forces s'appliquant sur lui est nulle.
Si, légèrement écarté de cette position et lâché avec une vitesse initiale nulle, il y revient spontanément, alors la position d'équilibre est dite stable (une bille au fond d'une cuvette). Si, légèrement écarté de cette position et lâché avec une vitesse initiale nulle, il s'en éloigne davantage, alors la position d'équilibre est dite instable (une bille au sommet d'une bosse).

30. Considérons un système conservatif unidimensionnel d'axe Ox. La RFD appliquée à ce système s'écrit en projection sur l'axe du mouvement :

$$m\ddot{x} = \sum f_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad (1)$$

où E_p est la somme des énergies potentielles de toutes les projections f_x.

Rappel : Il peut y avoir des forces qui s'appliquent sur le système et qui ne sont pas des champs de force (comme une réaction, une tension de fil,...) mais qui ne travaillent pas, donc leur projection sur l'axe Ox du mouvement est nulle.

Pour la (ou les) position(s) d'équilibre x_e, (1) s'écrit :

$$m\ddot{x}_e = \sum f_x(x_e) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dE_p}{dx}(x_e) = 0} \quad (2)$$

L'énergie potentielle admet donc un extremum (maximum ou minimum) en $x = x_e$.

31. Posons $\varepsilon = x - x_e$, ce qui représente l'écart par rapport à la position d'équilibre. Un développement limité à l'ordre 1 de $\frac{dE_p}{dx}$ autour de $x = x_e + \varepsilon$ (ou, ce qui au signe près revient au même, de la résultante des forces) s'écrit :

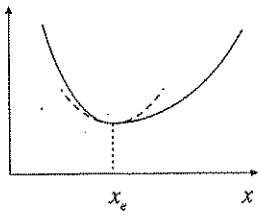
$$\frac{dE_p}{dx}(x) = \frac{dE_p}{dx}(x_e + \varepsilon) \approx \frac{dE_p}{dx}(x_e) + \varepsilon \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) = \varepsilon \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) \quad \text{d'après (2)}$$

Alors la RFD (1) se réécrit :

$$m\ddot{x} = m\ddot{\varepsilon} = -\varepsilon \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) \quad \text{ou encore} \quad \ddot{\varepsilon} = -\left(\frac{1}{m}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)\right)\varepsilon \quad (3)$$

1er cas : si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) < 0$ (il s'agit d'un maximum d'énergie potentielle), l'équation différentielle (3) est du type $\ddot{\varepsilon} = +\omega^2\varepsilon$, de solutions exponentielles ; l'écart ε diverge et l'équilibre est instable.

2ème cas : si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) > 0$ (il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle, on parle de « cuvette »), l'équation différentielle (3) est du type $\ddot{\varepsilon} = -\omega^2\varepsilon$, de solutions sinusoïdales ; l'écart ε oscille avec une amplitude finie et l'équilibre est stable.



La résultante des forces a été linéarisée au voisinage de l'équilibre (comme pour un ressort) et localement, la fonction énergie potentielle (en trait plein) est assimilable à une parabole (en trait pointillé) d'où la dénomination « d'approximation harmonique ».
La pulsation des oscillations au voisinage de l'équilibre est :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)}$$

Mouvements de particules chargées

32. Pour décrire l'interaction entre particules chargées, par exemple la force exercée par un ensemble de charges (sources) sur une charge q (test), il faut distinguer deux situations.

Dans le référentiel galiléen d'étude, les charges sources immobiles créent tout point de l'espace un « champ électrostatique », noté $\vec{E}$ et tel que la charge test subit une force $q\vec{E}$ (traduisant l'interaction entre les charges).

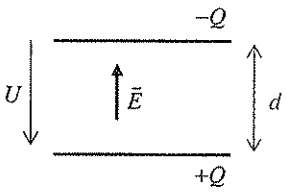
Dans ce même référentiel, les charges sources mobiles (courant électrique par exemple) créent aussi un champ dit magnétique noté $\vec{B}$ (voir le chapitre **12**). La force supplémentaire subie par la charge test dépend alors de son propre mouvement dans ce référentiel : $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la charge test dans le référentiel lié aux sources du champ magnétique (circuit électrique ou aimant).

Finalement la force s'exerçant sur une particule de charge q est la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs électrique et magnétique au point où se trouve la particule et $\vec{v}$ sa vitesse dans le référentiel lié aux sources du champ magnétique.

Un champ électrique uniforme peut être créé entre deux plaques chargées (avec des charges respectives $+Q$ et $-Q$), très proches l'une de l'autre (« condensateur ») et dans la partie centrale. Le champ $\vec{E}$ est orthogonal aux plaques, dirigé vers la plaque de plus faible potentiel (chargée –) et sa norme est liée à la différence de potentiel entre les plaques qui maintient les charges du condensateur : $U = V_+ - V_- = \|\vec{E}\| d$.



Un champ magnétique uniforme peut être créé dans l'entrefer d'un aimant en U ou dans la région centrale d'une bobine très longue et parcourue par un courant électrique.

33. $P = \left(q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v}$, la puissance de la force magnétique, orthogonale au déplacement, est nulle. Seule la force électrique travaille.

La force $\vec{F} = q\vec{E}$ est un champ de force conservatif, elle dérive de l'énergie potentielle : $E_p = qV + \text{cste}$, où V est le potentiel électrique au point où se trouve la charge. Son travail est :

$$\boxed{W_{M_1 \to M_2} = E_{p1} - E_{P2} = q\left(V_1 - V_2\right)}$$

Pour une particule chargée, en présence d'une force électromagnétique, l'interaction gravitationnelle est toujours négligeable.

Par exemple dans un atome d'hydrogène, la force électrique exercée par le noyau (proton) sur l'électron est en norme $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, l'interaction gravitationnelle $\dfrac{G m_e m_p}{r^2}$ et le poids (si l'électron est dans le champ de pesanteur) $m_e g$.

On obtient les rapports :

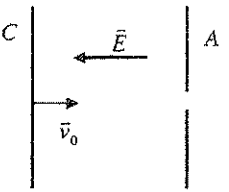
$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m_e g} = \frac{9.10^9 (1,6.10^{-19})^2}{\left(10^{-10}\right)^2 0,9.10^{-30} \times 9,8} \approx 3.10^{21}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 G m_e m_p} = \frac{9.10^9 \left(1,6.10^{-19}\right)^2}{6,67.10^{-11} \times 0,9.10^{-30} \times 1,7.10^{-27}} \approx 2.10^{39}$$

34. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la charge dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen), avec comme seule force la force électrique, s'écrit : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$

a) $\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{\text{cste}} \\ \vec{a} \text{ et } \vec{v}_0 \text{ colinéaires} \end{cases}$ donc le mouvement est rectiligne uniformément varié.

On augmente la norme de la vitesse si $\vec{E}$ est orienté convenablement, par exemple pour un électron ($q < 0$), il faut une force dirigée vers A, soit $\vec{E}$ de A vers C et une d.d.p. $V_A - V_C = U > 0$.



Le théorème de l'énergie cinétique entre C et A :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = q(V_0 - V_A) = -e(-U) = eU > 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + \frac{2eU}{m}$$

Si v_0 est négligeable : $\boxed{v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$

A.N. : pour un électron $U = 100$ V $\Rightarrow v \approx 6.10^3$ km.s^{-1}

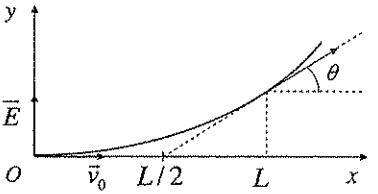
$$U = 10^4 \text{ V} \Rightarrow v \approx 6.10^4 \text{ km.s}^{-1} \approx \frac{c}{5}$$

L'électron est facilement relativiste.

b) On prend $\vec{E} = E\vec{u}_y$, il s'agit d'un mouvement à accélération constante traité à la question **9.** :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}t^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Le mouvement est plan, dans le plan } \left(\vec{v}_0, \vec{E}\right).$$

La trajectoire est une parabole d'axe Oy et d'équation $y = \dfrac{qE}{2mv_0^2}x^2$.



Lorsque $x = L$, l'angle θ est donné par $\tan\theta = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=L} = \dfrac{qEL}{mv_0^2}$ (la tangente coupe l'axe Ox en $L/2$).

Si au-delà de $x = L$ le champ $\vec{E}$ ne s'applique plus, on ne peut donc plus en théorie « négliger » le poids. On peut cependant considérer la trajectoire comme quasi rectiligne, en négligeant la courbure de cette trajectoire dans le champ de pesanteur (en $\dfrac{g}{2v_0^2}$) devant celle dans le champ électrique qui produit la déviation (en $\dfrac{qE}{2mv_0^2}$).

35. Le poids étant négligeable devant la force de Lorentz, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule s'écrit dans le repère galiléen (R) :

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{(R)} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1)$$

a) On projette la relation (1) sur $\vec{u}_z$ colinéaire à $\vec{B}$, la force magnétique étant orthogonale à $\vec{B}$: $m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = \text{cste} = \dot{z}_0 = 0 \Rightarrow z = \text{cste}$.

Le mouvement est plan, dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ et contenant O.

On projette la relation (1) sur $\vec{T}$ colinéaire à $\vec{v}$; la force magnétique étant orthogonale à $\vec{v}$:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\|\vec{v}\| = v_0 = \text{cste}}$$

La vitesse est constante en norme. On retrouve que la force magnétique orthogonale à la vitesse, ne travaille pas, donc ne peut pas modifier l'énergie cinétique.

b) Puisque $\vec{a}_T = \vec{0}$, $\vec{a} = \vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R_C}\vec{N}$ et $m\dfrac{v^2}{R_C}\vec{N} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

L'égalité des normes, avec $\vec{v}$ et $\vec{B}$ orthogonaux, conduit à :

$$m\frac{v^2}{R_C} = |q|vB \Rightarrow R_C = \frac{mv}{|q|B} = \frac{mv_0}{|q|B} = \text{cste}$$

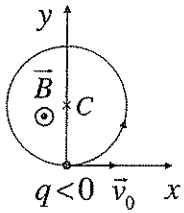
La trajectoire est un cercle de rayon $\boxed{R = \dfrac{p}{|q|B}}$ avec $p = \text{cste} = mv_0$

Le mouvement est circulaire plan décrit à la pulsation (dite cyclotron) :

$$\boxed{\omega_c = \frac{v_0}{R} = \frac{|q|B}{m}}$$

d'où la période $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c} = \dfrac{2\pi m}{|q|B}$ indépendante de v_0

La figure donne la trajectoire orientée et le champ $\vec{B}$ dans le cas $q < 0$ avec $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.



Applications directes du cours

Cinématique du point

36. 1.a) $\vec{u}_r$ dirige $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}_\theta$ est directement orthogonal à $\vec{u}_r$.

b) $\vec{v}(M) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = a\omega e^{-\omega t}\left(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right)$

$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta = -2a\omega^2 e^{-\omega t}\,\vec{u}_\theta$

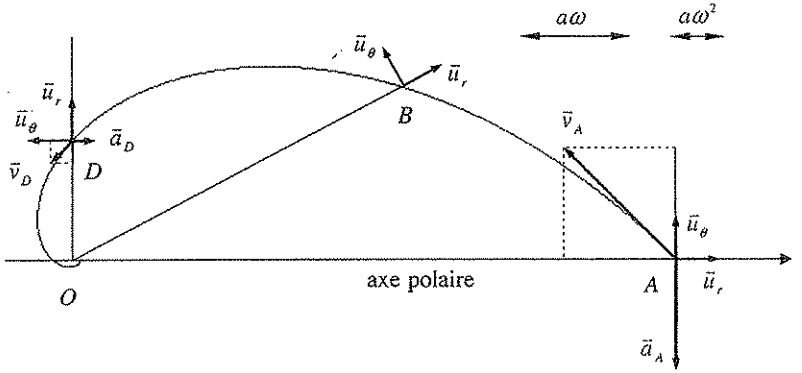
c) $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}\,a\,\omega\,e^{-\omega t}$, le mouvement n'est pas uniforme.

d) en A, $\theta = \omega t = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = -a\omega\,\vec{u}_r + a\omega\,\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}_A = -2a\omega^2\,\vec{u}_\theta$

en D, $\theta = \omega t = \pi/2 \Rightarrow$

$$\vec{v}_D = e^{-\frac{\pi}{2}}\left(-a\omega\,\vec{u}_r + a\omega\,\vec{u}_\theta\right) \approx -0,2a\omega\,\vec{u}_r + 0,2a\omega\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_D = -2e^{-\frac{\pi}{2}}\,a\omega^2\,\vec{u}_\theta \approx -0,4a\omega^2\,\vec{u}_\theta$$



Le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire, il n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{u}_\theta$. Le vecteur accélération est dirigé dans la concavité de la courbe. Le produit scalaire $\vec{a}.\vec{v} < 0$ donc le mouvement est retardé, $\|\vec{v}\|$ décroît avec t.

2. $\|\vec{v}\| = v_0$ et $\vec{v} = -a\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{u}_r + a\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{u}_\theta$ soit $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}a\dot{\theta}e^{-\theta}$ avec a et $\dot{\theta}$ positifs.

L'équation à variables séparables $v_0 = \sqrt{2}ae^{-\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ s'intègre en :

$$\sqrt{2}a\left[-e^{-\theta}\right]_0^\theta = v_0 t \text{ conduisant à } \boxed{\theta(t) = \ln\left[1\Big/\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v_0}{a}t\right)\right]}$$

On remarque que $\theta \to \infty$ pour $t \to \dfrac{a\sqrt{2}}{v_0}$ durée totale du parcours (finie) pour un nombre de tours infini. La longueur de la spirale est donc $a\sqrt{2}$.

37. a) $\vec{u}_r$ dirige $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}_\theta$ est directement orthogonal à $\vec{u}_r$.

b) $r = d\cos(\omega t)$ et $\dot{r} = -d\omega\sin(\omega t)$

$$\vec{v}(M) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = d\omega\left(-\sin(\omega t)\,\vec{u}_r + \cos(\omega t)\,\vec{u}_\theta\right)$$

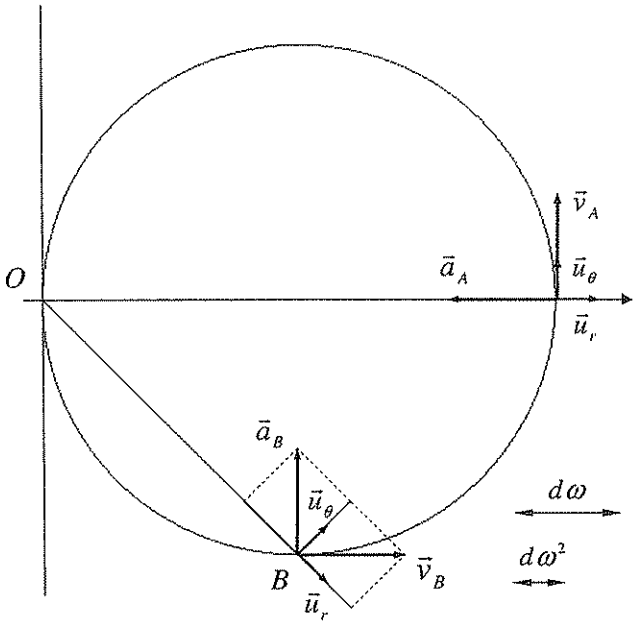
$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta = -2d\omega^2\left(\cos(\omega t)\vec{u}_r + \sin(\omega t)\vec{u}_\theta\right)$$

c) en A, $\theta = \omega t = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = d\omega\,\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}_A = -2d\omega^2\,\vec{u}_r$

en B, $\theta = \omega t = -\pi/4 \Rightarrow$

$$\vec{v}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} d\omega \left(\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right) \approx 0,7 d\omega \vec{u}_r + 0,7 d\omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_D = -\sqrt{2}\, d\omega^2 \left(\vec{u}_r - \vec{u}_\theta\right) \approx -1,4\, d\omega^2 \left(\vec{u}_r - \vec{u}_\theta\right)$$



Le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire, il n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{u}_\theta$. Le vecteur accélération est dirigé dans la concavité de la courbe.

d) $\left\|\vec{v}\right\| = d\omega\left(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t\right) = d\omega$, le mouvement est uniforme ce qui est cohérent avec les constructions précédentes où $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$\left\|\vec{a}\right\| = 2d\omega^2$. De plus $v = \text{cste}$, donc $\vec{a} = \vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R_C}\vec{N}$ et

$2d\omega^2 = \dfrac{v^2}{R_C} = \dfrac{(d\omega)^2}{R_C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_C = \dfrac{d}{2}}$ comme on le voit sur le dessin, la trajectoire est un cercle de rayon $d/2$.

■ Lois de Newton et modélisation des forces

38. Les lois de la chute libre (avec vitesse initiale nulle), $v = gt$ et $z = \dfrac{1}{2}gt^2$ donnent $v^2 = 2gz$ (ou directement par le théorème de l'énergie cinétique) ; et ultérieurement $v'^2 = 2g(z+l) = v^2 + 2gl$ soit $\underline{v' = 6,4 \text{ m.s}^{-1}}$.

Par ailleurs $v = gt$, puis $v' = gt'$ $\Rightarrow$ $\underline{T = t' - t = \dfrac{v' - v}{g} = 0{,}14\ \text{s}}$, difficilement mesurable sans dispositif approprié.

39. L'énergie mécanique de l'oscillateur est :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

le système est conservatif $\dfrac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x}(m \ddot{x} + k x) = 0$

On a donc soit $\dot{x} = 0$, soit $m \ddot{x} + k x = 0$ et on retrouve l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

En écrivant la solution sous la forme $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$

– l'énergie cinétique : $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2 = \dfrac{1}{2} m \dot{x}^2 = \dfrac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

– l'énergie potentielle élastique : $E_p = \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

puisque $k = m\omega_0^2$

d'où le résultat important : $\boxed{E = E_c + E_p = \dfrac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 = \dfrac{1}{2} k a^2}$

L'énergie mécanique est proportionnelle au carré de l'amplitude a. Elle est constante au cours du temps, pendant le mouvement il y a transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement.

40. Le sens de parcours de la trajectoire de phase : pour $\dot{z} > 0$, $z \nearrow$, montre qu'au départ la balle est en $z = 0$ avec une vitesse de $+10\ \text{m.s}^{-1}$. L'altitude maximale atteinte est 2,5 m, quand la balle repasse en $z = 0$, sa vitesse n'est plus que $-4{,}8\ \text{m.s}^{-1}$ on en déduit que de l'énergie a été dissipée par frottement sur l'air. Quand $z \to -\infty$ il semble apparaître une vitesse limite $-6{,}5\ \text{m.s}^{-1}$, ce qui confirme l'existence d'un frottement fluide sans que l'on puisse déduire une modélisation particulière.

41. a) Le système est la bille ; la tension $\vec{T}$ exercée par le fil est perpendiculaire à son déplacement, donc elle ne travaille pas, le poids est conservatif. La conservation de l'énergie mécanique dans (R) galiléen s'écrit en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur pour $\theta = \pi/2$ et en notant v_v la vitesse au passage par la position verticale (l'énergie potentielle de pesanteur est $-mgz$ avec Oz vers le bas) :

$$0 - mgl\cos\theta_0 = \frac{1}{2} m v_v^2 - mgl \quad \Rightarrow \quad \underline{v_v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_0)} = 0{,}82\ \text{m.s}^{-1}}$$

la valeur paraît grande pour 15° mais la longueur est 1 m, le modèle sans frottement sur l'air est limite.

b) La tension $\vec{T}$ exercée par le fil est perpendiculaire au déplacement de la bille, donc elle ne travaille pas.

Avec l'axe Oz orienté « vers le bas », le poids, force conservative, dérive d'une énergie potentielle $E_p = -mgz + cste$; avec $z = l\cos\theta$ et en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur pour $\theta = \pi/2$, il vient $E_p = -mgl\cos\theta$.

L'énergie cinétique, sachant que la vitesse de la bille est $v = l\dot{\theta}$, est $E_c = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$.

En l'absence de travail de forces non conservatives, l'énergie mécanique dans le référentiel (R) galiléen est conservée au cours du mouvement :

$$E = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl\cos\theta = cste \quad (2)$$

Par dérivation de cette constante par rapport au temps, on retrouve l'équation différentielle après simplification par $\dot{\theta}$:

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta} \quad (1) \text{ et la période } \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Attention, pour obtenir directement l'équation (2) par intégration de l'équation (1), il faut préalablement multiplier les deux membres par $\dot{\theta}$!

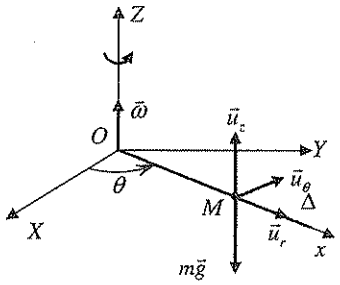
c) La projection de la RFD sur $\vec{u}_r$ donne : $mg\cos\theta - \|\vec{T}\| = -ml\dot{\theta}^2 = -m\frac{v^2}{l}$

Et le théorème de l'E_C entre $\theta = \frac{\pi}{2}$ et θ qcq : $\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgl\cos\theta + 0$

soit $\boxed{\|\vec{T}\| = 3mg\cos\theta}$

Au passage par la verticale $\theta = 0$, $\|\vec{T}\| = 3mg$, ce qui montre bien que la tension du fil, force de réaction, dépend des autres forces et du mouvement.

42. a) L'anneau est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la réaction d'axe $\vec{R}$. En l'absence de frottement cette réaction est perpendiculaire à la tige, $\vec{R} = \vec{R}_n$. La direction de $\vec{R}_n$ n'est cependant pas connue précisément : elle est dans le plan $(\vec{u}_z, \vec{u}_\theta)$.



La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans le référentiel galiléen (R) :

$$m\vec{a}(M) = m\vec{g} + \vec{R} \quad (1)$$

Le mouvement de M est dans le plan horizontal, on utilise des coordonnées cylindriques : $r = x$, $\theta = \omega t$ (posant $\theta = 0$ à $t = 0$) et $z = 0$. L'accélération dans la base cylindrique est :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z = (\ddot{x} - x\omega^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{x}\,\omega)\,\vec{u}_\theta$$

On projette la relation (1) sur $\vec{u}_r$ pour éliminer $\vec{R}$ qui n'a pas de composante dans cette direction :

$m\left(\ddot{x} - \omega^2 x\right) = 0 + 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} - \omega^2 x = 0}$ qui s'intègre en :

$x(t) = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t}$, les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ conduisent à

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)}$$

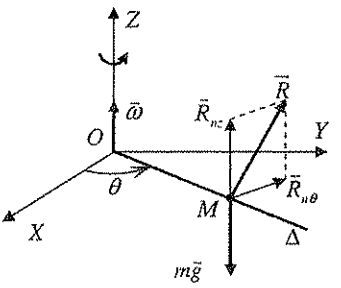
L'autre équation horaire $\theta = \omega t$ conduit par élimination de t à :

$$x(\theta) = \frac{x_0}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)$$

b) Le mouvement étant résolu, on va pouvoir calculer la réaction grâce aux projections non utilisées de la relation fondamentale de la dynamique. La réaction a une composante verticale R_{nz} et une composante orthoradiale $R_{n\theta}$

La relation (1) s'écrit en projection sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$m\begin{vmatrix} \ddot{x} - x\omega^2 \\ 2\dot{x}\omega \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ R_{n\theta} \\ R_{nz} \end{vmatrix}$$



sur $\vec{u}_\theta$: $R_{n\theta} = 2m\omega\dot{x} = mx_0\omega^2\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$

sur $\vec{u}_z$: $R_{nz} = mg$

La réaction $\vec{R}_n$ n'est pas égale à $-m\vec{g}$!

43. On étudie le bloc M dans le référentiel terrestre galiléen. Il est soumis à son poids, la force de rappel élastique $\vec{F} = -K\left(l - l_0\right)\vec{u}_x$ et la réaction du chariot $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n$.

La direction de $\vec{R}_n$ est connue, c'est la normale au plateau horizontal du chariot, donc la verticale.

$$M\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}_n + \vec{R}_t = M\,\vec{a}_G \quad (1)$$

On étudie l'immobilité, et ses conditions de validité, du bloc par rapport au chariot. Le déplacement étant très lent, le chariot et donc le bloc ont une vitesse et une accélération nulles dans le référentiel terrestre. L'allongement $l - l_0 = x$ et $\left\|\vec{R}_t\right\| < k\left\|\vec{R}_n\right\|$. Les projections de (1) donnent :

sur la verticale ascendante : $-Mg + R_n = 0$

sur Ox : $0 - Kx + 0 + R_t = 0$

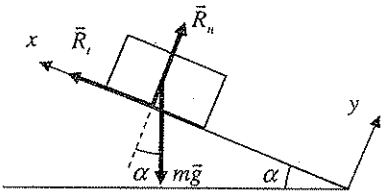
La condition $\left\|\vec{R}_t\right\| < k\left\|\vec{R}_n\right\| \Rightarrow \boxed{x < \frac{kMg}{K}}$

44. On étudie le bloc de masse m dans le référentiel terrestre galiléen. Il est soumis à son poids et la réaction du plan $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n$. La direction de $\vec{R}_n$ est connue, c'est la normale au plan incliné, direction Oy de l'énoncé.

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{R}_t = m\vec{a}_G \quad (1)$$

On étudie l'immobilité, et ses conditions de validité, du bloc sur le plan incliné, lui-même immobile dans le référentiel terrestre : $\vec{a}_G = \vec{0}$. Les projections de (1) sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ donnent avec la condition de non glissement :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + R_t = 0 \\ -mg\cos\alpha + R_n = 0 \\ \left\|\vec{R}_t\right\| < k\left\|\vec{R}_n\right\| \end{cases}$$



$mg\sin\alpha < kmg\cos\alpha \Rightarrow$ $\boxed{\tan\alpha < k}$

La valeur maximale de α, avant glissement, est donc une mesure expérimentale directe du coefficient de frottement statique k. La comparaison de k et $\tan\alpha$ rend commode une expression de k sous la forme $\tan\varphi$.

Pour $\alpha > \varphi$, le bloc glisse, donc $\left\|\vec{R}_t\right\| = k\left\|\vec{R}_n\right\|$ et avec les projections de (1) :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + R_t = m\ddot{x} \\ -mg\cos\alpha + R_n = m\ddot{y} = 0 \\ \left\|\vec{R}_t\right\| = k\left\|\vec{R}_n\right\| \end{cases}$$

De plus $R_t = \left\|\vec{R}_t\right\|$ car le glissement a lieu vers le bas, il vient :

$\ddot{x} = g(k\cos\alpha - \sin\alpha) < 0$, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

Énergie mécanique

45. a) $F\,dr = -dE_p \Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{1}{2}K_1 2r - \frac{K_2}{r^2}\right)\vec{u}_r = -K_1 r\,\vec{u}_r + \frac{K_2}{r^2}\vec{u}_r$

b) Si r est grand $\vec{F} \approx -K_1 r\,\vec{u}_r$ force de rappel attractive,

si r est petit $\vec{F} \approx \frac{K_2}{r^2}\vec{u}_r$ force répulsive dirigée de O vers M.

c) Le système est conservatif à un paramètre.

$$\frac{dE_p}{dr} = K_1 r - \frac{K_2}{r^2} = 0 \quad \text{pour} \quad \boxed{r_e = \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^{1/3}}$$

$\frac{d^2E_p}{dr^2} = K_1 + \frac{2K_2}{r^3}$ et pour $r = r_e$, $\frac{d^2E_p}{dr^2} = 3K_1 > 0$, l'équilibre est stable.

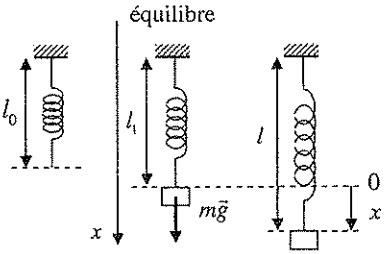
Les valeurs grandes ou petites du a) le sont par rapport à r_e.

46. On lit à $E_1 = U_m/2$, le système étant lié : $x_{min} = 1{,}4\,cm$, $x_{max} = 2{,}0\,cm$ et on a $x_m = 1{,}6\,cm$. Donc $x_{min} \approx 0{,}9\,x_m$ et $x_{max} \approx 1{,}3\,x_m$. On a $x \in [x_{min}, x_{max}]$.

Pour E_2, le système est lié si $x < x_M$ mais en état de diffusion si $x > x_M$.

Pour s'échapper la particule doit avoir une énergie mécanique supérieure ou égale à U_M, placée en x_m elle a l'énergie potentielle U_m, il lui faut donc l'énergie cinétique $E_c = U_M - U_m$ (attention $U_m < 0$). Finalement la vitesse doit être dirigée vers les $x > 0$ et avoir une norme supérieure à $v_{lib} = \left(\dfrac{2(U_M - U_m)}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$.

47. Utiliser l'expression de la force de rappel élastique vue dans la réponse à la question **20.** On oriente l'axe vertical Ox vers le bas, tel que $\vec{u}_m = \vec{u}_x$. La longueur à vide du ressort (sans masse) est l_0. La longueur est l_1 lorsqu'on y accroche la masse, en situation d'équilibre : $mg - k(l_1 - l_0) = 0$ (1)
En mouvement, l'allongement du ressort est $l - l_0 = (l_1 + x) - l_0$ où x représente l'écart par rapport à la situation d'équilibre ; l'équation du mouvement s'écrit alors en projection sur Ox :

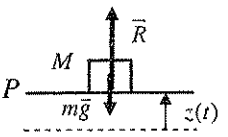


$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\left[(l_1 - l_0) + x\right] \text{ et à l'aide de (1) : } m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

qui est l'équation de l'oscillateur harmonique horizontal de la question **20.**, avec ici la signification de x donnée ci-dessus, x n'est pas l'allongement. Le choix de l'origine à l'équilibre permet de ne pas avoir de terme constant dans l'équation différentielle.

En posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, il vient l'équation classique : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

48. Le système considéré est le corps M de masse m qui se comporte comme un point matériel. Il est soumis à son poids $-mg\,\vec{u}_z$, à la réaction normale du plateau $R\,\vec{u}_z$ et son mouvement est connu : c'est celui du plateau avec lequel il est en contact.



* La RFD pour M s'écrit alors en projection sur la verticale ascendante :

$$m\ddot{z}(t) = -mg + R \;\Rightarrow\; R(t) = mg - m\omega^2 a\cos\omega t$$

Attention : le corps M n'étant pas immobile, la réaction n'est pas égale (en norme) à son poids.

La réaction la plus faible (lorsque $\cos\omega t = 1$) vaut $R_{min} = mg - m\omega^2 a$; le contact est maintenu tant que $R_{min} > 0$ soit $\omega^2 < g/a = \omega_0^2$ ce qui définit la pulsation critique :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}}$$

L'accélération du plateau est alors $\ddot{z}(t) = -\omega_0^2 a \cos\omega t = -g\cos\omega t$ avec pour maximum g, comme s'il était en chute libre !

* À noter qu'à $t = 0$ (l'instant où M est posé sur P), la plateau est en position haute, à vitesse nulle. Au moment où il s'affaisse, son accélération est, pour $\omega = 2\omega_0$, $\ddot{z}(t = 0^+) = -4g$. Le corps de vitesse initiale nulle tombe au mieux en chute libre soit avec une accélération de $-g$. Le contact est donc immédiatement rompu ! Il se produira ultérieurement.

Mouvements de particules chargées

49. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{1}{2}m(v_0^2 - 0) = e\Delta V \quad \Rightarrow \quad \underline{v_0} = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \underline{59.10^6 \text{ m.s}^{-1}}$$

La vitesse est grande, environ $\frac{c}{5}$, l'électron est en effet facilement relativiste. Le calcul de R et T en mécanique classique est limite.

d'où le rayon du cercle $\underline{R} = \frac{mv_0}{eB} = \underline{6,7 \text{ cm}}$ de l'ordre de la dimension du tube,

et la période de rotation $\underline{T} = \frac{2\pi m}{eB} = \underline{7,0 \text{ ns}}$ très faible compte-tenu de la vitesse.

50. La force exercée sur la particule est essentiellement la force de Lorentz, on néglige *a priori* le poids. $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

a) Pour que le mouvement soit rectiligne et uniforme, il faut, dans le référentiel terrestre galiléen : $\vec{F} = \vec{0}$, soit $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}}$ (la valeur initiale). Donc $\vec{B}$ est dirigé suivant $+\vec{u}_z$, ce résultat est indépendant des caractéristiques q et m de la particule. La valeur de $\|\vec{v}\|$ est imposée $v_0 = \frac{E}{B}$.

A.N. $v_0 = 1,0.10^5 \text{ m.s}^{-1}$. Cette valeur permet de revenir sur l'hypothèse « poids négligeable » qui a peu de sens si $\vec{F} = \vec{0}$! La trajectoire sera donc parabolique dans le champ de pesanteur, mais de concavité $\frac{g}{2v_0^2}$ très faible, la déviation due au poids est négligeable à l'échelle du dispositif.

b) On obtient la vitesse v_0 après accélération : $\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = qU_0$ avec $q = 2e$

$$v_{01} = \left(\frac{4\,e\,U_0}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad v_{02} = \left(\frac{4\,e\,U_0}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

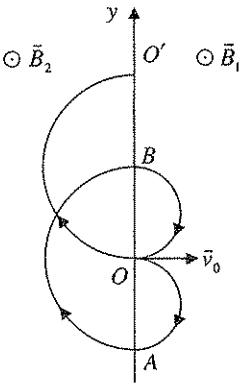
Pour passer par F il faut $v_{01} = \dfrac{E}{B} = \dfrac{U_1}{d\,B} \Rightarrow \dfrac{U_1}{d\,B} = \left(\dfrac{4\,e\,U_0}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}}$

Et pour l'autre isotope : $\dfrac{U_2}{d\,B} = \left(\dfrac{4e\,U_0}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Il vient : $\boxed{U_2 = U_1\left(\dfrac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

A.N. : $U_2 = 100\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 115\ \text{V}$, l'écart entre les deux tensions est suffisamment important pour réaliser expérimentalement la séparation.

51. a) Comme il n'y a que des champs magnétiques qui agissent, la norme de la vitesse n'est pas modifiée. Dans le demi-espace $x > 0$, la particule décrit un demi-cercle de rayon $R_1 = \dfrac{mv_0}{qB_0}$, puis elle arrive en A et pénètre dans l'espace $x < 0$, toujours avec une vitesse de norme v_0 et décrit un demi-cercle de rayon $R_2 = \dfrac{mv_0}{q\,B_0/2} = 2\,R_1$ qui l'amène en B, avec la vitesse $v_0\,\vec{u}_x$, donc dans les mêmes conditions qu'en O. Du point B, elle revient en O, mais avec la vitesse $-v_0\,\vec{u}_x$, ce qui l'amène en O' ...

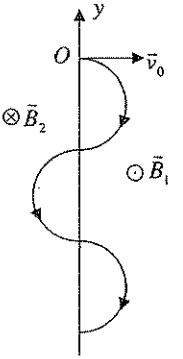


b) La durée du trajet de O à B est :

$$\Delta t = \frac{\pi\,R_1}{v_0} + \frac{\pi\,R_2}{v_0} = \frac{\pi\,m}{q\,B_0} + \frac{2\pi\,m}{q\,B_0} = \frac{3\pi\,m}{q\,B_0}$$

et la progression est de $2R_2 - 2R_1 = 2\,R_1$, la vitesse de dérive suivant Oy est donc :

$$\vec{V}_{\text{dér}} = \frac{2R_1}{\Delta t}\,\vec{u}_y = \frac{2mv_0}{qB_0}\,\frac{qB_0}{3\pi m}\,\vec{u}_y \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{\text{dér}} = \frac{2v_0}{3\pi}\,\vec{u}_y}$$



c) Avec $\vec{B}_2 = -B_0\,\vec{u}_z$, on obtient la trajectoire ci-contre :

La vitesse de dérive est : $\vec{V}_{\text{dér}} = -\dfrac{4R_1}{T}\,\vec{u}_y$,

avec $R_1 = \dfrac{mv_0}{qB_0}$ et $T = \dfrac{2\pi R_1}{v_0} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{déc} = -\dfrac{2v_0}{\pi}\vec{u}_y}$

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

52. a) 10^{-15} s ; b) environ 1 centième de seconde, en fait de 1 ms à 1 s ; c) 20 min chacun ! d) 1h 30 min ; e) 6 ans, environ 42 ans (mais ça change souvent) et de l'ordre de 50 ans (mais elle évolue avec les nouvelles découvertes de gisements) ; f) 5 600 ans et 31 000 ans ; g) il y a environ 4,5 millions d'années, mais l'homme moderne n'a que 200 000 ans ; h) environ 250 millions d'années ; i) 4,5 et 15 milliards d'années.

53. a) environ 10 nm ; b) 7 µm ; c) 20 µm et 0,1 mm ; d) 50 à 60 µm ; e) 6,40 m pour un grand requin blanc (la baleine bleue peut atteindre 30 m, mais il s'agit d'un cétacé !), 115 m pour un séquoia ; f) environ 10 km (30 000 pieds) ; g) 380 km ; h) 380 000 km et 150 millions de km ; i) 4,2 années-lumière.

54. a) le micromètre par heure ; b) quelques cm par an ; c) quelques $m.s^{-1}$ et 10,4 $m.s^{-1}$; d) $\approx 160\ km.h^{-1}$! et $\approx 300\ km.h^{-1}$; e) $\approx 50\ m.s^{-1}$; f) 340 $m.s^{-1} \approx 1\,200\ km.h^{-1}$ et 500 $m.s^{-1}$; g) 8,0 $km.s^{-1} \approx 29\,000\ km.h^{-1}$; h) sondes interplanétaires, de l'ordre de 40 $km.s^{-1}$ dans le référentiel héliocentrique ; i) 300 000 $km.s^{-1}$.

55. L'accélération est le taux de variation de la vitesse ; un corps dont la vitesse augmente de 9,8 $m.s^{-1}$ toutes les secondes est sujet à une accélération de 9,8 $m.s^{-1}$ par seconde, soit 9,8 $m.s^{-2}$.

56. Initialement $L = 2\pi R$, et ensuite $L + \Delta L = 2\pi(R+h)$, avec $\Delta L = 1$ m.

Par différence, la corde s'est élevée de $\underline{h} = \dfrac{\Delta L}{2\pi} \approx \underline{16\ cm}$. Ce résultat est *a priori* surprenant (on s'attendait à moins !). Il le devient cependant moins lorsque l'on remarque qu'il est indépendant du rayon R de l'objet sphérique. La hauteur h dont s'élève la corde est la même lorsque l'expérience est faite avec une orange…

57. a) Le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle car $OM_1 = OM_2$ et $\widehat{OM_1M_2} = \dfrac{\pi}{4}$.

En projetant le vecteur vitesse porté par M_1M_2 et dirigé vers M_2 sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$:

$$\begin{cases} V\cos(\pi/4) = -\dot{r} & (1) \\ V\sin(\pi/4) = r\,\dot{\theta} & (2) \end{cases} \quad \text{avec } V = \left\|\vec{V}\right\| = \text{cste}$$

Le rapport des deux équations donne l'équation différentielle à variables séparables :

$dr = -r d\theta$ s'intégrant en $r = \lambda e^{-\theta}$ soit avec les conditions initiales :

$\boxed{r = a e^{-\theta}}$ la trajectoire est une spirale logarithmique.

(1) $\Rightarrow$ $r = -V\dfrac{\sqrt{2}}{2}t + \text{cste}$ et avec les C.I. : $\boxed{r = a - V\dfrac{\sqrt{2}}{2}t}$

(2) $\Rightarrow$ $\dot{\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\sqrt{2}}{2}V = \dfrac{V}{a}\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\theta}$ ou $e^{-\theta}\theta = \dfrac{V}{a}\dfrac{\sqrt{2}}{2}dt$ et après intégration et calcul de la constante additive avec les C.I. :

$$\boxed{\theta = \ln\left(1\Big/\left(1 - \frac{V}{a}\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right)}$$

b) $\theta(t)$ croît et $r(t)$ décroît, $r = 0$ pour $t = \tau$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = \dfrac{\sqrt{2}\,a}{V}}$

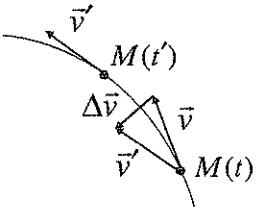
c) Chaque mouche vole à vitesse constante, chacune parcourt donc :

$$\boxed{L = V\tau = \sqrt{2}\,a}$$

Chaque mouche effectue un nombre infini de tours autour de O en une durée finie et en parcourant une distance finie. La longueur de la spirale est $\sqrt{2}\,a$.

58. L'accélération est un vecteur représentant l'évolution du vecteur vitesse, et donc même si la vitesse est constante en norme, elle peut évoluer en direction, ce qui est le cas dans un mouvement circulaire (accélération normale dirigée vers le centre).

La figure représente les vitesses $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ du mobile M sur une trajectoire circulaire (uniforme) entre deux instants t et t' ; il apparaît géométriquement que dans l'intervalle de temps $t' - t = \Delta t$, la vitesse a varié de $\vec{v}' - \vec{v} = \Delta\vec{v}$.



L'accélération est la grandeur $\vec{a} = \lim\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ quand $\Delta t \to 0$.

59. 1. L'ensemble formé par les deux boules étant plus lourd que la grosse boule, d'après la théorie d'Aristote, il tombe plus vite qu'elle.

2. Toujours d'après la loi d'Aristote, la petite boule tombant moins vite que la grosse freine la chute de cette dernière de sorte que l'ensemble tombe moins vite qu'elle.

Deux raisonnements tirés de la même loi aboutissent donc à deux conclusions contradictoires. La seule façon pour Galilée d'éliminer ce paradoxe est d'affirmer que toutes les boules tombent de la même façon, quelle que soit leur masse...

60. Un système peut être ouvert et de masse constante, il suffit qu'il reçoive, à tout instant, la même quantité de matière, en masse, que celle qu'il cède à l'extérieur. Les lois de Newton ne s'appliquent pas à ce système de masse constante.

61. Le ressort horizontal est soumis à une force F, que l'on retrouve en tout point. Chaque partie s'allonge proportionnellement à sa longueur. On en conclut que des ressorts de même nature, soumis à une même force, ont des allongements proportionnels à leur longueur, soit :

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{l_{01}}{l_{02}} \text{ avec } F = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 \text{ soit } \boxed{\frac{k_2}{k_1} = \frac{l_{01}}{l_{02}}}$$

On a bien sûr : $k_1 = k_2$ si $l_{01} = l_{02}$

Remarquer que la constante de raideur k du ressort de départ (association série des deux parties de raideur k_1 et k_2) est telle que $kl_0 = k_1 l_{01} = k_2 l_{02}$ avec $l_0 = l_{01} + l_{02}$ soit $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

62. Les aiguilles et la mécanique de l'horloge tournent à chaque période du balancier ; si l'horloge avance, c'est que la période imposée par le pendule est trop courte. Pour l'augmenter, il suffit de desserrer la vis pour éloigner G de O ce qui augmente la longueur l du pendule simple équivalent et, en augmentant la période $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, ralentit la mécanique.

63. Les forces de frottement bien sûr ne sont pas conservatives ; d'un point A à un point B, leur travail dépend du chemin suivi. En effet, en ligne directe ce travail dissipatif (prélevé sur l'énergie mécanique du système) est moindre que dans le cas d'un trajet indirect (un arc de cercle par exemple qui est plus long).

Considérons un enfant sur une balançoire, grâce aux mouvements de ses jambes (travail d'une force musculaire) il peut augmenter son énergie mécanique, ce que l'on constate avec l'augmentation d'amplitude des oscillations.

64. La question de l'existence d'une énergie potentielle ne se pose que pour un champ de force. Si elle existe E_P est une fonction des coordonnées du point, ce qui n'est pas le cas de l'énergie cinétique, qui dépend de la vitesse en ce point. La relation générale $\delta W = dE_C$ ne signifie pas que δW soit une différentielle vis-à-vis des coordonnées.

65. a) Pour $r = 0$, on lit $\dot{r} = 0$, soit $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta = \ddot{r}\,\vec{u}_r$ au point O. Avec $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dr}\frac{dr}{dt} = 0$ en O. Donc $\vec{a}(r = 0) = \vec{0}$ et $r = 0$ est une position d'équilibre. Un petit déplacement $dr > 0$ donne d'après la trajectoire de phase $\dot{r} > 0$, donc $r \nearrow$, l'équilibre est instable.

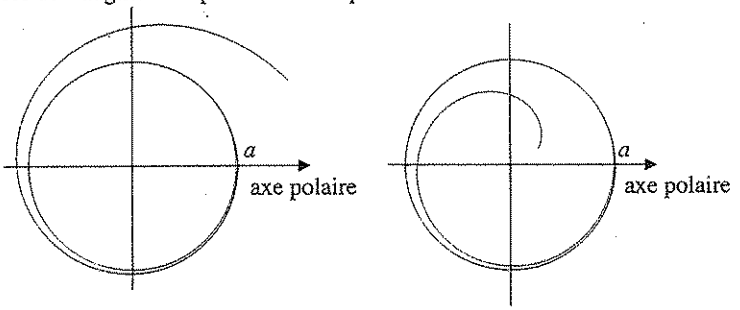
b) On a $r = \text{cste}$, donc $\dot{r} = 0$ pour $r = 0$ (équilibre) et $r = a$: mouvement circulaire uniforme (car $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = \text{cste}$).

c) $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = \text{cste}$, la trajectoire est de type « spirale » qui s'enroule toujours dans le même sens.

Si $r(0) = r_0 > a$, on lit $\dot{r} < 0$ soit $r \searrow$ et tend asymptotiquement vers $r = a$ (car $\dot{r} \to 0$).

Plus précisément $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$, pour $r > a$, $\dot{r} < 0$ donc r diminue : $\dot{r} \to 0$ et $r\dot{\theta} \to a\dot{\theta}_0$, donc $\vec{v} \to a\dot{\theta}_0\,\vec{u}_\theta$

Si $r(0) = r_0 < a$, on lit $\dot{r} > 0$ soit $r \nearrow$ et tend asymptotiquement vers $r = a$ (car $\dot{r} \to 0$). Si r_0 est inférieure à la valeur correspondant à $\dot{r}$ maximale, la valeur de r augmente rapidement au départ.



66. La force de frottement fluide qu'exerce l'air sur les corps en mouvement est toujours opposée au vecteur vitesse et sa norme augmente quand la vitesse augmente.

Partons d'une situation où le corps est lâché avec une vitesse initiale nulle. Il est soumis à deux forces de même direction mais de sens opposé : son poids qui initie et accélère le mouvement et dont la norme est constante, et la force de frottement, initialement nulle, qui s'oppose au mouvement et dont la norme croît avec celle de la vitesse acquise, ce qui diminue la norme de l'accélération. Lorsque les deux forces opposées ont même norme (limite asymptotique), alors l'accélération est nulle, ce qui définit la vitesse limite.

Pour le modèle $-\lambda\vec{v}$: $m\vec{g} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = \dfrac{m}{\lambda}\vec{g}}$

Pour le modèle $-k\,v^2$: $m\vec{g} - k\|\vec{v}\|\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = \sqrt{\dfrac{m}{k\,g}}\,\vec{g}}$

À la question **40.**, la vitesse limite atteinte est de $-6,5\ \text{m.s}^{-1}$, soit

$\lambda \approx \dfrac{0,10 \times 9,8}{6,5} \approx 0,15\ \text{kg.s}^{-1}$, que l'on peut donc déduire de la trajectoire de phase.

67. Lorsque la vitesse (en norme) est minimale, il en est de même pour l'énergie cinétique, et donc d'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dEc}{dt} = 0 = m\vec{g}.\vec{v} - \lambda\vec{v}^2$$

ce qui conduit à $\vec{g}.\vec{v} > 0$, prouvant qu'à ce moment-là le mobile est déjà en « phase descendante », donc après le sommet de la trajectoire.

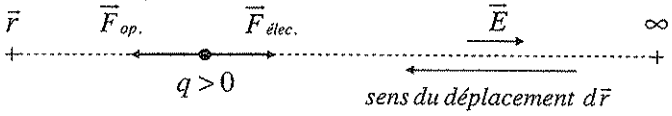
68. En électrostatique, la charge est immobile dans les positions initiale et finale ; elle ne peut donc être libre, c'est-à-dire qu'elle est soumise à une autre force qui lors du déplacement travaille contre la force électrostatique : on la représente par un opérateur extérieur.
Le travail de l'opérateur pour amener la charge depuis l'infini de manière quasi statique (afin que l'opérateur équilibre à tout instant la force électrostatique) est :

$$\delta W_{op.} = -\delta W_{élec.} = dE_p$$

d'où le travail d'assemblage : $W_{op.} = E_p(\vec{r}) - \cancel{E_p(\infty)}$ où $\vec{r}$ est la position finale, et qui s'identifie à l'énergie potentielle d'interaction du champ et de la charge.

Rq : Le théorème de l'énergie cinétique donne $dE_c = \delta W_{élec.} + \delta W_{op.} = 0$; comme attendu, la charge ne reçoit pas d'énergie cinétique.

Le schéma ci-dessous montre le déplacement d'une charge positive pour remonter le potentiel (donc dans le sens opposé au champ) ; dans ce cas l'opérateur doit fournir un travail positif.



69. On a $\frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 3.10^8$ m.s^{-1} ; l'électron atteindrait la vitesse de la lumière c et aurait une vitesse encore plus grande pour $U > 250$ kV ! En réalité ceci n'est pas possible car la mécanique classique (de Newton) ne s'applique plus dès lors que la vitesse des particules n'est plus très petite devant c et que les particules deviennent relativistes. L'expression relativiste de l'énergie cinétique $E_c = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$ montre l'énergie cinétique peut augmenter sans que la vitesse de la particule ne dépasse la vitesse c. On considère une particule comme relativiste dès son énergie cinétique est supérieure au dixième de son énergie de masse mc^2.

70. Remarquons d'abord que le champ magnétique stationnaire ne joue aucun rôle dans l'effet « d'accélération » des particules ; en effet, la force magnétique de Lorentz ne travaille pas puisque perpendiculaire à la vitesse, et ne peut donc modifier la norme de la vitesse d'une particule chargée. Ce rôle est dévolu au champ électrique.
Vu les vitesses considérables atteintes, les accélérateurs ou anneaux de stockage (pour confiner les particules), ou machines de type « Tore supra » ou «Tokamak » du projet Iter (pour confiner le plasma destiné à la fusion

thermonucléaire), doivent être de forme circulaire. Ceci nécessite la présence de champs magnétiques pour incurver les trajectoires des particules chargées.
Dans un électroaimant conventionnel, le fil résistif dans lequel circule un puissant courant à l'origine du champ magnétique provoque une surchauffe de la bobine et l'énergie perdue est telle que le coût en énergie de l'aimant est très élevé, de plus l'intensité doit être limitée pour ne pas atteindre la fusion des fils. Alors qu'une bobine supraconductrice qui, à basse température, ne présente pas de résistance électrique, permet d'obtenir un champ magnétique élevé, et donc d'être plus efficace tout en étant moins coûteuse en énergie. L'introduction de la technologie des aimants supraconducteurs (maintenus à des températures très basses, 1,8 K, qui annulent quasiment la résistance électrique) a permis d'atteindre de très hautes énergies dans les accélérateurs circulaires, la vitesse des particules étant voisines de la vitesse de la lumière dans le vide.

Exercices

71. Cinématique d'un satellite terrestre (*)

a) $r_{max} = r_A = \dfrac{p}{1-e}$ car $\theta_A = \pi$; $r_{min} = r_P = \dfrac{p}{1+e}$ car $\theta_P = 0$

$$\text{Donc } \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_P} = \frac{2}{p} \text{ et } \boxed{p = \frac{2 r_A r_P}{r_A + r_P}}$$

$$\text{De } 1 + e = \frac{p}{r_A} \text{ on déduit } \boxed{e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}}$$

AN : $r_A + r_P = 2a$; $\underline{r_P = 8{,}0.10^3 \text{ km}}$; $\underline{r_A = 24.10^3 \text{ km}}$; $\underline{p = 12.10^3 \text{ km}}$; $\underline{e = 0{,}50}$; l'ellipse est assez aplatie, $r_A = 3 r_P$ et $e < 1$ cohérent avec l'expression de r.

b) $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r$ donc $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ que l'on multiplie par $r \neq 0$:

$$2 r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} = d\left(r^2 \dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{r^2 \dot{\theta} = C = \text{cste}}$$

Comme r est maximal en A et minimal en P, $\dot{r} = 0$ en ces deux points et

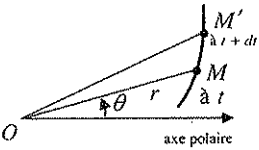
$$\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \text{ en } A \text{ et en } P} \text{ et } \boxed{C = r_A v_A = r_P v_P}$$

AN : $\underline{C = 69.10^3 \text{ km}^2.\text{s}^{-1}}$, cohérent avec la distance à O.

c) De la relation précédente on tire : $\boxed{v_A = v_P \dfrac{r_P}{r_A}}$

AN : $\underline{v_A = 2{,}9 \text{ km.s}^{-1}}$, donc $v_A \neq v_P$ le mouvement n'est pas uniforme.

d) Le secteur balayé pendant dt : $[OM(t), OM(t+dt)]$ a pour valeur approchée l'aire du triangle OMM', soit

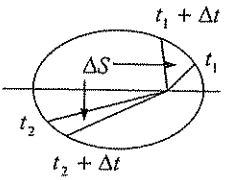


compte tenu des propriétés du produit vectoriel (voir le chapitre **0**, Produit vectoriel), une surface :

$$dS = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\right\| = \frac{1}{2}\left\|r\vec{u}_r \wedge \left(dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta\right)\right\|$$

$dS = \frac{1}{2}\left\|r^2 d\theta\, \vec{u}_z\right\|$, or $r^2\dot{\theta} = C$ donc $\dot{\theta}$ garde un signe constant, on écrit :

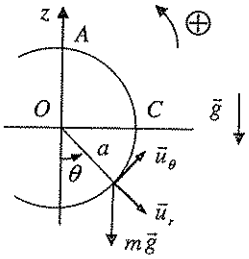
$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cste}}$$ vitesse aréolaire constante



Ceci permet de comprendre que lorsque le satellite est plus proche de O (en P) il va plus vite que lorsqu'il est plus éloigné (en A par exemple).

72. Looping dans une gouttière

Les forces appliquées sur le point sont, dans le référentiel de la gouttière lié au référentiel terrestre galiléen, le poids et la réaction normale car il n'y a pas de frottements. La direction de $\vec{R}_n$ est connue, portée par $\vec{u}_r$ car le mouvement a lieu sur une surface.



La RFD projetée sur $\vec{u}_r$ donne :

$$mg\cos\theta - R_n = -ma^2\dot{\theta} = -m\frac{v^2}{a}$$

car $r = a = \text{cste}$ et $v = a\dot{\theta}$. On en déduit :

$$R_n = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{a}$$

Il est donc évident que R_n ne peut s'annuler que pour $\cos\theta < 0$ soit entre C et A.

Le théorème de l'E_C entre B et M quelconque permet de calculer v :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg\left(h - \left(a - a\cos\theta\right)\right) + 0$$

En remplaçant : $\boxed{R_n = mg\left(3\cos\theta + \frac{2h}{a} - 2\right)}$

R_n est une fonction décroissante de θ, sa valeur est minimale en A, donc la condition $R_n \neq 0$ en A suffit pour assurer le looping.

$R_n > 0$ pour $\cos\theta = -1$ donne la condition : $\boxed{h > \frac{5a}{2}}$

Donc pour passer le point A il faut partir sur la rampe de lancement au moins un demi-rayon au-dessus de A, ce qui montre que la condition énergétique $v_A > 0$ est largement insuffisante. La valeur limite $5a/2$ permet le looping.

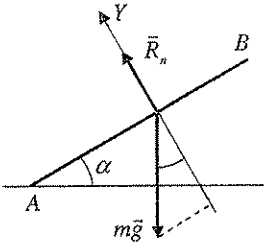
Si le point M quitte la gouttière entre C et A,

$-1 < \cos\theta < 0$, pour $R_n = 0$ fixant $\cos\theta$:

$\boxed{a < h < \frac{5a}{2}}$ et $z = a - a\cos\theta \Rightarrow \boxed{z_{dec.} = \frac{1}{3}(a + 2h) < h}$

73. Franchissement d'une bosse

a) Les forces appliquées sur le point sont, dans le référentiel terrestre galiléen, le poids et la réaction normale car il n'y a pas de frottements. La direction de $\vec{R}_n$ est connue, car le mouvement a lieu sur une surface, elle est portée par la normale à la surface $\vec{u}_Y$.



La RFD projetée sur $\vec{u}_Y$ donne :

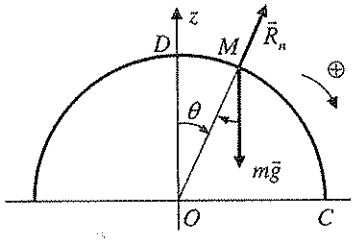
$R_n - mg\cos\alpha = m\ddot{Y}$, un décollage nécessite simultanément : $R_n = 0$ et $\ddot{Y} > 0$, ce qui est manifestement impossible. Attention dans cette question de ne pas poser $\ddot{Y} = 0$, ce qui impose un non décollage, ou pire d'invoquer une « compensation » du poids et de la réaction, alors que la réaction n'est jamais connue a priori (sa valeur dépend de l'accélération).

b) Pour atteindre le point B la condition énergétique suffit, soit $v_B \geq 0$, le théorème de l'énergie cinétique donne entre A et B :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(z_B - z_A) = -mgR\cos\alpha$$

il faut donc $\boxed{v_A \geq (2gR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$

c) Pour l'étude du mouvement du point matériel sur la sphère, on se place en un point quelconque, mais favorable, sur le schéma : $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$.



L'expression obtenue est bien sûr valable en tout point, notamment entre B et D où $-\alpha \leq \theta \leq 0$.

La relation fondamentale s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R}_n = m\vec{a}$$

avec pour un mouvement circulaire :

$$\vec{a} = R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$$

et en projection sur la normale (ici $\vec{u}_r$) : $R_n - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow R_n = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

On calcule v avec le théorème de l'énergie cinétique entre A et M quelconque :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgR\cos\theta \quad \text{soit} \quad v^2 = v_A^2 - 2gR\cos\theta$$

En remplaçant : $\boxed{R_n = 3mg\cos\theta - \frac{mv_A^2}{R}}$

Entre B et D, $\theta < 0$, $\cos\theta > 0$ et $\cos\theta \nearrow$ de B à D. On a donc $\left\|\vec{R}_n\right\|_{\min}$ au point B, soit pour $\theta = -\alpha$.

Le palet ne décollera pas entre B et D si $R_{n,B} > 0$, soit $\boxed{v_A < (3gR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$ (1)

d) Après D, le palet décolle pour $R_n = 0$ avec $\theta > 0$:

$$\boxed{\cos\theta_d = \frac{v_A^2}{3gR}}$$

Avec la condition précédente on a : $\cos\theta_d < \cos\alpha$.

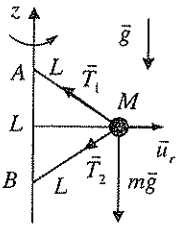
En effet pour $\theta = \alpha$, $v = v_B$ (même cote), or $R_{n,B} > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\text{décollage pour } \theta_d > \alpha}$$

Rq : Pour atteindre D il faut $v_A \geq (2gR)^{\frac{1}{2}}$ ce qui avec la relation (1) impose des conditions sur α : $\cos\alpha > \frac{2}{3}$.

74. Un pendule tournant

a) Dans le référentiel terrestre galiléen lié à l'axe Oz, les forces sur m sont le poids, la tension $\vec{T}_1$ du fil supérieur dirigée vers A, la tension $\vec{T}_2$ du fil inférieur dirigée vers B. Le triangle ABM est équilatéral. Le mouvement ici est connu, on cherche les forces. La RFD donne $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -m\omega^2 R\,\vec{u}_r$, le mouvement étant circulaire uniforme de rayon $R = L\cos\frac{\pi}{6}$.



En projection sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$:

$$\begin{cases} T_1\cos\frac{\pi}{6} + T_2\cos\frac{\pi}{6} = m\omega^2 L\cos\frac{\pi}{6} \\ -mg + T_1\sin\frac{\pi}{6} - T_2\sin\frac{\pi}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} T_1 &= m\left(\frac{L\omega^2}{2} + g\right) \\ T_2 &= m\left(\frac{L\omega^2}{2} - g\right) \end{aligned}}$$

b) Le fil supérieur ne peut pas se détendre, le fil inférieur reste tendu si :

$$\boxed{\omega > \sqrt{\frac{2g}{L}}}$$

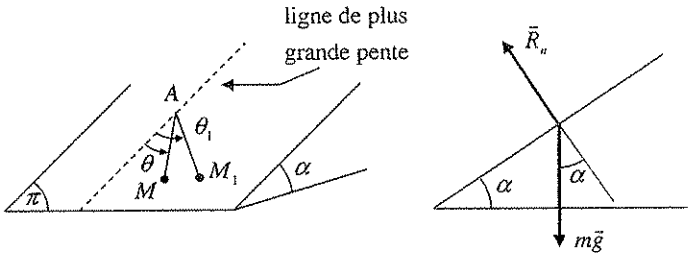
75. Pendule oscillant sur un plan incliné (*)

On étudie la masse m dans le référentiel terrestre galiléen lié au plan incliné. Les forces sur m sont le poids, la tension $\vec{T}_1$ du fil dirigée vers A et la réaction du plan $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n$. La direction de $\vec{R}_n$ est connue, c'est la normale au plan incliné, direction notée Oy.

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{R}_n + \vec{R}_t = m\vec{a} \quad (1)$$

De plus comme le point glisse : $\left\|\vec{R}_t\right\| = k\left\|\vec{R}_n\right\|$.

Il faut pour résoudre faire plusieurs schémas, car les oscillations ont lieu de part et d'autre de la ligne de plus grande pente du plan incliné. Le mouvement est circulaire, dans le plan du plan incliné, de centre A.



La projection de (1) sur la normale au plan incliné (plan π) :

$-mg\cos\alpha + 0 + R_n + 0 = m\ddot{y} = 0$ car il n'y a pas de mouvement sur Oy.

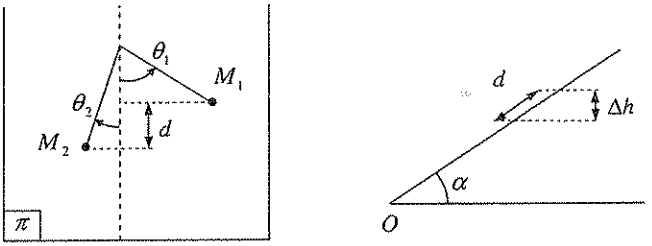
On a donc $\left\|\vec{R}_t\right\| = k\left\|\vec{R}_n\right\| = k\,mg\cos\alpha$.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre M_1 et M_2 :

les vitesses en M_1 et M_2 sont nulles : $\Delta E_c = 0$

le travail de $\vec{T}$ orthogonale au déplacement est nul

le travail de $\vec{R}_n$ orthogonale au déplacement est nul



$W_{poids} = mg\,\Delta h$ avec $\Delta h = d\sin\alpha$ et $d = L\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)$

$W_{R_t} = -\left\|\vec{R}_t\right\| L\left(\theta_1 - \theta_2\right)$ car $\left\|\vec{R}_t\right\| = \text{cste}$ et $\vec{R}_t$ est portée par la tangente au mouvement (attention $\theta_2 < 0$).

$W_{poids} + W_{frott} = 0 \Rightarrow mgL\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)\sin\alpha = k\,mg\cos\alpha\,L\left(\theta_1 - \theta_2\right)$

$$\boxed{k = \tan\alpha \frac{(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}{(\theta_1 - \theta_2)}}$$

Ce qui fournit une méthode de mesure du coefficient de frottement dynamique de glissement.

76. Oscillations amorties d'un plateau

a) L'énoncé indique que le système est conservatif. On choisit Oz vers le haut, $E_{p\ pes} = +mgz$.

La conservation de l'énergie mécanique (cinétique, potentielle de pesanteur et potentielle élastique) du système {plateau + boule} s'écrit :

$\frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \text{cste}$, avec l_0 la longueur initiale (avant rencontre boule-plateau) car avec un plateau sans masse, la longueur initiale est la longueur à vide. Attention h_0, h_1 et h_2 sont positifs, z est algébrique.

Entre h_0 ($v = 0, z = h_0$ et $l - l_0 = 0$) et h_1 ($v = 0, z = -h_1$ et $l - l_0 = -h_1$) :

$$0 + mgh_0 + 0 = 0 - mgh_1 + \frac{1}{2}kh_1^2 \text{ soit, sachant que } h_1 > 0 :$$

$$\boxed{h_1 = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh_0}{mg}}\right)}$$

AN : $h_1 = 6{,}8$ cm, les valeurs numériques vont permettre une comparaison plus rapide des diverses valeurs.

Entre h_0 ($v = 0, z = h_0$ et $l - l_0 = 0$) et h_2 ($v = 0, z = h_2$ et $l - l_0 = h_2$) :

$$0 + mgh_0 + 0 = 0 + mgh_2 + \frac{1}{2}kh_2^2 \text{ soit, sachant que } h_2 > 0 :$$

$$\boxed{h_2 = \frac{mg}{k}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2kh_0}{mg}}\right)}$$

AN : $h_2 = 5{,}8$ cm

On n'a pas $h_1 = h_2$ (mais $h_1 > h_2$) car la position indiquée 0 n'est pas position d'équilibre pour le plateau avec la boule.

b) À l'équilibre la somme des forces est nulle soit $-mg - k(l - l_0)_e = 0 \Rightarrow (l - l_0)_e < 0$ le ressort est comprimé à l'équilibre, en posant h_e la hauteur arithmétique de compression : $\boxed{h_e = \frac{mg}{k}}$

AN : $h_e = 0{,}5$ cm

On a clairement $h_1 - h_2 = 2h_e$ ou mieux, $h_1 - h_e = h_2 + h_e$ indiquant que l'amplitude des oscillations est symétrique par rapport à cette position d'équilibre.

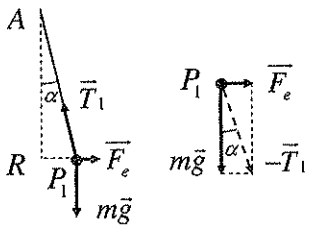
La variation d'énergie mécanique entre la situation initiale et la situation finale est :

$$\Delta E = (0 - mgh_e + \frac{1}{2}kh_e^2) - (0 + mgh_0 + 0) = -\frac{m^2g^2}{2k} - mgh_0 < 0$$

À cause des frottements qui amortissent le mouvement, le système oscillant n'est pas conservatif et le théorème de l'énergie cinétique indique que la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives, ici négatif.

77. Équilibre de masses chargées électriquement

a) Les particules chargées s'attirant, leurs charges sont de signe contraire. La figure de gauche montre l'équilibre de la particule P_1 sous l'action de trois forces concourantes : le poids $m\vec{g}$ (vertical), la force électrostatique $\vec{F}_e$ (horizontale) et la tension $\vec{T}_1$ du fil (inclinée d'un angle α sur la verticale).



Soit R le point formant avec A et P_1 un triangle rectangle en R ; l'angle α est alors donné par :

$$\sin\alpha = \frac{RP_1}{AP_1} = \frac{(L-d)/2}{L} = \frac{1}{2}(1 - d/L) = 0{,}167 \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha = 9{,}6\,°} \quad \text{et} \quad \tan\alpha = 0{,}169$$

(l'angle étant faible, on a $\tan\alpha \approx \sin\alpha$)

b) Deux méthodes pour déterminer F_e en fonction de mg et α, en éliminant T_1 :

- méthode 1 à considérer après étude du chapitre **7** : par le théorème des moments par rapport à l'axe Δ_A passant par A, en choisissant le sens trigonométrique comme sens positif :

  $\mathfrak{M}_{\Delta_A}^{\vec{T}_1} = 0$; $\mathfrak{M}_{\Delta_A}^{\vec{F}_e} = +F_e \times AR = F_e L\cos\alpha$; $\mathfrak{M}_{\Delta_A}^{m\vec{g}} = -mg \times RP_1 = -mgL\sin\alpha$

  alors la nullité de la somme des moments donne $F_e = mg\tan\alpha$

- par la RFD ; la somme des trois forces étant nulle, on peut écrire $m\vec{g} + \vec{F}_e = -\vec{T}_1$, ce qui se comprend bien sur la figure de droite ; on lit alors directement $\tan\alpha = F_e / mg$ sans calcul !

  De $F_e = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = mg\tan\alpha$, on déduit $q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 d^2 mg\tan\alpha}$ soit :

  $\underline{q = 2{,}7.10^{-7}\ \text{C}}$, valeur des charges toujours très faible en coulombs.

c) Alors $T_1 = mg/\cos\alpha$ soit $\underline{T_1 = 0{,}10\ \text{N}}$, évidemment très proche de mg.

78. Pendule contrarié

Il s'agit d'un calcul du même type qu'à la question **72.** La tension ne travaille pas, on peut écrire la conservation de l'énergie mécanique de la masse entre la situation initiale (angle θ_0) et la situation où la masse est au plus haut (point H), sur la verticale entre O et A en notant v_H la vitesse à ce moment-là (inutile de transiter par le point B le plus bas) :

$$0 - mgl\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv_H^2 - mg\left[h-(l-h)\right] \quad \text{soit} \quad v_H^2 = 2g(-l\cos\theta_0 + 2h - l) \quad (1)$$

Le mouvement de la masse est alors un cercle de rayon $l-h$ autour de A ; la relation fondamentale de la dynamique au moment où la masse passe en H et projetée sur la verticale descendante (attention aux signes) donne : $m\dfrac{v_H^2}{l-h} = T + mg$ (2)

La condition fil tendu se traduit par $T > 0$ (il ne faut pas que le fil se relâche), et s'il en est ainsi en H, il en a été de même avant. Ce qui s'établit comme dans la question **72.** en calculant la tension T en un point quelconque et en montrant que T est une fonction décroissante de θ. D'après (2) : $v_H^2 > (l-h)g$, et avec l'expression de v_H^2 donnée par (1), cela conduit à une condition sur θ_0 :

$$\boxed{\cos\theta_0 < \frac{5h-3l}{2l}}$$

La valeur limite permet le tour complet.

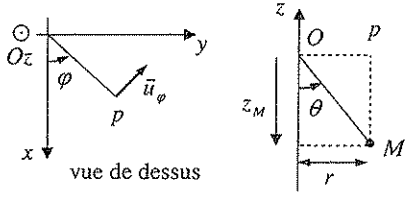
Comme on s'en doutait, l'angle initial θ_0 doit donc être suffisamment important, et surtout il y a des conditions sur la position du clou pour qu'il existe une solution :

$\cos\theta_0 < 1 \Rightarrow h < l$ évident.

$\cos\theta_0 > 0 \Rightarrow h > 3l/5$ moins évident, mais qui montre le lien avec la question du looping.

79. Le mouvement d'un pendule simple est-il plan ? (*)

a) Les schémas donnent $r = L\sin\theta$ et $z_M < 0$.



b) Les forces sont le poids et la tension du fil ; la RFD en projection sur $\vec{u}_\varphi$, direction sur laquelle ni le poids, ni la tension n'ont de composante, donne :

$$m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = 0 \Rightarrow \text{en multipliant par } r \neq 0 : 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0$$

$$\text{soit } \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\varphi} = \text{cste}}$$

c) Les conditions initiales sont $r = L\sin\theta_0$ et $\dot{\varphi} = 0$, donc $r^2\dot{\varphi} = 0$, et comme r n'est pas constamment nul :

$$\dot{\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \text{cste}}$$

Le mouvement est plan, dans le plan vertical contenant le fil à l'instant initial.
Plus généralement $\dot{\varphi}(0) = 0$ avec $r_0 \neq 0$ suffit, c'est-à-dire que la vitesse initiale peut avoir une composante dans le plan vertical contenant le fil initialement.
Dans le cas où $r_0 = 0$, le fil et la verticale sont confondus à l'instant initial ; c'est la direction de $\vec{v}_0$ qui définit le plan vertical du mouvement.
Tout ceci se vérifie aisément expérimentalement. Le caractère plan du mouvement d'un pendule n'est donc pas du tout acquis et dépend des conditions initiales.

80. Rebonds d'une balle : portrait de phase

a) Il s'agit du calcul classique de la chute libre sans frottements. C'est un mouvement à accélération constante traité à la question **16.**, la vitesse initiale est suivant Oz et le point de départ est à h au dessus du sol :

sur Oz : $\dfrac{dv_z}{dt} = -g \Rightarrow v_z(t) = -gt + v_{0z} = -gt + v_0$,

puis $\boxed{z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h}$ car $z(0) = h$

Le système est conservatif : $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgz$ avec $E_p = 0$ en $z = 0$, les conditions initiales fixe $E = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh$. En arrivant au sol, $z = 0$:

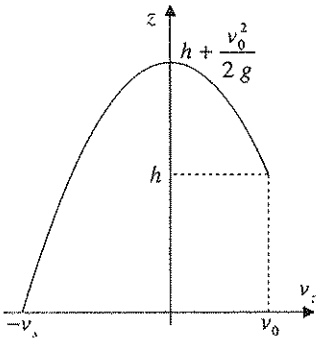
$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \Rightarrow \boxed{v_s^2 = v_0^2 + 2gh}$$

Pout $t = t_s$: $-v_s = -gt_s + v_0 \Rightarrow \boxed{t_s = \dfrac{v_s + v_0}{g}}$ attention $v_s = \|\vec{v}_s\|$.

b) En remplaçant t par $\dfrac{v_0 - v_z}{g} \Rightarrow z = h + \dfrac{v_0^2 - v_z^2}{2g}$

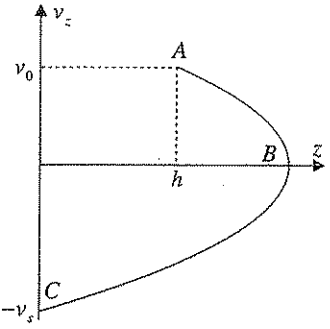
On étudie $z(v_z)$: $\dfrac{dz}{dv_z} = -\dfrac{v_z}{g}$

v_z	$-v_s$ $-v_0$	0	v_0
dz/dv_z	+	0	−
z	0 ↗	$h + \dfrac{v_0^2}{2g}$	↘ h



c) La trajectoire de phase est obtenue par symétrie : $v_z(z)$.

On part du point A, en B l'altitude maximale est atteinte ($v_z = 0$) et en C la balle arrive au sol avec une vitesse négative. De A à C le système est conservatif, ce qui se traduit par une symétrie de la courbe par rapport à l'axe Oz.



d) En un point, le signe de $\dot{z}$ indique le sens de parcours. La partie CD correspond à un rebond de la balle, on a de nouveau un mouvement de chute libre de D à E, avec une nouvelle vitesse initiale à partir du sol. En C la norme de la vitesse est d'environ $6{,}0\ \text{m.s}^{-1}$, juste après le rebond, elle n'est plus que de $4{,}0\ \text{m.s}^{-1}$. Ceci correspond à une diminution de l'énergie cinétique, comme la cote est restée quasiment constante ($z = 0$) l'énergie potentielle de pesanteur n'a pas variée, donc l'énergie mécanique diminue, une partie de l'énergie mécanique est dissipée pendant le rebond. Graphiquement, entre C et D : $\Delta E = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_D^2 - \frac{1}{2} m v_C^2$.

Numériquement $\Delta E \approx \dfrac{0{,}1(4^2 - 6^2)}{2} \approx -1{,}0\ \text{J}$

On retrouve cette diminution d'énergie avec la diminution d'énergie potentielle au sommet de la trajectoire, quand $v_z = 0$: on lit $z_B \approx 1{,}8\ \text{m}$ et $z_E \approx 0{,}8\ \text{m}$, soit $\Delta E = \Delta E_p = mg\Delta z \approx 0{,}1 \times 10 \times (-1) \approx -1{,}0\ \text{J}$

81. Molécule diatomique

a) Le problème est à un paramètre : $dE_p = -f_r\, dr$

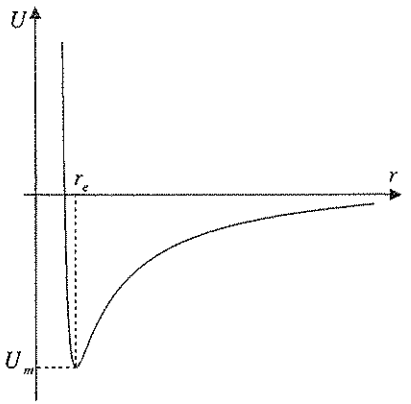
Le premier terme de $U(r)$ correspond à $-\dfrac{dU}{dr}\vec{u}_r = -\dfrac{\delta^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ force attractive entre deux charges de signes opposés.

Le second terme de $U(r)$ correspond à $-\dfrac{dU}{dr}\vec{u}_r = +\dfrac{9A}{r^{10}}\vec{u}_r$ force répulsive, importante quand r est petit (à très courte distance), elle peut s'interpréter comme la répulsion des noyaux.

b) $\dfrac{dU}{dr} = \dfrac{\delta^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \dfrac{9A}{r^{10}}$ qui s'annule pour

$$\boxed{r_e = \left(\frac{9A\,4\pi\varepsilon_0}{\delta^2 e^2}\right)^{\frac{1}{8}}} \quad (1)$$

r	0		r_e		$+\infty$
dU/dr		$-$	0	$+$	
U	$+\infty$	↘	$U_m < 0$	↗	0^-



c) $U(r)$ est minimale pour $r = r_e \Rightarrow$ <u>équilibre stable</u>, l'existence de la molécule est assurée par l'équilibre entre force attractive et force répulsive.

d) On envisage un mouvement au voisinage de la position d'équilibre stable, on va faire apparaître un oscillateur harmonique linéarisé.

$$\left(\frac{df}{dr}\right)_{r_e} = -\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r_e} = \frac{2\delta^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e^3} - \frac{90A}{r_e^{11}} = \frac{1}{r_e^3}\left(\frac{2\delta^2e^2}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{90A}{r_e^8}\right)$$

et en remplaçant r_e^8 avec la relation (1) : $\left(\frac{df}{dr}\right)_{r_e} = -\frac{2\delta^2e^2}{\pi\varepsilon_0 r_e^3} < 0$

On a donc $f(r_e) = 0$ (équilibre) et $\boxed{f(r_e + dr) = -\frac{2\delta^2e^2}{\pi\varepsilon_0 r_e^3}dr}$

force équivalente à une force de rappel élastique avec une constante de raideur :

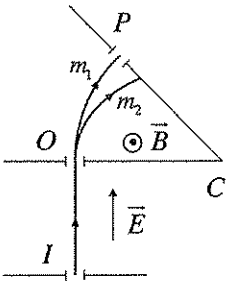
$$k = \frac{2\delta^2e^2}{\pi\varepsilon_0 r_e^3}$$

e) $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\delta^2e^2}{\pi\varepsilon_0 r_e^3 m}}$

82. Sélecteur de masse

a) L'ion étant positif, il est accéléré dans le sens du champ $\vec{E}$; celui-ci doit donc être dirigé comme sur la figure de I vers O (ce qui est confirmé par des potentiels décroissants dans le même sens).
La conservation de l'énergie mécanique s'écrit pour un électron entre I et O :

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + eV_O \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{-2eV_O}{m}}$$



$$\underline{v_0} = \sqrt{\frac{-2N_A eV_O}{M_{Au}}} = \underline{210\ \text{km.s}^{-1}}\ , \text{ vitesse non relativiste}$$

b) Le sens correct du champ $\overline{B}$ est vers l'avant du plan de figure (vérifier que la force $e\overline{v}_0 \wedge \overline{B}$ est bien dirigée de O vers C).

Le rayon r_0 est donné par : $m\frac{v_0^2}{r_0} = ev_0 B \implies r_0 = \frac{mv_0}{eB}$ et conduit à un champ magnétique

$$\underline{B} = \frac{M_{Au}v_0}{N_A e r_0} = \underline{0{,}87\ \text{T}}\ \text{(ce qui est un champ fort)}$$

c) Le rayon de courbure r_0 est en mv_0 et la vitesse v_0 en $\frac{1}{\sqrt{m}}$ (en effet tous les ions n'ont pas même vitesse au passage par O), d'où finalement r_0 en $\sqrt{m}$ ce qui permet d'envoyer vers des points P différents des ions ayant même charge, mais une masse différente : c'est le principe du sélecteur de masse.
Pour $m_2 < m_1$, on a $r_2 < r_1$ comme indiqué sur la figure.

Rq : Si après la phase d'accélération IO par le champ $\overline{E}$, on remplace le champ magnétique $\overline{B}$ par un autre champ électrique, dirigé suivant OC, donc perpendiculaire au précédent, la déviation qui en résulte est indépendante du rapport q/m ; ce dispositif ne pourrait donc servir de sélecteur de masse, d'où la nécessité d'utiliser un champ magnétique.

d) Comme $r_0 = \alpha\sqrt{m}$ (où α est une constante), la variation de rayon δr_0 provoquée par une variation de masse δm est donnée par :

$$\frac{\delta r_0}{r_0} = \frac{1}{2}\frac{\delta m}{m}\ \text{(par dérivée logarithmique)}$$

Une largeur de fente D permet une variation maximale de rayon $\delta r_0 = \pm\frac{D}{2}$ correspondant à une variation de masse $\delta m = \pm\frac{D}{r_0}m$ par rapport à la masse m de l'ion Au^+.

Le tableau périodique donne $\left.\frac{\delta m}{m}\right|_{min} = \frac{2}{197}$ soit $\underline{D_{lim}} = r_0\left.\frac{\delta m}{m}\right|_{min} \approx \underline{5\ \text{mm}}$, réalisable sans problème.
Avec $D \leq D_{lim}$, il n'y a alors que les ions Au^+ à passer par la fente en P.

Chapitre 7

Solide en rotation autour d'un axe fixe

Le cours d'abord

Les mouvements simples d'un solide

1. Quelle définition peut-on donner d'un solide ?

2. Un solide S est en translation par rapport à un référentiel (R). Que peut-on dire du vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ pour un point M quelconque du solide par rapport à celle du centre de masse G ? Comment distinguer une translation rectiligne d'une translation circulaire ? Donner un exemple dans chaque cas. À quelle condition une translation est-elle uniforme ?

3. Un solide S est en rotation autour d'un axe fixe Δ par rapport à un référentiel (R). L'axe Δ est pris comme axe Oz d'un système de coordonnées cylindriques. Quelle est la vitesse $\vec{v}(O)_{(R)}$ du point O ? Comment s'exprime le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pour un point M quelconque du solide ? Décrire le mouvement du point M et donner son vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$.

Moment cinétique ; moment d'inertie par rapport à un axe

4. Donner la définition du moment cinétique $\vec{\sigma}_{O(R)}$ au point O d'un point M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ dans le référentiel (R).
Définir le moment cinétique de ce même point matériel par rapport à un axe Δ.
Exprimer σ_Δ en utilisant des coordonnées cylindriques d'axe Oz.

5. Pour un solide en rotation à vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe $\Delta = Oz$ constitué d'une infinité de points matériels M_i de masse m_i, former le moment cinétique total $\vec{\sigma}_{O(R)}$ et le développer sur la base locale cylindrique d'axe Δ.
Comment à partir de $\vec{\sigma}_{O(R)}$ est défini le moment cinétique σ_Δ du solide par rapport à l'axe Δ ? Déduire son expression en fonction de ω et définir J_Δ, moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation à exprimer en fonction des masses m_i et des distances à l'axe r_i ; commentaires.

Moment d'une force ; couple ; liaison ; contact

6. Comment est modélisée une action mécanique localisée en un point ? Donner un exemple. Une force $\overline{F}$ s'exerce en un point M ; quel est le moment $\overline{M_O}$ de cette force en un point quelconque O ? Cas particulier du moment en M. Exprimer $\left\|\overline{M_O}\right\|$ en fonction de $\left\|\vec{F}\right\|$.

7. Quel est le moment M_Δ de cette force par rapport à un axe Δ orienté et passant par O. Exprimer M_Δ en utilisant des coordonnées cylindriques d'axe $\Delta = Oz$.

8. Qu'appelle-t-on couple ? Quelle caractéristique fondamentale possède son moment vectoriel ? Donner des exemples de couples.

9. Qu'appelle-t-on liaison pivot ? Donner des exemples. Qu'entend-on par liaison parfaite ?

10. Quelle condition permet de traduire la rupture de contact entre deux solides ?

Loi du centre de masse et loi du moment cinétique

11. Rappeler la loi (ou théorème) du centre de masse pour un système fermé quelconque dans un référentiel galiléen (R).

12. Énoncer la loi (ou théorème) du moment cinétique pour un système fermé quelconque en un point fixe O. Comment s'écrit-il par rapport à un axe Δ pour un solide en rotation autour de cet axe ?

13. Dans quel cas il y a-t-il conservation du moment cinétique par rapport à l'axe ? Citer un exemple.

Énergie cinétique et loi de l'énergie cinétique

14. Rappeler la définition de l'énergie cinétique $Ec_{(R)}$ dans (R) d'un point M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$, puis la généraliser à un système de points matériels M_i de masse m_i.

Comment s'écrit l'énergie cinétique totale $Ec_{(R)}$ dans le cas d'un solide en translation ?

Exprimer ensuite $Ec_{(R)}$ dans le cas d'un solide en rotation à vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe $\Delta = Oz$ en fonction de J_Δ et ω.

15. Énoncer pour un système de points matériels fermé, le théorème de la puissance cinétique et le théorème de l'énergie cinétique. Quel résultat essentiel distingue de manière générale le théorème de l'énergie cinétique des deux autres théorèmes de la

mécanique (de la résultante cinétique et du moment cinétique) ? Dans quel cas le travail des forces intérieures est-il non nul ? Citer des exemples.

16. Calculer en coordonnées cylindriques la puissance $P_{(R)}$ d'une force $\overline{F}$ d'orientation quelconque s'appliquant en un point M d'un solide en rotation autour de l'axe fixe $\Delta = Oz$; l'exprimer en fonction du moment de la force par rapport à l'axe.

17. Dans le cas particulier du solide, que peut-on dire du travail des actions intérieures ? Appliquer ce résultat au solide en rotation autour d'un axe fixe Δ, et montrer que la loi de la puissance cinétique redonne la loi du moment cinétique de la question **12.**

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Le sens du vecteur rotation d'un solide (et par conséquent le signe de sa projection sur l'axe) est donné par la règle du tire-bouchon lorsque celui-ci est tourné dans le sens du mouvement réel de rotation. Rappelons que les angles doivent être définis à partir d'un axe référence fixe dans le référentiel d'étude, et orientés.

☐ Il convient toujours de caractériser d'abord la nature du mouvement d'un solide ; suivant qu'il est en translation ou en rotation autour d'un axe fixe Δ, une « formule toute faite » s'applique pour l'énergie cinétique :

$$Ec_{(R)} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(G)_{(R)} \quad \text{ou} \quad Ec_{(R)} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

☐ Les seuls termes utilisables pour le mouvement d'un solide sont translation et rotation (non applicable à un point !). Les qualificatifs rectiligne, circulaire, hélicoïdal, elliptique…s'appliquent à des points.

☐ Attention, une translation n'est pas forcément rectiligne ! Et une translation rectiligne pas forcément uniforme !

☐ Le centre de masse G d'un solide homogène et possédant un centre de symétrie est ce centre de symétrie : par exemple, le milieu d'une tige homogène, le centre d'un disque ou d'un cylindre homogène,…

☐ Les moments d'inertie *usuels* (toujours donnés) sont les suivants :
– tige homogène de masse m et de longueur l par rapport à un axe Gz passant par son milieu G et perpendiculaire à la tige : $J_{Gz} = \frac{1}{12} ml^2$
– tige homogène de masse m et de longueur l par rapport à un axe Az passant par son extrémité A et perpendiculaire à la tige : $J_{Az} = \frac{1}{3} ml^2$

– un disque ou un cylindre homogène de masse m et de rayon R par rapport à son axe de révolution Gz : $J_{Gz} = \frac{1}{2}mR^2$

– un cerceau homogène de masse m et de rayon R par rapport à son axe de révolution Gz : $J_{Gz} = mR^2$

– un pendule simple suspendu en O constitué d'une masse quasi ponctuelle m à l'extrémité d'une tige (ou d'un fil) de masse négligeable et de longueur l par rapport à un axe horizontal Ox et perpendiculaire au plan d'oscillation : $J_{Ox} = ml^2$

☐ Commencer par faire un dessin représentant le système à étudier. S'il comporte des angles, éviter la plage autour de 45° (le sinus et le cosinus y sont trop voisins !...).

☐ Comme dans tout problème de mécanique, il faut d'abord :
– définir le système étudié : en général, il est évident, sauf s'il est composé de plusieurs sous-systèmes auquel cas une réflexion préalable s'impose sur les avantages / inconvénients de telle partie du système.
– préciser la nature du mouvement : translation ? rotation autour d'un axe fixe ? dans ce cas préciser le sens d'orientation de cet axe qui impose l'orientation des angles dans le plan perpendiculaire.
– préciser le référentiel d'étude (R), en général le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.
– faire l'inventaire des actions en les représentant en couleur sur la figure (attention cependant aux forces de réaction).
Il convient ensuite de définir une stratégie car il y a souvent plusieurs possibilités d'étude avant de se lancer tête baissée dans des calculs longs ou inutiles...

☐ Lorsqu'on parle des « actions » sur un solide il faut comprendre deux choses : la résultante des forces (qui conduit à un mouvement de translation) et le moment résultant de ces forces (qui conduit à un mouvement de rotation). Lorsque la résultante est nulle, alors l'action se réduit à un couple, ce qui montre bien que le moment résultant (non nul) n'est pas le moment de la résultante (qui serait nul) ! Dans ce cas assez fréquent, les actions engendrent une rotation autour d'un axe fixe sans translation du centre de masse.

☐ Lorsqu'un solide est en équilibre, la somme des moments des forces extérieures qui s'appliquent sur ce solide est nulle ; il est alors possible de choisir librement le point ou l'axe par rapport auquel sont évalués ces moments.

☐ Lorsqu'un solide en mouvement est suspendu à un fil, la tension du fil n'est pas a priori égale en norme au poids du solide. La tension d'un fil est une force de réaction.

☐ Ne pas hésiter à évaluer le moment d'une force à l'aide du bras de levier ce qui évite souvent les erreurs de calcul ou de signe (voir la question 7.).

☐ Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ s'appliquant en M par rapport à l'axe Δ est une grandeur scalaire mais algébrique ; il est positif si la force tend à entraîner M autour de Δ dans un sens positif certes arbitraire mais clairement indiqué sur la figure ; il est négatif dans le cas contraire.

☐ Les équations différentielles sont du second ordre par rapport au temps. Les constantes d'intégration (y penser !) se déterminent à partir des conditions initiales sur la vitesse et la position.

☐ Pour intégrer par rapport au temps une équation du type $J_\Delta \ddot{\theta} = -mga\sin\theta$, il suffit de multiplier préalablement les deux membres par $\dot{\theta}$, ce qui conduit à la relation (la constante d'intégration E est l'énergie mécanique du système) $\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 = mga\cos\theta + E$.

Une étourderie consiste à intégrer en $J_\Delta \dot{\theta} = mga\cos\theta$, c'est-à-dire par rapport au temps dans le membre de gauche et par rapport à θ dans le membre de droite (et en plus sans constante d'intégration...) !

☐ Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, la loi du moment cinétique par rapport à un axe et la loi de la puissance cinétique conduisent à la même équation (et donc ne pas écrire les deux en croyant trouver une relation supplémentaire !).

☐ Dans la loi de la puissance (ou de l'énergie) cinétique intervient la puissance (ou le travail) des forces intérieures, il ne faut pas les oublier dans le cas des systèmes déformables (ou de l'association de deux solides articulés) ; ces grandeurs sont nulles dans le cas où le système est constitué d'un solide unique.

☐ Préférer la loi de la puissance cinétique lorsque l'énoncé demande une accélération et la loi de l'énergie cinétique lorsque l'énoncé demande une vitesse.

☐ Éviter de recalculer le travail du poids ; il y a moins d'erreurs de signe à prendre l'opposé de la variation d'énergie potentielle de pesanteur $W_{poids} = -\Delta Ep_{pes}$.

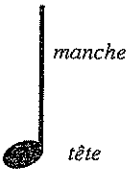
Applications directes du cours

Mouvement et centre de masse

18. Donner un exemple de solide S en translation rectiligne uniforme et un autre en translation rectiligne non uniforme par rapport à un référentiel (R) ; quelle analogie et quelle différence ont leurs vecteurs vitesse ?

19. Comment distinguer pour un solide un mouvement de translation circulaire d'un mouvement de rotation ? Donner un exemple dans chaque cas.

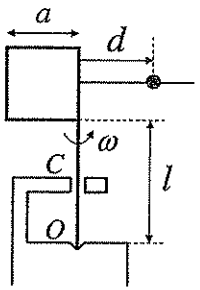
20. Un club de golf est composé de deux parties rigidement liées entre elles, le manche et la tête du club. Expliquer, en s'appuyant sur des schémas simples, pourquoi, en tendant son index à l'horizontale et en s'arrangeant pour poser le club en équilibre dessus à l'horizontale, on détermine la position de G.



21. Équilibrage d'une girouette

Une plaque métallique carrée de côté a, d'épaisseur négligeable, de masse M, homogène, est solidaire d'un axe de longueur l, de masse négligeable, dont l'extrémité inférieure O repose sur la tête de mât ; un collier C assure le guidage.

On équilibre la plaque par une masse ponctuelle m placée sur une tige sans masse à une hauteur $l + a/2$ de O. Donner la distance d de la masse à l'axe pour que le centre d'inertie de l'ensemble soit sur l'axe (équilibrage statique).

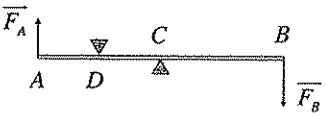


Force, moment de force, moment d'inertie et énergie cinétique

22. En quelle unité s'exprime un moment de force ? Avec quelle autre unité ne faut-il pas la confondre ?

23. À quelles conditions le moment d'une force par rapport à un axe est-il nul ? L'illustrer par l'exemple de l'ouverture d'une porte.

24. Un règle homogène de longueur $AB = l$ a une masse m. Elle repose horizontalement en son milieu sur un appui C et aux extrémités A et B, on lui applique deux forces $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ de sens opposé. Pour maintenir l'équilibre, on place un second appui en D, milieu de AC, au-dessus de la règle. On note $\overrightarrow{T_C}$ et $\overrightarrow{T_D}$, les forces supposées perpendiculaires à AB, exercées respectivement par les appuis C et D sur la règle.



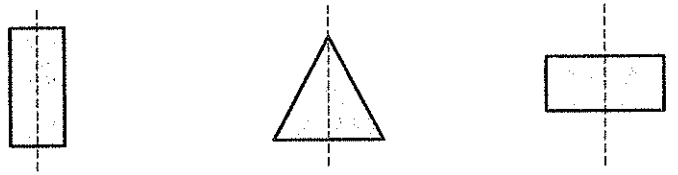
Exprimer les intensités T_C et T_D de ces forces en fonction des données du problème.

25. Soit un solide dont on connaît J_{Δ_G}, le moment d'inertie par rapport à un axe Δ_G passant par son centre de masse G. Par rapport à un autre axe Δ, parallèle à Δ_G, à une distance d de Δ_G, le théorème d'Huygens donne le moment d'inertie :

$$\boxed{J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2}$$

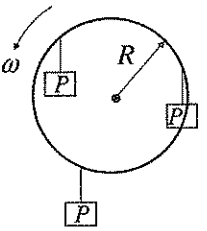
Que peut-on déduire de ce résultat quant à la facilité de mise en rotation d'un solide pour une direction d'axe de rotation donnée ?

26. Sur les figures ci-dessous les morceaux de tôle ont tous même masse (et donc la même surface) ; les classer par ordre croissant de moment d'inertie par rapport à l'axe tracé en pointillé (se souvenir que la contribution d'une masse est proportionnelle au carré de la distance à l'axe).



27. Le manège

Une personne P (de masse m avec la nacelle) tourne dans une grande roue homogène de masse M, de rayon R, en restant assise dans une nacelle du manège. La vitesse angulaire de rotation de la roue est ω.



a) Quels sont précisément la trajectoire et le mouvement de la personne P ?

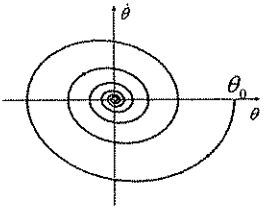
b) Quelle est l'accélération de P ? Comment varie-t-elle entre les pieds et la tête de P ?

c) Sachant qu'il y a N personnes dans le manège, calculer l'énergie cinétique totale en fonction de R, ω, m, M et N (le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe est MR^2).

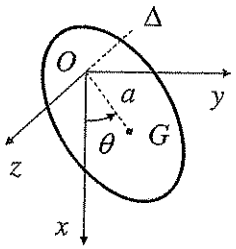
■ Loi du moment cinétique, loi de l'énergie cinétique

28. Utiliser le théorème du moment cinétique pour établir l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple dans un référentiel galiléen.

29. La masse du pendule simple de la question précédente est soumise, en plus des forces déjà décrites, à une force de frottement fluide modélisable par $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse dans le référentiel terrestre. L'angle θ reste petit. Justifier la trajectoire de phase obtenue ci-contre et décrire le mouvement.



30. Le pendule pesant



Un solide de masse m mobile autour d'un axe horizontal $\Delta = Oz$ ne passant pas par son centre de masse G, est tel que $OG = a$. Son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ est J_Δ et la liaison en O est parfaite.

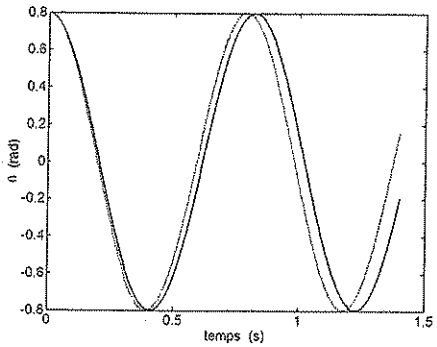
a) Déterminer le moment du poids en O et appliquer la loi du moment cinétique scalaire.

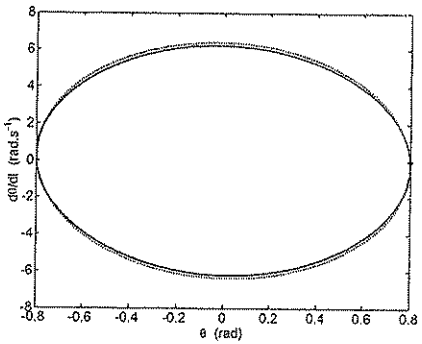
b) Utiliser l'énergie pour obtenir le même résultat.

c) En déduire la période T_0 des oscillations de faibles amplitudes. Appliquer cette relation au cas d'un pendule simple et retrouver l'expression de sa période.

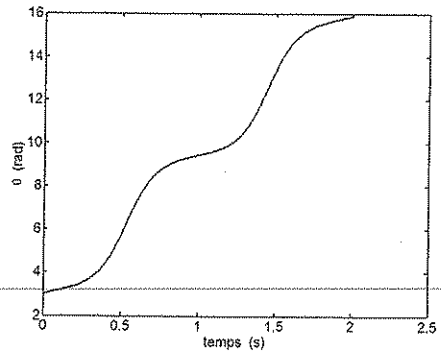
d) En réalité pour des angles plus grands, la période T_1 dépend de l'amplitude θ_0 et est donnée par la formule de Borda : $T_1 = T_0(1 + \theta_0^2/16)$; jusqu'à quel angle θ_0 l'écart entre les deux périodes ne dépasse-t-il pas 1% ?

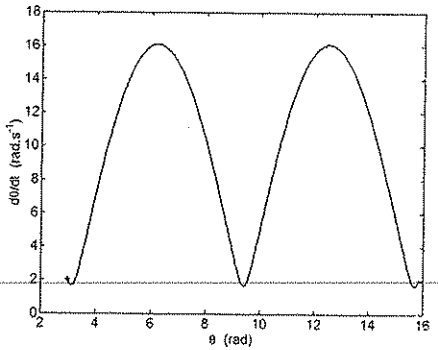
e) Lire et interpréter les courbes $\theta(t)$ et les diagrammes de phase $\dot{\theta}(\theta)$ où en trait plein est représenté le pendule réel ($\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$) et en pointillé l'approximation harmonique des petits angles ($\ddot{\theta} \approx -\omega_0^2 \theta$).



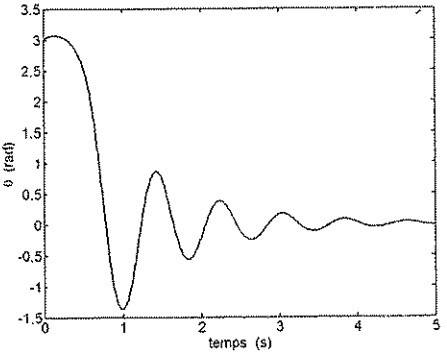


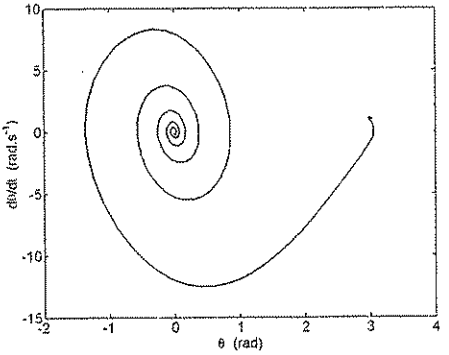
f) On lance le solide de sa position verticale $\theta \approx \pi$ (centre de masse au-dessus de l'axe) avec une vitesse initiale engendrant un mouvement révolutif autour de l'axe. Lire et interpréter les courbes $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(\theta)$ correspondant.



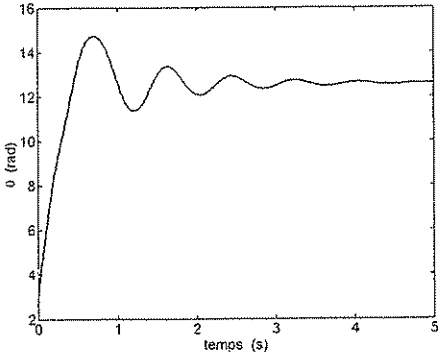


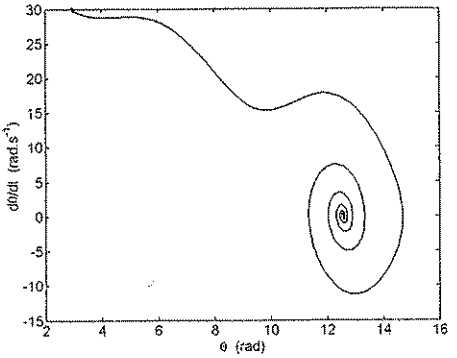
g) En réalité le mouvement du pendule est amorti ; commenter à nouveau les deux courbes $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(\theta)$. Pour quelle raison n'y a-t-il ici que les courbes en trait plein du pendule réel ($\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$) et non pas les courbes en pointillé de l'approximation harmonique ($\ddot{\theta} \approx -\omega_0^2 \theta$) comme à la question e) ?





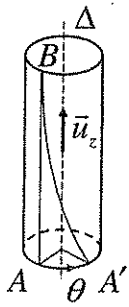
h) Le solide amorti est à présent lancé comme à la question f) ; repérer sur la courbe $\theta(t)$ et le diagramme de phase $\dot{\theta}(\theta)$ correspondant la bifurcation du mouvement révolutif au mouvement pendulaire.

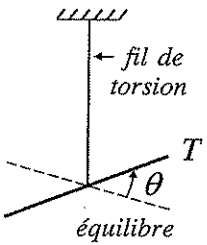


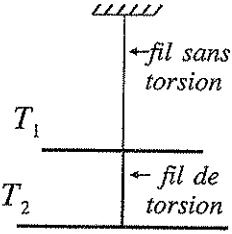


31. Le pendule de torsion

On fait subir à un fil métallique (un brin d'acier) une torsion de la manière suivante : le haut est encastré (B est fixe) et le bas subit une rotation d'angle θ (A à l'équilibre passe en A'). Pour cela l'opérateur doit exercer un couple de moment $\overline{M}$ colinéaire à l'axe Δ . Le matériau est dit élastique lorsque l'effort est proportionnel à la déformation : $\overline{M} = C\theta\,\overline{u}_z$ où C est la constante de torsion du fil (en m.N.rad^{-1}).







a) Le pendule de torsion simple.
Une tige T est accrochée en son centre au fil de torsion ; son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ est J_Δ. À quel couple est-elle soumise de la part du fil de torsion lorsqu'elle est tournée d'un angle θ à partir de la position d'équilibre ? Déterminer la période T_0 des oscillations de la tige. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique de torsion de la tige ?

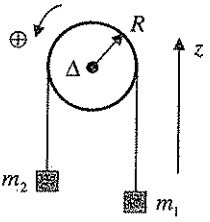
b) Le pendule double
La tige T_1 est suspendue par son milieu au support par un fil sans torsion ; la tige T_2 est suspendue par son milieu à la tige T_1 au moyen d'un fil de torsion. Les deux tiges de moments d'inertie $J_{1\Delta}$ et $J_{2\Delta}$ sont écartées de leurs positions d'équilibre (elles forment un angle l'une par rapport à l'autre) puis lâchées avec des vitesses initiales nulles. Quelle relation existe-t-il entre leurs vitesses angulaires ω_1 et ω_2 ? Commenter.

32. Un volant ayant la forme d'un cylindre homogène de rayon $R = 50$ cm, de masse $M = 200$ kg, est mis en rotation autour de son axe par un moteur qui fournit une puissance constante $P = 2{,}0$ kW. Quelle durée minimale τ faut-il pour que le volant, partant du repos, tourne à $n = 2000$ tours par minute ?

Pour le cylindre, le moment d'inertie par rapport à son axe est $J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$.

33. La machine d'Atwood

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un fil passant sur une poulie dont le moment d'inertie par rapport à son axe Δ est J_Δ ; il s'agit d'étudier le mouvement dans le champ de pesanteur (l'axe z est suivant la verticale ascendante).



a) Examiner soigneusement les conséquences de chaque terme de la phrase « le fil est sans masse, inextensible, sans raideur et ne glisse pas sur la poulie ». Que peut-on déduire en plus si la poulie est « sans masse » ?

Sans faire cette dernière hypothèse, déterminer « l'accélération » du système lâché avec une vitesse initiale nulle :

b) En considérant séparément chacune des masses et la poulie, en introduisant les tensions des fils et en appliquant les lois générales de la mécanique.
c) En considérant l'ensemble du système et en appliquant une méthode énergétique.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

34. Donner un exemple de solide en translation curviligne par rapport à un référentiel (R).

35. Comment caractériser le mouvement composé de la Terre autour du Soleil ? Celui d'un ballon de rugby lors d'une transformation après un essai (tir au pied d'un joueur entre les deux poteaux) ?

36. Que fait un garagiste lorsqu'il réalise l'équilibrage des roues d'une voiture ?

37. « C'est le frottement avec le sol qui permet la marche d'une personne ». Expliquer et donner d'autres exemples simples où la force de frottement (loin de s'opposer au mouvement) permet une mise en mouvement.

38. On souhaite montrer qu'il est possible de déterminer la masse d'une bouteille avec une balance qui n'est pas « juste », ses bras de levier étant inégaux : $l \neq l'$. Il faut pour cela procéder à une double pesée, dite méthode de Gauss.

Déterminer la masse m de la bouteille en fonction des masses m_1' et m_2'.

39. En patinage artistique, comment s'y prend le patineur qui fait « la toupie », pour tourner de plus en plus vite sur lui-même ? Et l'élève sur le tabouret d'inertie ? D'où provient l'augmentation d'énergie cinétique ?

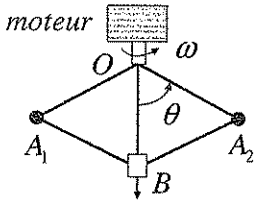
40. Un peu de sport...
Un athlète court le 100 m en environ 11 s. Quelle hauteur peut-il espérer franchir à la perche ? Considérer le mouvement de son centre de masse (initialement à environ 1 m du sol). Choisir le système athlète + perche, faire une étude soigneuse de l'énergie mécanique à chaque étape du saut.
Le record du monde est de 6,14 m, conclure.

41. Quel est l'intérêt historique de la machine d'Atwood ?

42. Le Botafumeiro de Saint-Jacques-de-Compostelle est un encensoir géant suspendu par une corde passant par une poulie attachée en haut de la croisée de la cathédrale. Il est tenu à bout de bras par huit hommes qui peuvent par action sur la corde

modifier la longueur du pendule. Comment doivent-ils s'y prendre pour en amplifier les oscillations ?

43. Un système tournant en forme de losange articulé (liaisons parfaites) est tel que O est fixe, B coulisse librement sur l'axe vertical, et aux extrémités A_1 et A_2 sont disposées des masses (les boules) identiques. Si l'ensemble tourne à vitesse angulaire constante ω, $\cos\theta$ est constant et proportionnel à $\frac{g}{L\omega^2}$, L est la longueur des tiges. Montrer qualitativement en quoi ce dispositif appelé « régulateur à boules » permet de stabiliser la vitesse de rotation du moteur qui l'entraîne autour de l'axe fixe OB.

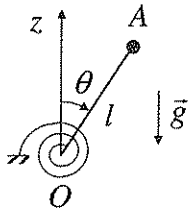


44. Deux singes S_1 et S_2 de même masse m sont accrochés à une corde sans masse et inextensible qui passe dans la gorge d'une poulie d'axe horizontal et de moment d'inertie négligeable, mobile sans frottement. Chaque singe est sur l'un des deux brins de la corde, et initialement l'ensemble est immobile. Le singe S_1 entreprend alors de s'élever le long de son brin de corde, tandis que le singe S_2 reste accroché au sien. Que peut-on dire des mouvements des deux singes par rapport au sol ?

Exercices

45. Couple de torsion et position d'équilibre

Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, de longueur $l = OA$, articulée en un point fixe O et mobile dans un plan vertical. Un ressort spiral exerce sur cette tige un couple de rappel $-C\theta$ où θ désigne l'angle que fait la tige avec la verticale ascendante Oz (C est la constante de torsion). On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur.

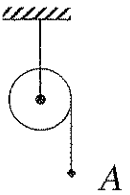


a) Donner l'expression de l'énergie mécanique totale E_m du système. Expliquer pourquoi et comment on peut en déduire l'équation du mouvement.
Par quel autre moyen pouvait-on obtenir cette équation ?

b) En considérant θ comme petit, à quelle condition la position $\theta_e = 0$ correspond-elle à un équilibre stable ? Cette condition étant supposée réalisée, calculer la période T des petites oscillations.

c) Si cette condition n'est pas réalisée, montrer sans développement qu'il existe une autre position d'équilibre ; commentaire qualitatif sur sa stabilité.

46. D'où vient la différence ?



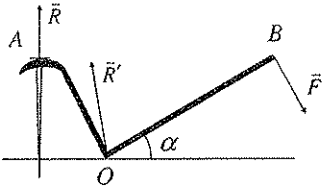
Une poulie d'axe horizontal, de rayon R, de moment d'inertie J_Δ par rapport à son axe, est mise en mouvement de deux manières :

1. en accrochant en A un corps de masse M

2. par un opérateur qui exerce en A une force verticale vers le bas d'intensité $F = Mg$

Le fil ne glisse pas sur la poulie et les frottements au niveau de l'axe sont négligés. Déterminer le rapport ω_2 / ω_1 des vitesses angulaires prises par la poulie, initialement au repos, lorsque A a parcouru une hauteur h ; pourquoi a-t-on $\omega_2 / \omega_1 > 1$?

47. Intérêt d'un levier « pied de biche »



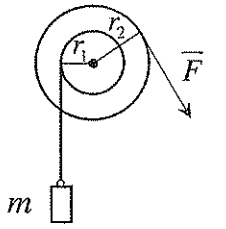
Un levier « pied de biche » est coudé à 90 ° au point O ; afin d'arracher un clou en A, on exerce en B une force $\vec{F}$ perpendiculaire à OB et d'intensité $F = 200$ N.

Données : $OB = 70$ cm ; $OA = 10$ cm ; l'angle entre OB et le plan d'appui est $\alpha = 30$ °.

a) En déduire l'intensité de la force $\vec{R}$ normale au plan et exercée par le levier sur le clou (le poids du levier est négligé) ; commenter le résultat.

b) En déduire la réaction $\vec{R'}$ du sol en O par ses composantes sur les axes ; commenter le résultat.

48. Le treuil



Deux filins sont enroulés autour d'un treuil à deux cylindres de rayons $r_1 = 5{,}0$ cm et $r_2 = 8{,}0$ cm. L'un des filins est attaché à une charge de masse $m = 1{,}0$ kg que l'on souhaite soulever en exerçant sur l'autre une force $\vec{F}$ comme indiqué sur la figure. Le moment d'inertie du treuil par rapport à l'axe est $J = 5{,}0.10^{-3}$ kg.m^2. Au début, la masse est posée au sol et sa vitesse est nulle. On prend $g = 10$ m.s^{-2}.

a) Quelle est l'intensité minimale de la force pour que la masse se soulève ?

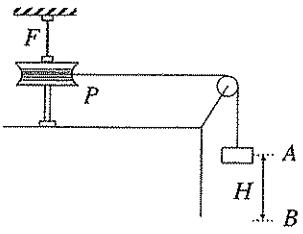
En réalité l'opérateur exerce une force d'intensité constante $F = 8{,}0$ N.

b) Cette force serait-elle suffisante si l'opérateur tirait verticalement sur la masse sans passer par le treuil ?

c) Quelle est l'énergie potentielle acquise par la masse lorsqu'elle a parcouru une hauteur $h = 1{,}0$ m ? Quel est le travail effectué par l'opérateur dans cette phase ? Pourquoi ces grandeurs ne sont-elles pas égales ?

d) Quelle est la vitesse de la masse à la fin de cette phase ?

49. Un oscillateur particulier

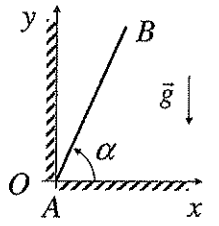


Un fil de torsion F de constante de torsion C est solidaire d'une poulie P de rayon $R = 5{,}0$ cm et de moment d'inertie $J = 1{,}0.10^{-3}$ kg.m^2 par rapport à son axe. Le fil enroulé sur P porte en son extrémité une masse $m = 200$ g. On lâche la masse en A avec une vitesse initiale nulle lorsque F n'est pas tordu ; en l'absence de frottements elle oscille entre deux positions A et B telles que $AB = H = 20$ cm.

a) En déduire la constante de torsion C du fil.

b) Quelle est la vitesse maximale v_m de la masse m au cours des oscillations.

50. La tige qui tombe (*)



Ox est un sol horizontal et Oy un mur vertical. Une tige AB de masse m, de longueur $2l$ et de moment d'inertie par rapport à l'axe Oz : $J_\Delta = \frac{1}{3}m(2l)^2$ évolue dans le plan de la figure. Initialement, elle est verticale et cet équilibre (instable) est détruit de façon infinitésimale, ce qui signifie que sa vitesse initiale est quasi nulle. L'extrémité A peut tourner librement en O sans frottement.

a) Déterminer par une méthode au choix les expressions de $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$ en fonction de g, l et α.

b) Calculer, tant que A est en O, les composantes R_x et R_y de la force de contact s'exerçant en A sur la tige ; commentaires.

51. Mouvement amplifié sur une balançoire (*)

Un enfant debout sur une balançoire est schématisé par un pendule oscillant sans frottement autour d'un axe de rotation horizontal. Quand la balançoire passe par un maximum d'élongation, l'enfant fléchit brusquement ses genoux (la distance de son centre de masse à l'axe est alors a_1 et son moment d'inertie par rapport à l'axe J_1, position 1) ; quand la balançoire passe par le point le plus bas, l'enfant se redresse brusquement parallèlement à la corde tendue (la distance de son centre de masse à l'axe est alors a_2 et son moment d'inertie par rapport à l'axe J_2, position 2).

a) Faire un dessin ; comparer a_1 et a_2 d'une part et J_1 et J_2 d'autre part et en déduire la valeur du coefficient $K = J_2 a_2 / J_1 a_1$ par rapport à 1.

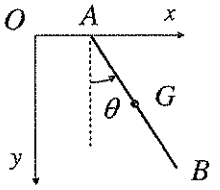
Au passage par le point le plus bas ($\theta = 0$) le moment des forces extérieures par rapport à l'axe (réaction d'axe et surtout poids de l'enfant) est nul : le moment cinétique pendant ce court intervalle de temps est donc conservé.

b) Quelle relation cela entraîne-t-il ? Comparer au passage des positions 1 et 2 les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 ainsi que les énergies cinétiques Ec_1 et Ec_2 ; d'où vient l'énergie ?

c) Initialement la balançoire est écartée de la direction verticale d'un angle θ_0 et la vitesse angulaire est nulle. Au bout de combien de passages par la verticale peut-elle espérer atteindre la direction horizontale ? Se servir de K.

52. Barre oscillante

La barre homogène AB a une masse m et une longueur $2l$. Son moment d'inertie par rapport à l'axe $\Delta=(A,z)$ vaut $J_\Delta=\frac{1}{3}m(2l)^2$.



Le point A est fixe, la barre est lâchée avec un angle θ_0, avec une vitesse initiale nulle et la liaison en A est parfaite.

a) Quelle est la trajectoire de son centre d'inertie G ?

b) Calculer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique de la barre (on peut choisir une énergie potentielle nulle pour $\theta=\pi/2$).

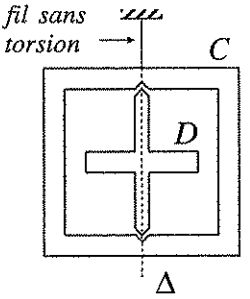
c) Quelle est la vitesse linéaire v_B de l'extrémité de la tige lorsque celle-ci passe par la position verticale ?

d) Quelle est la période des petits mouvements de la barre ? Exprimer dans ce cas θ en fonction du temps.

53. Entraînement par frottement de pivotement

Un disque D pivote à l'intérieur d'un cadre C ; on note J_D et J_C leur moment d'inertie par rapport à l'axe Δ.

À $t=0$, C est au repos et D y tourne à la vitesse angulaire ω_0. Le frottement de pivotement au niveau des pivots se traduit par un moment constant de valeur absolue Γ par rapport à l'axe Δ.



a) Quelle est la vitesse angulaire finale ω_f du système $(C+D)$?

b) Calculer les variations d'énergies cinétiques $\Delta E_c(C)$ et $\Delta E_c(D)$ du cadre et du disque et en déduire celle ΔE_c de l'ensemble ; quel est son signe ?

c) Calculer ω_C et ω_D en fonction du temps. Quel est le temps t_f au bout duquel ω_f est atteinte ?

d) Faire un bilan énergétique et en déduire l'énergie W_f transformée en chaleur par frottement.

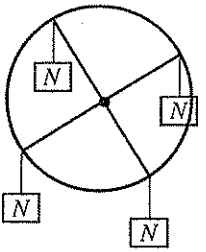
Réponses aux questions

Le cours d'abord

Les mouvements simples d'un solide

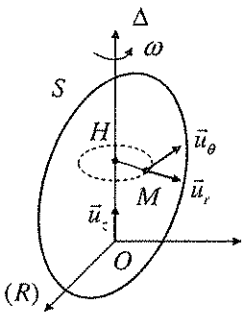
1. Un solide parfait est un système matériel indéformable ; la notion de milieu continu indéformable est un modèle.

2. Un solide est en translation lorsque des axes rigidement liés au solide restent parallèles à ceux de (R). Tous les points du solide ont alors la même vitesse, celle de G : $\forall M,\ \vec{v}(M)_{(R)} = \vec{v}(G)_{(R)}$.



Lorsque la trajectoire de G est une droite, alors la translation du solide est rectiligne (mouvement d'un ascenseur par exemple). Lorsque la trajectoire de G est un cercle, alors la translation du solide est circulaire (la nacelle N d'une grande roue par exemple).
La translation est uniforme lorsque la norme du vecteur vitesse est constante au cours du temps (ni augmentation ni diminution de cette norme).

3. Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ, si l'on choisit O sur l'axe, alors sa vitesse est nulle : $\vec{v}(O)_{(R)} = \vec{0}$. Si H est la projection orthogonale de M sur Δ, alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$ où, par définition du solide, seul $\vec{u}_r$ est fonction du temps.



Dans ce mouvement chaque point M possède une trajectoire circulaire centrée sur Δ. En notant ω la vitesse angulaire du solide autour de l'axe Δ, la vitesse du point M est orthoradiale :

$$\boxed{\vec{v}(M)_{(R)} = r\omega\vec{u}_\theta}$$

car rappelons (voir chapitre **0**) que $\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta = \omega\vec{u}_\theta$

Moment cinétique ; moment d'inertie par rapport à un axe

4. Pour un point matériel, le moment cinétique en O dans (R) est le moment de la quantité de mouvement $m\vec{v}(M)_{(R)}$: $\vec{\sigma}_{O(R)} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{(R)}$.

Soit O un point de Δ dirigé par $\vec{u}_z$: $\boxed{\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{u}_z}$

Dans la base locale cylindrique : $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$ et $m\vec{v} \begin{vmatrix} m\dot{r} \\ mr\dot{\theta} \\ m\dot{z} \end{vmatrix}$

$$\boxed{\sigma_{Oz} = \sigma_\Delta = m r^2 \dot{\theta}}$$

Le moment cinétique scalaire σ_Δ est d'autant plus grand que $\dot{\theta}$ est grand, que le point est massif et éloigné de l'axe.

5. Pour un ensemble de points, il suffit de sommer sur l'indice i :

$$\vec{\sigma}_{O(R)} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{(R)}$$

S'agissant d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, on reprend les notations de la question **3.** et de sa figure :

$\vec{\sigma}_{O(R)} = \sum_i \left((z_i \vec{u}_z + r_i \vec{u}_{r_i}) \wedge m_i r_i \omega \vec{u}_{\theta_i} \right)$ ($\vec{u}_z$ et $\omega = \dot{\theta}$ sont communs à tous les points)

et en développant le produit vectoriel : $\vec{\sigma}_{O(R)} = -\sum_i m_i z_i r_i \omega \vec{u}_{r_i} + \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega \vec{u}_z$

Le moment cinétique du solide S par rapport à l'axe de rotation Δ est la projection de $\vec{\sigma}_{O(R)}$ (O est un point de Δ) sur le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ de Δ ; sachant que tous les $\vec{u}_{r_i}$ sont orthogonaux à $\vec{u}_z$, il reste :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_{O(R)} \cdot \vec{u}_z = 0 + (\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

On écrit $\boxed{\sigma_\Delta = J_\Delta \omega}$ avec $\boxed{J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2}$

où $r_i = H_i M_i$ est la distance d'un point M_i du solide à l'axe de rotation Δ.

Rq : σ_Δ et J_Δ sont indépendants du point O, de l'axe, utilisé pour calculer $\vec{\sigma}_{O(R)}$.

J_Δ est le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ ; il est toujours positif, traduit la répartition de masse du solide autour de Δ et ne dépend pas du temps.

■ Moment d'une force ; couple ; liaison ; contact

6. L'action mécanique est modélisée par une force entièrement déterminée par son point d'application M et son vecteur $\overline{F}$ dont les caractéristiques sont la norme, parfois appelée intensité, (en Newton), la direction et le sens. Sa droite d'action est la droite affine $(M, \overline{F})$.

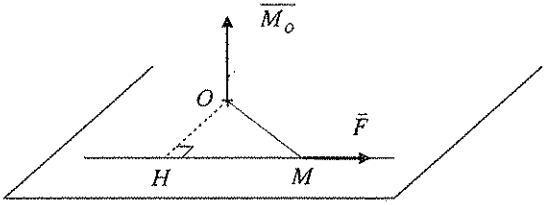
Exemples : La tension d'un fil qui tire sur un objet est une force qui est localisée au point d'attache du fil ; le poids est une action répartie en volume, mais tout se passe comme s'il était localisé au centre de masse G du corps.

La force $\overline{F}$ étant appliquée en M, son moment par rapport au point O est le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}$$

Le moment au point M où elle s'applique est nul ($\overrightarrow{M_M} = \overrightarrow{MM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$).

$\overrightarrow{M_O}$ est $\perp$ au plan $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{F}\right)$



$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{HM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}$$

$\overrightarrow{M_O}$ est indépendant de la position de M sur la droite d'action de $\vec{F}$

$$\left\| \overrightarrow{M_O} \right\| = \left\| \overrightarrow{OH} \right\| \left\| \vec{F} \right\| \left| \sin\left(\widehat{\overrightarrow{OH}, \vec{F}}\right) \right| \quad \text{avec ici} \quad \left| \sin\left(\widehat{\overrightarrow{OH}, \vec{F}}\right) \right| = 1$$

En notant d la distance OH (distance du point O à la droite d'action de la force) appelée « bras de levier » :

$$\boxed{\left\| \overrightarrow{M_O} \right\| = d \left\| \vec{F} \right\|}$$

7. Le moment par rapport à l'axe Δ est la projection de $\overrightarrow{M_O}$ sur le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ de Δ (O étant un point de Δ) :

$$M_\Delta = \overrightarrow{M_O} \cdot \vec{u}_\Delta$$

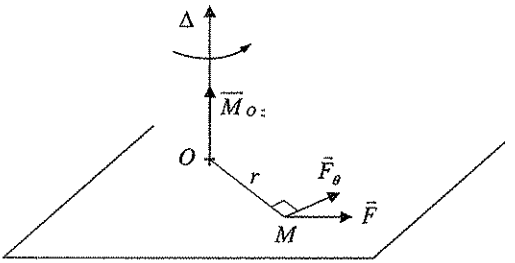
Le moment en O d'une force $\vec{F}$ s'appliquant en M est, en coordonnées cylindriques d'axe $\Delta = Oz$:

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z F_\theta \\ z F_r - r F_z \\ r F_\theta \end{vmatrix}$$

Le moment par rapport à l'axe $\Delta = Oz$ se réduit à $\boxed{M_\Delta = r F_\theta}$ qui est bien le produit de la seule composante orthoradiale de la force par la distance r du point M à l'axe et qui n'est autre que le bras de levier.

Il est souvent plus simple d'appliquer cette méthode que de calculer un produit vectoriel.

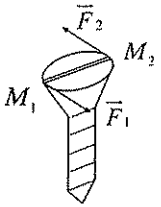
Attention : le moment par rapport à un axe est une grandeur algébrique ; pour



avoir le signe du moment par rapport à l'axe Δ orienté, il suffit de regarder dans quel sens la force $\vec{F}$ a tendance à faire tourner le corps autour du point O. Sur la figure ci-dessus, ce sens est indiqué par la flèche : le tire-bouchon tournant dans ce sens avance alors dans le sens orienté de Δ, le moment est donc ici positif (ceci revient à trouver le sens du produit vectoriel).

8. Un couple est une action mécanique dont la résultante est nulle et le moment non nul.

Un couple peut être représenté par deux forces opposées ne s'appliquant pas au même point et ayant des droites d'application différentes. Ceci est d'ailleurs à l'origine de la dénomination « couple de forces » ; penser à l'action d'un tournevis.



Résultante : $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

Moment en O : $\vec{M}_O = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_2$

et comme $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$\vec{M}_O = (-\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2) \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F}_2$$

Le moment du couple est indépendant du point O où on le calcule.

$$\left\|\vec{M}\right\| = \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| \left\|\vec{F}\right\| = F\ d \quad \text{ici car } \vec{F} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$$

En physique, le moment du couple (inutile de préciser le point où on le calcule, donc) est souvent noté $\vec{\Gamma}$.

Exemples de couples :

* Un moteur exerce un couple sur l'axe qui joint les roues avant d'un véhicule afin de les faire tourner ; si ces roues sont en contact avec frottement avec un support, leur mouvement de rotation se transforme en mouvement de translation et fait avancer le véhicule (la force de frottement du support sur les roues est alors motrice).

* L'action exercée par un champ magnétique uniforme sur un circuit fermé parcouru par un courant est un couple : c'est le couple de Laplace qui fait tourner les moteurs électriques par action du stator sur le rotor.

9. Une liaison pivot (la plus rencontrée dans les systèmes mécaniques) guide une pièce en ne permettant qu'une rotation autour de l'axe et en supportant les efforts de liaison.

Exemples : la liaison entre une porte et les gonds permettant une rotation suivant un axe vertical, ou celle du hayon d'une voiture suivant un axe horizontal. On peut citer l'entraînement par manivelle d'un cylindre de boîte à musique, la pédale d'une bicyclette liée à son maneton par des roulements, ou dans de nombreux cas beaucoup de pièces tournantes dans un moteur ou une machine.

Rq : Ne pas confondre avec une liaison rotule permettant plus de liberté comme celle du levier de commande d'une boîte de vitesse ou d'une manette de jeu vidéo…

Une liaison pivot est parfaite lorsque le moment par rapport à son axe des actions de contact est nul $M_{\Delta} = 0$; cela signifie que la liaison est bien huilée, pas grippée, et donc qu'en l'absence de frottements, le mouvement en régime libre n'est pas amorti. On peut aussi dire que la liaison est parfaite si et seulement si elle ne travaille pas.

Rq : Les actions de contact peuvent néanmoins avoir un moment perpendiculaire à l'axe de rotation comme dans la rotation rapide d'une pièce tournante dont le centre de masse n'est pas sur l'axe ; cela conduit alors à des usures prématurées au niveau des liaisons d'axe, voire à la déformation de l'axe de rotation.

10. Revoir les lois de Coulomb (question **19** du chapitre **6**). La réaction normale $\vec{R}_n$ est toujours dirigée du support vers le solide. Le contact est rompu lorsque $\vec{R}_n$ s'annule (cas d'une liaison unilatérale).

■ Loi du centre de masse et loi du moment cinétique

11. Le théorème du centre de masse (ou de la résultante cinétique) pour un système fermé quelconque de masse m et de centre de masse G dans un référentiel galiléen (R) s'écrit :

$$\boxed{m\vec{a}(G)_{(R)} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

$\sum \vec{F}_{ext}$ est la somme (ou résultante) des forces extérieures au système (actions exercées par des points ou des objets situés en dehors du système). En effet pour un système de points $\sum \vec{F}_{int} = \vec{0}$, les forces intérieures s'annulent deux à deux du fait du principe des actions réciproques.

Le théorème de la résultante cinétique fournit donc le mouvement du centre de masse du système (ceci s'applique évidemment à un solide avec $\sum \vec{F}_{ext}$ résultante des forces extérieures sur le solide).

12. Le théorème du moment cinétique au point O fixe dans (R) galiléen (ce qui signifie que les vitesses intervenant dans le moment cinétique sont évaluées dans ce référentiel galiléen) s'écrit :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{\sigma}_{O(R)}}{dt}\right)_{(R)} = \sum \vec{M}^{O}_{ext}}$$

où le second membre représente la somme des moments en O des forces extérieures s'exerçant sur le système. En effet pour un système de points $\sum \vec{M}_{int} = \vec{0}$, les moments des forces intérieures, entre points matériels, s'annulent deux à deux.

La richesse du théorème du moment cinétique réside dans le libre choix du point O fixe ; choisir un point O où s'applique une force inconnue permet d'éliminer cette force puisque son moment en O est nul.

Pour un solide le théorème s'applique avec $\sum \overrightarrow{M}^{O}_{ext}$ moment résultant des actions extérieures. La résultante et le moment résultant des actions intérieures sont nuls.

Pour un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe dans (R), passant par O et de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, la projection du théorème précédent sur $\vec{u}_\Delta$ avec $\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_{O(R)}.\vec{u}_\Delta$ le moment cinétique par rapport à l'axe Δ et $M^{\Delta}_{ext} = \overrightarrow{M}^{O}_{ext}.\vec{u}_\Delta$, le moment des forces extérieures par rapport à l'axe Δ, il vient :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \sum M^{\Delta}_{ext} \quad \text{et avec } \sigma_\Delta = J_\Delta \omega, \quad \boxed{J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum M^{\Delta}_{ext}}$$

C'est cette relation qui est utile en pratique pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.
On peut l'écrire directement si on précise :

- le système solide choisi et le référentiel
- son mouvement (rotation autour de l'axe fixe Δ)
- la loi physique : projection du théorème du moment cinétique sur l'axe Δ.

13. Lorsque la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe est nulle, alors $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \sum M^{\Delta}_{ext} = 0$ et le moment cinétique se conserve : $\sigma_\Delta = cste$.

Attention, cela ne signifie pas qu'il n'y a pas de forces, mais simplement que la somme de leurs moments par rapport à l'axe est nulle.

Exemples : les deux tiges reliées par un fil de torsion à la question **31.**, le patineur sur glace à la question **39.**, le cadre et le disque de la question **53.**,...

Énergie cinétique et loi de l'énergie cinétique

14. L'énergie cinétique d'un point matériel est $Ec_{(R)} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(M)_{(R)}$.

Celle d'un système de point se calcule par sommation $Ec_{(R)} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2(M_i)_{(R)}$.

- dans le cas d'un solide en translation, tous les points ont même vitesse, celle de G :

$$\boxed{Ec_{(R)} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(G)_{(R)}}$$

comme en mécanique du point matériel.

- dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ, $v_i = r_i \omega$ avec $r_i = H_i M_i$, distance de M_i à Δ :

$$Ec_{(R)} = \frac{1}{2}(\sum_i m_i r_i^2)\omega^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{Ec_{(R)} = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$$

montrant que le moment d'inertie est à la masse ce que la vitesse angulaire est à la vitesse de translation.

15. Le théorème de la puissance cinétique s'énonce pour un système fermé, déformable ou non :

$$\boxed{\frac{dEc_{(R)}}{dt} = P_{int} + \sum P_{(R)ext}}$$

Le théorème de l'énergie cinétique entre deux situations :

$\boxed{Ec_{2(R)} - Ec_{1(R)} = W_{1\to 2(R)}}$ ou plus couramment $\boxed{\Delta Ec_{(R)} = W_{int} + \sum W_{ext(R)}}$

affirme que la variation d'énergie cinétique d'un système entre deux instants dans (R) est égale à la somme des travaux dans (R) des actions intérieures et des actions extérieures appliquées au système entre ces deux instants.

Dans les théorèmes de la résultante dynamique et du moment cinétique n'interviennent que les actions extérieures (les actions intérieures s'éliminent). En revanche, le théorème de l'énergie cinétique fait intervenir aussi bien le travail des actions extérieures que le travail des actions intérieures. Les forces intérieures peuvent en effet travailler si le système est déformable (comme pour le patineur question **39.**, l'enfant sur la balançoire question **51.** ou le cadre et le disque question **53.**)

De plus les théorèmes généraux font intervenir des dérivées d'ordre 2 par rapport au temps, alors que le théorème de l'énergie cinétique ne fait intervenir que des dérivées d'ordre 1 (d'où le nom d'intégrale première, donné à ce type de loi).

16. La puissance d'une force dans (R) est définie comme en mécanique du point :

$$P_{(R)} = \vec{F}.\vec{v}(M)_{(R)}$$

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe $\Delta = Oz$, le produit scalaire s'effectue en coordonnées cylindriques :

$$P_{(R)} = (F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta + F_z \vec{u}_z).r\omega\vec{u}_\theta = F_\theta r\omega$$

On y reconnaît le moment de la force par rapport à Δ évalué à la question **7.** :
$M_\Delta = r F_\theta$

on en déduit : $\boxed{P_{(R)} = M_\Delta.\omega}$

Une action a une puissance nulle si son moment par rapport à l'axe est nul (ou en l'absence de rotation). On en déduit que la puissance d'une force passant par l'axe ou parallèle à l'axe est nulle comme son moment !

17. Dans le cas particulier d'un solide unique, en l'absence de déformation, le travail des actions intérieures est nul ; il en est de même de la puissance des actions intérieures.

Alors il reste : $\Delta Ec_{(R)} = \sum W_{ext(R)}$ ou $\frac{dEc_{(R)}}{dt} = \sum P_{(R)ext}$

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ, $Ec_{(R)} = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ et alors la loi de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{dEc_{(R)}}{dt} = J_\Delta \omega \frac{d\omega}{dt} = \sum P_{(R)\text{ext}} = \sum M^{\Delta}_{\text{ext}} . \omega$$

Après simplification par ω, il reste

$$\boxed{J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum M^{\Delta}_{\text{ext}}}$$

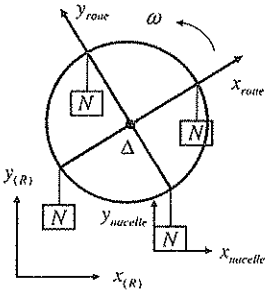
soit exactement la loi du moment cinétique de la question **12.**

Applications directes du cours

Mouvement et centre de masse

18. Dans une translation rectiligne (uniforme ou non uniforme), le vecteur vitesse garde une direction fixe tout au long du mouvement. Lorsque la translation rectiligne est uniforme, alors en plus la norme du vecteur vitesse est constante (ex : un TGV qui circule en ligne droite à vitesse constante). La translation rectiligne est non uniforme lorsque la norme du vecteur vitesse change, le mouvement rectiligne est alors accéléré ou décéléré (ex : un ascenseur au début ou à la fin de sa course).

19. Fixons rigidement un axe au solide et donc qui l'accompagne dans son mouvement. Si cet axe tourne par rapport aux axes du référentiel d'étude (R), alors il s'agit d'une rotation comme la grande roue en rotation autour de l'axe fixe horizontal Δ. Si, en revanche, cet axe garde une direction fixe par rapport aux axes du référentiel d'étude (R), alors le solide est en translation, cette translation est circulaire dans le cas des nacelles accrochées à la grande roue.



20. On représente la position du doigt par Δ.
Sur le schéma de gauche, le moment du poids est positif par rapport à Δ d'où un basculement dans le sens positif indiqué ; G est décalé par rapport à la position du doigt.
Sur le schéma de droite, le moment du poids est nul par rapport à Δ, le club est donc en équilibre ; la position de G se trouve exactement au-dessus du doigt.

21. Équilibrage d'une girouette

La formation du barycentre est associative ; si G_1 est le barycentre de la plaque de masse M, G_2 celui de la masse m, alors le barycentre G de l'ensemble est donné par :

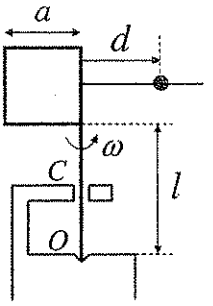
$$M\overrightarrow{O'G_1} + m\overrightarrow{O'G_2} = (M+m)\overrightarrow{O'G}$$

où O' est un point quelconque ; et en particulier si l'on prend O' en G, alors :

$$M\overrightarrow{GG_1} + m\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$$

Par projection sur l'axe horizontal G_1G_2 :

$$M\left(-\frac{a}{2}\right) + md = 0 \quad \text{soit} \quad d = \frac{M}{2m}a$$



Rq 1 : Cet équilibrage statique fait que si l'axe est à présent horizontal, alors n'importe quelle position de rotation de l'ensemble plaque + masse est position d'équilibre. Sans cet équilibrage, les réactions en O et C sont en ω^2, ce qui conduit à des usures importantes.

Rq 2 : La hauteur de la tige comportant la masse n'a pas été choisie par hasard en $l + a/2$; en réalité c'est la seule valeur, certes intuitive, qui permet que le moment cinétique en O du système soit colinéaire à l'axe : c'est l'équilibrage dynamique qui évite qu'avec la rotation l'axe ne se torde.

■ Force, moment de force, moment d'inertie et énergie cinétique

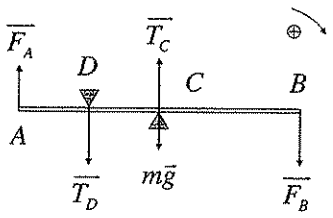
22. L'unité d'un moment de force est le m.N (penser à $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$), à ne pas confondre avec l'unité d'énergie, le N.m (penser à $\vec{F}.d\vec{r}$), et qui seul est appelé joule (symbole J). En pratique les moments sont exprimés en N.m et les travaux des forces en J.

23. Situation 1 : lorsque la droite d'action de la force est perpendiculaire à l'axe de rotation Δ, alors le moment de la force par rapport à l'axe est nul : $M_\Delta = 0$ (le bras de levier est nul). Situation 2 : lorsque la droite d'action de la force est parallèle à l'axe de rotation Δ, alors le moment de la force par rapport à l'axe est également nul : $M_\Delta = 0$ (le moment $\overrightarrow{M_O}$ est alors non nul mais orthogonal à l'axe et donc sa projection sur l'axe est nulle).

Il faut toujours se rappeler que c'est le moment d'une force par rapport à un axe qui permet de faire tourner un solide autour de cet axe. S'agissant d'une porte entrouverte et que l'on souhaite ouvrir davantage par exemple par rotation autour de l'axe passant par ses gonds, il y a deux actions inefficaces :

– tirer sur la poignée vers l'extérieur de la porte (situation 1)
– pousser sur la poignée vers le haut (situation 2)

24. Pour éliminer T_C, écrivons d'abord le théorème des moments par rapport à un axe Δ_C perpendiculaire au plan de la figure et passant par C ; compte tenu de l'orientation positive :



$$F_B\frac{l}{2}+F_A\frac{l}{2}-T_D\frac{l}{4}=0 \Rightarrow \boxed{T_D=2(F_A+F_B)}$$

De même par rapport à un axe Δ_D passant par D :

$$F_A\frac{l}{4}-T_C\frac{l}{4}+mg\frac{l}{4}+F_B\frac{3l}{4}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_C=F_A+3F_B+mg}$$

Avec le théorème du centre de masse ; la résultante des forces, nulle à l'équilibre, est : $\vec{R}=\vec{F}_A+\vec{F}_B+\vec{T}_C+\vec{T}_D+m\vec{g}$

et en projection sur la verticale ascendante, avec les valeurs trouvées :

$R=F_A-F_B+(F_A+3F_B+mg)-2(F_A+F_B)+mg=0$ d'où le résultat attendu $\vec{R}=\vec{0}$

Il est donc possible de changer de méthode puisque seuls 2 des 3 résultats sont nécessaires.

25. Pour une direction donnée, ce résultat montre que le moment d'inertie est minimal si l'axe passe par le centre d'inertie ; c'est donc autour de cet axe passant par G que la rotation du solide est la plus facile à mettre en œuvre.

26. Le bon classement est celui de gauche à droite sur les figures de l'énoncé. Le classement entre la 1ère et la 3e est facile ; quant à la 2e, la contribution d'une masse étant proportionnelle au carré de la distance à l'axe, l'excédent lié à la large base du triangle est plus important que la diminution liée à l'étroitesse du sommet.

27. Le manège

a) La nacelle et la personne P sont en translation circulaire dans le référentiel terrestre. Tous les points de P ont des trajectoires circulaires de même rayon R et de centres différents.

b) L'accélération est celle d'un mouvement circulaire uniforme pour chaque point de P ; elle est normale, centripète (dirigée vers les centres respectifs) et de norme $\omega^2 R$, soit $\vec{a}(P)=-\omega^2 R\,\vec{u}_r$. Elle ne varie donc pas entre les pieds et la tête.

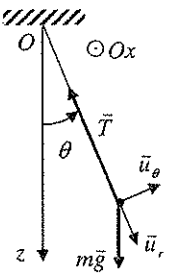
c) Pour les personnes : elles sont en translation, et tous les corps ont même vitesse $v=R\omega$, d'où $E_{C1}=N\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}NmR^2\omega^2$

Pour la roue : elle est en rotation, de moment d'inertie par rapport à son axe Δ égal à $J_\Delta=MR^2$, d'où $E_{C2}=\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2=\frac{1}{2}MR^2\omega^2$

L'énergie cinétique totale est $E_C=E_{C1}+E_{C2}$ soit $\boxed{E_C=\frac{1}{2}(Nm+M)R^2\omega^2}$

Loi du moment cinétique, loi de l'énergie cinétique

28. Il est possible d'écrire le théorème du moment cinétique par rapport au point O ; sachant que $\vec{\sigma}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ (à évaluer en coordonnées polaires), que le moment de $\vec{T}$ par rapport à O est nul (la droite d'action de $\vec{T}$ passe par O) et que celui du poids est un moment de rappel à bras de levier $l\sin\theta$, on a $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$, soit l'équation différentielle cherchée.



29. Pour θ petit et avec la force de frottement $-\lambda l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, l'équation différentielle devient $\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ et normalisée :

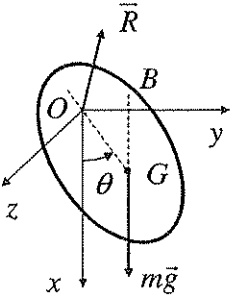
$$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

On n'a plus un oscillateur harmonique dont la trajectoire de phase serait une ellipse. Le changement de signe de $\dot{\theta}$ et la diminution de « l'amplitude » des oscillations indiquent un régime pseudo-périodique. Le point O attracteur de la trajectoire de phase montre une diminution de l'énergie du fait du travail de la force de frottement, les vitesses au passage par la verticale ($\theta = 0$) sont de plus en plus petites.

30. Le pendule pesant

a) Le moment du poids en O est par définition :

$$\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mga\sin\theta \end{vmatrix}$$



Cette méthode de calcul « rassurante » n'est pas la plus physique ; en effet ce résultat peut être trouvé directement puisqu'il s'interprète comme le produit de la force mg par le bras de levier $OB = a\sin\theta$ (distance de la droite d'action de la force à l'axe de rotation Δ), le poids ayant tendance à faire tourner le solide suivant $-\vec{u}_z$.

Les forces sont le poids et la réaction de l'axe de moment nul sur Δ (liaison parfaite).

La loi du moment cinétique scalaire s'écrit alors :

$$J_\Delta\ddot{\theta} = -mga\sin\theta \quad (1)$$

b) Le poids (force conservative) est la seule force extérieure qui travaille (la réaction d'axe $\vec{R}$ s'applique au point O de vitesse nulle et la liaison est parfaite) ; par ailleurs, le système est un solide, le travail des forces intérieures est nul, on peut donc écrire la conservation de son énergie mécanique :

L'énergie potentielle de pesanteur est : $E_p = -mgx = -mga\cos\theta$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta \quad (2)$$

avec $E = 0 - mga\cos\theta_0$ si le pendule est lâché avec une vitesse initiale nulle à partir de $\theta = \theta_0$.

Ces deux relations sont « identiques » (voir la question **17.**), puisque en dérivant (2) (ce qui revient à écrire la loi de la puissance cinétique) on retrouve (1) ; rappelons que pour intégrer (1), il faut d'abord multiplier les deux membres par $\dot{\theta}$ et ne pas omettre la constante d'intégration. La relation (2) est une intégrale première du mouvement (elle fait apparaître $\dot{\theta}$ et non plus $\ddot{\theta}$), d'où son intérêt.

c) Pour des oscillations de faibles amplitudes, $\sin\theta \approx \theta$ et (1) s'écrit :

$$\ddot{\theta} = -\frac{mga}{J_\Delta}\theta = -\omega_0^2\theta$$

La linéarisation redonne l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, d'où des oscillations sinusoïdales de période :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}}$$

Cette période est bien sûr indépendante de l'amplitude θ_0 (isochronisme des petites oscillations).

Un pendule simple est constitué d'une masse m quasi ponctuelle à l'extrémité d'une tige (ou d'un fil) de masse négligeable, de longueur l ; $a = OG = l$ et $J_\Delta = ml^2$, d'où l'expression classique de la période :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

d) Dans la formule de Borda $T_1 = T_0(1 + \theta_0^2/16)$, il apparaît en réalité que la période (le temps d'un aller-retour) est d'autant plus grande que l'amplitude d'oscillation est grande, ce qui est intuitif (c'est le non isochronisme des oscillations).

L'écart relatif $\frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{\theta_0^2}{16}$ n'excède pas 0,01 pour un angle inférieur à $\theta_0 = 23°$, ce qui est une valeur assez importante.

e) Courbe $\theta(t)$: la période est de l'ordre de 0,8 s et l'angle maximal de $\theta_m = 0{,}8$ rad soit 45° ; cet angle est très supérieur aux 23° de la question précédente, condition nécessaire pour bien distinguer le pendule réel (en trait plein) de l'approximation harmonique (en pointillé), on voit bien que $T > T_0$ (non isochronisme) et que l'écart entre les deux courbes s'accentue avec le temps.

Courbe $\dot{\theta}(\theta)$: le diagramme de phase est une courbe fermée car $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ sont périodiques de même période. Bien sûr la vitesse est nulle aux extrémités lorsque $\theta = \theta_m$ et extrémale (c'est une grandeur algébrique) au passage par la verticale $\theta = 0$; néanmoins la vitesse est un peu plus faible pour le pendule réel (et c'est bien parce que sa vitesse est moindre que sa période est plus grande).

f) Courbe $\theta(t)$: il n'y a plus d'oscillations mais un mouvement circulaire de G non uniforme et $\theta(t)$ est une fonction croissante (bien sûr seul le pendule réel est représenté).

Courbe $\dot{\theta}(\theta)$: la vitesse est maximale pour 2π , 4π ,...lorsque le pendule passe par la position verticale basse, et minimale pour π , 3π , 5π ,... lorsque le pendule passe par la position verticale haute ; la solution bien que périodique n'est pas sinusoïdale.

g) Courbe $\theta(t)$: le pendule est lâché de $\theta_0 \approx \pi$ avec une vitesse initiale nulle ; pour un angle aussi important, l'approximation harmonique $\sin\theta \approx \theta$ n'est bien sûr pas valable d'où les seules courbes en trait plein. Le régime est pseudo-périodique amorti.

Courbe $\dot{\theta}(\theta)$: les oscillations en amplitudes et vitesses amorties conduisent à des courbes qui s'enroulent en forme de spirale pour converger en $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$; la vitesse reste nulle pour des élongations extrémales, mais n'est plus extrémale au passage par la verticale.

h) Courbe $\theta(t)$: le pendule est lancé à $\theta_0 \approx \pi$ avec une vitesse initiale importante ; l'angle augmente régulièrement jusqu'à environ 5π preuve qu'il a fait presque deux tours complet sur lui-même (mouvement révolutif). Mais comme il est amorti, à partir de cette valeur, le mouvement devient pendulaire pour osciller autour de 4π (là aussi, bien sûr, seul le pendule réel est représenté).

Courbe $\dot{\theta}(\theta)$: la vitesse s'annule pour la première fois vers 5π avant de changer de signe au moment même où le pendule amorce un changement de sens ; l'enroulement vers $\theta = 4\pi$ et $\dot{\theta} = 0$ est ensuite similaire à celui de la question précédente.

31. Le pendule de torsion

a) La tige est soumise de la part du fil de torsion à un couple de rappel $-C\theta\vec{u}_z$ (principe de l'action et de la réaction).
Lâchée après avoir été tournée d'un angle θ , la tige T a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Δ ; la loi du moment cinétique pour la tige par rapport à cet axe orienté vers le haut (suivant θ) sachant que le moment de son poids est nul ainsi que celui de la tension du fil de torsion s'écrit :

$$J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta \quad \text{de type} \quad \ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique vrai de pulsation ω_0 , d'où un mouvement oscillatoire de période :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}$$

L'équation du mouvement $J_\Delta\ddot{\theta} = -C\theta$, multipliée par $\dot{\theta}$, soit $J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} = -C\theta\dot{\theta}$, donne après intégration par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}C\theta^2=cste=E$$

où la constante E représente l'énergie mécanique de la tige ; à côté de l'énergie cinétique apparaît l'énergie potentielle élastique de torsion :

$$\boxed{Ep=\frac{1}{2}C\theta^2}$$

b) Si le système considéré est $T_1 \cup T_2$, l'action du fil de torsion est un couple intérieur. Comme forces extérieures il n'y a que les poids des deux tiges et la tension du fil sans torsion, tous ayant des moments nuls par rapport à l'axe ; il y a donc conservation du moment cinétique total par rapport à l'axe.

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{1\Delta}+\sigma_{2\Delta})=0$$

et par intégration :

$$\boxed{J_{1\Delta}\omega_1(t)+J_{2\Delta}\omega_2(t)=0} \quad \text{car} \quad \omega_1(t=0)=\omega_2(t=0)=0$$

Ce résultat montre que les deux tiges tournent en sens opposé et s'arrêtent en même temps, celle dont le moment d'inertie par rapport à l'axe est le plus faible tourne le plus vite.

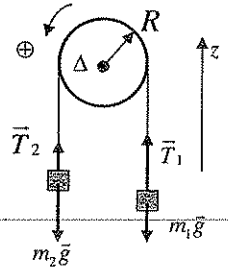
32. La durée minimale est obtenue en négligeant les frottements ; la loi de l'énergie cinétique appliquée au cylindre entre $t=0$ et $t=\tau$ s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega^2-0=W_{moteur}=P\tau \quad \text{car la puissance est constante}$$

d'où avec $\omega=2\pi n$: $\tau=\dfrac{MR^2\pi^2n^2}{P}$; AN : $\underline{\tau=274\text{ s}\approx 4{,}5\text{ min}}$, τ est assez grand car la masse est importante et la vitesse voulue grande.

33. La machine d'Atwood

a) Le long d'un fil sans masse, la tension est uniforme sur un brin vertical (conséquence du théorème de la résultante dynamique appliqué à un élément de fil) ; un fil inextensible conserve sa longueur et n'a pas d'énergie potentielle élastique ; un fil sans raideur est très souple et garde la forme qu'on lui donne ; l'absence de glissement sur la poulie permet de corréler la translation des masses à la rotation de la poulie.
Si la poulie est « sans masse », donc à moment d'inertie négligeable, la tension du fil de part et d'autre est la même (conséquence de la loi du moment cinétique scalaire appliquée à la poulie).



b) <u>1ère méthode</u> : On considère séparément chaque masse et la poulie, ce qui nécessite d'introduire la tension du fil et on applique les théorèmes de la mécanique dans le référentiel galiléen du laboratoire.
Th de la résultante dynamique pour m_2 sur l'axe z :

$$m_2\ddot{z}_2=-m_2g+T_2 \quad (1)$$

Th de la résultante dynamique pour m_1 sur l'axe z :

$$m_1\ddot{z}_1 = -m_1 g + T_1 \quad (2)$$

Rq : À noter qu'en mouvement, soit $\ddot{z}_i \neq 0$, on a $T_i \neq m_i g$; la tension du fil n'est pas égale, en norme, au poids de la masse accrochée !

Th du moment cinétique scalaire pour la poulie sur l'axe Δ dirigé vers l'avant :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = RT_2 - RT_1 \quad (3)$$

En effet le moment de $-\overline{T_2}$ (la tension que le fil de gauche exerce sur la poulie) est positif et celui de $-\overline{T_1}$ est négatif ; par ailleurs les moments du poids de la poulie et de la réaction d'axe sont nuls (+ liaison parfaite).

Rq : À noter que $T_1 \neq T_2$ en mouvement, sauf si J_Δ négligeable.

L'absence de glissement du fil inextensible sur la poulie donne :

$$\dot{z}_1 = -\dot{z}_2 = R\omega \quad (4) \text{ et } (5)$$

On dispose ainsi de 5 équations à 5 inconnues : z_1, z_2, ω, T_1 et T_2

La résolution donne facilement : $\boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{(m_2 - m_1)Rg}{J_\Delta + (m_1 + m_2)R^2}}$

soit un mouvement uniformément accéléré dans le sens positif d'orientation indiqué sur la figure si $m_2 > m_1$.

c) 2ème méthode : On étudie cette fois l'ensemble du système pour lui appliquer le théorème de l'énergie mécanique. Parmi les forces extérieures, seuls travaillent les poids des deux masses, mais pas le poids de la poulie ni les réactions d'axe (liaison parfaite) ; parmi les forces intérieures, les tensions ne travaillent pas (le fil est inextensible), et la force de frottement entre le fil et la poulie non plus en l'absence de glissement. On peut donc écrire la conservation de l'énergie mécanique du système entre $t > 0$ et $t = 0$:

$$\frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + Ep_{poulie} = 0 + 0 + 0 + Ep^0_{m_1} + Ep^0_{m_2} + Ep_{poulie}$$

Par dérivation par rapport au temps :

$$m_1\dot{z}_1\ddot{z}_1 + m_2\dot{z}_2\ddot{z}_2 + J_\Delta\omega\dot{\omega} + m_1 g\dot{z}_1 + m_2 g\dot{z}_2 = 0$$

et à l'aide des relations (4) et (5) puis simplification par ω, on retrouve le résultat précédent pour $\dot{\omega}$.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

34. La translation la plus générale d'un solide est curviligne ; il s'agit d'une translation donc les axes liés au solide restent parallèles à tout instant à ceux du référentiel (R). Mais la trajectoire du centre de masse G n'est ni rectiligne, ni circulaire, mais quelconque. Un objet volant qui avance (ou recule) parallèlement à lui-même en se déplaçant à 3D vers le haut, le bas, à gauche, à droite...

35. Le mouvement de la Terre autour du Soleil est composé :
- d'une translation quasi circulaire décrivant la trajectoire du centre de masse de la Terre autour du Soleil, mouvement appelé révolution et qui s'effectue en un an,
- d'une rotation autour d'un axe de direction quasi fixe (l'axe des pôles) décrivant la rotation de la Terre sur elle-même en un jour.

Le mouvement du ballon de rugby est composé :
- d'une translation parabolique décrivant la trajectoire du centre de masse dans le référentiel du terrain sous l'action du champ de pesanteur, en négligeant les frottements dans l'air,
- d'une rotation du ballon sur lui-même lorsque le joueur a tiré légèrement à côté du de la partie centrale du ballon pour lui imprimer ce mouvement.

36. Comme à la question **21.** il fixe un morceau de plomb sur la jante de la roue afin que le centre de masse de l'ensemble soit sur l'axe ; n'importe quelle position de la roue autour de son axe horizontal est alors position d'équilibre stable (équilibrage statique). En réalité il en fait un peu plus pour éviter que la roue en rotation n'ait tendance à tordre l'axe de rotation (équilibrage dynamique). Tout ceci pour éviter les usures d'axe et donner au dispositif une meilleure longévité.

37. Lorsque la jambe droite est mise en avant, sur une patinoire horizontale où aucune force extérieure n'existe parallèlement au sol, la jambe gauche recule afin que le centre de masse reste immobile dans sa position initiale. Sur un sol normal c'est l'action de contact qu'exerce le sol sur le pied gauche qui l'empêche de reculer et permet à la personne d'avancer. Ou à un véhicule de démarrer, à un cylindre de tourner, à une corde de violon d'être entraînée par l'archet,... L'idée qu'une force de frottement « freine » un mouvement est donc loin d'être toujours juste !

38. Attention : les bras de levier étant inégaux, on n'a pas l'égalité des masses sur les deux plateaux ! Il faut traduire que la somme algébrique des moments est nulle, mais comme l'un est positif et l'autre négatif, cela revient à écrire l'égalité des deux moments en valeur absolue.

$$m_1' l = m l' \quad \text{et} \quad m l = m_2' l' \quad \text{d'où} \quad \boxed{m = \sqrt{m_1' m_2'}}$$

39. Le patineur s'élance d'abord, puis en pilant transforme son énergie cinétique de translation en énergie cinétique de rotation, les bras tendus et une jambe élancée ; en tournant sur lui-même, son moment cinétique est conservé (en négligeant le moment de frottement de pivotement), et par conséquent en ramenant ses bras et sa jambe près du corps, la diminution du moment d'inertie par rapport à son axe de pivotement entraîne une augmentation de la vitesse de rotation ($\sigma_\Delta = J_\Delta \omega = cste$).

Il en est de même de l'élève tournant sur le tabouret d'inertie, bras tendus avec des masses et qui tourne plus vite en ramenant ses bras vers son corps. L'augmentation d'énergie cinétique (voir la question **51.**) provient du travail des forces intérieures (les personnes sont des systèmes déformables, pas des solides).

40. Une conversion de l'énergie cinétique au moment de l'appel en énergie potentielle de pesanteur donne : $\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$ et $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

AN : $v_0 = v_{moy} = \frac{100}{11} = 9 \text{ m.s}^{-1}$ soit $h \approx 4$ m et donc un saut à 5 m.

On est loin des 6,14 m, peu de possibilité du côté de la vitesse initiale, en portant la perche, les 9 m.s^{-1} ne peuvent guère être améliorés.

Reprenons les conversions d'énergie : l'énergie cinétique initiale correspond à une vitesse horizontale qu'il est *a priori* très difficile de récupérer verticalement (dans le saut en hauteur, le faible taux de conversion avec le pied d'appel rend inutile une course rapide). La conversion est assurée ici par la perche : le sauteur transforme l'énergie cinétique en énergie potentielle élastique de la perche, qu'il récupère ensuite sous forme d'énergie potentielle de pesanteur lorsque la perche se détend.

L'augmentation d'énergie mécanique doit évidemment être cherchée du côté du travail des forces intérieures. Ce travail peut augmenter l'énergie mécanique, car le système est déformable : lors de l'appel le sauteur augmente la torsion de la perche en ramenant ses avant-bras vers lui, ce qui augmente l'énergie potentielle élastique. Enfin, tout en haut, en poussant sur la perche, il récupère le travail d'extension des bras.

Noter enfin que la technique du saut permet de faire passer le centre d'inertie en dessous de la barre ! Ceci grâce à l'arrondi que donne le sauteur à son corps, faisant passer les jambes alors que la tête est encore sous la barre.

41. Au XVIIe siècle, la chute libre et corrélativement la mesure de g, accélération de la pesanteur, était difficile à étudier expérimentalement en raison des durées très courtes de la chute et de la difficulté de la mesure de cette durée. Atwood (1746-1807) proposa alors sa machine avec $m_2 = m_1 + \delta m$ où δm est une faible surcharge. De cette manière l'accélération constante du système proportionnelle à $m_2 - m_1 = \delta m$ et bien sûr à g était grandement réduite (tout se passe comme si m_1 ralentissait la chute de m_2), et la mesure de g devenait plus facilement accessible.

42. Le principe d'amplification des oscillations est le même que celui de la balançoire de la question **51.**; les huit hommes doivent tirer sur la corde pour soulever l'encensoir lorsque celui-ci passe par la verticale et relâcher la corde lorsqu'il est au plus haut.

43. Avec la relation entre $\cos\theta$ et ω, si pour une raison quelconque la vitesse ω augmente, alors l'angle θ augmente, et les boules s'écartent de l'axe augmentant ainsi le moment d'inertie du dispositif ; ce qui rend plus difficile l'augmentation de la vitesse angulaire ; même raisonnement si ω diminue, d'où la stabilisation de la vitesse de rotation du moteur.

44. Reprendre la question **33.** de la machine d'Atwood avec ses notations. Ici $m_1 = m_2 = m$; par ailleurs le moment d'inertie de la poulie étant négligeable, la relation (3) montre que les deux brins du fil ont même tension $T_1 = T_2 = T$. Alors les

relations (1) et (2) non modifiées par l'action du singe S_1 montrent que $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2$, prouvant que le mouvement des deux singes par rapport au sol est le même ; alors qu'un seul des deux singes entreprend de s'élever, l'autre attend de monter sans effort...

Exercices

45. Couple de torsion et position d'équilibre

a) L'énergie mécanique du système est la somme :

– de l'énergie cinétique du point A (mouvement circulaire) : $E_c = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$

– de l'énergie potentielle de pesanteur du point A : $E_p = mgz + cste = mgl\cos\theta$ par choix de $E_p(\theta = \pi/2) = 0$ et de l'axe vertical ascendant

– de l'énergie potentielle élastique due au ressort spiral : $E'_p = \frac{1}{2} C\theta^2$

$$\text{d'où} \quad E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta + \frac{1}{2} C\theta^2$$

Le système étant conservatif (et à un degré de liberté θ), l'énergie mécanique est une constante du mouvement, soit $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{C}{ml^2}\theta = 0} \quad (1)$$

Sous la forme $ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - C\theta$, on reconnaît la loi du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe du ressort. En effet, le point A étant une masse m ponctuelle à la distance l de l'axe, son moment d'inertie est simplement ml^2 ; par ailleurs le moment du poids est positif (bras de levier $l\sin\theta$) et le couple de rappel exercé par le ressort spiral est $-C\theta$.

b) Pour θ petit, donc $\sin\theta \approx \theta$, l'équation (1) devient $\ddot{\theta} + \left(\frac{C}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\theta = 0$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique à condition que $\frac{C}{ml^2} - \frac{g}{l} > 0$; alors $\theta_e = 0$ correspond à une position d'équilibre stable.

Cette condition s'écrit $C > mgl$, ce qui suppose par exemple un ressort avec une grande constante de torsion ou un point A de faible masse pour être ramené facilement vers $\theta_e = 0$.

Alors $\omega^2 = \frac{C}{ml^2} - \frac{g}{l}$, et avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on trouve la période $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{C - mgl}}}$

c) Les positions d'équilibre sont données par $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$;

avec $E_p = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}C\theta^2$, cela conduit à $\sin\theta_e = \frac{C}{mgl}\theta_e$

ce qui revient à chercher l'intersection d'un sinus (de pente 1 à l'origine) avec une droite passant par l'origine et de pente C/mgl :

- si, comme précédemment, $C > mgl$, la seule intersection est $\theta_e = 0$, position d'équilibre stable
- si, en revanche, $C < mgl$, la droite coupe la sinusoïde en un point $\theta'_e \neq 0$ (et son symétrique $-\theta'_e$), ce qui se conçoit bien lorsque la masse du point A est importante ou si le ressort spiral rappelle peu (ressort mou). On conçoit alors que $\theta_e = 0$ est une position d'équilibre instable et $\theta'_e \neq 0$ est position d'équilibre stable.

  À la limite $mgl \gg C$ (on supprime le ressort spiral !), θ_e est donné par $\sin\theta_e \approx 0$, soit ici $\theta_e = \pi$.

46. D'où vient la différence ?

Dans la situation 1, le Th Ec à l'ensemble poulie + masse donne :

$$\frac{1}{2}J_\Delta(\omega_1^2 - 0) + \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 - 0) = Mgh \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{2Mgh}{J_\Delta + MR^2} \quad \text{en ayant traduit } \dot{x}_1 = R\omega_1$$

Dans la situation 2, le Th Ec à la poulie donne :

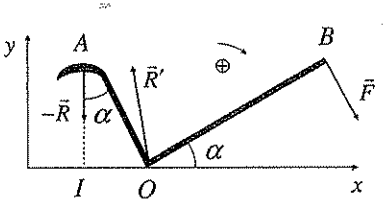
$$\frac{1}{2}J_\Delta(\omega_2^2 - 0) = Fh = Mgh \quad \Rightarrow \quad \omega_2^2 = \frac{2Mgh}{J_\Delta}$$

D'où le rapport des vitesses de rotation acquises : $\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{MR^2}{J_\Delta}} > 1}$

Dans le premier cas le travail reçu (celui du poids $M\vec{g}$) sert à augmenter l'énergie cinétique non seulement de la poulie, mais aussi de la masse M, alors que dans le second cas, le même travail reçu (celui de l'opérateur) sert uniquement à augmenter l'énergie cinétique de la seule poulie, d'où $\omega_2 > \omega_1$.

47. Intérêt d'un levier « pied de biche »

Les forces extérieures qui s'appliquent sur le levier sont : la force $\vec{F}$ de l'opérateur, la réaction $\vec{R}'$ du sol et la force $-\vec{R}$ (par action et réaction) exercée en A par le clou sur le levier (la figure n'est pas à l'échelle).



a) Pour éliminer $\vec{R}'$, écrivons à l'équilibre (il s'agit d'un problème de statique), la nullité de la somme des moments par rapport à l'axe Δ_O passant par O : le moment de $\vec{F}$ est positif avec un bras de levier OB, celui de $-\vec{R}$ est négatif avec un bras de levier $IO = OA\sin\alpha$; avec $F > 0$ et $R > 0$:

$$F.OB - R.OA\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{OB}{OA\sin\alpha}F \quad \text{soit} \quad \underline{R = 2{,}8.10^3 \text{ N}}$$

La force utile pour ôter le clou est donc démultipliée par un facteur 14 par rapport à la force appliquée par l'opérateur, d'où l'intérêt du dispositif.

b) Pour déterminer $\overrightarrow{R'}$, écrivons la nullité à l'équilibre, de la somme des forces s'appliquant sur le levier :

$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{R'} + (-\overrightarrow{R}) = \vec{0}$ et en projection sur les axes : $\begin{vmatrix} F\sin\alpha \\ -F\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R'_x \\ R'_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

en convenant que R'_x et R'_y sont algébriques (contrairement à R et F)

Alors $R'_x = -F\sin\alpha < 0$ comme sur la figure : $R'_x = -100$ N

et $R'_y = R + F\cos\alpha > 0$: $R'_y = 3{,}0.10^3$ N

et finalement $R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y}$ soit numériquement $\underline{R' = 3{,}0.10^3 \text{ N}}$

La réaction du sol est évidemment importante. À noter qu'elle est pratiquement verticale ; si β est l'angle qu'elle fait avec la verticale, $\tan\beta = |R_x| / R_y$ soit $\beta \approx 2°$.

48. Le treuil

La tension du fil auquel est accrochée la masse et la force appliquée tendent à faire tourner le système dans des sens opposés : leurs moments sont donc de signe contraire (Δ est l'axe des cylindres). Prenons comme sens positif celui des aiguilles d'une montre.

a) En l'absence de mouvement, la tension du fil est égale en norme au poids de la masse ; pour que le mouvement s'amorce, il faut traduire que le moment (positif) de la force appliquée $\overrightarrow{F}$ est supérieur à la valeur absolue du moment (négatif) de la tension $\overrightarrow{T}$ du fil :

$M^{\Delta}_{\vec{F}} = +Fr_2$ et $M^{\Delta}_{\vec{T}} = -mgr_1$; la condition est $F > F_{min} = \dfrac{mgr_1}{r_2} = 6{,}0$ N

On a bien sûr $F_{min} < mg$, c'est l'intérêt du treuil. À noter que le résultat est indépendant de l'angle que fait la force $\overrightarrow{F}$ avec la verticale, pourvu qu'elle reste tangente à la poulie pour que le bras de levier soit r_2.

b) Pour soulever la charge en tirant directement vers le haut sur le filin de gauche, il faut exercer une force supérieure au poids, soit 10 N ; cette valeur n'est pas atteinte, l'opération directe n'est donc pas possible.

c) En revanche, à l'aide du treuil, on constate numériquement que $F > F_{min}$, le soulèvement de la charge est donc possible par ce procédé.
La variation d'énergie potentielle de pesanteur de la masse est :

$$\Delta E_p = mgh = 10 \text{ J}$$

Le travail effectué dans cette phase par l'opérateur exerçant la force $\overrightarrow{F}$ est :

$$W_{op} = \int P_{\vec{F}}\, dt = \int M_{\vec{F}}^{\Delta}\, \omega\, dt = F\, r_2\, \alpha$$

Car le moment comme la force est constant, et α désigne l'angle dont a tourné la poulie soit $\alpha = h / r_1$, d'où

$$W_{op} = \frac{F\, r_2\, h}{r_1} = 13 \text{ J}$$

Le travail fourni par l'opérateur sert non seulement à élever la masse mais aussi à fournir à la masse et au treuil une énergie cinétique ; c'est la raison pour laquelle, en mouvement, la force appliquée est supérieure en norme au poids à soulever.

d) La loi de l'énergie mécanique entre les deux instants qui délimitent la phase d'ascension s'écrit pour l'ensemble masse + fils + treuil (ni frottements, ni travail des forces intérieures) :

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh + Ep_{poulie}\right) - \left(0 + 0 + 0 + Ep_{poulie}\right) = W_{op}$$

La vitesse de la masse et celle du treuil sont liées par $v = r_1\omega$, d'où :

$$v = \sqrt{\frac{2(W_{op} - mgh)}{m + J / r_1^2}} = 1{,}4 \text{ m.s}^{-1}$$

ce qui confirme la transformation d'une partie non négligeable du travail fourni en énergie cinétique.

49. Un oscillateur particulier

a) Choisissons comme système l'ensemble poulie + masse. En l'absence de frottements, ce système est conservatif. Les actions qui travaillent sont le poids de la masse (qui dérive d'une énergie potentielle de pesanteur $Ep_{pes.}$ dont l'origine est prise en B), l'action du fil de torsion (qui dérive d'une énergie potentielle élastique $Ep_{él.} = \frac{1}{2}C\alpha^2$ où α est l'angle de torsion). On néglige l'inertie de la seconde poulie.
La conservation de l'énergie mécanique entre A et B où, dans les deux cas, les énergies cinétiques de la masse et de la poulie sont nulles s'écrit :

$$0 + 0 + mgH + 0 = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}C\alpha^2$$

Quand le fil inextensible s'est déroulé de H, la poulie de rayon R a tourné d'un angle $\alpha = H / R$ qui est aussi l'angle de torsion du fil F, d'où :

$$C = \frac{2mgR^2}{H} \quad \text{soit} \quad \underline{C = 5{,}0.10^{-2} \text{ m.N.rad}^{-1}}$$

b) Les oscillations étant symétriques, la vitesse est maximale au centre C, soit pour $h = H / 2$. La vitesse de rotation de la poulie en C est $\omega_m = v_m / R$. La même conservation que précédemment entre A et C conduit à :

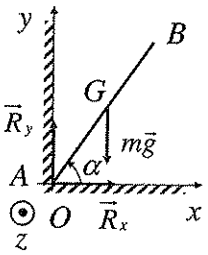
$$0 + 0 + mgH + 0 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}J\omega_m^2 + mg\frac{H}{2} + \frac{1}{2}C\left(\frac{H}{2R}\right)^2$$

En y remplaçant l'expression de C il vient :

$$v_m = \sqrt{\frac{gH}{2(1+J/mR^2)}} \quad \text{soit} \quad \underline{v_m = 0{,}58\,\text{m.s}^{-1}} \text{ ordre de grandeur acceptable}$$

50. La tige qui tombe (*)

a) Tant que le contact est maintenu, la tige est en rotation autour de l'axe fixe Oz ; la loi du moment cinétique scalaire par rapport à cet axe pour la tige dans le référentiel (R) s'écrit avec $\vec{\omega}_{(R)} = \dot{\alpha}\vec{u}_z$:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}m(2l)^2\dot{\alpha}\right) = -mgl\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l}\cos\alpha} \quad (1)$$

Après multiplication de (1) par $2\dot{\alpha}$ et intégration entre $\alpha = \pi/2$ (où $\dot{\alpha} = 0$) et α, on a :

$$\boxed{\dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2l}(1-\sin\alpha)} \quad (2)$$

Noter que $\dot{\alpha} = -\sqrt{\frac{3g}{2l}(1-\sin\alpha)}$ car dans la chute, $\alpha \searrow$

Autre méthode, par l'énergie mécanique.

L'énergie cinétique de la tige en rotation autour de l'axe fixe $\Delta = Oz$ est :

$$E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3}ml^2\dot{\alpha}^2$$

La liaison entre O et A (immobile) étant parfaite, la seule action qui travaille est le poids, force conservative dont l'énergie potentielle est $E_p = mg\,y_G + cste$ (l'axe Oy est orienté vers le haut).

On choisit la constante pour avoir $E_p = 0$ lorsque $y_G = 0$ (soit $\alpha = 0$) d'où :

$$E_p = mgl\sin\alpha$$

L'énergie mécanique de la barre est : $E_m = E_C + E_p = \frac{2}{3}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl\sin\alpha$

Comme elle est constante au cours du temps, elle s'identifie à sa valeur initiale : à $t = 0$, $\alpha(t=0) = \pi/2$ et $\dot{\alpha}(t=0) = 0$, soit $E_m = mgl$

$$\text{Finalement : } \frac{2}{3}ml^2\dot{\alpha}^2 = mgl(1-\sin\alpha)$$

ce qui redonne directement le résultat (2) qu'il suffit de dériver pour avoir (1).

b) Le Th de la résultante dynamique appliqué à la tige dans le référentiel (R) :

$m\vec{a}(G)_{(R)} = m\vec{g} + \vec{R}$ donne en projection sur les axes cartésiens :

$$m\ddot{x} = R_x \quad \text{et} \quad m\ddot{y} = R_y - mg \quad (3)$$

Reste à déterminer

$$\overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} l\cos\alpha \\ l\sin\alpha \end{vmatrix}, \ \vec{v}(G)_{(R)} = \begin{vmatrix} -l\dot{\alpha}\sin\alpha \\ l\dot{\alpha}\cos\alpha \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}(G)_{(R)} = \begin{vmatrix} \ddot{x} = -l(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) \\ \ddot{y} = l(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{vmatrix} \quad (4)$$

L'ensemble des relations (4), (1) et (2) permettent de déterminer R_x et R_y par (3) :

$$\boxed{R_x = \frac{9}{4}mg\cos\alpha\left(\sin\alpha - \frac{2}{3}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{R_y = \frac{1}{4}mg\left(3\sin\alpha - 1\right)^2}$$

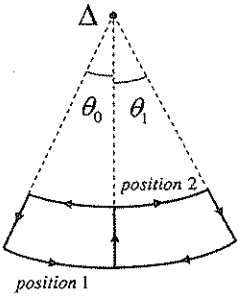
À noter d'abord le résultat cohérent : en position verticale, $R_x = 0$ et $R_y = mg$.

R_x, action du mur sur la tige, s'annule en changeant de signe pour $\alpha \approx 42°$; dans son mouvement de chute et vers l'avant, le contact avec le mur est alors rompu.

R_y, action du sol sur la tige, s'annule *sans changer de signe* pour $\alpha \approx 19°$; le contact avec le sol semble donc maintenu. En réalité, une fois que la tige a quitté le mur, il y a changement de nature du mouvement et il faut réécrire les équations, ce qui conduit à une expression différente de R_y...

51. Mouvement amplifié sur une balançoire (*)

a) Pour la position (1) accroupie et la position (2) relevée, on a $a_1 > a_2$ et $J_1 > J_2$ soit $K = J_2a_2 / J_1a_1 < 1$.



b) La conservation du moment cinétique au passage par le point le plus bas ($\theta = 0$) s'écrit $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, soit $\omega_2 > \omega_1$, et donc $Ec_2 = J_2\omega_2^2/2 > Ec_1 = J_1\omega_1^2/2$; la vitesse de rotation et l'énergie cinétique du système augmente en subissant une discontinuité, par travail des forces intérieures (l'enfant et la balançoire ne constituent pas un solide, mais un système déformable).

Rq : Passage par l'élongation la plus haute ($\theta = \theta_m$) ; à cet instant le moment du poids de l'ensemble par rapport à l'axe est non nul : le moment cinétique, nul, évolue (et change même de signe). En revanche l'énergie cinétique, nulle aussi, n'est pas modifiée car à cet instant $\omega = 0$ (un système immobile ne reçoit pas de puissance, malgré le changement de position de l'enfant).

c) Th Ec de $\theta = \theta_0$ à $\theta = 0$: $\frac{1}{2}J_1(\omega_1^2 - 0) = mg(1 - \cos\theta_0)a_1$

Th Ec de $\theta = 0$ à $\theta = \theta_1$: $\frac{1}{2}J_2(0 - \omega_2^2) = -mg(1 - \cos\theta_1)a_2$

et avec $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, il vient au bout d'une demi-oscillation :

$$(1 - \cos\theta_0) = K(1 - \cos\theta_1)$$

Partant de la même énergie au début de la deuxième demi-oscillation, on a de même $(1-\cos\theta_1)=K(1-\cos\theta_2)$ et par récurrence au bout de n passages par la position d'équilibre :

$$(1-\cos\theta_0)=K(1-\cos\theta_1)=K^2(1-\cos\theta_2)=...=K^n(1-\cos\theta_n)$$

Ce résultat donne $\theta_n=\pi/2$ pour $\boxed{K^n=(1-\cos\theta_0)}$

52. Barre oscillante

Cet exercice concerne un pendule pesant particulier (comme à la question **30.**).

a) La tige étant homogène, son centre de masse G se trouve au milieu de AB. La trajectoire du point G est un arc de cercle de centre A et de rayon l.

b) La barre est en rotation autour de l'axe fixe $\Delta=Az$ et donc :

$$E_C=\frac{1}{2}J_\Delta\dot\theta^2=\frac{2}{3}ml^2\dot\theta^2$$

La liaison en A étant parfaite, la seule action qui travaille est le poids, force conservative dont l'énergie potentielle est $E_p=-mg\,y_G+cste$

(attention au signe – , l'axe Oy étant orienté vers le bas)

On choisit la constante pour avoir $E_p=0$ en $y_G=0$ (soit $\theta=\pm\pi/2$) d'où :

$$E_p=-mg\,y_G=-mgl\cos\theta$$

L'énergie mécanique de la barre est : $E_m=E_C+E_p=\frac{2}{3}ml^2\dot\theta^2-mgl\cos\theta$ (1)

Comme elle est constante au cours du temps, elle s'identifie à sa valeur initiale : à $t=0$, $\theta(t=0)=\theta_0$ et $\dot\theta(t=0)=0$, soit $E_m=-mgl\cos\theta_0$

Finalement : $\boxed{E_m=\frac{2}{3}ml^2\dot\theta^2-mgl\cos\theta=-mgl\cos\theta_0}$

c) Dans la position verticale, $\theta=0$, et la vitesse angulaire $\dot\theta_v$ de la tige à ce moment est donnée par la relation précédente :

$$\frac{2}{3}ml^2\dot\theta_v^2=mgl(1-\cos\theta_0)\quad\Rightarrow\quad\dot\theta_v=\pm\sqrt{\frac{3g}{2l}(1-\cos\theta_0)}$$

Le signe n'étant pas le même pour le sens aller et le sens retour.
Alors en norme la vitesse de B dans cette situation est :

$$\boxed{v_B=2l\left|\dot\theta_v\right|=\sqrt{6gl(1-\cos\theta_0)}}$$

d) On dérive l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps :

$$\frac{4}{3}ml^2\dot\theta\ddot\theta+mgl\dot\theta\sin\theta=0\quad\Rightarrow\quad\ddot\theta=-\frac{3g}{4l}\sin\theta$$

Pour les mouvements de faible amplitude, $\sin\theta \approx \theta$, d'où $\ddot{\theta} \approx -\frac{3g}{4l}\theta$, équation différentielle admettant une solution sinusoïdale de période (indépendante de l'amplitude θ_0) :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{4l}{3g}}}$$

La solution qui obéit aux deux conditions initiales $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ est :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{3g}{4l}}\, t\right)}$$

53. Entraînement par frottement de pivotement

a) L'ensemble disque + cadre ne subit aucun moment de forces extérieures par rapport à l'axe (les poids et la tension du fil sans torsion sont portés par l'axe). Le moment de pivotement est une action intérieure donc elle n'intervient pas dans la loi du moment cinétique. Le moment cinétique de l'ensemble est donc conservé, soit entre $t=0$ et $t=t_f$ (ω_f est la vitesse angulaire commune à C et D) :

$$0 + J_D\omega_0 = (J_C + J_D)\omega_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_f = \frac{J_D}{J_C + J_D}\omega_0}$$

b) Pour le cadre, la variation d'énergie cinétique entre $t=0$ et $t=t_f$ est :

$$\Delta E_c(C) = \frac{1}{2}J_C(\omega_f^2 - 0) = \frac{1}{2}\frac{J_C J_D}{J_C + J_D}\omega_0^2 > 0$$

Pour le disque, elle vaut :

$$\Delta E_c(D) = \frac{1}{2}J_D(\omega_f^2 - \omega_0^2) = -\frac{1}{2}\frac{2J_C J_D^2 + J_C^2 J_D}{(J_C + J_D)^2}\omega_0^2 < 0$$

Et pour l'ensemble :

$$\Delta E_c = \Delta E_c(C) + \Delta E_c(D) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{2}\frac{J_C J_D}{J_C + J_D}\omega_0^2 < 0}$$

L'énergie cinétique du cadre augmente (normal, il commence à tourner), celle du disque diminue (normal, il est ralenti), et celle de l'ensemble diminue, montrant que le cadre ne récupère pas toute l'énergie que le disque perd...

c) Appliquons la loi du moment cinétique scalaire au cadre seul ; le frottement de pivotement devient alors une action extérieure et son moment positif vaut Γ, d'où :

$$J_C\frac{d\omega_C}{dt} = \Gamma \quad \Rightarrow \quad \omega_C(t) = \frac{\Gamma}{J_C}t + 0$$

Pour le disque seul à présent, qui subit un moment négatif $-\Gamma$ (par action et réaction) :

$$J_D \frac{d\omega_D}{dt} = -\Gamma \quad \Rightarrow \quad \omega_D(t) = \omega_0 - \frac{\Gamma}{J_C} t$$

Rq : la somme membre à membre des deux équations précédentes donne $J_C \frac{d\omega_C}{dt} + J_D \frac{d\omega_D}{dt} = 0$, montrant bien que pour le système total, les actions intérieures disparaissent conduisant à la conservation du moment cinétique total $\sigma_\Delta(C) + \sigma_\Delta(D) = cste$ vu à la question a).

La condition $\omega_C(t_f) = \omega_D(t_f)$ conduit à $\boxed{t_f = \frac{J_C J_D \omega_0}{(J_C + J_D)\Gamma}}$

d) La loi de l'énergie cinétique écrite pour l'ensemble disque + cadre entre $t = 0$ et $t = t_f$ s'écrit :

$$\Delta E_c = W_{int.} + W_{ext.}$$

Le travail des forces extérieures (poids et tension du fil sans torsion) est nul (ces forces s'appliquent en des points de vitesse nulle).

Le travail des forces intérieures (à ne pas oublier) est celui des forces de frottements ; en effet il est non nul car l'ensemble n'est pas un solide et se déforme (les vitesses de rotation sont différentes), d'où $W_{int.} = W_{frott.}$ cherché.

Il vient $\boxed{W_{frott.} = \Delta E_c = -\frac{1}{2} \frac{J_C J_D}{J_C + J_D} \omega_0^2 < 0}$

On comprend alors que la différence entre l'énergie cinétique cédée par le disque et celle reçue par le cadre est perdue par dégagement thermique au niveau des pivots par frottement.

Chapitre 8

Oscillateurs et forces centrales

Les ordres de grandeur utiles

Ils sont regroupés au début du chapitre **6**, page 271.

Le cours d'abord

Oscillateurs amortis

Revoir les questions **28. à 32.** du chapitre **4.**

Une masse m au point M se déplace sur une droite horizontale et sa position d'équilibre est $x=0$; elle est soumise de la part d'un ressort à une force de rappel proportionnelle à l'élongation $-kx\vec{u}_x$ ($k>0$, la raideur du ressort) et éventuellement de la part d'un dispositif d'amortissement à une force de frottement fluide modélisée par une force en $-\lambda\dot{x}\vec{u}_x$ ($\lambda>0$, le coefficient de frottement fluide).

1. Écrire l'équation d'évolution du système ; comment varie au cours du temps son énergie mécanique ? Quel est l'équivalent électrique pour le dipôle RLC des grandeurs mécaniques suivantes : m, k, λ, $x(t)$ et $v(t)$?

2. Pour l'oscillateur amorti, donner pour chacun des trois régimes (à définir et caractériser) la solution $x(t)$ avec les conditions initiales suivantes : $x(t=0)=x_0>0$ et $v(t=0)=0$ (on lâche la masse avec une vitesse initiale nulle hors de la position d'équilibre). Tracer et commenter les graphes $x(t)$. Représenter également le portrait de phase $\dot{x}(x)$ et commenter.

3. Dans le cas du régime pseudopériodique, définir le décrément logarithmique δ et comparer la pseudopériode T à la période propre T_0 ; quelle relation lie ces trois grandeurs ?

4. Toujours pour le régime pseudopériodique, comment s'écrit l'énergie mécanique $E_m(t)$ dans le cas d'un très faible amortissement ? Calculer alors la variation ΔE_m d'énergie mécanique sur une pseudopériode et en déduire l'expression du facteur de

qualité (définition énergétique) : $Q = \dfrac{2\pi E_m}{|\Delta E_m|}$. Commenter ce résultat et conclure en revenant sur l'analogie avec le dipôle RLC en régime libre.

Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

Voir à ce sujet les questions **3.** à **6.** du chapitre **5** et s'appuyer sur les analogies (question **1.** de ce chapitre) avec le dipôle RLC mis en régime forcé par un générateur de tension sinusoïdale.

5. Quel dispositif pratique peut-on utiliser pour soumettre la masse m à une force sinusoïdale de fréquence réglable et d'amplitude constante ?

6. Exprimer en RSF de pulsation ω, l'énergie mécanique instantanée de l'oscillateur, puis sa valeur moyenne et la valeur moyenne de sa dérivée par rapport au temps. Montrer que la puissance de la force excitatrice compense en moyenne la puissance de la force de frottement.

Champ de gravitation

7. Donner l'expression de la force de gravitation entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2. En déduire le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle en un point quelconque de l'espace. À quelle condition le champ gravitationnel créé par un astre, en un point extérieur, est-il le même que celui créé par une masse ponctuelle ?

8. Définir le référentiel de Copernic (C), le référentiel géocentrique, puis le référentiel terrestre (R), et détailler le mouvement de (R) par rapport à (C).

9. Dans le cadre de l'hypothèse d'une Terre à symétrie sphérique, exprimer le champ de gravitation terrestre. Calculer la valeur numérique correspondante au niveau du sol et commenter, on donne : $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} ; $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg ; rayon dans le modèle sphérique : $R_T = 6{,}4.10^6$ m.
Exprimer l'énergie potentielle de gravitation. Définir et calculer la vitesse de libération à partir du sol, préciser clairement le référentiel.

10. Quelle est la période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique, appelée jour sidéral T_{sid} ? Pourquoi est-elle différente du jour solaire moyen $T_{sm} = 24$ h ?

Forces centrales conservatives

Le point matériel de masse m est soumis à une force centrale $\vec{f}$ passant par un point fixe O d'un référentiel galiléen (R).

11. Montrer que dans le cas d'une interaction entre deux points matériels de masse m et M très différentes, par exemple $M \gg m$, le point de masse M reste quasiment immobile au centre de masse G du système des deux points. On admet que la point G correspond au point O fixe du référentiel galiléen d'étude.

12. Donner l'expression de $\vec{f}$, force centrale conservative, dans le cas de l'interaction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles, puis de l'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles. Quels sont les différences et points communs de ces deux cas ?

13. Soit $\vec{\sigma}_{O(R)}$ le moment cinétique au point O dans le référentiel (R) d'un mobile M de masse m, de vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et de vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ dans (R). Comment évolue ce moment cinétique lorsque le point M est soumis à une force centrale de « centre » O ? Quelle conséquence importante cela a-t-il sur la trajectoire du mobile ? Quel système de coordonnées peut-on choisir dès lors ?

14. Calculer alors le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O(R)}$, en choisissant soigneusement le système de coordonnées. Donner l'expression de la constante $C = \sigma_O / m$, puis énoncer et interpréter la « loi des aires ».

15. Définir l'énergie potentielle associée à la force centrale conservative, dans les deux cas de la question **12.**, et exprimer l'énergie mécanique E du système.

■ Mouvements dans un champ gravitationnel

16. On considère l'interaction gravitationnelle entre m et M fixe en O. Définir, à partir des lois de conservation, une énergie potentielle effective $V_{eff}(r)$ limitant le problème à l'étude du mouvement radial. Faire l'étude énergétique complète. Quels états distingue-t-on ?

17. Conformément à l'étude question **16.**, montrer que la relation fondamentale appliquée à m admet une solution de type trajectoire circulaire, soit $r = r_0$. Exprimer alors la vitesse en fonction de G, M et r_0. Commenter. Exprimer, de même, l'énergie mécanique en fonction de G, M, m et r_0.

18. Dans l'étude question **16.**, dans le cas $E < 0$ (système lié), écrire l'équation du second degré vérifiée par les valeurs r_{min} et r_{max} (correspondant à $\dot{r} = 0$). Sans la résoudre exprimer la somme $r_{min} + r_{max}$ en fonction de E. Montrer que cette relation généralise l'expression de E vue pour un mouvement circulaire.

■ Applications aux planètes et satellites

Pour les questions avec mouvement elliptique, utiliser le formulaire « caractéristiques d'une ellipse » donné chapitre **0**.

L'étude des satellites de la Terre est faite dans le référentiel géocentrique galiléen.

19. Un satellite de masse m est en orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre de masse M_T.

a) Montrer que la vitesse v du satellite est constante en norme ; comment varie-t-elle en fonction du rayon r_0 de l'orbite ? Quelle est la relation entre sa période T et le rayon r_0 ?

AN : Pour un satellite en orbite basse, calculer la vitesse et la période, on donne $g_0 = 9{,}8 \text{ m.s}^{-2}$ et $R_T = 6{,}4.10^6 \text{ m}$.

b) À quelle condition un satellite peut-il être géostationnaire et quelle est son altitude ?

20. Quelle énergie minimale doit-on communiquer à un satellite, initialement au sol sur Terre, pour le mettre en orbite elliptique de demi-grand axe a. Montrer que la satellisation à partir du sol est impossible.

21. Pour un satellite sur une trajectoire elliptique, exprimer la constante des aires avec les caractéristiques du mouvement à l'apogée et au périgée. Exprimer la norme de la vitesse en un point quelconque de la trajectoire.

22. Énoncer les lois de Képler. Montrer que l'étude théorique avec l'interaction gravitationnelle permet de les retrouver (en considérant le cas particulier d'un mouvement circulaire pour la troisième). Comment généraliser la troisième loi de Képler pour un mouvement elliptique ? Comment peut-on accéder à la masse du Soleil, à partir des caractéristiques mesurées du mouvement de la Terre : $a = 1 \text{ UA} = 1{,}5.10^8 \text{ km}$ et $T = 1 \text{ an} = 365{,}25 \text{ jours}$, $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.S.I.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ La période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles est donnée par le jour sidéral qui ne concerne que la rotation propre et non par le jour solaire moyen qui cumule les effets de la rotation propre et de la translation quasi circulaire de la Terre autour du Soleil.

☐ Il faut toujours bien penser à exploiter les constantes du mouvement (conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique) dans le cas d'un mouvement à force centrale.

☐ Pour la Terre, dans le cadre du modèle sphérique, la constante GM_T s'écrit aussi $g_0 R_T^2$, où g_0 est le champ de gravitation à la surface.

☐ Pour un mouvement elliptique, ne pas chercher à projeter la relation fondamentale de la dynamique sur la base polaire, en un point quelconque, les équations sont alors trop compliquées car le vecteur $\vec{u}_\theta$ n'est pas le vecteur tangent à la trajectoire. Utiliser les points particuliers apogée et périgée, ainsi que les relations fournies par l'énoncé.

Applications directes du cours

Pour les questions avec mouvement elliptique, utiliser le formulaire « caractéristiques d'une ellipse » donné chapitre **0**.

23. Pour l'oscillateur amorti, reprendre la question **2.** et donner pour chacun des trois régimes, la solution $x(t)$ avec les conditions initiales suivantes : $x(t=0)=0$ et $v(t=0)=v_0>0$ (la masse est lancée à partir de la position d'équilibre avec une vitesse initiale). Tracer et commenter les graphes $x(t)$.

24. La force gravitationnelle de Newton satisfait-elle le principe de l'action et de la réaction ?

25. Sur la Lune le temps de chute d'un objet sur une hauteur $h=1{,}0$ m est $\tau=1{,}1$ s. En déduire la masse M_L de la Lune, dans le cadre d'un modèle sphérique, sachant que son rayon moyen est $R_L=1{,}75.10^3$ km.

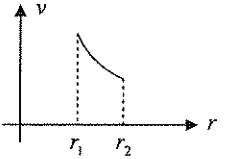
26. Quelles caractéristiques de la trajectoire sont fixées par chacune des constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) dans le cas d'une force newtonienne ?

27. Saturne, sixième planète du système solaire, est entouré de nombreux satellites et anneaux. Pour étudier quelques aspects de son environnement de Saturne, le référentiel « saturnocentrique » est considéré comme galiléen. Et pour simplifier, la planète Saturne possède ici une répartition de masse à symétrie sphérique : S est son centre d'inertie, M_S sa masse et R_S son rayon.

La valeur de la constante de gravitation G est : $G=6,67.10^{-11}\,\text{N.m}^2\text{.kg}^{-2}$.

a) Téthys, satellite de Saturne, possède un mouvement circulaire autour de S, de rayon $R_T=2,9.10^8$ m et de période $T_T=1,6.10^5$ s. Hypérion, un autre satellite, a une trajectoire elliptique de demi grand axe $a_H=1,5.10^9$ m. Calculer la masse de Saturne et la période d'Hypérion.

b) Anneaux de Saturne. Soient M_1 et M_2 deux points des bords d'un anneau large (supposé circulaire) de Saturne situés respectivement aux distances r_1 et r_2 du centre de



Saturne considéré comme un astre à symétrie sphérique. L'effet Doppler optique permet de mesurer depuis la Terre la vitesse v des points situés entre M_1 et M_2 dans le référentiel saturnocentrique, sur leur trajectoire circulaire. Le résultat des mesures donne le graphe représenté.
Dire comment cette mesure permet de savoir si l'anneau est un corps solide ou un ensemble de fragments indépendants de petites dimensions.

28. Pour répondre aux questions utiliser les données du tableau ci-dessous et le formulaire sur les ellipses chapitre **0**. Pour les planètes il s'agit de données concernant leur mouvement orbital autour du Soleil, pour Titan, satellite de Saturne, les données concernent son mouvement autour de Saturne. Donner une réponse littérale justifiée puis faire l'application numérique.

Astre	demi-grand axe a en U.A.	période T en années	excentricité e
Vénus	0,72		0,007
Terre	1,00	1,00	0,017
Mars	1,52	1,88	0,093
Jupiter	5,20	11,86	0,048
Saturne	9,54	29,46	0,056
Titan (satellite de Saturne)	0,0082	0,044	0,029
Neptune	30,06	164,79	0,009
Pluton	39,43	248,6	0,248

a) Quelle est la distance entre les deux foyers de l'orbite de Jupiter ?
b) Quelle est la distance Jupiter-Soleil à l'aphélie ?
c) Montrer que Pluton peut être plus rapproché du Soleil que Neptune.
d) Quelle est la masse de Saturne en masse solaire ?
e) Quelle est la période orbitale sidérale de Vénus ?
f) Calculer les vitesses de Mars à l'aphélie et au périhélie.
g) La comète de Halley (dernier passage en 1986) décrit une orbite elliptique autour du Soleil, de période $T = 76$ ans, sa distance au centre du Soleil au périhélie étant $r_p = 0,59$ U.A. Calculer son demi-grand axe et son excentricité.

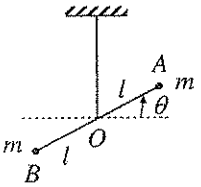
En 1705 Edmond Halley, grâce aux lois de la gravitation nouvellement énoncées par Newton (1687), prédit le retour de la comète observée en 1682 pour l'année 1758, ce qui se produisit effectivement, malheureusement après sa mort (1742). Il avait montré que cette comète avait été observée en 1531 et 1607. On a retrouvé des témoignages du passage de la comète de Halley jusqu'en 239 avant J.C.

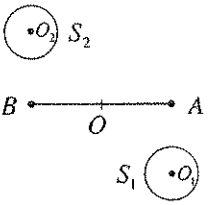
29. Le pendule de torsion de Cavendish : mesure de G (1798)

Un pendule de torsion est constitué d'un fil de constante de torsion C de masse négligeable, d'une tige de longueur $2l$, de masse également négligeable, équipée en ses extrémités A et B de deux masselottes quasi ponctuelles de masse m.

a) On mesure la pulsation $\omega_0 = 2,5.10^{-2}$ rad.s^{-1} du pendule ; établir son expression.

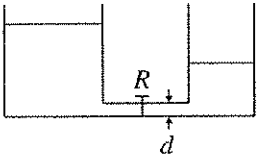
b) On approche perpendiculairement à l'axe AB d'équilibre deux sphères homogènes S_1 et S_2, de centres O_1 et O_2, de masse $M = 50$ kg dans le plan horizontal du pendule jusqu'à ce que $O_1A = O_2B = l = 0{,}10$ m, ces segments étant perpendiculaires à AB ; le pendule a alors tourné d'un très faible angle $\theta = 19'$ (minutes d'arc) par rapport à sa position avant d'approcher les sphères. En déduire la valeur de la constante de gravitation G, en limitant le calcul aux seules interactions O_2B et O_1A.





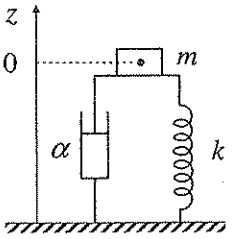
Questions de réflexion ☐ Physique pratique

30. Deux réservoirs sont en communication grâce à une conduite horizontale de diamètre d variable. Au début le robinet R est fermé et le niveau de fluide plus ou moins visqueux de part et d'autre n'est pas le même. Après ouverture du robinet, à quel type de régime a-t-on affaire ?



31. Pourquoi le mouvement d'une corde vibrante est-il amorti (penser à celle d'un instrument de musique) ?

32. On s'intéresse au mouvement de translation vertical d'une voiture de masse à vide m. L'origine de l'axe Oz repère la position du centre de masse de la voiture dans la situation où celle-ci est immobile, en équilibre.
La suspension du véhicule peut être modélisée par un ressort de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de frottement $\vec{f} = -\alpha \dfrac{dz}{dt}\vec{u}_z$.



a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$, et déterminer le coefficient α en fonction de m et k pour que le régime d'amortissement des oscillations soit critique lorsque la voiture est vide.

b) La voiture contient à présent des passagers de masse m_p. Quel est alors le régime d'amortissement ? Pour que la voiture soit confortable, on souhaite une pseudo-période $T = 1$ s adaptée à l'organisme humain. Quelle raideur k doit avoir le ressort si $m = 1\,500$ kg et $m_p = 300$ kg ?

33. Lorsque l'alimentation du moteur d'une machine-outil, fixée sur un support et lancée à grande vitesse de rotation, est coupée, on constate souvent que pendant la phase de décélération (à l'oreille le son émis est de moins en moins aigu) il arrive un moment assez court pendant lequel le support se met à vibrer fortement ; expliquer.

34. Pourquoi pour battre des œufs dans un bol le fait-on très vite ?

35. La position du Soleil, dans le plan de l'écliptique, est repérée par un système de coordonnées polaires. Comment est défini l'axe polaire ? À quelles positions correspondent les changements de saisons ?

36. Pourquoi les bases de lancement de fusée sont-elles proches de l'équateur ? Les satellites de la Terre tournent-ils tous dans le même sens ?

37. Quel est le nombre minimal de satellites géostationnaires nécessaires pour couvrir « l'ensemble » de la Terre ? Quelles sont les latitudes extrêmes atteintes théoriquement ?

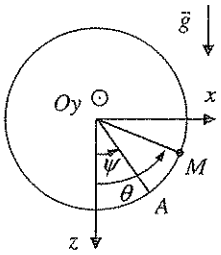
38. Un trou noir est un astre de petite taille et très dense dont le champ gravitationnel en surface est si intense que même les photons (de vitesse $c = 3.10^8$ m.s^{-1}), et donc la lumière, ne peuvent s'en échapper. Trouver le rayon (dit de Schwarzschild) en dessous duquel une étoile comme le Soleil se comporterait comme un trou noir ; commentaire.

Exercices

39. Oscillations forcées sur un cercle en rotation

Un point matériel M de masse m est mobile sur un cercle de rayon R, d'axe Oy horizontal, dans le champ de pesanteur terrestre. La position de M est repérée par l'angle θ que forme OM avec la verticale descendante Oz.

On impose au cercle un mouvement de rotation oscillant autour de son axe horizontal Oy ; sa position est repérée par l'angle ψ que forme OA avec Oz, A étant un point fixe du cercle. La loi est $\psi(t) = \psi_0 \sin(\Omega t)$.



Le point M est soumis à une force de frottement de type fluide, de la part du cercle, modélisée par $\vec{F} = -\mu \vec{v}'$ où $\vec{v}'$ représente la vitesse du point M par rapport au cercle. Le référentiel terrestre est galiléen.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.

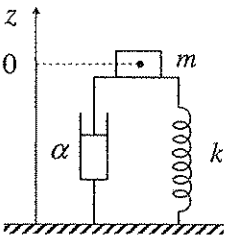
b) On suppose que θ reste petit, expliquer pourquoi, au bout d'un temps suffisamment long, on a $\theta(t)$ du type : $\theta(t) = \theta_1 \sin(\Omega t + \Phi)$. Comment appelle-t-on ce régime ?

c) Exprimer θ_1 et Φ en fonction de Ω, en posant $\alpha = \dfrac{\mu}{2m}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{g}{R}$.

d) Montrer que Φ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et que pour $\Omega < \omega_0$, Φ est positif. Comment expliquer que les oscillations de M puissent être en avance sur celles du cercle représentées par $\psi(t)$?

40. Vibrations d'un moteur

Lorsqu'un moteur imparfaitement équilibré fonctionne, un balourd provoque des vibrations du châssis et il est nécessaire de prévoir un système de suspension. Le moteur, dans ce mouvement de translation, est assimilé à un point matériel de masse m. Quant à la suspension, elle peut être modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, placée en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\vec{f} = -\lambda \dfrac{dz}{dt}\vec{u}_z$.



Le fonctionnement proprement dit du moteur entraîne, par inertie, l'apparition d'une force supplémentaire de la forme d'une excitation sinusoïdale $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$.

L'origine de l'axe Oz repère la position du moteur dans la situation où celui-ci ne fonctionne pas et est immobile.

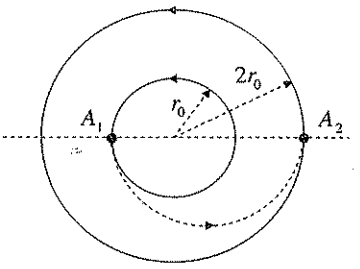
a) Établir avec soin l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

b) En régime sinusoïdal établi, on cherche pour la vitesse des solutions de la forme : $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$; donner l'expression de l'amplitude V_0 de la vitesse et tracer, puis le commenter, le graphe de la fonction $V_0(\omega)$.

c) La pièce mobile du moteur, dont la masse est $m = 10$ kg, a une vitesse de rotation de 100 tours/s. On dispose de deux ressorts de raideur $k_1 = 4.10^6$ N.m^{-1} et $k_2 = 10^6$ N.m^{-1} ; lequel est-il conseillé de choisir pour réaliser la suspension ?

41. Transfert d'orbites d'un satellite

a) On veut porter un satellite de la trajectoire circulaire $r_1 = r_0$ où sa vitesse est v_0 à la trajectoire circulaire $r_2 = 2r_0$ grâce à un réacteur (on suppose cependant que la masse m du satellite reste constante). En un point A_1, cela revient à lui communiquer une vitesse $v_1' > v_0$ de telle façon qu'il décrive une ellipse (dite de transfert) de grand axe A_1A_2 (la variation de vitesse se produit sur une durée suffisamment brève pour pouvoir considérer que pendant cette variation la vitesse garde la même direction et que l'altitude ne change pas). Il arrive en A_2 avec une vitesse v_2'. On lui communique alors une vitesse v_2 (toujours de façon quasi instantanée) pour qu'il décrive une trajectoire circulaire de rayon r_2.



Déterminer les énergies sur les trajectoires en fonction de $k = GM_T m$ et de r_0. Comment l'énergie du satellite a-t-elle pu varier alors que la force gravitationnelle est conservative ? Calculer les vitesses v_1', v_2' et v_2 en fonction de v_0.

a) Le satellite étant sur la trajectoire circulaire de rayon r_2, quelle variation de vitesse, dans les conditions décrites au a), permet d'obtenir une trajectoire parabolique ?

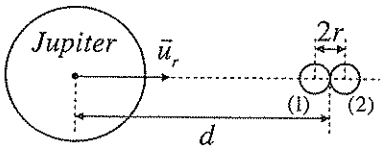
42. Limite de Roche (*)

On cherche à déterminer la distance en dessous de laquelle une comète s'approchant de Jupiter se sépare en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

– le référentiel Jupitérocentrique est galiléen, et Jupiter (masse M_J, rayon R_J) est un astre sphérique et homogène,

– la comète de masse volumique μ_c est en orbite circulaire de rayon d autour de Jupiter,

– la comète est constituée de deux sphères identiques de masse m et de rayon r, homogènes et disposées comme indiqué sur la figure (les trois centres restent alignés au cours du mouvement) ; elles sont liées entre elles par leur attraction gravitationnelle mutuelle.



a) Établir que le mouvement du centre d'inertie de la comète est uniforme, puis déterminer l'expression de ω^2, le carré de la vitesse angulaire du mouvement.

b) On note $\vec{R}$ la réaction de la sphère de gauche (1) sur la sphère de droite (2) de la comète. Écrire la relation fondamentale de la dynamique (ou théorème de la résultante cinétique) pour l'une des sphères dans le référentiel Jupitérocentrique. Est-il nécessaire de le faire pour la seconde ?

c) À quelle condition le contact entre les deux sphères est-il rompu ? En déduire, sachant que $\frac{r}{d} \ll 1$, que cela conduit pour d à une limite inférieure d_{lim} et exprimer $\frac{d_{lim}}{R_J}$ en fonction de μ_c et μ_J, masse volumique de Jupiter.

AN : $M_J = 1{,}9.10^{27}$ kg ; $R_J = 7{,}1.10^4$ km et $\mu_c = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3} ; calculer $\frac{d_{lim}}{R_J}$.

43. Satellite freiné par l'atmosphère

a) Un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre. Montrer qu'il existe alors une relation simple entre E_c et E_p, et exprimer E en fonction de r seulement.

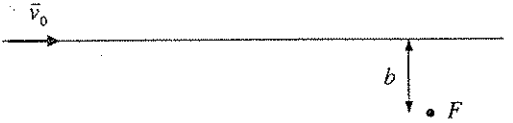
b) En déduire le « paradoxe » du satellite freiné par sa rentrée dans l'atmosphère et qui voit sa vitesse augmenter.

c) Son altitude est $h = 180$ km, et la force de frottement en norme est modélisée par $\beta m v^2 / h$ où $\beta = 10^{-8}$ SI. Préciser l'unité de β et justifier la dépendance en $1/h$ de cette force. Déterminer l'expression de la variation d'altitude Δh après une

révolution, en considérant que sur un tour, la trajectoire reste quasiment circulaire, ce qui conduit à faire un calcul au premier ordre : $h \ll R_T$.

44. Diffusion de Rutherford

L'expérience consiste à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α (noyau d'hélium He^{2+}). Une particule α de masse $m \approx 4m_p$ arrive avec une vitesse $\vec{v}_0$ dont le support est distant de b (paramètre d'impact) du noyau d'or de numéro atomique $Z = 79$ et de nombre de masse $A = 197$.



a) La force sur la particule α s'écrit : $\vec{f} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r$; que vaut k ? Pourquoi peut-on considérer que le noyau d'or est quasiment immobile en F pendant l'interaction ? Le référentiel lié au noyau d'or est pris galiléen.

b) Pourquoi l'énergie et le moment cinétique de la particule α sont-ils constants ? Calculer leurs valeurs en fonction de m, v_0 et b.

c) Dans un premier temps, $b = 0$ et le mouvement de la particule α est rectiligne. Quelle est la distance r_m minimale d'approche de la particule α au noyau d'or ?
AN : $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; si on veut r_m de l'ordre de 10^{-15} m, dimension du noyau, quelle doit-être la vitesse v_0 ?

d) Dans le cas $b \neq 0$, montrer que l'énergie s'écrit $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$. Étudier et tracer $V_{eff}(r)$. Quand $r = r_m$ distance minimale d'approche, que vaut $\dot{r}$? Calculer r_m en fonction de k, E et b. Étudier et interpréter les variations de r_m avec E et b.

Travaux pratiques

45. On réalise des expériences pour étudier les mouvements, suivant l'axe vertical, d'une masse m accrochée à un ressort vertical. $z = 0$ correspond à la position d'équilibre. On donne $m = 200$ g.
La masse est plongée dans de l'eau et subit une force de frottement fluide modélisé par une force de type $-\lambda\vec{v}$. L'extrémité A est fixe (figure 1). L'enregistrement des positions $z(t)$ de la masse m au cours du temps, après l'avoir écartée de sa position d'équilibre et lâchée avec une vitesse initiale nulle (régime libre), conduit au graphe ci-après.

a) Montrer que la décroissance des valeurs maximales de $z(t)$ est exponentielle et déterminer et le coefficient $\omega_0 / Q = \lambda/m$. En déduire la valeur de λ.

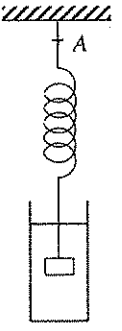
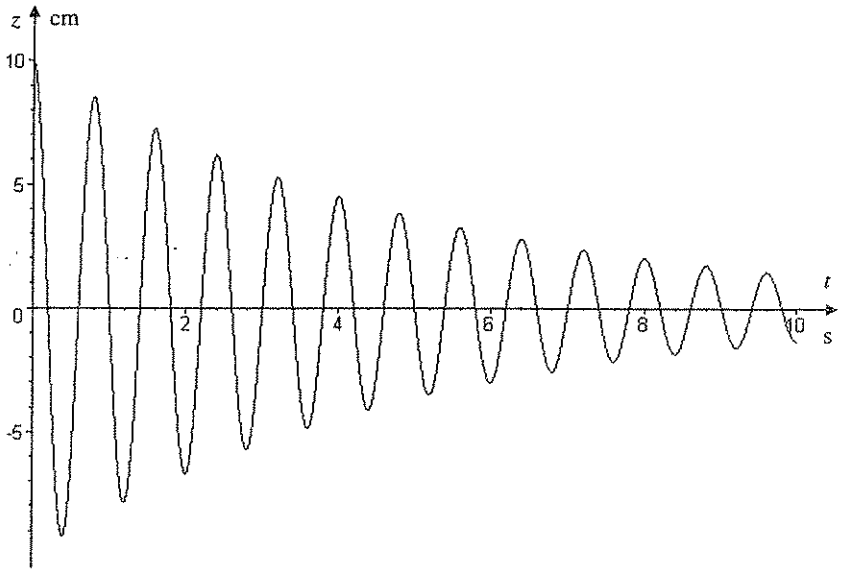


figure 1

b) Déterminer graphiquement la pseudopériode et en déduire le décrément logarithmique et la valeur de la constante de raideur k du ressort.



46. On reprend le dispositif précédent, la masse m oscille maintenant dans l'air. L'extrémité A est animée d'un mouvement sinusoïdal vertical $z_A = a\cos(\omega_1 t)$, obtenu par projection d'un mouvement circulaire uniforme, lui-même généré par la rotation d'un petit moteur électrique (figure 2).
On montre que cela revient à appliquer à la masse m une force $F\cos(\omega_1 t)$ avec $F = ka$.

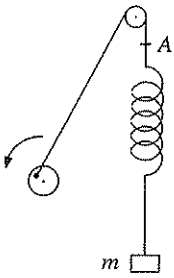


figure 2

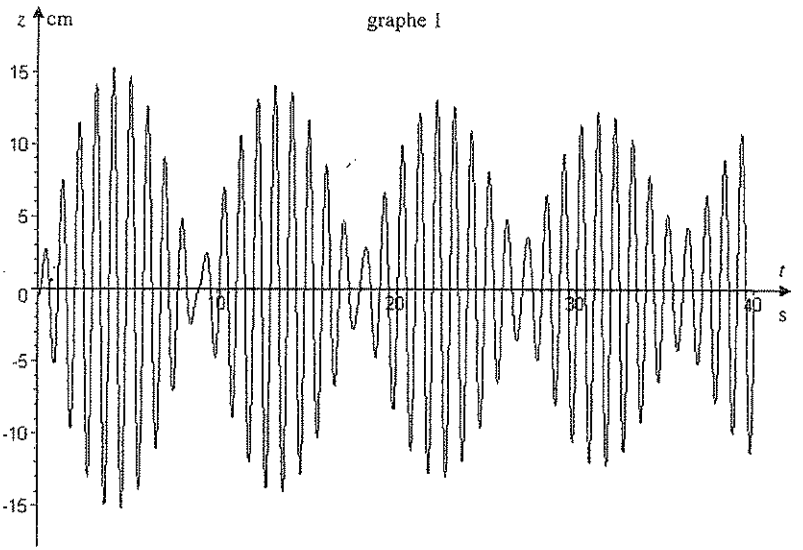
On procède à l'enregistrement des positions de m dans les conditions suivantes : la masse m étant à l'équilibre, on met en marche le moteur (réglé sur une vitesse de rotation fixée à l'avance) à une date $t_0 = 0$. On obtient sur les 40 premières secondes le graphe 1.

a) Interpréter le phénomène de battements observé et mesurer la période des battements.

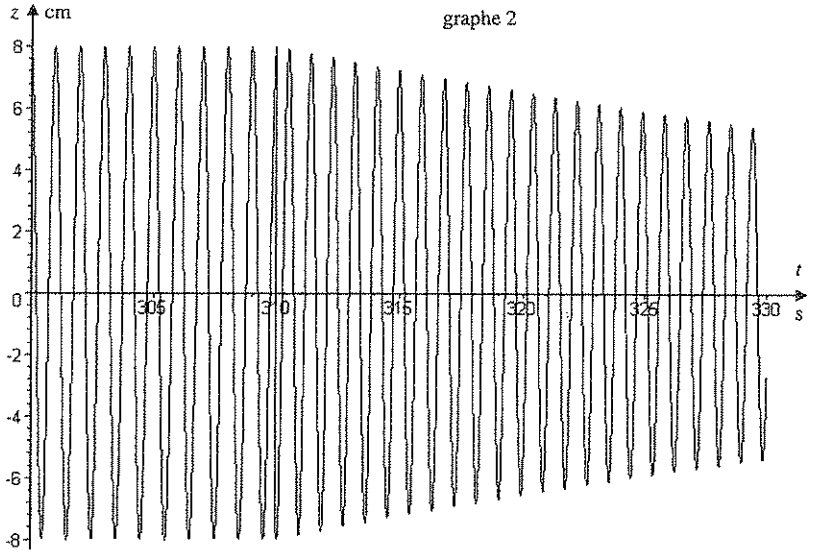
Pour confirmer cette interprétation, on procède à un nouvel enregistrement à partir de la date $t_1 = 300$ s (on a laissé le système osciller depuis la date t_0, moteur en marche). Pendant l'enregistrement, on arrête le moteur à la date $t_2 = 310$ s et on enregistre jusqu'à la date $t_3 = 330$ s (graphe 2).

b) Déduire du graphe 2, en justifiant la démarche, une valeur « théorique » de la période des battements. Conclure.

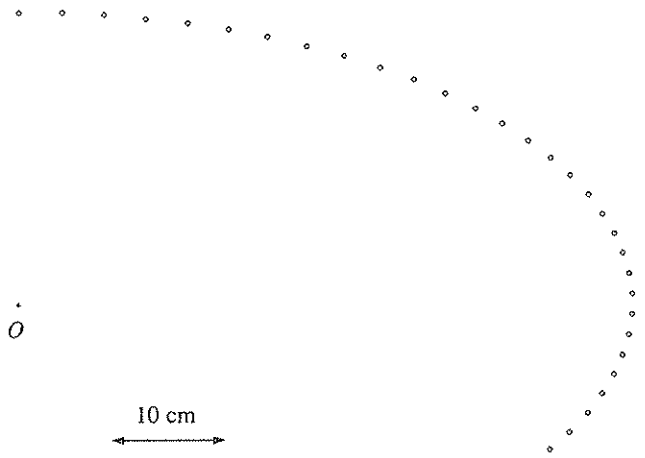
graphe 1



graphe 2



47. Pour étudier un mouvement à force centrale, on utilise un mobile autoporteur (frottements de glissement négligeables) se déplaçant sur une table horizontale. Ce mobile est accroché à un ressort dont l'autre extrémité est reliée à un point fixe O du référentiel terrestre. Un dispositif repère la position du centre de masse du mobile toutes les 20 ms. On obtient l'enregistrement ci-dessous, à tout instant le ressort est tendu.

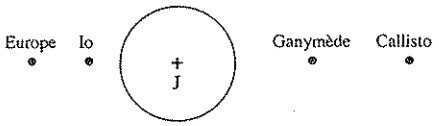


a) Montrer que la loi des aires est expérimentalement vérifiée, prendre des intervalles de temps de 80 ms ; donner la valeur de la constante des aires.

b) Construire en un point de la trajectoire le vecteur accélération moyen (sur une durée de 80 ms) et comparer sa direction à celle du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

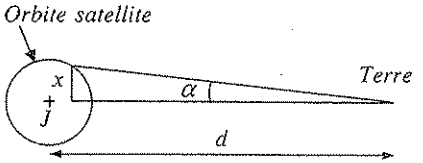
48. Mesure de la masse de Jupiter par l'observation de ses satellites

Le but est de déterminer la masse de Jupiter à partir de l'observation des positions relatives au cours du temps de ses quatre satellites les plus brillants (satellites galiléens).

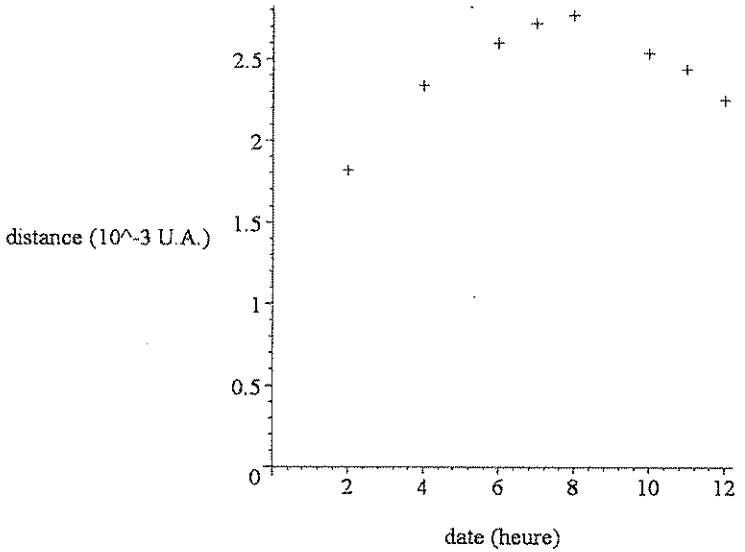


Les documents de travail sont tirés de photos prises à huit instants différents et permettent de déterminer le rayon a de l'orbite, considérée comme circulaire, du satellite et sa période T. Pour convertir l'écart angulaire visible sur la photo en distance, il faut connaître la distance Jupiter-Terre au moment de l'observation, ici $d = 4{,}46$ U.A..

La troisième loi de Képler, avec l'hypothèse $M_{sat} \ll M_J$: $\dfrac{a^3}{T^2} \approx \dfrac{G\,M_J}{4\,\pi^2}$ permet alors de déterminer la masse de Jupiter.



Le graphe ci-dessous donne la distance du satellite Io au centre de Jupiter au cours du temps. La détermination de a et T est faite à partir de cette portion de courbe, théoriquement sinusoïdale pour une trajectoire circulaire uniforme du satellite.



Déterminer graphiquement a et T. Pour la période, prendre deux positions de part et d'autre de l'élongation maximale et traduire la proportionnalité entre l'angle au centre, parcouru par le satellite, et la durée. Déterminer la masse de Jupiter.

Cette mesure isolée est très imprécise. Ci-dessous, des mesures faites par 36 personnes différentes à partir du même document et avec le même protocole. La masse de Jupiter est en 10^{27} kg :

1.732	1.700	2.176	2.131	2.152	1.801	2.182	1.989	2.178	1.632
2.236	1.615	2.025	2.040	2.221	1.865	1.909	1.943	1.650	1.872
2.047	1.875	1.805	2.068	1.860	1.609	1.896	1.754	1.716	2.026
1.902	1.677	1.780	2.185	2.333	2.078				

Faire un traitement statistique et donner un encadrement de la masse de Jupiter en supposant l'absence d'erreurs systématiques.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Oscillateurs amortis

1. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m dans le référentiel terrestre (R) supposé galiléen est, en l'absence de frottement solide :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = -kx\vec{u}_x - \lambda\vec{v} + m\vec{g} + \vec{R}_n$$

La réaction $\vec{R}_n$ est orthogonale à Ox, les frottements sont déjà pris en compte,

$$\vec{R}_n = R_y\vec{u}_y + R_z\vec{u}_z$$

Suivant la verticale ascendante, $\ddot{z} = 0 \Rightarrow R_z = mg$,

et suivant Oy, $\ddot{y} = 0 \Rightarrow R_y = 0$,

d'où en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$$

en posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda}{m}$, il vient l'équation classique :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Q est le facteur de qualité, inversement proportionnel à l'amortissement et ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur.

En multipliant par $v = \dfrac{dx}{dt}$ les deux membres de l'équation écrite sous la forme

$$m\frac{dv}{dt} + kx + \lambda v = 0$$

il vient $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}kx^2\right) + \lambda v^2 = 0$, soit

$$\boxed{\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = -\lambda v^2 < 0}$$

Il apparaît que la force de frottement à travers sa puissance est responsable de la diminution de l'énergie mécanique $E = E_c + E_p$ de l'oscillateur (système non conservatif).

Les correspondances sont les suivantes : $m \to L$, $k \to 1/C$ et $\lambda \to R$ et pour les grandeurs temporelles : $x(t) \to q(t)$ et $v(t) = \dot{x}(t) \to i(t) = \dot{q}(t)$.

2. Pour la résolution de l'équation différentielle : $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$, se référer au chapitre **0**, Équations différentielles **II-3.a)** et à la question **30.** du chapitre **4**.

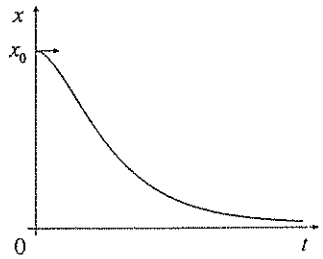
Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta=4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)$, d'où les trois régimes suivant les valeurs de Δ :

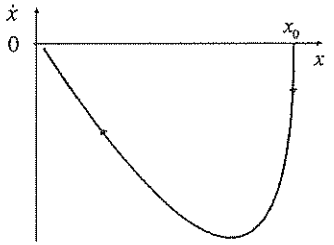
* le régime apériodique, $\Delta>0$, correspond à un fort amortissement, $Q<\frac{1}{2}$.

L'équation caractéristique admet deux racines réelles négatives ($P=\omega_0^2>0$ et $S=-\frac{\omega_0}{Q}<0$) notées $-\gamma$ et $-\beta$ avec $\gamma>0$ et $\beta>0$; la solution est une somme de deux exponentielles décroissantes : $x(t)=Ae^{-\gamma t}+Be^{-\beta t}$ et la traduction des conditions initiales conduit à :

$$\boxed{x(t)=\frac{x_0}{\beta-\gamma}(\beta e^{-\gamma t}-\gamma e^{-\beta t})}$$

Cette solution décrit un retour à l'équilibre en décroissance exponentielle sans oscillations (graphe de gauche). Le portrait de phase (graphe de droite) indique bien cette décroissance monotone pour l'élongation, avec une vitesse négative qui, en norme, commence par croître, puis décroît.





* le régime apériodique critique, $\Delta=0$, soit $Q=\frac{1}{2}$.

L'équation caractéristique admet une racine double $-\omega_0$; la solution est :

$x(t)=(A+Bt)e^{-\omega_0 t}$ et la traduction des conditions initiales conduit à :

$$\boxed{x(t)=x_0(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}}$$

Cette solution décrit également un retour à l'équilibre sans oscillations (on a toujours $x(t)>0$), mais s'effectuant plus rapidement que précédemment.

* le régime pseudopériodique, $\Delta<0$, correspond à un faible amortissement, $Q>\frac{1}{2}$,

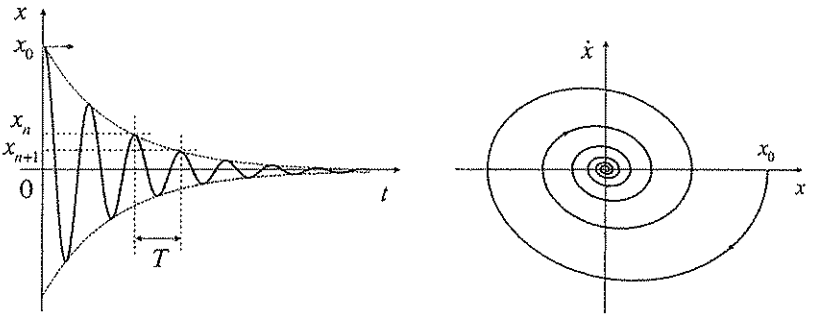
L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative : $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega$, avec $\omega = \sqrt{-\Delta}\,/\,2 = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

La solution s'écrit indifféremment :

$x(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ ou $x(t) = C\cos(\omega t - \varphi)\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ et la traduction des conditions initiales conduit à

$$\boxed{x(t) = x_0\left(\cos\omega t + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}$$

Cette solution décrit un retour à l'équilibre avec oscillations de part et d'autre de $x = 0$; l'enveloppe de la courbe décroît de manière exponentielle, et la courbe admet pour pseudopériode $T = \frac{2\pi}{\omega}$. L'aspect en forme de spirale du portrait de phase indique bien ce caractère pseudopériodique avec une réduction progressive de l'amplitude et de la vitesse.



NB : Sur la courbe de gauche, les extrema de $x(t)$ ne sont pas sur les courbes enveloppes, même si à cette échelle cela semble être le cas.

3. Dans le cas du régime pseudopériodique, l'amplitude maximale décroît de façon exponentielle et le décrément logarithmique δ est le logarithme népérien du rapport de deux amplitudes maximales successives (intervalle de temps T),

$$\text{soit } \delta = \ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \ln e^{\frac{\omega_0}{2Q}T} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\omega_0}{2Q}T}$$

Il résulte de la définition de ω, la relation entre la pseudopériode T et la période propre T_0 : $T^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right) = T_0^2 \Rightarrow T^2 = T_0^2 + T^2/4Q^2$.

d'où avec δ la relation cherchée, dans laquelle δ dépend de T :

$$\boxed{T^2/T_0^2 = 1 + \delta^2/4\pi^2}$$

En cas de faible amortissement, $Q \gg 1$ (soit $\delta \ll 1$), on a $T \approx T_0$ bien que T soit toujours légèrement supérieure à T_0 (avec frottement, le mobile met un temps plus long...) et la relation approchée est $T \approx T_0\left(1+1/8Q^2\right)$.

En réalité ce résultat reste vrai même en cas d'amortissement assez important : si $x_{n+1} = x_n/3$, $\delta = \ln 3 \approx 1{,}10$ et $T/T_0 \approx 1{,}02\ldots$

4. Dans le cas d'un très faible amortissement, $Q \gg 1$, et donc $\omega \approx \omega_0$, d'où :

$$x(t) = x_0\left(\cos \omega t + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin \omega t\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \approx x_0 \cos \omega_0 t\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

en négligeant le terme en $1/2Q$, et de même pour

$$\dot{x}(t) = x_0(-\omega_0 \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{2Q}\cos \omega_0 t)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \approx -x_0\omega_0 \sin \omega_0 t\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

(ceci revient à négliger les variations lentes de l'exponentielle devant les variations rapides de la sinusoïde).

Alors l'énergie mécanique donne :

$$\boxed{E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}}$$

L'énergie mécanique décroît au cours du temps, approximativement en $e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$.

L'énergie dissipée sur une pseudopériode est :

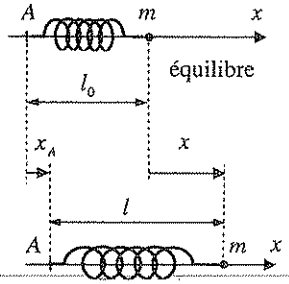
$$\left|\Delta E_m\right| = E_m(t) - E_m(t+T) = \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\ e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\left(1-e^{-\frac{\omega_0}{Q}T}\right) \approx E_m(t) \times \frac{\omega_0}{Q}T \quad \text{car } \frac{\omega_0}{Q}T \ll 1$$

$$\text{d'où } Q = \frac{E_m}{\left|\Delta E_m\right|}\omega_0 T \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 2\pi\frac{E_m}{\left|\Delta E_m\right|}}$$

Il apparaît donc que plus le coefficient de frottement λ est faible, plus le facteur de qualité est élevé, et plus la puissance mécanique perdue (énergie perdue sur une période) est faible. La durée du régime transitoire (libre ici) est alors grande, ce qui est conforme à l'étude faite avec le *RLC* série au chapitre **4**.

Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

5. La masse m est reliée à un ressort dont l'autre extrémité est A. On impose au point A des oscillations sinusoïdale : $x_A = a\cos(\omega t)$.



date t quelconque

La force exercée par le ressort sur m est :

$$\vec{f} = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}_x = -k\,(l_0 + x - x_A - l_0)\,\vec{u}_x$$

$$\vec{f} = -k\,(x - x_A)\,\vec{u}_x$$

$$\boxed{\vec{f} = -kx\,\vec{u}_x + ka\cos(\omega t)\,\vec{u}_x}$$

En plus de la force de rappel élastique, il s'exerce sur m un terme excitateur sinusoïdal d'amplitude constante.
Ce dispositif est mis en œuvre dans la question **45.**

6. En RSF de pulsation ω : $x = X_m \cos(\omega t - \varphi)$

et $E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 X_m^2 \sin^2(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega t - \varphi)$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{1}{4}\left(k + m\omega^2\right) X_m^2}$$

L'équation différentielle est : $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_{exc}$

et en multipliant par $\dot{x}\,dt$ on obtient le bilan de puissance :

$$d\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2\right) + d\left(\frac{1}{2} k x^2\right) = F_{exc} v\,dt - \lambda \dot{x}^2 dt$$

avec $P_{exc} = F_{exc} v$ puissance de la force excitatrice

et $P_f = -\lambda v^2$ puissance de la force de frottement

Le bilan est : $\boxed{dE = \left(P_{exc} + P_f\right) dt}$

Soit en moyenne : $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \langle P_{exc} \rangle + \langle P_f \rangle$

or $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} \frac{dE}{dt}\,dt = \frac{1}{T'}\left(E(T') - E(0)\right) = 0$,

et donc $\boxed{\langle P_{exc} \rangle = -\langle P_f \rangle}$

Champ de gravitation

7. Deux masses *ponctuelles* m_1 et m_2 interagissent par une force gravitationnelle (loi de Newton). La force exercée par m_1 sur m_2 est :

$$\vec{f}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

où r est la distance entre les deux points et $\vec{u}_{12}$ un vecteur unitaire dirigé de m_1 vers m_2. La constante G vaut $6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} (ou encore en kg^{-1}.m^3.s^{-1}).

Le champ gravitationnel créé par m_1, placée au centre d'un système de coordonnées sphériques, au point où se trouve m_2 est

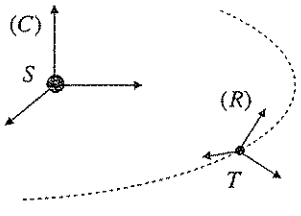
$$\boxed{\vec{A} = -G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_r}$$

À proximité d'un astre, le considérer comme une masse ponctuelle n'a évidemment aucun sens, la loi de Newton ne s'applique pas. Il existe cependant un résultat simple (admis ici), concernant un modèle d'astre sphérique et plus précisément à répartition de masse à symétrie sphérique (c'est-à-dire que sa masse volumique

$\rho = \rho(r)$ est indépendante de θ et φ). Dans ce cas, le champ gravitationnel créé par l'astre en un point extérieur est *le même* que celui qui serait créé par une masse ponctuelle (de même masse que l'astre) et placée au centre du modèle sphérique.
Par exemple le champ créé par un modèle sphérique de Terre (de masse M_T) à répartition sphérique de masse en un point extérieur est :

$$\boxed{\vec{A} = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r}$$

8. Le référentiel de Copernic (C) a pour origine le centre de masse S du système solaire (soit pratiquement le centre du Soleil ce qui le rend très proche du référentiel de Kepler) et possède trois axes fixes dans des directions d'étoiles lointaines ; il est considéré comme galiléen.



Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et ses axes sont parallèles à ceux de (C) ; il n'est pas tout à fait galiléen car le centre de la Terre n'a pas un mouvement rectiligne uniforme.
Le référentiel terrestre (R) est rigidement attaché à la Terre (il tourne avec elle) ; il n'est qu'approximativement galiléen.
Le mouvement de (R) par rapport à (C) est composé :
- d'une translation circulaire (ou presque) décrivant la révolution de la Terre autour du Soleil,
- d'une rotation décrivant la rotation de la Terre sur elle-même autour de l'axe des pôles.

9. Au niveau du sol : $r = R_T$ et $A_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9,8\ \text{m.s}^{-2}$, on trouve une valeur très voisine du champ de pesanteur car le champ de gravitation terrestre est la principale composante du champ de pesanteur,

soit $\boxed{g_0 R_T^2 = G M_T}$

Confondre champ de pesanteur et champ de gravitation revient en fait à considérer le référentiel terrestre comme galiléen.
La force de gravitation, toujours avec le modèle sphérique, est un champ de force, elle dérive d'une énergie potentielle car :

$$\delta W = -\frac{GM_Tm}{r^2}\vec{u}_r.d\left(\overrightarrow{OM}\right) = -\frac{GM_Tm}{r^2}dr\,,$$

$$dE_p = +\frac{GM_Tm}{r^2}dr \quad \Rightarrow \quad E_p = -\frac{GM_Tm}{r} + \text{cste}\,,$$

on choisit $E_p = 0$ pour $r \to \infty$:

$$\boxed{E_p = -\frac{GM_Tm}{r}}$$

La vitesse de libération correspond à la vitesse avec laquelle il faut lancer, dans le référentiel *géocentrique*, le point de masse m pour qu'il échappe à l'attraction terrestre. Ce problème se traite avec l'énergie.

Système conservatif : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r} = E = \text{cste}$; pour avoir $r \to \infty$ il faut :

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \geq 0 \text{. La condition de libération est : } \boxed{E \geq 0}$$

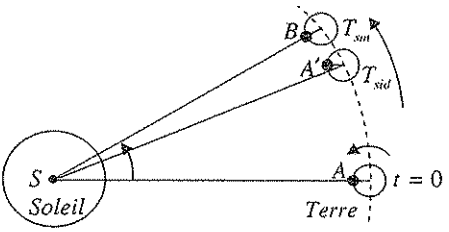
À partir d'un point de lancement proche de la Terre : $r \approx R_T$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} \geq 0 \Rightarrow \boxed{v \geq v_{lib} = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0R_T}}$$

AN : Pour la Terre : $\underline{v_{lib} = 11{,}2 \text{ km.s}^{-1}}$; pour la Lune, $g_{0L} = 1{,}6 \text{ m.s}^{-2}$ et $R_L = 1{,}75.10^6$ m, ce qui donne $v_{lib} = 2{,}4 \text{ km.s}^{-1}$. Ces valeurs sont à comparer aux vitesses des molécules d'un gaz à température ordinaire, de l'ordre de 0,5 à 1 km.s^{-1}. La Lune n'a pas pu garder une atmosphère, l'évasion pour l'atmosphère terrestre est moindre et il y a un renouvellement par l'activité volcanique.

10. (R) décrit un tour complet sur lui-même lorsque A passe en A' : ceci définit le jour sidéral de durée $\underline{T_{sid} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}}$ et qui donne la vitesse de rotation $\vec{\omega}_{(R)/(C)}$ notée ici $\vec{\Omega}$ avec

$$\underline{\Omega = \frac{2\pi}{T_{sid}} = 7{,}3.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}}.$$



Et donc, à cause de la translation circulaire de vitesse angulaire ω, il n'est pas encore tout à fait midi dans la situation A'. Le jour solaire moyen de durée $\underline{T_{sm} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}}$ s'écoule lorsque A passe en B, c'est-à-dire entre deux passages successifs du Soleil au méridien.

En effet l'angle supplémentaire de rotation, sur un jour solaire, se retrouve au centre : c'est $\widehat{ASB}$ et au bout d'un an la somme des angles de type $\widehat{ASB}$ vaut 2π, donc en 365,25 jours solaires la Terre a effectué 366,25 tours sur elle-même :

$$T_{sid} = T_{sm}\frac{365,25}{366,25} \text{. AN : } T_{sm} = 86\,400 \text{ s} \Rightarrow \underline{T_{sid} = 86\,164 \text{ s}}.$$

La différence de 3 min 56 s par jour cumulée sur une année redonne...un jour entier ; c'est ce décalage du ciel qu'observe l'astronome d'une nuit au lendemain (points opposés à A et B).

Autre méthode : soit (R') le référentiel d'origine S et tournant par rapport à (C) de telle manière que ST soit l'un de ses axes ; sa période de rotation est l'année $A = 365{,}25\, T_{sm}$. Alors, par addition des vitesses angulaires :

$\vec{\omega}_{(R)/(C)} = \vec{\omega}_{(R)/(R')} + \vec{\omega}_{(R')/(C)}$, et en supposant les vecteurs parallèles et de même sens :

$$\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{T_{sm}} + \frac{1}{A} \quad \text{soit} \quad \boxed{T_{sid} = \frac{T_{sm}}{1 + T_{sm}/A}}$$

Cette formule qui montre bien que l'écart entre le jour sidéral et le jour solaire moyen réside dans le rapport $T_{sm}/A = 1/365{,}25$, soit un jour dans l'année.

Forces centrales conservatives

11. Par définition du centre de masse :

$M\,\overrightarrow{GM_1} + m\,\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{GM_2} \approx \vec{0}$ si $m \ll M$, l'astre de masse M reste quasiment immobile en G. C'est le cas pour l'interaction entre le Soleil et une planète ou entre la Terre et un satellite artificiel.

12. Interaction gravitationnelle : $\vec{f}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$ devient $\vec{f} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$, en plaçant $M \gg m$, au centre d'un système de coordonnées sphériques.

Interaction électrostatique : $\vec{f}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{12}$ devient $\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

Les deux forces sont newtoniennes, elles varient en $1/r^2$, la force gravitationnelle est toujours attractive alors que la force électrostatique peut être attractive ($q_1 q_2 < 0$) ou répulsive ($q_1 q_2 > 0$).

13. Le théorème du moment cinétique appliqué en O au point M de masse m s'écrit dans (R) :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{O(R)}}{dt}\right)_{(R)} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = r\vec{u}_r \wedge f(r)\vec{u}_r = \vec{0}$$

puisque la force est colinéaire au rayon vecteur.

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O(R)} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{(R)}$ est donc une constante du mouvement, c'est-à-dire qu'au cours du temps, il garde une direction fixe et une norme constante. Or $\vec{\sigma}_{O(R)}$ est orthogonal au vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ qui ne peut donc qu'appartenir à un plan passant par O ; on en déduit que la trajectoire est ici plane, dans le plan contenant O et $\vec{v}_0$ (et même rectiligne si $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\vec{v}(M)_{(R)}$).

Il est alors plus commode de travailler en coordonnées cylindriques $(r, \theta, z = 0)$ avec $\vec{u}_z$ dirigé suivant $\vec{\sigma}_{O(R)}$, ce qui revient à prendre la trajectoire dans le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

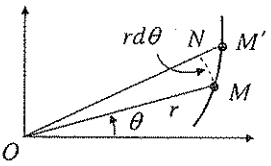
14. Alors le moment cinétique vaut $\vec{\sigma}_{O(R)} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_{O(R)} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z}$

Reste à exploiter que sa norme est constante, ce qui conduit à l'expression de la constante des aires :

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$$

alors que de manière générale $r(t)$ et $\theta(t)$ sont des fonctions du temps. À noter que $\dot{\theta}$ est de signe constant : M tourne toujours dans le même sens autour de O. On choisit alors évidemment $\dot{\theta} \geq 0$.

Pendant l'intervalle de temps dt, le point M se déplace en M' : r s'accroît de dr et le rayon vecteur balaye un secteur d'angle $d\theta$. L'aire balayée OMM' est à un terme du second ordre près égale à celle du triangle OMM' (en confondant l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ et la corde MM'). D'après l'interprétation géométrique du produit vectoriel :



$\delta S \approx \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}dt\right\|$, donc dS étant la valeur approchée au premier ordre de δS :

$$dS = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}dt\right\| = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{m}dt = \frac{1}{2}C\,dt$$

Il apparaît donc que la surface balayée par unité de temps par le rayon vecteur est :

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}}$$

Elle est constante au cours du temps (loi des aires) et appelée vitesse aréolaire.
C est appelée constante des aires. On a évidemment :

$$\boxed{C = \frac{\sigma}{m}}$$

Quelques conséquences (pour un mouvement non rectiligne) : plus le mobile M s'approche de O, plus sa vitesse angulaire augmente ; si θ tend vers une valeur fixée, alors la trajectoire présente une direction asymptotique ($\dot{\theta} \to 0 \Leftrightarrow r \to \infty$).
Un mouvement circulaire peut être à accélération centrale s'il est uniforme.

Il est possible de retrouver la constante C à partir de l'accélération : pour un mouvement à accélération centrale, l'accélération orthoradiale est nulle :

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \;;\; a_\theta = 0 \Rightarrow \underline{r^2\dot{\theta} = C}\text{, constante des aires.}$$

15. La force centrale conservative $\vec{f} = f(r)\,\vec{u}_r$ dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ (c'est l'énergie potentielle d'interaction) donnée par $f(r) = -\frac{dE_p}{dr}$.

interaction gravitationnelle : $\vec{f} = -G\dfrac{mM}{r^2}\vec{u}_r$ et $E_p = -\dfrac{GMm}{r}$

interaction électrostatique : $\vec{f} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ et $E_p = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Dans les deux cas on a choisit $E_p = 0$ pour $r \to \infty$

Le système est conservatif $E = E_C + E_p$ et comme le mouvement est plan :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = cste}$$

Rappelons que l'intérêt de « l'intégrale première » du mouvement est de ne plus faire intervenir que des dérivées premières (et non plus secondes) de r et θ.

Mouvements dans un champ gravitationnel

16. La méthode suivante s'applique à toute force centrale conservative puisqu'elle traduit simultanément les deux constantes du mouvement (énergie mécanique et moment cinétique).

L'énergie mécanique du système conservatif est (question **15.**) :

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r)$$

La loi des aires $C = r^2\dot{\theta}$ ou $\sigma = mr^2\dot{\theta}$ permet d'y éliminer $\dot{\theta}$:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2mr^2} + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

Cette relation définit une énergie potentielle effective :

$$\boxed{V_{eff}(r) = E_p(r) + \frac{\sigma^2}{2mr^2}}$$

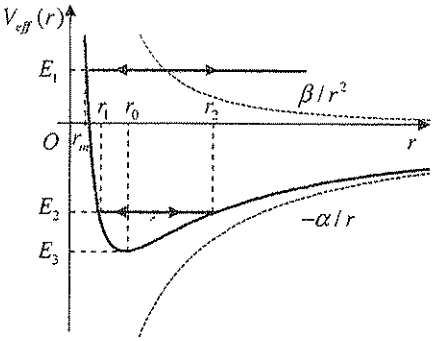
limitant le problème à l'étude du mouvement radial. Il s'agit d'une nouvelle réduction, le problème se ramène à un problème à un paramètre. On conduit une étude énergétique classique comme à la question **28.** du chapitre **6.**

Cas particulier des forces gravitationnelles où $E_p(r) = -\dfrac{GmM}{r}$;

l'énergie potentielle effective devient : $\boxed{V_{eff}(r) = -\dfrac{GmM}{r} + \dfrac{\sigma^2}{2mr^2}}$

Le graphe de $V_{eff}(r)$ est donné ci-dessous : on y distingue une compétition entre le terme gravitationnel attractif (en $-\alpha/r$, cuvette de potentiel) et le terme répulsif (en $+\beta/r^2$, barrière de potentiel).

E est l'énergie du point M (indépendante de r), donc représentée par une droite parallèle à l'axe Or sur la figure ci-dessous ; son intersection avec la courbe V_{eff}, donne d'après $E = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$, $\dot{r} = 0$ (la vitesse de M est alors orthoradiale).



On distingue ainsi :

- les états de diffusion ($E \geq 0$) : le point M peut s'approcher de O jusqu'à une distance minimale r_m comme indiqué sur la figure pour $E = E_1 > 0$, puis repartir à l'infini avec $v_\infty \neq 0$ (la trajectoire correspondante, non établie ici, est une hyperbole).
  De même dans le cas limite $E = 0$ avec $v_\infty = 0$, c'est la plus petite énergie pour la libération (la trajectoire est une parabole).
- les états liés ($E < 0$) : le point M reste à distance finie de O ; dans le cas $E = E_2 < 0$, la trajectoire est comprise entre deux cercles, r oscille entre une distance minimale r_1 et une distance maximale r_2. La trajectoire correspondante, non établie ici, est une ellipse dont O est un foyer, r_1 correspond au périgée et r_2 à l'apogée. On remarque que pour les valeurs r_1 et r_2 de r : $V_{eff} = E$ donc $\dot{r} = 0$ et la vitesse est orthoradiale.
  Dans le cas particulier $E = E_3 < 0$, une seule valeur de r est permise, la trajectoire est circulaire de rayon r_0.

17. L'accélération dans le référentiel (R) galiléen pour un mouvement circulaire est, en projection sur la base polaire, avec le pôle au centre du cercle :

$$\vec{a}(M)_{(R)} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$$

La projection de la RFD $m\vec{a}(M)_{(R)} = f(r)\vec{u}_r$ sur la base locale donne :

$$-m\frac{v^2}{r_0} = -G\frac{mM}{r_0^2} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad (2)$$

La relation (2) indique que la vitesse (en norme) doit être constante au cours du temps, le mouvement du corps est un mouvement circulaire uniforme, conformément à la loi des aires. La relation (1) impose la valeur de v :

$$(1) \Rightarrow \boxed{v(r_0) = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$$

L'énergie est $E = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{r}$, et pour un mouvement circulaire :

$$E = \frac{GMm}{2r_0} - \frac{GMm}{r_0} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{GMm}{2r_0}}$$

18. D'après la question **16.** : $E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$, les solutions de $\dot{r} = 0$ vérifient donc : $E - \frac{\sigma^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow \boxed{r^2 + \frac{GMm}{E} r - \frac{\sigma^2}{2mE} = 0}$

Attention ici $E < 0$, l'équation admet deux solutions positives dont la somme est $r_{min} + r_{max} = -\frac{GMm}{E}$, or en admettant que la trajectoire soit une ellipse :

$$r_{min} + r_{max} = 2a \Rightarrow \boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$$

on retrouve l'expression obtenue pour la trajectoire circulaire, en remplaçant r_0 par le demi-grand axe a.

Applications aux planètes et satellites

19. On reprend les calculs de question **17.**

a) La vitesse dans le référentiel géocentrique (R) galiléen pour un mouvement circulaire est :

$$v(r_0) = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$

La vitesse est constante donc la période est $T = \frac{2\pi r_0}{v}$, soit en remplaçant v :

$$\boxed{T(r_0) = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{GM_T}}}$$

Ce résultat important est plus souvent donné sous la forme $\boxed{\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$, qui n'est autre que la 3e loi de Kepler (rapport indépendant de m).

Plus un satellite est en orbite basse, plus il va vite et moins il met de temps pour faire un tour. Pour un satellite en orbite basse, on prend $r_0 \approx R_T$, car l'altitude z est de l'ordre de 300 à 400 km, très petite devant R_T :

alors $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T} = 7{,}9 \text{ km.s}^{-1}$ et $T = 5\,050 \text{ s} \approx 1\text{h } 24\text{min}$.

Ces ordres de grandeur sont à retenir, la vitesse en orbite basse, 8 km.s^{-1} (28 500 km.h^{-1}) est à comparer avec la vitesse de libération (à partir

d'une orbite basse) : $11,2\ \text{km.s}^{-1}$, elle est bien inférieure. On peut aussi la comparer à la vitesse moyenne des molécules de l'atmosphère de l'ordre de $1\ \text{km.s}^{-1}$.

La période (1 h 30 min) est assez petite devant la période de rotation de la Terre, c'est donc aussi l'ordre de grandeur de la période observable dans le référentiel terrestre. Cela est facilement visible, la nuit, lorsque les panneaux solaires d'un satellite renvoient la lumière et le rendent visible quelques instants, permettant ainsi d'apprécier sa grande vitesse de déplacement.

b) Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste au méridien d'un même lieu (ce qui est utile pour les transmissions hertziennes) et semble donc immobile pour un observateur terrestre. Dans le référentiel géocentrique, sa trajectoire plane et dont la période correspond à celle de la rotation de la Terre, c'est-à-dire un jour sidéral, ne peut donc être contenue que dans le plan équatorial, car le plan de la trajectoire contient le centre du modèle Terre sphérique.
D'après ce qui précède :

$$r_0 = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42\,000\ \text{km} \quad \text{soit une altitude} \quad \underline{h = r_0 - R_T \approx 36\,000\ \text{km}}$$

Cette altitude élevée rend plus difficile la mise en orbite des satellites géostationnaires, il faut plus d'énergie, mais permet le positionnement d'un grand nombre de satellites sans problème d'encombrement d'orbite.

20. Bien penser que l'on travaille dans le référentiel géocentrique.

En orbite, l'énergie du satellite est $E = -\dfrac{GM_T m}{2a}$

Au sol ce même satellite a l'énergie potentielle $-\dfrac{GM_T m}{R_T}$ et l'énergie cinétique due au mouvement de la Terre, soit à la latitude λ : $\dfrac{1}{2} m R_T^2 \cos^2(\lambda)\, \Omega^2$

L'énergie minimale à lui communiquer est donc :

$$GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2a}\right) - \frac{1}{2} m R_T^2 \cos^2(\lambda)\, \Omega^2$$

Ce qui montre l'intérêt d'une base de lancement proche de l'équateur (voir la question **36.**).

À partir du sol la vitesse du satellite ne peut être orthoradiale, le point de lancement n'est donc pas le périgée, celui-ci étant plus proche du centre O (foyer de l'ellipse), il se trouve donc à l'intérieur de la Terre. La satellisation échouera, même si la condition énergétique est satisfaite, car la trajectoire recoupe la sphère terrestre.

21. $C = r^2\dot{\theta} = r(r\dot{\theta})$, or en P et A, la vitesse est orthoradiale donc :

$$\boxed{C = r_P v_P = r_A v_A}$$

Se servir de la conservation de l'énergie : $E = \dfrac{1}{2} m v^2 - \dfrac{GM\,m}{r} = -\dfrac{GM\,m}{2a}$ soit

$$\boxed{v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}$$

Alors $v_{max} = v_P$ pour $r = r_P$ et $2a = r_A + r_P$; $v_{min} = v_A$ pour $r = r_A$ et $2a = r_A + r_P$.

22. Képler (1571-1630) établit, à partir d'observations et de mesures expérimentales, faites auparavant par Tycho Brahé (1546-1601) sur plusieurs années, les lois des mouvements des planètes autour du Soleil. Ce sont ces lois empiriques, publiés en 1621, qui permettront à Newton d'établir, plus tard, la loi de la gravitation. Newton est né en 1642 et énonce le principe fondamental de la dynamique et la loi de la gravitation en 1687.

Loi 1 : Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le centre du Soleil est un foyer.

Loi 2 : loi des aires, le rayon joignant une planète au Soleil balaie des aires égales pendant des durées égales.

Loi 3 : $\frac{a^3}{T^2}$ = cste , c'est-à-dire indépendant de la planète.

Les deux premières lois se justifient, à partir des lois de Newton, par le fait que la force est centrale et en $\frac{1}{r^2}$. Établissons la troisième dans le cas particulier du mouvement circulaire. Ici le centre attracteur en O est la masse du Soleil M_S :

$$v(r_0) = \sqrt{\frac{GM_S}{r_0}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{GM_S}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}}$$

Pour un mouvement elliptique on remplace r_0 par le demi-grand axe a :

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}}$$

Si on change de planète a et T changent, mais $\frac{a^3}{T^2}$ reste constant, c'est la troisième loi de Képler.

Application : avec a et T pour la Terre (en orbite autour du Soleil) on peut mesurer la masse du Soleil.

$$M_S = \frac{4\pi^2 a_T^3}{GT_T^2} = \frac{4\pi^2(1{,}5.10^{11})^3}{6{,}67.10^{-11}(365{,}25\times 24\times 3600)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_S = 2{,}0.10^{30}\ \text{kg}}$$

Masse très grande, nécessaire pour atteindre, au cœur, la température de fusion nucléaire. La masse d'un astre est mesurable s'il possède un satellite (une planète pour une étoile). Pour les étoiles autres que le Soleil, on ne peut pas voir directement une planète à proximité, on utilise les systèmes stellaires doubles.

Applications directes du cours

23. L'équation différentielle $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$ avec $\Delta=4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)$ et le type de solution restent les mêmes, seules changent les conditions initiales.

* le régime apériodique, $\Delta>0$, correspond à un fort amortissement, $Q<\frac{1}{2}$:

$x(t)=Ae^{-\gamma t}+Be^{-\beta t}$ avec $\gamma>0$ et $\beta>0$; la solution est une somme de deux exponentielles décroissantes et la traduction des conditions initiales conduit à :

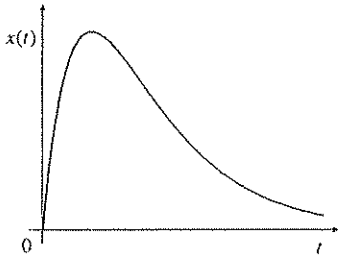
$$x(t)=\frac{v_0}{\beta-\gamma}(e^{-\gamma t}-e^{-\beta t})$$ (graphe de gauche).

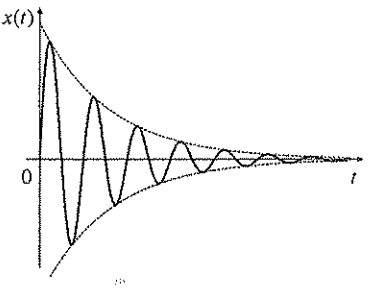
* le régime apériodique critique, $\Delta=0$ soit $Q=\frac{1}{2}$, donne :

$x(t)=(A+Bt)e^{-\omega_0 t}$ et la traduction des conditions initiales conduit à $x(t)=v_0 t e^{-\omega_0 t}$.

* le régime pseudopériodique, $\Delta<0$, correspond à un faible amortissement $Q>\frac{1}{2}$:

la solution s'écrit : $x(t)=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ et la traduction des conditions initiales conduit à $x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ (graphe de droite).





24. On note $\vec{u}_{1\to2}$, le vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 ; la force gravitationnelle qu'exerce M_1 sur M_2 est $\vec{F}_{1\to2}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$ où r est la distance M_1M_2.

Notons que la droite d'action de la force passe par les deux points.

Et comme $\vec{u}_{2\to1}=-\vec{u}_{1\to2}$, on a immédiatement $\vec{F}_{2\to1}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}_{2\to1}=-\vec{F}_{1\to2}$, ce qui traduit le principe de l'action et de la réaction.

25. L'accélération de la pesanteur g_L sur la Lune conditionne le temps de chute :

$$h = \frac{1}{2} g_L \tau^2 \Rightarrow \underline{g_L = 1{,}6 \text{ m.s}^{-2}} \quad \left(g_L \approx \frac{g_T}{6}, \text{ sur Terre, } \tau_T = 0{,}45 \text{ s}\right)$$

Or $g_L \approx \frac{GM_L}{R_L^2}$ ce qui donne $\underline{M_L = 7{,}4.10^{22} \text{ kg}}$ (soit $M_L \approx M_T / 81$)

26. Le moment cinétique fixe le plan de la trajectoire et la vitesse aréolaire (loi des aires) et l'énergie mécanique fixe par son signe la nature de la conique, ellipse ($E < 0$), parabole ($E = 0$) ou hyperbole ($E > 0$). Pour l'ellipse E fixe la valeur du demi grand axe a.

27. a) On utilise la troisième loi de Képler appliquée à Téthys :

$$\frac{a_{Th}^3}{T_{Th}^2} = \frac{GM_{Sat}}{4\pi^2} \Rightarrow M_{Sat} = \frac{4\pi^2 R_{Th}^3}{GT_{Th}^2} \quad \text{A.N. : } \underline{M_{Sat} = 5{,}7.10^{26} \text{ kg}}$$

Soit une masse de l'ordre de 3.10^{-4} masse solaire, on a accès à la masse de Saturne grâce à un de ses satellites.

$$\frac{a_{Th}^3}{T_{Th}^2} = \frac{GM_{Sat}}{4\pi^2} = \frac{a_H^3}{T_H^2} \Rightarrow T_H = T_{Th}\left(\frac{a_H}{a_{Th}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{A.N. : } \underline{T_H = 1{,}9.10^6 \text{ s} = 21 \text{ jours}}$$

b) Si l'anneau est formé de fragments indépendants en orbite circulaire, la vitesse des fragments est : $v = \sqrt{\frac{GM_{sat}}{r}}$.

Si l'anneau est un corps solide, la vitesse de chaque point est du type $v = r\omega$, soit v proportionnelle à r.

L'observation montre v est une fonction décroissante de r, les anneaux sont des fragments indépendants (sans doute les restes d'un ancien satellite de Saturne, trop proche de sa planète et brisé par les forces de marées, voir la question **42.**).

28. a) $2c = 2ae = 0{,}50$ U.A

b) $r_A = a + c = a(1 + e) = 5{,}4$ U.A.

c) $r_{P(Pluton)} = a(1 - e) = 29{,}6$ U.A. $< a_{Neptune}$

d) Avec les données pour Titan : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_{Sat}}{4\pi^2}$, on exprime la constante G grâce au mouvement de la Terre autour du Soleil : $\frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{GM_{sol}}{4\pi^2}$ ce qui permet de garder les distances en U.A. et les périodes en années :

$$\frac{M_{Sat}}{M_{sol}} = \left(\frac{a}{a_T}\right)^3 \left(\frac{T_T}{T}\right)^2 = 2{,}8.10^{-4}$$

Seconde planète en masse, après Jupiter ($10^{-3}\ M_{sol}$).

e) $\frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{a_V^3}{T_V^2} \Rightarrow T_V = T_T\left(\frac{a_V}{a_T}\right)^{3/2} = (0{,}72)^{3/2} = 0{,}61$ an, Vénus est une planète intérieure qui va plus vite que la Terre sur son orbite.

f) $C = r_A v_A = r_P v_P$ et avec l'énergie : $v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$

$$\begin{cases} v_A^2 = \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right) = 2GM_S\left(\frac{r_P}{r_A\, 2a}\right) \\ v_P^2 = \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{2a}\right) = 2GM_S\left(\frac{r_A}{r_P\, 2a}\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad GM_S = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

$$\text{De plus } \begin{cases} r_A = a(1+e) \\ r_P = a(1-e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{2\pi a}{T}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{1/2} = 22{,}0 \text{ km.s}^{-1} \\ v_P = \frac{2\pi a}{T}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} = 26{,}5 \text{ km.s}^{-1} \end{cases}$$

On a bien $v_A < v_P$ (loi des aires) et les deux vitesses sont légèrement inférieures aux 30 km.s^{-1} de la Terre.

g) $a = a_T\left(\frac{T}{T_T}\right)^{2/3} = 18$ U.A. et $e = 1 - \frac{r_P}{a} = 0{,}97$

Ellipse très aplatie et pourtant la comète fait demi-tour avant d'atteindre l'orbite d'Uranus. Noter que la période de la comète de Halley n'est pas restée constante au cours des âges, elle a varié en fonction de ses passages plus ou moins rapprochés des planètes géantes.

29. Le pendule de Cavendish : mesure de G (1798)

a) La loi du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe appliqué à la tige et aux masses s'écrit sachant que le moment d'inertie d'une masse m à distance l de l'axe est ml^2 et que le moment des poids et de la tension du fil par rapport à l'axe sont nuls :

$$2ml^2\ddot{\theta} = -C\theta \text{, équation du type } \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

d'où des oscillations sinusoïdales de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{2ml^2}}}$ (1)

Rq : La période très grande ($T_0 = 251$ s) est liée à une très faible constante de torsion C. En pratique la mesure de T_0 donne C.

b) Limitons-nous aux seules interactions gravitationnelles $S_2 - B$ et $S_1 - A$ (bras de levier l) : à l'équilibre $2\frac{GmM}{l^2}l - C\theta = 0$

soit d'après (1) : $\boxed{G = \frac{\theta\omega_0^2 l^3}{M}}$ (2)

AN : $\underline{G = 6{,}9.10^{-11} \text{ N.m}^2\text{.kg}^{-2}}$, ce qui est une très bonne valeur.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

30. Notons d'abord que dans tous les cas le régime d'écoulement est amorti par existence de forces de viscosité entre le fluide réel et la paroi interne du conduit.
Si le diamètre d du conduit est faible et / ou le fluide très visqueux, cet effet est particulièrement important (amortissement fort) et le régime est apériodique : les deux niveaux s'égalisent lentement et le phénomène s'arrête là.
Si le diamètre d du conduit est important et / ou le fluide peu visqueux, cet effet sera bien moindre (amortissement faible) et le régime est pseudopériodique : les deux niveaux s'égalisent après plusieurs oscillations (échange d'énergie cinétique et potentielle de gravité).

31. La corde vibrante, celle d'un piano ou d'un violon par exemple, un peu comme la membrane d'un haut-parleur, transmet ses vibrations à l'air ; il en résulte un son émis dont l'énergie acoustique est prélevée sur l'énergie mécanique (cinétique et potentielle) de la corde ; son mouvement (et corrélativement le son émis) est donc amorti en régime libre (c'est-à-dire non entretenu).

32. a) L'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ (écart par rapport à la position d'équilibre $z_{éq} = 0$) a été établie avec soin à la question **47.** du chapitre **6**, le coefficient de frottement est ici noté α :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\frac{dz}{dt} + kz = 0$$

Le régime d'amortissement est critique (retour le plus rapide à l'équilibre) lorsque $\Delta = \alpha^2 - 4km = 0$ soit $\alpha = 2\sqrt{km}$.

b) Le système, voiture avec passagers, de masse totale $m + m_p$, possède une nouvelle position d'équilibre $z'_{éq} \neq 0$. L'équation différentielle précédente devient :

$$(m+m_p)\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\frac{dz}{dt} + k(z - z'_{éq}) = 0$$

Son discriminant est $\Delta = \alpha^2 - 4k(m+m_p) = -4km_p < 0$ avec $\alpha = 2\sqrt{km}$; le régime est alors pseudopériodique (revoir la question **2.**) :

de pseudopulsation $\omega = \dfrac{\sqrt{km_p}}{m+m_p}$ et de pseudopériode $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi(m+m_p)}{\sqrt{km_p}}$

On en déduit $k = \dfrac{4\pi^2(m+m_p)^2}{m_p T^2} = 426 \text{ kN.m}^{-1}$, soit une grande raideur.

33. Le moteur constitue pour le support un excitateur dont la fréquence diminue progressivement après coupure de l'alimentation. Cela signifie que le support auquel il est couplé par fixation, est mis en régime forcé à fréquence variable ; comme tout objet mécanique ce support a une (ou des) fréquence(s) propre(s) de vibration, et l'on observe alors un phénomène de résonance lorsque la fréquence du moteur

coïncide avec la fréquence propre du support, d'où des vibrations importantes dans la bande passante (voir la question **40.**).

34. Lorsque les œufs mélangés sont au repos dans un bol, on constate (par exemple en appuyant avec une fourchette sur la surface libre d'un coté) que le mélange oscille à une fréquence propre bien définie, même si ces oscillations sont de courte durée car très amorties. Battre les œufs consiste donc à exciter périodiquement à une fréquence imposée par l'opérateur (à travers le coup de fourchette) un système ayant une fréquence d'oscillation propre. Il y a bien sûr résonance avec une amplitude plus importante lorsque les deux fréquences coïncident. Pour éviter les risques de débordement, il vaut mieux battre « très vite », à savoir à fréquence élevée, même si la viscosité fait que ce système amorti n'a pas une résonance des plus prononcées...

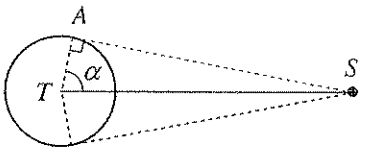
35. L'axe de référence est l'intersection entre le plan de l'écliptique et le plan équatorial. Deux fois par an le Soleil traverse (dans son mouvement apparent) le plan équatorial, il s'agit des équinoxes de printemps et d'automne. C'est l'équinoxe de printemps qui a été choisie comme référence pour les angles, on l'appelle point vernal ou point γ.

Les dates de début des saisons correspondent à la « hauteur » du Soleil au-dessus ou en dessous du plan équatorial : 0° aux équinoxes, maximale($+23°27'$) au solstice d'été et minimale ($-23°27'$) au solstice d'hiver. Cet angle de $23°27'$ est l'angle d'inclinaison de l'axe des pôles par rapport à la perpendiculaire au plan de l'écliptique.

36. Pour pouvoir bénéficier de l'effet d'entraînement de la Terre lié à sa rotation propre, effet proportionnel à la distance à l'axe de rotation, donc maximal à l'équateur où $v = 2\pi R_T / T \approx 1670$ km/h . Au sol le satellite dispose déjà d'énergie cinétique dans le référentiel géocentrique. Le site européen de Kourou en Guyane française est le mieux placé de ce point de vue avec une latitude de 5°. L'économie en carburant est estimée à 5% par rapport aux bases plus hautes en latitude comme Cap Canaveral en Floride (28°) et surtout Baïkonour (46°) ou Plesetsk (63°).

La Terre tourne d'Ouest en Est autour de son axe, la plupart des satellites tournent donc dans ce sens autour de la Terre pour bénéficier de la rotation de la Terre au lancement (vers l'Est). Quelques satellites, qualifiés de rétrogrades, tournent en sens inverse, en général sur des orbites très inclinées.

37. T est le centre de la Terre, A un point de sa surface (avec $TA \approx 6\,400$ km) à la limite du champ couvert par le satellite géostationnaire S ($TS \approx 6\,400 + 36\,000 = 42\,400$ km).



Le triangle ATS étant rectangle en A, $\cos\alpha = \dfrac{TA}{TS}$ soit $\alpha = 81°$.

Un satellite géostationnaire couvre un secteur d'angle $2\alpha = 162°$. Pour couvrir la surface entière (360°), il faut disposer d'un minimum de trois satellites géostationnaires. Le même calcul montre que les latitudes extrêmes théoriques

accessibles au satellite sont $\pm 81°$. Les contraintes techniques des télécommunications diminuent nettement ces valeurs. La Russie par exemple a une grande partie de son territoire non accessible aux satellites géostationnaires.
Noter que le système GPS fonctionne avec 24 satellites (la triangulation nécessaire pour la précision nécessite plusieurs satellites pour un même point) d'altitude $\approx 21\,000$ km, donc non géostationnaires.

38. Admettons que la mécanique classique s'applique. Il faut alors traduire que la vitesse de libération obtenue à la question **9.**, $v_l = \sqrt{2GM/R}$, s'identifie à la vitesse de la lumière pour une étoile de masse $M = M_S = 2.10^{30}$ kg ; son rayon est alors $R_{lim} = 2GM_S/c^2 \approx 3$ km…
Le même calcul appliqué à la Terre donne un rayon d'environ 9 mm ! Ce qui donne une idée de la densité théorique d'un trou noir : 6.10^{24} kg dans une sphère de 9 mm de rayon !

Exercices

39. Oscillations forcées sur un cercle en rotation

a) Le référentiel terrestre galiléen est lié aux axes Ox et Oz. L'angle θ repère la position de M par rapport à Oz, donc $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. La force de frottement fluide fait intervenir la vitesse du point par rapport au cercle, il faut utiliser l'angle formé par OM avec OA, $\vec{F} = -\mu R\left(\dot{\theta} - \dot{\psi}\right)\vec{u}_\theta$.

La réaction normale est orthogonale à $\vec{u}_\theta$.

Projection de la RFD sur $\vec{u}_\theta$: $-mg\sin\theta - \mu R\left(\dot{\theta} - \dot{\psi}\right) + 0 = mR\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mu}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = \frac{\mu}{m}\dot{\psi}}$$

b) Pour θ petit, soit $\sin\theta \approx \theta$, l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{\mu}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = \frac{\mu}{m}\dot{\psi}$ est linéaire du second ordre avec second membre du type $\frac{\mu}{m}\psi_0\Omega\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)$; au bout d'un temps suffisant le régime forcé sinusoïdal est atteint et $\theta(t)$ est alors sinusoïdal de pulsation Ω.

c) Le régime forcé se calcule avec les complexes (voir le chapitre **0**) :

$$\theta_1 e^{j\Phi}\left(-\Omega^2 + 2\alpha j\Omega + \omega_0^2\right) = 2\alpha\psi_0\Omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\theta_1 = \frac{2\alpha\psi_0\Omega}{\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\Omega^2\right)^{1/2}}} \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{\pi}{2} - \arg\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\alpha j\Omega\right)$$

Si $\Omega \leq \omega_0$, $\Phi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$ soit $\Phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Si $\Omega \geq \omega_0$, $\Phi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) - \pi$ soit $\Phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

d)Pour $\Omega < \omega_0$, $\Phi > 0$, il est surprenant *a priori* qu'un oscillateur mécanique (passe-bas) soit en avance sur l'excitation, mais en fait ici l'excitation n'est pas $\psi(t)$ mais $\dot{\psi}(t)$ lui-même en avance de $\pi/2$ sur $\psi(t)$; finalement l'oscillateur est bien en retard sur $\dot{\psi}(t)$ l'excitateur.

40. Vibrations d'un moteur

a) Ce travail a été fait à la question **47.** du chapitre **6**, ici $l_{eq} < l_0$; l'équation différentielle est, en notant $z(t)$ l'écart par rapport à la position d'équilibre où le moteur ne fonctionne pas :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dz}{dt} + kz = F_0 \cos\omega t$$

soit $\boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$ (1) avec $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

b) En régime forcé de pulsation ω imposée par le moteur, l'ensemble de la structure vibre à la même pulsation ω. Pour résoudre cette question, il est conseillé de passer en notation complexe et de chercher $\underline{v} = V_0 e^{i\varphi}$ et comme $v = \frac{dz}{dt}$, $\underline{v} = i\omega\underline{z}$.

(1) s'écrit alors :

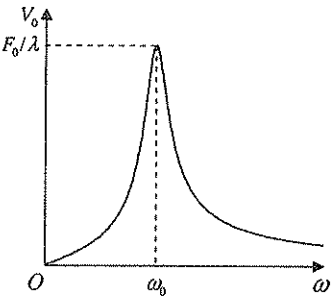
$$(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}i\omega + \omega_0^2)\underline{z} = F_0/m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{v} = V_0 e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0/Q + i(\omega - \omega_0^2/\omega)}} \quad (2)$$

Rq : On reconnaît un filtre passe-bande du second ordre.

L'expression (2) donne :

$$\boxed{V_0(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + (\omega - \omega_0^2/\omega)^2}}}$$

Seul le dénominateur dépend de ω et il est minimal lorsque l'expression dans la parenthèse est nulle, soit pour $\omega = \omega_0$. La fonction $V_0(\omega)$ est donc maximale pour $\omega = \omega_0$, la pulsation propre du système masse-ressort, qui apparaît une fois de plus comme la pulsation pour laquelle il y a résonance.



Rq : La phase φ (ou plus précisément l'avance de phase de la vitesse sur l'excitation) est donnée par l'argument des deux membres de (2) :
$\tan\varphi = \dfrac{\omega_0^2/\omega - \omega}{\omega_0/Q} = Q\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega\omega_0}$; à la résonance, le déphasage est nul.

c) Le moteur excite la structure à la pulsation $\omega = 2\pi n = 628$ rad.s^{-1}.
Suivant le choix du ressort, la pulsation propre est $\omega_{01} = 632$ rad.s$^{-1} \approx \omega$ ou $\omega_{02} = 316$ rad.s$^{-1} \approx \omega/2$. Le but de la suspension étant d'avoir des amplitudes de vibration les plus faibles, il est conseillé de choisir le ressort de raideur k_2.

41. Les énergies, dans le référentiel géocentrique valent, en notant $k = GM_Tm$: sur la 1re trajectoire circulaire $E_1 = -\dfrac{k}{2r_0}$; sur la 2e $E_2 = -\dfrac{k}{4r_0}$; et sur l'ellipse de transfert $E_t = -\dfrac{k}{2a} = -\dfrac{k}{3r_0}$ car $A_1A_2 = 2a = 3r_0$.
Les variations d'énergie mécanique sont dues à un travail des forces intérieures, ici l'énergie est fournie par le moteur du satellite, ce qui permet le changement de trajectoire. L'énergie dépensée par le moteur du satellite est $E_2 - E_1 = \dfrac{k}{4r_0}$.

En A_1^- : $\dfrac{1}{2}mv_0^2 - \dfrac{k}{r_0} = -\dfrac{k}{2r_0}$ soit $v_0^2 = \dfrac{k}{mr_0}$ (trajectoire circulaire de rayon r_0)

En A_1^+ : $\dfrac{1}{2}mv_1'^2 - \dfrac{k}{r_0} = -\dfrac{k}{3r_0}$ soit $v_1'^2 = \dfrac{4}{3}\dfrac{k}{mr_0}$; le rapport donne $\boxed{v_1' = \dfrac{2}{\sqrt{3}}v_0}$

De A_1^+ en A_2^- sur l'ellipse de transfert, la conservation du moment cinétique : $r_0v_1' = 2r_0v_2'$ conduit à :

$$\boxed{v_2' = \frac{v_1'}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}}$$

En A_2^- : $\dfrac{1}{2}mv_2'^2 - \dfrac{k}{2r_0} = -\dfrac{k}{3r_0}$ soit $v_2'^2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{k}{mr_0}$ (conforme au résultat ci-dessus)

En A_2^+ : $\dfrac{1}{2}mv_2^2 - \dfrac{k}{2r_0} = -\dfrac{k}{4r_0}$ soit $v_2^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k}{mr_0}$ (trajectoire circulaire de rayon $2r_0$)

le rapport donne $\boxed{v_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}v_2' = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}}$

Ce dernier résultat était prévisible car sur une trajectoire circulaire $v = \sqrt{GM/r}$ et donc si r_0 est multiplié par 2, v_0 est divisé par $\sqrt{2}$.

b) Pour décrire une trajectoire parabolique il faut une énergie nulle : $\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{k}{2r_0} = 0$ soit $v_3^2 = \frac{k}{mr_0} = v_0^2$. Et $\boxed{v_3 = v_0}$, en fait v_3 est la vitesse de libération à l'altitude $2r_0$, qui vaut bien $\sqrt{2}\, v_{circ}$. La variation de vitesse nécessaire est $v_3 - \frac{v_0}{\sqrt{2}} = v_0 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

42. Limite de Roche (*)

a) Le mouvement est à force centrale, d'où $C = r^2\dot{\theta} = cste$, et de $r = d = cste$ (mouvement circulaire), on déduit $\dot{\theta} = \omega = cste$ (mouvement uniforme).
La RFD appliquée à l'ensemble de la comète et projetée sur l'axe dirigé par $\vec{u}_r$:

$$-(2m)\omega^2 d = -G\frac{mM_J}{(d-r)^2} - G\frac{mM_J}{(d+r)^2} \quad (0) \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM_J}{2d}\left[\frac{1}{(d-r)^2} + \frac{1}{(d+r)^2}\right] \quad (0')$$

Attention, la comète n'a pas une symétrie sphérique, et comme le champ de force est inhomogène, la somme des forces sur les deux sphères n'est pas égale à la force qui s'exercerait sur une sphère de masse $2m$: le second membre de la RFD n'est donc pas $-G\frac{(2m)M_J}{d^2}$!

b) La sphère de gauche (1) subit l'attraction de Jupiter, l'attraction de la sphère de droite, et la réaction $-\vec{R} = -R\vec{u}_r$ de la sphère (2), d'où :

$$-m\omega^2(d-r) = -G\frac{mM_J}{(d-r)^2} + G\frac{m^2}{(2r)^2} - R \quad (1)$$

La sphère de droite (2) subit l'attraction de Jupiter, celle de la sphère de gauche, et la réaction $\vec{R} = R\vec{u}_r$ de la sphère (1), d'où :

$$-m\omega^2(d+r) = -G\frac{mM_J}{(d+r)^2} - G\frac{m^2}{(2r)^2} + R \quad (2)$$

L'une de ces deux équations est inutile puisque leur somme redonne (0) où les forces intérieures à la comète s'éliminent.

c) Le maintien en contact des sphères suppose $R > 0$; la rupture se fait donc pour $R \leq 0$.

(1) et (0') $\Rightarrow$ $R = -G\frac{mM_J}{(d-r)^2} + G\frac{mM_J}{2d}\left(\frac{1}{d-r} + \frac{d-r}{(d+r)^2}\right) + G\frac{m^2}{4r^2}$; un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{r}{d}$ donne : $R \approx -\frac{3GmM_J r}{d^3} + G\frac{m^2}{4r^2}$

La condition $R \leq 0$ conduit à $d \leq d_{lim} = \left(\frac{12M_J}{m}\right)^{1/3} r$, d'où le rapport

$$\boxed{\frac{d_{lim}}{R_J} = \left(\frac{12\mu_J}{\mu_C}\right)^{1/3} \approx 2{,}5}$$

ce qui suppose un passage de la comète très proche de Jupiter.
C'est ce qui est arrivé à la comète Shoemaker-Lévy 9 en 1994 : passée trop près de Jupiter, elle s'est brisée en plusieurs morceaux qui ont ensuite percuté la planète géante.

43. Satellite freiné par l'atmosphère

a) Sur une trajectoire circulaire de rayon r, la vitesse du satellite est $v = \sqrt{GM_T / r}$.

Alors $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM_T}{2r} = -\frac{E_p}{2}$ (théorème du viriel) et l'énergie mécanique s'écrit indifféremment :

$$\boxed{E = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -E_c = -G\frac{M_T m}{2r}}$$

b) Deux raisonnements sont possibles :

* Pour un satellite freiné, le système n'est plus conservatif et l'énergie E diminue (la force de frottement s'oppose au déplacement et donc son travail est négatif) ; puisque $E = -GM_T m / 2r$, on déduit que le rayon r diminue et la vitesse $v = \sqrt{GM_T / r}$ augmente (on suppose que la trajectoire reste quasi circulaire à chaque instant). En résumé, par frottement l'énergie diminue, donc la trajectoire change, le rayon diminue et la vitesse augmente.
* On peut également remarquer d'après $E = E_p / 2 = -E_c$, que $\Delta E < 0$ entraîne $\Delta E_p < 0$ et $\Delta E_c > 0$. Un satellite « freiné » voit donc bien sa vitesse augmenter, car son énergie potentielle diminue deux fois plus vite (en valeur absolue) que son énergie cinétique n'augmente.

c) mv^2 / h est le rapport d'une énergie par une distance, c'est donc une grandeur homogène à une force et donc β est sans unité.
Plus l'altitude décroît, plus l'atmosphère devient dense et donc plus la force de freinage augmente ; c'est ce qui justifie sa dépendance en $1/h$.

La force de frottement est $\vec{F} = -\frac{\beta m}{h} v^2 \vec{u}_\theta$; son travail sur une révolution (en supposant toujours l'orbite quasi circulaire) est :

$$W_{\vec{F}} = \int_{tour} \vec{F}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} \vec{F}.r\,d\theta\,\vec{u}_\theta \approx -\frac{\beta m}{h} v^2 .2\pi r$$

et avec $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, $W_{\vec{F}} = -\frac{2\pi\beta GmM_T}{h}$ (1)

L'énergie du satellite est, avec $h \ll R_T$:

$$E = -G\frac{M_T m}{2r} = -G\frac{M_T m}{2(R_T + h)} \approx -G\frac{M_T m}{2R_T}\left(1 - \frac{h}{R_T}\right) \quad (2) \text{ car } \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit en cas de non conservation de l'énergie mécanique comme ici :

$\Delta E = W_{\vec{f}}$ soit d'après les expressions (2) et (1) : $G\frac{M_T m}{2R_T^2}\Delta h = -\frac{2\pi\beta GmM_T}{h}$

et finalement : $\boxed{\Delta h = -\frac{4\pi\beta R_T^2}{h}}$

AN : $\underline{\Delta h = -28{,}3 \text{ m}}$, variation très faible justifiant l'hypothèse de la trajectoire quasi circulaire.

44. Diffusion de Rutherford

a) Le noyau d'or et la particule α portent tous les deux une charge positive ; la force coulombienne est donc répulsive :

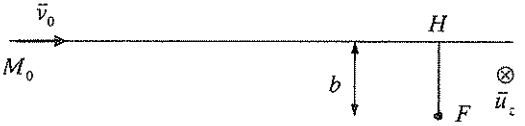
$$\vec{f} = \frac{2eZe}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \text{ soit } k = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Si on note F le centre de masse : $\frac{FM_{or}}{FM_\alpha} = \frac{m_{or}}{m_\alpha} = \frac{197}{4} \approx 50$, on considère que le noyau d'or reste en F.

b) La force conservative dérive de l'énergie potentielle

$E_p = \frac{k}{r}$, en prenant $E_p = 0$ en $r \to \infty$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r} = \text{cste} = \frac{1}{2}mv_0^2}.$$



La force est centrale : Le moment cinétique en F est constant :

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{FM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}}$$

Avec les conditions initiales :

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{FM_0} \wedge m\vec{v}_0 = \left(\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HM_0}\right) \wedge m\vec{v}_0 = \overrightarrow{FH} \wedge m\vec{v}_0$$

$$\boxed{\vec{\sigma} = m v_0 b \vec{u}_z}$$

c) En r_m, $v = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{k}{r_m}$, et avec l'expression de k :

$$\boxed{r_m = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_p v_0^2}}$$

A.N. : $v_0 = \left(\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_p r_m} \right)^{\frac{1}{2}} = 1{,}0.10^8 \text{ m.s}^{-1}$, les particules α sont relativistes, il faut une énergie très grande pour que les deux charges positives soient aussi proches.

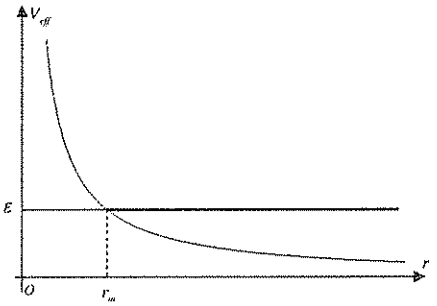
d) $E = \dfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r)$

La loi des aires $\sigma = nr^2\dot{\theta}$ permet d'éliminer $\dot{\theta}$:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2mr^2} + E_p(r) \equiv \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

Cette relation définit une énergie potentielle effective :

$$\boxed{V_{eff}(r) = \frac{\sigma^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}}$$



$V_{eff}(r)$ est une fonction décroissante de r. Quand $r = r_m$, $\dot{r} = 0$ donc

$$E = V_{eff} = \frac{\sigma^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

$$E = \frac{m v_0^2 b^2}{2r^2} + \frac{k}{r} \quad \Rightarrow \quad r^2 - \frac{k}{E} r - \frac{m v_0^2}{2E} b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - \frac{k}{E} r - b^2 = 0$$

L'équation admet une racine positive : $\boxed{r_m = \dfrac{k}{2E} + \sqrt{\dfrac{k^2}{4E^2} + b^2}}$

- Pour $b = 0$, on retrouve $r_m = \dfrac{k}{E}$, la particule repart dans la direction opposée à $\vec{v}_0$, déviation de π. De plus si $E \nearrow$ $r_m \searrow$.
- Si $b \nearrow$, à $E = \text{cste}$, $r_m \nearrow$ et $r_m > b$, la particule α est déviée par la force répulsive.
- Pour b très grand : $r_m \to b$, la particule n'est pas déviée, elle passe trop loin de F.

Travaux pratiques

45. Les notations sont celles des questions **1.** à **4.**

a) On observe un régime libre pseudopériodique, $z(t) = A\, e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega t + \varphi)$.

Deux maxima successifs sont séparés de T et $z_{m2} = z_{m1} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}$.

Il faut donc mesurer les maxima z_m et porter ln z_m en fonction de t. On obtient des points raisonnablement alignés. L'incertitude de mesure sur z_m :

lecture : $2 \times \frac{1}{\sqrt{12}} \times 2 = 1{,}15$ mm car : 2 lectures sur le graphe (on ne convertit pas en cm réel, on exprime des pourcentages) et à 95%

protocole : position du zéro, estimé 0,5 mm

appareil : convertisseur, ordinateur, imprimante : négligeable

$U = \sqrt{U_a^2 + U_b^2} \approx 0{,}76$ mm $\Rightarrow \frac{U}{z_m} \approx 0{,}04$ en considérant la même incertitude relative sur toutes les mesures alors qu'elle est plus grande pour les petits z_m.

On conclut à un alignement compatible avec la dispersion liée aux incertitudes.

Une régression linéaire donne la pente et l'incertitude sur cette pente permet de donner deux chiffres significatifs : $\underline{\frac{\omega_0}{2Q} = 0{,}20 \text{ s}^{-1}}$; on en déduit :

$\underline{\lambda = m\frac{\omega_0}{Q} = 8{,}0.10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}}$, l'incertitude sur m est négligeable (balance électronique).

b) Pour la pseudopériode, mesurer une dizaine de T entre des zéros de $z(t)$, d'où $T = 0{,}80$ s. Incertitude sur 10 T :

lecture : $2 \times \frac{1}{\sqrt{12}} \times 2 = 1{,}15$ mm, 2 lectures sur le graphe (on ne convertit pas en seconde, on exprimera des pourcentages) et à 95%

appareil : graduations : négligeable

$U(T) = \frac{1}{10}\sqrt{U_a^2} \approx 0{,}12$ mm $\Rightarrow \frac{U}{T} \approx 0{,}01 \Rightarrow \underline{T = (0{,}80 \pm 0{,}01) \text{ s}}$

On en déduit le décrément logarithmique par $\underline{\delta = \frac{\omega_0}{2Q}T = 0{,}16}$.

Avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}$ soit $k / m = \left(2\pi/T\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2}$,

on trouve $\underline{k = 12 \text{ N.m}^{-1}}$ compatible avec un allongement à l'équilibre d'environ 15 cm pour 200 g.

46. Les notations sont toujours inchangées.

a) Le régime transitoire est : $z(t) = Z_1 \cos\left(\omega_1 t + \psi\right) + A\, e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos\left(\omega t + \varphi\right)$

avec ω_1 imposée par le moteur et la pseudopulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ de valeurs proches.

Théoriquement tant que les « amplitudes » sont du même ordre de grandeur :

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2} t\right)$$

On obtient un phénomène de battements : sinusoïde de fréquence élevée (la demi-somme) modulée en amplitude par une sinusoïde de fréquence basse (la demi-différence). La période visuelle des battements est la moitié de la période de la sinusoïde enveloppe qui est : $\frac{2\pi}{\Delta\omega/2} \Rightarrow T_{batt} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

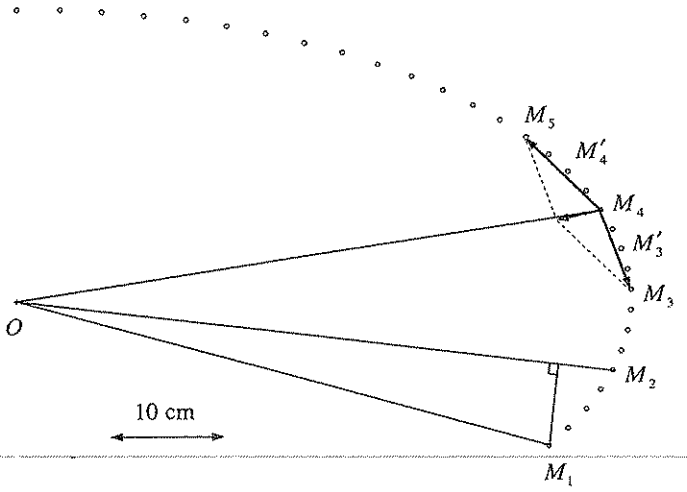
On interprète les battements observés comme ceux entre le régime libre pseudopériodique et le régime forcé. En effet en l'absence de frottements trop importants, le régime transitoire est assez long et « l'amplitude » du régime libre ne décroît pas trop vite. De plus on règle la fréquence forcée proche de la fréquence de résonance, qui est, du fait des frottements limités, proche de la fréquence propre, elle-même voisine de la pseudofréquence !

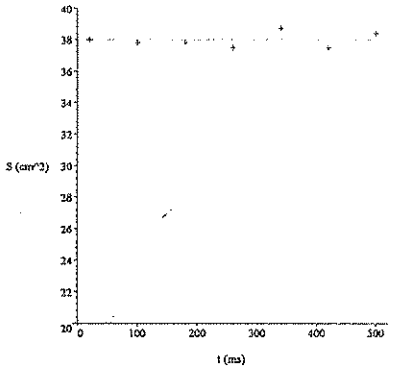
On mesure sur le graphe 1 : $T_{batt} = 9{,}0$ s (mesure sur $4\,T_{batt}$, l'appréciation des zéros rend la mesure peu précise).

b) On mesure sur le graphe 2 : là aussi sur plusieurs périodes, $T_{1\,forcé} = 1{,}0$ s et $T_{libre} = 0{,}9$ s donnant une période « théorique » des battements, avec :

$$\frac{1}{T_{batt}} = \frac{1}{T_{libre}} - \frac{1}{T_{1forcé}},\ T_{batt} = 9{,}0 \text{ s}$$ ce qui confirme l'interprétation.

47. La mesure de l'aire balayée par le rayon vecteur pendant 80 ms est ramenée à celle des aires des secteurs de type OM_iM_{i+1}. Par exemple pour l'aire balayée entre M_1 et M_2, on assimile l'aire à l'aire du triangle OM_1M_2, soit $\Delta S = \frac{1}{2}(OM_2)\,h$, ce qui donne comme aires successives en cm^2 : 38,0 ; 37,8 ; 37,8 ; 37,5 ; 38,7 ; 37,5 ; 38,4.





On veut montrer ici que la valeur de l'aire reste sensiblement constante, le traitement statistique n'est pas approprié. On trace ΔS en fonction de t :

L'incertitude sur ΔS est composée :

Sur $OM_2 = L$: lecture $2 \times \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}58$ mm

Sur h : lecture $2 \times \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}58$ mm

$$\frac{U_1}{\Delta S} = \sqrt{\left(\frac{U(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{U(h)}{h}\right)^2} = 0{,}048$$

Le protocole confond l'arc et la corde, soit une erreur systématique : $\frac{U_2}{\Delta S} = 0{,}01$, cette erreur n'intervient pas pour vérifier que ΔS est constant, car elle affecte toutes les mesures de la même façon. De plus son effet est négligeable :

$$\frac{U}{\Delta S} = \sqrt{\left(\frac{U_1}{\Delta S}\right)^2 + \left(\frac{U_2}{\Delta S}\right)^2} \approx 0{,}049$$

L'incertitude sur ΔS est de $0{,}049 \times 38 \approx 2$ cm^2. Les écarts à la droite moyenne sont justifiés.

D'autres causes d'erreur peuvent apparaître, les frottements qui se traduisent par une diminution de ΔS. Il y a aussi le problème de l'horizontalité de la table qui entraîne une erreur systématique que l'on peut déceler en lançant le mobile du coin opposé de la table.

On constate finalement une valeur sensiblement constante avec une dispersion dont l'ordre de grandeur est compatible avec les incertitudes de mesure. Ceci permet de conclure à la loi des aires avec une surface moyenne balayée en 80 ms de (38 ± 2) cm^2, soit une constante des aires : $C = 2\frac{\Delta S}{\Delta t} = 9{,}5.10^{-2}$ m^2.s^{-1}.

L'incertitude sur C est, avec une précision de 3% du générateur d'impulsion :

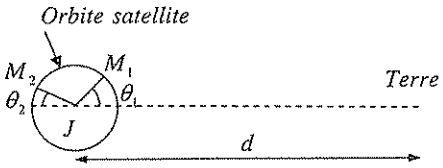
$$\frac{U}{C} = \sqrt{\left(\frac{U(\Delta S)}{\Delta S}\right)^2 + \left(\frac{U(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{(0.05)^2 + \left(\frac{0{,}03}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 0.053$$

soit $\boxed{C = 2\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = (9,5 \pm 0,5).10^{-2}\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}}$

La construction du vecteur accélération, par exemple en M_4, se fait avec $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \approx \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_{M_5'} - \vec{v}_{M_3'}}{\Delta t}$, or $\vec{v}_{M_4'}$,que l'on considère comme la vitesse moyenne entre M_4 et M_5, est colinéaire et de norme proportionnelle à $\overline{M_4M_5}$. Donc $\vec{a}$ est colinéaire au vecteur $\overline{M_4M_5} + \overline{M_4M_3}$. La construction sur le schéma ci-dessus montre que $\vec{a}$ ainsi construit est bien expérimentalement porté par $\overline{OM}$.

48. La détermination de a nécessite d'estimer le maximum de la courbe qui n'est pas forcément un des points de mesure ! Attention c'est une sinusoïde, elle n'a pas une forme très aplatie. a est de l'ordre de $2{,}8.10^{-3}$ U.A.. Pour la période, on choisit deux positions M_1 et M_2.

Entre les dates t_1 et t_2 (positions M_1 et M_2) le satellite balaye l'angle $\beta = \pi - \theta_1 - \theta_2$, le mouvement étant circulaire et uniforme : $T = (t_2 - t_1)\dfrac{2\pi}{\beta}$. On détermine β



sachant que $\sin\theta = \dfrac{x}{a}$. Prendre deux points de part et d'autre du maximum, sur la courbe $x(t)$ lissée, déterminer θ_1 et θ_2 et en déduire T en heures. T est de l'ordre de 42 h.

L'ensemble des valeurs mesurées traitées statistiquement donne : $\overline{M_J} = 1{,}935$,

$s_n = 0{,}203$ et à 95% $t_{36} = 2{,}04 \Rightarrow t_n\dfrac{s_n}{\sqrt{n}} = 2{,}04 \times \dfrac{0{,}203}{\sqrt{36}} \approx 0{,}07$

$$\boxed{1{,}87\ 10^{27}\ \text{kg} < \text{M}_\text{J} < 2{,}00\ 10^{27}\ \text{kg}}$$

La valeur admise pour la masse de Jupiter est $1{,}91.10^{27}$ kg.

Les erreurs systématiques liées aux axes références et à la position du centre de Jupiter, peuvent être décelées et corrigées en considérant les quatre satellites. Une erreur sur la distance de Jupiter au moment de l'observation ne peut évidemment pas être décelée, il faut refaire des mesures plus tard, à une autre opposition.

Chapitre 9

Statique des fluides

Les ordres de grandeur utiles

Constantes

constante des gaz parfaits	$R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$
constante de Boltzmann	$k_B = R/N_A = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$

L'air

masse molaire	$M = 29\ g.mol^{-1}$
masse volumique (à 20°C sous 1 bar)	Modèle G.P. : $\rho = MP/RT \approx 1{,}2\ kg.m^{-3}$
volume molaire (à 20°C sous 1 bar)	Modèle G.P. : $V_m = RT/P \approx 24\ L.mol^{-1}$
densité particulaire (à 20°C sous 1 bar)	$n^* = P/k_BT \approx 2{,}5.10^{25}\ m^{-3}$
température dans l'air atmosphérique	$z < 10$ km, $T(z) = T_0 - a\,z$ avec $a = 6{,}5$°C/km

L'eau

masse molaire	$M = 18\ g.mol^{-1}$
masse volumique	$\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$
densité moléculaire	$n^* = \rho N_A / M \approx 10^{28}\ m^{-3}$
prix du m^3 (hors abonnement)	environ 3 €TTC (cela dépend du lieu)

Pression

atmosphérique au sol P_0 (valeur moyenne)	$1\ atm = 1{,}013.10^5\ Pa = 1{,}013\ bar$ (1 mbar = 1 hPa)
hauteur de mercure ($\rho_{Hg} = 13{,}6\ g.cm^{-3}$) ; hauteur d'eau	$P_0 = \rho g h \Rightarrow h_{Hg} = 760$ mm ; $h_{eau} \approx 10$ m
dépression ; anticyclone	≈ 990 hPa ou moins ; ≈ 1030 hPa ou plus
hauteur d'échelle dans l'air (atmosphère isotherme à 20°C)	$P(z) = P_0 e^{-z/h}$ avec $h = RT/Mg = 8{,}6$ km
augmentation de pression dans l'eau	1 bar tous les 10 m de profondeur

Le cours d'abord

Définition et caractéristiques d'un fluide

1. Quelle définition peut-on donner d'un fluide ? Et parmi les fluides, d'un liquide ? d'un gaz ?

2. Définir la masse volumique en un point d'un fluide. Comment est définie la densité ? Qu'est-ce qui distingue les masses volumiques des gaz et des liquides ?

Pression dans un fluide et équilibre dans le champ de pesanteur

Voir Chapitre **0** : éléments de surface et somme d'infiniment petits.

3. Comment peut-on définir simplement la pression $P(M)$ dans un fluide ? Quelle est son unité dans le système international ? Qu'entend-on par « isotropie » de la pression ?

4. Dans un fluide en équilibre (mécanique) dans le référentiel terrestre galiléen, considérer un volume élémentaire du fluide (ou « particule de fluide ») au point M de masse $dm = \rho(M)dV$, de masse volumique $\rho(M)$ et de volume dV . Faire un bilan des forces s'exerçant sur ce volume élémentaire, le prendre parallélépipédique d'arêtes parallèles à des axes cartésiens. Traduire son équilibre en projetant la RFD sur la base cartésienne d'axe Oz dirigé suivant la verticale ascendante.

5. À partir du système d'équations obtenu à la question précédente, montrer d'abord que la pression ne dépend que de z , puis exprimer sa variation dP en fonction de dz . Comment peut-on alors interpréter la différence de pression entre deux points d'altitude z_1 et $z_2 < z_1$? Quelle caractéristique du fluide faut-il connaître ou modéliser pour poursuivre le calcul ?

6. Généralisation : Comment peut-on écrire sous forme vectorielle les relations scalaires obtenues à la question **4.** (utiliser la fonction gradient définie dans le chapitre **0**) ? Cette relation est appelée équation locale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur terrestre. Comment la pression évolue-t-elle dans le sens du champ de pesanteur $\vec{g}$?
   Interpréter cette nouvelle écriture en terme de force volumique.

7. Donner à trois dimensions et sous forme intégrale, la résultante $\vec{F}_{pr}$ des forces de pression sur une surface S , puis sans démonstration, sur une surface fermée S . Que vaut cette résultante sur une surface fermée dans le cas d'un champ de pression uniforme ?

L'opérateur « gradient »

Voir la partie « gradient » du chapitre **0**.

8. Qu'appelle-t-on champ scalaire ? Donner des exemples pratiques de champ scalaire. Comment sont reliés sens du vecteur gradient et variation du champ ? Que se passe-t-il si le champ a même valeur en tout point (champ uniforme) ?

9. Quelles sont les expressions de $\overrightarrow{\text{grad}}\ U$ en coordonnées cylindriques ou sphériques lorsque la fonction U ne dépend que de la variable radiale r ?

10. Si $U(M)$ est un « potentiel », comment sont définies les surfaces équipotentielles ? Comment est dirigé le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ U$ par rapport aux équipotentielles ? Dans le cas d'un champ de pression, comment nomme-t-on les équipotentielles ?

■ Champ de pression dans l'atmosphère terrestre

11. Utiliser pour l'air (fluide compressible) le modèle gaz parfait (G.P.) obéissant à l'équation $PV = nRT$ où P est la pression, V le volume, T la température, n la quantité de matière en moles du gaz, et R la constante des gaz parfaits (pour une description plus précise de ce modèle, voir la partie gaz parfaits du chapitre **10**). La constante des gaz parfaits est $R = 8{,}31\ \text{J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}$, la température T s'exprime en kelvin (K) et est égale à la température en degré Celsius plus 273 (par exemple 20°C correspondent à 293 K). Donner l'expression de la masse volumique ρ en fonction de la température T et de la pression P dans le cadre de ce modèle, en notant M la masse molaire.

12. Se placer en champ de pesanteur uniforme et en atmosphère dite « isotherme » ; commenter ces deux hypothèses. Avec le modèle G.P. pour l'air, exprimer la fonction $P(z)$ en prenant $P(z=0) = P_0$ (pression atmosphérique au sol). Définir et calculer la hauteur d'échelle (ou hauteur caractéristique) h pour l'air à 20 °C .
En déduire la pression et la masse volumique de l'air au sommet du Mont-Blanc (altitude : 4 810 m) ; commentaires.
Justifier que dans une enceinte de taille limitée, on puisse parler de « la » pression du gaz dans l'enceinte ?

13. Reprendre la loi précédente pour la densité moléculaire $n^*(z)$ en introduisant la masse m d'une molécule et la constante de Boltzmann $k_B = R/N_A$, rapport de la constante des gaz parfaits à la constante d'Avogadro ; interpréter le résultat.

■ Champ de pression dans un liquide

14. Comment croît la pression en fonction de la profondeur dans un liquide (fluide incompressible) ? Quel nom porte cette loi ?

15. Donner le principe du baromètre de Torricelli et en déduire la valeur de la pression atmosphérique correspondant à une dénivellation de 76 cm de mercure. On donne $\rho_{Hg} = 13{,}6\ \text{g/cm}^3$.

Poussée d'Archimède

16. Donner qualitativement l'origine de la poussée d'Archimède pour un corps immergé.

17. Proposer une démonstration « sans calcul » du théorème d'Archimède, puis l'énoncer.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Pour les commentaires des applications numériques, il est conseillé de connaître les ordres de grandeur suivants, pour l'air et pour l'eau, (attention aux puissances de 10) :

– les masses volumiques :

$\rho_{eau} = 1\ \text{g.cm}^{-3} = 1\ \text{kg/L} = 10^3\ \text{kg.m}^{-3}$ dans les conditions usuelles

$\rho_{air} = \dfrac{MP}{RT} = 1{,}2\ \text{g/L} = 1{,}2\ \text{kg.m}^{-3}$ à 20 °C sous 1 atm (modèle G.P.)

– les masses molaires :

$M_{eau} = 18\ \text{g.mol}^{-1} = 18.10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}$ (revenir à H_2O : 2+16)

$M_{air} = 29\ \text{g.mol}^{-1} = 29.10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}$ [en gros 4/5 d'N_2 (28) et 1/5 d'O_2 (32)]

– les densités particulaires :

pour l'air à 20 °C sous 1 atm : $n^* = \dfrac{P}{k_B T} = \dfrac{\rho N_A}{M} \approx 2{,}5.10^{25}\ \text{m}^{-3}$

pour l'eau : $n^* = \dfrac{\rho N_A}{M} \approx 10^{28}\ \text{m}^{-3}$

(formule donnée par la masse d'une particule : $\dfrac{M}{N_A} = \dfrac{\rho}{n^*}$)

☐ En mécanique des fluides, en seconde année, on utilise la masse volumique (grandeur intensive locale) plutôt que le volume. Ainsi pour un gaz parfait on écrira $\rho = MP/RT$ plutôt que $PV = nRT$ (car pour une masse $m = \rho V$ donnée, ρ et V sont inversement proportionnels).

☐ Les exercices, où interviennent uniquement les forces de pression et de pesanteur, se résolvent à partir de la loi simple :

$$\boxed{dP = -\rho g dz}$$

où l'axe Oz est dirigé suivant la verticale ascendante.

Pour un liquide : $\rho = cste$, on obtient la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$P_A - P_B = \rho g h$$

Pour un gaz :

si la variation d'altitude est faible :

- soit on néglige (cas le plus courant) le poids des molécules, on obtient alors une pression uniforme.
- soit on tient compte de ce poids, mais la valeur faible de la variation de pression permet de considérer $\rho \approx cste$ (voir la question **19.**)

si la variation d'altitude est grande, la variation de pression n'est plus négligeable et ρ n'est pas constante : une modélisation fournit par exemple $\rho(P)$.

☐ Il ne faut pas considérer comme système la totalité de la masse de fluide dans un récipient et ceci pour au moins deux raisons : les grandeurs intensives (pression, masse volumique,...) n'y étant pas forcément uniformes, on ne peut pas parler de « la » pression ; de plus cela obligerait dans le bilan des forces à faire intervenir les actions du récipient sur le fluide qu'il contient. De manière générale, en statique des fluides, la condition d'équilibre est écrite pour un élément de masse $dm = \rho(M)dV$ contenu dans l'élément de volume dV au point M quelconque au sein du fluide (et non au bord).

☐ Il est impératif de ne pas se tromper de signe dans l'application de la loi de Pascal pour les liquides : $P_A - P_B = \rho gh$. Pour cela ne pas perdre de vue que la pression augmente avec la profondeur ; il est conseillé d'écrire que la pression P_A au point le plus bas est égale à la pression P_B au point le plus haut augmentée du « poids » ρgh de la colonne de liquide entre les deux points.

☐ Le « fluide déplacé » intervenant dans le théorème d'Archimède est un fluide fictif que l'on imagine à la place de l'objet immergé. Il ne s'agit pas du « déplacement » du liquide réel par exemple si on enlevait l'objet du récipient.

☐ L'application du théorème d'Archimède suppose que le corps envisagé soit entièrement immergé dans un (ou des) fluide(s), car si tel n'est pas le cas, une partie de la surface du corps n'est pas en contact avec le fluide considéré et le raisonnement consistant à traduire l'équilibre du fluide qui remplace le corps dans le fluide environnant extérieur ne tient plus.
Il faut ainsi distinguer les situations suivantes :

a) un solide, après avoir « coulé » s'est posé au fond d'un récipient rempli d'un liquide ; dans ce cas, un peu de liquide subsiste entre le solide et le fond, le théorème d'Archimède s'applique.

b) Ce même solide a une face plane « plaquée » au fond du récipient (on l'a maintenu au fond en versant le liquide dessus). Dans ce cas le liquide n'entoure pas complètement le solide, le théorème d'Archimède ne s'applique pas.

c) Le solide « bouche » un trou au fond du récipient, le théorème d'Archimède ne s'applique pas.

☐ Le théorème d'Archimède nécessite un état d'équilibre, on peut cependant l'utiliser si les déplacements sont lents (dans le cas des aérostats par exemple).

☐ Attention dans un bilan des forces exercées sur un corps entièrement immergé dans un fluide de ne pas faire intervenir les forces de pression *et* la poussée d'Archimède.

☐ Dans le cas des aérostats ou des ballons ascensionnels, on ne peut évidemment pas négliger la variation de pression atmosphérique entre le haut et le bas de l'aérostat puisque la poussée d'Archimède est une des forces principales, mais on peut considérer $\rho = cste$ dans les calculs des masses de gaz (voir la question **19.**).

Applications directes du cours

18. En 1860, un explorateur anglais rapporte les mesures suivantes de Palestine : au niveau de la Mer Morte, à 25 °C, la pression atmosphérique normale est de 796 mmHg. Qu'en déduit-il sachant que cette mer est fermée ?

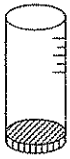
19. Se placer dans l'air atmosphérique à des altitudes $z \ll h$ (hauteur d'échelle ou hauteur caractéristique) et faire un développement limité de la formule du nivellement barométrique. Que retrouve-t-on et pourquoi ?

20. À quelle hauteur d'eau correspond la pression atmosphérique ? À quelle pression respire un plongeur lorsqu'il se trouve à une profondeur de 50 m ?

21. Quelle conversion faut-il effectuer pour passer des mbar aux hPa ?

22. À quelle condition un corps solide de masse volumique ρ_s flotte-t-il sur un liquide de masse volumique ρ_l ? Une bille de fer flotte-t-elle sur le mercure ?

23. Un densimètre permet de mesurer la densité des liquides. Celui représenté ci-contre est formé d'une ampoule de verre scellée, d'une longueur de 28,0 cm, de section 2,00 cm^2, lestée à sa base par une masse. La masse totale du densimètre est 50,0 g. Où doit-on placer la graduation 1,00 par rapport à l'extrémité supérieure ?



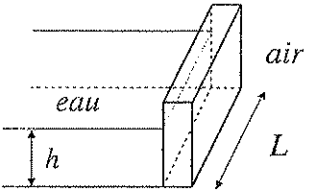
24. À 20°C, les pneumatiques d'une voiture sont « gonflés » à 2,0 bar, il s'agit de la surpression par rapport à la pression atmosphérique qui vaut 1,0 bar. La masse totale du véhicule et des passagers est de $1{,}5.10^3$ kg, également répartie sur les quatre

roues. Quelle est, à 20°C, la surface de contact entre un pneu et le sol (supposé dur et horizontal) ? Prendre $g = 9,8$ m.s^{-2}. Après un parcours de plusieurs kilomètres, cette surface a-t-elle variée ?

25. Quel est en pourcentage, le volume immergé d'un iceberg sachant que $\rho_{glace} = 0,92$ g.cm^{-3} ?

26. Résultante des forces de pression sur un barrage plan

Un barrage a la forme d'un mur plan vertical de largeur L. Il retient de l'eau, de masse volumique ρ, sur une hauteur h, et l'air ambiant est à la pression uniforme P_0. On note g l'accélération de la pesanteur.



Écrire la loi de pression $P(z)$ dans l'eau en précisant bien l'orientation de l'axe et le choix de l'origine, puis déterminer la résultante $\vec{F}$ des forces de pression s'exerçant sur le barrage.

27. Un bouchon cylindrique de bouteille de vin flotte sur l'eau ; on le tire légèrement vers le haut et on le lâche. En supposant que l'axe du bouchon reste vertical, déterminer la période de ses oscillations et proposer une application numérique.
En pratique, l'expérience montre que l'axe du bouchon en équilibre est plutôt horizontal. Reprendre le calcul en considérant qu'à l'équilibre la moitié du bouchon est immergée et que le déplacement initial est très petit par rapport au rayon. Proposer une application numérique.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

28. Pour voir ce qu'il en est de l'expression courante « léger comme l'air » estimer :
- la masse d'air dans une salle de classe
- la masse d'air dans le plus petit parallélépipède contenant la tour Eiffel (dont la base carrée fait 125 m de côté et la hauteur totale 324 m) ; comparer le résultat à la masse de la charpente métallique de la tour, soit environ 7 000 tonnes.

29. Autres chiffres surprenants. Estimer la masse de sel dans une piscine de taille moyenne 10m×5m×2m remplie à l'eau de la Mer Méditerranée (salinité 38 g/L).
Quel est le coût du remplissage de cette même piscine à « l'eau du robinet » sachant qu'elle est facturée environ 3 €TTC le mètre cube ?

30. Rechercher l'ordre de grandeur de la pression dans une bouteille de champagne, un autocuiseur, une cafetière Nespresso®, de l'eau dans un chauffage central, une bouteille de plongée sous-marine, un anticyclone.
De même pour une dépression atmosphérique, ou la dépression dans un aspirateur.

31. Qu'entend-on par « avion pressurisé » ?

32. Le phénomène d'aquaplaning, perte d'adhérence en abordant à trop grande vitesse une surface recouverte d'eau liquide, se produit d'autant plus facilement que la pression des pneumatiques est faible. Interpréter ? Les camions ont moins de risque d'aquaplaning, pourquoi ?

33. La statique des fluides dépend-elle de la nature parfaite (au sens hydrodynamique, c'est-à-dire non visqueux) ou réelle du fluide ?

34. À la question **12.** , on a vu que la pression dans un gaz enfermé dans une enceinte de dimension finie pouvait être considérée comme uniforme, ce qui revient à négliger le poids des molécules du gaz. Comment interpréter alors l'origine de la pression dans un gaz ?

35. Quels sont les deux phénomènes qui interviennent dans l'interprétation microscopique de la pression dans un fluide ? Illustrer la différence entre gaz et liquide dans la variation de la pression statique avec l'altitude.

36. Dans un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur, comment se placent les isobares par rapport aux lignes de champ du champ de pesanteur.

37. Qu'appelle-t-on « principe des vases communicants » ?

38. Quelle est la forme des surfaces isobares dans un problème à symétrie sphérique ?

39. Pourquoi les prévisionnistes en météorologie s'intéressent-ils à la pression indiquée par le baromètre ?

40. Pourquoi les mesures de pression faites pour les prévisions météorologiques sont-elles corrigées de l'altitude du lieu de la mesure ? À quoi ressembleraient sinon les cartes d'isobares ?

41. Pourquoi les liquides transmettent-ils intégralement et en tout point les variations de pression ? Citer des applications.

42. L'histoire raconte que le roi Hiéron possède une couronne qui pèse bien le « poids » d'or qu'il a donné à son bijoutier mais il n'est pas sûr que ce dernier ne l'ait pas trompé en incorporant à la couronne d'autres matériaux que de l'or pur. Il demande à Archimède de s'en assurer sans refondre la couronne. Comment ce dernier procède-t-il ?

43. Lorsqu'un corps flotte sur un liquide surmontée d'une atmosphère, la poussée d'Archimède est en général évaluée en ne considérant que le poids du liquide déplacé ; pourquoi ?

44. Un verre contient de l'eau avec un glaçon ; après la fonte du glaçon le niveau d'eau dans le verre a-t-il monté ou baissé ?

45. On dépose une bille d'acier dans une coquille de noix flottant à la surface libre de l'eau contenue dans un récipient. On repère alors le niveau de l'eau sur les parois du récipient. Si la bille est ensuite sortie de la coquille et plongée dans l'eau, comment évolue le niveau de la surface libre ?

46. Pour éviter de couler en faisant la planche dans une piscine d'eau douce, il est préférable de gonfler ses poumons d'air ; expliquer. Pourquoi cela n'est-il pas nécessaire dans une piscine remplie d'eau de mer ?

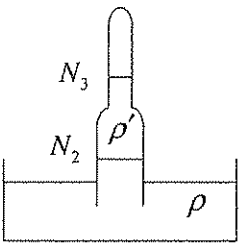
47. Comment un sous-marin en eaux profondes procède-t-il pour remonter en surface ?

48. Pourquoi utilise-t-on la balnéothérapie pour la rééducation fonctionnelle des traumatisés des membres inférieurs ?

Exercices

49. Baromètre d'Huygens, à deux liquides

La cuve à mercure a pour section $S_1 = 40\ \text{cm}^2$; le tube renversé a sur sa partie inférieure une section $S_2 = 4{,}0\ \text{cm}^2$ et sur sa partie supérieure rétrécie où il est fermé, une section $S_3 = 0{,}15\ \text{cm}^2$.



Expérience 1 :

La pression atmosphérique correspond à une hauteur de mercure H_0.

Le tube contient du mercure ($\rho = 13{,}6\ \text{g.cm}^{-3}$) jusqu'à la graduation N_2. La partie au-dessus jusqu'à la graduation N_3 contient de la glycérine ($\rho' = 1{,}05\ \text{g.cm}^{-3}$). La partie supérieure est assimilable à du « vide » vu la faible valeur de la pression de vapeur saturante de la glycérine à température ambiante.

Expérience 2 :

La pression atmosphérique change et devient $(H_0 + h)$ en hauteur de mercure.

À l'équilibre, les niveaux de séparation deviennent N_2' et N_3' avec un déplacement N_3N_3' de h'.

Faire un dessin avec les deux situations et établir l'expression de h'/h en fonction de S_1, S_2, S_3, ρ et ρ'. Application numérique et intérêt par rapport au baromètre de Torricelli.

50. Estimations de la masse de l'atmosphère terrestre

a) Partir de la relation de $P(z) = P_0 e^{-z/h}$ (isotherme à 0 °C). Écrire d'abord, en exprimant avec le modèle G.P. la masse volumique $\rho(z)$, la masse dM_a de l'atmosphère dans une coquille sphérique de rayon $r > R$ et d'épaisseur $dr = dz$. Puis par intégration estimer littéralement puis numériquement la masse M_a de

l'atmosphère terrestre en sachant que son épaisseur est grande devant $h = 8{,}0$ km (à 0 °C) et petite devant le rayon terrestre $R = 6\,400$ km.

b) Montrer que l'on trouve plus simplement le même ordre de grandeur, en s'appuyant sur le résultat donné par le baromètre de Torricelli.

51. Fonte d'un glaçon

Un récipient cylindrique en verre de rayon R contient un glaçon de volume V_0 et de l'eau liquide. La hauteur initiale de l'eau dans le verre est h_0 (voir figure 1).

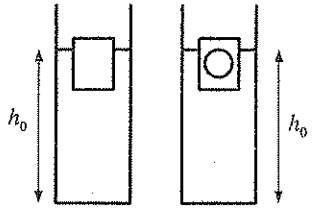


fig.1 fig.2

a) Calculer le volume immergé V_{im} du glaçon.

Faire l'AN avec $\rho_{liq} = 1{,}0\ 10^3\ \text{kg.m}^{-3}$ et $\rho_{glace} = 0{,}92\ 10^3\ \text{kg.m}^{-3}$.

b) Le glaçon fond et la hauteur d'eau dans le verre devient h_1. Calculer $h_1 - h_0$.

c) Pour une expérience analogue avec de l'eau salée (le glaçon reste composé d'eau douce), la hauteur finale de l'eau dans le verre sera-t-elle changée, et si oui, dans quel sens ?

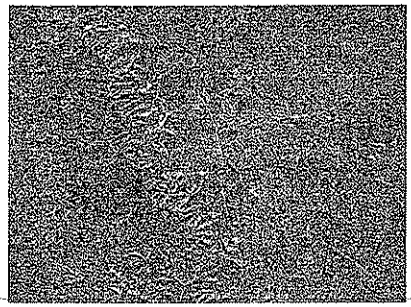
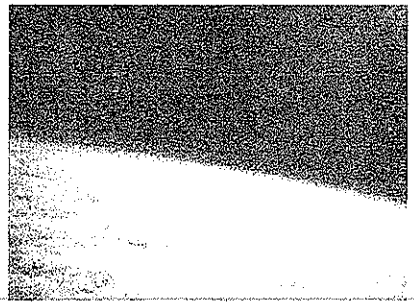
d) On reprend l'expérience avec de l'eau douce et un glaçon de même volume V_0, mais contenant une petite bille de liège (voir figure 2). On note $V_{liège}$ et $\rho_{liège}$ le volume et la masse volumique de la bille. Calculer le nouveau volume immergé du glaçon et la variation $h_2 - h_0$ de la hauteur d'eau après la fonte du glaçon.

52. La Terre vue d'un ballon d'hélium

On peut lire dans un article de journal : « Des adolescents espagnols sont parvenus, avec un ballon d'hélium et une simple caméra numérique, à prendre des photos de la Terre... à plus de 30 000 mètres d'altitude. »

Les auteurs de l'exploit, réalisé dans le cadre d'un projet scolaire ont entre 18 et 19 ans. Le coût total du projet avec ballon, parachute, camera, balise GPS, capteurs..., est d'environ 1000 euros. Le ballon a atteint une altitude de 30 000 mètres avant d'éclater et le matériel (de masse totale 3 kg) a atterri à une dizaine de kilomètres de son point de départ.

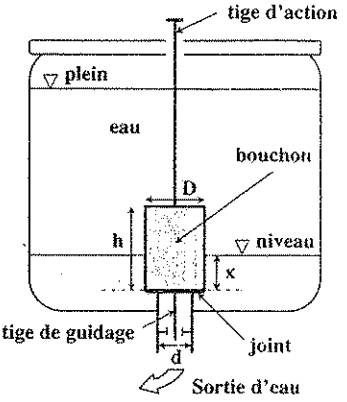
En considérant un ballon fermé, d'enveloppe très élastique, peut-on retrouver l'ordre de grandeur de l'altitude atteinte ?

53. Choix de la masse volumique du bouchon d'une chasse d'eau (*)

Le principe d'une chasse d'eau à bouchon cylindrique (plein et homogène) est explicité sur la figure ci-contre.

Pendant la vidange le bouchon doit flotter ou se maintenir en positon haute et pendant le remplissage d'eau il doit rester en position basse. On note ρ_e la masse volumique de l'eau.



a) À quelle valeur doit nécessairement être inférieure la masse volumique ρ du bouchon pour qu'il se maintienne en position haute lors de la vidange ? Pour le raisonnement, considérer un écoulement lent de l'eau de vidange.

b) On note x le niveau d'eau compté à partir de la base du bouchon et h la hauteur du bouchon de diamètre D. La base du bouchon repose par un joint sur un conduit d'évacuation de diamètre $d < D$ et rempli d'air atmosphérique de pression uniforme P_0. Pendant le remplissage, on distingue deux phases : $x < h$ et $x > h$.

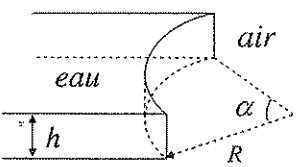
Pour chacune des phases, calculer la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces de pression exercée sur le bouchon lors du remplissage. Les exprimer en fonction de ρ_e, g, $S = \pi D^2/4$, $s = \pi d^2/4$, h et x.

c) Sachant que lors du remplissage, le bouchon doit rester plaqué sur le joint, écrire deux nouvelles inégalités pour ρ. En déduire une nouvelle condition nécessaire qui minore la valeur de ρ. Que se passe-t-il si cette inégalité n'est pas vérifiée ?

d) Quel est l'encadrement final sur ρ sachant que $D = 6{,}0$ cm et $d = 5{,}0$ cm ?

54. Résultante des forces de pression sur un barrage (*)

Un barrage a la forme d'un secteur cylindrique de hauteur h, caractérisé par son rayon R et l'angle α. Il est rempli d'eau, de masse volumique ρ, et l'air ambiant est à la pression uniforme P_0.

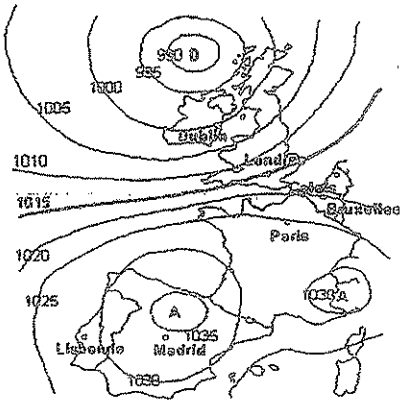


Écrire la loi de pression $P(z)$ dans l'eau en précisant bien l'orientation de l'axe et le choix de l'origine, puis déterminer la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces de pression s'exerçant sur la paroi cylindrique.

55. Apparition du vent

Pour l'atmosphère au repos, les surfaces isobares sont localement des plans horizontaux (voir la question **36.**), l'atmosphère est à l'équilibre : les forces de pression verticales compensant la force de pesanteur. Lorsque les surfaces isobares ne sont plus des plans horizontaux, il apparaît un gradient de pression horizontal qui est à l'origine du vent. Les stations météorologiques au sol permettent d'établir des

cartes sur lesquelles figurent les lignes isobares : intersection des surfaces isobares et du plan $z = 0$. La figure ci-dessous représente une carte de ce type.



Les lignes isobares sont cotées en hPa.
D est une Dépression (zone de faible pression) et A est un Anticyclone (zone de forte pression).

a) Pourquoi la mesure locale de pression doit-elle être ramenée à $z = 0$?
b) Estimer la norme du gradient de pression entre Paris et Calais, puis entre Londres et Dublin. Les distances sont Paris-Calais = 200 km et Londres-Dublin = 400 km.
c) Représenter les vecteurs force de pression horizontale s'exerçant sur « une particule d'air » à la verticale de Paris, de Londres et de Dublin, en respectant sommairement les normes relatives de ces vecteurs.

56. Équilibre polytropique de l'atmosphère

Jusque vers une altitude de 10 km, la température de l'air diminue régulièrement en suivant la loi $T(z) = T_0 - az$ où T_0 est la température au sol et $a = 6{,}5$ °C/km. L'air est considéré comme un gaz parfait et le champ de pesanteur est pris uniforme.

a) Montrer que cela conduit à la relation $\dfrac{P(z)}{P_0} = \left(\dfrac{T(z)}{T_0}\right)^{\alpha}$; donner l'expression et la valeur numérique de α.
b) Reprendre l'application numérique de la pression P' au sommet du Mont-Blanc en gardant pour T_0 la valeur 20 °C et la comparer à la valeur trouvée à la question **12.** ; commentaire.
c) En déduire une loi simple entre $P(z)$ et $\rho(z)$.

57. Aérostat à hélium (*)

Avant de faire cet exercice, il est conseillé d'avoir cherché le précédent.

Un ballon sphérique constitué d'une enveloppe non extensible de volume $V = 500$ m^3 est rempli d'hélium He. Au départ, au sol, les conditions sont les suivantes : l'air est à la pression atmosphérique P_0, sa température est $t_0 = 20$ °C et sa masse volumique $\rho_0 = \rho_{air}(z = 0) = 1{,}2$ kg.m^{-3}. La partie inférieure du ballon

comporte un orifice qui met le gaz en contact avec l'air. On considère que l'hélium est à chaque instant en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère environnante. La masse de l'enveloppe, de la nacelle, des passagers et du lest emporté est $M = 400$ kg. Le ballon évolue à une altitude inférieure à 10 km, si bien que l'on adopte le modèle de l'atmosphère en équilibre polytropique de la question **56.** soit $\frac{P(z)}{\rho^n(z)} = cste$ avec $n = 1{,}23$ issu de $T(z) = T_0 - az$ où $a = 6{,}5$ °C/km.

a) Comment est définie la densité d' de l'hélium (par rapport à l'air) ? Montrer que si les gaz sont parfaits, la densité est indépendante de l'altitude z. Quelle est sa valeur ?

b) Établir l'expression de la force ascensionnelle $F(z)$ en fonction de l'altitude z. Que vaut-elle en $z = 0$? Que se passe-t-il lorsque le ballon prend de l'altitude ?

c) On estime que l'altitude maximale z_m atteinte par le ballon est obtenue pour $F(z_m) = 0$. Donner la valeur numérique de z_m.

d) On souhaite que le ballon atteigne une altitude de 500 m supérieure à z_m. Calculer la masse du lest qu'il faut lâcher.

58. Pression et température au centre du Soleil

Le Soleil est une étoile de masse $M_S = 2{,}0.10^{30}$ kg, de rayon $R_S = 7{,}0.10^5$ km, constituée d'un gaz supposé parfait, essentiellement de l'hydrogène atomique de masse molaire $M = 1$ g.mol^{-1}, à la pression $P(r)$, à la température $T(r)$ dans un problème à symétrie sphérique.

a) En prenant pour modèle une masse volumique $\rho(r) \approx \rho_0$ uniforme, évaluer littéralement et numériquement $P(0)$ et $T(0)$.

Commentaire sur la valeur numérique de $T(0)$. Que penser de l'hypothèse $\rho(r) \approx \rho_0$ uniforme ?

b) Reprendre le problème sans calcul et justifier la recherche de la pression au centre sous la forme $P(0) = G^\alpha M_S^\beta R_S^\gamma$; déterminer par une simple analyse dimensionnelle, la valeur des exposants α, β et γ, et commenter.

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Définition et caractéristiques d'un fluide

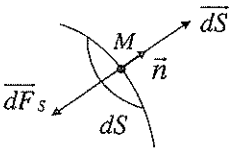
1. Un fluide est un milieu matériel continu déformable, c'est-à-dire qui peut changer de forme sous l'action d'une force même très faible. Un liquide a un volume propre, mais pas de forme propre. Un gaz n'a pas de volume propre et tend à occuper tout l'espace qui lui est offert.

2. La masse volumique est la masse par unité de volume. Ainsi si un petit élément de volume dV, centré en M, a une masse dm, on définit la masse volumique en M par $\rho(M) = \dfrac{dm}{dV}$. On distingue traditionnellement, dans l'état fluide, l'état liquide et l'état gazeux, du fait de leurs masses volumiques très différentes (loin du point critique), en gros un facteur 10^3 en faveur des liquides :

- liquide : masse volumique ρ ($kg.m^{-3}$) élevée, la densité est définie par référence à l'eau liquide ($d = \dfrac{\rho}{\rho_{eau}}$). Les liquides sont quasiment incompressibles, donc $\rho_{liq} \approx$ cste.
- gaz : masse volumique ρ ($kg.m^{-3}$) faible, la densité est définie par référence à l'air, $d = \dfrac{\rho}{\rho_{air}} = \dfrac{\text{masse volume de gaz}}{\text{masse même volume d'air}}$, les deux volumes étant mesurés dans les mêmes conditions de température et de pression. Les gaz sont dilatables et compressibles : ρ dépend de T et P.

Pression dans un fluide et équilibre dans le champ de pesanteur

3. Soit une surface S baignant sur sa droite dans un fluide au repos ; elle est matérielle si elle délimite sur sa gauche un solide et immatérielle si elle baigne entièrement dans le fluide. Un élément de surface dS « centré » en un point M, orienté par la normale extérieure $\vec{n}$, subit une force exclusivement normale de la part du fluide de droite :



$$\overline{dF}_S(M) = -P(M)dS\vec{n} = -P(M)\overline{dS}$$

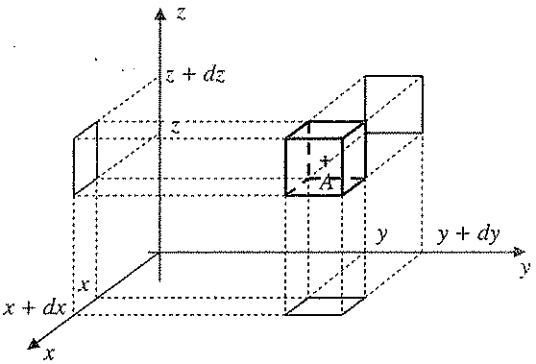
où $P(M) > 0$ est un champ scalaire appelé pression au point M considéré.

Elle s'exprime donc comme la norme de la force pressante par unité de surface :

$$\boxed{P(M) = \frac{\left\| \overrightarrow{dF_s} \right\|}{\left\| \overrightarrow{dS} \right\|}}$$ et son unité est le $N.m^{-2} = Pa$ (Pascal).

La pression au point M ne dépend pas de $\vec{n}$, c'est-à-dire de l'orientation de l'élément de surface dS au point considéré : c'est l'isotropie de la pression.

4. Le parallélépipède élémentaire $dx\,dy\,dz$, de centre A, est en équilibre au sein du fluide sous l'action de son poids : $\rho(A)\,dxdydz\,\vec{g}$ et des forces de pression exercées par le fluide environnant sur chacune de ses faces.



Sur la face arrière :
$+P(x, y_A, z_A)\,dy\,dz\,\vec{u}_x$
Sur la face avant :
$-P(x + dx, y_A, z_A)\,dy\,dz\,\vec{u}_x$
Donc suivant l'axe Ox :

$$\left(P(x, y_A, z_A) - P(x + dx, y_A, z_A)\right) dy\,dz\,\vec{u}_x = -\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,\vec{u}_x$$

De même suivant Oy : $-\dfrac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,\vec{u}_y$ et suivant Oz : $-\dfrac{\partial P}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,\vec{u}_z$

La RFD en projection sur la base cartésienne donne au point A, point quelconque du fluide :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = 0 \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = 0 \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z}\,dx\,dy\,dz - \rho g\,dx\,dy\,dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases}}$$

en rappelant que l'axe Oz est dirigé vers le haut.

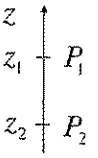
5. $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ P ne dépend pas de x et y, la pression est donc uniforme dans tout plan horizontal d'un même fluide en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre.
Les isobares (surfaces d'égale pression) sont des plans horizontaux perpendiculaires à Oz.
La pression ne dépend donc que de l'altitude z :

$$-\rho g - \frac{dP}{dz} = 0 \quad \text{(dérivée droite puisque } P \text{ ne dépend que de } z\text{)}$$

d'où $\boxed{dP = -\rho g dz}$

(formule importante pour les exercices).

Par intégration $P_2 - P_1 = \int_{z_2}^{z_1} \rho(z) g(z) dz > 0$ fait apparaître que la différence de pression entre les deux points est liée au poids du fluide contenu dans le cylindre de génératrices parallèles à Oz, de base « unité », et de hauteur $z_1 - z_2$.



Le calcul de cette intégrale, donnant accès au champ de pression, nécessite de connaître ou de modéliser $\rho(z)$ suivant la nature du fluide : compressible, incompressible...

6. Dans le système d'équations, on identifie : $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u}_z$.

L'équation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur terrestre s'écrit :

$$\boxed{\rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\, P = \vec{0}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, P$ est dirigé dans le sens de l'augmentation de P, et comme en vecteur il est égal à $\rho \vec{g}$, on en déduit que « la pression augmente dans le sens du champ de pesanteur ».

Ainsi dans l'eau la pression augmente avec la profondeur et dans l'air elle diminue avec l'altitude.

Par nature la résultante des forces de pression est une force surfacique, agissant sur la surface de l'élément de fluide, ainsi la pression représente une norme de force par unité de surface. Le poids apparaît clairement comme une force volumique agissant sur l'ensemble du volume dV de l'élément de fluide, la force par unité de volume étant $\rho \vec{g}$. Avec l'écriture générale de la résultante des forces de pression sous forme $-\overrightarrow{\text{grad}}\, P\, dV$ on passe à un équivalent volumique de la force de pression.

7. La résultante des forces de pression sur une surface quelconque (donc ouverte) S est la somme des forces élémentaires s'exerçant sur chaque élément de surface. Elle s'exprime donc par une intégrale surfacique ou double, étendue à cette surface :

$$\boxed{\vec{F}_{pr} = -\iint_S P(M)\, \overrightarrow{dS}}$$

où $\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}$ est porté par la normale extérieure à la surface dirigée vers le fluide.

L'écriture vectorielle est symbolique et représente, en une seule formule, les trois intégrales scalaires obtenues par projection sur trois directions de l'espace.

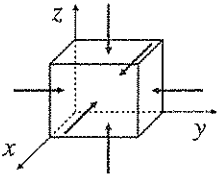
La résultante des forces de pression sur une surface fermée S s'exprime par une intégrale surfacique (avec « le rond » sur l'intégrale double pour « surface fermée ») :

$$\boxed{\vec{F}_{pr} = -\oiint_S P(M)\,\overrightarrow{dS}}$$

Lorsque le champ de pression est uniforme, la pression P ne dépend pas du point M considéré et :

$$\boxed{\vec{F}_{pr} = \vec{0}}$$ sur cette surface fermée.

Considérons par exemple un parallélépipède rectangle ; on comprend bien que si la pression est uniforme, soit $P(x=0) = P(x=l)$, alors la résultante suivant $\vec{u}_x$ est nulle (on pousse autant et en sens opposé sur deux faces parallèles). Il en est de même dans les directions $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$.



Bien sûr le résultat reste vrai pour une surface fermée de forme quelconque plongée dans un champ de pression uniforme.

L'opérateur gradient

8. Un champ scalaire est un scalaire défini en chaque point de l'espace et qui ne dépend que des coordonnées d'espace de ce point.
Exemples : le champ de pression $P(M)$ dans l'atmosphère, le champ de température $T(M)$ le long d'un banc Kofler, le champ d'indice de réfraction $n(M)$ dans un milieu optique transparent non uniforme, le champ de salinité (ou de concentration en sel) $c(M)$ dans l'eau de mer,...

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est toujours dirigé dans le sens de l'augmentation du champ $U(M)$.

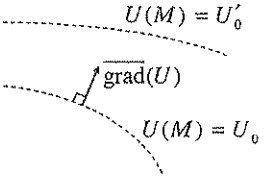
Bien sûr un champ peut être uniforme (alors U est indépendant du point M et $\overrightarrow{\text{grad}}\,U(M) = \vec{0}$), mais en général il dépend de une, deux ou des trois coordonnées du point M ; il est alors non uniforme et présente un gradient non nul, et on parle alors de gradient de pression, gradient de température, gradient d'indice, gradient de concentration,...

9. $U(r) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,U = \dfrac{dU}{dr}\vec{u}_r$ où r est la distance de M à l'axe Oz.

$U(r) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,U = \dfrac{dU}{dr}\vec{u}_r$ où r est la distance de M à l'origine O.

10. Une surface équipotentielle est constituée de l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels $U(M) = cste$.

La relation $dU = \overrightarrow{\text{grad}}\,U.\overrightarrow{dM}$ a pour conséquence que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est orthogonal aux équipotentielles ; en effet, en circulant sur une équipotentielle, $dU = 0$ par définition soit $\overrightarrow{\text{grad}}\,U.\overrightarrow{dM}_{équip.} = 0$ et donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,U \perp \overrightarrow{dM}_{équip.}$. Son sens est celui de l'augmentation de $U(M)$.



Sur le dessin ci-contre, $U_0' > U_0$.
Pour un champ de pression, les surfaces où la pression a même valeur sont qualifiées d'isobares.

Champ de pression dans l'atmosphère terrestre

11. Une masse $dm = \rho dV$ de gaz parfait de masse molaire M et comportant un nombre de moles dn obéit à l'équation :

$$PdV = dnRT = \frac{dm}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{MP}{RT}}$$

12. Le champ de pesanteur g est en $1/(R+z)^2$ où $R = 6\,370$ km est le rayon terrestre et z l'altitude comptée à partir du sol ; jusqu'à quelques dizaines de kilomètres, $z \ll R$ et g apparaît uniforme.
L'atmosphère prise « isotherme » signifie que sa température n'évolue pas avec l'altitude, ce qui n'est vrai (car elle diminue) que sur quelques centaines de mètres. On utilise un modèle isotherme permettant un calcul simplifié.

$$\text{Alors } dP = -\rho g dz = -\frac{MP}{RT}gdz \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz$$

et dans le cadre du modèle g et T indépendants de z, on a après intégration :

$$\boxed{P(z) = P_0\,e^{-\frac{Mg}{RT}z}}$$

où P_0 est la pression atmosphérique au sol $(z = 0)$.
Comme prévu la pression décroît avec l'altitude (c'est la formule dite du « nivellement barométrique » ou plus simplement formule barométrique).

On définit la hauteur d'échelle h par $P(z) = P_0\,e^{-\frac{z}{h}}$ soit $\boxed{h = \frac{RT}{Mg} = 8{,}6 \text{ km}}$

h représente la hauteur sur laquelle la pression diminue d'un facteur $e \approx 2{,}7$.

Au sommet du Mont-Blanc $P = 0{,}57\,P_0$, valeur approchée dans le cadre du modèle isotherme (voir la question **56.**). Ceci montre que la pression atmosphérique dépend fortement de l'altitude : il est possible d'avoir le tiers de la pression normale tout en gardant les pieds sur Terre (l'Everest culmine à plus de 8000 m) et il est nécessaire de corriger les mesures de pression météorologiques de l'altitude (voir la question **40.**). On peut également citer la température d'ébullition de l'eau, liée à la pression atmosphérique, plus basse en altitude : à 3000 m, sous une pression d'environ 0,7 bar, la température d'ébullition de l'eau est d'environ 90°C.

De même l'évolution de la masse volumique proportionnelle, à température constante, à la pression est :

$$\boxed{\rho(z) = \rho_0\,e^{-\frac{Mg}{RT}z}}$$

En altitude, un même volume d'air, à température égale, contient moins de molécules qu'au niveau de la mer. En plus la proportion de dioxygène est plus faible, car $M_{O_2} > M_{N_2}$ et la pression partielle en dioxygène diminue plus rapidement avec l'altitude que la pression partielle en diazote. Ce qui explique les problèmes respiratoires en altitude : dans la ligne ferroviaire des Andes au Pérou, des masques à oxygène sont disponibles pour les touristes ayant du mal à respirer ; certains wagons de la ligne de chemin de fer Pékin-Lhassa, au Tibet, avec 950 km à plus de 4000 m, sont pressurisés. On peut également citer les accidents parfois mortels survenus aux premiers aéronautes tentant des records d'altitude.

La formule barométrique montre d'autre part que dans un récipient de taille limitée (y compris une salle de classe), on peut négliger la variation de pression avec l'altitude et donc parler de « la » pression du gaz (avec l'article défini) : même avec $z = 100$ m, on a $P/P_0 = 0{,}99$. La pression est donc quasi uniforme sur la taille de l'enceinte, négligeant ainsi le poids du gaz sur ces faibles hauteurs.

13. On écrit $\frac{M}{R} = \frac{M}{N_A}\frac{N_A}{R} = \frac{m}{k_B}$ où $k_B = \frac{R}{N_A} = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} est la constante de Boltzmann ($k_B T$ est une énergie) et $m = M / N_A$ la masse d'une molécule.

La densité moléculaire étant, à température uniforme, proportionnelle à la pression ($P(z) = n^*(z) k_B T$), on peut écrire :

$$\boxed{n^*(z) = n_0^* \, e^{-\frac{mgz}{k_B T}}}$$

faisant apparaître que la probabilité pour une particule d'être à l'énergie (ici potentielle) $U = mgz$ est proportionnelle à :

$\boxed{e^{-\frac{U}{k_B T}}}$: c'est le facteur de Boltzmann.

■ Champ de pression dans un liquide

14. On considère un liquide à température uniforme, incompressible (ρ indépendant de P, donc de z), et placé dans le champ de pesanteur uniforme.

Avec les notations de la question **5.**, $dP = -\rho g dz \Rightarrow P_2 - P_1 = \rho g (z_1 - z_2) > 0$.

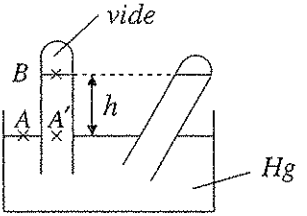
Si la surface libre du liquide est en contact avec l'atmosphère, alors sur cette surface $P_1 = P_0$ localement uniforme : la surface libre d'un liquide en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre est horizontale. C'est aussi le principe des vases communicants.

À la profondeur $h = z_1 - z_2$, la pression vaut :

$$\boxed{P(h) = P_0 + \rho g h}$$

La pression dans le liquide croît linéairement avec la profondeur : c'est la loi de Pascal ou loi fondamentale de l'hydrostatique.

15. Un (long) tube à essai rempli de mercure (symbole Hg pour hydrargyrum = argent liquide) est retourné sur une cuve à mercure. Pour un tube suffisamment long et quelle que soit son inclinaison, il apparaît une surface libre (point B) avec une dénivellation h par rapport à la surface libre en contact avec l'atmosphère (point A).



Soit A' un point dans le tube au même niveau que A : $P_A = P_{A'} = P_B + \rho_{Hg} g h$; or $P_A = P_0$ la pression atmosphérique et $P_B \approx 0$ (la pression de vapeur saturante du mercure peut être négligée aux températures usuelles), d'où :

$$\boxed{P_0 = \rho_{Hg} g h}$$

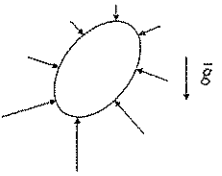
ce qui constitue le principe du baromètre de Torricelli donnant la pression atmosphérique P_0 à partir de la lecture de la dénivellation h. Il est ainsi possible d'exprimer les pressions en hauteur de liquide.

Torricelli, en 1643, met ainsi en évidence, sans la comprendre, l'existence de la pression atmosphérique ; l'interprétation en terme de pression atmosphérique a été établie par Pascal en 1649.

AN : $\underline{P_0} = 13{,}6.10^3 \times 9{,}81 \times 0{,}76 = \underline{1{,}013.10^5 \text{ Pa}}$.

Poussée d'Archimède

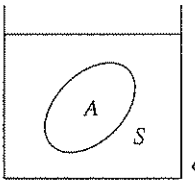
16. Que l'on soit dans un liquide (un sous-marin) ou dans un gaz (un aérostat), la pression augmente dans le sens de $\vec{g}$. Le dessin ci-contre pour un corps totalement immergé dans un fluide, où les flèches représentent les forces de pression, montre que la force globale sur la partie inférieure du corps est supérieure à la force globale sur la partie supérieure, indiquant que le corps subit de la part du fluide une poussée verticale ascendante.



17. Le cas le plus général concerne l'action d'un fluide quelconque sur un corps quelconque *totalement* immergé.

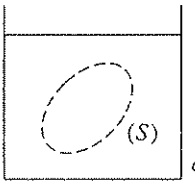
Soient les deux situations :

Cas 1 : Le corps A est totalement immergé dans un fluide au repos ; il est en équilibre car un opérateur extérieur le maintient dans cet état. On se propose de déterminer la force $\vec{\Pi}$ qu'exerce le liquide sur lui, on note V son volume et S sa surface, lorsqu'il est dans le fluide et à l'équilibre.



cas 1

Cas 2 : On remplace par la pensée tout le volume occupé par le corps A dans le cas 1 par la quantité nécessaire de fluide. Ce fluide (fictif) occupe le volume V et présente une surface de contact (S) avec le fluide environnant ayant la même forme que le corps A dans le cas 1.



cas 2

L'action du fluide sur A dans le cas 1 est la même que l'action du fluide extérieur à (S) sur le fluide intérieur à (S) dans le cas 2, avec l'hypothèse d'un champ de pression inchangé dans le fluide extérieur car ne dépendant *a priori* que de la forme de (S) et pas de sa texture.

Or l'équilibre, dans le référentiel terrestre galiléen, du fluide intérieur à (S) impose que cette action $\overline{\Pi}$ soit opposée au poids du fluide intérieur à (S).

Énoncé du théorème d'Archimède : « Tout corps plongé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force verticale ascendante égale à l'opposé du poids de fluide déplacé ».

$$\boxed{\overline{\Pi} = -m^* \vec{g}} \quad m^* \text{ masse de fluide déplacé}$$

Cette force s'applique au centre de masse du fluide déplacé (dans un champ de pesanteur uniforme) qui est *a priori* différent du centre de masse du corps immergé.

Attention au sens de « déplacé », dans le théorème, qui signifie fluide à mettre à la place du corps pour garder le même champ de pression et qui ne correspond à aucun déplacement réel.

La poussée d'Archimède *est* la résultante des forces de pression, c'est la non uniformité du champ de pression, dans le fluide, qui en est responsable.

La poussée d'Archimède ne résout pas tous les problèmes de calcul des forces de pression, elle reporte le problème sur le calcul de m^*, si le fluide est incompressible et le corps indéformable : $m^* = \rho_0 V$, ρ_0 masse volumique uniforme du fluide et V volume du solide.

Applications directes du cours

18. En supposant l'atmosphère isotherme et en prenant l'axe Oz suivant la verticale ascendante avec l'origine $z = 0$ au niveau de la Mer Méditerranée (toute proche) où la pression normale est $P_0 = 760$ mmHg, la loi du nivellement barométrique dans l'air $P(z) = P_0 \, e^{-\frac{Mg}{RT}z}$ donne :

$$z = -\frac{RT}{Mg} \ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{8{,}31 \times 298}{29.10^{-3} \times 9{,}81} \ln \frac{796}{760} = -403 \text{ m}$$

Bien sûr, avec $P > P_0$, il était prévisible que $z < 0$; le niveau de la Mer Morte se trouve à plus de 400 m sous le niveau moyen des mers. Rappelons que jadis elle était reliée à la Mer Rouge, que l'évaporation progressive de l'eau l'en a isolée en faisant énormément baisser son niveau, et corrélativement augmenter sa salinité y empêchant toute forme de vie (d'où son nom), permettant à son eau plus dense une grande flottabilité du corps humain…

19. Avec $z \ll h$, $P(z) = P_0 \, e^{-\frac{z}{h}} = P_0 \, e^{-\frac{Mg}{RT}z} \approx P_0 \left(1 - \frac{Mgz}{RT}\right)$

$$\Rightarrow \quad P(z) - P_0 = -\frac{MP_0}{RT} gz = -\rho_0 gz$$

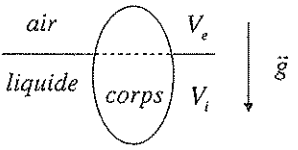
Au premier ordre, on retrouve la loi de Pascal ; en effet la masse volumique de l'air diminue peu sur des altitudes $z \ll h$, et par conséquent la formule des fluides incompressibles (liquides) s'applique.

20. $h_{eau} = \dfrac{P_0}{\rho_{eau} g} = 10{,}3$ m soit 13,6 fois la hauteur de mercure (76 cm) ; on comprend pourquoi les baromètres à liquide ne fonctionnent pas à l'eau !
Cela signifie également qu'on ne peut pas faire jaillir l'eau des fontaines à plus de 10 m de hauteur ou qu'il est impossible de puiser l'eau d'un puits de plus de 10 mètres de profondeur à l'aide de la seule pression atmosphérique.
Autre conséquence, dans l'eau, la pression augmente d'une atmosphère tous les 10 m ; et donc à 50 m sous le niveau de la mer, les plongeurs respirent sous 6 atm.

21. Il s'agit rigoureusement de la même unité :

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow 1 \text{ mbar} = 10^2 \text{ Pa} = 1 \text{ hPa}.$$

22. Soit $V = V_i + V_e$ le volume du corps où V_i est le volume immergé et V_e le volume émergé. L'équilibre du corps se traduit par $m\vec{g} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ soit en projection sur la verticale ascendante et en négligeant la poussée d'Archimède due à l'air par rapport à celle due au liquide (car $\rho_{air} \ll \rho_{liquide}$) :



$\rho_s(V_e + V_i)g - \rho_l V_i g = 0$ (1) soit $\rho_s V_e = (\rho_l - \rho_s)V_i = 0$ ce qui suppose $\boxed{\rho_s < \rho_l}$

Seuls les corps moins denses que le liquide flottent sur le liquide ; c'est le cas d'une bille de fer ($\rho_s = 7{,}8$ g/cm^3) qui flotte sur le mercure ($\rho_l = 13{,}6$ g/cm^3) et bien sûr de la glace sur l'eau (une bouteille remplie d'eau et fermée, mise au congélateur, se brise !).

23. Le densimètre plongé dans le liquide dont on veut mesurer la densité, flotte sur ce liquide et la lecture se fait sur les graduations au niveau de la surface libre. Dans l'eau la surface libre doit correspondre avec la graduation 1,00. L'équilibre du densimètre s'écrit : $m\vec{g} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ soit en projection sur la verticale ascendante et en négligeant la poussée d'Archimède due à l'air par rapport à celle due au liquide :

$$-mg + \rho h S = 0 \quad \text{où } h \text{ représente la partie immergée.}$$

AN : $\rho = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3} pour l'eau (densité 1 par définition) donne $h = 25{,}0$ cm, soit une graduation 1,00 à 3,0 cm du bord supérieur.

Les alcoomètres fonctionnent sur le même principe, la quantité d'alcool présente se traduisant par des différences de masse volumique.

24. La pression intérieure dans chaque pneu est donc : $P_{int} = 3{,}0$ bar. On considère que la déformation du pneu ne modifie pratiquement pas son volume et donc, qu'à température constante, la pression reste la même. Pour un pneu : $\dfrac{M}{4}\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$,

d'autre part la force exercée par un pneu sur le sol est : $P_{int} S \vec{u}_z = -\vec{R}$; il vient donc :

$$\boxed{S = \frac{Mg}{4P_{int}}}$$

AN : $S = 12.10^{-3}$ m^2 $= 120$ cm^2, ce qui paraît un bon ordre de grandeur.

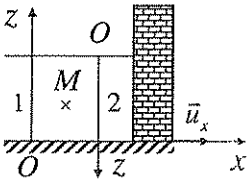
En roulant la température augmente, donc la pression augmente (à volume constant), la surface de contact diminue.

25. La relation (1) de la question **22.** donne directement le rapport du volume immergé au volume total : $\frac{V_i}{V} = \frac{V_i}{V_i + V_e} = \frac{\rho_s}{\rho_l} = 92\,\%$. Si on considère la masse volumique de l'eau salée $\rho_l = 1{,}03\,\text{kg.L}^{-1}$ on obtient 89 %, d'où le drame du Titanic...

26. Résultante des forces de pression sur un barrage plan

Il convient d'abord de choisir l'orientation de l'axe Oz et de fixer l'origine O avant d'exprimer la pression dans l'eau. Plusieurs solutions sont possibles.

* Si Oz est suivant la verticale ascendante avec O au fond (situation 1 où h désigne la surface), alors $P(z) = P_0 + \rho g(h - z)$ ($P \searrow$ lorsque $z \nearrow$ et $P(h) = P_0$).
* Si Oz est suivant la verticale descendante avec O en surface (situation 2 où h désigne le fond), alors $P(z) = P_0 + \rho g z$ ($P \nearrow$ lorsque $z \nearrow$ et $P(0) = P_0$).



Gardons cette dernière orientation.

La pression ne dépendant que de la profondeur, choisissons un élément de surface du mur sous la forme d'une bande rectangulaire de longueur L et de largeur dz. L'élément de surface $d\vec{S} = Ldz\,\vec{u}_x$ du mur du barrage est soumis côté eau à une pression $P(z)$ (dont la force associée est dirigée suivant $\vec{u}_x$) et côté air à la pression P_0 uniforme (dont la force associée est dirigée suivant $-\vec{u}_x$).

La force élémentaire de pression totale est $d\vec{F} = \left(P(z) - P_0\right) d\vec{S} = \rho g z L dz\,\vec{u}_x$.

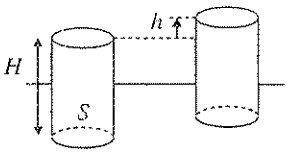
Sur l'ensemble du mur, toutes les forces élémentaires étant portées par $\vec{u}_x$, il en est de même de la résultante $\vec{F}$ dont la composante sur $\vec{u}_x$ est donc la somme des composantes sur $\vec{u}_x$ des forces élémentaires. Elle s'obtient par intégration sur toute la hauteur d'eau :

$\vec{F} = \rho g L \left(\int_0^h z dz \right) \vec{u}_x$; l'intégrale vaut $\frac{h^2}{2}$, d'où la résultante :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2} \rho g L h^2 \vec{u}_x}$$

Rq : La partie hors d'eau du mur subit une résultante nulle puisque la pression de l'air est la même de part et d'autre.

27. Le bouchon cylindrique a une surface de base S, une hauteur H, une masse volumique ρ_s ; son équilibre dans l'eau de masse volumique ρ_l conduit à un volume immergé donné par la relation :



$$\rho_s SH = \rho_l V_i^{éq} \quad (1)$$

en négligeant la poussée d'Archimède dans l'air.

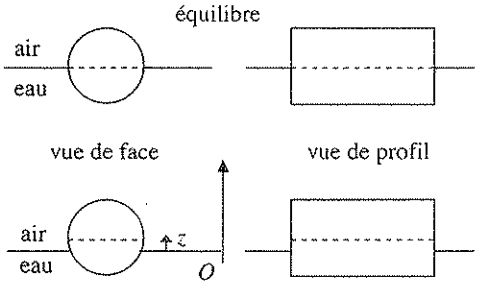
Soit h l'écart en dynamique par rapport à la position d'équilibre, alors la relation fondamentale de la dynamique projetée sur la verticale ascendante donne :

$$\rho_s SH\ddot{h} = -\rho_s SHg + \rho_l (V_i^{éq} - hS)g \overset{(1)}{=} -\rho_l hSg \quad \text{ou encore} \quad \ddot{h} = -\frac{\rho_l g}{\rho_s H} h$$

conduisant à des oscillations sinusoïdales de période $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_s H}{\rho_l g}}$

A.N. : $T \approx 0{,}3\,\text{s}$ avec $\dfrac{\rho_s}{\rho_l} \approx 0{,}5$ et hauteur $H \approx 5\,\text{cm}$. La situation est fortement modélisée et l'expérience difficile à réaliser.

Avec le bouchon horizontal :



Équilibre :

$$-\rho_s SHg + \rho_l \frac{SH}{2} g = 0$$

ce qui suppose $\rho_s = \dfrac{\rho_l}{2}$.

Pour un déplacement $z \ll R$ et au premier ordre : $\delta V \approx 2RHz$

$$V_i = \frac{V}{2} - dV = \frac{V}{2} - 2RHz$$

Le principe fondamental en projection sur Oz :

$m\ddot{z} = -\rho_s Vg + \rho_l V_i g$ et avec $m = \rho_s V \Rightarrow \ddot{z} + \dfrac{4g}{\pi R} z = 0$ soit une période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi R}{4g}}.$$

A.N. : pour $R = 1\,\text{cm}$, $T \approx 0{,}2\,\text{s}$ du même ordre que le cas précédent.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

28. La masse volumique de l'air à 20 °C est de $1{,}2\,\text{g/L} = 1{,}2\,\text{kg.m}^{-3}$:

- volume d'une salle de classe $12\times8\times4 \approx 400\ \text{m}^3$ correspondant à une masse d'air d'environ 500 kg.
- volume du plus petit parallélépipède contenant la tour Eiffel :

$125 \times 125 \times 324 = 5{,}06.10^6$ m^3 contenant une masse d'air d'environ 6 100 tonnes, du même ordre de grandeur que la masse de la charpente métallique de la tour !

29. Dans 100 m^3 d'eau de mer, il y a 3,8 tonnes de sel (38 g/L = 38 kg.m^{-3}).
À l'eau douce, le remplissage revient à 300 €..

30. Bouteille de champagne : 6 bar (les producteurs disent 6 kg, par cm^2 bien sûr), un autocuiseur : de 1,5 à 2 atm, une cafetière Nespresso® : 19 bar, l'eau d'un chauffage central : de 1,5 à 2 bar, une bouteille de plongée : 200 bar, un anticyclone : vers 1 030 hPa ou plus...
Pour une dépression atmosphérique : vers 990 hPa ou moins, la dépression dans un aspirateur : de l'ordre de 30 kPa (soit une pression intérieure de 0,7 atm).

31. À une altitude de croisière de 10 000 m, la pression extérieure est de l'ordre de 35 kPa (soit 0,35 atm) pour une température de –50°C ; pour assurer le confort des passagers, les avions sont pressurisés à une pression d'environ 80 kPa (soit 0,8 atm), pression bien supérieure à la pression extérieure mais qui n'atteint pas la valeur de la pression normale au sol...

32. Le phénomène d'aquaplaning se produit lorsque la pression dans le film d'eau qui se forme devant le pneu est supérieure à la pression du pneu lui-même. Le film d'eau résiste alors à l'écrasement et passe sous le pneu. Il faut donc augmenter la pression des pneus et diminuer la vitesse ce qui diminue la pression du film d'eau. Les pneus des camions sont à des pressions supérieures aux pressions des voitures. La surface de contact pneu-route n'intervient pas directement.

33. Non car en statique, en l'absence de mouvements relatifs entre les différentes couches de fluide, les contraintes tangentielles (forces de viscosité) disparaissent ; seules demeurent les contraintes normales (forces de pression).

34. Dans la loi de la statique des fluides (voir question **6.**) la force de pression apparaît comme une force de réaction au poids.
Pour un gaz enfermé dans une enceinte de dimension finie, négliger le poids rend négligeable cet aspect de la pression. On interprète alors la pression dans le gaz (mesurable avec un manomètre comme à la question **3.**) avec le mouvement des molécules venant frapper la paroi du manomètre. L'ensemble de ces chocs se traduit par une force moyenne sur dS et donc une pression qualifiée de cinétique. Le chapitre **10** reprendra en détail cette description.

35. Il y a d'abord la « pression cinétique » P_c, proportionnelle à la densité particulaire n^*, et qui résulte des chocs des molécules sur une paroi ou du transfert de quantité de mouvement par échange de molécules à travers une surface fictive du fluide (valeur calculée dans le chapitre **10** : $P_c = \frac{1}{3} n^* m u^2$). Puis la « pression moléculaire » P_m qui résulte des interactions entre les molécules, elle est faible pour

les gaz (nulle pour les gaz parfaits) et forte pour les liquides (où P_c est forte aussi car n^* l'est).
Dans l'atmosphère c'est la pression cinétique qui intervient (la pression moléculaire y est négligeable) ; comme tous les gaz, l'air est compressible et c'est l'augmentation de la densité moléculaire n^* sous l'effet du poids de la colonne d'air qui explique l'augmentation de la pression aux basses altitudes (le sens de $\vec{g}$).
En revanche, dans un liquide (peu compressible), sous l'effet du poids de la colonne de liquide, n^* reste pratiquement constant et donc la pression cinétique aussi ; néanmoins les molécules se tassent très légèrement en profondeur, ce qui suffit par l'intermédiaire des interactions moléculaires, à faire augmenter très vite la pression moléculaire.

36. Comme on l'a montré à la question **10.**, $\overrightarrow{\text{grad}}(U)$ est orthogonale aux équipotentielles (surfaces telles que $U = \text{cste}$). La relation $\rho\,\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}\,P$ indique que les isobares (surfaces telles que $P = \text{cste}$) sont normales aux lignes de champ du champ de pesanteur $\vec{g}$. Ce sont donc localement des plans horizontaux.

37. D'après la question précédente les surfaces isobares dans le champ de pesanteur terrestre sont, localement, des plans horizontaux $z = cste$; les niveaux d'un *même* liquide « communicant » dans différentes branches d'un « vase » et en contact avec une atmosphère imposant la pression P_0 sont donc tous à la même altitude.

38. Les isobares (surfaces de niveau telles que $P = cste$) sont normales aux lignes de champ du champ de pesanteur $\vec{g}$ (la pression augmente à cause du poids de la colonne de fluide...). Dans un problème à symétrie sphérique (statique d'une étoile comme à la question **58.**), le champ de gravitation étant partout dirigé vers le centre O, les isobares sont des sphères de centre O.

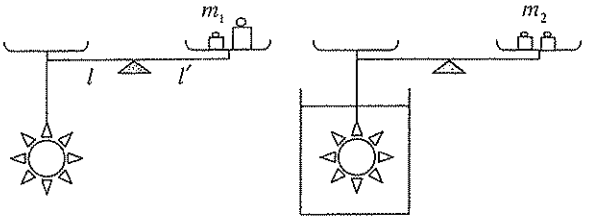
39. Les baromètres indiquent « variable » autour de 1 013 hPa , « beau temps » à partir de 1 025 hPa et « pluie-vent » en dessous de 995 hPa . Mais plus que la valeur de la pression atmosphérique c'est sa fluctuation (les météorologistes disent « la tendance de pression ») qui importe pour prédire le temps qu'il fera : une pression à la hausse est signe de beau temps alors qu'une pression à la baisse annonce généralement l'arrivée des nuages...

40. Les variations de pression permettant les prévisions météorologiques sont comprises entre 0,99 bar et 1,03 bar, donc petites par rapport aux variations liées aux différences d'altitude. Il faut donc corriger la pression mesurée en un lieu de son altitude, c'est-à-dire ramener sa valeur au niveau de la mer avec la formule barométrique. Sinon les cartes d'isobares seraient tous les jours les mêmes : des cartes de lignes de niveau, représentant les reliefs géographiques.

41. Dans un liquide la loi de Pascal $P(h) = P_0 + \rho g h$ indique que si P_0 varie de δP_0, alors $P(h)$ varie également de δP_0, et ceci $\forall h$; ceci confirme que les liquides transmettent intégralement et en tout point les variations de pression.

Ainsi une force f appliquée sur une faible surface s peut engendrer une force beaucoup plus importante F sur une grande surface S : $F = \frac{S}{s} f$ en écrivant la transmission de la pression.
Applications : transmission hydraulique, presse hydraulique.

42. Les métaux ont des masses volumiques assez différentes, celle de l'or est une des plus grandes. Pour déterminer la masse volumique de la couronne, la mesure de la masse ne pose pas de problème, mais la détermination du volume est évidemment beaucoup plus difficile. Archimède, Grec vivant à Syracuse (en Sicile) au 3e siècle avant JC propose soit de déterminer directement le volume grâce au volume d'eau ayant débordé d'un récipient rempli à ras bord en immergeant totalement la couronne, soit de façon plus précise en mesurant le poids de la couronne dans l'air puis son poids apparent quand elle est plongée dans de l'eau .



Il vient pour les deux équilibres, avec l'égalité des moments :

$$\begin{cases} \rho_m V g l = m_1 g l' \\ (\rho_m - \rho_e) V g l = m_2 g l' \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho_m}{\rho_m - \rho_e} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \boxed{\rho_m = \rho_e \frac{m_1}{m_1 - m_2}}$$

Pour de l'or pur, $\rho_m \approx 20\,\rho_e$, on doit avoir $m_1 - m_2 = \frac{m_1}{20}$.

Or Archimède constate que la couronne dans l'eau perd plus du vingtième de son poids : le roi a été trompé !
Remarquer que le raisonnement suppose un objet plein, si la couronne possède des parties creuses, on trouve une masse volumique moyenne plus petite que la masse volumique du métal.

43. Car la poussée liée au poids du liquide déplacé (force verticale ascendante) est très supérieure au poids du gaz déplacé (force verticale descendante) et ceci car $\rho_{gaz} \approx \rho_{liquide} / 1000 \ll \rho_{liquide}$.

44. Comme le glaçon dépasse du niveau d'eau, on peut penser que sa fonte va augmenter le niveau, mais d'autre part le volume d'eau récupéré par la fonte est inférieur au volume du glaçon, alors...? Avec les notations de la question **22.**, le glaçon de volume $V_e + V_i$ a pour masse $\rho_s(V_e + V_i)$ soit exactement $\rho_i V_i$ d'après la relation d'équilibre ; or ceci représente après la fonte un volume d'eau égal à V_i, preuve que le niveau d'eau dans le verre n'est pas affecté par la fonte du glaçon. Cependant en toute rigueur, la partie supérieure du glaçon subit une poussée d'Archimède dans l'air, donc le volume immergé dans l'eau est un peu plus petit et

le niveau d'eau augmente théoriquement après la fonte du glaçon (cette augmentation infime n'est pas mesurable, voir la question **43.**).

45. On note M la masse de la bille, m la masse de la coquille et ρ la masse volumique de l'eau. L'équilibre dans chaque cas, en négligeant la poussée d'Archimède dans l'air, donne :

bille dans la coquille : $(M+m)\vec{g} - \rho V_1 \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow V_1 = (M+m)/\rho$

bille dans l'eau : $m\vec{g} - \rho V_2' \vec{g} = \vec{0}$ et la bille occupe $V_2'' = M/\rho_{bille}$

$$\Rightarrow V_2 = V_2' + V_2'' = \frac{m}{\rho} + \frac{M}{\rho_{bille}} < V_1 \text{ car } \rho_{bille} > \rho$$

Le volume d'eau effectivement déplacé est plus petit quand la bille est dans l'eau, le niveau d'eau par rapport au bord du récipient est plus bas.

46. Pour une masse sensiblement identique, le volume total du corps (par celui de la cage thoracique) augmente, ce qui permet de bénéficier d'une poussée d'Archimède plus importante (de manière équivalente on peut dire que la densité du corps, voisine de 1, diminue lorsque les poumons sont gonflés). L'eau de mer, par sa salinité, étant légèrement plus dense que l'eau douce, pour un volume donné du corps, la poussée d'Archimède est plus importante assurant une meilleure flottabilité (en particulier dans la Mer Morte...).

47. Contrairement à la question précédente, il n'est pas possible d'agir sur le volume du sous-marin (la coque métallique du sous-marin est de volume invariable). Ceci signifie que la poussée d'Archimède n'est pas modifiable. Pour permettre les descentes et les remontées, on ne peut donc compter que sur une modification du poids propre. Les sous-marins possèdent une double coque, en forme de poche (les ballasts). Initialement remplis d'air lorsque le sous-marin est en surface, ces réservoirs étanches sont progressivement remplis d'eau de mer pour alourdir le sous-marin et lui permettre de plonger. Lorsqu'il souhaite remonter, les ballasts sont vidés de leur lest grâce à de l'air comprimé qui en se détendant en chasse l'eau et allège le submersible qui peut refaire surface...

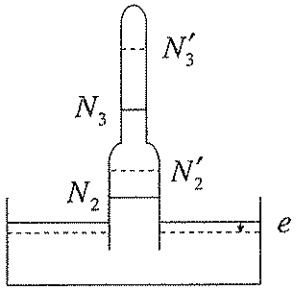
48. Le poids apparent, défini comme le poids réel soulagé par la poussée d'Archimède est très faible en milieu aqueux ; cela permet de porter l'effort sur les seuls exercices liés à la rééducation fonctionnelle des membres inférieurs sans que ceux-ci n'aient à supporter le poids du reste du corps.

Exercices

49. Baromètre d'Huygens, à deux liquides

Notons P_0 la pression correspondant à H_0 mmHg (en trait plein sur la figure) et $P_0 + \rho g h$ celle correspondant à $(H_0 + h)$ mmHg (en pointillé).

L'augmentation de la pression atmosphérique fait baisser le niveau extérieur initial du mercure (pris comme référence 0) de $e>0$. Le niveau intérieur du mercure s'élève de N_2 à N_2' et celui de la glycérine de N_3 à N_3' avec $N_3'-N_3=h'$.



La loi de Pascal s'écrit directement du niveau le plus bas au niveau le plus haut en considérant les dénivellations dans les deux liquides de masses volumiques différentes :

– équilibre 1 : $P_0=0+\rho g(N_2-0)+\rho' g(N_3-N_2)$ (1)

– équilibre 2 : $P_0+\rho gh=0+\rho g(N_2'+e)+\rho' g(N_3'-N_2')$ (2)

Par différence (2) – (1) : $\rho h=\rho(N_2'-N_2+e)+\rho'(N_3'-N_3-(N_2'-N_2))$ (3)

Les fluides étant incompressibles, la conservation des volumes donne :

$$e(S_1-S_2)=(N_2'-N_2)S_2=h'S_3 \Rightarrow N_2'-N_2=\frac{S_3}{S_2}h' \text{ et } e=\frac{S_3}{S_1-S_2}h' \quad (4)$$

Les résultats (3) et (4) conduisent alors à : $\boxed{\dfrac{h'}{h}=\dfrac{1}{\dfrac{S_3}{S_2}+\dfrac{S_3}{S_1-S_2}+\dfrac{\rho'}{\rho}\left(1-\dfrac{S_3}{S_2}\right)}}$

AN : $\dfrac{h'}{h}=8{,}6$ rendant le baromètre d'Huygens bien plus sensible que celui de Torricelli.

50. Estimation de la masse de l'atmosphère terrestre

a) La loi du nivellement barométrique, $P(z)=P_0e^{-z/h}$, conduit pour un gaz parfait à température T uniforme, à $\rho(z)=\rho_0e^{-z/h}$ où z est l'altitude comptée à partir de la surface terrestre.

La masse dM_a de l'atmosphère dans une coquille sphérique de rayon $r>R$ et d'épaisseur $dr=dz$ car $r=R+z$ est : $dM_a=\rho_0e^{-z/h}4\pi r^2dz$.

Pour intégrer cette formule sur toute l'atmosphère, on procède à deux approximations :

– sachant que son épaisseur est petite devant le rayon terrestre R, on fait $4\pi r^2\approx 4\pi R^2$; de plus $g\approx cste$ entraîne $h=cste$,

– sachant que son épaisseur est grande devant h, on fait porter l'intégrale sur z de 0 à l'∞.

Alors $M_a\approx\rho_0 4\pi R^2\int_0^\infty e^{-z/h}dz \Rightarrow \boxed{M_a\approx\rho_0 4\pi R^2h}$

Ce résultat exprime que si la masse volumique était uniforme et égale à ρ_0, l'épaisseur de l'atmosphère serait (seulement !) de h.

AN : $\rho_0 = 1{,}3\ \text{kg.m}^{-3}$ (air à 0 °C sous pression normale), $R = 6\,400$ km et $h = 8{,}0$ km donnent $\underline{M_a \approx 5.10^{18}\ \text{kg}}$, soit un millionième de la masse terrestre (6.10^{24} kg).

b) L'atmosphère « appuie » sur la Terre avec la même vigueur que 760 mm Hg ; la masse d'air de l'atmosphère est donc celle d'une « mer » de mercure entourant la Terre et d'épaisseur $e = 760$ mm :

$$M_a = \rho_{Hg} 4\pi R^2 e \quad \text{soit} \quad \underline{M_a \approx 5.10^{18}\ \text{kg}}$$

51. Fonte d'un glaçon

a) À l'équilibre : $\rho_{glace} V_0 \vec{g} - \rho_{liq} V_{im} \vec{g} = \vec{0}$, en négligeant la poussée d'Archimède dans l'air sur la partie émergée. Il vient $\boxed{V_{im} = V_0 \dfrac{\rho_{glace}}{\rho_{liq}}}$

A.N. : $\dfrac{V_{im}}{V_0} = 0{,}92$, on retrouve la proportion immergée classique. La valeur du rapport est plus significative que la valeur de V_{im} que l'on pourrait déduire d'une valeur arbitraire de V_0.

b) Le raisonnement est celui de la question **44.** : $\boxed{h_1 = h_0}$

c) Le glaçon correspond à de l'eau douce. Avec le nouveau volume immergé V'_{im} :

$$\rho_{glace} V_0 \vec{g} - \rho_{salée} V'_{im} \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow V'_{im} = V_0 \frac{\rho_{glace}}{\rho_{salée}} < V_{im} = V_0 \frac{\rho_{glace}}{\rho_{liq}} \quad \text{car} \quad \rho_{salée} > \rho_{liq}$$

soit $\boxed{h_1 > h_0}$

d) L'équilibre se traduit par :

$$\rho_{glace}(V_0 - V_{liège}) \vec{g} + \rho_{liège} V_{liège} \vec{g} - \rho_{liq} V''_{im} \vec{g} = \vec{0}$$

$$V''_{im} = V_0 \left[\frac{\rho_{glace}}{\rho_{liq}} (V_0 - V_{liège}) + \frac{\rho_{liège}}{\rho_{liq}} V_{liège} \right]$$

Après la fonte du glaçon, la bille de liège flotte sur l'eau et « déplace » un volume d'eau : $\left[\dfrac{\rho_{liège}}{\rho_{liq}} V_{liège} \right]$. De plus l'eau liquide résultant de la fonte du glaçon correspond au volume $\left[\dfrac{\rho_{glace}}{\rho_{liq}} (V_0 - V_{liège}) \right]$ et la somme des deux correspond à V''_{im} ; on en déduit

$$\boxed{h_2 = h_0}$$

52. La Terre vue d'un ballon d'hélium

On obtient avec $P = P_0\, e^{-\frac{z}{h}}$, une pression de l'ordre de $2.10^{-2} P_0$ à 30 km.

Avec une masse de 3 kg pour l'ensemble enveloppe, parachute, camera et hélium dans le ballon, il faut au départ un volume $V_0 > \dfrac{m}{\rho_{0,air}} \approx \dfrac{3}{1,2} \approx 2,5\,\text{m}^3$, soit un rayon $R = \left(\dfrac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ de l'ordre de 80 cm. Avec ce volume la masse d'hélium dans les conditions normales est $\rho_{He} V_0 = \rho_0 \dfrac{M_{He}}{M_{air}} V_0 \approx 3\dfrac{4}{29} \approx 0,4\,\text{kg}$, cohérent avec la masse m choisie.

Le point important est que le ballon soit fermé, donc la masse d'hélium est constante. Lors de l'ascension la pression de l'air environnant diminue et le volume d'hélium, donc du ballon, augmente tant que l'enveloppe résiste. On néglige pour l'instant les variations de température.

Avec un éclatement à 30 km on obtient un volume à atteindre pour l'enveloppe : $V_1 = \dfrac{m}{\rho_1} = V_0 \dfrac{\rho_0}{\rho_1} = V_0 \dfrac{P_0}{P_1}$ de l'ordre de $125\,\text{m}^3$ soit un rayon de 3 m, le rayon initial multiplié par 4, soit une élasticité plausible pour une enveloppe en caoutchouc.

En pratique, l'éclatement permet une récupération des instruments, il faut donc que l'altitude atteinte soit suffisante pour que le ballon éclate et il faut donc une masse embarquée pas trop grande.

Discussion du modèle : si on considère les variations de température, on a $V_1 = \dfrac{m}{\rho_1} = V_0 \dfrac{\rho_0}{\rho_1} = V_0 \dfrac{P_0}{P_1}\dfrac{T_1}{T_0}$, le rapport de température ne modifie par l'ordre de grandeur de V_1. L'application de la formule de nivellement barométrique pour la stratosphère (altitude supérieure à 10 km) pose plus de problèmes, la pression à 30 km d'altitude est plutôt de l'ordre de $10^{-2}\, P_0$ et la température de $-40°\text{C}$.

Lors de son record de saut en chute libre en octobre 2012, Félix Baumgartner avait atteint l'altitude de 39 km grâce à un ballon d'hélium ouvert.

53. Choix de la masse volumique du bouchon d'une chasse d'eau (*)

a) Lors de la vidange le bouchon peut être maintenu en position haute grâce à la poussée d'Archimède, dont on admet la validité pour un écoulement lent, et qui doit donc être supérieure en norme au poids du bouchon :

$$\text{soit } \boxed{\rho < \rho_e} \quad (1)$$

Si le bouchon est trop dense, il tombe au fond, se plaque contre le joint et empêche la vidange.

b) La pression étant la même dans tout plan horizontal, la résultante des forces de pression est nulle dans le plan horizontal. On ne s'intéresse qu'à la résultante verticale $\vec{F} = F.\vec{u}_z$; le système étudié est le bouchon.

Rq : L'application du théorème d'Archimède n'est pas possible puisque le bouchon n'est pas totalement immergé dans les fluides (eau ou air), une partie du bouchon repose par le joint sur le tuyau d'évacuation.

* pour $x < h$, la pression sur le dessus en contact avec l'air est P_0 sur la surface $S = \pi D^2/4$; sur le dessous, la pression $P_0 + \rho_e g x$ de l'eau s'applique sur la surface $S - s$ et la pression P_0 de l'air sur la surface $s = \pi d^2/4$

la résultante est $F = -[P_0 S] + [(P_0 + \rho_e g x)(S - s) + P_0 s]$ soit

$$\boxed{F = \rho_e g (S - s) x}$$

* pour $x > h$, la pression sur le dessus en contact avec l'eau de hauteur $x - h$ est $P_0 + \rho_e g(x - h)$ sur la surface S ; sur le dessous, la pression $P_0 + \rho_e g x$ de l'eau s'applique toujours sur la surface $S - s$ et la pression P_0 de l'air sur la surface s

$F = -[(P_0 + \rho_e g(x-h))S] + [(P_0 + \rho_e g x)(S - s) + P_0 s]$ soit $\boxed{F = \rho_e g (Sh - sx)}$

c) Lors du remplissage, le bouchon doit rester plaqué sur le joint, donc la réaction R ($\vec{R} = R.\vec{u}_z$) du support doit être positive :

$$R = mg - F > 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad mg = \rho S h g > F$$

Pour $x < h$, on a alors : $\rho S h g > \rho_e g (S - s) x$ soit $\rho > \rho_e \dfrac{S - s}{Sh} x$

Pour $x > h$, on a alors : $\rho S h g > \rho_e g (Sh - sx)$ soit $\rho > \rho_e \dfrac{Sh - sx}{Sh}$

La condition sur ρ est obtenue pour $x = h$ (valeur maximale du minorant).

On obtient alors : $\boxed{\rho > \rho_e \dfrac{S - s}{S} = \rho_e \dfrac{D^2 - d^2}{D^2}}$ (2)

Si le bouchon est trop peu dense, il décolle du joint ce qui évacue l'eau et le remplissage ne peut plus se faire.
Remarquer que lors de la vidange, x pouvant devenir nul, le bouchon finit toujours par retomber.

d) En réunissant les inégalités (1) et (2), il vient l'encadrement :

$$\boxed{\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)\rho_e < \rho < \rho_e}$$

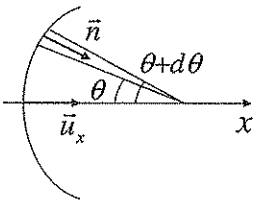
AN : $0{,}31.10^3 \text{ kg.m}^{-3} < \rho < 1{,}0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, soit une bonne marge de manœuvre ; on peut aussi plus simplement à ρ donnée, modifier le rapport d/D.

54. Résultante des forces de pression sur un barrage (*)

Il convient ici de choisir l'orientation de l'axe Oz et de fixer l'origine O avant d'exprimer la pression dans l'eau.

On choisit Oz suivant la verticale descendante avec O en surface, alors $P(z) = P_0 + \rho g z$ ($P \nearrow$ lorsque $z \nearrow$ et $P(0) = P_0$).

L'élément de surface $d^2\vec{S} = Rd\theta dz\,\vec{n}$ du mur du barrage est soumis côté eau à une pression $P(z)$ et côté air à la pression P_0 ; la force de pression totale est $d^2\vec{F} = \big(P(z) - P_0\big)d^2\vec{S} = \rho g z R d\theta dz\,\vec{n}$.



Attention dans l'intégrale « vectorielle » l'orientation du vecteur unitaire $\vec{n}$ est fonction de θ, mais par symétrie la résultante est portée par l'axe Ox. On projette donc les contributions élémentaires sur Ox avant de sommer :

$$d^2F_x = \rho g z R d\theta dz \cos\theta$$

La résultante est $F_x = \rho g R \int_0^h z dz \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos\theta d\theta$; les intégrales valent $\frac{h^2}{2}$ et $2\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$\boxed{\vec{F} = \rho g R h^2 \sin\frac{\alpha}{2}\vec{u}_x}$$

55. Apparition du vent

a) Voir la question **40.**

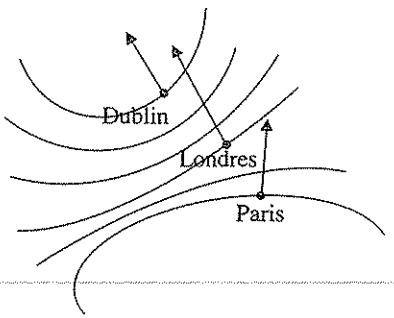
b) Dans la direction du gradient, on approche la valeur $\left|\frac{dP}{dX}\right|$ par $\frac{\Delta P}{\Delta X}$

entre Paris et Calais : $\frac{(1025-1020).10^2}{200} \approx 2{,}5$ Pa. km^{-1}

entre Londres et Dublin : $\frac{(1015-1000).10^2}{400} \approx 3{,}8$ Pa. km^{-1}

Plus les lignes isobares sont serrées et plus le gradient est important (pour des écarts de pression égaux entre les lignes !).

c) Avec une interpolation linéaire pour les distances entre deux isobares consécutives on trouve des forces volumiques sensiblement égales à Paris et Dublin (de l'ordre de $2{,}5.10^{-3}$ N.m^{-3}) et un peu plus grande à Londres ($3{,}8.10^{-3}$ N.m^{-3}). De plus la direction des forces est perpendiculaire aux isobares et le sens vers les pressions décroissantes (en $-\overrightarrow{grad}P$).



56. Équilibre polytropique de l'atmosphère

a) Comme à la question **12.**, $dP = -\rho(z)gdz = -\dfrac{MP(z)}{RT(z)}gdz$

soit ici $\dfrac{dP}{P(z)} = -\dfrac{Mg}{R}\dfrac{dz}{T_0 - az}$ qui s'intègre en $\ln\dfrac{P(z)}{P_0} = \dfrac{Mg}{Ra}\ln\dfrac{T_0 - az}{T_0}$

d'où la relation $\boxed{\dfrac{P(z)}{P_0} = \left(\dfrac{T(z)}{T_0}\right)^{\alpha}}$ avec $\boxed{\alpha = \dfrac{Mg}{Ra}}$

AN : $\underline{\alpha = 5{,}27}$

b) D'après la loi $T(z) = T_0 - az$, la température au sommet du Mont-Blanc est de $T' = -11{,}2$ °C (ce qui confirme son aspect blanc).

Alors $P' = P_0\left(\dfrac{T'}{T_0}\right)^{\alpha} = 0{,}55\,P_0$, résultat qui n'est pas sensiblement différent de celui $P = 0{,}57P_0$ de la question **12.**.

c) Cette étude donne $\dfrac{P(z)}{T(z)^{\alpha}} = cste$; la loi du gaz parfait donne $\dfrac{P(z)}{\rho(z)T(z)} = cste$; l'élimination de $T(z)$ conduit à la loi simple :

$$\boxed{P(z)\left(\frac{1}{\rho(z)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = cste} \quad \text{ou} \quad \frac{P(z)}{\rho(z)^{1.23}} = cste$$

Cette loi donne l'évolution spatiale pour des grandeurs locales à des altitudes différentes entre leur pression et leur masse volumique.

57. Aérostat à hélium (*)

L'altitude z comptée à partir du sol est la variable de cet exercice ; pour une meilleure compréhension, il est conseillé d'indiquer cette variable à toutes les fonctions qui en dépendent.

a) La densité est le rapport des masses volumiques : $d = \dfrac{\rho_{He}(z)}{\rho_{air}(z)}$, car en altitude où la pression diminue, les masses volumiques diminuent.

Les deux gaz étant parfait, on a $\rho(z) = \dfrac{MP(z)}{RT(z)}$, et comme l'hélium et l'air sont en équilibre thermodynamique, il vient en remplaçant $d = M_{He}/M_{air}$, prouvant que la densité est indépendante de l'altitude z.

AN : $\underline{d} = \dfrac{4}{29} \approx \underline{0{,}14}$, c'est cette densité petite devant 1 qui permet d'avoir une poussée d'Archimède importante.

b) La force ascensionnelle est la résultante du poids de l'équipage, du poids de l'hélium et de la poussée d'Archimède du ballon dans l'air ; en projection sur l'axe vertical ascendant :

$$F(z) = -Mg - \rho_{He}(z)Vg + \rho_{air}(z)Vg = -Mg + \rho_{air}(z)Vg(1-d)$$

En altitude la pression et la masse volumique de l'air diminuent, et donc également la force ascensionnelle.

Initialement au sol, $\underline{F(z=0) \approx 1140 \text{ N}}$, la poussée est bien positive.

À noter que puisque $\rho_{He}(z)$ diminue, alors que le volume V du ballon est constant, la masse $\rho_{He}(z)V$ d'hélium dans le ballon diminue : l'hélium s'échappe dans l'atmosphère par la partie inférieure du ballon.

c) $F(z_m) = 0$ conduit à $\rho_{air}(z_m) = \dfrac{M}{V(1-d)} = 0{,}93 \text{ kg.m}^{-3}$ bien inférieure à la valeur au sol $\rho_0 = \rho_{air}(z=0) = 1{,}2 \text{ kg.m}^{-3}$.

La loi polytropique $\dfrac{P(z)}{\rho^n(z)} = cste$ et celle du gaz parfait $\dfrac{P(z)}{\rho(z)T(z)} = cste$ donnent par élimination de la pression $\dfrac{T(z)}{\rho^{n-1}(z)} = cste$ soit :

$$\underline{T(z_m) = T_0\left(\frac{\rho(z_m)}{\rho_0}\right)^{n-1} = 276 \text{ K} = 3 \text{ °C}}$$

De $T(z) = T_0 - az$, on déduit alors $\underline{z_m = \dfrac{T_0 - T(z_m)}{a} = 2{,}6 \text{ km}}$

d) $z'_m = 3{,}1 \text{ km} \Rightarrow T(z'_m) = 273 \text{ K} = 0 \text{ °C} \Rightarrow \rho_{air}(z'_m) = 0{,}88 \text{ kg.m}^{-3}$

$\Rightarrow M' = 378 \text{ kg}$; il a fallu lâcher un lest de $\underline{M - M' = 22 \text{ kg}}$ sous forme de sacs de sable, soit une valeur expérimentale acceptable.

58. Pression et température au centre du Soleil

a) Dans un problème à symétrie sphérique, les isobares sont des sphères concentriques, toujours perpendiculaires aux lignes de champ du champ gravitationnel.

On utilise directement $dP(r) = -\rho(r)g(r)dr$ issu de $\rho\,\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P = \vec{0}$ en coordonnées sphériques (la pression augmente en direction du centre de l'étoile).

Ici la masse volumique $\rho(r) \approx \rho_0$ est uniforme dans toute l'étoile, soit $\rho_0 = \dfrac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R_S^3}$.

En un point à distance $r \leq R$ du centre, le champ de gravitation est $g(r) = G\frac{M_r}{r^2}$ où M_r est la masse dans la sphère de rayon r, soit dans l'hypothèse précédente $M_r = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$.

Il vient $dP(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0^2 r dr$; l'intégrale s'effectue de 0 à R_S avec $P(R_S) = 0$ (pas de pression en surface), d'où $P(0) = \frac{2}{3}\pi G \rho_0^2 R_S^2$; en y substituant ρ_0 par son expression, on a

$$\boxed{P(0) = \frac{3}{8\pi} G \frac{M_S^2}{R_S^4}}$$

Le gaz étant parfait $T(0) = \frac{M}{\rho_0 R} P(0)$ soit $\boxed{T(0) = \frac{GM}{2R}\frac{M_S}{R_S}}$

AN : $\underline{P(0) = 1{,}3.10^{14} \text{ Pa} = 1{,}3 \text{ Gatm}}$ et $\underline{T(0) = 11.10^6 \text{ K}}$

Ce modèle simpliste est d'autant plus satisfaisant qu'il donne une température au-delà des 10 millions de K, seuil de démarrage des réactions thermonucléaires de transformation d'hydrogène en hélium ; les astrophysiciens admettent actuellement la valeur de $T(0) \approx 15.10^6$ K pour la température au centre du Soleil.

Le modèle « masse volumique $\rho(r) \approx \rho_0$ uniforme » ne constitue pas une hypothèse physique sur la structure du Soleil (on sait bien que la masse volumique augmente avec la profondeur), mais simplement un cadre de travail mathématique permettant, à une constante multiplicative près et sans unité, de dégager les grandeurs physiques intervenant dans la pression au centre.

b) La relation fondamentale de la statique des fluides indique que la pression augmente vers le centre de l'étoile pour compenser la gravitation ; au centre $P(0)$ doit donc pouvoir s'exprimer entièrement à l'aide de la constante de gravitation G, de la masse M_S et du rayon R_S du Soleil ; si l'on cherche $P(0) = G^\alpha M_S^\beta R_S^\gamma$, une analyse dimensionnelle donne :

$$\text{N.m}^{-2} = \text{kg.m}^{-1}\text{.s}^{-2} \equiv (\text{kg}^{-1}\text{.m}^3\text{.s}^{-1})^\alpha \text{.kg}^\beta \text{.m}^\gamma$$

soit $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = -4$ d'où $\boxed{P(0) = G\frac{M_S^2}{R_S^4}}$

ce qui redonne inéluctablement les mêmes dépendances que dans le calcul précédent ; à noter qu'une constante numérique différente ne modifie pas l'ordre de grandeur.

Chapitre 10
Propriétés des systèmes thermodynamiques

Les ordres de grandeur utiles

Constantes

constante des gaz parfaits	$R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$
constante de Boltzmann	$k_B = R / N_A = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$

L'air (modèle GP diatomique)

masse molaire	$M = 29\ g.mol^{-1}$
masse volumique (à 20°C sous 1 bar)	$\rho = MP / RT \approx 1{,}2\ kg.m^{-3}$
volume molaire (à 20°C sous 1 bar)	$V_m = RT / P \approx 24\ L.mol^{-1}$
densité particulaire (à 20°C sous 1 bar)	$n^* = P / k_B T \approx 2{,}5.10^{25}\ m^{-3}$
vitesse quadratique moyenne (à 20°C)	$u = \sqrt{3RT/M} \approx 500\ m.s^{-1}$
libre parcours moyen	$l \approx 0{,}1\ \mu m$
durée moyenne entre deux chocs	$\tau \approx l / u \approx 2.10^{-10}\ s$
capacité thermique molaire à volume constant	$C_{Vm} = 5R / 2 = 21\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
capacité thermique molaire à pression constante	$C_{Pm} = 7R / 2 = 29\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
capacité thermique massique à pression constante	$c_p = 1{,}0\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$
rapport des capacités thermiques	$\gamma = C_P / C_V = c_P / c_V \approx 1{,}4$

L'eau

masse molaire	$M = 18\ g.mol^{-1}$
masse volumique (liquide)	$\rho_l = 10^3\ kg.m^{-3}$
capacité thermique de l'eau liquide	$c = 4{,}18\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
densité moléculaire (liquide)	$n^* = \rho N_A / M \approx 10^{28}\ m^{-3}$
masse volumique de la glace	$\rho_s = 0{,}92.\ 10^3\ kg.m^{-3}$
capacité thermique de la glace	$c = 2{,}1\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
enthalpie massique de fusion de la glace à 0°C	$l_f = \Delta h_f = 334\ kJ.kg^{-1}$
enthalpie massique de vaporisation de l'eau à 100°C	$l_v = \Delta h_v = 2260\ kJ.kg^{-1}$

vapeur : masse volumique capacité thermique (100 °C, 1bar)	$\rho_v = 0{,}59\ \text{kg.m}^{-3}$ $c_p = 2{,}0\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$
point triple	$T_T = 273{,}16\ \text{K} = 0{,}01\ °\text{C}$; $P_T \approx 6.10^{-3}$ bar
point critique	$T_C \approx 374\ °\text{C}$; $P_C \approx 220$ atm

Le cours d'abord

Description microscopique

1. Soit un système constitué de 3 g d'eau, combien contient-il de molécules ? Combien de paramètres faut-il pour décrire ce système d'un point de vue mécanique ? Une étude expérimentale macroscopique montre que le nombre de paramètres nécessaires à la description de ce fluide est seulement de deux pour la plupart des conditions d'évolution : pression et température ou volume et température par exemple. Comment expliquer cette réduction surprenante du nombre de paramètres à connaître ?

2. En considérant un modèle de sphères dures (diamètre d) pour les molécules d'un fluide de densité moléculaire (nombre de molécules par unité de volume) n^*, estimer la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives (libre parcours moyen, noté l). Pour cela considérer une molécule mobile à la vitesse $\vec{v}$, au milieu des autres immobiles.

3. Pour l'air sous une pression de 1 bar et à température usuelle de 20 °C, calculer une valeur approchée de n^*. Estimer le libre parcours moyen l en choisissant pour les molécules O_2 / N_2, d de l'ordre de 0,3 nm. Utiliser l'expression plus générale $l = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, n^* \pi d^2}$ qui tient compte du fait que la molécule cible est elle-même en mouvement. Comparer avec l'ordre de grandeur de l dans un liquide où les molécules sont « en contact ».

4. Qu'est-ce que l'échelle mésoscopique ? Comment choisir l'élément de volume dV en un point M du fluide, pour pouvoir définir par exemple la densité moléculaire n^* en tout point M du fluide ?

Vocabulaire et définitions de la thermodynamique

5. Quelle définition peut-on donner d'une variable thermodynamique ou variable d'état ? Qu'appelle-t-on variable intensive, extensive ? Donner des exemples. Qu'appelle-t-on variables d'état indépendantes ? Donner un exemple. Qu'appelle-t-on fonction thermodynamique ? Pourquoi parle-t-on de fonction d'état ?

6. Comment peut-on caractériser l'équilibre d'un système thermodynamique ? Préciser cette notion dans le cas particulier d'un équilibre thermomécanique.

7. Quand dit-on qu'un système en interaction avec un milieu extérieur subit une transformation ?

8. À quelle condition peut-on considérer que les variables d'état sont définies pendant une transformation ? L'illustrer sur l'exemple de la compression d'un gaz par déplacement d'un piston. Quand peut-on dire qu'une transformation est réversible ? Citer des causes d'irréversibilité.

9. Définir les transformations dites respectivement isobare, monobare, isotherme, monotherme, isochore et enfin adiabatique.

10. Quelle différence convient-il de faire entre un système fermé et un système isolé ?

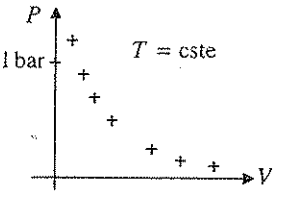
11. Qu'appelle-t-on équation d'état ? Considérer un système de type ressort en mécanique : quelles variables décrivent *a priori* l'état de ce système ? Sont-elles indépendantes ? Quelle équation d'état peut-on écrire ? Combien de variables sont-elles nécessaires et suffisantes pour décrire l'état du ressort ? Quelles conditions expérimentales remettent en cause cette conclusion ?

12. À quoi correspond la notion de température ? Distinguer deux températures par le critère « plus chaud, plus froid » est-il fiable ? Quel phénomène physique semble permettre une mesure de la température, comment procéder alors à cette « mesure » ? Pourquoi les thermomètres à dilatation ne permettent-ils pas une véritable mesure de température ? À quoi servent-ils alors ?

13. Définir un thermostat.

Propriétés des gaz aux faibles pressions

14. Lors de l'étude expérimentale d'un gaz, comment peut-on mesurer P et V ? Comment savoir que la température reste constante ? On donne ci-contre des résultats expérimentaux aux faibles pressions (inférieures à 1 bar).
Quel modèle peut être envisagé pour la fonction $P(V)$? Expliquer comment un tracé des mêmes points expérimentaux dans le diagramme d'Amagat (PV en fonction de P) permettrait de tester le modèle.



15. Comment les propriétés des gaz aux faibles pressions permettent-elles une mesure de température ? Qu'appelle-t-on échelle légale de température ? Comment en déduit-on l'échelle Celsius ? Quel système sert de référence pour la température absolue ?

16. Comment, à partir de l'étude de la question **14.**, en arrive-t-on au modèle expérimental du gaz parfait (noté GP) et à son équation d'état ?

Étude cinétique des gaz parfaits

17. Quelles sont les hypothèses du modèle microscopique du gaz parfait monoatomique ? Ces hypothèses sont-elles cohérentes avec le modèle macroscopique déjà défini ?

18. Qu'appelle-t-on agitation thermique ? Comment est caractérisée la distribution des vitesses au niveau microscopique ? Que signifie une distribution homogène et isotrope des vitesses ? Qu'appelle-t-on vitesse quadratique moyenne u ?

19. Donner l'interprétation microscopique de la pression P, dans un gaz parfait monoatomique, et montrer comment elle est reliée à u et n^*.

20. Identifier les équations d'état microscopique et macroscopique, et en déduire l'expression de u en fonction de T, d'abord en utilisant la constante R des gaz parfaits, puis la constante de Boltzmann $k_B = \dfrac{R}{N_A}$.

Énergie interne

21. Comment définir l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique ?

22. Comment étendre la définition précédente à un gaz parfait polyatomique ? Conclure sur la définition microscopique des GP.

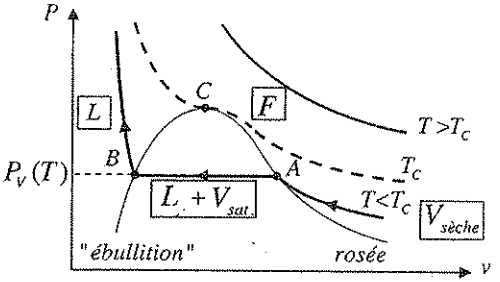
23. Comment interpréter l'écart de comportement des gaz réels par rapport au modèle GP, traduit par le graphe de la question **16.** ? Quelle est la conséquence sur la définition de leur énergie interne ?

24. Donner la définition de la capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait, puis des capacités thermiques à volume constant molaire et massique. Traiter le cas particulier des GP monoatomique et diatomique. Qu'appelle-t-on gaz parfait idéal (noté GPI) ?

25. Comment s'exprime simplement la notion d'énergie interne pour une phase condensée incompressible et indilatable ?

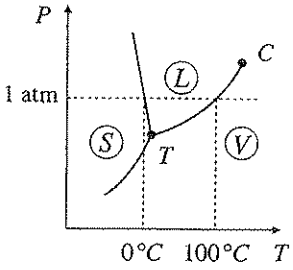
Corps pur diphasé en équilibre

26. Commenter dans le diagramme de Clapeyron (P,v), les isothermes d'Andrews pour des températures autour de la température critique, données ci-dessous (v est le volume massique). Définir la courbe de saturation.



27. Définir le titre en vapeur du système liquide-vapeur à l'équilibre.

28. Commenter le diagramme d'équilibre (P,T) de l'eau.



Énergie d'un système thermodynamique

29. L'énergie mécanique est-elle conservative ? Comment est définie l'énergie d'un système fermé et dans quel but ? Donner la signification précise de chaque terme.

30. Quelles sont les deux formes d'échange d'énergie ? Comment est algébrisé l'échange ? Donner des exemples d'échange sous forme de travail.

31. Le transfert thermique (ou échange de chaleur) peut se faire suivant trois processus : conduction, convection ou rayonnement. Donner les caractéristiques et des exemples de chaque processus.

Travail des forces de pression

32. Établir l'expression $\delta W = -P_{ext}\,dV$ du travail des forces de pression où $P_{ext.}$ est la pression extérieure (atmosphère, poids, opérateur,...) s'exerçant par exemple sur le piston mobile d'une enceinte contenant un gaz. Par quel système ce travail est-il reçu ?

33. Comment en déduit-on le travail reçu par le gaz et sous quelles conditions à préciser peut-on affirmer que ce dernier vaut $\delta W = -PdV$ où P est la pression du gaz ?

34. Donner les deux cas où le travail des forces de pression s'exprime simplement lors d'une transformation non élémentaire.

35. Pour un système décrivant un cycle mécaniquement réversible, représenté dans un diagramme de Clapeyron, interpréter graphiquement le travail des forces de pression reçu par ce système.

Premier principe de la thermodynamique

36. Énoncer le premier principe de la thermodynamique. Comment s'écrit-il lorsque le système est « purement » thermodynamique ?

37. Dans cette question, le seul travail reçu est celui des forces de pression. Que donne le premier principe pour une transformation isochore ? Pour une transformation monobare entre deux états d'équilibre ? En déduire la notion d'enthalpie.

38. Donner la définition de la capacité thermique à pression constante d'un fluide réel, puis des capacités thermiques à pression constante molaire et massique.

39. Établir la relation existant entre les capacités thermiques à volume constant et à pression constante pour un GP (relation de Mayer). On pose $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$, exprimer, pour un GP, les capacités thermiques en fonction de γ et en déduire la valeur de γ pour un GP monoatomique puis pour un GP diatomique dans des conditions usuelles de température et pression. Établir enfin pour un GPI les variations d'énergie interne et d'enthalpie lors d'une transformation quelconque.

40. Regrouper dans un tableau les expressions de la variation d'énergie interne, de la variation d'enthalpie, de la capacité thermique à volume constant (mc_V), de la capacité thermique à pression constante (mc_P), de $mc_P - mc_V$ et de γ pour : un GP monoatomique, un GP diatomique dans des conditions usuelles, un GPI, un GP quelconque et une phase condensée.

Transitions de phase

41. Rappeler les noms des divers changements d'état (ou transitions de phase).

42. Comment sont définies les enthalpies de changement d'état ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Le vocabulaire de la thermodynamique est précis ; il faut l'utiliser à bon escient.
Exemple : la transformation est adiabatique, mais la paroi est athermane ou isolante (et non : « la paroi est adiabatique »)
Autre exemple : lors d'une transformation isobare, la pression P du système reste constante alors que pour une transformation monobare, le système est en contact mécanique avec le milieu extérieur qui fixe $P_{ext.}$, mais où la pression P du système peut évoluer librement. Une transformation monobare quasi statique est isobare.
Même distinction pour isotherme et monotherme (échange thermique avec un seul thermostat) ; une transformation monotherme quasi statique est isotherme.
Enfin, un point important, source d'incompréhension quand on débute la thermodynamique, est de bien saisir la différence entre « chauffer », c'est-à-dire fournir un transfert thermique, et « échauffer » qui signifie augmenter la température (voir la question **64.**).

☐ Dans l'équation d'état $PV = nRT$, n représente la quantité de matière (grandeur extensive en mol) dans le volume V, alors que dans $P = n^* k_B T$, n^* est la densité particulaire (grandeur intensive en m^{-3}).

☐ L'unité de température est le kelvin (symbole K) et non le « degré kelvin » (°K). Le lien avec l'échelle Celsius est : $T(\text{K}) = t(°\text{C}) + 273$. Les variations de température sont identiques dans les deux échelles. En calorimétrie, où il n'intervient souvent que des différences de température, on peut garder les °C dans les applications numériques, mais dans tous les autres cas, pour les applications numériques, il est indispensable d'utiliser T en kelvin.

☐ Le caractère intensif ou extensif des variables d'état apparaît également dans les produits ou les rapports de ces variables. Il faut donc systématiquement vérifier la cohérence de ces produits ou rapports :
le produit $ext \times int$ est ext ; le rapport ext / ext est int
le rapport ext / int est ext ; le produit $ext \times ext$ n'a pas de sens
De plus seules les grandeurs du même type s'additionnent (homogénéité !).

☐ Quel que soit le gaz parfait, monoatomique, diatomique, idéal ou non, la vitesse quadratique moyenne n'est déterminée que par l'énergie cinétique liée aux 3 degrés du mouvement de translation : on a donc toujours $\frac{1}{2}Mu^2 = \frac{3}{2}RT$ et donc une même équation d'état macroscopique $PV = nRT$.
En revanche pour l'énergie interne, il s'agit bien de faire la somme de toutes les contributions : l'énergie cinétique de translation (la seule pour un gaz parfait monoatomique), les énergies de rotation ou de vibration (pour les molécules polyatomiques), l'énergie potentielle d'interaction entre particules

(si le gaz n'est pas parfait). L'augmentation du nombre de formes d'énergie cinétique microscopique conduit à des capacités thermiques de plus en plus importantes.

☐ De manière générale, l'expression du travail des forces de pression, reçu par le système incluant la paroi mobile, est $\delta W = -P_{ext}\,dV$ avec P_{ext} la pression extérieure. Pour pouvoir appliquer $\delta W = -PdV$ reçu par le gaz, il faut que la transformation soit effectuée de manière quasi statique et qu'il n'y ait pas d'irréversibilité mécanique (frottement solide au niveau du piston). La transformation est dite mécaniquement réversible.

☐ Lorsque l'on exprime le travail des forces de pression comme la somme des travaux élémentaires, ce travail dépend du chemin suivi et « l'intégrale » ne peut être calculée que lorsque les caractéristiques de ce chemin sont injectées dans le calcul. Or il est préférable d'utiliser la notation de l'intégrale de Riemann, avec les bornes d'intégration seulement pour une différentielle et pas pour une forme différentielle comme δW, puisqu'à l'évidence pour procéder au calcul il faut plus que les bornes d'intégration (c'est-à-dire l'état initial et l'état final).

Par exemple il faut écrire : $W = \int_{\overset{\frown}{AB}} -PdV$ car $-PdV$ n'est pas une différentielle et le calcul nécessite le point de départ, le point d'arrivée *et* le chemin suivi ; puis si par exemple la transformation AB est isotherme et le système un gaz parfait, on injecte alors les caractéristiques de ce chemin :

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} -PdV = \int_{\overset{\frown}{AB}} -\frac{nRT}{V}\,dV = -nRT\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V}$$

☐ Comme en mécanique, il convient toujours de bien définir le système étudié. Et aussi de bien préciser, par exemple avant d'appliquer le 1er principe, le type de transformation étudiée ainsi que les caractéristiques des états initial et final.

☐ Il est essentiel de bien faire la distinction entre :
– la notation ΔU, variation d'énergie interne entre deux états, notation réservée aux variations de fonctions d'état
– la notation Q, W qui donne une quantité de transfert thermique ou de travail le long de la transformation ; elles dépendent de la transformation subie et ne peuvent pas s'écrire *a priori* sous la forme d'une variation, même si pour certaines transformations elles s'identifient à une variation de fonction d'état car cette identification n'est valable que pour cette transformation. Les notations « ΔW et ΔQ » sont à proscrire absolument !

☐ Il faut bien comprendre dans l'utilisation du premier principe que le type d'énergie échangée (travail ou chaleur) ne préjuge en aucun cas de la forme d'énergie du système dont la valeur est modifiée (énergie interne, sous toutes ses formes, énergie cinétique macroscopique, énergie potentielle extérieure). Voir en détail la question **66.**

☐ L'écriture de la variation d'une fonction d'état peut recouvrir deux points de vue différents, illustrés sur l'exemple suivant :
– point de vue « temporel » : un système d'enthalpie $H = U + PV$ subit une transformation au cours de laquelle son enthalpie varie de $\Delta H = H_f - H_i$
– point de vue « spatial » : l'enthalpie est extensive, on peut écrire sa variation comme la somme des variations des enthalpies de ses constituants : $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$
Il faut donc être vigilant et toujours bien assigner une signification physique aux grandeurs que l'on écrit.

☐ L'écriture $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ correspondant à une séparation spatiale du système en deux constituants, s'appuie sur l'extensivité de la fonction d'état énergie interne.
On peut également écrire que le travail total reçu par un système subissant plusieurs transformations est la somme des travaux reçus au cours des diverses transformations successives (au sens temporel) : $W = W_{AB} + W_{BC}$.
Il ne faut surtout pas confondre ces deux sommes et ne jamais écrire que le travail reçu par un système est la somme des travaux reçus par ses constituants (voir la question **50.**), et de même pour les transferts thermiques.

☐ Il ne faut pas chercher à faire apparaître l'énergie mécanique dans l'expression de l'énergie totale d'un système ; en effet les termes d'énergie potentielle de l'énergie mécanique peuvent correspondre à des termes différents de l'énergie totale : énergie potentielle extérieure et énergie interne.

☐ Les capacités thermiques peuvent être totales C, molaires C_m ou massiques c.
Pour ne pas se tromper dans les applications numériques, il convient d'observer l'unité des grandeurs proposées et surtout de faire apparaître systématiquement dans la notation le caractère extensif d'une capacité thermique. Il faut donc éviter la notation C et utiliser mc ou nC_m. La relation de Mayer sous la forme $mc_P - mc_V = nR$ est ainsi sans aucune ambiguïté sur les grandeurs utilisées.

☐ Pour un système de type fluide, l'énergie interne U est plutôt indiquée pour des transformations isochores ($\Delta U = Q_V$), l'emploi de l'enthalpie H est conseillée pour des transformations isobares ($\Delta H = Q_P$).

☐ En thermodynamique, les transferts d'énergie sont algébriques et les conventions de signe sont les suivantes : un travail ou un transfert thermique effectivement reçus par le système étudié sont comptés positivement, et négativement s'ils sont effectivement fournis ; ce sont donc des grandeurs algébriques reçues par le système.

☐ Il résulte du point précédent qu'il faut toujours vérifier l'adéquation du signe d'un travail ou d'un transfert thermique calculé avec celui donné par le sens physique.

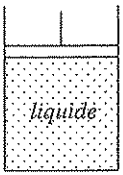
☐ À l'intérieur d'un calorimètre, où l'on opère à pression constante, la température et / ou la composition finale d'un équilibre sont données par $\Delta H = 0$ lorsqu'on peut négliger les pertes thermiques avec l'extérieur.

☐ Une erreur de débutant(e) consiste à dire : « Puisque la transformation est adiabatique, la température est constante ! » ; c'est l'illustration parfaite de la confusion entre les notions de « température » et de « transfert thermique » (voir la question **64.** et les transformations adiabatiques du chapitre **11**).

☐ Il est toujours utile de faire une représentation graphique des transformations successives d'un fluide, par exemple dans un diagramme de Clapeyron, ce qui est possible pour des transformations quasi statiques. Elle permet d'éviter des erreurs avec les valeurs relatives des variables d'état ou de mieux comprendre les conséquences par exemple des valeurs relatives des pentes aux points d'intersection. Attention *a priori* la courbe n'est valable que pour un seul sens de parcours, sauf bien sûr si la transformation est réversible.

☐ Il est toujours utile de représenter une transformation avec changement d'état à l'équilibre dans le diagramme de Clapeyron (P,V) ou (P,v).

☐ Les changements d'état que l'on observe dans la vie courante ne peuvent pas être interprétés directement avec les diagrammes d'équilibre. Notamment le liquide en équilibre des diagrammes d'équilibre correspond à la situation très particulière, schématisée ci-contre : liquide enfermé dans une enceinte avec paroi mobile, sans aucun espace libre.



Un liquide au-dessus duquel existe un espace libre ne peut pas être à l'équilibre :

▶ en espace clos, il se vaporise jusqu'à ce que la pression de vapeur saturante, à la température finale, soit atteinte et l'état final est un équilibre liquide-vapeur, ou totalement si $P_v(T)$ ne peut être atteinte.

▶ à l'air libre, il se vaporise totalement, la vapeur d'eau se disperse, $P_v(T)$ ne peut être atteinte.

☐ Dans le cas de la vaporisation d'un liquide, la quantité de corps pur vaporisé est celle nécessaire pour atteindre la pression de vapeur saturante (pression partielle du corps pur gazeux), elle est indépendante de la présence d'autres gaz et donc de la pression totale. La seule influence de la présence d'autres gaz est une vaporisation plus lente.

☐ À une température donnée, une vapeur est sèche si sa pression est inférieure à la pression de vapeur saturante à cette température ; réciproquement la pression

d'un corps pur gazeux ne peut pas être supérieure à la pression de vapeur saturante à la température considérée. Si la quantité de corps pur présent entraîne une pression du gaz correspondant supérieure à $P_v(T)$, alors du gaz se liquéfie jusqu'à ce que $P_{corps\ pur} = P_v(T)$ et la vapeur est saturante.

☐ En cas de changement d'état, si la composition finale n'est *a priori* pas évidente, il faut alors faire des hypothèses sur cet état final qu'il convient de vérifier, *a posteriori*, par les valeurs numériques pertinentes des résultats, par exemple en comparant la pression obtenue et la pression de vapeur saturante.

☐ Ne pas confondre vaporisation et ébullition (qui est une vaporisation dans des conditions très particulières). Reprenons le cas d'un liquide à l'air libre, dont on augmente la température. En même temps que la température augmente, il se produit une vaporisation car la pression de vapeur d'eau au-dessus du liquide, même si elle est localement plus grande, ne peut atteindre $P_v(T)$ à l'air libre. Cette vaporisation est plus rapide au fur et à mesure que la température augmente. L'ébullition se produit lorsque la température du liquide atteint une valeur telle que la pression de vapeur saturante à cette température soit égale à la **pression totale extérieure** au-dessus du liquide.
En effet la pression de vapeur saturante ayant alors la même valeur que la pression totale exercée sur le liquide, la vaporisation peut avoir lieu au sein même du liquide. Il y a alors formation de bulles de vapeur dans le liquide, celles-ci remontent à la surface et libèrent un grand nombre de moles de gaz : c'est le phénomène d'ébullition.
La vapeur se disperse dans l'atmosphère et la pression totale extérieure reste constante et égale à la pression atmosphérique. La pression partielle de vapeur d'eau ne peut donc dépasser cette valeur P_{atm} qui correspond à la pression de vapeur saturante à la température d'ébullition, elle reste donc constante ainsi que la température pendant toute la durée de l'ébullition.
La température d'ébullition est donc la température maximale que peut atteindre un liquide à l'air libre.
Ceci permet de comprendre que la température d'ébullition de l'eau en altitude soit sensiblement inférieure à 100 °C (température d'ébullition sous 1 atm).
Lors du chauffage d'eau liquide en vase clos, la pression totale au-dessus du liquide est supérieure ou égale à $P_v(T)$ et augmentë quand la température augmente ; il ne peut donc pas y avoir d'ébullition. On peut, en vase clos, porter un liquide à une température supérieure à sa température d'ébullition normale. Ceci est mis en œuvre dans les marmites sous pression.

☐ Il convient d'être attentif aux signes des enthalpies de changement de phase : la fusion, la vaporisation et la sublimation sont endothermiques $L_f > 0$, $L_v > 0$ et $L_s > 0$. En revanche, les changements d'états inverses : la solidification $L_{sol.} = -L_f < 0$, la liquéfaction $L_{liq.} = -L_v < 0$ et la condensation $L_{cond.} = -L_s < 0$ sont exothermiques.

☐ L'unité des enthalpies massiques de changement d'état est le $J.kg^{-1}$, mais dans la pratique, le $kJ.kg^{-1}$ ou $J.g^{-1}$ conviennent mieux, d'où la nécessité d'ajouter parfois un facteur 10^3 dans les applications numériques.

Applications directes du cours

Propriétés des gaz

43. Rappeler l'équation du gaz parfait et définir les grandeurs qui y interviennent en donnant leur unité. Quelle quantité de gaz parfait, en moles, occupe, à la température de 20 °C et sous la pression de 1,0 bar, un volume de 20 L ? Quel est le volume molaire dans les conditions normales ?

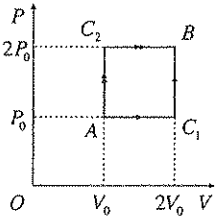
44. Calculer la vitesse quadratique moyenne des molécules O_2 et He à 20°C dans un modèle GP ; on donne $M_{O_2} = 32\ g.mol^{-1}$ et $M_{He} = 4\ g.mol^{-1}$.

45. Une lampe spectrale, de volume intérieur 3,0 cm^3, contient de l'hélium, sous une pression de $1{,}0.10^{-2}$ bar et à la température de 300 K. Calculer l'énergie interne et la masse de ce gaz. Quelles sont les variations de température et d'énergie interne si la pression augmente de 5 % ? On donne la masse molaire de l'hélium : $4\ g.mol^{-1}$ et la constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

46. Quelle différence existe-t-il entre la capacité thermique massique exprimée en $J.°C^{-1}.kg^{-1}$ et celle en $J.K^{-1}.kg^{-1}$?

Applications du premier principe

47. Un gaz parfait idéal ($\gamma = cste$), n moles, subit deux transformations différentes d'un même état initial $A(P_0, V_0)$ vers un même état final $B(2P_0, 2V_0)$.



- la transformation AC_1B constituée d'une isobare AC_1 et d'une isochore C_1B.
- la transformation AC_2B constituée d'une isochore AC_2 et d'une isobare C_2B.

Toutes les transformations sont mécaniquement réversibles.

a) Calculer pour chaque transformation le travail et le transfert thermique reçus par le gaz de la part du milieu extérieur en fonction P_0, V_0 et $\gamma = c_P / c_V$; conclusion ? Calculer ΔU_{AB} de deux façons différentes.

b) Considérer le cycle AC_2BC_1A, calculer de deux façons différentes le travail total reçu au cours de ce cycle, en déduire le transfert thermique reçu.

48. Un cylindre indéformable (volume intérieur constant) à parois athermanes (isolantes) est séparé en deux compartiments par un piston mobile diatherme (qui laisse passer les transferts thermiques). Dans chaque compartiment se trouvent n moles d'un gaz parfait idéal ($\gamma = 1{,}4$). L'état initial du premier gaz est : pression P_0 et température T_{01}, celui du second : pression P_0 et température $T_{02} \neq T_{01}$. Le système évolue vers un état d'équilibre final, exprimer pression et température de chaque gaz dans l'état final. La transformation est-elle réversible ?

49. Une mole de dioxygène se détend d'un volume $V_1 = 10$ L, température $T_1 = 298$ K à un volume $V_2 = 50$ L, température $T_2 = 373$ K. Utiliser un modèle gaz parfait idéal, avec $\gamma = 1{,}4$. Représenter la transformation, supposée mécaniquement réversible, dans le diagramme de Clapeyron et calculer travail et transfert thermique reçus par le gaz si la détente s'effectue :
a) par un échauffement isochore suivi d'une détente isotherme ;
b) par une détente isotherme suivie d'un échauffement isochore.
Donner un commentaire pertinent des résultats.

50. Une enceinte indéformable, dont les parois sont athermanes, est séparée en deux compartiments par une cloison également athermane. Initialement le compartiment A contient du dioxygène ($\gamma_1 = 7/5$) dans l'état : $P_1 = 3{,}0$ bar, $V_1 = 1{,}0$ L et $T_1 = 293$ K ; le compartiment B contient du néon ($\gamma_2 = 5/3$) dans l'état : $P_2 = 2{,}0$ bar, $V_2 = 2{,}0$ L et $T_2 = 323$ K. Les deux gaz sont assimilés à des gaz parfaits idéaux et leur mélange, après suppression de la cloison, à un gaz parfait.
a) Trouver un (ou des) qualificatif(s) pour la transformation subie par l'ensemble des deux gaz.
b) Calculer la pression P_0, le volume V_0 et la température T_0 du mélange à l'équilibre.
c) Comment peut-on qualifier la transformation subie par chaque gaz ?

51. Transformations isochore et isobare
On considère n moles de gaz parfait idéal enfermé dans un cylindre muni d'un piston et subissant une transformation monotherme, c'est-à-dire que les échanges thermiques ne peuvent se faire qu'avec un seul thermostat (ou source).
a) La transformation est isochore et fait passer la température initiale T_i à la valeur $T_f > T_i$. Décrire le système (paroi du récipient, extérieur...) et le mode opératoire de la transformation, et évaluer le travail des forces de pression W et le transfert thermique Q reçu par le gaz.
b) La transformation est isobare et on fait passer de manière mécaniquement réversible le gaz de son volume initial V_i (température T_i) à un volume final $V_f < V_i$. Décrire le système (paroi du récipient, extérieur...) et le mode opératoire

de la transformation, et évaluer le travail des forces de pression W et le transfert thermique Q reçu par le gaz.

52. Une quantité de gaz parfait passe de l'état $P_1 = 1$ bar , $T_1 = 300$ K , $V_1 = 50$ L à l'état $P_2 = 2$ bar , $T_2 = 600$ K , $V_2 = 50$ L . Que peut-on dire du transfert thermique Q reçu par le gaz dans cette transformation ($C_{V_m} = 20$ J.K^{-1}.mol^{-1}) ?

53. Calorimétrie

a) En négligeant les pertes entre un calorimètre et l'extérieur pendant l'opération, montrer que les conditions opératoires conduisent à la conservation de l'enthalpie du système.

b) Un calorimètre contient une masse $m_0 = 200$ g d'eau à la température $t_0 = 20{,}0$ °C . On introduit ensuite dans ce calorimètre une masse $m_1 = 300$ g d'eau à la température $t_1 = 40{,}0$ °C . À l'équilibre thermique la température a pour valeur $t_f = 31{,}5$ °C . Déterminer la capacité thermique C du calorimètre, et en déduire sa valeur en eau μ (pour l'eau $c = 4{,}18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}).

c) À partir de l'équilibre précédent, on introduit ensuite dans le calorimètre une pièce en aluminium de masse $m_2 = 50{,}0$ g et de température $t_2 = 90{,}0$ °C . La température atteinte à l'équilibre thermique a pour valeur $t'_f = 32{,}7$ °C . Déterminer la capacité thermique massique c_{Al} de l'aluminium.

Transitions de phase

54. Quelle est l'allure de la courbe d'évolution de la température en fonction du temps lors du chauffage isobare, sous une pression de 1 atm, d'une masse m de glace (d'eau) enfermée dans une enceinte fermée dont la paroi supérieure est un piston sur lequel s'exerce la pression 1 atm ? On considère que l'évolution est une succession d'états d'équilibre. Relier la puissance thermique de chauffe P_{th} (transfert thermique fourni au corps pur par unité de temps) à la pente des portions de diagramme tracées et aux durées des phases de changement d'état.

55. Calculer numériquement, en J.g^{-1}, la variation d'énergie interne (massique) ΔU dans le changement d'état réversible glace / eau sous 1 atm ; conclusion.

56. Par suite des frottements dus à l'air, les grêlons acquièrent très rapidement dans leur chute une vitesse constante. En supposant que la température d'un grêlon est de 0 °C , déterminer la hauteur minimale de chute h , dans l'air à 0 °C , pour provoquer sa fusion totale.

57. Qu'est-ce qui est plus efficace pour refroidir une boisson, y ajouter un glaçon à 0 °C ou la même quantité d'eau à 0 °C ? Justifier qualitativement, puis proposer une application numérique pertinente pour le vérifier.

58. Calorimétrie

a) Dans un récipient calorifugé, de très faible capacité thermique, on met en contact $m_g = 25$ g de glace à $t_g = 0$ °C et $m_v = 10$ g de vapeur d'eau à $t_v = 100$ °C ; quelle est la composition et la température à l'équilibre ?

Données : Les enthalpies de changement d'état sont, pour la fusion $l_f = 334$ J/g, et pour la vaporisation $l_v = 2260$ J/g ; la capacité thermique de l'eau est $c_e = 4{,}2$ J.g^{-1}.K^{-1}.

b) Dans un récipient, de très faible capacité thermique, on introduit $m_g = 60$ g de glace prise à la température $t_g = -23$ °C du congélateur et $m_e = 30$ g d'eau prise à la température $t_e = 15$ °C du robinet. Déterminer l'état final du système.

Données : La capacité thermique de la glace : $c_g = 2{,}1$ kJ.kg^{-1}.K^{-1} ; l'enthalpie massique de fusion de la glace : $l_f = 334$ kJ.kg^{-1} ; la capacité thermique de l'eau liquide : $c_e = 4{,}2$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}.

59. Un corps pur en équilibre sous deux phases 1 et 2, à la température T, est soumis à une pression $P_{éq}$ qui dépend de T (et de la nature du corps pur). La pente $dP_{éq}/dT$ des courbes d'équilibre (tracées à la question **28.**) est liée à la température T, à l'enthalpie massique de changement d'état $1 \to 2$ notée l_{12} et à la différence des volumes massiques des deux phases du corps pur $\Delta v = v_2 - v_1$ (le volume massique est l'inverse de la masse volumique).

Cette relation s'écrit : $\dfrac{dP_{éq}}{dT} = T^{\alpha} l_{12}^{\beta} \Delta v^{\gamma}$

* Par l'analyse dimensionnelle, déterminer les exposants α, β et γ, et réécrire la formule ainsi obtenue.

* Dans le diagramme $P(T)$ de changement d'état de l'eau, la pente de la courbe d'équilibre solide / liquide est négative, alors que les deux autres sont positives ; interpréter. Quel fait d'expérience bien connu cela traduit-il ?

60. La compression isotherme d'une vapeur peut-elle conduire directement au solide ? Et son refroidissement isobare ?

61. On donne ci-dessous la courbe d'équilibre solide-gaz pour CO_2 : en abscisse la température T en K et en ordonnée la pression en bar, mais attention en échelle logarithmique.

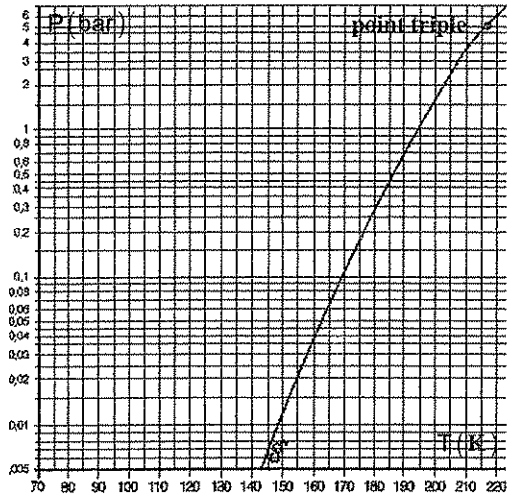
Placer les domaines correspondant à la glace carbonique et au dioxyde de carbone gazeux. Quelle est la température et la pression au point triple ?

L'atmosphère de la planète Mars est constituée essentiellement de gaz carbonique. La température moyenne est $T \approx -40$ °C, et la pression atmosphérique moyenne $P \approx 5{,}4$ hPa. La température minimale observée est de $T_{min} = -133$ °C (la nuit, car il y a environ 100 °C d'écart entre le jour et la nuit, et au pôle en hiver, car il y a environ 60 °C d'écart entre l'équateur et le pôle en hiver, presque comme sur Terre).

Pourquoi le CO_2 liquide n'existe-t-il pas sur Mars ?

La glace carbonique peut-elle exister en surface ? Où et quand ?

Pourquoi la température ne peut-elle pas descendre en dessous de la limite observée ?



Questions de réflexion ☐ Physique pratique

62. Pourquoi la Lune n'a-t-elle plus d'atmosphère ?

63. Une personne marche pieds nus dans une maison et passe successivement d'une pièce dont le sol est recouvert de moquette à une autre dont le sol est un parquet, et enfin une troisième dont le sol est en carrelage. La sensation de plus chaud ou plus froid, laisse penser que les températures des sols sont différentes et pourtant, à l'évidence, l'équilibre thermique est réalisé, dans la maison, et tous les trois sont à la même température. Interpréter.

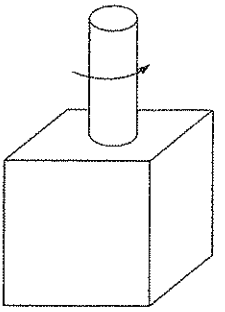
64. Commenter l'affirmation suivante : « Lorsqu'on fournit de la chaleur à un corps, sa température augmente ». Citer des exemples et contre-exemples.

65. La pression atmosphérique est de 1 bar et dans l'eau, à une profondeur de 10 m, la pression vaut 2 bar. Un plongeur, de capacité pulmonaire (volume maximal d'air dans les poumons) de 7 L, plonge (en apnée) en bloquant sa respiration, à une profondeur de 10 m après avoir gonflé ses poumons. Proposer un modèle simple pour déterminer le volume d'air dans les poumons à cette profondeur.

66. Un système de nature inconnue communique avec le milieu extérieur par un arbre mécanique tournant à la vitesse angulaire $\omega(t)$. On note W le travail reçu, pendant une durée quelconque, par ce système.

a) Si $W > 0$, le système reçoit effectivement du travail, par exemple un opérateur extérieur fait tourner l'arbre. Le premier principe indique que l'énergie du système augmente. Mais sous quelle forme ? Envisager diverses possibilités.

b) Si $W < 0$, le système fournit du travail, c'est un moteur, il fait tourner l'arbre et un opérateur extérieur agissant sur cet arbre reçoit du travail. Le premier principe indique que l'énergie du système diminue. Mais sous quelle forme ? Envisager diverses possibilités.



67. Quelle durée minimale faut-il à une bouilloire électrique pour porter à ébullition, sous $P_{atm} = 1\,\text{atm}$, 1 L d'eau initialement à 20 °C sachant que la puissance de sa résistance chauffante est de 2 kW ? Quelle augmentation de température obtiendrait-on si la même quantité d'énergie servait à échauffer la même masse de fer, sachant que la capacité thermique massique du fer est $c = 0{,}45\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$?

68. La calorie est une (ancienne) unité d'énergie, encore utilisée dans le domaine agro-alimentaire. Quelle est sa définition et son rapport de conversion avec le Joule ?

69. En découpant un morceau de fer avec une scie circulaire à grande vitesse, une gerbe d'étincelles très chaudes (>1 500 °C) jaillit. Expliquer. Et pourtant, en manipulant la scie sans gants, les mains qui reçoivent ces microparticules incandescentes ne perçoivent aucune sensation de chaleur. Pourquoi ?

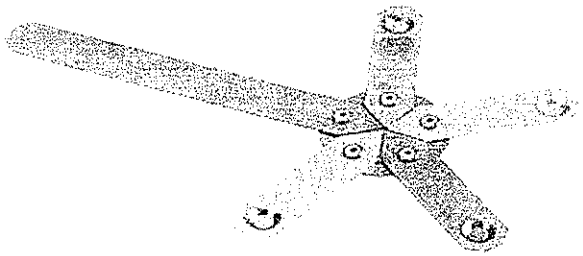
70. Comment la bouteille « thermos » est-elle conçue pour réduire au mieux les trois modes de pertes thermiques.

71. Comment procède-t-on pour évacuer « la chaleur » dégagée par un appareil électrique en marche ? Prendre comme exemples les appareils de TP ou l'unité centrale d'un ordinateur.

72. Quel est le principe du double vitrage ?

73. Pourquoi serait-il difficile de maintenir la flamme d'une allumette dans un satellite en orbite autour de la Terre ?

74. Quelle propriété peut être mise en évidence avec l'appareil ci-dessous ? Les petites plaques sont respectivement en cuivre, fer, aluminium et zinc. Comment l'utiliser ?



75. Lorsqu'on réchauffe un plat cuisiné au four à micro-ondes, il faut percer de trous le sachet en plastique qui le contient sinon, assez rapidement ce dernier se met à gonfler, pourquoi ?

76. L'été quand il fait chaud, on utilise des brumisateurs (qui dispersent de fines gouttelettes d'eau) pour rafraîchir l'air ; expliquer comment.

77. Pourquoi couvre-t-on une piscine la nuit ? Quels sont les avantages d'une culture sous serre ? Pourquoi faut-il placer un couvercle sur une casserole contenant de l'eau que l'on veut échauffer ?

78. Comment expliquer que l'on refroidisse la soupe en soufflant dessus ?

79. Dans les cafés, on échauffe le lait avec de la vapeur d'eau ; pourquoi ce procédé est-il plus efficace que le chauffage direct sur une plaque de cuisson ?

80. Lors d'hivers froids, les paysans plaçaient des cuvettes d'eau dans leur cave pour éviter que les pommes de terre n'y gèlent. Expliquer.

81. On entend parfois parler de « taux d'humidité de l'air », par exemple de 60%, il s'agit du degré hygrométrique ou humidité relative. Quelle peut être sa définition ?

82. Lorsque l'on porte de l'eau à ébullition, chauffage à l'air libre, on peut observer bien avant d'atteindre la température d'ébullition la formation au fond du récipient de bulles gazeuses qui remonte à la surface. Comment l'interpréter ?

83. Pourquoi en hiver les vitres de la salle de classe se recouvrent-elles de buée ?

84. Pourquoi l'air humide s'élevant de la surface des mers chaudes forme-t-il de gros nuages appelés cumulus en arrivant à une altitude de l'ordre de 1 000 m ?

85. Comment expliquer qu'en entretenant, avec une pompe à vide, une pression suffisamment basse dans un ballon contenant de l'eau, on puisse faire bouillir cette eau et la transformer en glace ?

86. Pourquoi souffre-t-on davantage de la « chaleur » si l'air est humide ?

87. Pourquoi un peu d'éther versé au creux de la main procure-t-il une sensation de froid ?

88. Pourquoi le temps de cuisson est-il réduit dans un autocuiseur (ou cocotte minute) sachant que la pression y atteint 2 atm ?

89. Citer un exemple de condensation, de sublimation.

90. Stockage des fluides

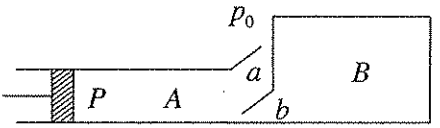
Pour le stockage des fluides en bouteille d'acier, il faut distinguer deux cas : les fluides dont la température critique est inférieure à la température ambiante et ceux dont la température critique est supérieure à cette température ambiante. Rappeler les possibilités de stockage offertes dans chaque cas et les précautions à prendre.

Exercices

91. Étude d'une pompe « à vide »

On considère la pompe représentée sur la figure ci-dessous, et destinée à vider l'air contenu dans le compartiment B de volume V constant égal à $1{,}0.10^3$ L.

Le corps de la pompe A a un volume maximal V_0 de 10 L. Le piston P est mobile sans frottement et sa masse est négligeable. Lors de chaque coup de pompe le piston effectue un aller-retour complet : à l'aller, le volume du compartiment A passe de V_0 à 0, puis au retour, de 0 à V_0.



La soupape (a) ne laisse passer l'air que du compartiment A vers l'extérieur, et la soupape (b) ne laisse passer l'air que du compartiment B vers le compartiment A.

L'air est considéré comme un gaz parfait et l'opération de vidage est, dans les conditions de l'expérience, isotherme, quasi statique et mécaniquement réversible.

Au début de l'opération, la température de l'air et sa pression sont égales à $T_0 = 298$ K et $p_0 = 1{,}0.10^5$ Pa dans tous les compartiments et à l'extérieur du dispositif. La constante des gaz parfaits vaut $R = 8{,}31$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

a) Calculer numériquement la pression p_1 dans le compartiment B après le premier aller retour du piston.

b) Donner la valeur du travail reçu par le gaz enfermé initialement dans le compartiment B à l'issue du premier retour du piston. Peut-on en déduire le travail du moteur qui actionne le piston pendant ce premier retour.

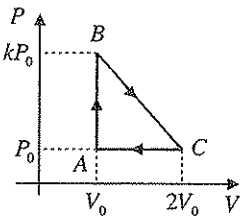
c) Établir la relation entre p_k, p_0, V, V_0 et k, où p_k est la pression du gaz restant dans le compartiment B après k coups de pompe.

AN : Déterminer la valeur numérique de k pour que $p_k = p_0/100$.

d) Quelle critique peut-on formuler quant à la modélisation précédente ?

92. Bilan de transferts thermiques lors d'une transformation

Un gaz parfait idéal, de rapport $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$, subit le cycle de transformations mécaniquement réversibles représenté ci-contre.



Pour quelle valeur de k le transfert thermique reçu lors de la transformation BC est-il nul ? Cette transformation BC peut-elle être qualifiée d'adiabatique ?

93. Compression isotherme d'une vapeur d'eau

Un récipient de volume initial $V_i = 3{,}0$ L contient seulement $m = 1{,}0$ g d'eau à la température $t_0 = 100$ °C. On donne pour l'eau $P_v(100°C) = 1{,}0$ atm ; l'enthalpie massique de vaporisation, à 100°C, $l_v = 2{,}26.10^3$ J.g^{-1} ; on considère la vapeur d'eau sèche comme un gaz parfait.

Par déplacement réversible d'un piston, on réalise sur ce système une compression isotherme réversible jusqu'au volume final $V_f = 1{,}0$ L.

a) Préciser la composition du système dans les états initial et final.

b) Calculer le travail W et le transfert thermique Q reçus par le système.

94. Échauffement isochore d'un équilibre liquide-vapeur

La situation est celle de la fin de l'exercice précédent (qu'il n'est pas nécessaire d'avoir cherché). Une enceinte de volume $V = 1{,}0$ L contient en équilibre $m_v = 0{,}58$ g de vapeur d'eau et 0,42 g d'eau liquide à la température $t = 100$ °C.

On échauffe réversiblement ce mélange à volume constant jusqu'à la température $t' = 110$ °C pour laquelle la pression de vapeur saturante est $P'_v = 1{,}3$ atm, l'équilibre liquide-vapeur étant toujours réalisé.

a) Quelle est la nouvelle composition à l'équilibre ?

b) Quel transfert thermique Q_v a-t-il fallu fournir ?

Données : Les chaleurs latentes de vaporisation à $t = 100$ °C et $t' = 110$ °C sont respectivement $l_v = 2260$ J.g^{-1} et $l'_v = 2230$ J.g^{-1} ; la capacité thermique de l'eau liquide autour de 100 °C est supposée constante : $c = 4{,}2$ J.g^{-1}.°C^{-1}.

95. Mesure de l'enthalpie de vaporisation de l'eau

On place sur le plateau d'une balance un récipient calorifugé contenant de l'eau maintenue en ébullition par une résistance électrique parcourue par un courant constant. La vapeur formée s'échappe par un orifice dans l'atmosphère extérieure dont la pression est normale.

Après avoir équilibré la balance, on repère la position verticale de l'aiguille à un instant choisi comme origine. On ajoute une masse marquée $m_0 = 2{,}0$ g sur le plateau contenant le récipient et on attend le retour de l'aiguille à sa position initiale.

Avec une intensité $I_1 = 2{,}5$ A et une tension aux bornes de la résistance $V_1 = 5{,}0$ V, il est obtenu au bout d'un temps $t_1 = 400$ s

Avec une intensité $I_2 = 3{,}0$ A correspondant à une tension $V_2 = 6{,}0$ V, il est obtenu au bout d'un temps $t_2 = 269$ s (avec la même masse ajoutée).

a) Expliquer le principe de cette expérience et calculer en $kJ.kg^{-1}$ l'enthalpie massique de vaporisation l_v de l'eau à 100 °C dans chacun des deux cas, les pertes thermiques étant négligées.
Comment s'écrit le premier principe dans ce cas ?

b) Ces valeurs ne sont pas satisfaisantes. Montrer qu'il est possible d'obtenir une meilleure valeur de l_v à partir des deux expériences précédentes en modélisant les pertes par une puissance thermique P_f constante.

96. Réalisation expérimentale d'une compression isotherme (*)

On envisage de comprimer de l'air d'un état initial, $P_1 = 1{,}0.10^5$ Pa et température $T_1 = 290$ K, à un état final, $P_2 = 5{,}0.10^5$ Pa et température $T_1 = 290$ K.
L'air à comprimer est considéré comme un gaz parfait idéal de rapport $\gamma = 1{,}4$. Les transformations étudiées sont mécaniquement réversibles, et $R = 8{,}3$ $J.K^{-1}.mol^{-1}$.
Les échanges thermiques éventuels se font *uniquement* avec l'air ambiant considéré comme un thermostat de température T_1. On ne dispose donc que d'*un seul thermostat*.

1. On envisage d'abord la compression d'une mole de gaz suivant un processus isotherme réversible. Quel travail W_m faut-il fournir à une mole de gaz ?

2. La compression isotherme étant difficilement réalisable (durée trop grande), on propose les transformations suivantes :

- Compression adiabatique réversible de l'état initial jusqu'à la pression P_2 ;
- puis refroidissement isobare jusqu'à l'état final.

Calculer le travail W_1 nécessaire pour comprimer une mole de gaz de cette façon et le comparer à W_m. Quelle est la différence importante entre ce processus et celui de la question 1 ?

3. On considère maintenant une compression en deux étapes :

- Compression adiabatique réversible de (P_1, T_1) jusqu'à une pression P (telle que $P_1 < P < P_2$) puis refroidissement isobare jusqu'à la température T_1.
- Compression adiabatique réversible de (P, T_1) jusqu'à la pression P_2, puis refroidissement isobare jusqu'à la température T_1.

a) Représenter ces transformations sur un diagramme de Clapeyron.
b) Exprimer le travail W à fournir à une mole de gaz en fonction de P, P_1, P_2, T_1, R et γ.
c) Comment choisir la pression P pour que W soit minimal ?
d) Exprimer la valeur minimale notée W_2 de W en fonction de P_1, P_2, T_1, R et γ.

e) Calculer numériquement W_2 et comparer à W_1 et W_m. Interpréter graphiquement.

4. On considère maintenant une transformation constituée de N étapes du type compression adiabatique puis refroidissement isobare ; les pressions intermédiaires sont notées p_i, avec $p_0 = P_1$ et $p_N = P_2$.

a) Exprimer le travail W total à fournir à une mole en fonction des p_i, N, T_1, R et γ.

b) En admettant que les conditions $\dfrac{\partial W}{\partial p_i} = 0$ soient suffisantes pour rendre W minimal, donner la relation entre p_i, p_{i+1} et p_{i-1} pour que W soit minimal. Montrer qu'alors des pressions intermédiaires telles que :

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \left(\frac{p_N}{p_0}\right)^{\frac{1}{N}}$$

rendent W minimal et donner cette valeur minimale notée W_N en fonction de P_1, P_2, N, T_1, R et γ.

c) Calculer la limite de W_N pour $N \to \infty$, comparer cette limite à W_m et interpréter.

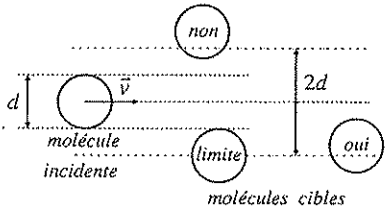
Réponses aux questions

Le cours d'abord

Description microscopique

1. Avec une masse molaire de $18\,\text{g.mol}^{-1}$, il y a donc $\frac{m}{M}N_A \approx 10^{23}$ molécules. Il faudra donc 6.10^{23} paramètres. Même si les interactions entre molécules sont connues, le nombre d'équations rend le problème impossible à traiter. Dans la description macroscopique ce sont plutôt les valeurs moyennes qui jouent un rôle dans l'évolution, et non les valeurs individuelles. Par exemple on verra que la température (concept macroscopique) est reliée à $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, vitesse quadratique moyenne.

2. La forme des molécules est assimilée à une sphère (le nuage électronique) et elles ne peuvent pas se recouvrir (force de répulsion à courte distance), un peu comme des boules de billard. La molécule incidente n'aura de choc avec une molécule cible que si le centre de celle-ci se trouve sur un disque de diamètre $2d$ sur l'axe.



La molécule incidente subit une collision si dans le volume balayé $\pi d^2 l$ se trouve une particule cible soit $\pi d^2 l \times n^* = 1 \Rightarrow \boxed{l = \frac{1}{\pi d^2 n^*}}$

3. Le nombre de molécules dans n moles de gaz est nN_A où N_A est la constante d'Avogadro. Écrivons alors l'équation des gaz parfait sous la forme $PV = nN_A \frac{R}{N_A} T$, par définition le nombre de molécules par unité de volume ou densité particulaire (en m^{-3}) est $n^* = \frac{nN_A}{V}$ et $\frac{R}{N_A} = k_B$

$$n^* = \frac{P}{k_B T} = \frac{10^5}{1{,}38.10^{-23} \times 293} \approx \underline{2{,}5.10^{25}\ \text{m}^{-3}}$$

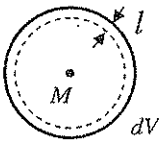
Ainsi dans un mm^3 d'air, il y a tout de même $2{,}4.10^{16}$ molécules, soit 24 millions de milliards, ce qui dépasse l'entendement...!

Pour un diamètre de molécule O_2 / N_2 de $d \approx 0{,}3$ nm,

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} n^* \pi d^2} \approx \underline{0{,}1\ \mu\text{m}}$$

ce qui est grand à l'échelle moléculaire, le gaz étant peu dense. En revanche pour un liquide où les molécules sont « en contact », le libre parcours moyen est de l'ordre de la taille des molécules soit $l \approx 0{,}1$ nm, ce qui avec la formule précédente, confirme qu'un liquide est toujours en gros 1000 fois plus dense qu'un gaz.

4. L'élément de volume dV choisi doit être grand à l'échelle microscopique afin de contenir un très grand nombre de molécules et que l'on puisse y définir la grandeur macroscopique par une valeur moyenne spatiale, mais petit à l'échelle macroscopique pour que la grandeur macroscopique ainsi définie puisse être considérée comme la valeur locale au point M.



À cause des chocs, le nombre de particules dans dV fluctue, mais si la taille de dV est très grande devant le libre parcours moyen, cette fluctuation ne concerne que les particules « en surface » de dV.

- pour un gaz où $l \approx 0{,}1\ \mu$m, on peut prendre $dV \approx 1\ \text{mm}^3$
- pour un liquide où $l \approx qqs\ 0{,}1$ nm, prendre $dV \approx 1\ \mu\text{m}^3$

On peut alors définir une grandeur locale comme la densité moléculaire : si dN est le nombre de molécules dans dV,

$$\boxed{n^*(M) = \frac{dN}{dV}}$$

■ Vocabulaire et définitions de la thermodynamique

5. Une <u>variable thermodynamique</u> (ou d'état) est une grandeur ou paramètre physique qui caractérise l'état macroscopique d'un système donné et qui par sa modification en décrit l'évolution.

Une <u>variable extensive</u> est une variable globale, liée à la taille du système : elle est proportionnelle à la quantité de matière du système (supposé homogène).
Pour repérer une variable extensive on peut utiliser le critère suivant : si on imagine un système identique au système étudié et qu'on l'unit au premier, la valeur d'une variable extensive est multipliée par 2.
Exemples : le volume V, la masse m, la charge électrique q, l'énergie E...

Une <u>variable intensive</u> ne dépend pas de la taille du système, elle est indépendante de la quantité de matière.
Exemples : la température T, la pression P, la masse volumique ρ, une concentration...

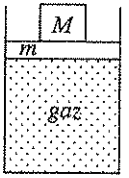
Dans l'hypothèse d'un milieu continu, une grandeur intensive peut être définie localement (voir la question **4.**). Un système est dit <u>homogène</u> si les grandeurs intensives qui lui sont attachées (ρ, T, P,...) ont même valeur en tout point.

La description de l'état macroscopique d'un système ne nécessite la connaissance que d'un petit nombre de paramètres de type variables d'état.

L'expérience permet de déterminer le nombre nécessaire et suffisant de paramètres pour décrire l'état du système : ce sont les variables d'état indépendantes.
Par exemple pour un fluide, dans *la plupart* des situations expérimentales, deux variables permettent la description macroscopique du fluide (V et P, ou P et T).

Une fonction thermodynamique d'un système est une fonction des variables thermodynamiques de ce système. Ultérieurement sont définies les fonctions énergie interne U, enthalpie H, entropie S,... Ce sont des fonctions d'état car leur valeur est connue lorsque les variables thermodynamiques qui caractérisent le système sont fixées ; et donc entre deux états d'un système, leur variation ne dépend que de ces deux états et non du chemin suivi(c'est-à-dire la nature de la transformation) entre les deux états.

6. Un système thermodynamique est en équilibre thermodynamique interne lorsque toutes ses variables d'état demeurent constantes au cours du temps, alors qu'il n'est l'objet d'aucun échange avec le milieu extérieur.
Un état d'équilibre particulier est caractérisé par les valeurs que prennent les variables d'état.
Dans le cas d'un système non isolé et en équilibre, un éventuel équilibre du système avec le milieu extérieur impose les valeurs de certaines variables d'état. Ainsi un système est en équilibre thermomécanique avec le milieu extérieur si $P = P_{ext.}$, de part et d'autre d'une paroi mobile et $T = T_{ext.}$, de part et d'autre d'une paroi diathermane (perméable à la chaleur).
Attention P_{ext} correspond à la pression exercée sous toutes ses formes. Par exemple dans le cas représenté ci-contre, à l'équilibre mécanique du piston, la pression du gaz est imposée par le milieu extérieur : $P = P_{atm} + \dfrac{(M+m)g}{S}$



7. Les interactions entre un système et le milieu extérieur conduisent à des évolutions lorsque les variables thermodynamiques sont modifiées : ceci caractérise une transformation qui peut être précisée en fonction de la manière dont le système passe d'un état à un autre (isotherme, isobare, isochore, adiabatique,...). Les variables d'état ne sont en général pas définies pendant la transformation.

8. Il faut que chaque état intermédiaire soit infiniment proche d'un état d'équilibre interne.
La transformation doit donc avoir une durée très grande par rapport à un temps caractéristique d'évolution du système (temps de relaxation) de manière à ce que les variables d'état du système s'ajustent à tout instant et restent bien définies.
La transformation, qualifiée de quasi statique, est donc une succession d'états d'équilibre infiniment voisins.
Par exemple, la compression d'un gaz par déplacement d'un piston est une transformation quasi statique si la vitesse de déplacement du piston est bien inférieure à la vitesse du son (vitesse à laquelle les variations de pression s'établissent). Dans le cas contraire, « la pression » n'est pas définie (le champ de pression n'est pas uniforme) et il n'y a pas d'équilibre thermodynamique interne.

Une transformation réversible est une transformation quasi statique pour laquelle il est possible de décrire la transformation en sens inverse (en repassant par les mêmes états), à tout instant, en modifiant infiniment peu les conditions extérieures.

Si une de ces contraintes, très fortes, n'est pas respectée, la transformation est irréversible. La validité des critères de réversibilité est difficile à apprécier, pour cette raison on considère qu'une transformation est réversible si elle est quasi statique et s'il n'y a pas de cause d'irréversibilité. Les causes d'irréversibilité sont principalement : les frottements solides, les déséquilibres thermiques, la diffusion (déséquilibre de concentrations), l'effet Joule, les phénomènes d'hystérésis,...
Les transformations réversibles sont donc des cas limites théoriques ; une transformation réelle est par nature irréversible.

9. Transformation isobare : transformation à pression constante.
Transformation monobare : transformation à pression extérieure constante.
Transformation isotherme : transformation à température constante.
Transformation monotherme : transformation à température extérieure constante.
Transformation isochore : transformation à volume constant.
Transformation adiabatique : transformation sans échange thermique (chaleur) avec le milieu extérieur.
Attention de ne pas confondre isotherme et adiabatique, les transformations adiabatiques se traduisent en général par de fortes variations de la température !

10. Un système fermé n'échange pas de matière avec le milieu extérieur, mais peut échanger de l'énergie (par travail W ou par transfert thermique Q).

Un système isolé est un système qui n'échange ni matière ni énergie avec le milieu extérieur.

11. L'étude expérimentale du système consiste à trouver les relations qui existent entre les différentes variables d'état du système. Ces relations sont appelées équations d'état.

Les variables d'état d'un ressort, lors de son étude expérimentale en mécanique, sont sa longueur l et sa tension F. Elles sont liées par une équation d'état $F = k(l - l_0)$, donc une variable d'état est nécessaire et suffisante pour décrire l'état du ressort dans son utilisation en mécanique.
Cependant on peut constater expérimentalement que le ressort peut avoir, pour une même tension, une longueur différente s'il est échauffé (si sa température est plus grande). La connaissance de sa température est donc nécessaire s'il évolue dans des conditions où elle est susceptible de varier, dans ce cas 2 variables sont nécessaires pour décrire le système ressort. Dans cet exemple l'équation d'état reste la même avec la constante de raideur k fonction de T.

12. La notion expérimentale évidente de température est associée à la sensation de « plus chaud, plus froid ». Ce critère ne permet pas en fait de comparer de façon fiable deux « températures » car la sensation dépend d'autres caractéristiques que la température de l'objet étudié (voir la question **63.**).
Le phénomène de dilatation des solides ou des liquides semble permettre la fabrication de thermomètres (dits à dilatation) qui par leur état, lorsqu'ils sont en

équilibre thermique avec l'objet étudié, vont indiquer sa température. Malheureusement il ne s'agit pas d'une vraie mesure de la température, car des thermomètres de ce type, différents (par exemple une règle en cuivre ou une en aluminium), indiquent des valeurs différentes et parfois contradictoires alors qu'ils sont en équilibre thermique avec le même objet.
Il faudrait pouvoir trouver une échelle thermométrique indépendante des propriétés de tel ou tel corps particulier. Il est remarquable qu'une telle échelle existe : c'est l'échelle dite des « gaz parfaits », traitée à la question **15.**.
Même s'ils ne permettent pas de mesure de température, les thermomètres à dilatation sont très utiles, car ils indiquent si une température reste constante et permettent de définir les thermostats.

13. Certains systèmes, non thermiquement isolés, ont une température qui reste constante, malgré les échanges thermiques, on les appelle thermostat ou source de chaleur.
C'est le cas par exemple de l'eau bouillante sous pression constante (par exemple la pression atmosphérique sur une durée limitée), d'un mélange eau liquide-glace à l'équilibre et sous pression constante. Les systèmes de très grande masse (ils possèdent une grande capacité thermique) ont la propriété de pouvoir céder ou recevoir de la chaleur sans que leur température ne varie pratiquement : ce sont des thermostats.

■ Propriétés des gaz aux faibles pressions

14. La pression se mesure avec une dénivellation de liquide (voir le chapitre « Statique des fluides ») et le volume en utilisant un réservoir gradué. La température qui ne peut être mesurée, pour l'instant, est maintenue constante grâce à un thermostat en équilibre thermique avec le gaz étudié. Sont étudiées donc des isothermes, soit P en fonction de V à T constante, par exemple.
L'isotherme expérimentale fait apparaître des directions asymptotiques pour $P \to 0$ et pour $V \to 0$, on pense donc à une branche d'hyperbole d'équation $PV = \text{cste}$. Il est alors possible de tester ce modèle en traçant PV en fonction de V ou de P. Dans un diagramme d'Amagat, on porte le produit PV en ordonnée et P en abscisse.
Aux pressions usuelles (considérées comme faibles), les isothermes d'un gaz dans un diagramme d'Amagat sont quasiment des droites, il est donc possible de les extrapoler à $P = 0$ (voir figure 1 ci-dessous). Chaque droite a un coefficient directeur faible mais non nul et qui dépend légèrement de la température (on change de température en changeant de thermostat).

figure 1

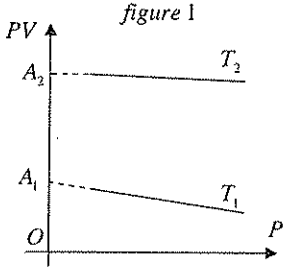
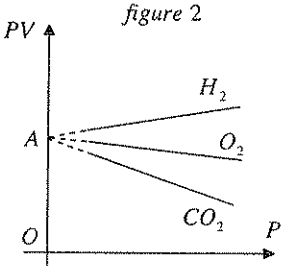


figure 2



15. On constate alors en traçant les isothermes d'autres gaz (pris en même quantité) que la limite de PV quand $P \to 0$, qui ne dépend que de la température, est *indépendante de la nature du gaz* (voir figure 2 ci-dessus). Cette limite constitue donc une grandeur thermométrique permettant de définir une échelle de température. On utilise $\lim_{P\to 0} PV$ comme mesure de température dite absolue (ou température des gaz parfaits) et exprimée en kelvin (K).

Par définition $\dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{T_1}{T_2}$ et la mesure est effective lorsqu'un thermostat de référence et sa valeur T_R sont fixés.

En fait il a été décidé de fixer l'écart de température entre deux thermostats plutôt que la valeur de la température d'un seul. Par commodité un écart de 100 K est imposé entre le thermostat eau liquide-glace à l'équilibre sous 1 atm et le thermostat eau bouillante sous 1 atm. Or l'expérience donne pour le premier thermostat le point A_1 et pour le second le point A_2 tels que $\dfrac{OA_1}{OA_2} = 1{,}36610$. En notant T_0 la température du premier thermostat, il vient : $\dfrac{T_0}{T_0 + 100} = 1{,}36610$, soit

$$\boxed{T_0 = 273{,}15 \text{ K}}$$

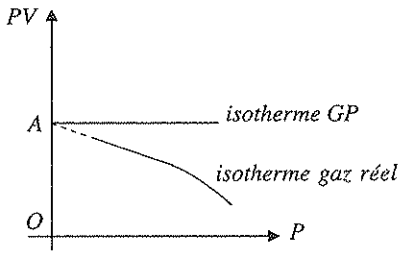
L'échelle Celsius en découle par translation :

$$\boxed{t(\text{en °C}) = T(\text{en K}) - 273{,}15}$$

ce qui permet d'avoir 0°C pour l'eau liquide-glace à l'équilibre sous 1 atm et 100°C pour l'eau bouillante sous 1 atm.

Le thermostat de référence n'est pas l'eau liquide-glace à l'équilibre sous 1 atm, dont la température dépend trop de la pression, difficile à maintenir précisément à 1 atm. On utilise le point triple de l'eau : eau liquide-glace-eau gaz en équilibre, ce qui ne se produit que sous une pression (6 mbar) et une seule température $T_0 + 0{,}01$ K. On pose donc la température du thermostat de référence, point triple de l'eau, égale à 273,16 K.

16. On appelle gaz parfait associé à un gaz réel, un gaz dont les molécules ont la même atomicité que les molécules du gaz réel et dont l'isotherme dans le diagramme d'Amagat est la droite parallèle à l'axe des pressions et passant par le point A.



Soit pour le modèle gaz parfait :

$$PV = cste$$

et par définition de la température absolue, la constante est proportionnelle à T

$$\Rightarrow \quad PV = rT$$

PV est extensif, il est proportionnel au nombre de moles n (loi d'Avogadro) et :

$$\boxed{PV = nRT}$$

avec $R = 8{,}31\ \text{J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}$ constante dite des gaz parfaits.

Étude cinétique des gaz parfaits

17. Les molécules qui constituent le modèle microscopique du gaz parfait monoatomique sont ponctuelles et sans interaction à distance entre elles.
On a vu qu'un gaz réel est d'autant plus proche du modèle GP que sa pression est faible, or si $P \to 0$, la distance entre les molécules augmente ($\to \infty$) et l'interaction diminue ($\to 0$). On pose donc ce résultat comme modèle microscopique.

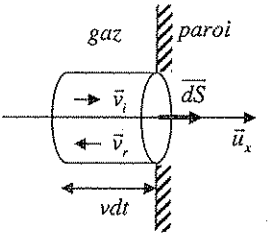
18. D'abord il faut se rendre compte qu'un petit volume mésoscopique de gaz contient un très grand nombre de particules (voir la question **4.**), ce qui nécessite un traitement statistique. Ces molécules y ont des vitesses très élevées et subissent entre elles de très fréquents chocs (toutes les 10^{-10} s en moyenne dans l'air) ; c'est ce mouvement microscopique totalement désordonné et sans résultante macroscopique (l'enceinte est immobile) qui est appelé « l'agitation thermique ».
La distribution des vitesses au niveau microscopique est très large (en norme) et présente un maximum : ceci signifie qu'il y a des particules plus lentes et d'autres plus rapides que la moyenne. Mais la vitesse est un vecteur et toutes les directions après un choc sont équiprobables (c'est l'isotropie de la vitesse). De plus on considère que la probabilité, pour une molécule, d'avoir une certaine vitesse est indépendante du point où elle se trouve (homogénéité de la distribution).
Ainsi, si N est le nombre de particules dans un élément de volume, la vitesse moyenne (au sens moyenne spatiale) est, en vecteur, $<\vec{v}> = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i = \vec{0}$.

En revanche, la vitesse quadratique moyenne u est une grandeur scalaire liée à la moyenne spatiale de la norme au carré :

$$u^2 = <\vec{v}^2> = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i^2$$

19. Le gaz parfait monoatomique est constitué de N molécules de masse m qui occupent le volume total V à la température T fixée. La densité moléculaire est n^*.

La pression est la manifestation macroscopique de l'effet des chocs microscopiques des particules sur la paroi. Ces chocs sont supposés élastiques.
On cherche à calculer la force exercée par les molécules sur cette paroi.
Les axes Ox, Oy, Oz sont choisis tels que Ox soit orthogonal à l'élément de surface dans le sens du vecteur $\overrightarrow{dS}$ (cf. figure), les axes Oy et Oz sont dans le plan de l'élément de surface.



Le calcul s'effectue dans le cadre des hypothèses simplificatrices suivantes :

- On considère d'abord que toutes les molécules ont des vitesses qui ont toutes la même norme notée v (cette hypothèse peu réaliste est reprise à la fin).

- Chaque molécule ne se déplace que suivant une seule des trois directions Ox, Oy ou Oz et suivant un seul sens.
- En raison de l'isotropie de la distribution des vitesses, les six possibilités de déplacement sont équiprobables et il y a un sixième des molécules qui se déplacent suivant chaque sens.

Seules les molécules ayant une vitesse initiale $\vec{v}_i = v\vec{u}_x$ peuvent rencontrer la paroi.
Comme elles arrivent sur la paroi sous incidence normale et que le choc est élastique, elles repartent après le choc avec la vitesse $\vec{v}_r = -\vec{v}_i = -v\vec{u}_x$ (résultat admis).
La variation de quantité de mouvement d'une molécule au cours du choc est donc :

$$m\vec{v}_r - m\vec{v}_i = -2mv\vec{u}_x$$

Soit K le nombre de chocs sur la surface par unité de temps. La variation de quantité de mouvement de l'ensemble des molécules qui viennent heurter la paroi pendant dt est :

$$\overrightarrow{dp} = -2K\,dt\,mv\vec{u}_x \text{ pendant la durée } dt.$$

La force exercée par la paroi sur les molécules est donc d'après le P.F.D. :

$$\overrightarrow{dF'} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = -2Kmv\vec{u}_x$$

On en déduit la force exercée par le gaz sur la paroi :

$$\overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{dF'} = 2Kmv\vec{u}_x$$

Il reste maintenant à calculer K :
Pendant la durée dt les molécules parcourent la distance $v\,dt$ si elles ne rencontrent aucun obstacle, depuis leur dernier choc, ce qui revient à prendre $v\,dt < l$ libre parcours moyen (voir la question **2.**). Ainsi les molécules venant heurter la paroi pendant dt doivent se situer à une distance inférieure ou égale à $v\,dt$.

Les particules qui frappent S pendant la durée dt sont donc contenues dans le cylindre de base dS, de hauteur $v\,dt$ et de volume $d\tau = v\,dt\,dS$.

Ce volume contient $n^* d\tau$ molécules dont seulement $\frac{1}{6}$ se dirigent vers la paroi.

Le nombre de molécules qui arrivent sur dS pendant la durée dt est donc :

$$\frac{1}{6}n^* dS\,v\,dt \quad \text{et donc} \quad K = \frac{1}{6}n^* dS\,v$$

On reporte dans l'expression de $\overrightarrow{dF}$, soit $\overrightarrow{dF} = \frac{1}{3}n^* mv^2\,dS\,\vec{u}_x$

Revenons sur l'hypothèse norme commune. Notons n_i^* la densité moléculaire des molécules qui ont v_i comme valeur commune de la norme v de leur vitesse. Ces molécules contribuent à la force totale sur dS par : $\overrightarrow{dF_i} = \frac{1}{3}n_i^* mv_i^2\,dS\,\vec{u}_x$.

La force sur dS est donc en sommant sur toutes les valeurs possibles de norme :

$$\overline{dF} = \sum_i \left(\frac{1}{3} n_i^* m v_i^2 \, dS \, \vec{u}_x \right) = \frac{1}{3} \sum_i \left(n_i^* v_i^2 \right) m \, dS \, \vec{u}_x$$

Or : $\sum_i \left(n_i^* v_i^2 \right) = n^* u^2$ où u représente la vitesse quadratique moyenne.

Finalement :

$\overline{dF} = \frac{1}{3} n^* m u^2 \, dS \, \vec{u}_x$ et d'après la définition de la pression : $\overline{dF} = P \, dS \, \vec{u}_x$.

Par identification, on en déduit :

$$\boxed{P = \frac{1}{3} n^* m u^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m u^2}$$

Ainsi c'est la vitesse quadratique au carré qui apparaît dans la pression cinétique.

20. L'équation d'état macroscopique, $PV = nRT$, et l'interprétation cinétique de la pression, $P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m u^2$, donne, avec pour n moles (M est la masse molaire) $Nm = nN_A m = nM$:

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}$$

montrant ainsi que la température T est une grandeur macroscopique qui mesure l'agitation thermique microscopique. On identifie ici température absolue des GP et température cinétique.

$k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} est la constante de Boltzmann, l'énergie cinétique de translation moyenne est :

$$< \frac{1}{2} m v^2 > = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

■ Énergie interne

21. Pour une molécule monoatomique, modèle ponctuel, la seule possibilité d'énergie microscopique est l'énergie cinétique de translation, on définit l'énergie interne par :

$U = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}_i^2 \right) = \frac{1}{2} N m u^2$ d'après la définition de la valeur moyenne u^2

soit $\boxed{U = \frac{3}{2} nRT}$ puisque $u^2 = \frac{3RT}{M}$

Il s'agit de l'énergie d'un gaz parfait monoatomique, au repos macroscopique et non soumis à un champ de force extérieure.

L'énergie interne est proportionnelle au nombre de moles n, elle est extensive, elle ne dépend que de la température T. U est une fonction d'état.

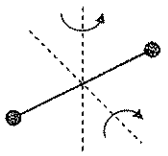
22. Les molécules polyatomiques ont en plus de la translation, des possibilités de rotation et de vibration.

On conçoit facilement cependant que ces mouvements propres (rotation et vibration) influent peu sur le mouvement d'ensemble de translation et donc à température fixée, on a toujours : $u^2 = \frac{3k_B T}{m}$, soit la même expression de la pression cinétique que pour un gaz parfait monoatomique (GPM) et donc la même équation d'état : $PV = nRT$.

Ce résultat est conforme à l'étude expérimentale : les gaz d'atomicité quelconque suivent le modèle gaz parfait quand $P \to 0$.

L'hypothèse importante du modèle microscopique du GP est donc : pas d'interaction entre les molécules.

Il faut revenir en revanche sur l'énergie interne, en considérant la somme de toutes les énergies cinétiques (de translation de la molécule mais aussi de rotation sur elle-même en $\frac{1}{2}J\omega^2$ par exemple, voir figure) que l'on note : $E_{ci} = \frac{1}{2}mv_i^2 + E_{ci}^*$. En sommant sur toutes les molécules et en prenant la valeur moyenne :



$$U = \frac{3}{2}nRT + \sum_i E_{ci}^*$$

$\sum_i E_{ci}^*$ (due aux rotations, vibrations...) est, en l'absence d'interaction, *a priori* indépendante du volume ; elle ne dépend que de T.

Par exemple l'étude expérimentale des gaz diatomiques aux faibles pressions donne jusqu'à des températures pas trop grandes : $U = \frac{5}{2}nRT$, c'est-à-dire plus que ce qui peut être stockée avec l'énergie cinétique de translation. Puis quand T augmente, on observe une augmentation plus rapide de U, du fait de l'apparition de nouveaux types d'énergie microscopique (vibrations), soit $U = \lambda T$ avec $\lambda > \frac{5}{2}nR$.

De façon générale pour un GP : $\boxed{U = U(T)}$

23. Le fait que PV dépende, à T = cste, de P et donc de V, traduit une interaction entre les molécules du gaz réel, à la différence des molécules du GP qui n'interagissent pas.

À cette interaction est associée une énergie potentielle qui doit être prise en compte dans l'énergie interne du gaz réel. $U = E_{c,micro} + E_{p,int}$, avec $E_{c,micro}$ fonction de T et $E_{p,int}$ qui dépend de la distance entre les molécules, donc fonction de V :

$$\boxed{U = U(T,V)}$$

24. L'énergie interne U d'un gaz réel dépend donc de T et de V.

On appelle capacité thermique à volume constant : $\boxed{C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}$

Elle s'exprime en $J.K^{-1}$ et peut s'interpréter comme la quantité d'énergie qu'il faut fournir au système pour élever (à volume constant) sa température de 1 K.

C_V est extensive, pour avoir une grandeur intensive, on définit plutôt :

- la capacité thermique molaire à volume constant C_{Vm} telle que : $C_V = nC_{Vm}$
- la capacité thermique massique à volume constant c_V telle que $C_V = mc_V$

C_{Vm} est en $J.K^{-1}.mol^{-1}$ et c_V est en $J.K^{-1}.kg^{-1}$

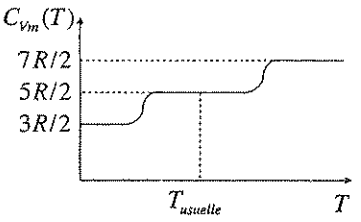
- Pour un GPM : $C_V = \dfrac{dU}{dT} = \dfrac{3}{2}nR$ et $\boxed{C_{Vm} = \dfrac{3}{2}R \approx 12{,}5\ J.K^{-1}.mol^{-1}}$

- Pour un GP diatomique dans les conditions usuelles : $C_V = \dfrac{dU}{dT} = \dfrac{5}{2}nR$ et

$$\boxed{C_{Vm} = \frac{5}{2}R}$$

Aux températures usuelles, dans un domaine de température relativement étendu, on constate que C_{Vm} est indépendant de T, mais à des températures plus élevées (quelques 1000 K), il apparaît d'autres possibilités énergétiques microscopiques et C_{Vm} augmente :

$C_{Vm} = \dfrac{7}{2}R$ sur le palier suivant.



- Pour un GP quelconque : $dU = C_V\,dT = mc_V(T)\,dT$ car U n'est fonction que de T.

Si C_V est indépendante de T, le GP est dit idéal et $\boxed{\Delta U = mc_V\,\Delta T}$

Le GPM et le GP diatomique dans les conditions usuelles sont idéaux.

25. Les solides ou les liquides sont très peu dilatables ou compressibles (voir le diagramme question **28.**). En l'absence de variation de volume, leur variation d'énergie interne est liée à la seule variation de température :

$$dU \approx C_V dT = mc_V(T)\,dT$$

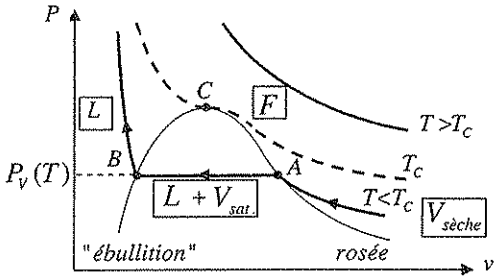
Si c_V est constant dans l'intervalle $[T_1, T_2]$: $U_2 - U_1 = mc_V(T_2 - T_1)$

Corps pur diphasé en équilibre

26. Pour une température inférieure à une température appelée température critique, un corps pur liquide peut être en équilibre avec sa forme gazeuse. Cet équilibre, à température fixée, est réalisé lorsque la pression de la phase gazeuse (pression partielle du corps pur gazeux) au-dessus du liquide a une valeur bien déterminée, appelée pression de vapeur saturante et notée $P_V(T)$, elle dépend de la température.

Par exemple pour l'eau, la température critique est 374 °C, soit $T_C = 647\,\text{K}$, l'équilibre liquide-vapeur à 20 °C se produit sous $P_v \approx 0{,}02$ atm et à 100 °C sous $P_v = 1{,}0$ atm.

Pour $T < T_C$, on comprime de manière isotherme une unité de masse de vapeur sèche (ou gaz), soit $P < P_v(T)$. Au point A apparaît la première goutte de liquide (sur la courbe de rosée). Ensuite entre A et B, en poursuivant la compression, on observe un palier à pression et température constantes où le liquide formé est en équilibre avec la vapeur saturante à la pression $P_v(T)$. Au point B il n'y a plus que du liquide, quasiment incompressible, d'où la pente raide après B. En effectuant l'opération en sens inverse (détente du liquide), la première vapeur apparaît au point B, sur la courbe dite « d'ébullition » ; attention cette appellation n'a rien à voir avec le phénomène d'ébullition !



Le lieu des points A et B est la courbe de saturation, v est le volume massique.

Les isothermes des gaz aux faibles pressions, étudiées à la question **14.**, correspondent aux courbes dans une zone plus loin à droite et en bas du diagramme ci-dessus.

En tout point de ce diagramme, le système est à l'équilibre, ce qui ne correspond pratiquement jamais aux observations dans la vie courante des systèmes liquide-gaz d'un même corps pur.

Au-dessus de la courbe de saturation, le système est monophasé divariant et en dessous (à « l'intérieur ») il est diphasé monovariant : un seul paramètre intensif décrit son état thermodynamique puisqu'à T fixée $P = P_v(T)$.

L'isotherme critique $T = T_C$ est caractérisée au point critique C par une tangente horizontale et un changement de concavité.

Au-delà de l'isotherme critique $T > T_C$, on ne distingue plus entre le liquide et le gaz ; F est le domaine du fluide supercritique.

27. Une description complète du corps pur diphasé nécessite d'introduire une variable décrivant la répartition liquide-gaz. On peut choisir les titres massiques ou molaires :

$$x_1 = \frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n} \text{ et } x_2 = \frac{m_2}{m} = \frac{n_2}{n} \text{ avec } x_1 + x_2 = 1.$$

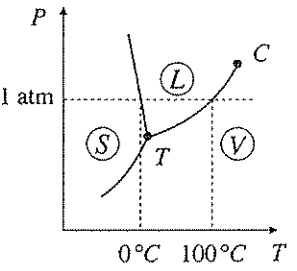
Si le titre en vapeur est x_v, en un point du palier d'équilibre liquide-vapeur, le volume massique s'écrit : $v = x_v v_v + (1 - x_v) v_l$ avec v_v et v_l les volumes massiques respectivement de la vapeur en A et du liquide en B. Il vient :

$$\boxed{x_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l}}$$

28. La pression de vapeur saturante dépend de la température, la représentation de $P_v(T)$ dans un diagramme (P,T) est la courbe de vaporisation. Chaque point de cette courbe correspond à un état d'équilibre liquide-gaz ; au-dessus on a le liquide en équilibre et en dessous le gaz en équilibre. La courbe de vaporisation est limitée d'un côté par le point critique et de l'autre par le point triple.
De même les équilibres solide-liquide et solide-gaz se produisent à T fixée sous une seule pression, respectivement la pression de fusion $P_f(T)$ et la pression de sublimation $P_s(T)$.

Pour le corps pur eau, le diagramme est représenté ci-contre. Pour la pression normale (1 atm) on retrouve la température d'équilibre liquide-vapeur (100 °C) et la température d'équilibre solide-liquide (0 °C).
Le point triple T est le seul pour lequel les trois phases peuvent coexister à l'équilibre :

$$P_T \approx 6 \text{ mbar} \quad \text{et} \quad T_T = 273{,}16 \text{ K}.$$



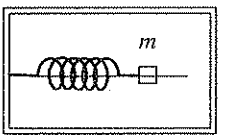
En dessous de P_T, la phase liquide n'existe plus à l'équilibre, la glace se sublime.
Au-delà du point critique C, on ne distingue plus entre le liquide et la vapeur :

$$P_C \approx 220 \text{ atm} \quad \text{et} \quad T_C = 647 \text{ K} \ (374 \text{ °C}).$$

NB : En général, la pente de l'équilibre solide-liquide est positive, sauf, comme ici, dans le cas de l'eau. Cette pente est très grande en valeur absolue, la température d'équilibre varie très peu, même pour de fortes variations de pression. Ceci explique la valeur très proche de 273,15 K de la température T_T de l'eau.

■ Énergie d'un système thermodynamique

29. L'énergie mécanique n'est pas conservative : l'énergie mécanique d'un système fermé et isolé n'est pas nécessairement constante.
Par exemple le système (ressort / masse + air) entouré de parois isolantes constitue un système fermé et pseudo-isolé. Dans l'état initial le ressort est allongé de a et l'air est au repos macroscopique, on libère la masse m, l'état final est dans tous les cas, au bout d'un temps suffisant : masse m immobile et air au repos.



L'énergie mécanique est $E_m = E_c + E_{p,\vec{f}\ int\ et\ ext}$, soit dans l'état initial $E_{m,i} = \frac{1}{2}ka^2$ (m a une vitesse nulle et l'air est au repos) et dans l'état final $E_{m,f} = 0$. L'énergie mécanique n'est pas conservative et ceci même si on minimise au maximum les frottements de la masse sur le support.
Une mesure précise de la température de l'air dans l'état initial et dans l'état final, dans l'expérience ci-dessus, montrerait que $T_f > T_i$. En considérant un modèle GP pour l'air, cela signifie que l'énergie interne de l'air a augmenté, or justement l'énergie mécanique a disparu.... Ceci permet de penser qu'il est peut-être possible de construire une grandeur conservative, en tenant compte de l'énergie interne.
C'est ce qui a été fait par les thermodynamiciens du XIX^{ème} siècle dans l'élaboration du concept d'énergie totale (R. Von Mayer 1845), en tant que grandeur conservative, et la recherche des formes d'échange d'énergie (Carnot, Rankine, Joule, Thomson).

$$\boxed{E = U + E_{c,macro} + E_{p,ext.}}$$

- U énergie interne : $U = E_{c,micro} + E_{p,int}$. $E_{c,micro}$ correspond à l'agitation thermique sous toutes ses formes ; $E_{p,int}$ est l'énergie potentielle dont dérive toutes les interactions internes *sans distinction* microscopique ou macroscopique.
- $E_{c,macro}$, souvent notée K, est l'énergie cinétique macroscopique, elle correspond à un mouvement d'ensemble macroscopique du système, par exemple si v_e est la vitesse d'écoulement, $K = \frac{1}{2}M v_e^2$.
- $E_{p,ext}$ est l'énergie potentielle dont dérive les champs de force extérieure appliqués au système.

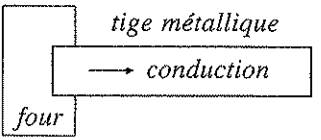
On remarque que l'énergie mécanique n'apparaît pas en tant que telle dans l'énergie totale, une partie de l'énergie potentielle d'interaction est comptabilisée dans U. Le concept d'énergie mécanique ne peut pas être utilisé pour définir l'énergie convenablement.

30. Le premier principe pose que l'énergie E est conservative. Et donc, si pour un système E varie, c'est qu'il y a eu échange à travers la surface de séparation système-milieu extérieur, le système n'est pas isolé. $\Delta E = E_{éch}$, avec $E_{éch} > 0$ si le système reçoit effectivement de l'énergie et $E_{éch} < 0$ si le système cède de l'énergie à l'extérieur.
L'expérience montre qu'il existe deux façons (et deux seulement) très différentes d'échanger de l'énergie : travail et transfert thermique (chaleur). Ces formes d'échange d'énergie ne doivent surtout pas être confondues avec les diverses formes de l'énergie (K, $E_{c,micro}$, $E_{p,int}$ ...), voir la question **66.**. C'est cette distinction qui a rendu difficile, historiquement, l'élaboration du premier principe ; alors que le second principe lui s'est imposé expérimentalement de façon évidente (bien qu'il n'ait pas été identifié immédiatement).
Exemples d'échange sous forme de travail : travail électrique (le système est un dipôle électrocinétique), travail des forces de pression, travail mécanique du type de

la question **66**.. Dans le cas d'un échange sous forme de travail, il y a un déplacement macroscopique mesurable.

31. ▶La conduction (aussi appelée diffusion) est le transfert thermique qui intervient dans un milieu dont la température n'est pas homogène et qui ne s'accompagne pas, à l'échelle macroscopique, de mouvement de matière. Ce mode est prépondérant dans les solides.

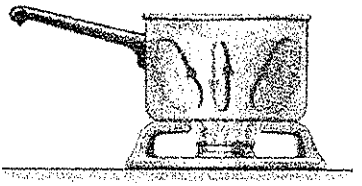
Un exemple générique consiste à prendre une tige métallique dont l'extrémité gauche est encastrée dans un four maintenant une température donnée (à l'image d'un manche de casserole). La conduction explique l'augmentation, au cours du temps, de la température de la partie droite du manche métallique d'une casserole posée sur « le feu ».



Au niveau microscopique l'agitation thermique des molécules (vibrations sur place pour un solide) peut se transmettre (en sens inverse du gradient de température) plus ou moins bien suivant la nature plus ou moins conductrice du milieu. Les métaux sont de bons conducteurs électriques.

▶La convection est un transfert accompagné d'un déplacement macroscopique de matière, et concerne donc les fluides (liquides et gaz) et pas les solides.

Par exemple l'eau dans une casserole chauffée par le fond se met en mouvement spontanément. Les particules de fluide (volume mésoscopique) proches du fond sont échauffées, elles deviennent moins denses et s'élèvent vers la surface à cause de la poussée d'Archimède. Arrivées en surface, elles sont refroidies par un environnement plus froid, leur densité augmente et elles repartent vers le bas. Le bilan est un transfert thermique dans l'eau plus efficace que la simple conduction.



De même l'air échauffé au contact d'un radiateur de chauffage central va s'élever et entraîner un phénomène de convection permettant une homogénéisation plus rapide de la température dans la pièce.

On peut aussi réaliser une convection forcée en provoquant une circulation artificielle du fluide : soufflerie d'un sèche-cheveux, circulation de l'eau (fluide caloporteur) dans un circuit de chauffage central.

La convection forcée est aussi un moyen efficace d'homogénéisation d'autres paramètres que la température, comme par exemple une concentration : en tournant son café avec une cuillère, on homogénéise, plus efficacement qu'avec la diffusion, la concentration en sucre.

▶Tout corps émet un rayonnement électromagnétique qui transporte de l'énergie (c'est un transfert) susceptible, entre autres, d'échauffer le corps qui la reçoit. Contrairement à la conduction et à la convection, le transfert par rayonnement peut s'effectuer dans le vide.

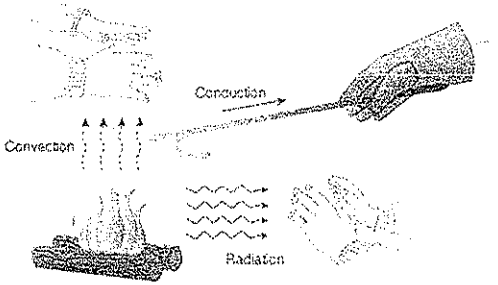
Avec une modélisation, dite du corps noir, le spectre d'émission est continu et dépend de la température du corps ; il suit en particulier la loi de Wien qui relie

simplement la longueur d'onde λ_m pour laquelle le spectre émis est maximal et la température T par : $\lambda_m T \approx 3\,000$ µm.K

- pour le corps humain à 37 °C, $\lambda_m \approx 10$ µm est dans l'infrarouge et on parle de rayonnement thermique
- pour le Soleil, la température de surface est de 5 000 K, soit $\lambda_m \approx 0{,}6$ µm, cette source de température élevée émet dans le visible.

Un exemple d'adaptation du rayonnement au corps qui le reçoit, en vue d'un échauffement efficace est le rayonnement micro-onde (λ de l'ordre de 12 cm) des fours à micro-ondes, qui agit directement sur les molécules d'eau de l'aliment.

En résumé :



Travail des forces de pression

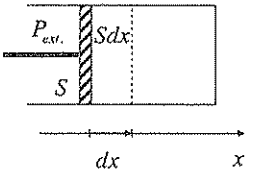
32. L'expression du travail des forces de pression sous la forme $\delta W = -P_{ext.}\,dV$ où $P_{ext.}$ est la pression extérieure (atmosphère, poids du piston, opérateur,...), concerne le travail reçu de l'extérieur par le piston (que l'on inclut avec le gaz dans le système étudié) et non le travail reçu par le gaz !

En effet c'est le piston qui, du côté extérieur, subit la pression $P_{ext.}$ sur une surface S pendant un déplacement dx :

$$\delta W = \overline{F}\,\overline{dM} = (P_{ext.} S\vec{u}_x).(dx\vec{u}_x) = P_{ext.} S dx = -P_{ext.} dV$$

le volume Sdx balayé par le piston est en effet l'opposé de la variation de volume dV du gaz et il convient d'être attentif au signe :

- si le gaz est comprimé, son volume V diminue ($dV < 0$) et le système reçoit bien un travail du milieu extérieur : $\delta W = -P_{ext.} dV > 0$
- si le gaz est détendu, son volume V augmente ($dV > 0$) et c'est le système qui fournit du travail au milieu extérieur : $\delta W = -P_{ext.} dV < 0$



33. Si l'on note temporairement $\delta W'$ le travail des forces de pression reçu par le gaz *seul*, alors le théorème de l'énergie cinétique appliqué au piston s'écrit sur un petit

déplacement :

$$dE_c = -P_{ext.}dV + (-\delta W') + \delta W_{frott.}$$

En effet, au travail précédent s'ajoute le travail du gaz sur le piston (l'opposé du travail $\delta W'$ du piston sur le gaz) ainsi que le travail des forces de frottement mécanique dans le déplacement du piston contre l'enceinte,

$$\text{soit } \delta W' = -P_{ext.}dV - dE_c + \delta W_{frott.}$$

En l'absence de frottement mécanjque $\delta W_{frott.} = 0$ et si le déplacement est quasi statique pour que $dE_c = 0$ ce qui entraîne également $P_{ext.} = P$ où P est la pression du gaz, alors

$$\delta W' = -P_{ext.}dV = -PdV$$

Alors le travail reçu par le piston est intégralement transféré au gaz.
Ces hypothèses de validité définissent les transformations mécaniquement réversibles et permettent d'écrire pour le travail reçu par le gaz, en revenant à la notation δW :

$$\boxed{\delta W = -PdV}$$

En toute rigueur, il ne suffit donc pas que la transformation soit quasi statique pour pouvoir affirmer $\delta W = -PdV$, encore faut-il qu'il n'y ait pas d'irréversibilité mécanique, car le fait de procéder lentement ne supprime pas les frottements solides...

34. • Transformation de V_1 à V_2 à $P_{ext.} = cste$ entre deux états d'immobilité du piston et avec $W_{frott.} = 0$.

Le travail reçu par le gaz seul est :

$$W = \int -P_{ext.}dV - \Delta E_c + W_{frott.} = \int -P_{ext.}dV + 0 + 0 = -P_{ext.}\int_{V_1}^{V_2} dV$$

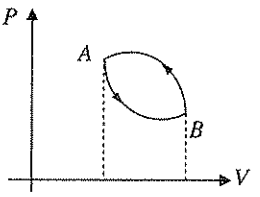
$$\boxed{W = -P_{ext.}(V_2 - V_1)}$$

• Transformation mécaniquement réversible
Alors $P = P_{ext.}$ et :

$$\boxed{W = \int_{V_1 \to V_2} -PdV}$$, P dépend de V *a priori*, W dépend du chemin suivi.

35. Pour le cycle mécaniquement réversible ABA, $W = \int_{A \to B} -PdV$ calculée le long de la courbe AB s'interprète comme une aire algébrique dans le diagramme de Clapeyron.

Par exemple, dans le cas représenté ci-contre, W_1 est reçu lors de la détente AB, $W_1 < 0$ et $|W_1|$ représente l'aire sous la courbe AB ; W_2 est reçu lors de la compression BA, $W_2 > 0$ et W_2 représente l'aire sous la courbe BA. Le travail total reçu sur le cycle est $W = W_1 + W_2$, $W > 0$ sur cet exemple et correspond



donc à l'aire du cycle.
Si le cycle, représenté dans le diagramme de Clapeyron, est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre alors $W < 0$, le cycle est moteur. Dans tous les cas $|W|$ est représenté par l'aire du cycle dans le diagramme de Clapeyron.

Rq : Une représentation des transformations, dans le diagramme de Clapeyron, est possible ici car les transformations mécaniquement réversibles sont une succession d'états d'équilibre. Attention cependant les courbes ne sont valables *a priori* que pour un seul sens de parcours, car la réversibilité n'est pas assurée.

Premier principe de la thermodynamique

36. Si un système fermé évolue entre deux états, en recevant algébriquement le travail W et le transfert thermique Q, son énergie varie de :

$$\Delta E = W + Q \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta U + \Delta K + \Delta E_{p,ext.} = W + Q}$$

Le 1er principe est aussi appelé principe de conservation de l'énergie car les variations d'énergie totale sont uniquement liées à des termes d'échange (et non à un terme de création).
Si le système est isolé : $E = cste$
Attention de ne pas considérer dans W le travail des forces extérieures dérivant d'une énergie potentielle car cette énergie potentielle fait partie de l'énergie du système.

Cas particulier important :
Le système est « purement » thermodynamique, c'est-à-dire macroscopiquement au repos dans le référentiel d'étude, donc son énergie cinétique macroscopique K et son énergie potentielle $E_{p,ext.}$ dans le champ de force extérieure ne varient pas, le premier principe s'écrit sous la forme simplifiée :

$$\boxed{\Delta U = W + Q}$$

$\Delta U = U_f - U_i$ ne dépend que de l'état initial et de l'état final, elle est indépendante du chemin suivi, mais W et Q eux en dépendent.

37. Pour un fluide, W ne correspond le plus souvent qu'au travail des forces de pression (seule possibilité pour un système de ce type de recevoir du travail).

- Si la transformation est isochore (à volume constant) $dV = 0$ soit $W = 0$ et donc $\Delta U = W + Q_V$ soit :

$$\boxed{\Delta U = Q_V}$$

Le transfert thermique s'identifie à la variation d'énergie interne, ce qui permet, connaissant les états initial et final, d'évaluer de façon théorique le transfert thermique.

- Si la transformation est monobare et sans frottement entre deux états d'équilibre, soit $P_{ext.} = P_i = P_f$ (la pression du système n'est pas forcément égale à la pression

extérieure à tout instant, sauf dans les états initial et final), alors le travail reçu à $P_{ext.} = cste$ est $W = -P_{ext.}\Delta V$ (voir la question **34.**).

Le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = U_f - U_i = Q - P_{ext.}(V_f - V_i) \quad \text{soit} \quad (U_f + P_{ext.}V_f) - (U_i + P_{ext.}V_i) = Q$$

et puisque $P_{ext.} = P_i = P_f$: $(U_f + P_fV_f) - (U_i + P_iV_i) = Q$

ou encore $\Delta(U + PV) = Q = \Delta H$ en notant :

$$\boxed{H = U + PV}$$

une nouvelle fonction d'état : l'enthalpie du système (dont la définition concerne ici un système de type fluide). Elle est extensive comme U et PV.

Pour une transformation monobare entre deux états d'équilibre : $\boxed{\Delta H = Q_P}$

Ce résultat se généralise à un système différent d'un fluide en adaptant la définition de la fonction enthalpie.

38. La fonction enthalpie H est fonction de P et de T.

On appelle capacité thermique à pression constante : $\boxed{C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P}$

Elle s'exprime en $J.K^{-1}$.

C_P est extensive, pour avoir une grandeur intensive, on définit plutôt :

- la capacité thermique molaire à pression constante C_{Pm} telle que : $C_P = nC_{Pm}$
- la capacité thermique massique à pression constante c_P telle que $C_P = mc_P$

C_{Pm} est en $J.K^{-1}.mol^{-1}$ et c_P est en $J.K^{-1}.kg^{-1}$

39. Pour un gaz parfait quelconque :

$$H = U + PV = U + nRT$$

Or pour un GP : U fonction de T seule, donc H aussi, il vient :

$$C_P = \frac{dH}{dT} \quad \text{et} \quad C_V = \frac{dU}{dT}$$

$$\text{De plus } H = U + PV = U + nRT \Rightarrow \frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR$$

Soit $C_P - C_V = nR$ ou encore $\boxed{mc_P - mc_V = nR}$ ou encore $C_{Pm} - C_{Vm} = R$

Cette relation est la relation de Mayer, valable pour un GP quelconque.

On définit le rapport des capacités thermiques :

$$\boxed{\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}} = \frac{c_P}{c_V}} \text{ et pour un GP : } \gamma > 1$$

La relation de Mayer donne alors, toujours pour un GP : $mc_V(\gamma - 1) = nR$

$$\Rightarrow \boxed{mc_V = \frac{nR}{\gamma - 1}} \text{ et } \boxed{mc_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}}$$

Applications :

a) GPM : $U = \frac{3}{2}nRT$; $H = \frac{5}{2}nRT$; $mc_V = \frac{3}{2}nR$; $mc_P = \frac{5}{2}nR$; $\gamma = \frac{5}{3}$ ce qui correspond aux valeurs expérimentales pour les gaz rares (monoatomiques).

b) GP diatomique dans des conditions usuelles : $U = \frac{5}{2}nRT$; $H = \frac{7}{2}nRT$; $mc_V = \frac{5}{2}nR$; $mc_P = \frac{7}{2}nR$; $\gamma = \frac{7}{5}$ ce qui correspond à la valeur expérimentale pour l'air (mélange de gaz principalement diatomiques) $\gamma_{air} = 1,41$.

c) Plus généralement pour un GPI, mc_V, mc_P et γ sont indépendants de T :

$$\Delta U = mc_V \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1}\Delta T \quad \text{et} \quad \Delta H = mc_P \Delta T = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\Delta T$$

40. Comme on l'a vu à la question **25.** les solides ou les liquides sont très peu dilatables ou compressibles ; en l'absence de variation de volume, leur variation d'énergie interne est liée à la seule variation de température :

$$dU \approx C_V dT$$

De même $dH = dU + d(PV)$ avec numériquement $|d(PV)| \ll |dU|$ conduit à $dH \approx dU$, d'où l'on déduit $C_P \approx C_V$ notée C, capacité thermique de la phase condensée, sans précision.

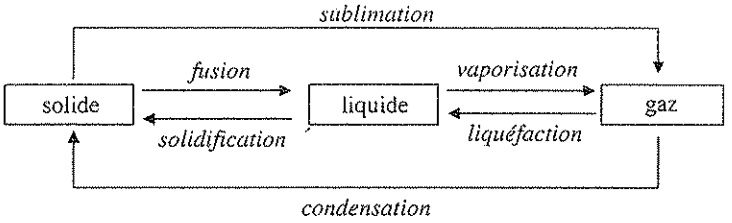
Pour la masse m, on écrit :

$$dH \approx dU \approx mc(T)dT$$

	Énergie interne	Enthalpie	mc_V	mc_P	$mc_P - mc_V$	γ
GPM	$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$	$\Delta H = \frac{5}{2}nR\Delta T$	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$	nR	$\frac{5}{3}$
GP diat. conditions usuelles	$\Delta U = \frac{5}{2}nR\Delta T$	$\Delta H = \frac{7}{2}nR\Delta T$	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}nR$	nR	$\frac{7}{5}$
GPI	$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}\Delta T$	$\Delta H = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\Delta T$	$\frac{nR}{\gamma - 1}$	$\frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$	nR	
GP	$dU = mc_V(T)dT$	$dH = mc_P(T)dT$	$\frac{nR}{\gamma - 1}$	$\frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$	nR	$\gamma(T)$
Phase condensée c = cste	$\Delta U \approx mc\Delta T$	$\Delta H \approx \Delta U$	mc	mc	0	1

Transitions de phase

41.



On parle souvent de changement d'état liquide-vapeur, en effet traditionnellement le terme **vapeur** est utilisé à la place de **gaz** pour les corps purs qu'on a l'habitude de voir, dans les conditions courantes de température et de pression, sous forme liquide ou solide (exemple l'eau, l'éther, mercure...). Mais on utilise le terme gaz pour le dioxygène, diazote... Ne pas confondre une vapeur (c'est un gaz) et un brouillard (ensemble de très petites gouttelettes de liquide). Le passage de l'état liquide à l'état gazeux s'appelle ainsi la **vaporisation**.
Pour le changement vapeur $\rightarrow$ liquide on utilise souvent le terme *condensation*.

42. Soient 1 et 2 les deux phases considérées d'un même corps pur. À la température T et sous la pression d'équilibre correspondante $P_{éq.}(T)$, les enthalpies massiques associées sont notées $h_1(T, P = P_{éq.}(T)) = h_1(T)$ et $h_2(T)$.

Par définition, lors de la transition de phase $1 \rightarrow 2$, la variation d'enthalpie massique ou enthalpie de changement d'état est :

$$\boxed{\Delta h = h_2(T) - h_1(T) = l_{1\rightarrow 2}(T)}$$

L'unité est le $J.kg^{-1}$, mais dans la pratique, le $kJ.kg^{-1}$ ou $J.g^{-1}$ conviennent mieux.

Rq : Lors d'une transition de phase à la température T et donc sous la pression $P = P_{ext.} = cste$, $\Delta H = Q_P$, et par unité de masse : $\boxed{\Delta h = q_P}$

Ceci explique pour $l_{1\rightarrow 2}(T)$ l'ancien nom de « chaleur latente », pour l'enthalpie de changement d'état, qui correspond au transfert thermique par unité de masse nécessaire pour faire passer à température et pression constantes le corps pur de la phase 1 à la phase 2.

Applications directes du cours

Propriétés des gaz

43. L'équation du gaz parfait est : $\boxed{PV = nRT}$

P est la pression (en Pa) ; V est le volume du gaz (en m^3) ; T est la température absolue (en K, soit $T = \theta + 273$ K où θ est la température exprimée en °C) ; n est la quantité de matière, en moles, du gaz ; $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.mol^{-1} est la constante des gaz parfaits.

AN : $\underline{n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \times 20.10^{-3}}{8{,}31 \times 293} = 0{,}82 \text{ mol}}$, en effet le volume est de l'ordre de grandeur du volume molaire dans des conditions proches des conditions normales qui sont $T_0 = 273$ K et $P_0 = 1$ atm $= 1{,}013\,10^5$ Pa. Le volume molaire normal est donc $V_m = \frac{RT_0}{P_0} = 22{,}4$ L.mol^{-1}, valeur à retenir.

44. De $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T$, on déduit :

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$$

A.N. : $u_{O_2} \approx 480$ m.s^{-1} et $u_{He} \approx 1350$ m.s^{-1}. L'ordre de grandeur est donc le km.s^{-1} à comparer par exemple avec la vitesse d'un satellite en orbite basse (8 km.s^{-1}) ou avec la vitesse de libération terrestre (11 km.s^{-1}).

45. On utilise un modèle gaz parfait monoatomique :

$$\boxed{U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}PV} \text{ et } \boxed{m = nM = \frac{PV}{RT}M}$$

AN : $\underline{U = 4{,}5.10^{-3} \text{ J}}$ et $\underline{m = 4{,}8.10^{-6} \text{ g}}$. L'énergie est importante pour une masse très faible.

La différentielle logarithmique des deux expressions de U donne :

$$\frac{dU}{U} = \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \Rightarrow \text{ avec } \frac{dV}{V} = 0, \ \frac{dU}{U} = \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P}$$

AN : $\underline{\frac{dU}{U} = \frac{dT}{T} = 0{,}05}$; $\underline{dU = 2{,}2.10^{-4} \text{ J}}$; $\underline{dT = 15 \text{ K}}$. Les variations relatives sont plus significatives.

46. Il n'y a pas de différence, il s'agit de la même unité puisque seules interviennent les variations de température, identiques dans les deux échelles de température.

■ Applications du premier principe

47. Pour une isobare mécaniquement réversible :

$W = -\int P dV = -P\int_1^2 dV = P(V_1 - V_2)$ et le premier principe sous la forme $\Delta H = Q_P$ fournit le transfert thermique.

Pour une isochore, $V = cste$, le travail des forces de pression est nul et le premier principe sous la forme $\Delta U = Q_V$ fournit le transfert thermique.

a) * Sur l'isobare AC_1 : $W = -P_0V_0$ et $Q = \Delta H = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}\Delta T = \frac{\gamma}{\gamma - 1}P_0V_0$

puis sur l'isochore C_1B : $W = 0$ et $Q = \Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}\Delta T = \frac{2}{\gamma - 1}P_0V_0$

donc au total : $W_1 = -P_0V_0$ et $Q_1 = \frac{(\gamma + 2)}{\gamma - 1}P_0V_0$

* Sur l'isochore AC_2 : $W = 0$ et $Q = \frac{1}{\gamma - 1}P_0V_0$

puis sur l'isobare C_2B : $W = -2P_0V_0$ et $Q = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}P_0V_0$

donc au total : $W_2 = -2P_0V_0$ et $Q_2 = \frac{(2\gamma + 1)}{\gamma - 1}P_0V_0$

Il apparaît clairement que $W_1 \neq W_2$ et que $Q_1 \neq Q_2$: travail et transfert thermique dépendent du chemin suivi.

En revanche $\Delta U_{(1)} = W_1 + Q_1 = \frac{3}{\gamma - 1}P_0V_0$ et $\Delta U_{(2)} = W_2 + Q_2 = \frac{3}{\gamma - 1}P_0V_0$, la variation d'énergie interne ne dépend pas du chemin suivi, on l'écrit simplement ΔU.

Sans passer par aucun chemin, mais plus directement par la seule donnée de l'état initial et de l'état final : $\Delta U = U_B - U_A = \frac{nR}{\gamma - 1}\Delta T = \frac{4P_0V_0 - P_0V_0}{\gamma - 1} = \frac{3}{\gamma - 1}P_0V_0$.

b) Le travail total reçu sur le cycle AC_2BC_1A est d'après la question précédente : $W_2 - W_1$, car sur BC_1A mécaniquement réversible un calcul semblable conduit à un travail opposé. Donc $W_{cycle} = -2P_0V_0 + P_0V_0 = -P_0V_0$, que l'on peut calculer avec l'aire du cycle $P_0V_0 = |W_{cycle}|$ et le sens de parcours indique un cycle moteur, soit $W_{cycle} < 0$.

$$\text{De plus } (\Delta U)_{cycle} = 0 \implies Q_{cycle} = -W_{cycle}$$

48. On remarque d'abord que l'équilibre final impose de part et d'autre de la paroi diathermane une même température finale pour les deux gaz : $T_1 = T_2 = T_f$; l'équilibre du piston dans l'état final impose une même pression pour les deux gaz : $P_1 = P_2 = P_f$. L'équation d'état des GP entraîne, puisque le nombre de moles est le même, que les deux gaz occupent le même volume final : $V_1 = V_2 = V_f$.

Le plus simple est d'appliquer le premier principe à l'ensemble des deux gaz qui constitue un système isolé : $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$, avec pour des GP :

$$\Delta U_1 = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_{01}) \text{ et } \Delta U_2 = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_{02})$$

Soit $\boxed{T_f = \dfrac{T_{01} + T_{02}}{2}}$

Les équations sont :

$$\begin{cases} T_f = \dfrac{T_{01} + T_{02}}{2} \\ V_{01} + V_{02} = 2V_f \\ P_f V_f = nRT_f \\ P_0 V_{01} = nRT_{01} \\ P_0 V_{02} = nRT_{02} \end{cases}$$

soit 5 équations et 5 inconnues : $P_f, V_f, T_f, V_{01}, V_{02}$

Il vient $P_f = \dfrac{nRT_f}{V_f} = \dfrac{nR(T_{01} + T_{02})}{2(V_{01} + V_{02})/2} = P_0 \dfrac{(V_{01} + V_{02})}{V_{01} + V_{02}} = P_0$ et

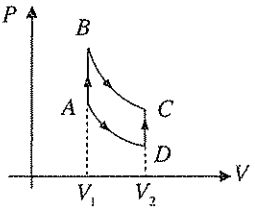
$$V_f = \frac{nR(T_{01} + T_{02})}{2P_0}$$

La transformation est irréversible à cause du déséquilibre thermique.

49. a) Sur AB isochore : $W_{AB} = 0$ et $U_B - U_A = \dfrac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = Q_{AB}$

Sur BC isotherme et GP : $U_C - U_B = 0$ et

$$W_{BC} = \int_{BC} -PdV = -RT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = -Q_{BC}$$



Bilan numérique :

$$W_{ABC} = RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = -5,0.10^3 \text{ J}$$

$$Q_{ABC} = -RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} + \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = +6,5.10^3 \text{ J}$$

b) Sur AD : $U_D - U_A = 0$ (isotherme et GP) et $W_{AD} = RT_1 \ln \dfrac{V_1}{V_2} = -Q_{AD}$

Sur DC : $W_{DC} = 0$ et $U_C - U_D = \dfrac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = Q_{DC}$

Bilan numérique : $W_{ADC} = RT_1 \ln \dfrac{V_1}{V_2} = -4,0.10^3 \text{ J}$

$$Q_{ADC} = -RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} + \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = +5,5.10^3 \text{ J}$$

On constate que W et Q dépendent du chemin suivi : $W_{ABC} \neq W_{ADC}$ et $Q_{ABC} \neq Q_{ADC}$

Leur somme n'en dépend pas, numériquement on a :

$$W_{ABC} + Q_{ABC} = W_{ADC} + Q_{ADC} = 1,5.10^3 \text{ J}$$

Cette somme représente en effet, littéralement : $U_C - U_A = \dfrac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$, variation d'énergie interne indépendante du chemin suivi de A à C.

50. a) Pour l'ensemble des deux gaz, la transformation est adiabatique, isochore et irréversible.

b) Le premier principe appliqué à l'ensemble des deux gaz donne, avec $W = 0$ (isochore), et $Q = 0$ (adiabatique) : $\Delta U = 0$.

U est extensive : $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ avec ΔU_1 variation d'énergie interne du gaz A et ΔU_2 variation d'énergie interne du gaz B.

$$\Delta U = \frac{n_1 R}{\gamma_1 - 1}(T_0 - T_1) + \frac{n_2 R}{\gamma_2 - 1}(T_0 - T_2) = 0$$

En remplaçant n_1 et n_2 grâce à l'équation d'état des GP :

$$\boxed{T_0\left(\frac{P_1V_1}{T_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{P_2V_2}{T_2(\gamma_2 - 1)}\right) = \frac{P_1V_1}{(\gamma_1 - 1)} + \frac{P_2V_2}{(\gamma_2 - 1)}}$$

$$\boxed{V_0 = V_1 + V_2}$$

$$P_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = \frac{(n_1 + n_2)RT_0}{V_0} \Rightarrow \boxed{P_0 = \frac{T_0}{V_0}\left(\frac{P_1V_1}{T_1} + \frac{P_2V_2}{T_2}\right)}$$

AN : $T_0 = 306\,\text{K}$; $V_0 = 3{,}0\,\text{L}$; $P_0 = 2{,}3\,\text{bar}$. Les applications numériques servent ici à comparer facilement les valeurs initiales et finales.

c) Le seul qualificatif possible pour la transformation d'un seul gaz est : irréversible (déséquilibre thermique et diffusion).

Avec le système A seul : $\Delta U_1 = W_1 + Q_1$; pour B seul : $\Delta U_2 = W_2 + Q_2$ et pour l'ensemble : $\Delta U = W + Q$

On a $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ soit $W + Q = W_1 + Q_1 + W_2 + Q_2$, mais attention, *a priori* : $W \neq W_1 + W_2$ et $Q \neq Q_1 + Q_2$.

51. Transformations isochore et isobare

a) Isochore signifie que la transformation se fait à volume constant. Le piston est donc fixé, et l'opérateur ne fournit aucun travail :

$$W = -\int P_{ext}\,dV = 0$$

Pour qu'une transformation s'opère néanmoins, il faut envisager un transfert thermique à travers les parois ; l'énoncé propose un thermostat extérieur unique (on le choisit de température T_f) avec lequel le récipient est en contact, à condition que les parois du récipient soient diathermanes, c'est-à-dire qu'elles laissent bien passer « la chaleur ».

La transformation envisagée est donc un échauffement isochore par contact avec une source de température plus élevée que la température initiale du gaz (on plonge le récipient dans une grande quantité d'eau chaude, piston bloqué !)

Le 1er principe $\Delta U = W + Q_V$ avec $W = 0$ et $\Delta U = nC_{Vm}\Delta T$, car le gaz parfait est idéal, conduit au transfert thermique :

$$Q_V = nC_{Vm}(T_f - T_i) > 0$$

b) Isobare signifie que la transformation se fait à pression constante ; comme elle est mécaniquement réversible, on a à tout moment $P = P_{ext}$. Pour réaliser une telle transformation, on peut par exemple libérer le piston en contact avec l'atmosphère extérieure de pression constante et faire en sorte que la transformation soit quasi statique. Le mouvement lent du piston, à pression constante, est la conséquence d'une variation de température ; si la température diminue, il en est de même du volume ($PV = nRT$). La cause de la transformation est donc la mise en contact du récipient (à parois diathermanes) avec un thermostat de température plus petite que celle initiale du gaz.
La transformation envisagée est donc un refroidissement isobare par contact avec une source « plus froide » (on plonge le récipient, sauf le dessus, dans de l'eau froide, piston libéré !). On évitera de parler de compression isobare (même si le sens de compression n'est plus son étymologie, mais signifie diminution de volume, le contraire de détente)
La température finale (celle du thermostat) est donnée par :

$$\frac{T}{V} = cste \implies T_f = T_i \frac{V_f}{V_i} < T_i$$

Le travail reçu par le gaz est :

$$W = -\int_{i\to f} PdV = -P\int_i^f dV \quad \text{car } P = cste,$$

$$W = -P(V_f - V_i) = P_iV_i - P_fV_f = nR(T_i - T_f) > 0$$

Le transfert thermique s'obtient par la fonction enthalpie dont on sait que :

$\Delta H = Q_P$ avec $\Delta H = nC_{Pm}\Delta T$ pour un gaz parfait idéal, d'où :

$$Q_P = nC_{Pm}(T_f - T_i) = -nC_{Pm}\left(1 - V_f/V_i\right)T_i < 0$$

Rq : L'écriture du 1er principe $\Delta U = W + Q = nC_{Vm}\Delta T$ conduit au même résultat, mais est moins efficace ici.

52. On ne peut rien dire du tout, car le transfert thermique (comme le travail) n'est pas déterminé par la seule donnée de l'état initial et de l'état final (ce n'est pas une fonction d'état comme U ou H). Le calcul de Q suppose de connaître la nature de la transformation entre les deux états (on dit le « chemin suivi »), ce que l'énoncé ne donne pas ! En effet, il serait faux de déduire de $V_1 = V_2$ que la transformation est isochore...

53. Calorimétrie

a) Expérimentalement on opère presque toujours à pression constante (la pression atmosphérique autour et à l'intérieur du calorimètre). En l'absence supposée de pertes (la mesure se fait rapidement), le transfert thermique entre l'intérieur et l'extérieur du calorimètre est nul $Q_P = 0$. Et puisque $Q_P = \Delta H$, $\Delta H = 0$: l'enthalpie du système est conservée.

b) Le système est constitué du calorimètre de capacité thermique C, de la masse m_0 d'eau à T_0 et de la masse m_1 d'eau à T_1 de capacité thermique massique c.

En l'absence de pertes (évolution adiabatique) $\Delta H_{syst} = Q_P = 0$

$$\Delta H_{syst} = C(T_f - T_0) + m_0 c(T_f - T_0) + m_1 c(T_f - T_1) = 0$$

$$\text{d'où } C = \left(m_1 \frac{t_1 - t_f}{t_f - t_0} - m_0 \right) c$$

L'appareillage se comporte comme l'équivalent d'une masse d'eau donnée par $C = \mu c$ où c est la capacité thermique de l'eau soit $\underline{\mu \approx 22 \text{ g}}$ appelée valeur en eau du calorimètre, cette valeur est souvent faible à cause de la capacité thermique élevée de l'eau liquide.

c) Le système est constitué du calorimètre de capacité thermique $C = \mu c$, de la masse $m_0 + m_1 = m$ d'eau à T_f de capacité thermique massique c et de la masse m_2 d'aluminium à T_2 de capacité thermique massique c_{Al}.

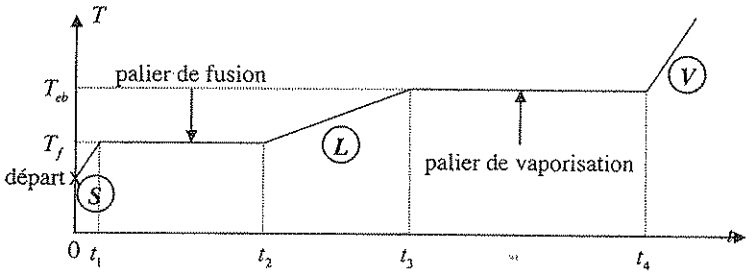
Avec la même méthode que précédemment :

$$\Delta H_{syst} = \mu c(T'_f - T_f) + mc(T'_f - T_f) + m_2 c_{Al}(T'_f - T_2) = 0$$

$$\text{soit } \underline{c_{Al}} = c \frac{\mu + m}{m_2} \frac{t'_f - t_f}{t_2 - t'_f} = \underline{914 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}}, \text{ soit le quart de } c.$$

Transition de phase

54.



Dans une première phase, entre 0 et t_1, le solide S est chauffé et sa température augmente jusqu'à amorcer la fusion. Pendant toute la fusion du solide, la température reste constante (palier de fusion) jusqu'à disparition à t_2 du dernier cristal de glace. L'eau liquide L est alors échauffée jusqu'à sa température de vaporisation, à l'équilibre, atteinte à t_3 où commence le palier de vaporisation. La vaporisation n'a pas pu se produire auparavant car l'eau liquide, entièrement enfermée dans l'enceinte sans aucun espace libre, était en équilibre. La pression exercée étant de 1 atm, la température de vaporisation, à l'équilibre, est la température d'ébullition (de l'eau à l'air libre sous 1 atm) mais ici bien sûr aucune

ébullition ne se produit. À partir de t_4, il ne reste que de la vapeur qui est surchauffée.
En dehors des paliers, le système est monophasé, on applique entre t et $t+dt$ le premier principe à pression constante sous la forme : $dH = \delta Q_P$ soit $m c_P \, dT = P_{th} \, dt$ d'où l'expression des pentes :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{P_{th}}{m c_P}}$$

Ainsi, dans le cas de l'eau la pente correspondant au chauffage du liquide est-elle plus petite, car c_P est plus grand pour l'eau liquide que pour la glace (voir les ordres de grandeur en début du chapitre).
Pendant la durée de la phase de fusion soit $t_2 - t_1$, l'énergie fournie au système sert au changement d'état. Le premier principe à pression constante appliqué au corps pur diphasé s'écrit sur cet intervalle : $\Delta H = Q_P$ soit $m l_f = P_{th}(t_2 - t_1)$

On en déduit : $\boxed{l_f = \frac{P_{th}(t_2 - t_1)}{m}}$

et de même pour la vaporisation $\boxed{l_v = \frac{P_{th}(t_4 - t_3)}{m}}$

On remarque ainsi que, dans le cas de l'eau, le palier de vaporisation est plus long que le palier de fusion car $l_v > l_f$.

55. Pour le changement d'état réversible, le système est à l'équilibre, $P = P_0 = \text{cste}$ et $T = \text{cste}\,(273\text{K})$. Le 1er principe $\Delta U = Q + W$ appliqué à la fusion de 1 g de glace donne avec :

* $Q = \Delta H = L_f$ par définition de l'enthalpie de fusion (à pression constante) ;
* $W = -P_0(V_{eau} - V_{glace}) > 0$; le système reçoit un travail de la part du milieu extérieur car son volume diminue (l'eau occupe un volume moindre que la glace) ;

Numériquement : $Q = L_f = 334 \text{ J.g}^{-1}$ et $W = -10^5.\left(1 - \frac{1}{0{,}92}\right)10^{-6} = 8{,}7.10^{-3} \text{ J.g}^{-1}$

On constate que $W \ll Q$, si bien que $\Delta U \approx \Delta H = L_f$ (typique des phases condensées).

56. On fait l'hypothèse que le travail de la force de frottement de l'air sur le grêlon est entièrement converti en transfert thermique reçu par le grêlon. Dès que la vitesse du grêlon est constante, la force de frottement est égale en norme au poids (leur somme vectorielle est nulle), et donc le travail de la force de frottement s'identifie à la variation d'énergie potentielle de pesanteur :

$$mgh = ml_f \;\Rightarrow\; \underline{h} = \frac{l_f}{g} = \frac{334.10^3}{9{,}8} \approx \underline{34 \text{ km}}$$

Cette hauteur indépendante de la taille du grêlon et effectivement beaucoup plus grande que celle nécessaire pour atteindre la vitesse limite. Elle est aussi largement supérieure à l'altitude des nuages, ce qui donne au grêlon toutes les chances d'atteindre le sol, non fondu…

57. La fusion du glaçon à 0 °C en eau à 0 °C « absorbe une quantité importante de chaleur » (elle est endothermique car du point de vue microscopique, il faut fournir de l'énergie pour rompre les liaisons intermoléculaires) et provoque à elle seule une baisse significative de la température de la boisson ; le glaçon à 0 °C est donc bien plus efficace que la même quantité d'eau à 0 °C.

Un glaçon cubique de 3 cm de côté a une masse $m = 0{,}92 \times 27 \approx 25$ g. Une boisson de 20 cL de volume a une masse $M = 200$ g ; elle est initialement à une température $t_i = 25$ °C.

Supposons qu'il n'y a pas d'échange avec le milieu ambiant (on traduit $\Delta H = 0$ comme habituellement en calorimétrie) et rappelons que l'enthalpie massique de fusion de la glace est $l_f = 334$ J.g^{-1} et la capacité thermique massique de l'eau $c = 4{,}18$ J.g^{-1}.°C^{-1} :

– avec un glaçon à $t_0 = 0$ °C : $ml_f + mc(t_f - t_0) = Mc(t_i - t_f) \Rightarrow \underline{t_f \approx 13 \text{ °C}}$

– avec la même masse d'eau à $t_0 = 0$ °C :

$$mc(t'_f - t_0) = Mc(t_i - t'_f) \Rightarrow \underline{t'_f \approx 22 \text{ °C}}$$

ce qui prouve l'efficacité liée à la fusion.

58. Calorimétrie

a) Il est tentant d'imaginer qu'à l'équilibre, il ne reste plus ni glace, ni vapeur d'eau, mais uniquement de l'eau liquide, et donc que la température finale t_f est comprise (strictement) entre 0 °C et 100 °C (poser le problème à votre entourage et observer les réponses…).

Cela signifierait, en l'absence de pertes, que la variation d'enthalpie correspondant à la liquéfaction de toute la vapeur et le refroidissement de la masse m_v d'eau correspondante de 100 °C jusqu'à t_f aurait été compensée par celle de la fonte de toute la glace et l'élévation de température de la masse m_g d'eau correspondante de 0 °C à t_f. Soit en écrivant $\Delta H = 0$ pour l'ensemble calorifugé, à pression constante, et en négligeant la valeur en eau du calorimètre :

$$m_g l_f + m_g c(t_f - t_g) - m_v l_v + m_v c(t_f - t_v) = 0 \Rightarrow \underline{t_f = 125 \text{ °C}} \text{ !!}$$

Cette hypothèse est donc fausse, et le résultat $t_f > 100$ °C prouve que l'effet thermique lié à la liquéfaction est prépondérant sur l'effet thermique lié à la fusion (car $l_v = 2260 \text{ J/g} \gg l_f = 334 \text{ J/g}$), alors même que la masse de glace est plus importante que la masse de vapeur…!

– la liquéfaction de toute la vapeur correspond à une variation d'enthalpie $-m_v l_v = -22{,}6$ kJ

– la variation d'enthalpie pour la fusion de toute la glace et l'élévation à 100 °C de l'eau produite est seulement

$$m_g l_f + m_g c(t_v - t_g) = 8{,}4 + 10{,}5 = 18{,}9 \text{ kJ}$$

L'état final est donc bien un équilibre d'eau liquide et de vapeur saturante à 100 °C

L'inconnue est alors x, la masse de vapeur qui se liquéfie ; on a, toujours sans pertes :

$$m_g l_f + m_g c(t_v - t_g) - x l_v = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8{,}3 \text{ g}$$

d'où la composition et la température à l'équilibre :

33,3 g d'eau liquide et 1,7 g de vapeur à 100 °C

Il faut retenir de cet exercice que l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau est une des plus élevées parmi les liquides. Bien sûr, le résultat peut être autre avec des masses initiales différentes.

b) Procéder comme à la question a) en calculant les variations d'enthalpie maximales :

– pour le refroidissement de l'eau jusqu'à 0 °C : $m_e c_e (T_0 - T_e) = -1{,}9.10^3$ J

– pour l'échauffement de la glace jusqu'à 0 °C : $m_g c_g (T_0 - T_g) = 2{,}9.10^3$ J

Il y a donc possibilité de transformer de l'eau en glace ; sa masse x est donnée par

$$m_e c_e (T_0 - T_e) - x l_f + m_g c_g (T_0 - T_g) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3{,}0 \text{ g}$$

Le résultat à l'équilibre est un mélange de 63 g de glace (dite fondante) et de 27 g d'eau liquide à température de 0 °C (il y a donc davantage de glace dans l'état final que dans l'état initial !).

59. * Analyse dimensionnelle :

$P \equiv \dfrac{force}{surface}$ s'exprime en $\dfrac{\text{kg.m.s}^{-2}}{\text{m}^2} = \text{kg.m}^{-1}\text{.s}^{-2}$

$l_{12} \equiv \dfrac{énergie}{masse}$ s'exprime en $\dfrac{\text{kg.m}^2\text{.s}^{-2}}{\text{kg}} = \text{m}^2\text{.s}^{-2}$

$\Delta v \equiv \dfrac{volume}{masse}$ s'exprime en $\text{m}^3\text{.kg}^{-1}$

L'homogénéité de la formule proposée est possible pour :

$$\text{kg.m}^{-1}\text{.s}^{-2}\text{.K}^{-1} \equiv \text{K}^{\alpha}\text{.(m}^2\text{.s}^{-2})^{\beta}\text{.(m}^3\text{.kg}^{-1})^{\gamma}$$

ce qui, en identifiant les puissances des quatre unités séparément conduit à $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\gamma = -1$.

La formule, dite « relation de Clapeyron » est alors : $\boxed{\dfrac{dP_{éq}}{dT} = \dfrac{l_{12}}{T\Delta v}}$

(alors Pv, comme l, est une énergie massique)

* Les enthalpies massiques de sublimation, fusion et vaporisation sont positives : il faut chauffer un glaçon pour le faire fondre et il faut chauffer l'eau pour la

vaporiser (on peut dire aussi que le système reçoit de l'énergie pour aller vers un état moins ordonné). Le volume massique du gaz est très supérieur au volume massique des phases condensées, et dans ces deux cas $\Delta v > 0$. Les pentes des courbes de vaporisation $L \rightarrow G$ et de sublimation $S \rightarrow G$ sont donc positives.

La pente de la courbe de fusion $S \rightarrow L$ est très grande car l'écart des volumes massiques des phases condensées solide et liquide est faible. Son signe dépend du signe de $\Delta v = v_L - v_S$.

Si $\Delta v = v_L - v_S > 0$ (le solide est plus dense que le liquide, cas le plus fréquent), la pente de la courbe de fusion est positive.

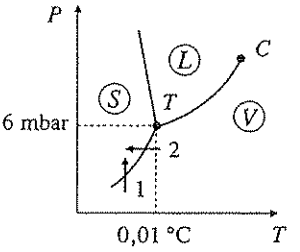
Si $\Delta v = v_L - v_S < 0$ (le cas de l'eau), la pente de la courbe de fusion est négative.

Le volume massique de la glace est supérieur au volume massique de l'eau liquide, c'est pourquoi l'eau solide (les glaçons par exemple) flotte sur l'eau liquide (rappelons les masses volumiques : $\rho_{glace} = 0{,}92 \text{ g/cm}^3$ et $\rho_{eau} = 1{,}00 \text{ g/cm}^3$).

60. La réponse est oui dans les deux cas comme le montre le diagramme d'équilibre $P(T)$ de l'eau ci-contre.

Dans le cas 1, il faut manipuler à une température inférieure à celle du point triple, et dans le cas 2, à une pression inférieure à celle du point triple.

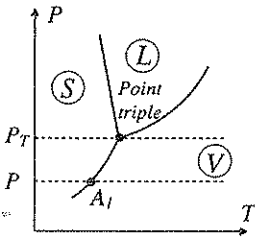
En réalité il n'est pas courant de transformer de la vapeur d'eau en glace, car ces conditions ne sont pas usuelles.



61. On considère l'atmosphère de Mars composée de CO_2 pur.

Le diagramme indique les coordonnées du point triple : $T_T = -56$ °C $\quad P_T = 5{,}5$ bar.

La pression ambiante sur Mars est inférieure à la pression du point triple du CO_2 ($P < P_T$). Le point représentatif de l'état du CO_2 sur Mars ne peut être que dans les domaines solide ou vapeur (voir schéma). Il n'y a donc pas de possibilité d'avoir de CO_2 liquide (tout comme sur la Terre d'ailleurs) et ce, quelle que soit la température.



Pour que la glace carbonique puisse exister en équilibre avec l'atmosphère à la pression P, le point représentatif de l'état du CO_2 doit se trouver sur la courbe d'équilibre solide-vapeur, donc au point A_1 du diagramme correspondant à P :

$$P = 5{,}4 \text{ hPa} \quad \text{et} \quad T_1 = 143 \text{ K} = -130 \text{ °C}.$$

Il faut donc une température $T_1 = -130$ °C et ceci n'est pas possible n'importe où ni n'importe quand. De telles températures ne sont atteintes qu'en hiver près du pôle où la glace carbonique se condense la nuit et se sublime le jour. À noter que dans la

pratique, on n'est jamais exactement à l'équilibre thermodynamique, mais dans un état plus froid où la glace se forme, ou dans un état plus chaud où elle se sublime. Les calottes polaires sont imposantes et mettent du temps à fondre en été, comme sur Terre avec la glace d'eau.

Si la température descendait durablement plus bas que $T_{min} = -133\ °C$, l'atmosphère se condenserait en glace carbonique, et sa pression baisserait jusqu'à la nouvelle pression de vapeur saturante à cette température (on descendrait alors vers un point plus bas sur la courbe d'équilibre). Dans la pratique, les régions plus chaudes interdisent ces baisses de pression (la pression est sensiblement la même à la surface de la planète, de faibles écarts engendrant des vents violents). Le CO_2 condensé au pôle hivernal est donc remplacé par le CO_2 sublimé au pôle estival.

Rq : La pression en CO_2 joue un grand rôle dans l'effet de serre : si la pression augmente, les infrarouges rayonnés par la surface de la planète sont mieux piégés par l'atmosphère qui s'échauffe (tout corps rayonne de l'énergie électromagnétique, surtout dans le visible s'il est très chaud comme le Soleil, surtout dans l'infrarouge s'il est plus froid comme les planètes). La température augmentant, la glace carbonique polaire se sublime, ce qui fait monter la pression et augmente encore l'effet de serre...

Ce dangereux mécanisme d'emballement n'est pas que théorique (il peut d'ailleurs se produire dans les deux sens). Quoique de manière plus complexe, puisque mettant également le cycle de l'eau en jeu, il pourrait aussi se déclencher sur la Terre. D'où la nécessité impérieuse de contrôler nos émissions de gaz à effet de serre, et tout particulièrement le gaz carbonique !

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

62. La vitesse de libération à la surface de la Lune est (voir la question **9.** du chapitre **8**) :

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} \approx 2,4.10^3\ \text{m.s}^{-1}$$

alors que dans une atmosphère de dihydrogène ($M = 2\ \text{g.mol}^{-1}$) à 20 °C, la vitesse quadratique moyenne est : $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1,9.10^3\ \text{m.s}^{-1}$

Ces vitesses sont du même ordre de grandeur. Il ne faut pas oublier que grâce à une distribution des vitesses étendue, une proportion importante de molécules ont des vitesses bien supérieures à u, et donc à v_l. Ce sont ces molécules en lisière d'atmosphère (car celles des basses couches sont « retenues » par chocs) qui, en s'échappant de l'attraction lunaire, ont, au cours des âges, appauvrit la densité de l'atmosphère lunaire.

Bien que ce soit les molécules les plus énergétiques qui s'échappent, on peut considérer que la température est maintenue constante (en moyenne) par le rayonnement solaire. En l'absence de renouvellement par l'activité volcanique, comme sur Terre, la Lune n'a pas pu garder une atmosphère.

63. Lors du contact entre le pied nu et le sol de températures différentes, il se produit un transfert thermique du pied vers le sol (de température plus basse), qui peut cesser si localement la température du sol atteint celle du pied.
Dans le cas de la moquette, mauvais conducteur thermique, un équilibre thermique est rapidement atteint, alors que le carrelage, plutôt bon conducteur, va transmettre le transfert thermique fourni par le pied vers des zones éloignées de la surface de contact. Ainsi le transfert thermique important fourni par le pied donne une sensation de froid, alors que dans le cas de la moquette l'équilibre thermique local limite rapidement le transfert thermique.

64. Cette affirmation est souvent vraie, car on pense en particulier à une casserole d'eau dont on augmente la température en la chauffant à l'aide d'une source extérieure (électricité ou gaz).
Il est important de noter que bien d'autres cas peuvent se présenter :
- si l'on porte la casserole d'eau jusqu'à ébullition et que l'on continue de chauffer au-delà, le niveau d'eau, par vaporisation, va baisser dans la casserole alors que la température ne dépasse pas 100 °C sous une pression atmosphérique d'environ 1 atm. Le transfert thermique fourni dans ce cas ne sert qu'à vaporiser l'eau liquide.
- de même, un glaçon à 0 °C doit recevoir un transfert thermique pour se transformer en eau à 0 °C (il faut chauffer le glaçon pour le faire fondre), et ceci à température constante.
- à la question **23.** du chapitre **11**, on a l'exemple d'une transformation au cours de laquelle la température du système augmente, alors qu'il fournit un transfert thermique à l'extérieur ; c'est le travail de l'opérateur qui explique cette possibilité (à noter, dans ce cas, que pour une détente, plus le transfert thermique effectivement reçu est important, plus le système se refroidit !).
- Le dispositif utilisé dans la question **29.** est isolé, il ne reçoit aucun transfert thermique, sa température finale est supérieure à sa température initiale.
- La dissolution d'un gaz comme l'ammoniac dans de l'eau, réalisée dans une enceinte calorifugée, se traduit par une augmentation de la température, alors qu'il n'y a aucun transfert thermique.

Il s'agit donc d'être vigilant et d'éviter les conclusions hâtives par confusion des notions de température et de transfert thermique ! La distinction entre les verbes chauffer et échauffer est essentielle.

65. L'air est assimilé à un gaz parfait. La cage thoracique est déformable. L'air contenu dans les poumons du plongeur est caractérisé par une pression identique à celle existant dans l'eau. Par ailleurs, sa température, imposée par les poumons, est constante lors de la plongée. La transformation thermodynamique au cours de la plongée est donc modélisable par une compression isotherme ; le doublement de la pression entraîne alors une diminution de moitié du volume, soit un volume d'air dans les poumons à 10 m de 3,5 L .

66. a) Le système doit être capable de recevoir le travail mécanique fourni par l'arbre en rotation. On peut imaginer cet arbre prolongé par un dispositif d'ailettes et comme système de l'air : on prévoit essentiellement une augmentation d'énergie interne par augmentation de température. Si les ailettes tournent dans de l'eau : il peut y

avoir augmentation de température (donc d'énergie interne comme dans le cas précédent) mais aussi d'énergie cinétique macroscopique (mise en rotation d'ensemble de l'eau).
L'arbre peut être relié dans le système à un alternateur qui peut alimenter une batterie : augmentation d'énergie interne par le terme d'énergie potentielle d'interaction interatomique, « énergie chimique ». L'alternateur peut aussi être relié à l'extérieur par deux bornes électriques et fournir à son tour du travail électrique : le système convertit dans ce cas du travail mécanique en travail électrique, il y aura quelques pertes et une augmentation de sa température (donc de son énergie interne).

b) Le système fournit du travail mécanique, c'est un moteur, il y a plusieurs possibilités :
- Moteur à explosion : l'énergie provient de l'énergie d'interaction interatomique des molécules du carburant, donc de l'énergie interne.
- Moteur électrique : là aussi l'énergie provient de l'énergie d'interaction interatomique (modifiée par réactions chimiques dans la batterie) fournissant un travail électrique converti ensuite en travail mécanique par le moteur. Attention il n'existe pas de terme « énergie électrique » spécifique dans l'énergie interne !
- Moteur à fil de caoutchouc (jouet) : l'énergie provient de l'énergie potentielle élastique du fil de caoutchouc, terme faisant partie de l'énergie interne.
- Moteur d'un jouet de type voiture à friction : par friction préalable sur le sol on entraîne un volant qui ensuite permet à la voiture d'avancer : l'énergie est de l'énergie cinétique macroscopique.
- Montre (à aiguilles) : si elle est électrique, de l'énergie potentielle interatomique est transformée dans la pile en travail électrique puis en travail mécanique (rotation des aiguilles). Si elle est mécanique, il faut la « remonter », c'est-à-dire augmenter l'énergie potentielle élastique d'un ressort en spirale par exemple. Donc énergie interne dans les deux cas.
- Horloge à balancier : l'énergie provient de l'énergie potentielle extérieure de pesanteur, il faut régulièrement remonter des masses, dans le dispositif, qui en descendant lentement et en perdant de l'énergie potentielle de pesanteur font tourner les aiguilles de l'horloge.

67. Le travail électrique reçu par la résistance est entièrement converti par effet Joule en transfert thermique qui est reçu par l'eau (on néglige toute perte). Pour l'eau, à pression constante, on a $\Delta H = Q_P$, soit à puissance constante, $P = \dfrac{mc\Delta T}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{mc\Delta T}{P} = \frac{1\times 4{,}2.10^3\times(100-20)}{2.10^3} = 170 \text{ s} \quad \text{soit} \quad \underline{\Delta t \approx 3 \text{ min}}$$

Ceci en négligeant la vaporisation d'une partie de l'eau pendant l'échauffement, vaporisation que l'on essaie de limiter en maintenant, avec un couvercle, le maximum de vapeur d'eau au-dessus de l'eau liquide.

Ensuite $\Delta H = Q_P = mc_{eau}\Delta T_{eau} = mc_{fer}\Delta T_{fer} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_{fer} = \dfrac{c_{eau}}{c_{fer}}\Delta T_{eau} \approx 750 \text{ °C}$,

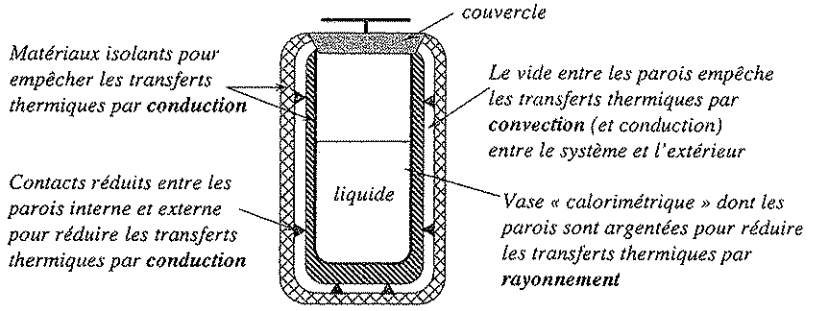
variation de température qui certes ne permet pas encore au fer de fondre (vers 1500 °C), mais dont la valeur élevée est liée à la faible capacité thermique du fer (et des métaux en général), environ 10 fois moindre que celle de l'eau.

68. La calorie est la quantité d'énergie nécessaire pour augmenter de 1 °C la température de 1 g (d'eau pris à 15°C) sous la pression normale. Ceci correspond à une valeur numérique très simple de la capacité thermique moyenne de l'eau : $c = 1\ \text{cal.g}^{-1}.°\text{C}^{-1}$ à comparer à $c = 4{,}18\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, d'où :

$$\underline{1\ \text{cal} = 4{,}18\ \text{J}}$$

69. Une partie de l'énergie cinétique de la scie est communiquée à de microparticules de fer, qui, échauffées, brûlent dans l'atmosphère $2Fe + \frac{3}{2}O_2 \rightarrow Fe_2O_3$. Ces particules sont très chaudes (> 1500 °C), mais extrêmement petites, et donc transportent si peu d'énergie que la main ne perçoit aucune sensation de chaleur...Autrement dit, par $\Delta H = Q_p = mc\Delta T$ (isobare), la capacité thermique est si faible (car à la fois m et c pour le métal sont faibles) que, même une grande variation de température ne conduit qu'à un transfert thermique modeste.
C'est également le cas d'une feuille d'aluminium alimentaire que l'on peut toucher à la sortie d'un four très chaud, car vu sa très faible épaisseur ($\approx 18\ \mu\text{m}$), sa capacité thermique est très faible.

70. Les contacts entre le récipient interne contenant le liquide chaud (ou froid !) et la coque externe en contact avec l'air se limitent à des taquets de petite dimension pour diminuer la surface de contact et réduire les pertes par conduction.
Entre les deux récipients règne un « vide » approché pour réduire les pertes par convection et par conduction (les gaz sont de mauvais conducteurs thermiques).
Les parois des récipients sont recouvertes d'une mince couche métallique réfléchissantes (comme les vases Dewar) pour limiter les pertes par rayonnement.



71. On peut fixer sur la face arrière d'un générateur par exemple des ailettes de refroidissement placées dans l'air libre, pour augmenter la surface en contact avec l'air et créer une convection naturelle.

On utilise également la convection forcée en plaçant un ventilateur sur la face arrière d'un oscilloscope numérique par exemple.
Le microprocesseur de l'unité centrale d'un ordinateur installé sur la carte mère du boîtier s'échauffe à l'utilisation. Des ailettes de refroidissement sont prévues (le disperseur métallique), elles-mêmes ventilées par un ventilateur collé sur le processeur avec une pâte thermique permettant une meilleure évacuation de la chaleur.

72. Dans le but de réduire les pertes thermiques, le double vitrage est constitué de deux vitres (chacune plus épaisse qu'une vitre ordinaire pour en réduire la conductivité) séparées par de l'air ou un gaz neutre (et mauvais conducteur) maintenu immobile par des joints pour réduire les transferts par convection d'une vitre à l'autre.

73. Tout d'abord, sur Terre, la flamme se tient verticalement, vers le haut. En effet les gaz chauds résultant de la combustion s'élèvent : c'est la convection naturelle due à la poussée d'Archimède. De l'air « frais » est donc attiré à la base de la flamme, apportant ainsi de l'oxygène ce qui entretient la combustion.
Dans le satellite, en impesanteur, pas de poussée d'Archimède, les gaz de combustion ne seraient pas évacués, ils resteraient près de la flamme, la privant d'oxygène.
Pour des raisons évidentes de sécurité, il n'est de toute façon pas question d'envisager une combustion dans un satellite !

74. On peut mettre en évidence les conductivités thermiques différentes des métaux. On place un peu de cire ou de paraffine, dans les parties évidées aux extrémités. La tige plus longue permet de maintenir la partie centrale au dessus de la flamme d'un bec Bunsen, La température au centre s'élève, ce qui va entraîner une conduction thermique le long des plaques métalliques. La cire fondra en premier pour le métal de plus grande conductivité thermique, ici le cuivre. L'argent est plus conducteur, mais n'est pas proposé ici pour d'autres raisons !

75. La dilatation de l'air emprisonné sous l'effet de l'augmentation de température (au début) est tout à fait secondaire ; le phénomène prend de l'importance à partir du moment où la température est telle que l'eau contenue dans les aliments est vaporisée en quantité importante ; la vapeur d'eau produite alors continûment fait gonfler le sachet...

76. Les fines gouttelettes d'eau se vaporise spontanément dans l'air sec puisque la pression de vapeur saturante de l'eau à la température des gouttes n'est pas atteinte ; Cette vaporisation est rapide et importante car la surface eau liquide-air est très grande du fait de la division de l'eau liquide en fines gouttelettes. L'énergie nécessaire à cette transformation est prélevée sur l'énergie interne de l'air dont la température corrélativement décroît.

77. Dans les trois cas, on recherche le même effet : empêcher la dispersion de la vapeur d'eau et maintenir localement une pression de vapeur d'eau suffisante pour limiter la vaporisation de l'eau. Pour la piscine, la vaporisation consomme une grande quantité d'énergie prélevée sur l'eau de la piscine ; en l'empêchant, on évite à la

température de l'eau de la piscine de trop baisser pendant la nuit. Pour l'échauffement de l'eau dans la casserole, la vaporisation, grosse consommatrice d'énergie, étant limitée, la plus grande partie du transfert thermique reçu sert à échauffer l'eau au lieu de la vaporiser ; de plus au début une partie de la vapeur d'eau se liquéfie sur le couvercle plus froid. Pour la culture sous serre on évite le dessèchement du sol en maintenant une pression partielle d'eau suffisante, de plus la température est plus élevée et régulée.

78. On remplace par de l'air frais et relativement sec, celui échauffé et saturé de vapeur d'eau juste au-dessus de la soupe trop chaude. On favorise ainsi la vaporisation de l'eau contenue dans la soupe et donc son refroidissement. Instinctivement on souffle en pinçant les lèvres pour bénéficier d'air plus froid par détente (effet Joule-Thomson).

79. Lors du chauffage direct, une partie de l'énergie fournie sert à vaporiser l'eau contenue dans le lait. Avec la vapeur d'eau à une température supérieure à 100°C, celle-ci cède de l'énergie au lait en se refroidissant, mais ce n'est pas l'effet le plus important car la capacité thermique des gaz est plus faible que celle des liquides. C'est surtout la liquéfaction (on dit aussi pour la vapeur d'eau la condensation) qui libère une grande quantité d'énergie en peu de temps. De plus la présence de vapeur d'eau limite la vaporisation de l'eau du lait pendant l'échauffement. Remarquer enfin que la faible quantité d'eau, provenant de la liquéfaction, ajoutée ainsi au lait, ne modifie que faiblement sa composition.

80. La solidification de l'eau est un phénomène exothermique (puisque pour faire fondre de la glace, il faut un apport énergétique) et qui libère dans l'air une quantité importante d'énergie (334 kJ par kg de glace formée), maintenant l'air à une température moins basse que sans le dispositif, et retardant le gel des pommes de terre...

81. Il ne s'agit évidemment pas du pourcentage de vapeur d'eau dans l'atmosphère, à 100 % d'humidité la respiration serait difficile ! Le degré hygrométrique est le rapport de la pression partielle de vapeur d'eau dans l'atmosphère sur la pression de vapeur saturante de l'eau à la même température. Un degré hygrométrique de 60% signifie : $P_{eau} = 0{,}6\,P_v(T)$, soit à 20°C $P_{eau} = 0{,}6 \times 2{,}3.10^{-2} = 1{,}4.10^{-2}$ atm.

82. Il s'agit simplement de gaz dissous dans l'eau (dioxygène et diazote), or la solubilité des gaz diminue quand la température augmente, il se produit un « dégazage » à l'endroit le plus chaud, le fond du récipient.

83. En hiver les salles de classes sont (sur)chauffées et l'atmosphère, au bout d'un moment, de part la présence humaine, contient une grande quantité de vapeur d'eau. Cette vapeur est néanmoins sèche car la pression de vapeur saturante n'est pas atteinte (ce n'est pas un sauna !). En revanche, sur les vitres ou dans leur voisinage immédiat où la température est plus basse, la pression de vapeur saturante (qui diminue lorsque la température diminue) est alors atteinte ; la vapeur d'eau se liquéfie (dans le langage courant, on parle de condensation) et se dépose sous forme

de buée sur les vitres (ou sur les verres de lunettes d'un retardataire au moment où il rentre dans la classe...).

84. En raison de la diminution de la pression atmosphérique avec l'altitude, l'air chargé de vapeur d'eau sèche qui s'élève subit une détente adiabatique (la thermalisation avec l'air extérieur, par ailleurs lui aussi plus froid lorsque l'altitude augmente, n'a pas le temps de se réaliser). Cette détente refroidit l'air humide, et donc abaisse la pression de vapeur saturante de l'eau ; lorsqu'elle atteint la pression partielle de vapeur d'eau de l'air humide, la vapeur devient saturante et les premières microgouttes apparaissent commençant ainsi à former le nuage...

85. L'ébullition se produit lorsque $P < P_V(T_{eau})$, à 20°C $P_V = 2{,}3.10^{-2}$ atm, valeur que l'on peut atteindre avec une pompe à vide. Quand l'ébullition a démarré une grande quantité d'eau se vaporise, ce qui produit un refroidissement rapide de l'eau liquide, qui peut ne pas être compensé par le réchauffement avec l'air ambiant. À une température de l'ordre de 273 K il y a solidification, et ensuite la glace se sublime.

86. La régulation de la température du corps humain est notamment assurée par la transpiration. Le changement d'état liquide → vapeur nécessite une énergie importante, prélevée sur le corps humain (au niveau de la peau où le phénomène a lieu), ce qui empêche la température du corps de trop s'élever. Si la pression partielle en vapeur d'eau dans l'atmosphère est élevée, la vaporisation de la transpiration est ralentie et la régulation thermique se fait plus difficilement.

87. L'éther est très volatil (sa pression de vapeur saturante est élevée à température ordinaire) et donc il se vaporise spontanément à l'air libre, cherchant à atteindre la pression de vapeur saturante, ce qui est impossible en atmosphère ouverte. L'énergie nécessaire à la vaporisation est prélevée sur l'éther liquide restant qui du coup prend du transfert thermique à la peau de l'expérimentateur provoquant la sensation de froid.

Pour la même raison, après un bain de mer, on ressent en sortant de l'eau une sensation de froid, même si la température de l'air est élevée, cette sensation est plus importante encore s'il y a un peu de vent, car la vaporisation est alors plus rapide.

88. Comme il a été expliqué dans les conseils à suivre la température d'ébullition apparaît comme la température maximale possible de l'eau liquide sous une pression totale de 1 atm. Pour avoir de l'eau liquide à une température plus élevée, pour laquelle la pression de vapeur saturante est supérieure à 1 atm car la pression de vapeur saturante est une fonction croissante de la température, il faut que la pression totale au-dessus du liquide puisse atteindre des valeurs supérieures à 1 atm. Dans une marmite sous pression, la pression peut atteindre 2 atm (pression imposée par la soupape tournante, couvercle fermé), l'eau liquide peut être en présence de sa vapeur à une température supérieure à 100°C. La température atteinte est de l'ordre de 120 °C. Une température plus élevée favorise une meilleure cinétique des réactions chimiques intervenant lors de la cuisson, ce qui en réduit notablement la durée (appelée temps de cuisson). Attention la cuisson dans une « cocotte-minute » n'est pas une cuisson à la vapeur.

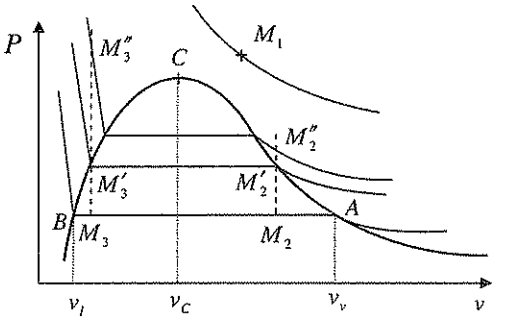
89. La condensation est le passage de l'état gazeux à l'état solide. On peut citer l'exemple des extincteurs à dioxyde de carbone CO_2 ; le gaz carbonique (sous pression dans la bouteille), par détente, se refroidit, et est libéré sous forme de neige carbonique (donc solide) car la pression atmosphérique est inférieure à la pression du point triple (≈ 5 bar). Ensuite par échauffement sous la pression atmosphérique, cette neige se sublime, car les températures usuelles sont supérieures à la température du point triple de CO_2 (≈ -57 °C).

90. Stockage des fluides

Pour que le fluide en vase clos soit présent sous deux phases distinctes, il faut que la température soit inférieure à sa température critique.

▶ Dans le cas de température critique très basse (O_2, N_2, He, ...) on peut stocker le fluide dans une bouteille fermée, sous pression élevée (jusqu'à 200 bar). Dans la bouteille le fluide est dans un état indifférencié (ni liquide ni gaz), point M_1 du diagramme ci-dessous, sa pression, à volume massique v = cste, augmente avec la température, elle doit être contrôlée avec un manomètre.

On peut également liquéfier le gaz en baissant suffisamment sa température. On le conserve alors en bouteille calorifugée et ouverte. Les pertes par vaporisation sont faibles mais limite la durée de stockage. On peut remarquer que la vaporisation nécessitant de l'énergie permet de maintenir la température du liquide assez basse.



▶ Dans le cas de température critique élevée (butane, propane, ...), le fluide est conservé en vase clos sous deux phases, la pression étant la pression de vapeur saturante à la température d'équilibre (indépendante de v). A priori on peut penser que la pression sera toujours limitée car égale à la pression de vapeur saturante, donc $P < P_c$, en fait il y a des précautions à prendre pour le remplissage initial de la bouteille. En effet si il reste peu de fluide dans la bouteille, la masse volumique est faible, soit v élevé et l'état d'équilibre correspond au point M_2 proche de A. Une augmentation accidentelle de T produit, à v = cste, un déplacement :

$M_2 \rightarrow M_2' \rightarrow M_2''$ donc un passage à la forme gazeuse et une augmentation de pression limitée.

En revanche, juste après le remplissage, la masse volumique est élevée, soit v petit et l'état d'équilibre correspond au point M_3 proche de B. Une augmentation accidentelle de T produit, à v = cste, un déplacement :
$M_3 \rightarrow M_3' \rightarrow M_3''$ donc un passage à la forme liquide seule et une augmentation très importante de la pression, compte-tenu de la forme quasi verticale des isothermes. Il faut donc au remplissage ne pas avoir un volume massique trop inférieur au volume massique critique v_C.

Exercices

91. Étude d'une pompe « à vide »

a) Lors de l'aller du piston, la soupape (a) est ouverte et la soupape (b) reste fermée : les n moles de gaz dans le compartiment B ne sont donc pas concernées. Lors du retour du piston, la soupape (a) est fermée et la soupape (b) est ouverte : les n moles de gaz dans le compartiment B de volume V et initialement à la pression p_0 subissent une détente isotherme jusqu'au volume final $V+V_0$ (celui de $A+B$) où leur pression p_1 est plus faible :

de $p_0V = nRT_0$ et $p_1(V+V_0) = nRT_0$, on déduit $\boxed{p_1 = \dfrac{V}{V+V_0}p_0}$ (1)

AN : $\underline{p_1 = 0{,}99.10^5 \text{ Pa}}$, la pression a très peu varié car $V_0 \ll V$

b) À l'aller (b) est fermé et donc le gaz dans B ne reçoit pas de travail. Au retour (b) est ouvert et les n moles du gaz subissent une détente isotherme du volume V au volume $V+V_0$, on note v leur volume. Le calcul du travail est classique :

$W = -\int_{\text{retour}} p\,dv = -\int_{\text{retour}} pv\dfrac{dv}{v}$, or la transformation des n moles est isotherme :

$$pv = p_0V \Rightarrow W = -p_0V\int_v^{V+V_0}\frac{dv}{v} = -p_0V\ln\left(1+\frac{V_0}{V}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = -p_0V\ln\left(1+\frac{V_0}{V}\right)}$$

On a bien $W < 0$, dans cette phase c'est le gaz qui fournit du travail au piston, on ne peut pas en déduire le travail du moteur sur le piston car on ne connaît pas la pression du coté gauche du piston.

Rq : Comme $\dfrac{V_0}{V} = \dfrac{1}{100} \ll 1$, on peut écrire avec $\ln\left(1+\dfrac{V_0}{V}\right) \approx \dfrac{V_0}{V}$ que $W \approx -p_0V_0$.

c) Pendant le deuxième retour du piston, la pression initiale de p_1 passe à la valeur p_2 ; la transformation des n' moles restantes dans B étant toujours une détente isotherme, on a directement :

$$p_1 V = p_2 (V + V_0) \quad \text{soit} \quad p_2 = \frac{V}{V+V_0} p_1 = \left(\frac{V}{V+V_0} \right)^2 p_0 \text{ d'après (1)}$$

Par récurrence, on en déduit que $\boxed{p_k = \left(\frac{V}{V+V_0} \right)^k p_0}$

En prenant le logarithme de $\frac{p_0}{p_k} = \left(\frac{V+V_0}{V} \right)^k$, il vient $\boxed{k = \frac{\ln(p_0/p_k)}{\ln(1+V_0/V)}}$

AN : $\underline{k = 463}$, ce qui semble assez facilement réalisable avec un moteur, pour une diminution importante de la pression.

d) Les détentes successives du gaz restant dans B se font sans doute rapidement (cf. moteur) ; or la transformation isotherme suppose un transfert thermique (lent) avec l'extérieur (sinon le gaz en se détendant se refroidirait) ; il est donc probable que les détentes soient plutôt adiabatiques. Surtout le modèle proposé semble permettre d'atteindre $p_k \to 0$ pour $k \to \infty$, car il néglige le volume résiduel, jamais nul dans une pompe réelle, en fin de course du piston. Si on note v ce volume résiduel, à l'aller le volume de A passe de V_0 à v, la soupape a ne pourra plus s'ouvrir pour $p_{\lim} V_0 = p_0 v$, soit $p_{\lim} = p_0 v / V_0$.

92. Bilan de transferts thermiques lors d'une transformation

Le travail reçu au cours du cycle moteur est $W < 0$ avec $|W|$ = aire triangle :

$$W = -\frac{k-1}{2} P_0 V_0$$

Sur l'isobare CA : $Q_{CA} = H_A - H_C = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_A - T_C) = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} P_0 V_0$

Sur l'isochore AB : $Q_{AB} = U_B - U_A = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A) = \frac{k-1}{\gamma - 1} P_0 V_0$

Pour un cycle $\Delta U = 0 \implies$

$$Q_{BC} = \Delta U - W - Q_{CA} - Q_{AB} = \left(\frac{k-1}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{k-1}{\gamma - 1} \right) P_0 V_0$$

$$\text{Et } Q_{BC} = \frac{k(\gamma - 3) + \gamma + 3}{2(\gamma - 1)} = 0 \quad \text{si} \quad \boxed{k = \frac{\gamma + 3}{3 - \gamma}}$$

$k > 1$ existe pour γ de l'ordre de 1,5.

La transformation n'est pas adiabatique, il y a des échanges de transferts thermiques qui pour une valeur particulière de k se compensent. Adiabatique signifie « pas d'échanges du tout et non échange nul » !

93. Compression isotherme d'une vapeur d'eau

a) Précisons d'abord la composition du système dans les états initial et final :

– état initial ; 1 g d'eau liquide n'occupe pas un volume $V_i = 3$ L, on peut faire l'hypothèse que la vapeur est sèche, ce qui doit conduire à $P_i < P_V(100\ °C) = 1$ atm.

En assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait de masse molaire $M = 18$ g.mol^{-1} :

$$P_i = \frac{m}{MV_i} RT_0 = 5{,}7.10^4 \text{ Pa} = 0{,}57 \text{ atm}$$

la condition est vérifiée, l'hypothèse de vapeur sèche est confirmée.

– état final ; si la vapeur était encore sèche, la compression isotherme, où le volume est réduit d'un facteur 3, augmenterait la pression du même rapport, soit $P_f = 1{,}71$ atm supérieure à la pression de vapeur saturante, ce qui est impossible : la vapeur est donc saturante, la fraction restante étant en équilibre avec le liquide formé. Ceci fixe $P_f = P_V(100\ °C) = 1$ atm et donne la masse de vapeur restante :

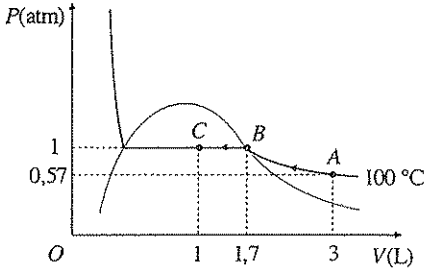
$$m_v = \frac{MV_f P_V}{RT_0} = 0{,}58 \text{ g}$$

Il s'est donc formé 0,42 g d'eau liquide.

– pour compléter la détermination, il faut calculer le volume $V_{lim.}$ du système lorsque apparaît la première goutte d'eau liquide :

$$V_{lim.} = \frac{mRT_0}{MP_V} = 1{,}7 \text{ L}$$

b) La figure ci-contre représente en diagramme de Clapeyron l'isotherme $t_0 = 100\ °C$. Les états initial et final de la compression isotherme sont représentés par les points A et C, et le point B sur la courbe de rosée est celui pour lequel il se forme la première goutte de liquide.



La transformation se décompose donc en :

– trajet AB : la compression isotherme à $t_0 = 100\ °C$ de $m = 1$ g de vapeur sèche de $V_i = 3$ L à $V_{lim.} = 1{,}7$ L,

– trajet BC : la liquéfaction de $m - m_v = 0{,}42$ g de vapeur à $t_0 = 100\ °C$ sous $P_V = 1$ atm.

Le long de AB, on assimile la vapeur sèche à un gaz parfait et donc pour $T = T_0 = cste$, $\Delta U = 0$ soit $Q_{AB} = -W_{AB}$

$$W_{AB} = -\int P dV = -P_i V_i \int_{V_i}^{V_{lim.}} \frac{dV}{V} = P_i V_i \ln \frac{V_i}{V_{lim.}} = 96 \text{ J} > 0 ,$$

le travail de compression de l'opérateur est reçu par le gaz.

$Q_{AB} = -96 \text{ J} < 0$ le système cède du transfert thermique au thermostat extérieur pour rester à température fixe (sinon elle croîtrait).

Le long de la courbe d'équilibre et de changement d'état BC, on néglige le volume du liquide formé en assimilant le volume total à celui de la vapeur saturante.

$$W_{BC} = -\int_{V_{lim.}}^{V_f} P_V dV = P_V (V_{lim.} - V_f) = 73 \text{ J} > 0$$

car l'opérateur continue de comprimer.

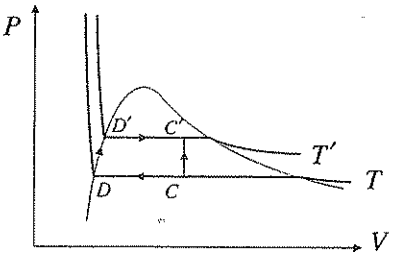
$Q_{BC} = -(m - m_v) l_V = -949 \text{ J} < 0$ car la liquéfaction est exothermique.

Au total : $\boxed{W = W_{AB} + W_{BC} = 0{,}17 \text{ kJ}}$ et $\boxed{Q = Q_{AB} + Q_{BC} = -1{,}04 \text{ kJ}}$

On constate une différence d'ordre de grandeur entre travail et transfert thermique.

94. Échauffement isochore d'un équilibre liquide-vapeur

a) Dessinons les isothermes $T = 373 \text{ K}$ et $T' = 383 \text{ K}$ (schéma ci-dessous). L'échauffement isochore du mélange liquide-vapeur correspond au segment vertical CC'. Le point C' se rapprochant de la courbe de rosée, on peut penser que la quantité de vapeur a augmenté. D'autre part il est possible en augmentant encore la température toujours de façon isochore de transformer toute l'eau liquide en vapeur, si C' est sur la courbe de rosée. Notons que la courbe d'ébullition possède une pente raide (il s'agit d'un liquide) alors que la courbe de rosée a une pente beaucoup plus douce (il s'agit d'un gaz).



La masse de vapeur dans la situation finale est :

$$m'_v = \frac{MVP'_V}{RT'} = 0{,}74 \text{ g} \text{ ; il reste}$$

0,26 g d'eau liquide

b) La transformation étant isochore, $Q_V = \Delta U$, et donc le transfert thermique reçu au cours de l'isochore réversible se calcule par ΔU, indépendant du chemin suivi ; considérons alors le trajet $CDD'C'$ (attention Q_V n'est pas la somme des transferts thermiques sur les trois branches...!).

– sur CD, on liquéfie $m_v = 0{,}58$ g de vapeur à la température constante $t = 100$ °C et sous pression constante $P_V = 1$ atm (on néglige le volume final du liquide) :

$$\Delta U_{CD} = W_{CD} + Q_{CD} = -P_V(0 - V) - m_v l_V = 100 - 1310 = -1{,}21.10^3 \text{ J}$$

– sur DD', on échauffe $m = 1$ g d'eau liquide saturant (peu dilatable et peu compressible) :

$$\Delta U_{DD'} = mc(T' - T) = 42 \text{ J}$$

– sur $D'C'$, on vaporise $m'_v = 0{,}74$ g d'eau liquide à la température constante $t' = 110$ °C et sous pression constante $P'_V = 1{,}3$ atm (on néglige le volume initial du liquide) :

$$\Delta U_{D'C'} = W_{D'C'} + Q_{D'C'} = -P'_{sat.}(V - 0) + m'_v L'_v = -130 + 1650 = 1520 \text{ J}$$

$$\text{Au total, } \underline{Q_V = 0{,}35 \text{ kJ}}$$

$Q_V > 0$, l'énergie interne a augmenté entre C et C'.

95. Mesure de l'enthalpie de vaporisation de l'eau.

a) Entre le début de l'expérience et le retour de la balance à l'équilibre, il s'est dégagé une masse de vapeur d'eau égale à la masse marquée initialement ajoutée m_0. Cela correspond pendant le temps de l'expérience à une vaporisation d'une masse m_0 d'eau liquide ; ce changement d'état correspond à une variation d'enthalpie égale, à pression constante, au transfert thermique reçu par l'eau. Cela est dû à l'apport de travail électrique converti en transfert thermique par effet Joule dans la résistance trempant dans l'eau.
Le bilan enthalpique pour l'eau seule, en l'absence de pertes, s'écrit simplement :

$$\Delta H = Q_p = UIt \Rightarrow UIt = m_0 l_V \Rightarrow \boxed{l_V = \frac{UIt}{m_0}}$$

AN : $\underline{l_{V1} = U_1 I_1 t_1 / m_0 = 2{,}5.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}}$ et $\underline{l_{V2} = U_2 I_2 t_2 / m_0 = 2{,}4.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}}$
Ces valeurs sont trop élevées.

b) En cas de pertes thermiques entre le calorimètre et l'extérieur, l'eau reçoit le transfert thermique fourni par la résistance moins celui dégagé à l'extérieur supposé de puissance P_f constante ; les bilans s'écrivent désormais :

$$\Delta H = m_0 l_V = U_1 I_1 t_1 - P_f t_1 \quad (1) \quad \text{et} \quad \Delta H = m_0 l_V = U_2 I_2 t_2 - P_f t_2 \quad (2)$$

Bien sûr P_f est inconnue, mais la double expérience permet de l'éliminer entre les deux relations, par exemple en formant $(2) \times t_1 - (1) \times t_2$, d'où la nouvelle expression de l_V tenant compte des pertes sans les faire intervenir explicitement :

$$\boxed{l_V = \frac{(U_2 I_2 - U_1 I_1) t_1 t_2}{m_0 (t_1 - t_2)}}$$

AN : $l_v = 2{,}3.10^3\ \text{kJ.kg}^{-1}$, la valeur donnée par les tables étant $2260\ \text{kJ.kg}^{-1}$. On peut alors calculer $P_f = 12\ \text{W}$, une puissance faible mais qui suffit à perturber les mesures de l_v.

96. Réalisation expérimentale d'une compression isotherme (*)

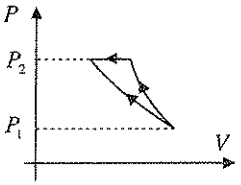
1. La compression isotherme réversible nécessite un travail :

$$W = \int_{iso} -PdV = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Pour une mole : $\boxed{W_m = RT_1 \ln \frac{P_2}{P_1}}$

AN : $W_m = 3{,}9\ \text{kJ.mol}^{-1}$, cette application numérique n'a pas d'intérêt direct, elle permet par la suite une comparaison rapide des divers travaux.

2. On note T et V la température et le volume de l'état intermédiaire,



sur l'adiabatique : $W_a = \dfrac{nR(T - T_1)}{\gamma - 1}$

sur l'isobare :

$$W_b = -P_2(V_2 - V) = -P_2\left(\frac{nRT_1}{P_2} - \frac{nRT}{P_2}\right) = nR(T - T_1)$$

$$W = W_a + W_b = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T - T_1)$$

La relation de Laplace (adiabatique réversible et GPI) donne : $T = T_1 \left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

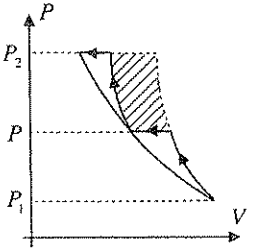
Pour une mole : $\boxed{W_1 = \dfrac{R\gamma}{\gamma - 1} T_1 \left(\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}$

AN : $W_1 = 4{,}9\ \text{kJ.mol}^{-1}$, le travail à fournir est plus important, ce second processus est irréversible (déséquilibre thermique lors de l'isobare).

3. a) et b)

Le travail reçu lors des deux étapes s'écrit : $W = W_1' + W_1''$, pour chaque étape le calcul précédent s'applique en adaptant la pression finale :

$$W = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} T_1 \left(\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_2}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2\right)$$



c) $\dfrac{dW}{dP} = \dfrac{R\gamma}{\gamma-1} T_1 \left(\dfrac{\gamma-1}{\gamma} \left(\dfrac{P}{P_1} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \dfrac{1}{P_1} - \dfrac{\gamma-1}{\gamma} \left(\dfrac{P_2}{P} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \dfrac{P_2}{P^2} \right)$

$\dfrac{dW}{dP} = \dfrac{RT_1}{P_1} \left(\dfrac{P}{P_1} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \left(\dfrac{P_1 P_2}{P^2} \right)^{-\frac{1}{\gamma}+1} \right) = 0 \Rightarrow P^2 = P_1 P_2$, soit $\boxed{P = \sqrt{P_1 P_2}}$

Pour $P < \sqrt{P_1 P_2}$: $\dfrac{dW}{dP} < 0$ car $\dfrac{\gamma-1}{\gamma} > 0$ et pour $P > \sqrt{P_1 P_2}$: $\dfrac{dW}{dP} > 0$

Il s'agit donc d'un minimum.

d) En remplaçant dans W on obtient : $\boxed{W_2 = \dfrac{2R\gamma}{\gamma-1} T_1 \left(\left(\dfrac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right)}$

e) AN : $W_2 = 4{,}4$ kJ.mol^{-1}, soit $W_2 < W_1$, la différence correspond à l'aire hachurée sur le graphe. Ce travail reste cependant supérieur à W_m, avec une interprétation graphique évidente.

4. a) Avec N étapes du type précédent : $W = \dfrac{R\gamma}{\gamma-1} T_1 \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\dfrac{p_i}{p_{i-1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - N \right)$

b) On cherche à annuler les dérivées partielles (le calcul est le même qu'au **3.**c)) :

$\dfrac{\partial W}{\partial p_i} = \dfrac{R\gamma}{\gamma-1} T_1 \dfrac{\gamma-1}{\gamma} \left(\left(\dfrac{p_i}{p_{i-1}} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \dfrac{1}{p_{i-1}} - \left(\dfrac{p_{i+1}}{p_i} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \dfrac{p_{i+1}}{p_i^2} \right) = 0 \Rightarrow p_i^2 = p_{i+1} p_{i-1}$

Soit $\dfrac{p_{i+1}}{p_i} = \dfrac{p_i}{p_{i-1}} \Rightarrow \dfrac{p_N}{p_{N-1}} = \cdots = \dfrac{p_1}{p_0} = k \Rightarrow k^N = \dfrac{p_N}{p_0}$

Finalement : $\dfrac{p_{i+1}}{p_i} = \left(\dfrac{p_N}{p_0} \right)^{\frac{1}{N}} = \left(\dfrac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{N}}$ que l'on remplace dans W :

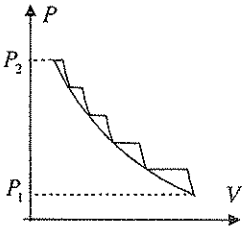
$$\boxed{W_N = \dfrac{NR\gamma}{\gamma-1} T_1 \left(\left(\dfrac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{N\gamma}} - 1 \right)}$$

c) $\lim\limits_{N\to\infty} N \left(\left(\dfrac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{N\gamma}} - 1 \right) = \lim\limits_{N\to\infty} N \left(\exp\left(\dfrac{\gamma-1}{N\gamma} \ln \dfrac{P_2}{P_1} \right) - 1 \right)$

Soit : $\lim\limits_{N\to\infty} N \left(1 + \dfrac{\gamma-1}{N\gamma} \ln \dfrac{P_2}{P_1} - 1 \right) = \dfrac{\gamma-1}{\gamma} \ln \dfrac{P_2}{P_1}$, il vient alors :

$$\lim_{N\to\infty} W_N = RT_1 \ln\frac{P_2}{P_1} = W_m$$

Ce qui montre que la transformation réelle, succession de petites compressions adiabatiques suivies d'un refroidissement isobare tend vers la transformation isotherme théorique.
Graphiquement l'écart correspondant à la surface entre l'isotherme et la compression en N étapes est donc du second ordre.



Chapitre 12

■ Évolution d'un système thermodynamique ■

Les ordres de grandeur utiles

Ils sont regroupés au début du chapitre précédent, page 471.

Le cours d'abord

■ Deuxième principe de la thermodynamique (ou principe d'évolution)

1. Pourquoi le premier principe est-il insuffisant ? Donner des exemples.

2. Énoncer le second principe de la thermodynamique et commenter les notions d'entropie échangée et d'entropie créée.

3. Il existe plusieurs énoncés du second principe, en citer quelques-uns.

4. Montrer la cohérence des énoncés historiques avec l'énoncé axiomatique de la question **2.**

5. Donner l'entropie des fluides modèles suivants : gaz parfait idéal, phase condensée incompressible. Comment s'exprime la variation d'entropie d'un thermostat ?

6. Comment procéder pour faire un bilan d'entropie ?

7. Comment est définie l'entropie massique de changement d'état ? Quelle relation a-t-elle avec l'enthalpie massique de changement d'état ?

8. Qu'appelle-t-on entropie statistique ? Par quelle formule est-elle donnée ? Montrer qu'elle possède certaines propriétés de l'entropie définie à la question **2.**.

9. Que dit le 3e principe de la thermodynamique ? Quelle est son utilité ?

■ Loi de Laplace

10. Un système subit une transformation adiabatique et mécaniquement réversible (donc quasi statique et sans frottement solide) ; montrer que cette transformation est *a*

priori réversible. Montrer qu'une transformation adiabatique réversible est isentropique. La réciproque pose-t-elle problème ?

11. Un gaz parfait idéal subit une transformation adiabatique et réversible. À partir de l'expression de ΔS vue à la question **5.**, établir la relation entre P, V et γ (constant pour un GPI). Établir les autres expressions de la loi de Laplace pour un gaz parfait idéal avec T et V, puis P et T.
Application : Calculer l'élévation de température d'air, initialement à $T_1 = 273$ K et comprimé adiabatiquement et réversiblement dans un rapport volumétrique 10.

Transformations d'un gaz

12. Compressions isotherme ou adiabatique d'un GPI
On fait passer n moles de gaz parfait de manière mécaniquement réversible d'un volume initial V_i (température T_i) à un volume final $V_f < V_i$.

a) La compression est isotherme. Décrire le système (paroi du récipient, extérieur...) et donner le transfert thermique Q_{iso} et le travail W_{iso} reçu par le gaz. Montrer que cette transformation est *a priori* réversible.

b) La compression est adiabatique, dans les conditions de la question **10.**. Décrire le système et donner la variation de température ΔT_{adia} subie par le gaz et le travail W_{adia} reçu par le gaz.

13. À partir d'un point donné en diagramme de Clapeyron, représenter pour un gaz parfait idéal une détente isotherme réversible et une détente adiabatique réversible ; établir le rapport des pentes.

14. Cycle de Carnot
Le cycle de Carnot (définition valable pour un fluide quelconque) est un cycle réversible au cours duquel le système (le fluide) n'échange de transfert thermique qu'avec deux thermostats seulement (températures notées T_1 et T_2, on pose $T_1 > T_2$)
Il s'agit d'un cycle ditherme réversible.

a) Montrer que la nature des transformations est imposée et qu'il n'existe donc qu'*un seul* cycle ditherme réversible.

b) Dans le cas d'un fluide de type gaz parfait idéal, représenter le cycle de Carnot moteur dans un diagramme de Clapeyron.

c) Toujours pour un GPI, établir le transfert thermique Q_1 reçu de la source chaude et celui Q_2 reçu de la source froide. Préciser leur signe, pour le cycle moteur.

d) En déduire, toujours dans les mêmes conditions, la relation entre Q_1, Q_2, T_1 et T_2 appelée égalité de Clausius. Cette relation est-elle modifiée si le cycle est décrit dans l'autre sens ? Quelle relation très générale retrouve-t-on ?

e) Établir le rendement du cycle moteur de Carnot, décrit par un GPI. Le rendement d'un moteur ditherme est défini comme le rapport du travail qu'il fournit sur la chaleur reçue de la source chaude.

■ Machines thermiques dithermes

15. Donner le principe d'une machine thermique cyclique ditherme. Comment s'écrivent le premier et le second principe dans ce cas ?

16. Interpréter graphiquement l'inégalité de Clausius, dans un diagramme de Raveau (Q_2, Q_1).

17. Établir les conditions de fonctionnement d'un moteur ditherme, définir le rendement r. Quelle est la relation entre r et les températures des sources ? Interpréter l'inégalité trouvée.

18. Établir les conditions de fonctionnement d'un réfrigérateur ditherme, définir son efficacité e. Quelle est la relation entre l'efficacité e et les températures des sources. Proposer une AN.

19. Établir les conditions de fonctionnement d'une pompe à chaleur ditherme, définir et exprimer son efficacité e en fonction des températures des sources. Proposer une AN. Comment interpréter le fait que $e_{max} > 1$?

20. Démontrer le théorème de Carnot à partir de l'énoncé de Clausius du second principe uniquement. Quelle est sa signification théorique ? Quelle est son importance dans l'élaboration de la fonction entropie ?

21. Pour un « réfrigérateur » réel de la vie courante, où sont les sources froide et chaude, et à quoi correspond la machine thermique réfrigérateur ?
Comment traiter le cas d'une machine ditherme fonctionnant avec des pseudo-sources (sources de température non constante) ?

■ Fluide en écoulement à travers une machine quelconque

22. Établir l'expression générale du premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine quelconque.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Il ne faut pas confondre transformation impossible (interdite par le second principe et jamais observée dans la nature) avec les transformations irréversibles (autorisées par le second principe avec $S_{créée} > 0$).

☐ Attention aux notations, $S_{éch}$ et $S_{créée}$ ne sont pas des fonctions d'état, ce ne sont pas des variations d'entropie, leur valeur dépend de la transformation.

☐ On peut utiliser sans démonstration la loi de Laplace à condition de donner précisément ses conditions de validité : transformation adiabatique et **réversible**, gaz parfait **idéal** ($\gamma = \text{cste}$).

☐ Pour retrouver les diverses expressions de la loi de Laplace, injecter l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi $PV^{\gamma} = \text{cste}$.

☐ Une erreur de débutant(e) consiste à dire : « Puisque la transformation est adiabatique, la température est constante ! » ; c'est l'illustration parfaite de la confusion entre les notions de « température » et de « transfert thermique » (voir l'application numérique de la question **11.**).

☐ Il est très important de repérer dans l'énoncé si le fluide subissant des transformations est en écoulement. Dans ce cas les échanges machine-fluide concernent la variation d'enthalpie et non d'énergie interne (voir la question **22.**). C'est notamment le cas si l'énoncé précise (paradoxalement) que les énergie cinétiques d'écoulement sont négligeables, ce qui signifie que le fluide *est en écoulement* et que dans l'expression du premier principe avec ΔH on pose $\Delta E_{C\ macro} = 0$.

Dans le cas d'une transformation cyclique, le bilan sur un cycle est le même que l'on considère U ou H, $\Delta U = 0 = \Delta H$, la somme des travaux d'aspiration-refoulement est nulle sur un cycle.

☐ Si un fluide évolue en traversant plusieurs machines successives, il est en écoulement et il faut lui appliquer le premier principe industriel :

$$\Delta h + \Delta e_C + \Delta e_{P,ext} = q + w^*$$

En l'absence d'indications de l'énoncé on prend : $\Delta e_C = 0$ et $\Delta e_{P,ext} = 0$

Une machine ne possédant *aucune pièce mobile* (comme des pales, des pistons, des hélices,...) ne fournit aucun travail au fluide : le travail massique utile est nul : $w_u = 0$.

☐ Il est inutile d'apprendre par cœur les formules donnant les rendements ou les efficacités, mais il faut savoir les retrouver par le rapport de deux grandeurs (à choisir parmi Q_1, Q_2 et W) :

$$\frac{\textit{grandeur utile}}{\textit{grandeur à fournir}}$$

où la « grandeur utile » est le résultat intéressant et espéré produit par la machine et la « grandeur à fournir » est celle qui nécessite une dépense, un coût, contrairement à la 3e grandeur que la nature fournit en général gracieusement et à volonté.

☐ Les résultats démontrés pour les machines dithermes ne s'appliquent pas aux machines polythermes (nombre de thermostats supérieur à 2).

☐ Il est toujours utile de représenter les transformations d'un cycle avec changement d'état à l'équilibre dans le diagramme de Clapeyron (P,V) ou le diagramme proposé par l'énoncé. Ce qui n'est évidemment possible que pour des transformations quasi statiques (succession d'états d'équilibre), les énoncés ne le précisent pas toujours !
De plus la courbe n'est valable *a priori* que pour un seul sens de parcours, sauf bien sûr si la transformation est réversible.

Applications directes du cours

Transformations d'un gaz

23. On reprend le dispositif de la question **12.**, voir l'énoncé et la réponse à cette question. On envisage une transformation intermédiaire entre isotherme et adiabatique.
Le gaz est en contact avec un thermostat de température T_i (la température initiale du gaz). En déduire qualitativement, que pour une transformation telle que $PV^a = cste$ avec $1 < a < \gamma$ ($\gamma = c_p / c_v$), on a $\Delta T_a > 0$ et $Q_a < 0$. Ce résultat est-il paradoxal ? Montrer que la transformation est *a priori* irréversible.

Applications du second principe

Pour ces applications, prendre les expressions des variations d'entropie des fluides modèles à la question **5.**

24. Irréversibilité des transformations monothermes isochore et isobare

a) Reprendre les conditions de la transformation monotherme isochore d'un gaz parfait de la question **51.a)** du chapitre **10**. Calculer pour le gaz la variation d'entropie ΔS, l'entropie échangée $S_{éch.}$ et en déduire l'entropie créée $S_{créée}$; la transformation est-elle réversible ? Interpréter.

b) Reprendre les conditions de la transformation monotherme isobare d'un gaz parfait de la question **51.b)** du chapitre **10**. Calculer pour le gaz ΔS, $S_{éch.}$ et en déduire $S_{créée}$; la transformation est-elle réversible ? Interpréter.

c) Conclusion.

25. Réversibilité des transformations isotherme et adiabatique

a) Reprendre les conditions de la transformation isotherme d'un gaz parfait de la question **12.a)**. Calculer pour le gaz la variation d'entropie ΔS, l'entropie échangée $S_{éch.}$ et en déduire l'entropie créée $S_{créée}$; la transformation est-elle bien réversible comme prévu ?

b) Reprendre les conditions de la transformation adiabatique d'un gaz parfait de la question **12.b)**. Calculer pour le gaz ΔS, $S_{éch.}$ et en déduire $S_{créée}$; la transformation est-elle bien réversible comme prévu ?

c) Conclusion.

26. Une masse $m = 5{,}0$ kg de fer à $t_{Fe} = 327$ °C est plongée dans un lac à $t_L = 7$ °C ; quelle est l'entropie créée sachant que la capacité thermique massique du fer est $c = 0{,}45\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$ (presque 10 fois plus faible que celle de l'eau) ?

27. Une masse de 5,6 g de diazote (masse molaire atomique de l'azote 14 g.mol^{-1}) est enfermée dans un cylindre fermé par un piston. Le diazote, considéré comme un gaz parfait idéal de $\gamma = 1{,}4$, est initialement dans l'état $T_1 = 300$ K et $V_1 = 6{,}0$ L. Le gaz est successivement :

- comprimé de façon adiabatique et réversible jusqu'au volume $V_2 = 1{,}2$ L,
- détendu de façon isotherme et réversible jusqu'au volume $V_3 = V_1$,
- refroidi réversiblement à volume constant jusqu'à la température T_1.

a) Calculer pression et température dans les états 2 et 3.

b) Calculer le travail fourni par le gaz au cours du cycle.

c) Calculer la variation d'entropie du gaz au cours de chaque transformation, la variation d'entropie et l'entropie créée sur un cycle.

d) Le cycle peut-il être ditherme ?

28. On mélange $n_1 = 10$ moles d'un GPI, initialement à la température $T_1 = 300$ K et sous la pression P_0, avec $n_2 = 20$ moles d'un autre GPI, initialement à la température $T_2 = 400$ K et sous la pression P_0. Le mélange est fait dans une enceinte calorifugée, de façon adiabatique et isobare (le mélange final est sous la pression P_0). Pour les deux gaz, $\gamma = 7/5$ et le mélange se comporte comme un GPI.

a) Calculer la température finale.

b) Exprimer littéralement puis numériquement la variation d'entropie pour le système des deux gaz, et en déduire l'entropie créée.

29. Mélange de glace et d'eau liquide

Dans un récipient, de très faible capacité thermique, on introduit $m_g = 60$ g de glace prise à la température $t_g = -23$ °C du congélateur et $m_e = 30$ g d'eau prise à la température $t_e = 15$ °C du robinet. Déterminer l'état final du système et l'entropie créée.

Données : La capacité thermique de la glace : $c_g = 2{,}1\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$; l'enthalpie massique de fusion de la glace : $l_f = 334\ \text{kJ.kg}^{-1}$; la capacité thermique de l'eau liquide : $c_e = 4{,}2\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$.

30. On donne pour le fréon à 85 °C : liquide saturant : $s_l = 0{,}42\ \text{kJ.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$; enthalpie massique de vaporisation : $l_v = 86\ \text{kJ.kg}^{-1}$.
Calculer la fraction massique de vapeur de fréon diphasé à 85 °C pour lequel : $s = 0{,}61\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

■ Machines dithermes

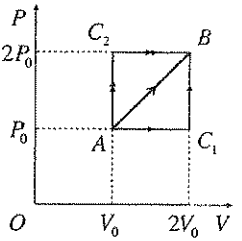
31. Montrer que le moteur monotherme n'existe pas.

32. Quelle est la forme du cycle de Carnot en diagramme entropique (T,S) ? Quel doit être le sens de parcours du cycle (à justifier) pour qu'il soit moteur ?

33. Quelle est la forme des isobares d'un GPI dans le diagramme (T,S) ? Et celle d'une phase condensée ? Tracer enfin, dans le diagramme (T,S), l'isobare faisant passer de la phase condensée liquide au gaz (modèle GPI).

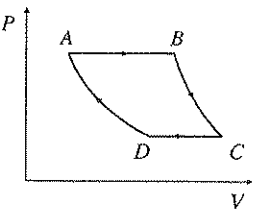
34. Un moteur thermique fonctionne avec une source chaude à 227 °C et une source froide à 27 °C ; que peut-on dire de son rendement ?

35. On reprend ici la question **47.** du chapitre **10** dont on rappelle les résultats. Une mole de gaz parfait subit une transformation de l'état initial $A(P_0,V_0)$ vers l'état final $B(2P_0,2V_0)$.



* Sur le premier trajet AC_1B, le travail reçu le gaz de la part du milieu extérieur est $W_1 = -P_0V_0$; sur le second trajet AC_2B, ce travail est $W_2 = -2P_0V_0$. Comment peut-on interpréter simplement le fait que $W_2 = 2W_1$?
* On envisage à présent un troisième trajet allant de A vers B en ligne droite. Donner le travail W_3 (sans calcul d'intégrale) et le comparer aux deux valeurs précédentes.
* Lequel des cycles ayant AB comme diagonale (parcourue dans ce sens) et passant par un des points C est un cycle moteur ? Quel est le travail fourni au milieu extérieur ?

36. Un gaz parfait idéal décrit un cycle moteur ditherme de manière mécaniquement réversible. Le cycle $ABCDA$ est composé de deux transformations adiabatiques réversibles et de deux transformations isobares.



a) Établir que son rendement est :

$$r = 1 - \frac{T_D}{T_A} = 1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1}$$

b) Comparer ce rendement au rendement de Carnot et commenter.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

37. Quelles analogies et quelles différences peut-on souligner entre l'énergie interne et l'entropie ?

38. Expliquer le sens de la phrase : « L'atmosphère est une source de chaleur et de travail ».

39. Pour la même quantité de matière d'un corps pur donné, classer les entropies des trois phases solide, liquide et gaz.

40. L'existence de parois athermanes (isolantes) est-elle une condition nécessaire et / ou suffisante pour que la transformation d'un gaz soit adiabatique ?
Y a-t-il équivalence entre transformation adiabatique et $Q = 0$? (voir la question **92.** du chapitre **10**).

41. Les transformations réversibles sont nécessairement quasi statiques, mais l'inverse n'est pas vrai. Donner quelques exemples de transformations quasi statiques irréversibles. Citer néanmoins des transformations de gaz qui, effectuées de manière quasi statique (et sans frottements solides), sont de fait réversibles.

42. On place 100 pièces de monnaie dans une boîte, une seule coté face et les 99 autres côté pile. Après avoir agité la boîte, on constate qu'il y a 50 pièces côté pile et 50 côté face. En admettant la validité de la formule de Boltzmann (voir question **8.**), dans ce cas, quel est la variation d'entropie des pièces produite par l'agitation de la boîte ? On donne $\frac{100!}{50!50!} \approx 1{,}0\,10^{29}$.

43. Lequel parmi les deux principes est le plus évident expérimentalement et lequel, beaucoup plus abstrait, n'a été élaboré que difficilement ?

44. Pourquoi le cycle de Carnot n'est-il pas utilisé dans la pratique ?

45. Quel est le fluide décrivant le cycle moteur dans un moteur à explosion ? Quelles sont les sources (chaude et froide) ?
Dans un moteur à combustion interne, à essence, l'allumage est commandé par des bougies. Le modèle du cycle décrit par une masse d'air et d'essence est constitué de deux adiabatiques réversibles et de deux isochores (figure 1).
Ce cycle proposé par l'ingénieur français Beau de Rochas en 1862, a été réalisé et présenté à l'exposition universelle de Paris en 1878 par l'ingénieur allemand Otto.
Dans chaque cylindre (figure 2) le cycle est décrit en quatre temps: *A-B* ; *B-C-D* ; *D-E* ; *E-B-A*. Dans la partie haute du cylindre se trouvent la soupape d'admission S_1, la soupape d'échappement S_2 et la bougie.

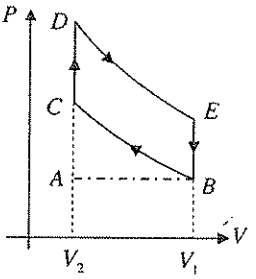


figure 1

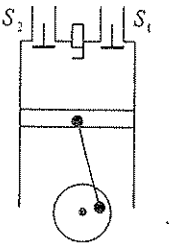


figure 2

a) Décrire les transformations correspondant à chaque temps et les relier aux déplacements du piston, préciser l'ouverture et la fermeture des soupapes.

b) Quel est le temps moteur ? Pourquoi utilise-t-on couramment 4 cylindres dans un moteur ? À quoi correspond la différence $V_1 - V_2$?

c) En notant a le taux de compression, $a = \frac{V_1}{V_2}$, le rendement théorique du cycle de Beau de Rochas est $r = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}$, avec $\gamma = 1{,}4$. Le rendement augmente si on augmente le taux de compression, mais en pratique pourquoi ne peut-on pas beaucoup augmenter a ? Pourquoi le rendement réel est-il environ deux fois plus petit que le rendement théorique ?

46. Pourquoi les moteurs électriques ont-ils de bien meilleurs rendements que les moteurs thermiques ? Ils sont aussi moins polluants, moins bruyants, et pourtant, ils ne sont encore que peu utilisés dans l'industrie automobile ; pourquoi ?

47. Pour faire de l'eau tiède à 37 °C, un mélangeur de douche utilise de l'eau froide à 12 °C et de l'eau chaude à 65 °C. Calculer le rapport x des deux débits d'eau froide et d'eau chaude. Pour quelle raison la température de l'eau chaude est-elle si élevée ?

48. Si on ouvre la porte d'un réfrigérateur, est-ce que l'on refroidit la cuisine ?

49. Un réfrigérateur peut-il fonctionner si la température de la source « froide » est supérieure à celle de la source « chaude » ?

50. Comparer l'efficacité d'un chauffage électrique ordinaire avec celle d'une pompe à chaleur.

51. La majorité des machines thermiques sans combustion utilisent les changements d'état des fluides. Quelle en est la raison ? Ne pourrait-on pas utiliser simplement des gaz échangeant chaleur et travail ?

52. Expliquer qualitativement le fonctionnement de la climatisation d'une voiture.

Exercices

53. À propos d'une transformation adiabatique

De l'air à $T_i = 20\ °C$ sous $P_i = 1{,}0\ atm$ est contenu dans un récipient ; on le comprime à l'aide d'un piston de telle façon à réduire le volume d'un facteur 2. La transformation est supposée adiabatique réversible et on prend le modèle GPI de $\gamma = 1,4$ pour l'air.

a) Quelle est la température finale T_f de l'air ? Commenter ce résultat.

En pratique se pose la question de l'équilibre final si les parois ne sont pas rigoureusement athermanes. Dans ce cas, le système gaz seul choisi dans le calcul ci-dessus est en contact avec la paroi interne du récipient à laquelle il transmet un flux thermique : la transformation subie par le gaz est donc adiabatique dans un premier temps (compression rapide) puis il se produit un échange thermique (lent) avec les parois du récipient. Le travail fourni par l'opérateur dans la compression sert à la fois à échauffer le gaz et la paroi. On considère « l'équilibre final » avant tout échange entre la paroi externe du récipient et le milieu extérieur (l'air à l'extérieur par exemple).

Prendre un récipient contenant $V_i = 2{,}0\ L$ d'air initialement, et considérer que le volume final $V_f = 1{,}0\ L$ correspond au volume intérieur d'un récipient cylindrique de rayon de base $r = 5{,}7\ cm$ et de hauteur $h = 10\ cm$. La paroi en aluminium de masse volumique $\rho = 2{,}7\ g.cm^{-3}$ et de capacité thermique $c = 0{,}91\ J.g^{-1}.°C^{-1}$ est d'épaisseur $e = 1{,}0\ mm$.

b) Quelle est la masse m_0 d'air dans le récipient et la masse m de la paroi métallique en contact avec le gaz chaud ?

c) Estimer l'ordre de grandeur de la température d'équilibre T_e ; commentaire.

54. Second principe et réalité expérimentale

Un fluide décrit un cycle défini par : *AB* détente isotherme, *BC* refroidissement isochore et *CA* adiabatique.

a) Si ce cycle est décrit de façon réversible par un gaz parfait, dessiner son allure dans un diagramme (P, V).

b) Montrer qu'en ne disposant que d'une seule source (ou thermostat), de température égale à T_B, il est possible de décrire expérimentalement le cycle dans le sens *ACBA*. Est-il réversible ?
Montrer qu'il est impossible expérimentalement, dans les mêmes conditions de décrire le cycle dans le sens moteur. Comment expliquer, de façon générale et théorique, cette impossibilité ?

c) Montrer qu'au moins une autre source, en plus de celle utilisée au b), est nécessaire pour décrire le cycle dans le sens moteur. À quelle température doit être cette seconde source ? Le cycle ainsi décrit est-il réversible ?

d) Comment peut-on décrire le cycle de façon réversible, dans un sens ou dans l'autre ?

55. Transformation polytropique

On fait passer de manière mécaniquement réversible n moles d'un gaz parfait idéal ($\gamma = cste$) d'un volume initial V_i (température T_i) à un volume final $V_f < V_i$.

L'enceinte qui contient le gaz est en contact avec un thermostat de température (constante) T_i, la température initiale du gaz.

On considère de manière quantitative une compression à $PV^a = cste$ avec $a \geq 0$ constant et $a \neq 1$.

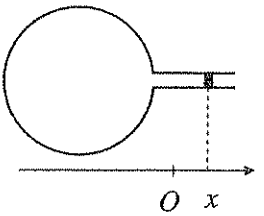
a) Donner le travail W_a reçu par le gaz et la variation de température ΔT_a du gaz en fonction de n, R, T_i, V_i/V_f et a, puis exprimer W_a en fonction de ΔT_a. Pouvait-on obtenir cette relation directement ?

b) En déduire que l'on peut écrire $Q_a = nF(a)\Delta T_a$ où $F(a)$ est une fonction de a à exprimer. Retrouver le résultat de la question **23.**.

c) Donner les expressions de $F(a)$ dans les quatre cas suivants : $a = 0$; $a \to 1$; $a = \gamma$; $a = \infty$ et interpréter les résultats obtenus.

56. Le résonateur de Helmholtz (*)

a) Un piston de masse m peut se déplacer sans frottement dans le goulot (ici cylindrique) de section S et de longueur l d'un récipient (ici sphérique) contenant un volume V_0 d'air (avec $V_0 \gg Sl$). Lorsque le piston est dans sa position d'équilibre $x = 0$, la pression de part et d'autre vaut P_0. On déplace le piston de x_0 à partir de sa position d'équilibre et on le lâche avec une vitesse initiale nulle. Après avoir justifié une modélisation adiabatique réversible pour les transformations subies par le gaz emprisonné, déterminer la pulsation ω des petites oscillations du piston.

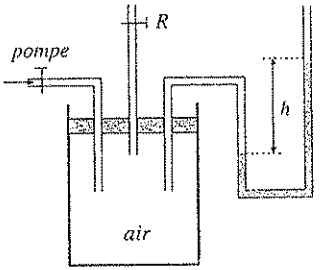


b) Il s'agit en réalité d'étudier les petits déplacements harmoniques de toute la tranche d'air de masse volumique ρ_0 dans le goulot sous l'effet d'un différentiel de pression entre la cavité et l'extérieur. Comment adapter le modèle précédent du piston et sous quelle hypothèse ? Donner la fréquence propre f_H du résonateur de Helmholtz ainsi constitué et proposer une application numérique pour une bouteille de type Bordeaux. S'appuyer sur les cours d'électricité et de mécanique pour justifier le terme de résonateur.

57. Mesure du rapport γ : expérience de Clément et Desormes (*)

Un récipient contient de l'air, un gaz supposé parfait et de rapport γ constant, initialement sous la pression P_0 et à la température T_0 de l'air extérieur. On comprime légèrement ce gaz grâce à la pompe (côté gauche) et on laisse le récipient longtemps sans y toucher ; le manomètre (côté droit) indique $h_1 = 8{,}9$ cm. Cette situation représente l'état initial (état 1).

On réalise alors l'opération suivante : on ouvre le robinet R et on le ferme aussitôt (état i) ; on laisse le récipient longtemps sans y toucher (état 2) ; le manomètre indique $h_2 = 2{,}5$ cm.

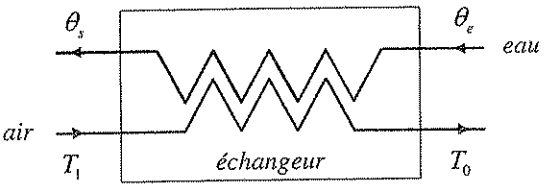


Analyser le processus expérimental, choisir comme système : le système fermé des n moles qui restent dans le récipient au moment de la fermeture du robinet, et proposer un modèle pour chacune des deux transformations $1 \to i$ et $i \to 2$ (on peut noter la pression $P_0 + p$, où $p \ll P_0$ est la surpression et la température $T_0 - \theta$ où $\theta \ll T_0$ de signe à justifier). En déduire le rapport γ en fonction de h_1 et h_2, et faire l'application numérique.

58. Refroidissement à eau d'un air chaud (*)

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1} et de coefficient $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = 1{,}4$. L'eau est un fluide incompressible de capacité thermique massique $c = 4{,}2$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}.

De l'air sortant d'un compresseur à la pression $P_1 = 5{,}0$ atm et à la température $T_1 = 519$ K est refroidi de façon isobare jusqu'à la température $T_0 = 300$ K dans un échangeur parfaitement calorifugé. Le fluide réfrigérant est de l'eau qui entre à la température $\theta_e = 12$ °C et ressort à la température θ_s.



On considère un régime permanent établi avec des débits massiques suivants :
$d_m = 6{,}8$ g.s^{-1} pour l'air et $D_m = 100$ g.s^{-1} pour l'eau.
Les énergies cinétiques macroscopiques liées aux écoulements ainsi que les énergies potentielles dans le champ de pesanteur sont négligées.
Exprimer littéralement puis numériquement :

a) La température θ_s en °C.

b) Les variations d'entropie massique de l'air, puis de l'eau ayant traversé l'échangeur.

c) En déduire l'entropie créée par unité de temps dans l'échangeur.

59. Cycle de moteur ditherme

Le système est un gaz parfait idéal. On part de A (P_0, V_0, T_0) par une détente isotherme mécaniquement réversible jusqu'en B où le volume est αV_0 (α est le

rapport volumétrique). Entre B et C, le gaz subit une transformation isobare mécaniquement réversible amenant la température à βT_0. De C on revient à A par une transformation adiabatique réversible.

a) Tracer le cycle dans un diagramme de Clapeyron, préciser les « transformations » BC et CA, puis établir la relation entre α et β.

Sur quel tronçon intervient la source chaude ? trouver sa température T_1.

Sur quel tronçon intervient la source froide ? trouver sa température T_2.

b) Exprimer le rendement du cycle en fonction de α et de $\gamma = C_p / C_v$.

Application numérique : $\gamma = 1{,}4$; $\alpha = 10$.

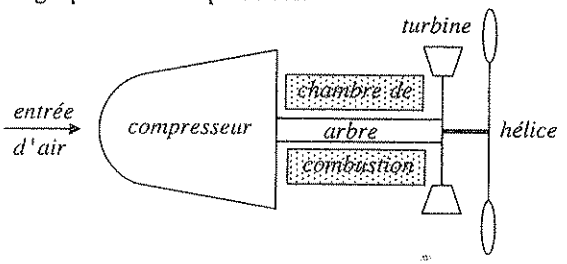
Vérifier qu'il est inférieur au rendement théorique maximal de Carnot.

c) Pour chacune des trois transformations, évaluer la variation d'entropie du gaz ΔS_g, puis calculer l'entropie échangée $S_{éch.}$ avec la source et en déduire l'entropie créée $S_{créée}$ au cours de la transformation. Faire ensuite le bilan entropique sur un cycle et commenter.

60. Étude d'un turbopropulseur à hélice

Un turbopropulseur est un moteur à turbine, comme les moteurs à réaction, l'organe essentiel est constitué d'une turbine à gaz dont le rôle est d'entraîner l'hélice propulsive *et* le compresseur. Le cycle décrit est appelé cycle de Joule, le gaz utilisé est de l'air pour lequel on prend le modèle gaz parfait : $R = 8{,}32$ J.K^{-1}.mol^{-1}, $\gamma = 1{,}4$, masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1}.

Le fluide (l'air) est en écoulement stationnaire à travers les diverses parties du turbopropulseur. On néglige les variations d'énergie cinétique macroscopique et les variations d'énergie potentielle de pesanteur.



On raisonne sur une unité de masse d'air qui traverse le turbopropulseur. Les étapes du cycle de Joule sont :

(1) L'air, à la température $T_0 = 280$ K et à la pression $P_0 = 1{,}0$ atm, est aspiré dans le compresseur qui le porte à $P_1 = 10$ atm et T_1 par une compression adiabatique réversible. On note w_1 le travail massique fourni par le compresseur à l'air qui le traverse.

(2) À la sortie du compresseur l'air pénètre dans la chambre de combustion où sa température est portée à $T_1' = 1000$ K sous pression constante P_1. On note q le transfert thermique reçu par l'unité de masse dans la chambre de combustion.

(3) L'air passe ensuite dans la turbine où il subit une détente adiabatique réversible jusqu'à la pression $P_2 = P_0$ et la température T_2. On note w_2 le travail massique fourni par la turbine à l'air qui la traverse.

(4) L'air est rejeté dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à pression constante P_0, de la température T_2 à la température T_0.

a) Représenter l'allure, dans le diagramme de Clapeyron, du cycle de Joule décrit par une masse quelconque d'air.

b) Exprimer dans l'ordre, en fonction des données et des résultats intermédiaires déjà établis : T_1, w_1, q, T_2 et w_2.

c) Faire les applications numériques.

d) Quel est le travail massique fourni à l'hélice ? Définir et calculer le rendement du turbopropulseur.

e) Comparer le rendement à un moteur réversible ditherme qui fonctionnerait entre les températures extrêmes atteintes au cours du cycle.

61. Un dispositif thermodynamiquement avantageux ! (*)

La température extérieure étant $t_1 = -23$ °C, on veut maintenir dans une serre une température constante de $t_2 = 27$ °C.

Par un système de chauffage central ordinaire, on brûle une masse m de charbon par jour, ce qui fournit le transfert thermique q nécessaire pour compenser les déperditions journalières. Les gaz brûlés sont encore, en sortant de la cheminée, à plus de 300 °C.

Un conseiller vient proposer un dispositif thermodynamiquement plus avantageux, où est toujours extrait le transfert thermique q pour une masse m de charbon brûlé, mais sur un temps plus long. Il assure d'abord avec la combustion du charbon l'entretien de vapeur d'eau dans une chaudière à $t_3 = 227$ °C, puis il prend deux machines dithermes réversibles, l'une entre T_1 et T_2, l'autre entre T_2 et T_3. En régime permanent les températures sont constantes.

Préciser la nature motrice ou réceptrice des cycles. Donner la durée Δt pendant laquelle le chauffage est assuré dans les mêmes conditions avec ce dispositif.

62. Moteur avec sources de capacités thermiques finies

Le fluide d'une machine thermique, fonctionnant de manière cyclique, échange de l'énergie avec deux corps de même capacité thermique C et de températures initiales T_1^0 et T_2^0, par exemple un litre d'eau chaude et un litre d'eau froide (on suppose $T_1^0 > T_2^0$).

a) Montrer que pour récupérer un travail il faut nécessairement $dT_1 < 0$ et $dT_2 > 0$.

b) À quelle condition le travail récupéré est-il maximal ? Déterminer alors la température finale T_f du système et le travail maximal W_{max} récupéré.

AN : Les sources sont 1,0 L d'eau chaude à 100°C et 1,0 L d'eau froide à 0°C, calculer T_f et commenter. Le travail maximal récupéré W_{max} sert à élever une masse $M = 10$ kg d'une hauteur h, calculer h.

c) Dans les mêmes conditions, comment évolue le rendement au cours du fonctionnement du moteur ? Déterminer les rendements initial, final et moyen. Applications numériques.

63. Réfrigérateur tritherme à absorption

Dans un réfrigérateur dit « à absorption », le fluide décrit un cycle en échangeant avec le milieu extérieur uniquement des transferts thermiques. Ces échanges se font avec trois thermostats :

– une source froide (température T_2) dont il reçoit Q_2,

– une source chaude (température T_1) dont il reçoit Q_1,

– une source intermédiaire (air ambiant, température T_e) dont il reçoit Q_e.

a) Quel est le signe de Q_2 ? Montrer qu'un tel cycle est compatible avec les principes de la thermodynamique, en déduire son bilan de fonctionnement.

b) Définir l'efficacité de ce réfrigérateur et calculer sa valeur maximale en fonction des seules températures. Quel est l'intérêt de ce type de réfrigérateur ?
AN : Calculer l'efficacité maximale, $T_1 = 400$ K, $T_2 = 265$ K et $T_e = 300$ K.

64. Détente dans une turbine adiabatique

Une turbine adiabatique, conçue pour travailler sans liquide, détend une vapeur d'eau sèche issue d'un surchauffeur à la température $T_e = 380$ °C et à la pression $P_e = 10$ bar jusqu'à la pression $P_s = 1{,}0$ bar.

On donne un extrait du diagramme (T,s) de l'eau pure. Les isobares sont représentées en trait plein, les isenthalpes sont représentées en pointillé.

a) Que représente la courbe en gras ?

b) Positionner le point e représentant la vapeur à l'entrée. La vapeur est-elle sèche ou saturante ?

c) La détente est réversible.

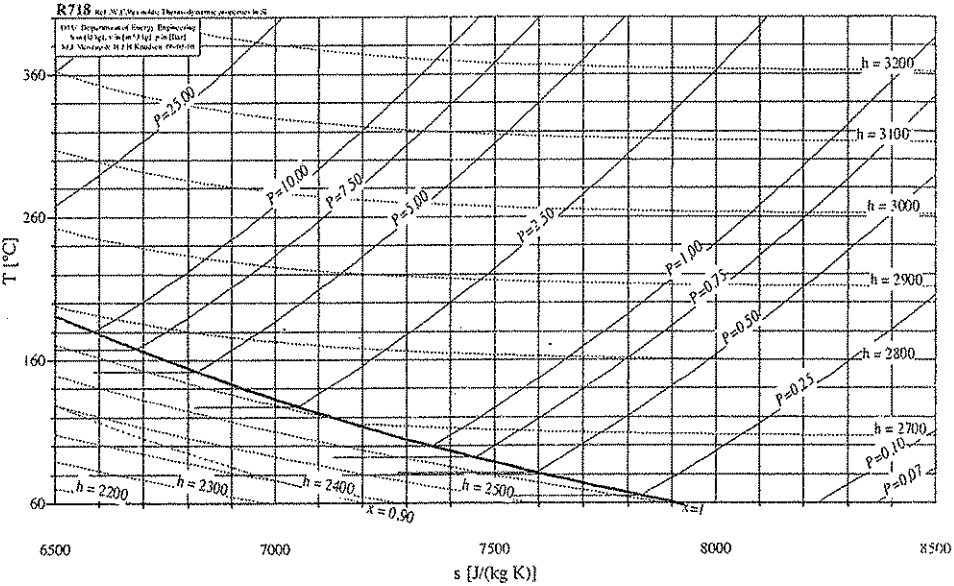
α) Tracer sur le diagramme la courbe d'évolution du fluide et le point b correspondant à l'état de sortie.

β) La vapeur en sortie est-elle sèche ? Quelle est sa température de sortie T_s ? Quel est le travail massique utile de détente w_u ? Jusqu'à quelle pression pourrait-on détendre isentropiquement la vapeur sans faire apparaître de liquide ?

d) La détente est maintenant irréversible.
Les pressions d'entrée et de sortie sont identiques, mais la température de sortie réelle est mesurée à : $T_s' = 150$°C.

α) Tracer sur le diagramme la courbe d'évolution du fluide et le point b' correspondant à l'état de sortie. Mesurer l'entropie créée massique.

β) La vapeur en sortie est-elle sèche ? Quel est le travail utile de détente w_u' ? Commenter le résultat, définir et calculer un « rendement » isentropique de la turbine.

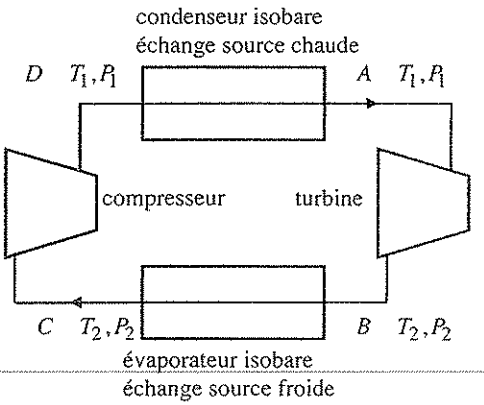


65. Réfrigérateur à ammoniac

Pour optimiser l'efficacité d'une machine frigorifique, il faut s'approcher du cycle de Carnot théorique constitué de deux isothermes à T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$ et de deux adiabatiques (une détente du point A au point B du cycle de P_1 à P_2 et une compression du point C au point D du cycle de P_2 à P_1).

De plus pour des échanges de chaleur importants, sans utiliser de trop grandes quantités de fluide, on utilise des changements d'état. On suppose donc que l'ammoniac décrit l'intégralité du palier de changement d'état à T_1 ; le fonctionnement se fait en circuit fermé et en régime permanent avec une circulation continue d'ammoniac pur au débit massique D_m.

On considère l'installation ci-contre. Dans le condenseur et l'évaporateur isobares, le fluide est diphasé, donc la température reste aussi constante. De façon classique, le travail récupéré à la turbine est fourni au compresseur, ce qui limite la dépense pour alimenter ce dernier.



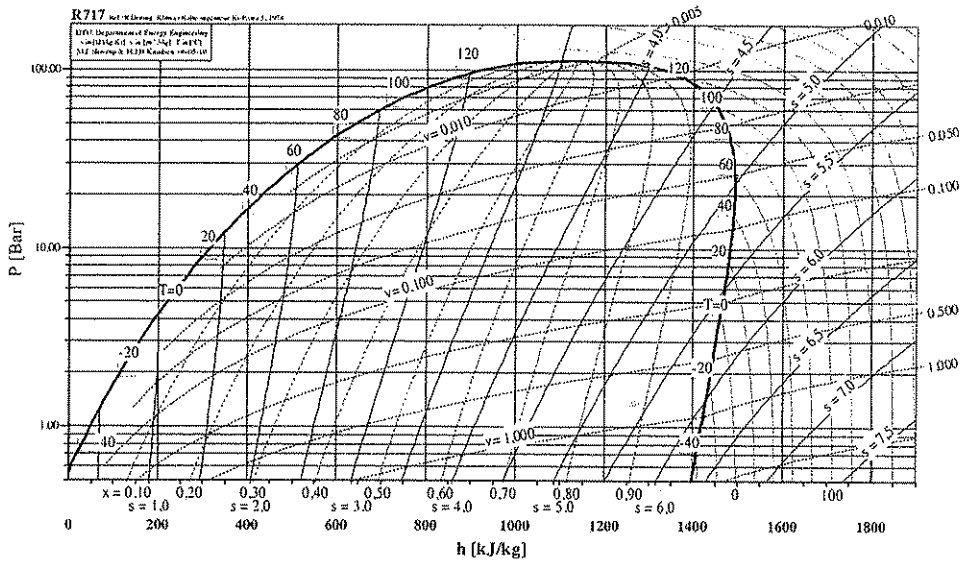
a) Placer dans un diagramme (T,s), la courbe de saturation et tracer le cycle de Carnot théorique *ABCD* que décrirait le fluide.

b) On fixe d'abord les températures à $T_1 = 40$ °C et $T_2 = -20$ °C. Justifier ces valeurs si la source chaude (air extérieur) est à 30°C et l'intérieur du « réfrigérateur » à −5 °C. Cela modifie-t-il l'étude théorique ?

c) On donne ci-dessous le diagramme $(\ln P,h)$, encore appelé diagramme de Mollier des frigoristes, pour l'ammoniac. Les isentropiques (notées s, valeurs en $kJ.K^{-1}.kg^{-1}$) y sont tracées en trait plein, les isochores (notées v, valeurs en $m^3.kg^{-1}$) en pointillés et les isothermes apparaissent en pointillés dans la partie droite (vapeur) où elles sont différenciées, elles ne sont pas tracées dans la courbe de saturation, les valeurs de températures sont en °C et rappelées sur la courbe de saturation. Attention l'échelle des pressions est logarithmique.

Les courbes suivies par le fluide dans ses transformations seront assimilées à des portions de droite et les valeurs numériques entre deux courbes données seront interpolées linéairement.

Mesurer les pressions P_1 et P_2, puis tracer le cycle de Carnot *ABCD*. Calculer l'efficacité de Carnot η_C en fonction de T_1 et T_2 et commenter le résultat.



d) Dans la pratique, on n'utilise pas de turbine de détente adiabatique : elles ont un mauvais rendement en mélange liquide-vapeur, et sont complexes et chères. Bien plus simple est l'utilisation d'un détendeur calorifugé simple, sans pièce mobile (souvent un simple rétrécissement). Montrer que ce détendeur est isenthalpique et tracer la nouvelle portion AB' sur le diagramme.

e) On ne comprime pas non plus le mélange diphasé du point C au point D, ceci risquerait d'endommager le compresseur. On préfère décrire l'intégralité du palier d'évaporation à T_2 jusqu'au point C' avant de comprimer la vapeur sèche de façon adiabatique réversible jusqu'à P_1. Tracer le nouveau cycle $AB'C'D'$A décrit par l'ammoniac. Quelle est la température maximale atteinte, et quel problème cela peut-il poser ?

f) Sachant qu'on veut extraire 1,0 kW thermique de la source froide, calculer le débit massique du fluide, la puissance électrique à fournir au compresseur dont le moteur électrique a un rendement $r = 0,9$, le débit volumique qu'il aspire, ainsi que la puissance thermique que doit absorber la source chaude.
Calculer l'efficacité de ce cycle réfrigérateur, peut-on la comparer à celle du cycle de Carnot ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Deuxième principe de la thermodynamique (ou principe d'évolution)

1. Le 1er principe ou principe de conservation ne suffit pas car il ne distingue pas le travail du transfert thermique ; or l'équivalence dimensionnelle entre W et Q cache de grandes différences dans les échanges réels.

   Si on plonge un morceau de métal chaud dans l'eau froide d'un calorimètre, il se refroidit. Une fois l'équilibre atteint (ou à tout moment avant) on n'assiste jamais à la transformation inverse : le métal s'échauffe en recevant du transfert thermique de l'eau plus froide ! Pourtant le premier principe n'interdit pas cette transformation inverse, il impose seulement $\Delta H = 0$ pour l'ensemble {eau + métal} ce qui est respecté en échangeant les signes des variations de température.

   Si on plonge un conducteur ohmique dans l'eau froide d'un calorimètre, en faisant circuler un courant d'intensité i pendant Δt, l'eau s'échauffe. La transformation inverse : l'eau se refroidit et il circule un courant dans la résistance simplement plongée dans l'eau, n'est jamais observée. Pourtant le premier principe n'interdit pas cette transformation inverse, il impose seulement que le travail fourni soit égal à la variation d'énergie interne de l'eau.

   Une voiture freine brusquement, le contact avec frottements entre les disques et les roues conduit à un échauffement. Et pourtant le refroidissement du dispositif ne permet pas de rendre le mouvement (l'énergie cinétique) au véhicule alors que le premier principe ne l'interdit pas.
   Ces exemples montrent la nécessité d'un principe d'évolution, en plus du principe de conservation de l'énergie, permettant de prévoir les transformations non réalisables, conformément à ce que l'on observe dans la nature.

2. Le 2nd principe stipule qu'il existe une fonction d'état des variables thermodynamiques, appelée entropie S, extensive, et dont la variation au cours d'une transformation d'un <u>système fermé</u> est :

$$\boxed{\Delta S = S_{éch.} + S_{créée}} \quad \text{avec} \quad \boxed{S_{éch.} = \sum_i \frac{Q_i}{T_{ext.,i}}} \quad \text{et} \quad \boxed{S_{créée} \geq 0}$$

   où $T_{ext.,i}$ est la température du thermostat i en contact avec le système et lui fournissant Q_i, la somme porte sur l'ensemble des thermostats (ou sources) avec lesquels le système est en contact pendant la transformation (transformation polytherme).

* Le terme d'échange est lié aux transferts thermiques. Plus généralement pour un système isolé (pour lequel en particulier $Q=0$), on a donc $S_{éch.}=0$ soit $\Delta S = S_{créée} \geq 0$; l'entropie est alors constante ou augmente au cours du temps, ce qui permet de prévoir sans ambiguïté le sens de l'évolution du système. Les seules évolutions possibles d'un système isolé sont celles pour lesquelles $\Delta S_{sys} \geq 0$.

* Si l'entropie d'un système isolé augmente lors d'une transformation ($\Delta S_{sys} > 0$), la transformation inverse ne peut pas se faire par le même chemin (car elle diminuerait) : la transformation est dite irréversible.

* On pose alors que, pour un système isolé tel que $\Delta S = S_{créée} = 0$, l'évolution est réversible.

3. Citons d'abord les énoncés historiques (les premiers) du second principe, ils posent comme principe l'impossibilité des transformations décrites question **1.** :

* Énoncé de Clausius : Il n'existe pas de processus dont le seul effet serait un transfert thermique d'une source froide à une source chaude.

  Cela ne signifie pas que les réfrigérateurs n'existent pas ! Il est bien écrit : *seul effet*.

* Énoncé de Kelvin : Il n'existe pas de moteur fonctionnant de manière cyclique qui produise du travail à partir d'un seul thermostat.

  C'est-à-dire les moteurs monothermes n'existent pas.

* Considérons $\Delta S = S_{éch.} + S_{créée}$ pour une transformation cyclique ; S étant une fonction d'état : $\Delta S = 0$, et avec $S_{créé} \geq 0$, on obtient : $\boxed{\sum_{cycle} \frac{Q_i}{T_{ext,i}} \leq 0}$

  qui constitue l'inégalité de Clausius et un autre énoncé du second principe.

* Le tout premier énoncé, celui de Carnot date de 1824, soit avant l'énoncé du premier principe, mais il n'a pas été tout de suite identifié comme un principe fondateur de la thermodynamique. Il est de ce fait souvent appelé théorème de Carnot, car démontré à partir d'un des énoncés déjà donnés : le rendement d'un moteur ditherme réversible a pour valeur la plus grande valeur possible (à température des sources fixées) des rendements des moteurs dithermes (voir la question **20.**).

Il est remarquable que tous ces énoncés soient, avec celui donné à la question **2.**, équivalents. Ils peuvent tous s'établir à partir d'un seul d'entre eux. Tous contiennent le second principe dans sa globalité, y compris les énoncés historiques très proches des problèmes concrets rencontrés lors de la fabrication des premières machines thermiques. Le caractère très concret du second principe a contraint ces premières machines bien avant son énoncé et même avant que le premier principe ne soit élaboré.

Suivant le problème posé, on peut choisir un des énoncés judicieusement pour donner une réponse plus rapide.

4. • Imaginons une évolution contraire à l'énoncé de Clausius : soit un système recevant $Q_2 > 0$ de la source froide de température T_2, puis cédant ce transfert thermique à la source chaude de température T_1, en revenant dans son état initial puisque le seul effet est le transfert thermique source froide vers la source chaude. Le système est revenu dans son état initial : $\Delta S = 0$. Il a reçu Q_2 de la source de température T_2 et $Q_1 = -Q_2$ de la source de température T_1 :

$$\Delta S_{ech} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = Q_2\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) > 0 \quad \text{car } T_2 < T_1 .$$

Il vient donc $S_{créée} = -\Delta S_{éch} < 0$: la transformation est impossible.

• Imaginons une évolution contraire à l'énoncé de Kelvin : soit un cycle au cours duquel un système reçoit un transfert thermique $Q_1 > 0$ d'une source de température T_1 et cède du travail au milieu extérieur (il reçoit donc $W < 0$). Le système décrit un cycle : $\Delta S = 0$. il ne reçoit de transfert thermique que d'une seule source : $\Delta S_{éch} = \dfrac{Q_1}{T_1} > 0$.

Il vient donc $S_{créée} = -\Delta S_{éch} < 0$: la transformation est impossible.

5. • Avec les variables T et V :

pour un GP idéal, γ indépendant de T : $\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\ln\dfrac{T_2}{T_1} + nR\ln\dfrac{V_2}{V_1}}$

le coefficient de $\ln(T_2/T_1)$ est mc_V.

On peut aussi utiliser les variables T et P :

pour un GP idéal, γ indépendant de T : $\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = \dfrac{nR\gamma}{\gamma - 1}\ln\dfrac{T_2}{T_1} - nR\ln\dfrac{P_2}{P_1}}$

le coefficient de $\ln(T_2/T_1)$ est mc_P.

• Phase condensée : en supposant $c = cste \Rightarrow \boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = mc\ln\dfrac{T_2}{T_1}}$

• Thermostat de température T_S : considérons un thermostat (ou source) de type liquide ou solide homogène, de masse M, incompressible.
Son évolution est isobare, on note Q' le transfert thermique qu'il reçoit :

$$\Delta H_S = Q' \quad \text{et} \quad \Delta H_S = M\,c\,\Delta T_S \quad \text{donc} \quad \Delta T_S = \frac{Q'}{M\,c}$$

soit $\boxed{T_S = cste}$ si $M\,c$ est très grande

L'expression de la variation d'entropie avec le modèle phase condensée : $\Delta S = M\,c \ln \frac{T_2}{T_1}$ conduit à une indétermination car $M\,c \to \infty$ et $T_2 = T_1 = T_S$

Pour exprimer sa variation d'entropie, on envisage un transfert thermique Q' réversible : $\Delta S_S = S_{ech} + S_{créée} = S_{ech} = \frac{Q'}{T_S}$

Or si la source (S) fournit Q au système, elle reçoit $Q' = -Q$ et finalement :

$$\boxed{\Delta S_S = -\frac{Q}{T_S}}$$

où Q est le transfert thermique reçu par le système en contact avec la source (S).

6. $\Delta S = S_e + S_c$; ΔS se calcule grâce aux entropies des fluides modèles et ne dépend que des états initial et final, S_e se calcule pour la transformation étudiée en considérant l'ensemble des thermostats avec lesquels le système a été en contact : $S_e = \sum_i \frac{Q_i}{T_{Si}}$, S_e dépend du chemin suivi. On en déduit S_c ou plus exactement son signe :

si $S_c > 0$ la transformation est irréversible

si $S_c = 0$ la transformation est réversible

si $S_c < 0$ la transformation est impossible (transformation interdite par le second principe).

7. * Soient 1 et 2 les deux phases considérées d'un même corps pur. À la température T et sous la pression d'équilibre correspondante $P_{éq.}(T)$, les enthalpies massiques associées sont notées $h_1(T, P = P_{éq.}(T)) = h_1(T)$ et $h_2(T)$.

Rappel : par définition, lors de la transition de phase $1 \to 2$, la variation d'enthalpie massique ou enthalpie de changement d'état est :

$$\boxed{\Delta h = h_2(T) - h_1(T) = l_{1\to 2}(T)}$$

Rq : Lors d'une transition de phase à la température T et donc sous la pression $P = P_{ext.} = cste$, $\Delta H = Q_P$, et par unité de masse :

$$\boxed{\Delta h = q_P}$$

* De même, l'entropie de changement d'état est définie par la relation :

$$\boxed{\Delta s = s_2(T) - s_1(T)}$$

* Le changement d'état étant réversible (transformation théorique) lorsqu'il s'effectue à $T = T_{ext.} = cste$ (et corrélativement à $P = P_{ext.} = cste$), le 2nd principe s'écrit entre les deux états :

$\Delta S = S_{éch.} + S_{créée}$ avec $S_{éch.} = \dfrac{Q_P}{T_{ext.}} = \dfrac{Q_P}{T}$ et $S_{créée} = 0$; par unité de masse :

$$\Delta s = \frac{q_P}{T}$$

d'où la relation $\boxed{\Delta s = \dfrac{\Delta h}{T} = \dfrac{l_{1\to 2}(T)}{T}}$

8. L'état macroscopique d'un système peut être réalisé par de nombreux états microscopiques. Celui qui est observé est le macro-état le plus probable, correspondant à un nombre maximal de micro-états, tous équiprobables.
L'entropie statistique d'un macro-état est définie par la formule de Boltzmann :

$$\boxed{S = k_B \ln \Omega}$$

où Ω est le nombre de micro-états correspondant à un macro-état donné.
- si Ω est maximal, alors S est maximale ; pour un système isolé, l'entropie est maximale à l'équilibre.
- si deux sous-systèmes séparés correspondent à des nombres de micro-états Ω_1 et Ω_2, leur réunion conduit à un nombre de micro-états $\Omega = \Omega_1\Omega_2$, soit $S = k \ln(\Omega_1\Omega_2) = S_1 + S_2$; on retrouve le fait que l'entropie est extensive.

Voir la question **42.** pour une analogie et un exemple.

9. L'entropie est définie à une constante additive près (le 2nd principe n'évoque que les variations d'entropie). Le 3e principe de la thermodynamique (ou principe de Nernst) fixe cette constante de la manière suivante : « À une température de 0 kelvin, l'entropie d'un corps pur cristallisé est nulle ». Ceci permet de donner des tables d'entropie utiles en thermochimie.
Ce principe est en accord avec $S = k_B \ln \Omega$ puisque alors $\Omega = 1$.

■ Loi de Laplace

10. Pour une transformation mécaniquement réversible d'un gaz, la seule cause d'irréversibilité restante est un déséquilibre de température lors d'un échange de transfert thermique. Si la transformation est adiabatique (pas d'échange de transfert thermique) ce cas d'irréversibilité est donc sans objet.
Au cours d'une transformation adiabatique ($S_{éch.} = 0$) et réversible ($S_{créée} = 0$), on a conservation de l'entropie soit $\Delta S = 0$ (isentropique). Une adiabatique réversible est donc bien isentropique.
En revanche, on peut parfaitement avoir $\Delta S = 0$ (isentropique) avec $S_{créée} > 0$ (irréversible) et $S_{éch.} < 0$ (non adiabatique). Un exemple simple (vu en 2e année) est celui d'une tige, siège d'une diffusion thermique, en régime stationnaire, placée entre deux sources.

11. Une adiabatique réversible est isentropique : $\Delta S = 0$.

Or pour un GPI : $\Delta S = S_2 - S_1 = \dfrac{nR}{\gamma - 1} \ln \dfrac{T_2}{T_1} + nR \ln \dfrac{V_2}{V_1}$

Donc $\dfrac{nR}{\gamma - 1} \ln T + nR \ln V = \text{cste} \Rightarrow nR\left(\ln T + (\gamma - 1) \ln V\right) = nR \ln(TV^{(\gamma-1)}) = \text{cste}$

On obtient une première expression de la loi de Laplace :

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{cste}}$$

dans laquelle on peut remplacer T grâce à l'équation $PV = nRT$: $T = \dfrac{PV}{\text{cste}}$

Il vient $PVV^{\gamma-1} = \text{cste}$, soit l'expression la plus simple, à mémoriser :

$$\boxed{PV^{\gamma} = \text{cste}}$$ loi de Laplace (adiabatique réversible et GP idéal)

On peut enfin, toujours avec l'équation d'état, remplacer V par $TP^{-1} \times \text{cste}$

Il vient $PT^{\gamma}P^{-\gamma} = \text{cste} \Rightarrow \boxed{P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cste}}$

Application : Calculons l'élévation de température d'air, initialement à $T_1 = 273$ K et comprimé adiabatiquement et réversiblement dans un rapport volumétrique 10. On utilise un modèle GPI diatomique pour l'air ($\gamma = 1,4$) et la loi de Laplace :

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

A.N. : $T_2 = 273\ (10)^{0,4} = 686$ K, on est donc passé pour l'air de 0°C à 413°C ! Les transformations adiabatiques s'accompagnent de très fortes variations de température.

Transformations d'un gaz

12. Compressions isotherme ou adiabatique d'un GPI

a) Lorsqu'on comprime, sans précautions particulières, un gaz ($V_f < V_i$), il a tendance à s'échauffer. Pour lui permettre d'évoluer à température constante, il faut prévoir un contact avec un thermostat extérieur et des parois « perméables à la chaleur » ou diathermanes (avec une conductivité thermique très élevée). Pour qu'il soit en équilibre thermique à tout instant avec le thermostat, l'évolution doit être très lente, la transformation est nécessairement quasi statique.
Pour une transformation mécaniquement réversible d'un gaz, la seule cause d'irréversibilité restante est un déséquilibre de température lors d'un échange de transfert thermique. Ici l'équilibre thermique est imposé par définition, la transformation est *a priori* réversible.
Pour la transformation $\Delta U_{(iso.)} = 0$ car pour un gaz parfait $U = U(T)$.
Le 1er principe $\Delta U_{(iso.)} = Q_{iso.} + W_{iso.} = 0$ donne $Q_{iso.} = -W_{iso.} = \int_{iso} PdV$

d'où $Q_{iso.} = \int_{iso} PV\frac{dV}{V} = nRT_i\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V} \Rightarrow \boxed{Q_{iso.} = nRT_i \ln\frac{V_f}{V_i}}$

On constate que $Q_{iso.} < 0$ puisque $V_f < V_i$. Le travail reçu par le gaz de la part de l'opérateur qui enfonce le piston est entièrement cédé sous forme de transfert thermique au thermostat.

b) Cette fois, les parois doivent empêcher les transferts thermiques, elles doivent être « imperméables à la chaleur » ou athermanes (avec une très faible conductivité thermique) ; le thermostat est ici inutile, et le milieu extérieur est indifférent. Comme il a été dit à la question **10.**, la transformation est adiabatique réversible, en considérant le GP comme idéal, on peut utiliser la loi de Laplace.

$\left.\begin{array}{l} PV^\gamma = cste \\ PV = nRT \end{array}\right\} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cste$ après avoir effectué le rapport pour éliminer P

d'où $T_f = T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1}$ et donc $\boxed{\Delta T_{adia.} = T_i\left(\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} - 1\right)}$

On constate $\Delta T_{adia.} = T_f - T_i > 0$, la compression adiabatique conduit à une augmentation de la température du gaz.

Le travail reçu par le gaz s'obtient simplement avec le premier principe $\Delta U_{(adia.)} = W_{adia.}$, car $Q_{adia.} = 0$. Pour un GPI : $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}\Delta T$, d'où :

$$\boxed{W_{adib.} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_i) = \frac{P_fV_f - P_iV_i}{\gamma-1}}$$

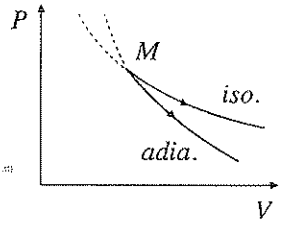
13. Pour une détente isotherme $PV = cste$

$\Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0$, d'où la pente $a_{iso.} = \left.\frac{dP}{dV}\right|_{iso.} = -\frac{P}{V}$

Pour une détente adiabatique réversible $PV^\gamma = cste$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0,$$

d'où la pente $a_{adia.} = \left.\frac{dP}{dV}\right|_{adia.} = -\gamma\frac{P}{V}$



Les deux pentes au point M sont négatives (à partir du point M, lorsque la pression diminue, le volume augmente) et en valeur absolue :

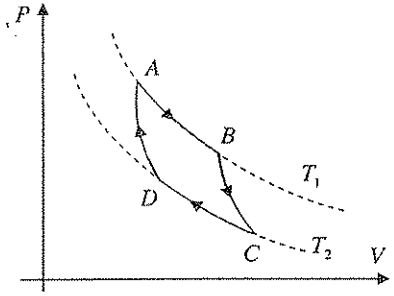
$$\boxed{|a_{adia.}| = \gamma|a_{iso.}|} \text{ avec toujours } \gamma > 1$$

14. Cycle de Carnot

a) Les transformations sont réversibles, lors de l'échange avec un des thermostats, le système est donc nécessairement en équilibre thermique avec ce thermostat : la transformation est isotherme réversible. Pour décrire un cycle, le système doit

passer régulièrement de T_1 à T_2 et inversement ce qui ne peut pas se faire lors d'un contact avec un des deux thermostats, car alors l'évolution serait isotherme. Le changement de température doit donc se produire sans échanges thermiques, puisque le cycle est ditherme : il s'agit de transformations adiabatiques réversibles.
La nature du cycle est imposée, il n'existe qu'*un seul cycle ditherme réversible*, on l'appelle cycle de Carnot.

b) Les équations des isothermes et adiabatiques réversibles des GPI sont connues, on peut les représenter dans le diagramme de Clapeyron, en respectant les valeurs relatives des pentes aux points d'intersection.



Les transformations étant réversibles, les équations des courbes sont valables pour les deux sens de parcours. Le cycle représenté ci-dessus est le cycle moteur.

c) Le transfert thermique reçu lors de l'isotherme à la température T_1 est (voir le calcul à la question **12.a)**) : $Q_1 = nRT_1 \ln \dfrac{V_B}{V_A} > 0$ (sens $A \to B$ pour le cycle moteur) et sur CD : $Q_2 = nRT_2 \ln \dfrac{V_D}{V_C} < 0$.

d) Adiabatique réversible DA et GPI $\Rightarrow$ $T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$
Adiabatique réversible BC et GPI $\Rightarrow$ $T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$
Donc : $\dfrac{V_B}{V_A} = \dfrac{V_C}{V_D}$ ce qui, remplacé dans les expressions de Q_1 et Q_2 donne :

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0}$$ égalité de Clausius pour le cycle de Carnot d'un GPI.

La relation est la même pour un cycle parcouru dans l'autre sens car les courbes sont les mêmes, seuls les signes des transferts thermiques sont échangés.
On retrouve dans le cas particulier d'un cycle réversible ($\Delta S = 0$ et $S_c = 0$) la relation $S_{éch} = 0$, démontrée pour un système fluide GPI.

e) Le premier principe appliqué sur le cycle complet donne :
$\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow W = -Q_1 - Q_2 < 0$ car le cycle est moteur.

Le rendement est $r = \dfrac{|W|}{Q_1} = \dfrac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \dfrac{Q_2}{Q_1}$, et avec l'égalité de Clausius :

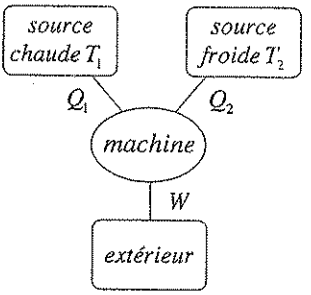
$$\boxed{r = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

rendement du moteur de Carnot pour un GPI.

Le rendement, inférieur à 1, ne dépend que des températures des deux thermostats.

Machines thermiques dithermes

15. Le fluide d'une machine thermique ditherme reçoit, au cours d'un cycle (ou un nombre entier de cycles), des transferts thermiques Q_1 et Q_2 de deux sources thermiques de températures respectives T_1 (source chaude) et T_2 (source froide, avec $T_1 > T_2$) ainsi qu'un travail W du milieu extérieur. Pour l'instant, les signes de Q_1, Q_2 et W ne sont pas fixés.



* le 1er principe pour le fluide seul s'écrit pour un cycle :

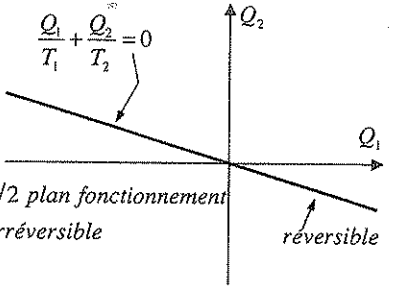
$$\Delta U_{fluide} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{W + Q_1 + Q_2 = 0} \quad (1)$$

* le 2nd principe pour le fluide seul s'écrit pour un cycle :

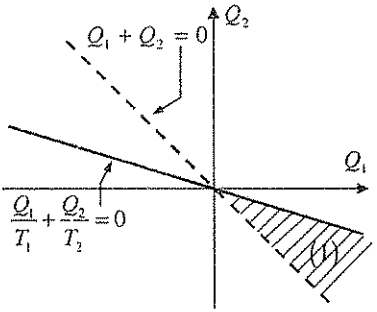
$$\Delta S_{fluide} = 0 \quad \text{soit} \quad S_{éch.} = -S_{créée} \quad \text{d'où puisque } S_{créée} \geq 0, \quad \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0} \quad (2)$$

Cette dernière relation (qui ne préjuge pas des signes de Q_1 et Q_2) est l'inégalité de Clausius.

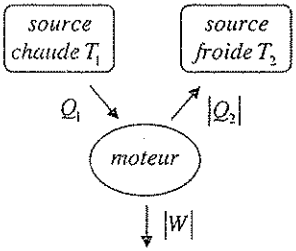
16. L'inégalité de Clausius $\dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} \leq 0 \Rightarrow Q_2 \leq -\dfrac{T_2}{T_1} Q_1$ ce qui fixe dans le diagramme (Q_2, Q_1), appelé diagramme de Raveau, la zone de fonctionnement des machines dithermes : le demi-plan en dessous de la droite de séparation. Cette droite de séparation (correspondant au fonctionnement réversible) a une pente, en valeur absolue inférieure à 1.



17. Le but du moteur ditherme est de fournir du travail, soit $W < 0$ et donc $Q_1 + Q_2 = -W > 0$. Ce qui correspond au demi-plan au-dessus de la droite $Q_2 = -Q_1$ (pente 1 en valeur absolue). Le diagramme de Raveau indique alors la zone de fonctionnement des moteurs dithermes.
Il s'agit de la zone (I) hachurée sur le diagramme.



On en déduit que, nécessairement, pour un moteur $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$: le fluide reçoit du transfert thermique de la source chaude, il en transforme une partie en travail et restitue le reste à la source froide. Ceci est représenté symboliquement sur le schéma avec le sens effectif des échanges.



Le rendement du moteur est le rapport du travail $-W > 0$ produit (la grandeur intéressante) au transfert thermique $Q_1 > 0$ reçu par la source chaude (la grandeur qui coûte) :

$$r = -\frac{W}{Q_1}$$

La relation (1) $W + Q_1 + Q_2 = 0$ donne directement $r = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$

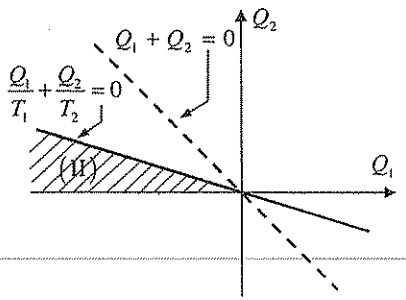
On a bien $r < 1$ car $Q_2/Q_1 < 0$

La relation (2) $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$ conduit alors à l'inégalité $\boxed{r \leq r_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$

Cette inégalité signifie que le rendement d'un moteur ditherme ne peut être supérieur au rendement d'un moteur ditherme fonctionnant entre les mêmes sources et de façon réversible. Comme il n'existe qu'un seul cycle ditherme réversible, le cycle de Carnot, on en déduit le théorème de Carnot :

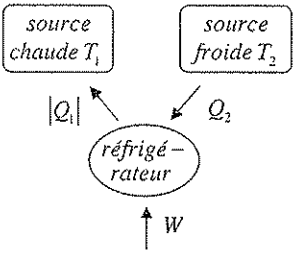
$$\boxed{r \leq r_{Carnot}}$$

18. Le but d'un réfrigérateur est de prendre du transfert thermique à la source froide, soit $Q_2 > 0$. Le diagramme de Raveau de la question **16.** montre que nécessairement il faut alors $Q_1 < 0$ et que le fonctionnement ne peut avoir lieu que dans la zone (II).



Chaque point de la zone (II) est en dessous de la droite $Q_1 + Q_2 = 0$, ce qui correspond à $Q_1 + Q_2 < 0$ et donc

$W > 0$. Le fonctionnement du réfrigérateur ditherme n'est possible que si le fluide qui décrit les cycles reçoit du travail. Ceci est bien sûr en accord avec l'énoncé de Clausius du second principe. Le fonctionnement du réfrigérateur est représenté symboliquement sur le schéma ci-contre avec le sens effectif des échanges.



Remarquer que $|Q_1| = Q_2 + W$, le système transfère à la source chaude non seulement le transfert thermique pris à la source froide mais aussi l'équivalent du travail reçu.

Le but du réfrigérateur est de prendre à la source froide Q_2 le plus grand possible, à coût (W) égal. On définit donc l'efficacité du réfrigérateur par :

$$e = \frac{Q_2}{W} \overset{(1)}{=} \frac{1}{-\frac{Q_1}{Q_2} - 1} \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{e \leq e_{max} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}}$$

L'efficacité maximale est obtenue pour un fonctionnement réversible ; e_{max} peut être supérieure à 1, inférieure à 1, ou égale à 1.

AN : $T_1 = 20$ °C et $T_2 = 3$ °C $\Rightarrow$ $\underline{e \leq 16,2}$, d'autant plus efficace à T_1 fixée que T_2 est proche de T_1, ou encore à T_2 imposée, que T_1 est basse.

19. Le but d'une pompe à chaleur est de fournir du transfert thermique à la source chaude, $Q_1 < 0$. Le diagramme de Raveau de la question **16.** montre que ceci est possible aussi bien avec $Q_2 > 0$ qu'avec $Q_2 < 0$. En effet le transfert à la source chaude peut se faire avec une simple machine monotherme, transformant le travail reçu en transfert thermique. L'idée de la pompe à chaleur ditherme est d'utiliser le travail pour prendre du transfert thermique à la source froide et de restituer l'ensemble $W + Q_2$ à la source chaude. On impose donc $Q_2 > 0$ et on en déduit, comme dans le fonctionnement réfrigérateur, $W > 0$.

Dans une pompe à chaleur utilisée pour le chauffage d'une habitation, le travail fourni sert à prendre du transfert thermique par exemple à l'atmosphère extérieure (considérée comme une source « gratuite ») et à céder du transfert thermique à l'eau du chauffage central (source chaude). On cherche à avoir $|Q_1|$ le plus grand possible à dépense, W, égale.

L'efficacité est alors définie par :

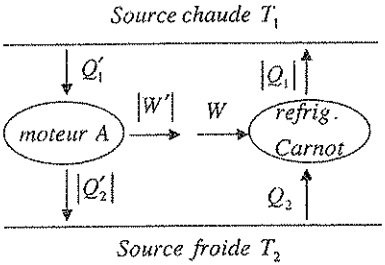
$$e = \frac{-Q_1}{W} \overset{(1)}{=} \frac{1}{1 + \frac{Q_2}{Q_1}} \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_1}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{e \leq e_{max} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}}$$

AN : $T_1 = 60$ °C et $T_2 = 10$ °C $\Rightarrow$ $\underline{e \leq 6,7}$, d'autant plus efficace à T_1 imposée que T_2 est proche de T_1.

L'efficacité maximale d'une pompe à chaleur est toujours supérieure à 1 car :

$$|Q_1| = W + Q_2 > W$$

20. Une première démonstration a été faite à la question **17.**. On établit ici le théorème de Carnot à partir de l'énoncé de Clausius. Rappel : le cycle de Carnot est le cycle ditherme réversible. Il peut être parcouru dans les deux sens, moteur ou réfrigérateur, les échanges étant alors de signe opposé et de même valeur absolue.
Supposons qu'il existe un moteur ditherme A dont le rendement est supérieur au rendement du moteur de Carnot fonctionnant entre les deux mêmes sources, et utilisons le travail fourni par ce moteur pour alimenter un réfrigérateur de Carnot, toujours entre les deux mêmes sources.
Le schéma de fonctionnement de l'ensemble est :



Avec $|W'| = W$. L'hypothèse $r_A > r_C$ entraine : $Q_1' = \dfrac{|W'|}{r_A} = \dfrac{W}{r_A} < \dfrac{W}{r_C}$, or le cycle de Carnot étant réversible, les grandeurs échangées lors du fonctionnement réfrigérateur sont liées par la même relation que pour le moteur (en faisant attention aux signes). On a donc : $\dfrac{W}{r_C} = |Q_1|$. L'hypothèse $r_A > r_C \Rightarrow Q_1' < |Q_1|$ (1)

De plus pour l'ensemble :

$$\Delta U = 0 = Q_1' + Q_1 + Q_2' + Q_2 + W + W' = Q_1' + Q_1 + Q_2' + Q_2$$

$$Q_1' - |Q_1| - |Q_2'| + Q_2 = 0$$

Soit $|Q_1| - Q_1' = Q_2 - |Q_2'| > 0$ d'après l'inégalité (1)
L'action globale de l'ensemble moteur A et réfrigérateur de Carnot est donc de prendre un transfert $Q_2 - |Q_2'| > 0$ à la source froide et de fournir $|Q_1| - Q_1' > 0$ à la source chaude, sans aucun autre échange.
Ceci est contraire à l'énoncé de Clausius du second principe, l'hypothèse de départ est incorrecte, donc $r_A \leq r_C$.
Ce qui établit le théorème de Carnot : le rendement du moteur de Carnot est maximal à températures des sources données.

De plus la même démonstration, avec deux fluides quelconques décrivant chacun un cycle de Carnot, faite deux fois en échangeant les rôles des deux systèmes, montre que le rendement du moteur de Carnot est indépendant de la nature du fluide.
On a établi à la question **14.** l'expression du rendement pour un GPI, il vient quel que soit le fluide :

$$\boxed{r_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Le rendement du moteur de Carnot étant indépendant de la nature du fluide décrivant le cycle, il constitue une grandeur thermométrique définissant une échelle de température. Les températures ainsi définies sont les températures thermodynamiques, elles s'identifient bien sûr aux températures des gaz parfaits.
Le théorème de Carnot démontré à partir d'un énoncé historique, conduit à l'inégalité de Clausius, permettant d'introduire naturellement le concept d'entropie dont l'existence a été posée au début du chapitre.

21. Dans un « réfrigérateur » de la vie courante, la source froide est l'intérieur du « réfrigérateur » et la source chaude l'air de la pièce dans laquelle il est installé. Le réfrigérateur au sens thermodynamique est le dispositif permettant à un fluide de décrire des cycles. La transformation nécessitant un apport de chaleur coïncide avec le passage du fluide dans une canalisation en contact thermique avec l'intérieur du « réfrigérateur ». Le rejet de transfert thermique dans la pièce se fait lors de la circulation du fluide dans les canalisations peintes en noir à l'arrière du « réfrigérateur ». Le travail, pour les réfrigérateurs à compresseur, est fourni sous forme de travail mécanique (un moteur électrique convertit le travail électrique en travail mécanique fourni au compresseur).
Le but du réfrigérateur est de refroidir les aliments se trouvant à l'intérieur, ce qui finit par arriver au bout d'un grand nombre de cycles. La source froide n'a donc pas une température constante ! On parle de pseudo-source. Les calculs conduits en considérant de véritables thermostats peuvent être encore appliqués, en considérant que sur un cycle les températures des sources sont restées quasiment constantes et qu'elles n'évoluent qu'au bout d'un grand nombre de cycles. Les équations traduisant les deux principes deviennent en considérant les quantités échangées comme infiniment petites sur un cycle : $\begin{cases} \delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0 \\ \dfrac{\delta Q_1}{T_1} + \dfrac{\delta Q_2}{T_2} \leq 0 \end{cases}$

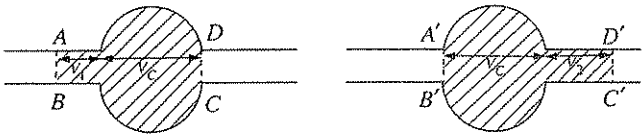
Fluide en écoulement à travers une machine quelconque

22. On considère un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine. Stationnaire signifie qu'en tout point les variables d'état sont indépendantes du temps. Le terme machine est à considérer au sens large : compresseur, turbine, chambre de combustion, détendeur, paroi poreuse, simple étranglement...

Le régime est stationnaire, l'état du fluide avant la machine est uniforme P_1, T_1 et vitesse c_1, et après la machine P_2, T_2 et vitesse c_2.

On note D le débit molaire et $n = D\,\Delta t$ le nombre de moles de fluide traversant pendant Δt. Le volume de fluide présent dans la machine à l'instant t est appelé le volume de contrôle. On note enfin Q^* et W^* le transfert thermique et le travail fournis par la machine pendant Δt au fluide présent dans le volume de contrôle.

Le fluide étant en écoulement, le système qui subit la transformation (le fluide présent dans la machine à tout instant) est un système ouvert, on ne peut pas lui appliquer les principes de la thermodynamique. Il faut considérer un système fermé que l'on suit dans son mouvement. Soit $V = ABCD$, un volume à l'instant t (de part et d'autre de la machine) renfermant une masse donnée de fluide. À un instant ultérieur $t' = t + \Delta t$, cette même quantité de fluide (constituée des mêmes molécules) occupe un volume différent $V' = A'B'C'D'$; à cause de la transformation thermodynamique.
Soit V_C le volume commun, alors $V = V_1 + V_C$ et $V' = V_C + V_2$. Sur les schémas ci-dessous V_C est le volume de contrôle, V_1 contient les n moles qui traverseront pendant dt et que l'on retrouve dans V_2 à $t + \Delta t$.



à l'instant t à l'instant $t + \Delta t$

Le 1er principe généralisé appliqué au système défini entre les deux instants t (initial) et t' (final) s'écrit :

$$\Delta(U + E_c + E_{p,ext.}) = Q + W \quad \text{bilan temporel}$$

– avec $\Delta U = U_f - U_i = \big(U_2 + U_C(t')\big) - \big(U_1 + U_C(t)\big) = U_2 - U_1$
car en régime stationnaire, l'énergie interne de la partie commune est inchangée, en tout point, on a le même nombre de moles dans le même état thermodynamique (même si ce ne sont pas les mêmes molécules) :

$$U_C(t') = U_C(t)$$

– de même pour $\Delta E_c + \Delta E_{p,ext.} = E_{c2} - E_{c1} + E_{p,ext2} + E_{p,ext1}$ où E_{c2} représente l'énergie cinétique des moles de fluide dans V_2 et E_{c1} celle dans V_1, car en régime stationnaire l'énergie cinétique dans le volume commun est inchangée. Idem pour $E_{p,ext}$.

– par ailleurs le plus souvent le transfert thermique $Q = Q^*$ car le système fermé ne reçoit du transfert thermique que de la machine (avec l'hypothèse de canalisations calorifugées et pas de conduction à travers les « parois fictives » AB et CD).

– pour le travail W reçu par le système fermé, il faut considérer le travail W^* fourni par la machine, mais aussi celui des forces de pression sur les « parois » AB et CD qui vaut $P_1V_1 - P_2V_2$; en effet, à gauche où la pression est P_1, le système reçoit effectivement du travail (il est poussé par le gaz en amont et

déplacé de V_1), et à droite où la pression est P_2, c'est le système qui doit fournir du travail (pour pousser le gaz en aval et le déplacer de V_2).

$$W = P_1V_1 - P_2V_2 + W^*$$

Finalement : $(U_2 + P_2V_2) - (U_1 + P_1V_1) + E_{c2} - E_{c1} + E_{p,ext2} - E_{p,ext2} = Q + W^*$
représentant un bilan sur la quantité de fluide passant, pendant $t' - t$, de l'état 1 à l'état 2. Ce bilan est indépendant de la quantité considérée, soit

$$\boxed{\Delta(H + E_c + E_{p,ext}) = Q + W^*}$$ pour le fluide ayant traversé, bilan spatial.

Si on considère le bilan pour $n = D\,\Delta t$ ayant traversé, avec les grandeurs molaires :

$$\boxed{D\,\Delta t\left(H_{m2} - H_{m1} + \frac{1}{2}Mc_2^2 - \frac{1}{2}Mc_1^2 + E_{Pm\,ext2} - E_{Pm\,ext1}\right) = Q + W^*}$$

Et enfin avec les grandeurs massiques :

$$\boxed{h_2 - h_1 + e_{C2} - e_{C1} + e_{Pext2} - e_{Pext1} = q + w^*}$$

On appelle parfois cette expression premier principe industriel.
Le travail w^* fourni par la machine à l'unité de masse (à ne pas confondre avec le travail reçu par le système fermé de la démonstration) est parfois appelé travail *utile* (noté w_u) ou travail indiqué (noté w_i).

Applications directes du cours

Transformations d'un gaz

23. Cette transformation, monotherme, avec $PV^a = cste$ est intermédiaire (puisque $1 < a < \gamma$) entre la transformation isotherme et la transformation adiabatique. On peut prévoir que le travail reçu par le gaz est en partie évacué sous forme de transfert thermique au thermostat (parois de conductivité thermique moyenne) comme lors de l'isotherme, mais avec $|Q_a| < |Q_{iso.}|$, et en partie sert à échauffer le gaz comme lors de l'adiabatique, mais avec $\Delta T_a < \Delta T_{adia.}$. Cela conduit bien à $\Delta T_a > 0$ et $Q_a < 0$: la température du système augmente alors même qu'il fournit un transfert thermique à l'extérieur ! Cela n'a rien de paradoxal puisque l'origine de l'énergie réside dans le travail apporté par l'opérateur qui comprime le gaz (le calcul est proposé à la question **55.**).
Le déséquilibre thermique avec le thermostat pendant l'évolution rend la transformation irréversible.
Il faut bien noter que les transformations isotherme ($a = 1$) et adiabatique ($a = \gamma$) apparaissent comme des cas limites de transformations réelles ; c'est pourquoi, ce sont aussi les seules qui, effectuées de manière mécaniquement réversible (quasi statiques et sans frottement solide), apparaissent réversibles (les calculs d'entropie sont proposés à la question **25.**).

À noter également que dans les autres cas $(1 < a < \gamma)$, l'état final (qui est un état d'équilibre interne) n'est pas en équilibre avec l'extérieur puisque la température du gaz, qui a cru, est différente de celle du thermostat, restée à T_i.

Applications du second principe

24. Irréversibilité des transformations isochore et isobare

a) La transformation envisagée est un échauffement isochore par contact avec une source de température plus élevée que celle du gaz, et donc pour le gaz $T_f > T_i$.

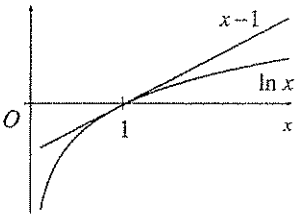
Pour le fluide modèle GPI, $\Delta S = \dfrac{nR}{\gamma-1}\ln\dfrac{T_2}{T_1} + nR\ln\dfrac{V_2}{V_1}$

$$\text{et donc } \Delta S = S_f - S_i \;\Rightarrow\; \Delta S = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{T_f}{T_i} > 0$$

$$S_{éch.} = \frac{Q}{T_{ext}} = \frac{Q_V}{T_f} = \frac{nR}{\gamma-1}\left(1-\frac{T_i}{T_f}\right) > 0, \text{ car } T_f > T_i$$

$$\text{et } S_{créée} = \Delta S - S_{éch.} = \frac{nR}{\gamma-1}\left(\frac{T_i}{T_f} - 1 - \ln\frac{T_i}{T_f}\right) > 0$$

En effet, en posant $x = T_i/T_f < 1$, il apparaît que $x - 1 \geq \ln x$; ce résultat est vrai pour $x < 1$ et $x > 1$, et donc également pour un refroidissement isochore.
La transformation est bien irréversible comme on pouvait le prévoir du fait de la mise en contact de deux systèmes de température différente.



b) La transformation envisagée est un refroidissement isobare par contact avec une source de température plus basse que le gaz, et donc pour le gaz $T_f < T_i$.

Pour le fluide modèle GPI, $\Delta S = \dfrac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\dfrac{T_2}{T_1} - nR\ln\dfrac{P_2}{P_1} \;\Rightarrow\; \Delta S = \dfrac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\dfrac{T_f}{T_i} < 0$

$$S_{éch.} = \frac{Q_P}{T_f} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\left(1-\frac{T_i}{T_f}\right) < 0, \text{ car } T_f < T_i$$

$$\text{et } S_{créée} = \Delta S - S_{éch.} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{T_i}{T_f} - 1 - \ln\frac{T_i}{T_f}\right) > 0$$

En effet, en posant $x = T_i/T_f > 1$ ici, on a toujours $x - 1 \geq \ln x$; ce résultat est vrai également pour un échauffement isobare.
La transformation est bien irréversible comme on pouvait le prévoir du fait de la mise en contact de deux systèmes de température différente.

c) Les transformations monothermes isochore et isobare sont irréversibles.

25. Réversibilité des transformations isotherme et adiabatique

a) La transformation envisagée est une compression isotherme à température T_i du volume V_i au volume $V_f < V_i$.

Pour le fluide modèle GPI, $\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$

$$\text{et donc } \Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} < 0$$

$$S_{éch.} = \frac{Q_{iso.}}{T_i} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} < 0 \text{ , cf. calcul à la question } \mathbf{12.a)}$$

$$\text{et } S_{créée} = \Delta S - S_{éch.} = 0$$

Cette compression isotherme est bien réversible comme prévu.
Il en est de même lors d'une détente isotherme.

b) La transformation envisagée est une compression adiabatique au cours de laquelle le volume passe de V_i à $V_f < V_i$ et la température de T_i à $T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma - 1} > T_i$.

Pour le fluide GPI, $\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\ln \frac{T_2}{T_1} + (\gamma - 1) \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma - 1}}{T_1 V_1^{\gamma - 1}}$$

Or les variables T et V sont reliées par $TV^{\gamma - 1} = cste$,

$$\text{et donc } \Delta S = 0$$

$S_{éch.} = 0$ car le gaz n'échange aucun transfert thermique

$$\text{et } S_{créée} = \Delta S - S_{éch.} = 0$$

Cette compression adiabatique est bien réversible comme prévu.
Il en est de même lors d'une détente adiabatique.
Le résultat intermédiaire $\Delta S = 0$ montre qu'une transformation adiabatique réversible est isentropique.

c) Les transformations isothermes et adiabatiques réalisées de manière mécaniquement réversibles, sont réversibles.

26. Le lac est un thermostat (sa température ne varie pas) ; la température finale du morceau de fer est T_L, celle du lac.

Pour le fer (phase condensée), la variation d'entropie se calcule avec le modèle phase condensée et c = cste :

$$\Delta S_{Fe} = mc \ln \frac{T_L}{T_{Fe}} = -1{,}7 \text{ kJ.K}^{-1}$$

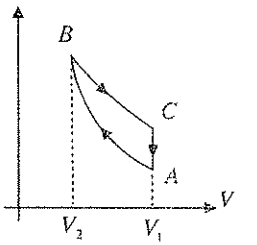
Cette variation négative de l'entropie n'a pas à être interprétée car le morceau de fer n'est pas isolé.

L'entropie échangée est $S_{éch.} = \frac{Q_{Fe}}{T_L} = \frac{mc(T_L - T_{Fe})}{T_L} = -2{,}6 \text{ kJ.K}^{-1}$, car la transformation est monotherme.

L'entropie créée se calcule par différence : $\underline{S_{créée} = \Delta S_{Fe} - S_{éch.} = 0{,}86 \text{ kJ.K}^{-1}}$

L'irréversibilité de la transformation attestée par la création d'entropie, $S_{créée} > 0$, a pour cause le déséquilibre thermique entre les deux corps (le fer et le lac) de températures différentes et mis en contact.

27. Une représentation de l'allure des transformations, autorisée dans le cas quasi statique, permet de mieux apprécier les valeurs relatives des variables d'état.



a) $A \begin{vmatrix} V_1 = 6{,}0 \text{ L} \\ T_1 = 300 \text{ K} \\ P_1 \end{vmatrix} \rightarrow B \begin{vmatrix} V_2 = 1{,}2 \text{ L} \\ T_2 \\ P_2 \end{vmatrix} \rightarrow C \begin{vmatrix} V_3 = V_1 \\ T_3 = T_2 \\ P_3 \end{vmatrix}$

$n = \frac{5{,}6}{28} = 0{,}20 \text{ mol}$; $P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = 8{,}3.10^4 \text{ Pa}$

AB est une adiabatique réversible et le gaz est parfait idéal :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\gamma-1)} = 571 \text{K} \quad \text{et} \quad P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 7{,}9.10^5 \text{ Pa}$$

CA est une isochore : $P_3 = P_1 \frac{T_3}{T_1} = 1{,}6.10^5 \text{ Pa}$

b) Le cycle est moteur, le gaz reçoit $W < 0$, $W = W_{AB} + W_{BC}$ où W_{AB} est reçu lors de l'adiabatique réversible et W_{BC} lors de l'isotherme (voir calculs question **12.**)

$$\boxed{W = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Le travail fourni par le gaz est $-W$.

AN : $-W = +4{,}0.10^2$ J, le travail fourni par le moteur est bien positif.

c) *AB* adiabatique réversible est isentropique : $S_B - S_A = 0$

BC isotherme : $S_C - S_B = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_2} + nR \ln \frac{V_1}{V_2} = nR \ln \frac{V_1}{V_2} = 2{,}7 \text{ J.K}^{-1}$

CA isochore : $S_A - S_C = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2} + 0 = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = -2{,}7 \text{ J.K}^{-1}$

Sur le cycle on a évidemment $\Delta S = 0$, les transformations sont réversibles donc $S_c = 0$ et $\Delta S = S_e$.

d) Le cycle est réversible, ce n'est pas un cycle de Carnot, donc il n'est pas ditherme.

L'isochore CA nécessite une infinité de sources de températures décroissantes pour être réversible.

28. a) L'ensemble des deux gaz subit une transformation isobare et adiabatique, donc : $\Delta H = Q = 0$, et comme l'enthalpie est extensive :

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = \frac{n_1 R\gamma}{\gamma - 1}(T_f - T_1) + \frac{n_2 R\gamma}{\gamma - 1}(T_f - T_2)$$

car les deux gaz sont parfaits et ont même γ, d'où $\boxed{T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}}$

Rq : La transformation de chaque gaz n'est pas isobare : $\Delta H_1 \neq Q_1$ et $\Delta H_2 \neq Q_2$

b) L'expression de l'entropie des GP donne pour chaque gaz :

$$\Delta S_1 = \frac{n_1 R\gamma}{\gamma - 1}\ln\frac{T_f}{T_1} - n_1 R \ln\frac{P_1}{P_0} \quad \text{et} \quad \Delta S_2 = \frac{n_2 R\gamma}{\gamma - 1}\ln\frac{T_f}{T_2} - n_2 R \ln\frac{P_2}{P_0}$$

Avec $P_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} P_0$ et $P_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} P_0$ puisque le mélange final est un gaz parfait et que les pressions sont proportionnelles aux nombres de moles.

$$\boxed{\Delta S = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\ln\frac{T_f^{n_1+n_2}}{T_1^{n_1} T_2^{n_2}} - R \ln\frac{n_1^{n_1} n_2^{n_2}}{(n_1 + n_2)^{n_1+n_2}}}$$

AN : $T_f = 367\ \text{K}$; $\Delta S = 166\ \text{J.K}^{-1}$. Comme $S_e = 0 \Rightarrow S_c = \Delta S > 0$, le mélange est bien irréversible (diffusion, déséquilibre thermique).

29. Mélange de glace et d'eau liquide

Pour prévoir l'état final on calcule les variations d'enthalpie maximales :

– pour le refroidissement de l'eau jusqu'à 0 °C : $m_e c_e (T_0 - T_e) = -1{,}9.10^3$ J

– pour l'échauffement de la glace jusqu'à 0 °C : $m_g c_g (T_0 - T_g) = 2{,}9.10^3$ J

Il y a donc possibilité de transformer de l'eau en glace ; sa masse x est alors donnée par

$$m_e c_e (T_0 - T_e) - x l_f + m_g c_g (T_0 - T_g) = 0 \Rightarrow x = 3{,}0\ \text{g}$$

Le résultat à l'équilibre est un mélange de 63 g de glace (dite fondante) et de 27 g d'eau liquide à température de 0 °C (il y a donc davantage de glace dans l'état final que dans l'état initial !).

La variation d'entropie se calcule séparément pour le refroidissement de l'eau liquide, le réchauffement de la glace et la formation de glace (la masse x d'eau à 0°C se transformant en glace à 0°C se comporte comme un thermostat) :

$$\Delta S = m_e c_e \ln\frac{T_0}{T_e} + m_g c_g \ln\frac{T_0}{T_g} + \frac{-x l_f}{T_0}$$

L'entropie échangée est nulle car le système est thermiquement isolé, donc :

$$S_c = \Delta S = 11{,}1 - 10{,}4 = 0{,}7\ \text{J.K}^{-1} > 0$$

La transformation est inéversible comme on pouvait le prévoir.

30. On calcule tout d'abord l'entropie massique de la vapeur saturante à la pression d'équilibre liquide-vapeur (pression de vapeur saturante) correspondant à 85 °C par la formule de cours (voir la question 7.) :

$$l_v = T\,\Delta s = T\left(s_v - s_l\right) \;\Rightarrow\; s_v = s_l + \frac{l_v}{T} = 0{,}42 + \frac{86}{85+273} = 0{,}66 \text{ kJ.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Par définition de la fraction massique de vapeur x_v, l'entropie du mélange diphasé s'écrit : $s = (1-x_v)s_l + x_v s_v$,

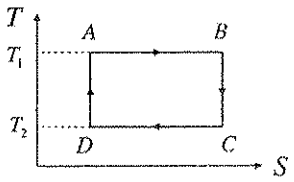
d'où : $\boxed{x_v = \dfrac{s - s_l}{s_v - s_l} = 79\ \%}$

Ce qui est conforme à une valeur de s plus proche de s_v que de s_l.

Machines dithermes

31. Pour une machine monotherme les deux principe s'écrivent (1) $W + Q_1 = 0$ et (2) $\dfrac{Q_1}{T_1} \leq 0$, il vient immédiatement $Q_1 < 0$ d'où $W > 0$; ceci est un système qui reçoit du travail et fournit du transfert thermique (un radiateur électrique par exemple), le fonctionnement en moteur n'est pas permis.
Ceci est cohérent avec l'énoncé de Lord Kelvin du 2nd principe : « Il n'existe pas de moteur fonctionnant de manière cyclique et qui produise du travail à partir d'une seule source de chaleur ».

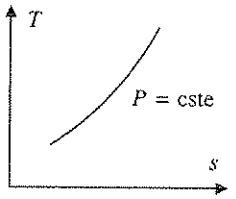
32. Il s'agit d'un rectangle, les isothermes réversibles *AB* et *CD* étant des segments horizontaux et les adiabatiques réversibles (donc isentropiques) *BC* et *DA* des segments verticaux (les notations sont les mêmes que celles de la question **14.**). À noter que cette forme est indépendante de la nature du fluide. Le sens de parcours sur la figure concerne le cycle de Carnot moteur. En effet sur un cycle $\Delta U = W + Q = 0$, soit $Q > 0$ pour avoir $W < 0$. Or pour un cycle réversible $\Delta S = 0$ et $S_{créée} = 0$, on retrouve :

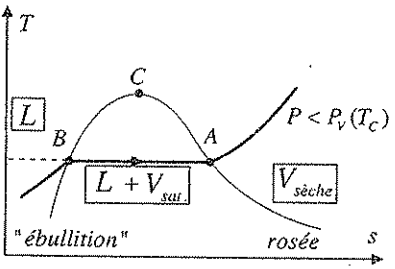


$S_{ech} = \dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} = 0$, égalité de Clausius qui donne $Q = Q_1 + Q_2 = Q_1\left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right)$

De plus grâce à la transformation *AB* isotherme réversible on accède à $S_B - S_A = S'_{ech} = \dfrac{Q_1}{T_1}$, soit $Q_1 = T_1(S_B - S_A)$ et donc $Q = (S_B - S_A)(T_1 - T_2)$, il s'agit donc tout simplement de l'aire du rectangle *ABCD*, positive dans ce sens avec $S_B - S_A > 0$ (même raisonnement que pour le travail reçu lors d'un cycle mécaniquement réversible dans un diagramme de Clapeyron).

33. Pour un GPI suivant une isobare : $\Delta S = \dfrac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\dfrac{T}{T_0}\right)$ donc l'entropie massique s est du type $s_0 + K\ln T$, d'où l'allure ci-dessous, à gauche. Pour une phase condensée, on a la même allure car $\Delta S = mc\ln\left(\dfrac{T}{T_0}\right)$.





Pour $P < P_V(T_C)$ on observe le changement d'état à l'équilibre sous T = cste.

34. Il s'agit d'un moteur ditherme, on peut le comparer au moteur de Carnot. Son rendement est inférieur ou égal à celui de Carnot, soit :

$$r \leq 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0{,}4 \quad \text{avec } T_C = 227 + 273 = 500 \text{ K et } T_F = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$

35. * Le travail dans le sens des volumes croissants représente l'opposé de l'aire sous la courbe (ceci a été vu à la question **35.** du chapitre **10**). Pour le trajet 1, il s'agit du rectangle sous AC_1, de côtés V_0 et P_0, d'où $W_1 = -P_0V_0$. Pour le trajet 2, il s'agit du rectangle sous C_2B, de côtés V_0 et $2P_0$, d'où $W_2 = -2P_0V_0$. La seconde aire étant double de la première, on a facilement $W_2 = 2W_1$.

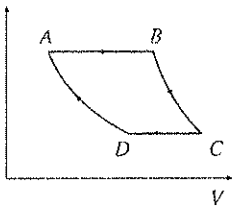
* Constatons d'abord que $W_3 < 0$ puisque l'aire est positive (le gaz se détend, il fournit un travail). Sa valeur est l'aire du trapèze sous AB, la somme de celle du rectangle sous AC_1, soit P_0V_0, et de celle du triangle AC_1B, $P_0V_0/2$ (la moitié de l'aire du carré AC_1BC_2), d'où au total :

$$\boxed{W_3 = -\frac{3}{2}P_0V_0}$$

Rq : L'équation de la droite OAB est $P(V) = P_0V/V_0$, si bien que l'intégrale $W_3 = -\int_{V_0}^{2V_0} P(V)dV$ est facilement calculable...

* Pour que le cycle soit moteur il doit être parcouru dans le sens horaire ; il s'agit donc du cycle ABC_1A ; l'aire de ce triangle est $P_0V_0/2$, et c'est aussi le travail (positif) effectivement fourni au milieu extérieur.

36. Avant tout calcul il convient d'examiner le cycle et de localiser l'intervention des sources. Rappelons que les isothermes d'un gaz parfait sont des hyperboles équilatères d'autant plus éloignées de l'origine des coordonnées que la température est élevée.



Les sources n'interviennent pas sur les transformations adiabatiques BC et DA.

AB est un échauffement isobare, la température de la source chaude est donc T_B.

CD est un refroidissement isobare, la température de la source froide est donc T_D.

a) La relation $\Delta U = W + Q_{AB} + Q_{CD} = 0$ sur un cycle permet d'écrire le rendement du moteur ditherme :

$$r = \frac{-W}{Q_{AB}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} < 1 \quad \text{puisque } Q_{AB} > 0 \text{ et } Q_{CD} < 0$$

Avec le long des isobares : $Q_P = \Delta H$, soit $Q_{AB} = C_P(T_B - T_A)$ et $Q_{CD} = C_P(T_D - T_C)$, le rendement se réécrit :

$$r = 1 + \frac{T_D - T_C}{T_B - T_A} = 1 - \frac{T_D}{T_A}\frac{1 - T_C/T_D}{1 - T_B/T_A}$$

Il reste à traduire les relations le long des adiabatiques réversibles pour un GPI avec la loi de Laplace sous la forme $T = \alpha P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$:

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{P_B^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{P_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \overset{\text{isobares}}{=} \frac{P_A^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{P_D^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{T_A}{T_D} \Rightarrow \frac{T_C}{T_D} = \frac{T_B}{T_A} \quad (0) \quad \text{et donc} \quad \boxed{r = 1 - \frac{T_D}{T_A}} \quad (1)$$

Plus rapidement, (0) s'obtient par

$$\Delta S_{cycle} = 0 = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} = C_P \ln\frac{T_B}{T_A} + C_P \ln\frac{T_D}{T_C} \ldots$$

Et pour finir, le long des adiabatiques $TV^{\gamma-1} = cste$, d'où le résultat :

$$\boxed{r = 1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1}} \quad (2)$$

b) Les transformations isobares sont irréversibles (du fait du déséquilibre thermique lors de l'échange avec les sources). On s'attend donc à un rendement inférieur à celui de Carnot.

Le rendement de Carnot associé est par définition $r_C = 1 - \frac{T_D}{T_B}$, et comme $T_A < T_B$,

$1 - \frac{T_D}{T_A} < 1 - \frac{T_D}{T_B}$, soit d'après (1) : $\boxed{r < r_C}$

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

37. L'énergie interne et l'entropie, toutes les deux des grandeurs extensives, sont toutes les deux des fonctions d'état. L'intérêt de ces grandeurs *a priori* compliquées (car microscopique avec de nombreux paramètres) réside dans le fait que la thermodynamique permet justement de donner de leur variation une expression simple en fonction d'un nombre réduit de variables thermodynamiques (et donc macroscopiques) caractérisant le système.
Le 1er principe indique que les variations d'énergie interne sont uniquement liées à des termes d'échange (et non à un terme de création), d'où le nom de « principe de conservation » de l'énergie.
Le 2nd principe indique que les variations d'entropie ne sont pas uniquement liées à un terme d'échange, mais également à un terme de création, toujours de signe positif (l'entropie d'un système isolé augmente !), d'où le nom de « principe d'évolution ».

38. L'atmosphère, ou tout autre système qualifié de « source », peut d'une part, échanger une quantité (finie) de transfert thermique (ou chaleur) sans voir sa température varier et, d'autre part, fournir ou recevoir un travail (fini) en changeant de volume sans que sa pression ne varie.

39. L'état solide, par sa structure, est plus ordonné que l'état liquide, à son tour plus ordonné que l'état gazeux. On peut donc affirmer : $S_{solide} < S_{liquide} < S_{gaz}$.

40. L'existence de parois athermanes est nécessaire pour que la transformation d'un gaz soit adiabatique (aucun transfert thermique avec l'extérieur), mais elle n'est pas suffisante :
- une résistance électrique dans une enceinte (mais ne faisant pas partie du système considéré) amène un transfert thermique au gaz alors que les parois sont athermanes
- le frottement solide du piston dans une détente provoque un échauffement du gaz alors que les parois sont athermanes. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'une transformation adiabatique nécessite la réversibilité mécanique.

Si la transformation est adiabatique, alors $Q = 0$, mais la réciproque est fausse ! Il suffit de penser à un système en contact avec deux sources, le bilan des transferts thermiques étant nul (le système cède le même transfert thermique à une source que celui qu'il reçoit de l'autre source) : $Q = Q_1 + Q_2 = 0$ et la transformation n'est pas adiabatique. Alors, bien que $Q = 0$, il y a de l'entropie échangée pour deux sources à températures T_1 et T_2 différentes, car $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \neq 0$.

On peut préciser que si $T_1 > T_2$, et que le système n'échange de l'énergie qu'avec les deux sources, alors $Q_1 > 0$ et $Q_2 = -Q_1 < 0$, soit $S_{éch.} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$; or en régime stationnaire $\Delta S = S_{éch.} + S_{créée} = 0$ soit $S_{créée} > 0$ (d'où l'irréversibilité).

41. Exemples de transformations quasi statiques irréversibles :

- Un barreau métallique, placé entre deux sources de températures différentes ; l'équilibre thermodynamique local permet de parfaitement définir le champ de température, mais la diffusion thermique rend la transformation irréversible.
- ou plus simplement le refroidissement d'une barre métallique dans l'atmosphère, ou d'un gaz chaud dans une enceinte à parois diathermanes placée dans l'atmosphère.
- un glaçon à −5 °C mis dans de l'eau à 20 °C : là aussi, on a affaire à une situation hors d'équilibre à évolution lente. La transformation (la fonte du glaçon) est quasi statique, on peut définir à chaque instant le champ de température, mais la réversibilité de la transformation n'est obtenue que pour un glaçon à 0 °C mis dans de l'eau à 0 °C !
- une goutte de permanganate de potassium déposée en surface de l'eau d'un bécher ou une goutte d'encre déposée sur une feuille de papier diffuse de manière quasi statique ; le champ de concentration est défini à chaque instant, mais l'opération est irréversible.
- une détente ou compression d'un gaz où le déplacement du piston (grippé) s'effectue avec frottement solide avec le conduit de l'enceinte ; même lente, cette transformation est irréversible, et c'est bien pourquoi il faut préciser « mécaniquement réversible », ce qui englobe quasi statique et sans frottement solide.
- les évolutions présentant un phénomène d'hystérésis où par définition, l'aller et le retour se font par des chemins différents. Par exemple si on tire lentement sur un ressort, une fois dépassée la limite d'élasticité, il ne reprendra plus sa longueur d'origine. Ce sont des transformations qui, assez lentes pour que toutes les variables restent définies, sont irréversibles.

Notons que pour un gaz parfait, seules les transformations isotherme et adiabatique effectuées de manière mécaniquement réversible sont réversibles (mécaniquement par hypothèse et en plus thermiquement, pas pour les mêmes raisons il est vrai). Se reporter aux explications et calculs d'entropie associés à ces deux transformations à la question **25.**. La transformation quasi statique d'un glaçon à 0 °C en eau à 0 °C (ou inversement) avec transfert thermique avec l'extérieur, est un autre exemple de transformation réversible.

42. La configuration (ou macro état) 1 pièce côté face, avec 100 pièces, correspond à 100 micro états (100 possibilités). Celle avec 50 pièces côté face et 50 côté pile correspond à $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \approx 1{,}0\,10^{29}$ micro états. La formule de Boltzmann donne $\Delta S = k_B \ln \dfrac{\Omega_2}{\Omega_1} \approx 1{,}38\,10^{-23} \ln\left(\dfrac{10^{29}}{10^2}\right) \approx 8{,}6\,10^{-22}\,\text{J.K}^{-1}$.

Avec 100 « particules » à deux états, on s'attendait évidemment à une valeur très faible de variation d'entropie.

Après agitation de la boîte, on conçoit aisément qu'il est très peu probable d'obtenir les 100 pièces du même côté, ce qui conduirait à $\Delta S < 0$.

Cette formulation du second principe remplace une transformation interdite (par l'énoncé macroscopique) par une transformation hautement improbable.

43. Le second principe s'est imposé expérimentalement dès que l'on a essayé de fabriquer des moteurs thermiques, même s'il n'est pas apparu immédiatement que les réflexions de Carnot sur ces machines thermiques étaient un principe fondateur de la thermodynamique. Le premier principe est beaucoup plus abstrait et a été élaboré difficilement, en recherchant *a priori* une grandeur conservative. La difficulté provenant notamment de la différence entre formes d'énergie et modes d'échange de l'énergie.

44. Le cycle de Carnot nécessite le contact du fluide avec de véritables sources à température constante, ce qui pose en particulier le problème de la source chaude...
D'autre part, aux températures T_1 et T_2 fixées, les contraintes de pression (par rapport par exemple à un moteur à explosion) sont irréalistes ; le passage de T_2 à T_1 doit se faire sous le seul effet de la compression adiabatique, alors que dans un cycle de Beau de Rochas, il est obtenu de manière plus efficace (mais irréversible !) par un chauffage isochore.
Par ailleurs, pour qu'une détente ou compression soit isotherme, il faut qu'elle soit effectuée de manière quasi statique (pour laisser le temps au transfert thermique de s'effectuer) ; ceci oblige à effectuer le cycle lentement, ce qui est parfaitement contre-indiqué si l'on souhaite une certaine puissance (c'est-à-dire un travail donné sur une durée pas trop grande).

45. Le fluide décrivant le cycle est un mélange d'air et d'essence. Au cours du cycle, la nature du fluide varie, d'abord mélange combustible, il devient ensuite gaz de combustion, selon une réaction du type :

$$2\,C_8H_{18} + 25\,O_2 = 16\,CO_2 + 18\,H_2O$$

Cependant, compte tenu de la grande proportion de diazote, on peut considérer que le mélange combustible puis les gaz de combustion ont les propriétés de l'air (GP de $\gamma = 1{,}4$) et que le système est fermé le long de BCDEB.
Le transfert thermique reçu de la source chaude correspond à ce qui est fourni par la réaction exo-énergétique de combustion. La source froide est constituée par l'eau du circuit de refroidissement en contact avec la partie inférieure des cylindres (source froide elle-même refroidie par l'atmosphère).

a) (1) Admission du mélange par la soupape d'admission S_1, dans le volume V_1 (partie *A-B*).

(2) Les soupapes sont fermées. Compression adiabatique réversible de V_1 à V_2 (partie *B-C*) et explosion déclenchée par l'étincelle de la bougie (partie *C-D* : échauffement isochore).

(3) Temps moteur : le piston est repoussé suivant une détente adiabatique réversible (partie *D-E*).

(4) Refroidissement et ouverture de la soupape d'échappement S_2 entraînant une diminution brutale de la pression (partie *E-B*) et les gaz brûlés sont évacués par remontée du piston (partie *B-A*).
Remarquer qu'un cycle correspond à deux allers-retours du piston, soit deux tours de l'arbre moteur.

b) Il y a un temps moteur sur les quatre : *D-E*. En pratique les moteurs à explosion fonctionnent souvent avec quatre cylindres, ce qui permet une rotation plus

uniforme du moteur, les temps moteur sont décalés sur chaque cylindre. La position haute du piston correspond au point mort haut (volume V_2) et la position basse au point mort bas (volume maximal V_1). La différence $V_1 - V_2$ (multipliée par le nombre de cylindres) correspond à la cylindrée du moteur.

c) Le rendement est $r = 1 - 1/a^{\gamma-1}$. Ordres de grandeur : $\gamma = 1{,}4$, $a = 9$. et $r = 0{,}58$, la puissance peut atteindre 3 MW.

La formule théorique montre que le rendement augmente si on augmente le taux de compression a. Celui-ci ne peut toutefois pas être augmenté beaucoup du fait du risque d'auto-allumage du mélange.

Les écarts (importants) entre le rendement théorique et le rendement réel proviennent du fait qu'une partie seulement (la moitié environ) du transfert thermique en provenance de la réaction chimique est reçue effectivement par le gaz qui décrit le cycle (perte par rayonnement du moteur, température élevée des gaz d'échappement). De plus le cycle réellement décrit ne correspond qu'approximativement au cycle théorique. Attention il s'agit du rendement du moteur, toutes les pertes dues aux déplacements et frottements des pièces mécaniques (boîte de vitesse...) ou à l'alimentation électrique des accessoires (éclairage, essuie-glaces, autoradio, climatisation...) ne sont pas pris en compte !

46. Les moteurs électriques sont de simples convertisseurs de travail électrique en travail mécanique, on ne peut pas comparer leur rendement à celui d'un moteur thermique. La limite théorique du rendement d'un moteur électrique est 1 (les pertes lors de la conversion sont essentiellement dues à l'effet Joule) alors que la limite théorique d'un moteur ditherme par exemple est le rendement du moteur de Carnot ($r_C < 1$).

Il ne faut pas oublier que l'origine de « l'énergie électrique » nécessaire pour recharger les batteries du moteur, est le plus souvent thermique (centrale thermique, centrale nucléaire) et donc subit elle aussi la dure loi du second principe. Les inconvénients du moteur électrique automobile sont la masse des batteries et l'autonomie limitée.

47. En notant avec un indice « c » les paramètres de l'eau chaude, « f » ceux de l'eau froide et T_s la température de sortie du mélange, le premier principe des systèmes ouverts à deux entrées et une sortie pour le fluide dans le mélangeur qui ne reçoit ni travail ni transfert thermique extérieurs s'écrit avec les débits massiques (voir la question **22.**) :

$$\left(D_{mf} + D_{mc}\right)T_s - D_{mf}T_f - D_{mc}T_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{D_{mf}}{D_{mc}} = \frac{T_c - T_s}{T_s - T_f}}$$

AN : $x = 1{,}1$ (il faut davantage d'eau froide !)

Utiliser une eau très chaude est coûteux. Mais les normes sanitaires l'imposent pour éviter les risques de prolifération de bactéries comme la légionellose.

48. Non, bien sûr, puisqu'il rejette sur l'arrière (la cuisine), la somme de l'énergie thermique prélevée à la source froide (la cuisine aussi dans ce cas) et du travail

fourni par l'alimentation électrique, $|Q_1| = Q_2 + W$ (voir la question **18.**), et donc l'air de la cuisine s'échauffe.

49. Aucun problème bien sûr puisque le transfert thermique « source froide » → « source chaude » est alors spontané ! En revanche plus rien n'impose le signe (ni la nécessité) d'un travail reçu sur le cycle. En maintenant un cycle réfrigérateur, $W > 0$, $Q_2 > 0$ et $Q_1 < 0$ on peut ainsi baisser la température de la source froide dans le cas d'une pseudo source. Un cycle réversible dans ce cas n'est pas envisageable. Le cycle réfrigérateur décrit n'est plus un cycle de Carnot. Lors des échanges avec les sources, la température du fluide est différente de la température de la source, l'échange spontané est irréversible.

50. Un radiateur électrique transforme le travail électrique reçu en « chaleur » dégagée par effet Joule, d'où $e = -\frac{Q_1}{W} = 1$ (avec les notations de la pompe à chaleur). Dans une pompe à chaleur (voir la question **19.**), le même travail électrique fourni, joint au transfert thermique extrait de la source froide (une « source d'eau » gratuite ou l'atmosphère), permet de chauffer davantage l'eau du chauffage central (et donc l'habitation) considérée comme la source chaude. L'efficacité est donc cette fois $e = -\frac{Q_1}{W} > 1$.

51. Sur le papier, un cycle utilisant la compression et la détente d'un gaz convient parfaitement pour un moteur, un réfrigérateur ou une pompe à chaleur.
Mais dans les faits, les transferts thermiques restent faibles : de l'ordre du kJ par kilogramme de gaz et par degré de variation de température (disons 200 kJ pour une variation de 200 °C qui est un ordre de grandeur raisonnable). De plus, les températures élevées sont coûteuses en pertes calorifiques et en matériel...
Un changement d'état implique un transfert thermique bien plus important : pour la vaporisation de l'eau par exemple, environ 2000 kJ par kilogramme d'eau vaporisée, et ce, sans changer de température.
Pour une puissance donnée, on peut donc utiliser beaucoup moins de fluide, et éviter de mettre en jeu des températures élevées, si on tire parti des changements d'état.

52. Le fluide frigorigène utilisé (le R-134a, un HFC de type tétrafluoroéthane) circule dans un circuit fermé et subit sur un cycle deux changements d'état « inverses » (comme dans un réfrigérateur). La transformation la plus importante se situe dans l'évaporateur (situé dans l'habitacle du véhicule) lorsque le liquide se vaporise ; cette opération, endothermique, prélève l'énergie thermique nécessaire sur l'air recyclé de l'habitacle (source froide) permettant la régulation de température souhaitée. L'autre partie du dispositif concerne le condenseur (situé à l'extérieur de l'habitacle, par exemple dans le compartiment moteur) où le gaz est à nouveau liquéfié ; cette opération, exothermique, restitue une énergie thermique à l'air extérieur, dit air de refroidissement (source chaude) ; c'est ce « dégagement de chaleur » plus important que l'on peut ressentir en passant à côté d'une voiture climatisée...Pour être complet, il faut placer un détendeur entre le condenseur et l'évaporateur, et un compresseur entre l'évaporateur et le condenseur, fournissant

globalement sur un cycle un travail positif au fluide (conformément au second principe un réfrigérateur ditherme ne peut pas fonctionner si on ne lui fournit pas du travail).

Exercices

53. À propos d'une transformation adiabatique

a) On écrit $TV^{\gamma-1} = cste \Rightarrow T_f = T_i\left(V_i/V_f\right)^{\gamma-1}$

AN : $T_f = 293\times 2^{0,4} \approx 387\ \text{K} = 114\ °\text{C}$ (on a par ailleurs $P_f = 2,6\ \text{atm}$)

La valeur T_f est élevée, pour une compression de rapport seulement 2, correspond bien aux écarts importants de température dans les transformations adiabatiques. L'expérience courante consistant à gonfler un pneu de bicyclette montre que la pompe s'échauffe effectivement de manière importante mais après plusieurs compressions, et il s'agit de la température des parois de la pompe...

b) La masse d'air, constante dans l'opération, est $m_0 = \dfrac{MP_iV_i}{RT_i} = 2,4\ \text{g}$ (la masse molaire est $M = 29\ \text{g.mol}^{-1}$). On vérifie que $V_f = \pi r^2 h = 1,0\ \text{L}$. Le volume de la paroi en contact avec le gaz chaud est $V = 2\times\pi r^2 e + 2\pi rhe = 56\ \text{cm}^3$, ce qui correspond à une masse d'aluminium $m = \rho V = 151\ \text{g}$.

c) On traduit que le gaz de température T_f se trouve en contact avec la paroi de température T_i, d'où l'ordre de grandeur de la température d'équilibre T_e donné par une relation calorimétrique, l'évolution étant isochore :

$$\Delta U_{paroi} = mc\Delta T \quad \text{et} \quad \Delta U_{air} = \frac{nR}{\gamma-1}\Delta T = \frac{m_0}{M}\frac{R}{\gamma-1}\Delta T = m_0c_0\Delta T$$

$$\Delta U_{ens} = Q = O \Rightarrow mc(T_e - T_i) + m_0c_0(T_e - T_f) = 0 \Rightarrow T_e = \frac{mcT_i + m_0c_0T_f}{mc + m_0c_0}$$

soit $T_e = 21,2\ °\text{C}$ (en ayant calculé $c_0 = 0,72\ \text{J.g}^{-1}.°\text{C}^{-1}$)

Ce résultat notablement différent de T_f et très voisin de T_i, est lié à la faible capacité thermique de l'air vis-à-vis de celle du récipient :

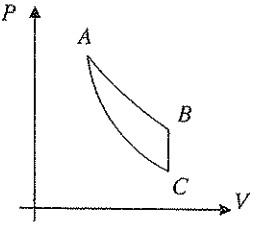
$$\frac{m_0c_0}{mc} = 1,3.10^{-2} \quad \text{soit} \quad T_e \approx T_i + \frac{m_0c_0}{mc}T_f \approx T_i$$

Pour des compressions plus importantes et répétées, avec évacuation de l'air comprimé, comme dans le cas d'une pompe pour pneu de bicyclette, l'élévation de température finit par être importante.

54. Second principe et réalité expérimentale

a) Si le cycle est décrit de façon réversible, on peut le représenter dans le diagramme de Clapeyron (variables définies à tout instant). De plus les courbes,

d'équations connues pour un GP et représentant les transformations, peuvent être parcourues dans les deux sens.
Le fait que BC corresponde à un refroidissement est cohérent avec les pentes de l'isotherme et de l'adiabatique en A.



b) Avec un seul thermostat : AC possible (adiabatique, pas besoin de thermostat) ; CB possible à condition que le thermostat soit de température T_B, le contact avec ce thermostat produit un échauffement isochore (si on maintient le volume constant) ; BA isotherme à la température T_B est réalisée avec le thermostat disponible.
Le cycle $ACBA$ est réalisable de façon monotherme, il est irréversible car la transformation CB se fait avec déséquilibre thermique (voir la question **24.** a)).
En revanche le cycle moteur monotherme ne peut pas être décrit : l'isotherme AB nécessite un thermostat à la température T_B, du coup, le refroidissement isochore BC ne peut pas être réalisé sans un thermostat de température inférieure à T_B.
Remarquer que le retour à A ne peut pas non plus se faire avec une adiabatique, la pente en B la fait passer au-dessus de A. C'est cette impossibilité expérimentale évidente qui conduit à l'énoncé de Kelvin du second principe : pas de moteur monotherme.

c) On peut réaliser le refroidissement BC avec un thermostat de température T_C. Le cycle proposé est réalisable dans le sens moteur s'il est ditherme. Il est alors évidemment irréversible puisque ce n'est pas un cycle de Carnot. On voit clairement que le refroidissement isochore BC est irréversible.

d) Le cycle est réversible si on dispose d'une infinité de sources pour réaliser BC (ou CB) de façon réversible.

55. Transformation polytropique

a) La réversibilité mécanique permet d'évaluer le travail comme suit :

$$W_a = -\int_{polyt} PdV = -P_iV_i^a \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^a} = \frac{-P_iV_i^a}{1-a}\left(\frac{1}{V_f^{a-1}} - \frac{1}{V_i^{a-1}}\right) \quad \text{pour } a \neq 1$$

$$\text{d'où} \quad W_a = \frac{nRT_i}{a-1}\left(\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{a-1} - 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} PV^a &= cste \\ PV &= nRT \end{aligned}\right\} \Rightarrow TV^{a-1} = cste \quad \text{d'où} \quad T_f = T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{a-1} \quad \text{et donc :}$$

$$\Delta T_a = T_i\left(\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{a-1} - 1\right)$$

Ces deux résultats donnent $\boxed{W_a = \frac{nR}{a-1}\Delta T_a}$

Plus directement, partons de $TV^{a-1} = cste \Rightarrow \frac{dT}{T} + (a-1)\frac{dV}{V} = 0$;

alors $\delta W_a = -PdV = -nRT\frac{dV}{V} = \frac{nR}{a-1}dT \Rightarrow W_a = \frac{nR}{a-1}\Delta T_a$

b) Le premier principe appliqué au gaz parfait entre les états initial et final donne :

$$\Delta U_{(a)} = Q_a + W_a = nC_{Vm}\Delta T_a \Rightarrow Q_a = nC_{Vm}\Delta T_a - \frac{nR}{a-1}\Delta T_a \equiv nF(a)\Delta T_a$$

On en déduit $F(a) = C_{Vm} - \frac{R}{a-1}$ et en remplaçant C_{Vm} par $\frac{R}{\gamma-1}$, il vient

$$\boxed{F(a) = -\frac{(\gamma-a)}{(\gamma-1)(a-1)}R}$$

À la question **23.** ont été examinés qualitativement les cas $1 < a < \gamma$ intermédiaires entre la transformation isotherme et la transformation adiabatique ; lors d'une compression (donc avec travail de l'opérateur), ils conduisent à $\Delta T_a > 0$ et $Q_a < 0$, la température du système augmente alors même qu'il fournit un transfert thermique à l'extérieur (le thermostat de température T_i). On retrouve ici $F(a) < 0$ lorsque $1 < a < \gamma$.

c) * Pour $a = 0$, l'expression de $F(a)$ donne $F_0 = \frac{\gamma R}{\gamma-1} = C_{p_m}$; en effet $PV^a = cste$ conduit à la transformation isobare $P = cste$, et on retrouve :

$$Q_0 = \Delta H = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\Delta T .$$

* Pour $a \to 1^{\pm}$, $F_{1^{\pm}} \to \mp\infty$ et $Q_1 = nF_1\Delta T_1 \Rightarrow \Delta T_1 = 0$; c'est la transformation isotherme $PV = cste$ (pour $a = 1$, l'intégration de W_1 se fait en logarithme népérien).

* Pour $a = \gamma$, $F_\gamma = 0$ soit $Q_\gamma = 0$; on retrouve la transformation adiabatique réversible d'un GPI avec la loi de Laplace $PV^\gamma = cste$.

* Pour $a \to \infty$, $F_\infty \to \frac{R}{\gamma-1} = C_{V_m}$; alors $PV^a = cste$ s'écrit aussi $P^{1/a}V = cste$, et avec $a \to \infty$ conduit à la transformation isochore $V = cste$, et on retrouve :

$$Q_\infty = \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}\Delta T$$

56. Le résonateur de Helmholtz (*)

a) L'air dans le récipient, faiblement dilaté ou comprimé par les déplacements du piston, subit alternativement de petites variations de température, mais les transferts thermiques à travers les parois sont lents si bien que les transformations

subies peuvent être considérées comme adiabatiques quasi statiques ; de plus le piston pouvant se déplacer sans frottement dans le goulot (réversibilité mécanique), la transformation apparaît adiabatique réversible. On adopte un modèle GPI pour l'air emprisonné.

Soit $P = P_0 + \Delta P$ et $V = V_0 + \Delta V$, la pression et le volume du gaz dans le récipient. Avec $|\Delta P| \ll P_0$ et $|\Delta V| \ll V_0$, la loi de Laplace $PV^\gamma = cste$ (les conditions de validité sont ici vérifiées) s'écrit :

$$\frac{\Delta P}{P_0} + \gamma \frac{\Delta V}{V_0} = 0$$

Une variation de volume $\Delta V = S\,x$ provoquée par le déplacement du piston engendre une variation de pression $\Delta P = -\dfrac{\gamma P_0 S}{V_0} x$ (avec x et ΔP de signes opposés).

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au piston et projetée sur Ox,

$$m\ddot{x} = (P_0 + \Delta P)S - P_0 S = \Delta P\,S = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} x$$

montre que le piston oscille sous l'action du différentiel de pression récipient-extérieur suivant $x(t) = x_0 \cos \omega t$, avec une pulsation :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\gamma P_0 S^2}{m V_0}}}$$

b) Il suffit dans le modèle précédent de remplacer la masse m du piston par la masse d'air dans le goulot, soit $\rho_0 S l$. Ceci suppose toutefois que toute la masse d'air du goulot vibre en bloc (résultat vu en 2e année : cela suppose que la longueur l du goulot soit petite devant la longueur d'onde λ du son engendré).

Dans ces conditions, $\omega = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0 S}{\rho_0 l V_0}}$, d'où avec $\rho_0 = \dfrac{M P_0}{R T_0}$ (M est la masse molaire de l'air), la fréquence propre du résonateur :

$$\boxed{f_H = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma R T_0 S}{M V_0 l}}}$$

AN : pour l'air : $\gamma = 1{,}4$; $M = 29$ g.mol^{-1} ; $T_0 = 20$ °C

pour la bouteille : contenance $V_0 = 75$ cL ; longueur du col $l = 6{,}5$ cm ; diamètre intérieur du col $d = 18$ mm d'où la surface $S = \pi d^2/4 = 2{,}5$ cm^2.

Alors $\underline{f_H = 124 \text{ Hz}}$, correspondant à un son grave (en gros deux octaves en dessous du La musical à 440 Hz).

Expérimentalement, un son de faible intensité émis devant l'ouverture libre du goulot est fortement amplifié (d'où le nom de résonateur) lorsqu'il atteint la hauteur correspondant à la fréquence f_H. L'ensemble récipient/goulot se

comporte comme un système résonnant (de type masse/ressort ou inductance/condensateur, c'est-à-dire un passe-bas du second ordre avec un coefficient Q grand) en régime forcé par l'excitation sonore extérieure.

57. Mesure du rapport γ : expérience de Clément et Desormes (*)

Juste avant l'ouverture du robinet R, la température du gaz dans le récipient est $T_1 = T_0$ (il y a eu thermalisation avec l'air extérieur) et sa pression est $P_0 + p_1$ (une faible surpression car le gaz a été légèrement comprimé). Au moment de l'ouverture du robinet, une petite quantité de gaz quitte le récipient, et très rapidement la pression s'équilibre à $P_i = P_0$.

On considère le système fermé des n moles qui restent dans le récipient au moment de la fermeture du robinet. Les transferts thermiques étant lents vis-à-vis du temps bref que met la pression à s'équilibrer, on peut considérer que les n moles de gaz ont subit une détente adiabatique au cours de laquelle leur température s'est légèrement abaissée à $T_i = T_0 - \theta$ avec $\theta \ll T_0$ et θ positif.

Les états 1 et i sont donnés par : $\begin{vmatrix} P_0 + p_1 \\ T_0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} P_0 \\ T_0 - \theta \end{vmatrix}$

La loi de Laplace $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cste$ en dérivée logarithmique avec $dP = -p_1$ et $dT = -\theta$ s'écrit :

$$(1-\gamma)\frac{(-p_1)}{P_0} + \gamma\frac{(-\theta)}{T_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{p_1}{P_0} \quad (1)$$

On assiste ensuite pendant un temps beaucoup plus long à un lent échauffement isochore du même système de n moles dans le récipient, par simple thermalisation avec l'air extérieur jusqu'à la température finale $T_2 = T_0$. La pression augmente donc légèrement jusqu'à une valeur $P_0 + p_2$. Bien sûr, on prévoit $p_2 < p_1$, car dans le même volume et à la même température T_0, on a dans l'état 2 une quantité moindre de gaz que dans l'état 1 avant ouverture du robinet.

Les états i et 2 sont donnés par : $\begin{vmatrix} P_0 \\ T_0 - \theta \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} P_0 + p_2 \\ T_0 \end{vmatrix}$

Pour l'isochore $\frac{P}{T} = cste$; la différentielle logarithmique avec $dP = p_2$ et $dT = \theta$ s'écrit :

$$\frac{p_2}{P_0} - \frac{\theta}{T_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{T_0} = \frac{p_2}{P_0} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) conduisent à $\boxed{\gamma = \frac{p_1}{p_1 - p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}}$

car en statique des fluides $p_i = \rho g h_i$

AN : $\underline{\gamma \approx 1,4}$, ce qui correspond à un comportement de GP diatomique pour l'air.

58. Refroidissement à eau d'un air chaud (*)

On est en présence d'un système ouvert, en écoulement stationnaire, il faut se reporter à la démonstration faite à la question **22.**. Le 1er principe appliqué à une masse ayant traversé pendant une durée dt s'écrit alors :

$$d\,dt(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_{p,ext.}) = \delta Q + \delta W^*$$

a) Ici le système ouvert est « double », avec deux entrées et deux sorties. Il faut considérer les masses d'air et d'eau qui rentrent dans le dispositif (ou qui sortent du dispositif) pendant l'intervalle de temps dt, soit une masse $d_m dt$ d'air et une masse $D_m dt$ d'eau.

- les énergies cinétiques macroscopiques liées aux écoulements ainsi que les énergies potentielles dans le champ de pesanteur extérieur sont négligeables : $\Delta e_c + \Delta e_{p,ext.}) \approx 0$
- l'échangeur étant calorifugé, $\delta Q = 0$
- il n'y a pas de travail extérieur autre fourni au système : $\delta W^* = 0$ (échangeur passif)

Le système évolue à enthalpie constante (analogue aux échanges dans un calorimètre) ; il vient avec h les enthalpies massiques et les notations de l'énoncé :

$$d_m dt(h_0 - h_1) + D_m dt(h_s - h_e) = 0 \quad (1)$$

pour l'air (gaz parfait) : $h_0 - h_1 = c_p(T_0 - T_1) = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{R}{M}(T_0 - T_1)$

pour l'eau (phase condensée) : $h_s - h_e = c(\theta_s - \theta_e)$

La relation (1) conduit alors à

$$d_m \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}(T_0 - T_1) + D_m c(\theta_s - \theta_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_s = \theta_e + \frac{d_m}{D_m}\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{Mc}(T_1 - T_0)}$$

AN : $\underline{\theta_s = 16\ °C}$

Bien que l'air entrant soit très chaud, la température de l'eau n'augmente que de 4 °C, car le débit et la capacité thermique massique de l'eau sont bien supérieurs à ceux de l'air.

b) L'air est un gaz parfait, pour l'unité de masse qui traverse l'échangeur (les grandeurs massiques sont écrites en minuscule) et avec un écoulement isobare :

$$\Delta s_{air} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}\ln\frac{T_0}{T_1} = -550\ \text{J.K}^{-1}\text{.kg}^{-1}$$

L'eau est une phase condensée pour laquelle :

$$\Delta s_{eau} = c\ln\frac{T_s}{T_e} = 53\ \text{J.K}^{-1}\text{.kg}^{-1}$$

c) Pendant l'intervalle de temps Δt circule une masse $d_m \Delta t$ d'air et une masse $D_m \Delta t$ d'eau, conduisant à une variation totale (air + eau) d'entropie ΔS pendant Δt de :

$$\Delta S = d_m \Delta t \Delta s_{air} + D_m \Delta t \Delta s_{eau}$$

d'où une variation d'entropie totale par unité de temps :

$$\boxed{\frac{\Delta S}{\Delta t} = d_m \Delta s_{air} + D_m \Delta s_{eau} = 1{,}6 \text{ J.K}^{-1}\text{s}^{-1}}$$

L'échangeur étant calorifugé, il n'y a pas pour le système considéré d'entropie échangée avec l'extérieur ; l'entropie créée par unité de temps s'identifie donc à la variation d'entropie par unité de temps, donnée par l'expression ci-dessus. Son signe positif confirme que la transformation est irréversible, ce qui avec des transferts thermiques par contact de corps de températures différentes était prévisible.

59. Cycle de moteur ditherme

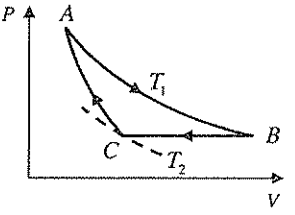
Représentons un cycle par les coordonnées (P,V,T) des points A, B et C :

$$A\begin{vmatrix} P_0 \\ V_0 \\ T_0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{isotherme}]{\text{détente}} B\begin{vmatrix} P_0/\alpha \\ \alpha V_0 \\ T_0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{isobare}]{\text{transformation}} C\begin{vmatrix} P_0/\alpha \\ \beta\alpha V_0 \\ \beta T_0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{adiabatique}]{\text{transformation}} A\begin{vmatrix} P_0 \\ V_0 \\ T_0 \end{vmatrix}$$

En effet, sans faire de calculs :

- lors d'une détente isotherme d'un gaz parfait, le produit PV est constant, donc si le volume est multipliée par α, la pression est divisée par α,
- lors d'une transformation isobare d'un gaz parfait, le volume est proportionnel à la température, ils subissent donc tous les deux le même coefficient β.

a) Le tracé est possible car les transformations sont quasi statiques. Rappelons qu'en valeur absolue, la pente de l'adiabatique qui passe en A est $\gamma > 1$ plus forte que l'isotherme qui passe en A ; le point C se situe donc « à gauche » de B dans le diagramme de Clapeyron, ce qui, par le sens de parcours, confirme que le cycle est moteur.



La transformation BC est donc un refroidissement isobare (l'isotherme qui passe par C, en pointillé sur la figure, est en dessous de l'isotherme AB), et la transformation CA une compression adiabatique.

$$\text{Sur } CA,\ P_C V_C^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma} \Rightarrow \boxed{\beta^{\gamma}\alpha^{\gamma-1} = 1}$$

résultat sur lequel on retrouve que pour $\alpha > 1$, on a forcément $\beta < 1$, et donc la transformation BC est bien un refroidissement.

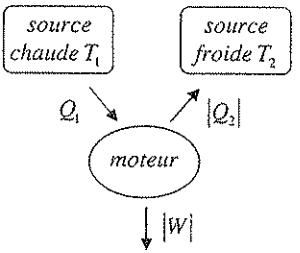
La transformation CA étant adiabatique, les sources n'y interviennent pas. Lors d'une détente comme sur AB, un gaz a tendance à se refroidir ; ici il reste à température constante, ce qui suppose l'intervention d'une source chaude pour le maintenir à sa température T_A ; on a :

$$\boxed{T_1 = T_0}$$

Le refroidissement du gaz sur BC suppose l'intervention d'une source froide pour abaisser la température jusqu'à T_C ; on a :

$$\boxed{T_2 = \beta T_0}$$

b) Les notations sont rappelées sur le schéma ci-contre.



Le rendement du moteur est le rapport du travail $-W$ produit au transfert thermique Q_1 reçu de la source chaude : $r = -W / Q_1$

Sur un cycle, pour le gaz :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\text{soit} \quad r = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

Pour l'isotherme AB mécaniquement réversible :

$$\Delta U_{AB} = 0 \implies Q_1 = Q_{AB} = -W_{AB} = \int P dV = nRT_0 \ln \frac{V_B}{V_A} \quad \text{soit} \quad Q_1 = nRT_0 \ln \alpha > 0$$

Pour le refroidissement isobare BC :

$$Q_2 = Q_{BC} = \Delta H_{BC} = nC_{Pm}(T_C - T_B) \quad \text{soit} \quad Q_2 = -\frac{n\gamma R}{\gamma - 1}(1-\beta)T_0 < 0$$

d'où le rendement en fonction du rapport volumétrique α et de γ sachant que $\beta = \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$:

$$\boxed{r = 1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\ln \alpha}}$$

AN : $\underline{r = 0{,}27}$, bien inférieur au rendement de Carnot :

$$r_C = 1 - T_2 / T_1 = 1 - \beta = 0{,}48 .$$

c) * pour la détente isotherme mécaniquement réversible AB :

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta S_g^{AB} = nR \ln \alpha > 0}$$

$$S_{éch.}^{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_1} = -\frac{W_{AB}}{T_0} = \frac{1}{T_0}\int P dV = nR \int_{V_0}^{\alpha V_0} \frac{dV}{V} \quad \text{soit} \quad \boxed{S_{éch.}^{AB} = nR \ln \alpha > 0}$$

Par différence, $\boxed{S_{créée}^{AB} = \Delta S_g^{AB} - S_{éch.}^{AB} = 0}$

La détente isotherme (monotherme et mécaniquement réversible) est donc réversible.

* pour le refroidissement isobare BC :

$$\Delta S = nC_{Pm}\ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta S_g^{BC} = nC_{Pm}\ln\beta < 0}$$

$$S_{éch.}^{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_2} = \frac{\Delta H}{\beta T_0} = \frac{nC_{Pm}(\beta-1)}{\beta} \quad \text{soit} \quad \boxed{S_{éch.}^{BC} = -nC_{Pm}\frac{1-\beta}{\beta} < 0}$$

Par différence, $\boxed{S_{créée}^{BC} = \Delta S_g^{BC} - S_{éch.}^{BC} = nC_{Pm}\left(\ln\beta + \frac{1}{\beta} - 1\right) > 0}$

La transformation (mécaniquement réversible) est thermiquement irréversible car au point B, on met en contact un gaz à température T_0 avec une source de température βT_0. Pour se convaincre du signe de $S_{créée}^{BC}$, poser $x = 1/\beta$; il apparaît la fonction classique $y(x) = x - 1 - \ln x > 0$ pour $x > 1$, vue à la question **24.**.

* pour la compression adiabatique réversible CA :

$$\Delta S = nC_{Pm}\ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) - nR\ln\left(\frac{P_A}{P_C}\right) \text{ ; donc :}$$

$$\Delta S_g^{CA} = nC_{Pm}\ln\frac{1}{\beta} - nR\ln\alpha \text{ soit } \boxed{\Delta S_g^{CA} = 0} \text{ car } \beta = \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \text{ et } C_{Pm} = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$$

En l'absence d'échange thermique (pas de source), $\boxed{S_{éch.}^{CA} = 0}$

Et donc $\boxed{S_{créée}^{CA} = 0}$

Ce qui permet de retrouver un résultat connu : la transformation adiabatique est bien réversible.

Sur un cycle, pour le gaz : $\Delta S_g^{cycle} = \Delta S_g^{AB} + \Delta S_g^{BC} + \Delta S_g^{CA}$ donne, conformément à l'attente (on revient au même état),

$$\boxed{\Delta S_g^{cycle} = 0}$$

Sur l'ensemble du cycle, l'entropie totale échangée est $S_{éch.}^{totale} = S_{éch.}^{AB} + S_{éch.}^{BC} + S_{éch.}^{CA}$

ce qui donne avec $\beta = \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ et $C_{Pm} = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$: $\boxed{S_{éch.}^{totale} = -nC_{Pm}\left(\ln\beta + \frac{1}{\beta} - 1\right)}$

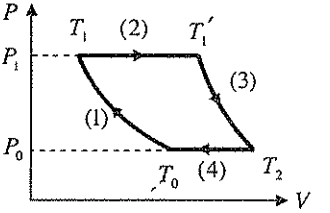
Par différence, $S_{créée}^{totale} = \Delta S_g^{cycle} - S_{éch.}^{totale} = -S_{éch.}^{totale}$ soit :

$$\boxed{S_{créée}^{totale} = nC_{Pm}\left(\ln\beta + \frac{1}{\beta} - 1\right) > 0}$$

Sur l'ensemble du cycle, seule la transformation BC est irréversible, ce qui suffit pour dire que le fonctionnement de la machine thermique est irréversible. C'est cette irréversibilité globale sur un cycle qui explique l'inégalité sur les rendements $r < r_C$.

60. Étude d'un turbopropulseur à hélice

a)



b) La loi de Laplace, adiabatique réversible et gaz parfait idéal, donne :

$$\boxed{T_1 = T_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Le fluide est en écoulement, voir la question **22.**, w_1 correspond au δW *.

$$w_1 = \Delta h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M}(T_1 - T_0) \Rightarrow \boxed{w_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{RT_0}{M}\left(\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}$$

L'étape (2) est isobare : $\boxed{q = \Delta h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M}(T_1' - T_1)}$

L'étape (3) se calcule comme l'étape (1) :

$$\boxed{T_2 = T_1'\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad \text{et} \quad \boxed{w_2 = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{RT_1'}{M}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}$$

c) $T_1 = 540$ K ; $w_1 = 0{,}26.10^3$ kJ.kg^{-1} ; $q = 0{,}46.10^3$ kJ.kg^{-1} ; $T_2 = 518$ K ; $w_2 = -0{,}48.10^3$ kJ.kg^{-1}, l'air fournit du travail à la turbine.

d) Le travail fourni à l'hélice est le travail reçu par la turbine, $-w_2$, diminué du travail qu'elle fournit au compresseur, w_1 :
soit $w = -w_2 - w_1 = 0{,}22.10^3$ kJ.kg^{-1}, l'hélice reçoit effectivement du travail.

$$\text{Le rendement est } r = \frac{w}{q} \text{ soit } \underline{r = 0{,}48}$$

e) Un moteur ditherme réversible fonctionnant entre T_0 et T_1' a un rendement $r_C = 1 - T_0/T_1' = 0{,}72$. Le cycle de Joule, considéré comme ditherme, est irréversible du fait des isobares.

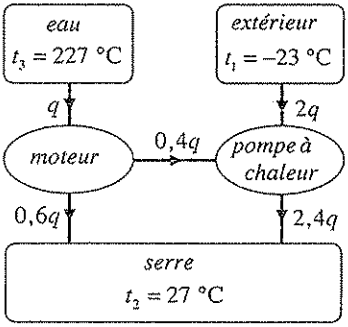
61. Un dispositif thermodynamiquement avantageux ! (*)

On dispose dans ce problème de trois sources : l'eau, la source chaude ($T_3 = 500$ K) ; la serre, source de température intermédiaire ($T_2 = 300$ K) et qui est commune aux deux machines ; l'extérieur, la source froide ($T_1 = 250$ K).

Entre l'eau chaude et la serre, on peut faire fonctionner un moteur dont le travail produit sert à actionner une pompe à chaleur entre l'extérieur froid et la serre ; la serre est donc « chauffée » par les deux machines suivant le schéma ci-dessous.
Les rendement et efficacité de Carnot du moteur et de la pompe à chaleur sont :

$$r = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 0{,}40 \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{1 - T_1/T_2} = 6{,}0$$

ce qui permet de compléter progressivement la figure à partir du transfert thermique q placé entre l'eau et le moteur.



En effet, le rendement du moteur est le rapport du travail produit au transfert thermique reçu par la source chaude et l'efficacité de la pompe à chaleur est le rapport du transfert thermique apporté à la source chaude au travail reçu.
Globalement, avec ce dispositif, la serre reçoit un transfert thermique total de $3q$; les besoins journaliers étant inchangés, la même quantité de combustible dure cette fois 3 jours au lieu de 1.
Il faut noter que c'est l'extérieur froid qui constitue la plus grande source de chaleur.
Bien sûr cette étude est idéalisée par le fait que les pertes dans le chauffage de l'eau sont négligées et que les machines réelles sont moins performantes que les machines idéales de Carnot.

62. Moteur avec sources de capacités thermiques finies

a) Avec les deux sources, il est possible de fabriquer un moteur ditherme en faisant subir des cycles au fluide. Les sources ne sont pas de vrais thermostats, leur température varie. On considère cependant que sur un cycle, elles peuvent être considérées comme constantes, ce qui permet d'utiliser sur cette durée les relations générales issues des deux principes pour les machines dithermes.

* le 1er principe pour le seul fluide s'écrit pour un cycle :

$$dU = \delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \delta Q_1 = -C dT_1 \text{ et } \delta Q_2 = -C dT_2$$

Attention δW le travail fourni par la machine au milieu extérieur est :

$$\delta W = C dT_1 + C dT_2 \quad (1)$$

* le 2nd principe s'écrit pour un cycle :

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} \le 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dT_1}{T_1} + \frac{dT_2}{T_2} \ge 0 \quad (2)$$

En éliminant dT_2 entre les relations (1) et (2), il vient :

$$\frac{dT_1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\left(\frac{\delta W}{C} - dT_1\right) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W \ge C\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dT_1$$

Pour que la machine fournisse effectivement un travail mécanique soit $\delta W < 0$,

sachant que $1 - \frac{T_2}{T_1} > 0$, il faut $\boxed{dT_1 < 0}$ d'où $\boxed{dT_2 > 0}$ d'après (2).

Ceci est un résultat intuitif, les sources étant de capacité thermique finie, la source chaude se refroidit (un peu plus) que la source froide se réchauffe, la différence étant fournie à l'extérieur sous forme de travail.

b) On récupère un travail maximal pour une évolution du système réversible. En remplaçant dans (2) l'inégalité par une égalité, il vient par intégration :

$$\frac{dT_1}{T_1}+\frac{dT_2}{T_2}=0 \quad \Rightarrow \quad T_1T_2 = cste = T_1^0T_2^0 = T_f^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{T_f=\sqrt{T_1^0T_2^0}}$$

Le travail maximal récupérable se détermine à partir de (1) et de la relation précédente :

$$\delta W_{max.} = -\delta W = -\left(CdT_1+CdT_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad W_{max} = -C(T_f-T_1^0)-C(T_f-T_2^0) = C\left(T_1^0+T_2^0-2\sqrt{T_1^0T_2^0}\right)$$

et finalement : $\boxed{W_{max}=C\left(\sqrt{T_1^0}-\sqrt{T_2^0}\right)^2}$

AN : $\underline{T_f = 319\ \text{K}}$ soit $\underline{t_f = 46\ °\text{C}}$. On a bien sûr $t_f < 50\ °\text{C}$ qui serait la température finale par contact direct des deux sources, sans récupérer aucun travail. La valeur t_f assez proche de 50 °C, même dans le cas du fonctionnement réversible montre qu'une faible partie du transfert thermique fourni par la source chaude peut être converti en travail.

$W_{max} = 4,2.10^3(373+273-2\times319) = 34$ kJ, soit avec $W_{max} = M\,g\,h$

$$\Rightarrow \quad \underline{h = 340\,\text{m}}$$

Le travail récupéré permet de soulever 10 kg sur 340 m (la hauteur de la Tour Eiffel est de 324 m) ! Les transferts thermiques correspondent à des échanges d'énergie beaucoup plus importants que les échanges de travail. Remarquer qu'après avoir récupéré ce travail, il reste encore 2 L d'eau à 46°C.

c) Au cours de l'évolution, la différence de température entre les deux sources diminue, et donc le rendement diminue.
Grâce à la réversibilité, le rendement s'identifie au rendement de Carnot sur la durée d'un cycle :

au départ : $\boxed{r_i = 1-\frac{T_2^0}{T_1^0}=0,27}$ et à la fin : $\boxed{r_f = 1-\frac{T_f}{T_f}=0}$

On peut définir le rendement moyen (ou effectif) par : $r_m = \dfrac{W_{max}}{Q_1}$

avec $W_{max} = C\left(\sqrt{T_1^0}-\sqrt{T_2^0}\right)^2 > 0$ et $Q_1 = -C(T_f-T_0') = C\sqrt{T_0'}\left(\sqrt{T_1^0}-\sqrt{T_2^0}\right)$

d'où $\boxed{r_m = 1-\sqrt{\frac{T_2^0}{T_1^0}}=0,14}$

le rendement moyen (maximal) est faible comme le laissait prévoir la valeur de T_f.

63. Réfrigérateur tritherme à absorption

a) On veut évidemment $Q_2 > 0$, l'application des premier et second principes sur un cycle donne :

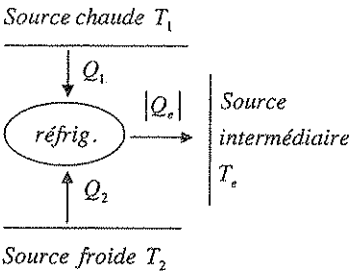
$$\begin{cases} \Delta U = Q_1 + Q_2 + Q_e = 0 \\ \dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_2}{T_2} + \dfrac{Q_e}{T_e} \leq \Delta S = 0 \end{cases}$$

$$Q_e = -Q_1 - Q_2 \Rightarrow Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_e}\right) + Q_2\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_e}\right) \leq 0 \quad (1)$$

Avec $\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_e} < 0$; $\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_e} > 0$ et $Q_2 > 0$: il faut donc $\boxed{Q_1 > 0}$ et suffisamment grand pour assurer l'inégalité (1).

On en déduit $Q_e = -Q_1 - Q_2 < 0$ et le principe de fonctionnement ci-contre :

Le fluide prend du transfert thermique à la source froide, ce qui est le but recherché, pour cela il reçoit du transfert thermique de la source chaude (source d'énergie indispensable) et restitue l'ensemble à la source intermédiaire.



b) Il faut évidemment entretenir la source chaude, c'est-à-dire maintenir une température T_1 élevée. C'est là que se situe la dépense, l'efficacité est :

$$\boxed{e = \frac{Q_2}{Q_1}} \quad \text{L'inégalité (1)} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} \leq \frac{\dfrac{1}{T_e} - \dfrac{1}{T_1}}{\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_e}} = \frac{T_2(T_1 - T_e)}{T_1(T_e - T_2)} = 1{,}9$$

L'efficacité n'est pas très élevée mais suffisante, l'intérêt est bien sûr de ne pas avoir à fournir de travail mécanique comme avec un réfrigérateur ditherme. Ceci est particulièrement indiqué dans les pays chauds, où une unité frigorifique peut fonctionner grâce à l'énergie solaire, sans moteur consommant carburant ou électricité. Ce même principe est mis en œuvre dans les petits réfrigérateurs de camping fonctionnant avec une bouteille de gaz dont la combustion entretient la source chaude.

La compatibilité avec les principes de la thermodynamique n'indique pas la réalisation pratique. Les systèmes à absorption se fondent sur la différence de solubilité des gaz, par exemple NH_3, dans un liquide, comme l'eau, en fonction de la température. Cette solubilité diminue quand la température augmente. Le « bouilleur », en contact avec la source chaude, fournit ainsi de la vapeur sous

pression (remplaçant le compresseur des machines dithermes) qui se liquéfie ensuite dans le condenseur. Les parties condenseur, détendeur et évaporateur (en contact avec la source froide) sont identiques à celles des réfrigérateurs à compresseur.

64. Détente dans une turbine adiabatique

a) La courbe en gras représente la courbe de rosée correspondant à la vapeur juste saturante ($x_{vapeur} = 1$). Pour les courbes dans le diagramme (T, s) voir la question **33.**.

b) En e, la vapeur est sèche, voire surchauffée (domaine de la vapeur seule).

c) α) Voir graphe : b est à la verticale de e car $\Delta s = s_b - s_e = s_{ech} + s_c = 0$, une adiabatique réversible est isentropique. b est également sur l'isobare $P = P_s = 1$ bar.

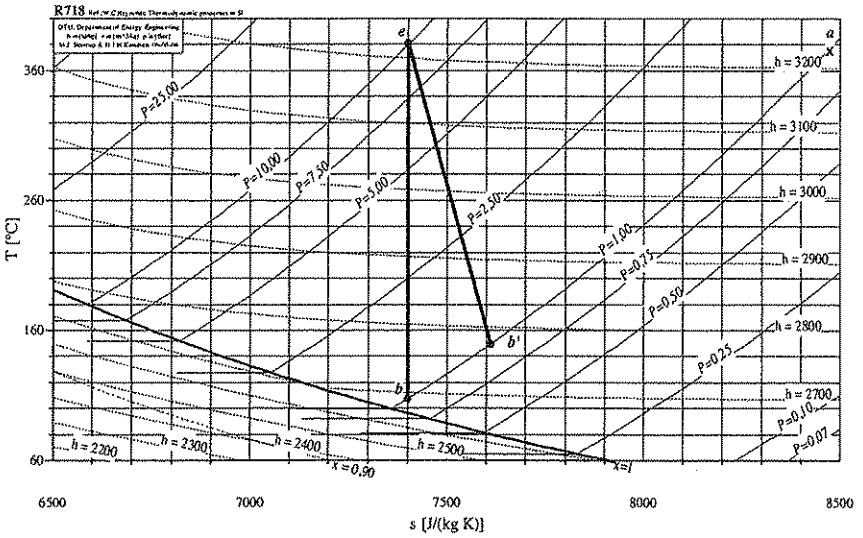
β) en b, la vapeur est encore sèche, mais pas très loin de commencer à se condenser. L'ordonnée du point b donne la température : $T_s = 108$ °C.

Le système est en écoulement, l'énoncé parle pour le point e de point d'entrée : $\Delta h = h_b - h_e = w_u + q$ et $q = 0$. En interpolant entre deux isenthalpes, on lit sur le diagramme :

$$h_b - h_e = 2690 - 3220 = -530 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ soit } \boxed{w_u = -530 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

$w_u < 0$, la turbine fournit du travail au milieu extérieur.

On pourrait encore diminuer un peu la pression à partir de b jusqu'à la courbe de rosée qui serait atteinte pour $P = 0{,}9$ bar.



d) α) Pour tracer b' on trace l'intersection de l'isobare P_s avec l'horizontale $T'_s = 150\ °C$.

$\Delta s = s_{b'} - s_e = s_{b'} - s_b$ et $\Delta s = s_{éch} + s_{créée} = s_{créée}$ car la transformation est adiabatique donc $s_{éch} = 0$

La différence des abscisses de b et b' donne : $\underline{s_{créée} = 210\ \text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}}$

β) b' est dans le domaine vapeur sèche. Le travail utile de détente est :

$$w'_u = h_{b'} - h_e = -445\ \text{kJ.kg}^{-1}.$$

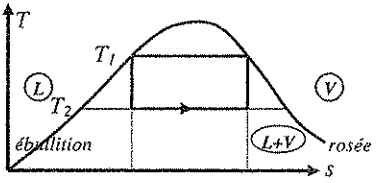
On récupère moins de travail que dans le cas réversible.

$$\boxed{r = \frac{\text{grandeur obtenue dans le cas réel}}{\text{grandeur obtenue dans le cas idéal}} = \frac{-w'_u}{-w_u} = 0{,}84}$$

Attention il ne s'agit pas du rendement de la turbine, mais du rapport de ce qu'elle peut produire par rapport au cas idéal réversible.

65. Réfrigérateur à ammoniac

a) Le cycle de Carnot en diagramme (T,s) est un rectangle (voir la question **32.**) :



b) En pratique pour que l'échange thermique se produise spontanément, il faut un écart de température avec la source. Dans l'évaporateur, la source froide (intérieur du « réfrigérateur ») cédera de la chaleur au fluide si il est à une température plus basse : on choisit −20°C. Même chose du côté de la source chaude : pour évacuer assez de chaleur, avec l'extérieur à 30 °C, il faut que le fluide soit au moins à 40 °C.
Les échanges avec les sources ne sont alors plus réversibles ! Cependant la nature du cycle subsiste en considérant des systèmes diphasés à l'équilibre, donc évoluant à température constante.

c) On peut placer les deux paliers à −20°C et 40°C, grâce aux valeurs indiquées sur la courbe de saturation, ils sont horizontaux car T et P y sont constants. Attention pour la lecture des pressions, les valeurs de P sont portées mais l'échelle est logarithmique Par interpolation linéaire entre deux valeurs, on trouve $P_1 = 15$ bar et $P_2 = 1{,}9$ bar.

Pour tracer les transformations AB et CD, on trace des portions rectilignes d'isentropes sensiblement parallèles à deux isentropes consécutives.

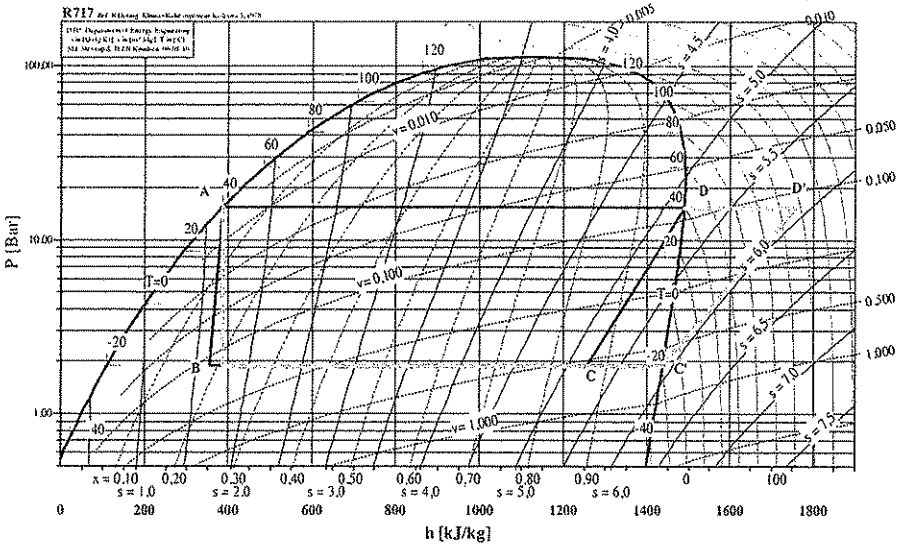
On écrit pour le fluide, les deux principes des systèmes en écoulement sur le cycle réversible : $\begin{cases} q_1 + q_2 + w_u = \Delta h = 0 \\ \dfrac{q_1}{T_1} + \dfrac{q_2}{T_2} = \Delta s = 0 \end{cases}$

(q_1 et q_2 sont les transferts thermiques massiques reçues par le fluide des sources à T_1 et T_2, et w_u le travail massique mécanique total à fournir à l'ensemble turbine + compresseur (on récupère donc la puissance de la turbine).

L'efficacité de Carnot est : $\eta_C = \frac{q_2}{w_u}$.

Avec les deux équations, on trouve : $\boxed{\eta_C = \frac{T_2}{T_1 - T_2}}$ Numériquement, $\underline{\eta_C = 4{,}2}$.

Ce qui signifie qu'on extrait 4,2 fois plus de chaleur de la source froide qu'on n'injecte de travail. Cette valeur théorique n'est évidemment jamais atteinte.



d) Le premier principe industriel appliqué à ce détendeur, ne fournissant aucun travail ni aucun transfert thermique, donne : $\Delta h = h_{B'} - h_A = 0$. Le détendeur est isenthalpe et la portion AB' est un segment vertical.

e) C' se trouve à l'extrémité du palier de vaporisation à T_2. La compression étant adiabatique réversible, D' se trouve sur la même isentrope que C' à la pression P_1, donc à la même ordonnée que D.

La température maximale est atteinte en D' très proche de l'isotherme 140°C. Le fait que cette température soit supérieure à la température critique (graphiquement de l'ordre de 130°C) ne pose pas de problème particulier, mais sa valeur élevée impose des précautions spéciales sur le compresseur (huile, joint, etc....).

f) On applique le premier principe industriel entre l'entrée et la sortie :

– de l'évaporateur : $D_m dt\,(h_{C'} - h_{B'}) = \delta Q_2$ (1)

– du compresseur : $D_m dt\,(h_{D'} - h_{C'}) = \delta W_u$ (2)

– du condenseur : $D_m dt\,(h_A - h_{D'}) = \delta Q_1$ (3)

On mesure sur le diagramme : $h_A = h_{B'} = 385\ \text{kJ.kg}^{-1}$; $h_{C'} = 1435\ \text{kJ.kg}^{-1}$; $h_{D'} = 1755\ \text{kJ.kg}^{-1}$ et suivant l'énoncé : $\mathcal{P}_{th2} = \dfrac{\delta Q_2}{dt} = 1{,}0\ \text{kW}$.

On déduit de (1) : $D_m = \dfrac{\mathcal{P}_{th2}}{(h_{C'} - h_{B'})} = 0{,}95\ \text{g/s} = 3{,}4\ \text{kg/h}$

ordre de grandeur plausible

On déduit de (2) : $\mathcal{P}_u = \dfrac{\delta W_u}{dt} = D_m (h_{D'} - h_{C'}) = 305\ \text{W}$

ce qui est 0,9 fois la puissance électrique à fournir : $\mathcal{P}_{elec} = 340\ \text{W}$.

Le débit volumique aspiré par le compresseur : $D_V = \dfrac{D_m}{\rho_{C'}} = v_{C'} D_m$.

On mesure le volume massique en C' : $v_{C'} = 0{,}62\ \text{m}^3.\text{kg}^{-1}$ et

$$D_V = 0{,}59\ \text{L.s}^{-1} = 2{,}1\ \text{m}^3.\text{h}^{-1}$$

(3) donne : $\mathcal{P}_{th1} = D_m (h_A - h_{D'}) = -1{,}3\ \text{kW}$, donc la puissance thermique absorbée par la source chaude est $-\mathcal{P}_{th1} = 1{,}3\ \text{kW}$ (soit la somme de ce qui est prélevé à la source froide et de ce qui est donné par le compresseur).

L'efficacité du réfrigérateur est : $\boxed{\eta = \dfrac{\mathcal{P}_{utile}}{\mathcal{P}_{payée}} = \dfrac{\mathcal{P}_{th2}}{\mathcal{P}_{elec}} = 2{,}9}$

Rq : L'efficacité du cycle seul (sans se préoccuper du rendement du moteur du compresseur) est :

$\eta_{cycle} = \dfrac{\mathcal{P}_{th2}}{\mathcal{P}_m} = 3{,}3$ qui correspond au calcul sur un cycle théorique où la portion $D'D$ n'est plus une isotherme et pour lequel la température maximale atteinte n'est plus T_1 mais $T_{D'}$: on **ne peut** donc **pas** la comparer à η_C calculée au c).

Chapitre 12

Champ magnétique et force de Laplace

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
charge de l'électron	$-e$ avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}9.10^{-30}$ kg
constante de Planck	$h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s

Champs magnétiques

à une distance de 1cm d'un fil parcouru par un courant de 1A	$B = \mu_0 I / 2\pi r = 2.10^{-5}$ T
composante horizontale du champ magnétique terrestre	$B = 2.10^{-5}$ T
d'un appareil électroménager : rasoir électrique à 1 cm sèche-cheveux à 15 cm four à micro-ondes, aspirateur, téléviseur, machine à laver à 1 m	$B \approx 800\ \mu$T $B \approx 30\ \mu T = 3.10^{-5}$ T $\approx B_{Terre}$ $B \approx 0{,}1$ à $1\ \mu$T
d'un appareil d'investigation médicale de type IRM (champ statique)	$B \approx 0{,}5$ à 3 T

Moments magnétiques

de l'électron autour du proton (magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar / 2m$)	$\mu_B = 0{,}92.10^{-23}$ A.m^2
d'un aimant usuel	$\mathcal{M} \approx 0{,}1$ à 10 A.m^2
de la Terre	$\mathcal{M} = 8{,}3.10^{22}$ A.m^2

Le cours d'abord

Champs magnétiques

1. Quelles sont les sources du champ magnétique ? Donner des exemples.

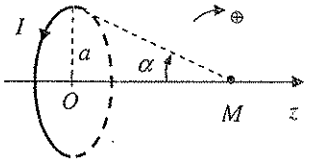
2. Qu'est-ce qu'une ligne de champ magnétique ? Que peut-on dire de l'intensité du champ magnétique lorsque les lignes de champ s'écartent ou se rapprochent ? À quel type de lignes correspond un champ quasi uniforme ? Comment reconnaît-on l'emplacement des sources ?

3. Le champ magnétique créé par un fil rectiligne illimité parcouru par un courant d'intensité I s'exprime dans une base locale cylindrique d'axe Oz (le fil) par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta$$

Définir le sens de $\vec{B}$, tracer les lignes de champ.
Calculer la norme B du champ magnétique créé à $r = 1$ cm d'un fil infini parcouru par un courant d'intensité $I = 1$ A ; comparer cette valeur à celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre et commenter.
Discuter le modèle du fil infini.

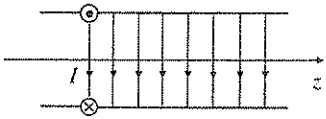
4. Une spire circulaire de centre O, d'axe Oz et de rayon a est parcourue par un courant d'intensité I. Dessiner les lignes de champ dans un plan médian.



Le champ créé sur l'axe est $\vec{B}(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z$

où α est le demi-angle, orienté, sous lequel la spire est vue à partir d'un point M de son axe.
Quelle est l'expression de la valeur du champ au centre $B(O)$?
Déterminer et tracer la courbe $B(z)$ de l'intensité du champ en un point M de l'axe. Commenter.

5. Une bobine (ou solénoïde) « infinie » d'axe Oz est constitué d'un bobinage serré modélisé par n spires circulaires planes par unité de longueur et parcourues par un courant d'intensité I. Que sait-on du champ à l'intérieur de la bobine ? Et à l'extérieur ? Dessiner les lignes de champ.



6. Quels dispositifs simples permettent de réaliser dans une zone donnée un champ magnétique quasi uniforme ?

■ Dipôle magnétique

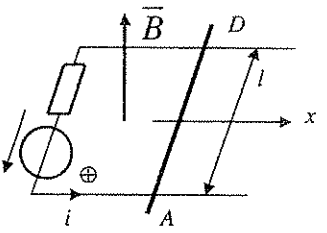
7. Donner la définition d'un dipôle magnétique, du moment dipolaire $\vec{\mathcal{M}}$, ainsi que la condition de l'approximation dipolaire. Dessiner les lignes de champ d'un dipôle.

8. Tracer les lignes de champ d'une bobine (ou solénoïde) de longueur finie parcourue par un courant d'intensité I. Que constate-t-on si on les compare à celles d'un aimant droit ? Par quelle analogie peut-on associer à un aimant un moment magnétique ?

Force et couple de Laplace ; puissance

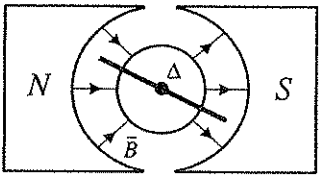
9. Quelle force subit un élément de conducteur $\overline{dl}$ parcouru par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétique $\overline{B}$?

10. Un circuit est constitué de deux rails rectilignes, parallèles, horizontaux (les rails de Laplace), et dont l'écartement est l. Le circuit comprend en série une résistance, un générateur de tension qui impose un courant d'intensité i et est fermé par une tige conductrice AD, de masse m, qui peut glisser sans frottement sur les deux rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique extérieur $\overline{B}$, uniforme et vertical.

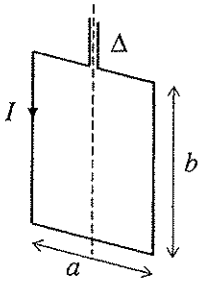


Quelle est la résultante $\vec{f}_L$ des forces de Laplace qui s'applique sur la tige ? La vitesse de translation de la tige étant $\vec{v} = v\vec{u}_x$, donner la puissance P_L des forces de Laplace.

11. Un cadre rectangulaire est mobile autour d'un axe de rotation Δ (également axe de symétrie) à vitesse angulaire ω. Il se déplace dans l'entrefer d'un aimant cylindrique permanent dans lequel les lignes de champ magnétiques sont radiales, c'est-à-dire que leur support passe par l'axe de rotation Δ (vue de dessus ci-contre).



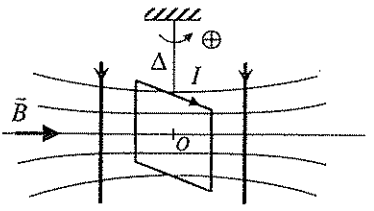
Ce cadre de largeur a et de longueur b est parcouru par un courant d'intensité I, l'orientation est indiquée (vue de face ci-contre).



Faire un dessin indiquant les forces de Laplace sur les côtés du cadre et montrer qu'il subit de la part du champ magnétique une action qui se réduit à un couple ; montrer que son moment par rapport à l'axe Δ est $M_L^{\Delta} = ISB$ où S est la surface de la spire et déterminer la puissance P_L de ces actions mécaniques.

Action d'un champ uniforme sur un courant

12. Un cadre rectangulaire de côtés horizontaux de longueur a et de côtés verticaux de hauteur b suspendu à l'aide d'un fil sans torsion est parcouru par un courant d'intensité I. Il est placé dans un dispositif (ici bobines de Helmholtz) où règne un champ magnétique quasi uniforme et



horizontal. Le cadre est mobile autour de l'axe de suspension Δ qui est un axe de symétrie du cadre.

* Que peut-on dire de la position d'équilibre du cadre en l'absence de champ magnétique (pas de courant dans les bobines de Helmholtz) ?
* Montrer que lorsque le courant est établi dans les bobines de Helmholtz, le cadre est soumis à un couple de moment $M_L^{\Delta} = -ISB\sin\theta$ par rapport à l'axe Δ orienté (θ est l'angle entre le champ et la normale au cadre et toujours $S = ab$), et que son plan tend à se placer perpendiculairement au champ magnétique. Examiner la stabilité des positions d'équilibre.
* Montrer que le moment précédent se généralise en un moment vectoriel des forces de Laplace $\overrightarrow{M_L}$ à exprimer en fonction du moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ du cadre et du champ $\vec{B}$ uniforme.

13. Comment adapter les résultats de la question précédente pour décrire l'action d'un champ magnétique uniforme sur un aimant ? En particulier le moment vectoriel des forces de Laplace $\overrightarrow{M_L}$ en fonction du moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ de l'aimant et du champ $\vec{B}$ reste valable. Confirmer la stabilité de la position d'équilibre à l'aide de l'expression (fournie) de l'énergie potentielle d'un moment magnétique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ placé dans un champ $\vec{B}$ extérieur : $E_p = -\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\vec{B}$.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Les lignes de champ magnétique se referment toujours (même à l'infini) et sont orientées suivant la règle du tire-bouchon appliquée au courant électrique dans le cas d'un circuit, ou depuis la face Nord vers la face Sud pour un aimant à l'extérieur de celui-ci. Prendre l'habitude d'orienter les lignes de champ, si le sens du courant est connu. Elles ne peuvent pas se croiser.

☐ Lorsqu'il s'agit de faire la somme vectorielle de plusieurs champs, rappelons que la norme de la somme n'est pas égale à la somme des normes ! (sauf s'ils sont tous parallèles et de même sens) ; il faut bien sûr effectuer la somme des projections sur la direction résultante.

☐ Il faut toujours bien faire la distinction entre le champ propre créé par un circuit ou un dipôle et le champ magnétique extérieur dans lequel il est placé (et qui est souvent plus important).

☐ Le champ magnétique créé par un fil infini est en $1/r$, celui du dipôle en $1/r^3$.

☐ Ne pas confondre la force magnétique de Lorentz $q\vec{v}\wedge\vec{B}$ (qui ne travaille pas) qui s'applique sur une particule chargée en mouvement avec la force de Laplace $I\overrightarrow{dl}\wedge\vec{B}$ (qui travaille) qui s'exerce sur un élément de conducteur parcouru par un courant même si elles sont liées par un mécanisme de transfert.

☐ Pour trouver le sens d'une force de Laplace, il faut commencer par orienter le circuit, ce qui oriente un élément de conducteur $\overrightarrow{dl}$. Le sens de $i\overrightarrow{dl}$ dépend du signe de i : si $i>0$, $i\overrightarrow{dl}$ est dans le sens d'orientation qui est dans ce cas celui du courant ; si $i<0$, $i\overrightarrow{dl}$ est dans le sens opposé au sens d'orientation, donc dans le sens du courant à nouveau. Le sens de la force élémentaire de Laplace est alors obtenu par la règle du tire-bouchon (quand on le tourne de $i\overrightarrow{dl}$ vers $\overrightarrow{B}$, alors il avance suivant $\overrightarrow{df}_L$) ou celle des 3 doigts de la main droite (pouce, index et majeur pour les 3 vecteurs dans l'ordre indiqué).

☐ Pour le calcul de la force élémentaire de Laplace $\overrightarrow{df}_L = i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$, il est utile de représenter les trois vecteurs sur une figure afin d'obtenir le sens de $\overrightarrow{df}_L$, ce qui oblige à choisir sur la figure un signe pour i, en général on choisit $i > 0$ (sur le schéma, pas dans les calculs où il reste algébrique). On calcule ensuite, soit la résultante (pour un mouvement de translation), soit le moment résultant (pour un mouvement de rotation, et dont on rappelle qu'il n'est pas le moment de la résultante !...).

☐ Le sens de la force de Laplace ne dépend évidemment pas du choix d'orientation qui fixe à la fois le signe de l'intensité i et le sens de l'élément $\overrightarrow{dl}$; il faut simplement prendre garde lorsque $i<0$ que $i\overrightarrow{dl}$ n'est pas dans le sens de $\overrightarrow{dl}$.

☐ Lorsque qu'un champ de forces uniforme s'applique sur un solide alors la résultante s'applique au centre de masse de ce solide. Par exemple si toutes les forces élémentaires de Laplace $\overrightarrow{df}_L$ s'appliquant sur les éléments de la tige homogène d'un cadre sont identiques, alors la résultante $\overrightarrow{f}_L$ s'applique au milieu de la tige.

☐ Lorsqu'on parle des « actions » d'un champ magnétique (sur un circuit ou un aimant) il faut comprendre deux choses : la résultante des forces de Laplace et le moment résultant de ces forces. Il arrive souvent que la résultante soit nulle (et pas seulement en champ uniforme, voir la question **11.**), alors l'action se réduit à un couple, ce qui montre bien que le moment résultant (non nul) n'est pas le moment de la résultante (et qui serait nul) ! Dans ce cas fréquent, les actions du champ magnétique engendrent une rotation autour d'un axe fixe sans translation du centre de masse.

☐ Rappelons que le moment par rapport à un axe est une grandeur algébrique et que son signe dépend de l'orientation positive choisie sur cet axe ; cela signifie qu'en fonction de son signe, il a tendance à faire tourner le système étudié dans un sens ou dans l'autre.

Applications directes du cours

■ Champs magnétiques

14. Au cours d'un orage, un éclair peut être assimilé à un fil rectiligne de rayon $a = 10$ cm et parcouru par un courant d'intensité $I = 10^5$ A. À moins de quelle distance du point de chute de l'éclair, l'aiguille d'une boussole risque-t-elle d'être désaimantée sachant que cela se produit lorsqu'elle est placée dans un champ supérieur à $B_L = 2.10^{-3}$ T ?

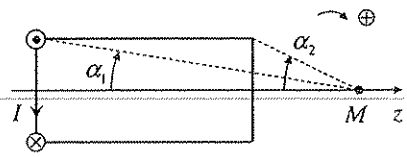
15. * La composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut $B_H = 2.10^{-5}$ T ; quelles sont les valeurs B_T du champ total et B_V de sa composante verticale sachant que le champ terrestre a un angle d'inclinaison vers le bas de 60° (c'est l'angle entre l'horizontale du lieu et le champ).
* Une bobine plate crée en son centre un champ magnétique d'intensité deux fois supérieure à celle du champ magnétique terrestre au point considéré : $B_B = 2B_T$. Comment doit-on disposer cette bobine pour que le champ total soit dirigé suivant la verticale ascendante ? Quelle est sa norme B_{total} ?

16. Montrer comment on attribue une face Nord et une face Sud à un circuit ou cadre plan parcouru par un courant (une bobine plate par exemple).

17. L'intensité du champ magnétique créé par une spire de rayon a et parcourue par un courant d'intensité I à une abscisse z du centre est $B(z) = \dfrac{\mu_0 I}{2a} \dfrac{a^3}{(a^2+z^2)^{3/2}}$.

En déduire l'expression de B_c, le champ magnétique au milieu du segment joignant les centres, distants de a, de deux bobines plates de Helmholtz constituées chacune de N spires identiques en série.
AN : $N = 500$; $a = 20$ cm ; $I = 0{,}4$ A.

18. Le champ magnétique créé par un solénoïde de longueur finie, constitué de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I est, en un point M quelconque de son axe :



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\vec{u}_z$$

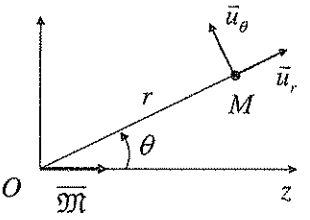
* Les angles étant orientés comme sur la figure, vérifier que le sens attendu du champ magnétique est conforme au signe de $(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.
* Que valent les angles α_1 et α_2 pour un solénoïde infiniment long ? en déduire l'expression du champ $\vec{B}_\infty$ dans un tel solénoïde ; commentaire.
* Pour un solénoïde de longueur finie, on note $\alpha_1 = \alpha_c$, l'angle α_1 pour un point au centre du solénoïde ; que vaut alors α_2 ? En déduire l'expression $\vec{B}_c$ du champ au centre.
* On note a le rayon du solénoïde et L sa longueur. Pour quelles valeurs du rapport $L/2a$ peut-on considérer que le champ au centre d'un solénoïde de longueur finie diffère de moins de 1% de celui du solénoïde infiniment long ?

19. Une spire circulaire de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I. Son rayon est vu sous un angle α à partir d'un point M de son axe, placé à la distance d du centre O.

a) Rappeler la direction du champ de la spire en M et donner son intensité $B_{sp.}$ en fonction de I, R et α.

b) En se limitant à un plan, les composantes en coordonnées polaires du champ magnétique créé au point M par un dipôle magnétique placé en O et de moment $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}_z$ sont données par les expressions :

$$\boxed{B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3}}$$



Quel est le moment dipolaire $\vec{\mathcal{M}}$ équivalent à la spire de la question précédente ? Montrer que lorsque le point M est sur l'axe Oz le champ du dipôle n'a plus qu'une composante et exprimer $B_{dip.}$ en fonction de I, R et z.

c) Pour quelles valeurs de z le champ au point M sur l'axe de la spire diffère-t-il de moins de 1% de celui du dipôle magnétique équivalent ? Pour cela établir le rapport $B_{sp.}/B_{dip.}$ au point M en fonction de z, puis donner la valeur limite pour z en fonction de R.

■ Force et couple de Laplace

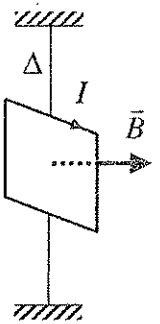
20. Un fil conducteur horizontal transporte un courant électrique de droite à gauche dans un champ magnétique dirigé horizontalement vers l'avant de la feuille ; dans quel sens est dirigée la force de Laplace ?

21. Quelle est l'intensité de la force sur une portion de fil rectiligne de longueur 12 cm, parcourue par un courant de 3 A, placée dans un champ magnétique uniforme

d'intensité 0,06 T et faisant un angle de 30° avec ce champ ? Comment faudrait-il procéder pour obtenir une force de plus grande norme ?

22. Une tige conductrice OA de masse $m = 10$ g est suspendue par son extrémité O en un point où la liaison parfaite permet une rotation autour d'un axe fixe horizontal Δ. La tige est parcourue par un courant d'intensité $I = 20$ A. Le champ magnétique uniforme et horizontal d'un aimant en fer à cheval de direction parallèle à Δ a pour intensité $B = 2{,}0.10^{-2}$ T ; il agit sur une portion $l = 5{,}0$ cm située au milieu du conducteur. Quel est, à l'équilibre, l'angle θ que fait le conducteur avec la verticale ?

23. Un cadre carré comportant N spires est suspendu verticalement dans un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}$ par deux fils de torsion identiques de constante C. En l'absence de courant circulant dans les spires, le plan du cadre est parallèle au champ $\vec{B}$.



Expliquer d'abord qualitativement pourquoi le plan du cadre tourne d'un angle θ lorsqu'on fait circuler un courant dans les spires, puis déterminer la relation liant θ, N, B, C et S, la surface du cadre.

Avec $C = 0{,}80.10^{-2}$ m.N.rad^{-1}, $N = 100$; $S = 10$ cm^2 et $I = 10$ A, calculer B sachant que le cadre a tourné de $\theta = 30°$.

24. On réalise un champ magnétique tournant (comme à la question **31.** par exemple) ; que se passe-t-il lorsqu'on y place une boussole à aiguille aimantée ? En déduire le principe de fonctionnement de certains moteurs ; d'où vient l'énergie mécanique liée au mouvement de rotation engendré ?

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

25. Décrire l'expérience historique d'Oersted qui a fait apparaître le rapport insoupçonné entre l'électricité et le magnétisme. Qui a élaboré la théorie des champs magnétiques ?

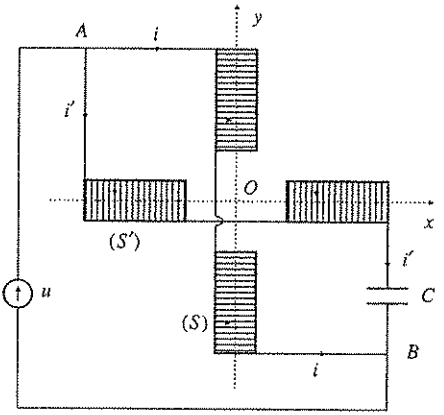
26. Qu'a voulu prouver Rowland par l'expérience où il étudie le champ magnétique créé par un disque non conducteur (pourquoi ?) uniformément chargé et en rotation autour de son axe ?

27. Quel est l'ordre de grandeur de l'intensité du champ magnétique créé par les appareils électroménagers ?

28. Pourquoi l'aiguille aimantée d'une boussole s'oriente-t-elle spontanément ? Comment sont définis ses pôles Nord et Sud ? Dans quel sens est orienté son moment magnétique ?

29. Quelle est l'origine du champ magnétique terrestre ? Par quel modèle simple peut-il être représenté ? Où se trouvent les Pôles Nord et Sud magnétiques ? Quelles sont les caractéristiques de l'orientation du champ magnétique en France ? Quelle est l'importance du champ magnétique pour la Terre ?

30. Un aimant (ou une spire parcourue par un courant) ne subit aucune force (au sens où la résultante des forces de Laplace est nulle) lorsqu'il est placé dans un champ magnétique uniforme. Pourquoi alors deux aimants s'attirent-ils ? Faire un dessin pour expliquer dans quel sens le courant doit parcourir une bobine plate suspendue par deux fils conducteurs souples pour être attirée par un aimant qui y présente sa face Nord.



31. Dans les moteurs « alternatifs » il est nécessaire de disposer d'un champ magnétique tournant dans une région de l'espace.

Expliquer, sans calculs, comment le circuit ci-contre réalise un tel champ au voisinage de O sachant que u est une tension alternative sinusoïdale de pulsation ω.

Quelle est la pulsation de rotation du champ magnétique tournant ?

32. Un circuit plan de forme quelconque parcouru par un courant est placé dans un champ magnétique uniforme ; quelle est la résultante des forces électromagnétiques de Laplace qui s'exercent sur ce circuit ?

Le vérifier par exemple sur un circuit triangulaire (prendre un triangle rectangle isocèle) parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan du circuit...

33. Quelle est l'importance de la notion de dipôle magnétique au niveau macroscopique ? au niveau microscopique ?

34. Comment adapter le principe de la tige en translation sur des rails rectilignes de Laplace pour décrire simplement le principe d'un moteur à courant continu.

Exercices

35. Les bobines de Helmholtz

On dispose deux spires identiques à celle de la question **4.** sur le même axe Oz en $z = \pm d/2$ (dispositif appelé bobines de Helmholtz). Elles sont parcourues par le même courant d'intensité I dans le même sens. À l'aide d'arguments graphiques nécessitant un minimum de calculs, déterminer la distance d, à exprimer en

fonction du rayon a, à laquelle il faut placer les spires pour obtenir le champ le plus uniforme possible dans le voisinage du centre O. Sans faire de calcul, prédire de quel ordre en z est alors le premier terme non nul du développement $B_r(z) - B_r(0)$ pour z petit où B_r est le champ total.

36. Moment magnétique orbital d'un atome ; magnéton de Bohr

a) En prenant, dans le cadre du modèle classique de Bohr, un électron de charge $-e$ et de masse m en orbite circulaire autour d'un noyau ponctuel fixe, montrer qu'entre le moment cinétique $\vec{\sigma}$ de l'électron par rapport au noyau et le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ associé à son mouvement orbital existe la relation $\vec{\mathcal{M}} = \gamma\vec{\sigma}$ et donner l'expression du coefficient γ appelé rapport gyromagnétique.

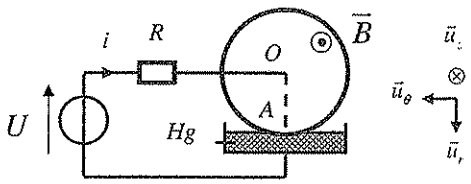
b) En déduire que la quantification du moment cinétique ($\sigma = n\hbar$ où $\hbar = h/2\pi$ et $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s est la constante de Planck) conduit à définir un moment magnétique élémentaire appelé magnéton de Bohr μ_B ; en donner son expression et sa valeur numérique. Commentaire.

37. « Définition » de l'Ampère

« L'Ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 m l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces conducteurs une force de 2.10^{-7} N par mètre de longueur ».

Faire un dessin, expliquer l'origine et le sens de cette force et montrer que cette définition impose la valeur de la constante μ_0.

38. La roue de Barlow



Un disque métallique de rayon $OA = a$ peut tourner sans frottement dans le plan vertical autour de l'axe horizontal Oz. Il est alimenté sur son axe, au point O, après fermeture du circuit, par une source de tension U (au point A, la circonférence de la roue trempe dans un bain de mercure). La résistance totale en série dans le circuit est R. On considère que le chemin suivi par le courant d'intensité i entre O et A est la ligne droite. Par ailleurs la roue est placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, constant, et perpendiculaire à la roue.

L'orientation positive du circuit est prise selon $\vec{u}_r$ dirigé de O vers A ; les vecteurs unitaires $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ complètent la base cylindrique.

a) Montrer que la roue, initialement immobile, se met à tourner et prévoir qualitativement son sens de rotation. Puis donner les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ de la roue, vitesse $\vec{v}$ d'un point M entre O et A tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, et champ magnétique $\vec{B}$ sur la base envisagée à l'aide de r, ω et B, grandeurs positives.

b) L'intensité i du courant étant constante en régime permanent, calculer la force de Laplace élémentaire $\overrightarrow{df}_L$ s'exerçant au point M sur un tronçon de longueur dr.

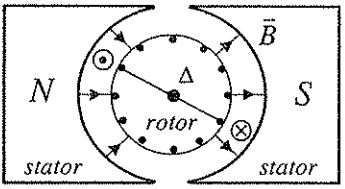
c) Exprimer la puissance développée en fonction de i, B, a et ω.

d) Sans faire de calcul indiquer qualitativement d'où vient ce travail mécanique, puis conclure.

39. Moteur électrique à courant continu

Un moteur comporte un cylindre, le rotor, pouvant tourner autour d'un axe Δ entre deux pôles d'un électro-aimant, le stator. Le champ magnétique radial créé est orthogonal à la surface du rotor (comme à la question **11.**) Des conducteurs rectilignes sont logés dans des encoches à la surface du cylindre parallèlement à l'axe Δ.

Pour avoir une action de rotation deux brins opposés doivent être parcourus par des courants de sens opposés (comme indiqué sur la figure) ; cela permet de les associer pour former une spire.



Données numériques : le rotor a un rayon $r = 9{,}0$ cm ; chaque fil de longueur $l = 15$ cm est parcouru par un courant d'intensité $I = 10$ A ; l'intensité du champ magnétique est $B = 1{,}2$ T ; le nombre de fils est $N = 700$. ; le moteur tourne à une vitesse $n = 1\,800$ tour.min^{-1}.

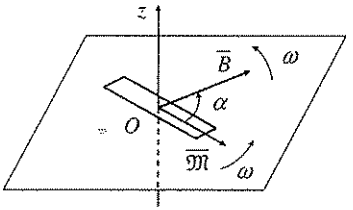
a) Calculer la force qui agit sur chaque fil.

b) Quel est le travail de cette force, toujours motrice, lorsque le cylindre fait un tour ?

c) Sachant que les actions sur chaque fil ajoutent leurs effets, calculer la puissance de ce moteur.

40. Moteur synchrone

Un montage convenable de bobines fixes (le stator, non représenté sur la figure) parcourues par des courants alternatifs sinusoïdaux de pulsation ω produit dans un certain volume un champ magnétique $\vec{B}$, d'amplitude B_0, qui tourne dans un plan xOy autour d'un axe Oz avec la pulsation ω constante (pour un dispositif de production du champ, voir la question **31.**).



D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe Oz (le rotor) constituée d'un petit aimant permanent portant un moment magnétique permanent $\vec{\mathcal{M}}$, orthogonal à Oz, tourne dans le plan xOy avec, en régime permanent, le même mouvement de rotation uniforme de pulsation ω dans le même sens que le champ.

L'angle α entre $\vec{\mathcal{M}}$ sur $\vec{B}$ comme indiqué sur la figure est constant au cours du mouvement.

a) Quelle est la valeur du couple magnétique $\vec{\Gamma}$ exercé par le champ sur la pièce mobile ?

b) Pour quelles valeurs de α ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? Quelle est dans ce cas le couple maximal Γ_M qu'il peut fournir ?

c) Le rotor reçoit le couple électromagnétique Γ et fournit à l'extérieur un couple mécanique utile Γ_u pour effectuer la tâche qui lui est demandée. Montrer, en notant J le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe de rotation que le régime ne peut être stationnaire (définir cette expression) que si $\Gamma = \Gamma_u$.

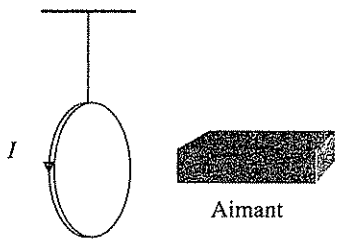
Un régime permanent de fonctionnement du moteur est dit stable si lorsque le rotor prend accidentellement de l'avance (ou du retard) sur son régime permanent, le jeu des forces qu'il subit lui fait perdre cette avance (ou ce retard) ; il est instable dans le cas contraire.

À partir du graphe de $\Gamma(\alpha)$, déterminer le domaine de α correspondant à un régime stable lorsque le moteur fournit un couple utile $\Gamma_u < \Gamma_M$.

Travaux pratiques

41. Avec quel appareil mesure-t-on un champ magnétique ? Quel est son principe élémentaire ?

42. Une petite spire circulaire avec une dizaine de tours de fil enroulés, est alimentée par un générateur maintenant un courant de l'ordre de 1 A.



Elle est suspendue à un fil souple sans torsion, initialement vertical et son plan peut tourner autour de l'axe du fil.

On approche lentement un aimant droit de la spire et on observe que :

- dans un premier temps la spire commence à tourner autour de son axe pour présenter son plan perpendiculairement à l'aimant,
- dans un deuxième temps, lorsque l'aimant est plus proche, la spire attirée par l'aimant vient « s'encastrer » autour de lui.

Si on coupe le courant, la spire revient à sa position d'origine, et ignore l'aimant. Expliquer.

43. On dispose au laboratoire d'un aimant droit et d'une petite aiguille aimantée, mais toutes les indications sont effacées sur les deux objets.

Comment repérer très simplement le pôle Nord et le pôle Sud de l'aimant ?

44. Mesures du moment d'inertie et du moment magnétique d'un aimant

a) Un aimant droit en forme de parallélépipède homogène est suspendu par son centre de masse G selon un axe vertical Gz par un fil de torsion de constante $C = 4{,}2.10^{-4}$ m.N.rad^{-1} (on ne tient pas compte ici de l'orientation dans le champ

magnétique terrestre). Une fois l'aimant tourné d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre, écrire une loi de la mécanique et établir l'expression de la période T du mouvement. L'étude des oscillations (en compter au moins 10) conduit à la période $T = 1{,}8$ s ; en déduire la valeur du moment d'inertie J de l'aimant par rapport à l'axe de suspension. Estimer l'incertitude sur J, on néglige l'incertitude sur C.

On teste ce résultat sachant que pour l'aimant de masse $m = 39$ g, de longueur $L = 10$ cm et de largeur $l = 1{;}0$ cm, le moment d'inertie est donné par l'expression $J = m(L^2 + l^2)/12$. Conclure.

b) Le même aimant est à présent suspendu (toujours par G) à un fil sans torsion et placé dans des bobines de Helmholtz où règne un champ magnétique quasi uniforme d'intensité $B = 0{,}90.10^{-3}$ T (pour cette valeur voir l'application numérique de la question **17.**). Quelle est la position d'équilibre de l'aimant dans le champ ? L'axe de l'aimant est écarté d'un angle θ de l'axe des bobines ; écrire l'équation du mouvement et exprimer la période T' des petites oscillations. L'étude des oscillations (en compter au moins 10) conduit à la période $T' = 1{,}7$ s ; en déduire la valeur du moment magnétique $\mathfrak{M}$ de l'aimant et son incertitude.

L'aimantation M de l'aimant (une grandeur intensive puisque rapportée à l'unité de volume) est définie par $M = \mathfrak{M}/V$ où V est le volume de l'aimant ; en déduire une nouvelle valeur de $\mathfrak{M}$ sachant que l'épaisseur de l'aimant est $e = 0{,}50$ cm et que pour les aimants courants on a typiquement une aimantation de l'ordre de $M = 1{,}0.10^5$ A/m. Conclure.

45. Si on abandonne une aiguille aimantée (ou tout autre objet aimanté) dans un placard du laboratoire, on constate qu'elle perd peu à peu au cours du temps son aimantation, pour finir par la perdre complètement après quelques années.
Comment expliquer qualitativement un tel phénomène et comment l'éviter ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Champs magnétiques

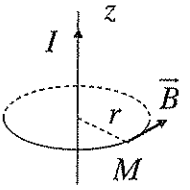
1. Ce sont les courants électriques qui sont à l'origine des champs magnétiques, qu'ils s'agissent au niveau macroscopique de courants électrocinétiques dans les conducteurs ou au niveau microscopique de courants liés au mouvement des électrons dans les atomes. Les particules chargées libres en mouvement sont également source de champs magnétiques.
Exemples : les courants dans les bobines placées sous une plaque à induction, les courants dans une antenne de télécommunication, les courants dans la couche de fer liquide dans la Terre, les courants microscopiques dans un aimant,...

2. Le champ magnétique $\vec{B}$ est une grandeur vectorielle ; on appelle ligne de champ une ligne orientée dans le sens de $\vec{B}$ qui en chacun de ses points admet pour tangente le champ magnétique en ce point. Lorsque les lignes de champ s'écartent l'intensité du champ magnétique diminue ; elle augmente lorsqu'elles se rapprochent (voir les exemples de cartes de champ questions **4.** et **6.**). À un champ quasi uniforme correspondent des lignes de champ quasi parallèles. Comme les lignes de champ magnétique sont fermées, l'emplacement des sources est indiqué par un enlacement serré par les lignes de champ.

3. Le champ $\vec{B}$ est contenu dans le plan perpendiculaire au fil et passant par le point considéré. Sa composante est orthoradiale (suivant $\vec{u}_\theta$) et ne dépend que de r, distance au fil :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta}$$

(expression dans laquelle il ne faut pas faire tendre r vers zéro).
Les lignes de champ sont donc des cercles centrés sur Oz.
Le sens de $\vec{B}$ est tel qu'en lui appliquant la règle du tire-bouchon on retrouve le sens réel du courant. Et donc en changeant le sens du courant, on change le sens de $\vec{B}$.
Sur la figure on a choisi $I > 0$.



$B = \mu_0 I / 2\pi r = 2.10^{-5}$ T, autant que la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, qui apparaît donc comme un champ beaucoup plus

important (et donc difficile à éliminer) que ceux produits par l'électrocinétique à courants plus faibles et distances plus grandes.

Le champ $\vec{B}$ est créé par un courant, le circuit source est nécessairement fermé. Un fil infini pose donc problème. C'est en fait un modèle pour un point M très proche d'un fil rectiligne de dimension finie d'un circuit réel.

4. En un point M de l'axe le champ $\vec{B}$ est dirigé suivant l'axe Oz ; son sens est obtenu en appliquant la règle du tire-bouchon sur le sens réel du courant. La formule donne donc le sens de $\vec{B}$ avec I algébrique.

Le champ au centre de la spire ($\alpha = \pi/2$) est en norme :

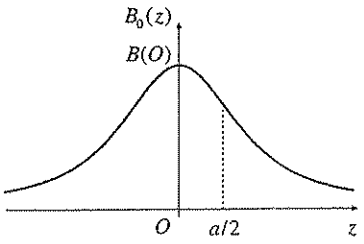
$$\boxed{B(O) = \frac{\mu_0 I}{2a}}$$

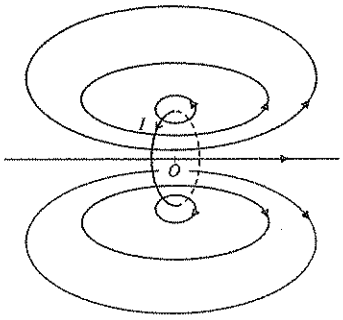
Sur l'axe, en exprimant $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$ en fonction de $OM = z$, il vient :

$$\boxed{B(z) = B(O)\frac{a^3}{(a^2+z^2)^{3/2}}}$$

À noter sur la courbe la position du point d'inflexion en $z = a/2$.

On constate que le champ magnétique diminue en s'éloignant des sources (le courant est dans le plan $z = 0$) ; on en déduit que les lignes de champ s'écartent de l'axe du côté $z > 0$, contournent la spire avant de se refermer du côté $z < 0$. Sur le schéma, l'orientation des lignes de champ correspond à $I > 0$.

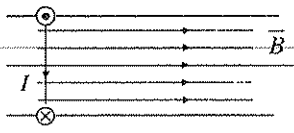




5. À l'intérieur d'une bobine infinie, le champ est uniforme, dirigé suivant l'axe. Les lignes de champ sont donc des droites parallèles entre elles. Le sens du champ $\vec{B}$ est obtenu en appliquant la règle du tire-bouchon avec le sens réel du courant. L'orientation des spires et de l'axe Oz sont liés. Dans la formule I est algébrique.

À l'intérieur du solénoïde infiniment long, le champ vaut : $\boxed{\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{u}_z}$

Il est indépendant de la position du point M sur l'axe (puisqu'il y a alors invariance par translation).

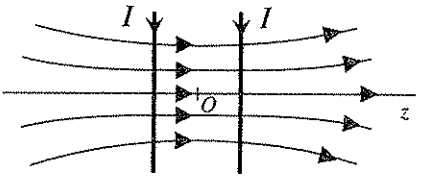


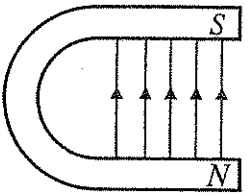
À l'extérieur du solénoïde infiniment long, le champ est nul :

$$\boxed{\vec{B}_{ext} = \vec{0}}$$

(à l'intérieur les lignes de champ se referment à l'infini).

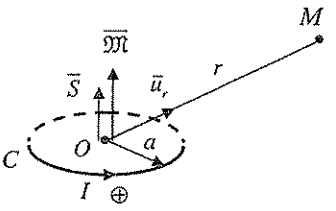
6. Outre l'intérieur de la bobine infinie (mais peu facilement accessible), on peut créer une zone de champ quasi uniforme :
- dans un dispositif appelé bobines de Helmholtz (figure de gauche) où deux spires identiques à celle de la question **4.** sont placées sur le même axe Oz ; en choisissant de les mettre à une distance égale au rayon de chaque spire, et en les faisant parcourir par le même courant d'intensité I dans le même sens, alors le champ est le plus uniforme possible dans le voisinage du centre O (voir la question **35.**).
- dans l'entrefer d'un aimant en fer à cheval (figure de droite) :





■ Dipôle magnétique

7. Soit C une spire circulaire de rayon a, filiforme, de centre O, orientée et parcourue par un courant d'intensité I. Le point d'observation est M tel que $OM = r$.
L'approximation dipolaire consiste à se placer loin de la spire, à savoir $r \gg a$. Les effets magnétiques de la spire sont alors ceux d'une entité appelée dipôle magnétique et caractérisée par un vecteur nommé moment dipolaire :

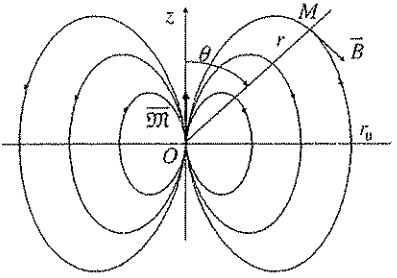


$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}}$$

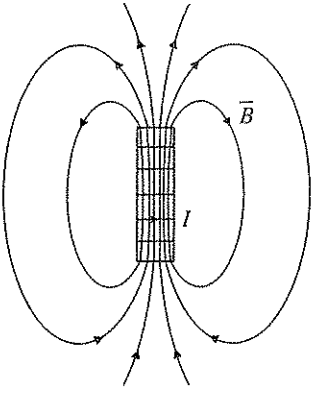
où $\vec{S}$ est le vecteur surface de la spire, direction : orthogonale au plan de la spire, norme : l'aire du disque s'appuyant sur la spire, sens : imposé par l'orientation du contour. Sur le schéma on a choisi $I > 0$.
Il est facile de vérifier que le sens de $\vec{\mathcal{M}}$ est indépendant de l'orientation (avec l'autre orientation et pour le même courant, $I < 0$ et $\vec{S}$ est inversée). En réalité le sens de $\vec{\mathcal{M}}$ est obtenu par la règle du tire-bouchon appliquée au sens réel du courant électrique.

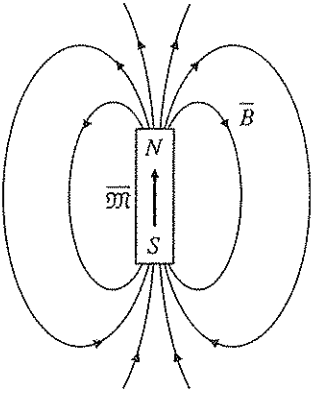
Pour un dipôle magnétique placé en O et de moment $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\,\overline{u}_z$ suivant l'axe Oz, les lignes de champ sont données par $r = r_0 \sin^2\theta$ où $r_0 = r(\theta = \pi/2)$.

La représentation des lignes de champ est valable loin de O.



8. Expérimentalement on constate que les lignes de champ d'une bobine (ou solénoïde) de longueur finie parcourue par un courant d'intensité I (figure de droite, avec $I > 0$) sont les mêmes que celles d'un aimant droit (figure de gauche). Pour ce dernier les lignes de champ vont, à l'extérieur de l'aimant, du pôle Nord au pôle Sud.





La bobine étant constituée d'un ensemble de spires ayant chacune un moment magnétique, il en est de même de la bobine entière, et par analogie de l'aimant.

■ Force et couple de Laplace ; puissance

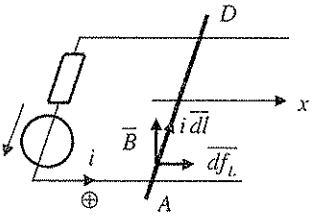
9. L'observation de la mise en mouvement d'une tige sur des rails de Laplace montre que la force est orthogonale à la tige, au champ magnétique et dépend du sens du courant.

Un élément de conducteur $\overline{dl}$ parcouru par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétique $\overline{B}$ subit la force de Laplace :

$$\boxed{\overline{df}_L = i\,\overline{dl} \wedge \overline{B}}$$

10. Il faut commencer par orienter le circuit. Il faut ensuite choisir un élément de tige $\overline{dl}$ orienté dans le sens positif. Le sens de $i\,\overline{dl}$ dépend du signe de i, $i\,\overline{dl}$ est toujours dans le sens réel du courant. Le sens de la force élémentaire de Laplace est alors

obtenu par la règle du tire-bouchon : quand on le tourne de $i\overrightarrow{dl}$ vers $\vec{B}$, alors il avance suivant $\overrightarrow{df}_L$.
Sur la figure on a choisi $i > 0$, avec $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et $B > 0$, $\overrightarrow{df}_L$ est suivant $\vec{u}_x$.
Parcourue par un courant et placée dans un champ $\vec{B}$, la tige subit la force de Laplace comme l'indique la figure :



$$\vec{f}_L = \int i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = i\left(\int \overrightarrow{dl}\right) \wedge \vec{B} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = +ilB\vec{u}_x$$

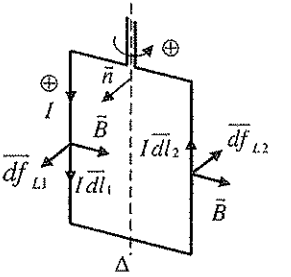
car $\vec{B}$ est uniforme et i est le même en tout point de AD.
À noter que le résultat de l'intégrale ne porte pas sur la longueur totale AD de la tige mais seulement sur le tronçon de longueur l entre les deux rails, soumis à $\vec{B}$, car le courant circule uniquement dans cette partie de la tige.

La puissance des forces de Laplace est :

$$P_L = \int \overrightarrow{df}_L . \vec{v} = \left(\int \overrightarrow{df}_L\right) . \vec{v} = \vec{f}_L . \vec{v} = ilBv$$

car en translation la vitesse $\vec{v}$ est la même pour tous les éléments $\overrightarrow{dl}$.
Il apparaît donc que la puissance résultante des forces de Laplace est la puissance de la résultante, d'où l'expression « puissance de la force de Laplace ».

11. Orientons le circuit et donc $\overrightarrow{dl}$. Sur le schéma $I > 0$ donne le sens de $I\overrightarrow{dl}$. Le schéma indique que sur les côtés de longueur b les forces élémentaires de Laplace sont opposées deux à deux alors que sur les côtés de largeur a elles sont nulles puisque les $\overrightarrow{dl}$ sont colinéaires à $\vec{B}$. Il en résulte que la somme des forces de Laplace s'appliquant sur le cadre est nulle. Ce dernier n'est donc pas entraîné en translation, en revanche il va se mettre à tourner autour de l'axe Δ sous l'effet d'un couple.



La résultante des forces sur le côté 1 et qui s'applique au centre du côté est $\vec{f}_{L1} = IbB\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au cadre (sens imposé par l'orientation du contour) ; la résultante des forces sur le côté 2 et qui s'applique au centre du côté est $\vec{f}_{L2} = -IbB\vec{n}$, d'où $\vec{f}_{L1} + \vec{f}_{L2} = \vec{0}$.
L'ensemble des forces n'ayant pas le même support mais dont la somme est nulle constitue un couple.
Le moment de ce couple par rapport à l'axe Δ orienté est :

$$M_L^{\Delta} = M_{\vec{f}_{L1}}^{\Delta} + M_{\vec{f}_{L2}}^{\Delta} = IbB.\frac{a}{2} + IbB.\frac{a}{2} = IabB$$

car dans les deux cas les bras de levier valent $a/2$.
En notant $S = ab$ la surface du cadre, il vient :

$$\boxed{M_L^{\Delta} = ISB}$$

Si le cadre tourne avec une vitesse angulaire ω autour de Δ, alors la vitesse linéaire du côté 1 est $\vec{v}_1 = (a/2)\omega\vec{n}$. Les puissances des deux forces étant égales, on a :

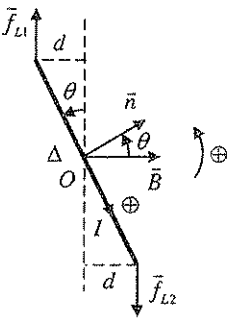
$$P_L = P_{L1} + P_{L2} = 2P_{L1} = 2\vec{f}_{L1}.\vec{v}_1 = 2IbB\frac{a}{2}\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_L = ISB\omega}$$

On remarque que $\boxed{P_L = M_L^{\Delta}\omega}$ résultat établi à la question **17.** du chapitre 7.

■ Action d'un champ uniforme sur un courant

12. * En absence de champ magnétique donc de forces de Laplace, les deux seules forces qui s'exercent sur le cadre, à savoir son poids et la tension du fil sans torsion, ont des moments nuls par rapport à l'axe Δ puisque portées toutes les deux par l'axe. La position de ce cadre autour de l'axe Δ est donc indifférente : toute position est position d'équilibre.

* On repère la position du cadre par l'angle θ que fait le champ $\vec{B}$ avec le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal au plan du cadre et dont le sens est obtenu à partir de l'orientation du cadre. L'angle θ algébrique est orienté comme sur la figure (orientation positive sur Δ). En présence de champ magnétique, il faut évaluer les résultantes des forces de Laplace sur chacun des 4 côtés :



– les côtés horizontaux longueur a subissent des forces verticales de même intensité et de sens opposés, la résultante de ces forces est donc nulle ; ces forces ont même support, l'axe Δ, le moment de ces forces par rapport à l'axe est donc également nul,

– les côtés verticaux de hauteur b subissent des forces horizontales s'appliquant au milieu des côtés et de norme égale $|IbB|$ (calcul identique à celui de la question précédente). Comme l'indique la figure, où on a choisi $I > 0$, ces forces sont de sens opposés et donc $\vec{f}_{L1} + \vec{f}_{L2} = \vec{0}$. Ces deux forces n'ayant pas le même support mais de somme nulle constituent un couple dont le moment par rapport à l'axe Δ est :

$$M_L^{\Delta} = M_{\vec{f}_{L1}}^{\Delta} + M_{\vec{f}_{L2}}^{\Delta} = -IbB.d - IbB.d = -2IbBd$$

car dans les deux cas le moment est négatif (elles ont tendance à faire tourner le cadre dans le sens négatif) et les bras de levier identiques valent $d = \frac{a}{2}\sin\theta$

En notant $S = ab$ la surface du cadre, il vient :

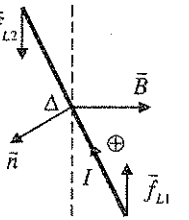
$$\boxed{M_L^{\Delta} = -ISB\sin\theta}$$

Cette action d'orientation cesse pour $M_L^{\Delta} = 0$ soit $\sin\theta = 0$ ce qui conduit à deux positions d'équilibre :

• $\theta_{éq} = 0$ soit $\vec{n}$ de même sens que $\vec{B}$; en écartant légèrement le cadre de cette position, pour $\theta = 0 + \varepsilon > 0$, M_L^{Δ} est négatif et pour $\theta < 0$, M_L^{Δ} est positif ; le

couple a tendance à ramener le cadre vers cette position : l'équilibre est stable (c'est le cas sur la figure ci-dessus).

- $\theta_{éq} = \pi$ soit $\vec{n}$ et $\vec{B}$ de sens opposé ; un léger écart à cet équilibre (poser $\theta = \pi + \varepsilon$) provoque une rotation du cadre vers sa position d'équilibre stable : cette position d'équilibre est instable (c'est le cas sur la figure ci-contre).



* Dans le moment par rapport à l'axe $M_L^{\Delta} = -ISB\sin\theta$, on reconnaît la composante suivant $\vec{n}$ du moment magnétique $\mathfrak{M} = IS$ du cadre dont l'expression vectorielle est $\vec{\mathfrak{M}} = IS\vec{n}$; le $\sin\theta$ est obtenu comme norme du produit vectoriel dans $\vec{M}_L = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$. Ce résultat est général :

$$\boxed{\vec{M}_L = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}}$$

13. Les résultats de la question précédente établis dans le cas simple d'une spire rectangulaire sont valables pour un circuit plan quelconque et en particulier pour une spire circulaire donc pour un dipôle magnétique (spire circulaire vue de loin) qui a en commun avec un aimant d'être représenté par un moment magnétique.
L'expression précédente du moment vectoriel des forces de Laplace s'applique pour un aimant de moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ placé dans un champ $\vec{B}$: $\vec{M}_L = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$.

En résumé ces résultats sont :

* En champ $\vec{B}$ extérieur uniforme la résultante des forces sur le dipôle magnétique (ou l'aimant) est nulle :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0}}$$

Rq : Si $\vec{B}$ est non uniforme, alors $\vec{F} \neq \vec{0}$ et qualitativement, le dipôle est attiré du côté où le champ est le plus fort, après s'être orienté en rotation dans la position d'équilibre stable.

* Le moment du couple qui s'exerce sur le dipôle (ou l'aimant) est :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}}$$

* L'énergie potentielle du dipôle magnétique (ou de l'aimant) dans le champ $\vec{B}$ extérieur est :

$$\boxed{E_p = -\vec{\mathfrak{M}}.\vec{B}}$$

Dans les positions d'équilibre, le moment du couple est nul, ce qui signifie que le dipôle s'aligne sur le champ extérieur. L'énergie potentielle du dipôle montre que la situation où $\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{B}$ sont de même sens est stable (E_p minimale).

Applications directes du cours

◙ Champs magnétiques

14. À l'extérieur de l'éclair, le champ produit est celui d'un fil rectiligne : $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

La condition $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} > B_L$ conduit à $\underline{r < 10 \text{ m}}$.

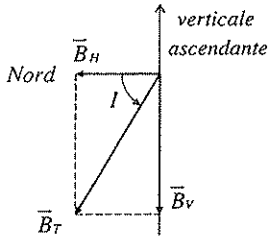
Il s'agit d'un simple ordre de grandeur avec les données de l'énoncé.

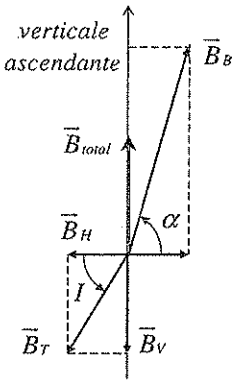
15. * Il apparaît sur le schéma ci-dessous que $\cos I = B_H / B_T$,

d'où $B_T = 2B_H = 4.10^{-5}$ T.

Ensuite au choix $\tan I = B_V / B_H$ ou $\sin I = B_V / B_T$ soit $B_V = 3{,}5.10^{-5}$ T.

On trouve évidemment des valeurs du même ordre que B_H





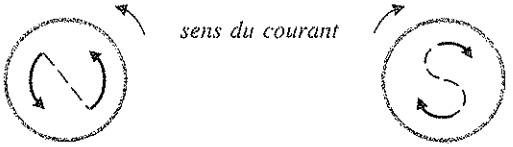
* La composante horizontale de la bobine doit compenser la composante horizontale du champ terrestre et sa composante verticale doit être dirigée suivant la verticale ascendante, d'où le schéma ci-dessus. Le plan de la bobine est perpendiculaire à $\vec{B}_B$.

$$\cos\alpha = \frac{B_H}{B_B} = \frac{B_H}{2B_T} = \frac{1}{2}\cos I \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 75° \text{ on a bien } \alpha > I$$

Pour le champ résultant il suffit de soustraire les deux composantes verticales :

$$B_{total} = B_B \sin\alpha - B_V = 4{,}3.10^{-5} \text{ T}$$

16. Reprendre la figure de la spire circulaire de la question **4.** où les lignes de champ sont orientées à partir de la règle du tire-bouchon appliquée au sens du courant. Par analogie avec un aimant (figure de la question **8.**), la face Nord est celle de laquelle les lignes de champ partent du circuit et la face Sud celle par laquelle elles reviennent au circuit. Ci-dessous un moyen mnémotechnique simple :



17. Le champ d'une bobine de N spires est N fois le champ d'une spire seule (les champs sont additifs, par ailleurs la bobine étant plate tout se passe comme si on avait une spire seule parcourue par un courant d'intensité NI). Par ailleurs les deux bobines de Helmholtz créent le même champ en norme au centre du dispositif (la fonction est paire) et de même sens si le courant est dans le même sens dans les deux bobines. Les bobines sont distantes de a (le rayon de chaque spire) et donc le centre est distant de $a/2$ de chaque spire d'où :

$$B_c = 2N\,B\left(z=\frac{a}{2}\right)=\frac{\mu_0 NI}{a}\left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}$$

AN : $B_c = 0{,}9.10^{-3}$ T de l'ordre de 50 fois plus grand que le champ terrestre, ce qui permet de négliger ce dernier dans le dispositif de la question **12.**.

18. * En accord avec le schéma de l'énoncé, $\alpha_1 < \alpha_2$ soit $\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 > 0$, résultat attendu en appliquant la règle du tire-bouchon au courant conduisant à un champ magnétique dans le même sens que $\vec{u}_z$.

* Pour un solénoïde infiniment long, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$, d'où $\boxed{\vec{B}_\infty = \mu_0 nI\,\vec{u}_z}$

alors indépendant de la position du point M sur l'axe (puisqu'il y a dans ce cas invariance par translation) et que tous les points de l'axe sont à l'intérieur du solénoïde infini.

* Si $\alpha_1 = \alpha_c$, alors $\alpha_2 = \pi - \alpha_c$ et $\boxed{\vec{B}_c = \mu_0 nI\cos\alpha_c\,\vec{u}_z}$

* Au centre d'un solénoïde de rayon a et de longueur L, le champ magnétique est en norme $B_c = B_\infty \cos\alpha_c$; il est égal à moins de 1% près à celui du solénoïde infiniment long si

$$\cos\alpha_c = \frac{L/2}{\sqrt{L^2/4+a^2}} \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L}{2a} \geq 7}$$

c'est-à-dire si sa longueur est au moins égale à sept fois son diamètre. Ce qui valide le modèle solénoïde infini pour les bobines longues réelles, dans la région centrale.

19. Comparaison du champ d'une spire et de celui du dipôle équivalent.

a) Le champ d'une spire d'axe Oz est, au point M, porté par cet axe :

$$B_{sp.} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha$$

b) Un dipôle magnétique placé en O, de moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \pi R^2 I\, \vec{u}_z$, crée en un point de coordonnées (r,θ), un champ de composantes :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathfrak{M}\cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}\sin\theta}{r^3}$$

Sur l'axe Oz ($\theta = 0$), au point M ($r = z$), ce champ apparaît axial ($B_r \equiv B_z$ et $B_\theta \equiv 0$) et vaut : $B_{dip.} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2\pi R^2 I}{z^3} = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$

c) $B_{sp.} = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\dfrac{R^3}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$ et le rapport :

$$\frac{B_{sp.}}{B_{dip.}} = \frac{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}{z^3} = \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2} > 1$$

L'identification de la spire à un dipôle à mieux que 1% près suppose

$$\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2} < 1{,}01 \;\Rightarrow\; 1+\frac{3R^2}{2z^2} < 1{,}01 \;\Rightarrow\; \frac{3R^2}{2z^2} < 10^{-2}, \text{ soit :}$$

$$\boxed{z > \sqrt{150}\,R \approx 12R}$$

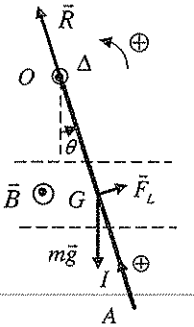
Même à des distances pas très grandes, on peut considérer la spire comme un dipôle magnétique.

■ Force et couple de Laplace

20. $I\,\overrightarrow{dl}$ vers la gauche, $\vec{B}$ vers l'avant, et donc $\overrightarrow{df}_L$ vers le haut.

21. La force est orthogonale à la tige et au champ magnétique et sa norme est $F = IlB\sin\theta = 0{,}01$ N, ce qui malgré un courant et un champ magnétique importants ne représente que l'équivalent du poids d'une masse de 1 g. Pour augmenter l'effet on peut remplacer le fil unique par un ensemble de N brins.

22. Les forces qui s'exercent sur la tige en équilibre sont :



- le poids $m\vec{g}$ qui s'applique au centre de masse G
- la réaction d'axe $\vec{R}$ qui s'applique en O et de moment nul par rapport à Δ
- la force de Laplace : on oriente positivement le conducteur suivant AO ; tous les $I\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$ sont perpendiculaires à la tige et de même sens ; la résultante sur le tronçon central de longueur l (dans la zone entre pointillé sur la figure) s'applique en G et vaut $\vec{F}_L = IlB\,\vec{u}_\theta$. Sur la figure $I > 0$.

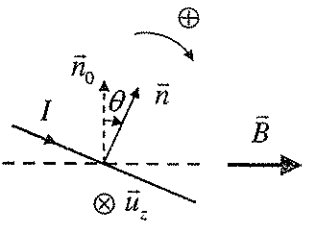
La loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté Δ donne :

$$M^{\Delta}_{m\vec{g}} + M^{\Delta}_{\vec{R}} + M^{\Delta}_{\vec{F}_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad -mg.OG\sin\theta + 0 + IlB.OG = 0$$

Soit : $\sin\theta = IlB/mg$ et $\theta \approx 11°$ mesurable, mais I et B sont très grands.

Rq : L'extrémité A mobile baigne dans une cuve de mercure pour permettre le contact électrique (comme pour la roue de Barlow à la question **38.**), le courant revenant au générateur par un fil relié à O.

23. Ci-contre une vue de dessus de la situation ; en pointillé, la position du cadre sans courant dans les spires (la normale $\vec{n}_0$ est alors perpendiculaire à $\vec{B}$). En trait plein la position du cadre lorsque sa normale $\vec{n}$ a tourné d'un angle θ.



En effet le cadre est soumis au couple des forces de Laplace qui a tendance à ramener son plan perpendiculairement à la direction de $\vec{B}$. Ce couple est compensé par le couple de torsion dû aux deux fils : la cadre prend alors une position d'équilibre.

L'axe de rotation est orienté comme sur la figure :

– le couple des forces de Laplace est $\overline{M}_L = \overline{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} = NISB\cos\theta\,\vec{u}_z$; en effet il y a N spires d'où $\overline{\mathfrak{M}} = NIS\,\vec{n}$, et le produit vectoriel orienté suivant $\vec{u}_z$ est proportionnel au sinus de l'angle $(\pi/2 - \theta)$ entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$, soit $\cos\theta$

– les couples de rappel de torsion dus aux deux fils s'ajoutent : $\overline{M}_T = -2C\theta\,\vec{u}_z$

– les moments du poids et des tensions des fils sont nuls par rapport à l'axe car ces forces sont parallèles à l'axe.

À l'équilibre, on a donc : $M_L + M_T = 0$ soit $NISB\cos\theta - 2C\theta = 0$

$$\text{soit} \quad B = \frac{2C\theta}{NIS\cos\theta}$$

A.N. : Attention θ en radian, $B \approx 1{,}0.10^{-2}$ T important malgré l'enroulement de 100 spires rectangulaires et l'intensité très grande. La valeur 500 fois plus élevée que le champ magnétique terrestre justifie de l'avoir négligé.

24. Une aiguille aimantée s'oriente dans le sens du champ magnétique ; si le champ est tournant, alors il entraîne l'aiguille aimantée qui se met à tourner sur elle-même autour de son axe vertical à la même vitesse que le champ : c'est le principe du moteur électrique, à savoir obtenir une action mécanique de rotation à partir d'une source électrique.

Rq : Ce type de moteur électrique, constitué d'un moment magnétique permanent placé dans un champ tournant est appelé moteur synchrone, car il tourne à la même vitesse que le champ (voir question **40.**)

L'énergie provient du générateur électrique qui crée les courants à l'origine du champ magnétique tournant (cette partie fixe du moteur est appelée le stator) ; la pièce mobile du moteur (appelée le rotor) et qui tourne autour de son axe reçoit cette énergie par l'intermédiaire du travail mécanique des forces de Laplace et la transforme en énergie cinétique de rotation.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

25. Oersted observe vers 1819 qu'une aiguille aimantée placée au voisinage d'un fil électrique est déviée par le passage du courant. Cette découverte, qui fit très rapidement sensation dans toute l'Europe, est capitale car elle fait apparaître des rapports insoupçonnés entre l'électricité et le magnétisme. Dès lors expériences et théories se succèdent à un rythme inconnu en physique. En effet durant l'année 1820, Biot et Savart étudient l'expérience d'Oersted et Laplace déduit de leurs expériences la loi portant leurs noms. La même année 1820, Ampère achève la théorie des champs magnétiques engendrés par des courants continus !

26. Rowland, physicien américain, réalise à Berlin vers 1875 l'expérience suivante : il produit un champ magnétique (certes faible) par des charges électriques statiques déposées sur un disque tournant à grande vitesse. Il montre ainsi que les courants de convection (charges immobiles par rapport à un support en mouvement) créent des champs magnétiques au même titre que les courants de conduction (charges mobiles dans un support fixe) et en déduit ainsi l'identité entre les charges électrostatiques et les charges circulant dans les courants électriques.
Le disque doit être isolant pour permettre aux charges de rester immobiles par rapport à lui, sinon sur un conducteur, les charges se repoussant, s'éloigneraient les unes des autres. De plus aux courants de convection se rajouteraient des courants de conduction (par inertie) qui modifieraient aussi la répartition des charges.

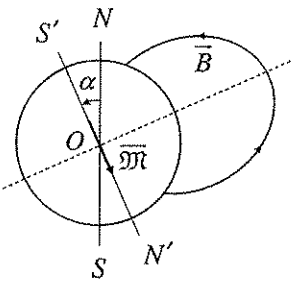
27. Cela dépend de l'appareil envisagé bien sûr, mais est surtout fonction de sa distance à l'utilisateur. Pour un rasoir électrique à 1 cm : $B \approx 800$ µT ; un sèche-cheveux à 15 cm : $B \approx 30$ µT (de l'ordre du champ terrestre) ; un four à micro-ondes, un aspirateur, un téléviseur ou une machine à laver à 1 m : $B \approx 0{,}1$ à 1 µT ; ces champs sont alternatifs sinusoïdaux.

28. L'aiguille aimantée d'une boussole s'oriente spontanément dans le champ magnétique terrestre. L'extrémité qui se dirige vers le nord géographique est appelé pôle Nord de l'aimant, et celle qui se dirige à l'opposé, vers le sud géographique, est appelée pôle Sud.
La position d'équilibre stable de l'aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ dans le champ magnétique terrestre $\vec{B}$ correspond à un moment de force $\vec{M} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ nul (d'où $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ colinéaires afin que la boussole ne tourne plus) et une énergie potentielle $E_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}.\vec{B}$ minimale, ce qui signifie que le dipôle s'aligne sur le champ extérieur dans la situation où $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ sont de même sens : le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de l'aimant de la boussole est donc dirigé de son pôle Sud vers son pôle Nord.

29. Le noyau solide de la Terre est le siège d'une radioactivité naturelle dont l'énergie dégagée permet au fer d'une couronne concentrique de se maintenir à l'état liquide. Le mécanisme est alors complexe : des courants électriques dans cette couche de fluide conducteur et le champ magnétique s'auto-entretiennent par des phénomènes d'induction et d'inertie liés à la rotation de la Terre (principe de la dynamo où le

courant est à l'origine du champ et où l'action du champ sur le conducteur en mouvement crée le courant).

Le champ géomagnétique est en première approximation celui d'un dipôle magnétique (macroscopique) placé au centre O de la Terre, de moment dipolaire de valeur $\mathfrak{M} = 8{,}3.10^{22}$ A.m^2, et dont l'axe $S'N'$ présente une inclinaison $\alpha = 11°$ par rapport à l'axe de rotation terrestre SN, les polarités magnétiques et géographiques étant inversées : une boussole présente son pôle Nord au pôle Sud de « l'aimant terrestre ».



Le pôle Sud S' (abusivement appelé pôle Nord magnétique) se situe dans l'extrémité Nord du Canada, dans les Elizabeth Islands, et le pôle Nord N' se situe près de la base Dumont d'Urville en Terre Adélie en Antarctique.

L'intersection avec la ligne de champ et la surface terrestre montre deux choses :

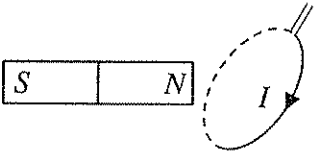
- une petite aiguille aimantée indique la direction de S' et non de N, soit en France, suivant l'endroit, une déclinaison comprise entre 3° et 9° vers l'Ouest par rapport au Nord géographique
- l'aiguille aimantée doit être équilibrée sinon elle piquerait du nez vers le sol ! Les lignes de champ sont inclinées sur l'horizontale vers le sol de 64° à Paris (ainsi la norme du champ y vaut en moyenne actuellement $B_0 = 4{,}7.10^{-5}$ T et la composante horizontale y est de $B_{//} = 2{,}3.10^{-5}$ T).

Si on veut se servir d'une boussole pour s'orienter, il faut disposer d'une carte actualisée des déclinaisons, car elles varient, lentement, avec le temps (comme d'ailleurs $\| \vec{B} \|$). Actuellement le pôle Nord magnétique se déplace d'environ 40 km/an . La première carte de déclinaisons a été réalisée par Halley (celui de la comète) en 1701.

Les protons et électrons d'origine solaire (principales particules chargées des vents solaires, également responsables des aurores boréales) sont piégés par le champ magnétique terrestre et constituent, au voisinage de l'équateur magnétique (en pointillé sur la figure) les fameuses ceintures de van Allen découvertes à la fin des années 1950 avec le lancement des premiers satellites. Ce « bouclier magnétique » constitue une protection efficace pour les êtres vivants car il empêche une partie importante des vents solaires de parvenir à la surface terrestre.

30. Un aimant (ou une spire parcourue par un courant) ne subit de force (au sens où la résultante des forces de Laplace est non nulle) que lorsqu'il est placé dans un champ magnétique non uniforme. Ceci est précisément le cas à l'extrémité d'un aimant (puisque les lignes de champ s'écartent ou convergent). Voilà pourquoi deux aimants s'attirent ou se repoussent suivant que l'on présente des polarités opposées ou identiques.

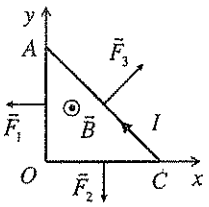
Pour qu'un aimant présentant sa face Nord à une bobine l'attire, il faut que cette dernière présente sa face Sud, ce qui impose le sens du courant



comme vu à la question **16.**, soit $I > 0$ avec l'orientation choisie.

31. On met en place deux systèmes de bobines (S) et (S') dont les axes sont orthogonaux et qui sont alimentés en parallèle par une source de tension sinusoïdale de fréquence ω, l'une des dérivations comportant en série un condensateur afin que les deux intensités i et i' soient déphasés ; à l'intersection des axes, dans le voisinage de O, on obtient alors la superposition de deux champs magnétiques perpendiculaires, l'un suivant Oy créé par i en $\cos(\omega t)$ par exemple et l'autre suivant Ox créé par i' en $\cos(\omega t + \varphi)$. Si les paramètres du circuit sont adaptés, alors ces deux champs sont égaux en norme et déphasés de $\varphi = \pi / 2$ (en quadrature de phase) et leur résultante est un champ tournant autour de Oz dans le plan xOy à la pulsation ω.
En effet, comme en électrocinétique, où l'on observe à l'oscilloscope en XY, un cercle obtenu à partir de tensions égales en valeur efficace et déphasées de $\pi / 2$.

32. Le circuit plan fermé (de forme quelconque) est équivalent à un dipôle magnétique ; or il n'y a pas d'action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un moment magnétique, la résultante cherchée est donc nulle.
Vérifions-le dans le cas d'un circuit en forme de triangle rectangle isocèle en sommant les résultantes sur chacun des trois côtés, sur la figure on a choisi $I > 0$:



– côté AO de longueur a : $\vec{F}_1 = -IaB\,\vec{u}_x$
– côté OC de longueur a : $\vec{F}_2 = -IaB\,\vec{u}_y$
– côté CA de longueur $\sqrt{2}a$: $\vec{F}_3 = I\sqrt{2}aB\dfrac{\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}}$

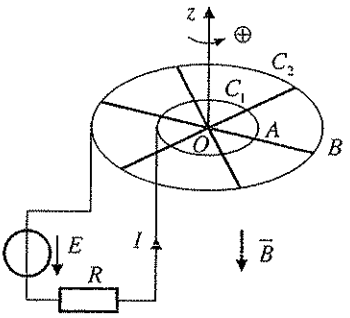
(où il apparaît le vecteur unitaire de la première bissectrice) ; on a bien $\vec{F} = \vec{0}$.

33. La notion de dipôle au niveau macroscopique permet souvent l'interprétation des interactions entre les courants ou entre les courants et les aimants. L'attribution d'un moment magnétique (mesurable) à un aimant, comme une boussole, permet de comprendre son orientation dans un champ magnétique extérieur.

Le dipôle magnétique a une grande importance théorique au niveau microscopique. Chaque atome se comporte, du fait du mouvement électronique, comme une petite boucle de courant (hypothèse proposée par Ampère dès 1820). Dans la matière, les mouvements de ces électrons atomiques ne font apparaître aucune direction privilégiée et annulent statistiquement leurs effets. Lorsque cette annulation n'est pas totale et qu'il apparaît à l'échelle macroscopique un certain effet, on dit que la matière est aimantée (fer, cobalt, nickel,...). De plus, le dipôle magnétique, à cause de diverses quantifications, n'est correctement décrit que par la mécanique quantique ; il se trouve au cœur des phénomènes d'aimantation de la matière avec ses nombreuses applications (disque dur, carte magnétique, ticket de métro,...).
Aux moments magnétiques orbitaux des électrons (voir la question **36.**), il faut ajouter les moments magnétiques de spin des électrons, mais également des nucléons ; ces derniers, bien que plus faibles à cause de la masse plus élevée, conduisent à des méthodes d'investigation basées sur la résonance magnétique

nucléaire (R.M.N.) utilisée dans le domaine médical dans l'imagerie par résonance magnétique (I.R.M.)...

34. Il suffit d'imaginer la tige conductrice OB en rotation autour de l'axe fixe Oz s'appuyant cette fois sur des rails conducteurs circulaires C_1 et C_2 d'axe Oz. En réalité le rotor d'un moteur tournant à la vitesse ω autour de l'axe Oz est constitué de p tiges du type OB, toutes identiques, régulièrement réparties, et rigidement liées les unes aux autres pour assurer l'équilibrage statique et dynamique du moteur (ce qui évite les à-coups).



Entre les rails est branché un générateur de tension constante E et la résistance en série dans le circuit est équivalente à une résistance unique R.

Le stator (non représenté sur la figure) est constitué d'un aimant permanent (dit inducteur) qui, dans l'espace où se trouve l'équipage mobile, établit un champ magnétique constant et pris uniforme $\vec{B} = -B_0 \vec{u}_z$.

Chaque tige parcourue par un courant I/p entre les points de contact A et B et placée dans le champ magnétique $\vec{B}$ subit un moment des forces de Laplace qui entraîne le mouvement de rotation du rotor autour de l'axe Oz dans le sens positif si $I > 0$, ce qui permet au moteur (c'est son rôle) de fournir sur son arbre un couple utile (presse agrumes, perceuse,...).

Exercices

35. Les bobines de Helmholtz

Soit $\vec{B}_1$ le champ créé par la spire placée en $z = -d/2$ et $\vec{B}_2$ le champ créé par la spire placée en $z = +d/2$. Le champ total $\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ est le plus uniforme possible dans le voisinage du centre O si la projection $B_T(z)$ dépend le moins possible de z pour $z \approx 0$, ce qui revient à y annuler le plus grand nombre possible de dérivées :

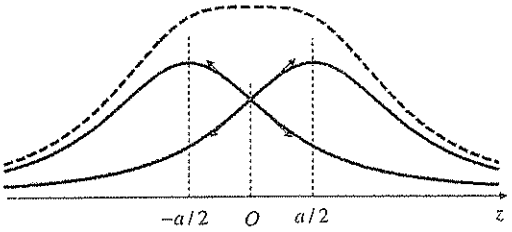
- au centre O, les deux champs sont parallèles et de même sens, et égaux en norme ($B_1(d/2) = B_2(-d/2)$ puisque $B(z)$ est paire) et ceci quelle que soit d ; le champ total est $B_T(O)$.
- le champ total possède en O un extremum puisque les deux courbes y admettent des pentes opposées ($B_1'(d/2) = -B_2'(-d/2)$ puisque $B' = \dfrac{dB}{dz}$ est impaire) et ceci quelle que soit d. S'aider de la figure ci-dessous.

– la dérivée seconde B'' étant paire, la somme $B_T'' = B_1'' + B_2''$ n'est nulle que si $B_1'' = B_2'' = 0$ en O ; ceci est possible si les deux graphes de B_1 et B_2 se coupent au niveau de leur point d'inflexion, ce qui suppose que $\frac{d}{2} = \frac{a}{2}$ soit $\boxed{d = a}$

– la dérivée troisième $B^{(3)}$ étant impaire (comme toute les dérivées d'ordre impair), la somme $B_T^{(3)}$ est nulle en O.

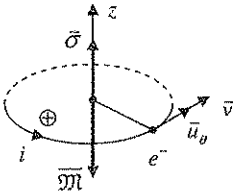
– la dérivée quatrième $B^{(4)}$ est paire sans être nulle en O, ce qui constitue le premier écart par rapport à $B_T(O)$; le premier terme du développement en série est donc $B_T(z) - B_T(0) = -\lambda z^4$ où $\lambda > 0$.

La figure ci-dessous où la somme $B_T = B_1 + B_2$ est représentée en pointillé explique la situation ; les bobines de Helmholtz sont utiles lorsqu'on a besoin d'un champ magnétique uniforme.



36. Moment magnétique orbital d'un atome ; magnéton de Bohr

a) On se place en coordonnées cylindriques avec $\vec{u}_\theta$ suivant la vitesse $\vec{v}$ de l'électron, soit $v > 0$.



Le moment cinétique lié au mouvement de l'électron est, par rapport au centre :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = 2m\frac{S}{T}\vec{u}_z \quad (1)$$

La force est centrale, la constante des aires est :

$C = r^2\dot{\theta} = 2\frac{S}{T}$ où S est l'aire du disque balayé pendant la période T du mouvement (avec $\dot{\theta} > 0$).

Le système est équivalent à une spire circulaire parcourue par un courant et donc, de loin, à un dipôle magnétique ; le contour étant orienté par $\vec{u}_\theta$, le déplacement de l'électron correspond à un courant d'intensité négative $i = -\frac{e}{T}$ puisqu'à un endroit donné de la trajectoire passe une charge $-e$ toutes les périodes T.

Le moment magnétique correspondant est : $\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S} = -\frac{e}{T}S\vec{u}_z \quad (2)$

(on vérifie une fois de plus que le sens du moment magnétique est donné par la règle du tire-bouchon appliqué au sens réel du courant $-\vec{u}_\theta$)

Les expressions (1) et (2) conduisent à la relation : $\boxed{\overline{\mathfrak{M}} = -\frac{e}{2m}\bar{\sigma}}$

Cette relation est du type $\overline{\mathfrak{M}} = \gamma\bar{\sigma}$ avec un rapport gyromagnétique $\gamma = -\frac{e}{2m}$ ici négatif comme la figure le laisse apercevoir.

En fait cette relation ne dépend pas de la nature de la trajectoire de l'électron et reste valable en mécanique quantique.

b) La boucle de courant (donc moment magnétique) que constitue la trajectoire ordonnée d'un électron autour d'un noyau a permis d'établir la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique : $\overline{\mathfrak{M}} = -\frac{e}{2m}\bar{\sigma}$; le moment cinétique étant quantifié avec une valeur élémentaire $\hbar$, le moment magnétique est lui-même quantifié avec une valeur élémentaire notée :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0{,}92.10^{-23} \text{ A.m}^2$$ et appelée magnéton de Bohr.

Commentaire : si dans la matière, chaque atome présente un magnéton de Bohr et qu'ils sont tous alignées comme dans un aimant, alors le moment magnétique résultant pour une mole de matière $\mathfrak{M} = N_A\mu_B$ est de l'ordre de l'unité en A.m^2.

Ceci permet de retrouver les valeurs données pour les aimants dans le tableau « Ordres de grandeurs » au début du chapitre partie questions.

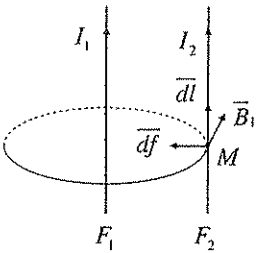
37. « Définition » de l'Ampère

Considérons deux fils infinis et parallèles F_1 et F_2, distants de a et parcourus par des courants d'intensité I_1 et I_2.

En un point M de F_2, le courant d'intensité I_1 crée un champ magnétique $\overline{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\bar{u}_\theta$ (les vecteurs unitaires sont relatifs à un système de coordonnées cylindriques d'axe F_1).

L'élément $\overline{dl} = dl\bar{u}_z$, au point M de F_2, parcouru par le courant d'intensité I_2 et placé dans le champ $\overline{B}_1(M)$, subit la force élémentaire de Laplace :

$$\overline{df} = I_2\overline{dl} \wedge \overline{B}_1(M) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl\, \bar{u}_r$$



Toutes les forces $\overline{df}$ pour les différents éléments $\overline{dl}$ sont parallèles entre elles.

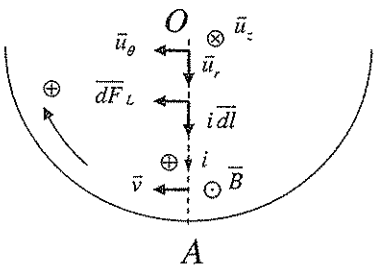
La force est attractive si I_1 et I_2 sont de même signe (comme sur la figure), et répulsive sinon.

La force par unité de longueur est, en norme : $\boxed{\frac{df}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}}$

AN : Avec $df / dl = 2.10^{-7}$ N.m^{-1} par définition en prenant $a = 1$ m et $I_1 = I_2 = 1$ A, il vient $\underline{\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}}$.

38. La roue de Barlow

a) Le disque est parcouru par un courant d'intensité i l'orientation est de O vers A.



Placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ comme indiqué sur la figure, un élément de conducteur $\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{u}_r$ placé en un point M du segment OA est soumis à la force élémentaire de Laplace $\overrightarrow{df}_L = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$ dirigée, si $i > 0$ (comme sur la figure) suivant $\vec{u}_\theta$ (vers la gauche sur la figure), et dont le moment par rapport à O entraîne le disque dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le champ magnétique est tel que $\vec{B} = -B\vec{u}_z$ avec $B > 0$ imposé par l'énoncé.
Le vecteur rotation de la roue est $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$ ($\omega > 0$, si $i > 0$), le vecteur vitesse du point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ s'écrit $\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$ (ici orthoradiale).

b) La force de Laplace élémentaire est $\overrightarrow{df}_L = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = idr\,\vec{u}_r \wedge (-B\vec{u}_z)$

d'où $\boxed{\overrightarrow{df}_L = iB\,dr\,\vec{u}_\theta}$ avec i algébrique

Rq : Comme les forces élémentaires sont toutes portées par $\vec{u}_\theta$, que i et B sont les mêmes, la force résultante de Laplace est $\vec{f}_L = iBa\vec{u}_\theta$ (cette expression n'est pas indispensable pour le calcul de la puissance).

c) La puissance élémentaire de la force de Laplace est :

$$dP_L = \overrightarrow{df}_L.\vec{v}$$

avec $\overrightarrow{df}_L = iBdr\,\vec{u}_\theta$ et $\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$, vecteur vitesse du tronçon considéré au point M.

$$\text{d'où } dP_L = \overrightarrow{df}_L.\vec{v} = \overrightarrow{df}_L = iB\omega r dr$$

La puissance totale est obtenue par intégration sur le rayon de la roue :

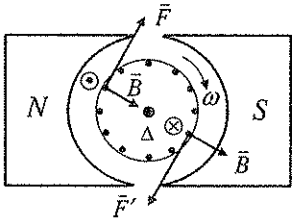
$$P_L = iB\omega\int_0^a r dr \quad \text{soit} \quad \boxed{P_L = \frac{1}{2}iB\omega a^2}$$

$P_L > 0$, car $i > 0 \Rightarrow \omega > 0$ et $i < 0 \Rightarrow \omega < 0$, la roue de Barlow reçoit bien de la puissance.

d) La source d'énergie dans ce montage est le générateur qui fournit du travail électrique, celui-ci étant converti en travail mécanique : c'est le principe du moteur électrique. Une partie du travail électrique est dissipé sous forme de transfert thermique (pertes par effet Joule).

39. Moteur électrique à courant continu

Lorsqu'ils sont parcourus par un courant électrique, les brins sont soumis à une force électromagnétique de Laplace. Pour avoir une action de rotation (un couple) deux brins opposés doivent être parcourus par des courants de sens opposés ; cela permet de les associer pour former une spire qui a tendance à faire tourner le rotor (comme à la question **11.**).



Rq : À noter que lorsqu'un conducteur passe à la limite entre les deux pôles de l'aimant (la ligne neutre) où la force de Laplace s'annule, il faut changer le sens du courant dans le brin si l'on veut que le mouvement se poursuive toujours dans le même sens ; c'est le rôle du collecteur et des balais (le champ magnétique et le courant changent de sens, mais pas la force).

a) En norme on a la force $F = IlB$ sur chaque brin.
AN : $F = 1{,}8$ N

b) Son travail est $W = \int \vec{F}.\overrightarrow{dM} = \int F\,dM = F2\pi r$ car la force est toujours colinéaire au déplacement et de même sens, et le travail est évalué sur un tour $2\pi r$.
AN : $W = 1{,}0$ J pour un brin.

c) En notant $\vec{v}$ la vitesse d'un brin, la puissance reçue par les N brins est :
$P = N\,\vec{F}.\vec{v} = NFv = NFr\omega = NFr2\pi n$
AN : $P = 21{,}4$ kW

Rq : L'expression de la puissance peut se réécrire avec celle de la force :

$P = NFr\omega = NIlBr\omega = N_{sp}ISB\omega$ où $N_{sp} = \dfrac{N}{2}$ est le nombre de spires chacune de surface $S = 2rl$, et finalement $P = N_{sp}M^{\Delta}\omega$ où $M^{\Delta} = ISB$ est le moment des forces de Laplace par rapport à l'axe (résultat vu à la question **11.** pour une spire).

40. Moteur synchrone

a) L'aimant et le champ tournent à la même vitesse angulaire (d'où le nom de machine synchrone), ils gardent entre eux, au cours du mouvement, le même angle α. L'aimant de moment $\overline{\mathcal{M}}$ placé dans le champ $\vec{B}$ subit le couple $\vec{\Gamma} = \overline{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$. L'angle $\alpha > 0$ entre $\overline{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ comme indiqué sur la figure conduit à un couple dirigé suivant $+\vec{u}_z$:

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \mathcal{M} B_0 \sin\alpha\,\vec{u}_z}$$

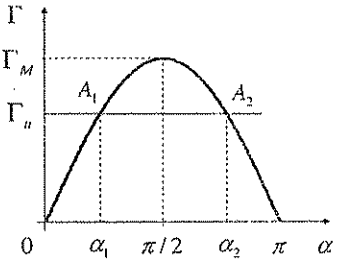
b) L'aimant subit de la part du champ un couple constant par rapport à Oz : $\Gamma = \mathcal{M} B_0 \sin\alpha$. Ce couple n'est moteur ($\Gamma > 0$) que si $0 < \alpha < \pi$ ($\overline{\mathcal{M}}$ suit $\vec{B}$ dans le mouvement). Dans le cas contraire, si $-\pi < \alpha < 0$ ($\overline{\mathcal{M}}$ précède $\vec{B}$ dans le mouvement), le couple est résistant.

Le couple que peut fournir le moteur est celui, en régime permanent, que reçoit le rotor par l'action de $\vec{B}$, soit $\Gamma = \mathfrak{M} B_0 \sin\alpha$; il est maximal pour $\alpha = \pi/2$, et vaut :

$$\boxed{\Gamma_M = \mathfrak{M} B_0}$$

Rq : La puissance que reçoit le rotor est $P = \Gamma\omega$; elle est elle aussi maximale pour $\alpha = \pi/2$ et vaut $P_M = \mathfrak{M} B_0 \omega$.

c) Le rotor reçoit le couple électromagnétique Γ et fournit à l'extérieur un couple mécanique utile Γ_u ; le régime ne peut être stationnaire (soit $\omega = cste$) que si $\Gamma = \Gamma_u$. Il suffit pour s'en convaincre d'appliquer au rotor la loi du moment cinétique par rapport à l'axe Oz (ou ce qui revient au même, le théorème de l'énergie cinétique) : $Jd\omega/dt = 0 = \Gamma - \Gamma_u$.



Dans l'hypothèse $\Gamma_u < \Gamma_M = \mathfrak{M} B_0$, l'égalité $\Gamma = \mathfrak{M} B_0 \sin\alpha = \Gamma_u$ conduit à deux valeurs possibles de α, α_1 et α_2, symétriques par rapport à $\pi/2$.

À partir de A_1, si α augmente à partir de α_1 (c'est-à-dire lorsque l'aimant prend du retard sur le régime permanent), alors Γ augmente et le champ $\vec{B}$ va donc l'entraîner plus fortement pour lui permettre de combler son retard ; en effet, alors $Jd\omega/dt = \Gamma - \Gamma_u > 0$

De même si à partir de A_1, α diminue, alors $\Gamma < \Gamma_u$ le champ réagit en faisant perdre l'avance à l'aimant.

Le point A_1 correspond donc à un régime stable ; inversement A_2 est instable.

Ainsi lorsque Γ_u varie de 0 à Γ_M, le domaine de α correspondant à un régime stable est $0 < \alpha < \pi/2$.

Travaux pratiques

41. Le champ magnétique se mesure avec un teslamètre. À l'extrémité d'une tige se trouve une sonde à effet Hall dont le principe est le suivant : une mince plaquette d'un semi-conducteur d'épaisseur environ 0,1 mm et de quelques mm^2 de surface est parcourue par un courant d'intensité $I \approx 1$ A importante et connue. L'introduction de la sonde dans un champ magnétique a tendance à dévier les électrons de conduction du courant électrique ce qui pour effet de faire apparaître une faible différence de potentiel latérale de l'ordre de quelques microvolts. La mesure de cette tension de Hall, donne, après étalonnage de l'appareil, accès au champ magnétique, ce qui constitue le principe du teslamètre à effet Hall.

42. La spire parcourue par le courant est assimilable à un dipôle magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\,\vec{S}$ où $\vec{S}$ est le vecteur surface du circuit (voir question **19.**).

Rappel : $\vec{S} = N\,\vec{s}$ où N est le nombre de tours de fil et $\vec{s} = \pi a^2 \vec{n}$ est le vecteur surface d'une spire de rayon a (avec un seul tour) de normale $\vec{n}$ (vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la spire dont le sens est lié à l'orientation de la spire).

Ce moment magnétique subit les effets du champ $\overrightarrow{B}$ de l'aimant :

- L'effet principal de $\overrightarrow{B}$ est le seul à se manifester tant que ce champ reste peu intense, lorsque l'aimant est encore éloigné de la spire. Il consiste à orienter $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ vers sa position d'équilibre stable où $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles et de même sens. D'où la rotation observée de la spire (voir aussi la question **28.**)
- À plus courte distance, le champ $\overrightarrow{B}$ au niveau de la spire devient plus intense, et plus inhomogène. L'orientation étant terminée, on observe alors une attraction vers les régions de champ fort, c'est-à-dire vers l'aimant. Le circuit vient donc au contact de l'aimant et peut aller jusqu'à l'entourer pour se placer dans le plan de sa face d'entrée où le champ est le plus intense.

43. L'aimant étant très éloigné, il faut placer la petite aiguille aimantée sur un support afin qu'elle puisse tourner sans frottement autour d'un axe vertical ; elle s'oriente alors spontanément dans le champ magnétique terrestre (en fait, dans sa composante horizontale).
En effet, un petit aimant tel que cette aiguille est assimilable à un dipôle magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et l'effet essentiel du champ terrestre est d'orienter ce dipôle vers sa position d'équilibre stable (voir question précédente et la question **28.**). Ceci permet de repérer le pôle Nord de l'aiguille : c'est le côté qui se dirige vers le Nord de la salle (facilement repérable grâce au soleil).
C'est l'occasion de remettre un peu de peinture rouge sur ce côté de l'aiguille !

Puis on approche un des deux pôles de l'aimant de l'aiguille et celle-ci en subit les effets ; le champ magnétique terrestre n'intervient plus car il devient négligeable devant le champ de l'aimant.
Si c'est le côté rouge de l'aiguille qui se présente face à l'aimant, c'est que le pôle de l'aimant présenté est un pôle Sud ; si c'est l'autre côté, c'est un pôle Nord.
Le pôle Nord de l'aiguille et pôle Sud de l'aimant (et inversement) s'attirent toujours pour la même raison : orientation de l'aiguille vers sa position d'équilibre stable.

Rq : Il ne faut pas trop approcher l'aiguille de l'aimant, sinon, elle viendra « se coller » à l'aimant (comme dans la question précédente).

44. Mesures du moment d'inertie et du moment magnétique d'un aimant

a) L'aimant est soumis de la part du fil de torsion à un couple de rappel $-C\,\theta\,\vec{u}_z$. La loi du moment cinétique pour l'aimant par rapport à l'axe de rotation orienté vers le haut (lié à l'orientation de θ), sachant que le moment de son poids est nul ainsi que celui de la tension du fil de torsion, s'écrit :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta \quad \text{de type} \quad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation ω, d'où un mouvement oscillatoire de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{J = \frac{CT^2}{4\pi^2}}$$

AN : $J = 3{,}4.10^{-5}$ kg.m^2

L'incertitude sur J est due à la mesure de T puisqu'on néglige l'incertitude sur C. L'incertitude-type sur T pourrait être traitée comme une incertitude-type de type A. On va ici considérer une mesure unique. La mesure de 10 périodes, on prend évidemment les passages du pendule à vitesse maximale ($\theta = 0$), on estime $U(10T) = 0{,}3$s, on néglige l'incertitude due au chronomètre.

$$\frac{U(J)}{J} = 2\frac{U(T)}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{U(J)}{J} = 2\frac{0{,}03}{1{,}8} \approx 3{,}3\% \quad \text{soit}$$

$$U(J) \approx 3{,}4.10^{-5} \times \frac{3{,}3}{100} \approx 10^{-6}\,\text{kg.m}^2 \quad \text{et} \quad \boxed{J = (3{,}4 \pm 0{,}1)10^{-5}\,\text{kg.m}^2}$$

Par la formule indiquée : $J_{th} = 3{,}3.10^{-5}$ kg.m^2, ce qui est cohérent avec la mesure. Attention cette valeur « théorique » a elle-même une incertitude due aux mesures de m, L et l. On a le calcul d'incertitude composée, avec les dérivées logarithmiques : $\frac{dJ_{th}}{J_{th}} = \frac{dm}{m} + \frac{d(L^2 + l^2)}{L^2 + l^2}$

$$\frac{U(J_{th})}{J_{th}} = \sqrt{\left(\frac{U(m)}{m}\right)^2 + \left(2L\frac{U(L)}{L^2 + l^2}\right)^2 + \left(2l\frac{U(l)}{L^2 + l^2}\right)^2}$$

b) La position d'équilibre stable de l'aimant de moment magnétique $\overline{\mathfrak{M}}$ dans le champ magnétique $\overline{B}$ des bobines correspond à un moment de force $\overline{\Gamma} = \overline{\mathfrak{M}} \wedge \overline{B}$ nul et une énergie potentielle $E_p = -\overline{\mathfrak{M}}.\overline{B}$ minimale, ce qui signifie que le dipôle s'aligne sur le champ extérieur dans la situation où $\overline{\mathfrak{M}}$ et $\overline{B}$ sont de même sens.

L'aimant est ensuite soumis de la part du champ à un couple de rappel $\overline{\Gamma} = \overline{\mathfrak{M}} \wedge \overline{B} = -\mathfrak{M}B\sin\theta\,\overline{u}_z$. La loi du moment cinétique se réécrit alors :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathfrak{M}B\sin\theta \approx -\mathfrak{M}B\theta \quad \text{pour de faibles angles}$$

C'est encore une équation de type $\ddot{\theta} = -\omega'^2\theta$ caractéristique d'un mouvement oscillatoire de période :

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M}B}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathfrak{M} = \frac{4\pi^2 J}{BT'^2} = \frac{C}{B}\left(\frac{T}{T'}\right)^2}$$

AN : $\mathfrak{M} = 0{,}52$ A.m^2

En négligeant les incertitudes sur C :

$$\frac{U(\mathfrak{M})}{\mathfrak{M}} = \sqrt{\left(\frac{U(B)}{B}\right)^2 + \left(2\frac{U(T)}{T}\right)^2 + \left(2\frac{U(T')}{T'}\right)^2}$$

On prend l'incertitude relative sur B de 1% (bobines d'Helmholtz) et sur les périodes de 1,7% comme au a) :

$$\frac{U(\mathfrak{M})}{\mathfrak{M}} = 4{,}3\% \quad \Rightarrow \quad U(\mathfrak{M}) \approx 0{,}03\,\text{A.m}^2 \quad \text{et} \quad \boxed{\mathfrak{M} = (0{,}52 \pm 0{,}03)\ \text{A.m}^2}$$

Par la formule indiquée : $\mathfrak{M}_{th.} = M\,Lle = 0{,}50\ \text{A.m}^2$, la mesure est donc cohérente. Là aussi cette valeur « référence » a une incertitude : mesures de L, l, e et M.

45. L'aimantation du matériau de l'aiguille est due à l'orientation collective de tous les dipôles microscopiques élémentaires qui la constituent au niveau atomique (voir la question **33.**). C'est lorsque tous les dipôles sont alignés (même direction et même sens pour tous les moments dipolaires) que l'aimantation est maximale.
Mais au cours du temps, sous l'effet des contraintes extérieures (agitation thermique, chocs,...) les dipôles se désorientent progressivement et l'aimantation diminue.
Lorsque la désorientation est totale, avec une direction aléatoire des moments dipolaires microscopiques, l'aimantation s'annule.
Pour maintenir l'aimantation, et donc cette orientation suivant une direction privilégiée, il faut placer l'aiguille aimantée dans un champ magnétique orienté convenablement dans la direction de ces moments magnétiques, qui est aussi la direction de l'aiguille elle-même. Il doit être assez intense pour contenir toute velléité de désorientation...
Il suffit donc de placer l'aiguille à proximité immédiate d'un aimant assez puissant et bien orienté (attention au sens, en particulier !) pour éviter la désaimantation.

Chapitre 3

■ Induction électromagnétique ■

Les ordres de grandeur utiles

Ce sont ceux rappelés au début du chapitre 12 page 603.

Le cours d'abord

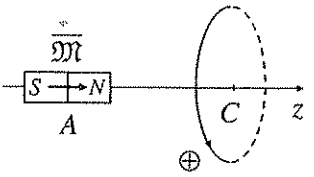
■ Flux d'un champ magnétique

1. On considère un contour plan fermé ; comment l'orientation choisie sur le contour entraîne-t-elle l'orientation d'une surface qui s'appuie sur ce contour ? Comment est défini le flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan ? En quelle unité s'exprime-t-il ? Pour un contour donné, le flux dépend-il du choix de la surface qui s'appuie sur ce contour ? Comment le calcul du flux est-il simplifié lorsque le champ magnétique est uniforme et lorsque la surface choisie est la surface plane qui s'appuie sur le contour plan ?

2. Qu'appelle-t-on « tube de champ magnétique » ? Comment évolue le flux le long d'un tube de champ ? En déduire une propriété connue sur l'évolution de la norme du champ magnétique le long d'un tube de champ en fonction de sa forme.

■ Loi de Faraday

3. Citer les deux raisons pour lesquelles le flux peut être variable, c'est-à-dire fonction du temps. L'illustrer sur l'expérience historique du déplacement relatif d'un aimant sur l'axe d'une spire comme sur la figure ci-contre. Que constate-t-on dans la spire ?



4. Énoncer la loi de modération de Lenz et l'appliquer pour trouver le sens du courant induit dans l'expérience décrite à la question précédente.

5. Relier la force électromotrice induite à la variation de flux (loi de Faraday) et interpréter.

6. Énoncer la « loi d'Ohm » généralisée pour un circuit conducteur en présence d'un phénomène d'induction. On peut commencer par donner $V_A - V_B$ pour un élément AB de circuit filiforme, parcouru par un courant d'intensité i et de résistance R_{AB}, puis discuter les deux cas, suivant que l'on a affaire à un circuit AB fermé ou à un tronçon AB ouvert.

Auto-induction

7. Qu'appelle-t-on flux propre d'un circuit ? Déduire des connaissances sur le champ magnétique la définition de L, inductance propre d'un circuit filiforme ? Quel est son signe ? De quoi dépend-elle ? Quelle est son unité ?

8. Montrer que l'inductance définie à la question précédente s'identifie à celle vue en électrocinétique.

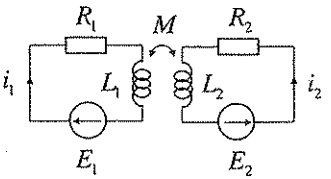
9. Faire un bilan énergétique et montrer que la bobine siège du phénomène d'auto-induction emmagasine une énergie magnétique $U_m = \frac{1}{2}Li^2$.

Inductance mutuelle

10. Comment est définie l'inductance mutuelle M de deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) ? Quel est son signe ? Comment s'écrit alors la force électromotrice dans chaque circuit ?

11. Donner la définition du coefficient de couplage α des deux circuits et proposer une interprétation qualitative de l'inégalité $|\alpha| \leq 1$.

12. Les deux circuits filiformes ci-contre sont couplés par une inductance mutuelle M. Établir l'expression de l'énergie magnétique U_m de l'ensemble.



Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Les exemples proposés dans le programme sont traités aux questions **26.** à **29.** dans la rubrique « Applications directes du cours ». Les questions **13.** à **15.** ci-dessous en rappellent les généralités.

13. Quelles sont les deux équations que l'on peut écrire dans l'étude d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent ? Qu'est-ce qui les caractérise ? Comment se manifeste la loi de Lenz ?

14. Quelle relation existe-t-il entre la puissance de la force électromotrice et la puissance des actions de Laplace ? Comment obtenir un bilan global de puissance ?

15. Quel sont les deux types de conversion de puissance que peuvent réaliser ces systèmes ? Donner deux exemples de la vie courante pour chaque type.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ De manière générale il faut, pour résoudre les exercices d'induction, une grande vigilance pour éviter les erreurs de signe, aussi bien dans les équations électriques que mécaniques ; quelques règles simples énoncées dans les points suivants permettent de les réduire.

☐ Le flux magnétique est une grandeur scalaire algébrique (et non forcément positive comme on a trop tendance à le croire !) obtenue par produit scalaire de deux grandeurs vectorielles, le champ magnétique et le vecteur surface. Rappelons que la normale $\vec{n}$ d'une surface ouverte S quelconque s'appuyant sur le contour C est orientée à partir de l'orientation $\oplus$ par la « règle du tire-bouchon » (en le tournant dans le sens de $\oplus$, il avance dans la direction $\vec{n}$). Il est impératif de représenter les deux vecteurs, si le sens et la direction de $\vec{B}$ sont connus, sur une figure afin d'obtenir le signe du flux avant de le calculer. Ce dernier peut donc être positif ou négatif et son signe dépend de l'orientation positive $\oplus$ choisie et obligatoirement indiquée sur le contour orienté. Ce choix, arbitraire, doit être fait (lorsque l'énoncé ne l'impose pas) de manière à éviter le plus possible les flux négatifs.
En résumé : **Il faut impérativement choisir une orientation pour le contour et présenter ce choix sur un schéma.**

☐ Ne pas hésiter à redessiner le schéma électrique équivalent en y incluant une source de tension de fém e_{AB} orientée de A vers B (le sens de l'orientation $\oplus$) et ceci quel que soit le signe de e_{AB}, avant d'écrire l'équation électrique. Dans un tel schéma, il faut aussi dessiner la bobine si on veut tenir compte de l'auto-induction ; ceci conduit à écrire $u = \left(Ri + L\frac{di}{dt} \right)_{\infty} - e_e$, où e_e est la force électromotrice induite par un champ extérieur.

☐ Pour le calcul de la force élémentaire de Laplace $d\vec{f}_L = id\vec{l} \wedge \vec{B}$, il est impératif de représenter les trois vecteurs sur une figure afin d'obtenir le sens de $d\vec{f}_L$, ce qui oblige à choisir sur la figure un signe pour i, en général on choisit $i > 0$ (sur le schéma, pas dans les calculs où il reste algébrique). On calcule ensuite soit la résultante (pour un mouvement de translation), soit le moment résultant (pour un mouvement de rotation, et dont on rappelle qu'il n'est pas le moment de la résultante !...).

☐ Le sens de la force de Laplace ne dépend évidemment pas du choix de l'orientation positive ⊕ qui fixe à la fois le signe de l'intensité i et le sens de l'élément $\overline{dl}$; il faut simplement prendre garde lorsque $i<0$ de ne pas orienter $i\,\overline{dl}$ dans le sens de $\overline{dl}$.

☐ Les champs magnétiques produits par des circuits parcourus par des courants variables se calculent par les mêmes expressions qu'en statique.

☐ La loi de Faraday $e=-d\Phi/dt$ s'applique dans les deux types d'induction :

- dans le cas d'un circuit immobile placé dans un champ magnétique variable, $\Phi(t)$ est le flux magnétique à l'instant t à travers une surface (S) quelconque s'appuyant sur le circuit filiforme fermé (C).
- dans le cas d'un circuit mobile placé dans un champ magnétique permanent, $d\Phi$ est la variation de flux due au déplacement ou à la déformation du circuit (C) pendant dt.

☐ Dans les exercices, à propos de l'auto-induction, on rencontre deux cas entre lesquels il faut choisir, les énoncés ne précisant pas toujours :
l'auto-induction n'est pas prise en compte, ce qui revient à négliger le champ propre devant le champ d'origine extérieure, en particulier lorsque le circuit ne comporte qu'un seul tour de fil, comme un cadre ou une spire unique par exemple.
l'auto-induction est prise en compte (par le biais de l'inductance propre L) : c'est le cas lorsque le champ propre ne peut pas être négligé devant le champ d'origine extérieure, en particulier lorsque le circuit comporte un grand nombre de tours de fil, augmentant ainsi champ propre et flux propre.

☐ Il est utile de prévoir (ou à défaut de confirmer) l'évolution des phénomènes par application de la loi de Lenz (s'agissant d'une loi qualitative, elle ne nécessite pas d'orienter le contour du circuit contrairement à la loi de Faraday).

☐ On parle souvent et à tort de « la » vitesse $\vec{v}$ du conducteur mobile dans un champ magnétique ; en réalité dans une rotation ce vecteur est fonction du point M du conducteur et on a $\vec{v}(M)$ (le cas du rail de Laplace en translation où $\vec{v}$ est uniforme est tout à fait particulier).

☐ Rappelons que le flux du champ magnétique à travers une surface ouverte ne dépend pas de cette surface mais uniquement du contour sur lequel elle s'appuie ; pour un contour fixé, il convient donc de choisir astucieusement la surface d'intégration afin de réduire les calculs de flux. Mais très souvent on choisit la surface plane qui s'appuie sur un contour plan (par exemple le disque dans le cas d'un circuit de forme circulaire).

☐ Il est conseillé d'écrire les équations de la mécanique avec la vitesse v ou la vitesse angulaire ω faisant ainsi apparaître des dérivées premières (ex : dv/dt

au lieu de $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ou a (pour accélération), $d\omega/dt$ au lieu de $\ddot{\theta}$) ; cela facilite l'accès au bilan énergétique.

☐ Pour établir un bilan de puissance, multiplier l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v pour une translation et ω pour une rotation.

☐ Dans le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique permanent, il est conseillé de vérifier le « bilan auxiliaire » de puissance $P_{Lapl.} + P_{fém} = 0$; cela confirme la cohérence des expressions de la force de Laplace (ou du moment résultant) et de la force électromotrice, obtenues séparément.

☐ Ne faire figurer dans les deux membres de l'équation traduisant le bilan global de puissance lors d'un couplage électromécanique, que des termes intrinsèquement positifs ; cela permet plus facilement de voir d'où provient l'énergie et où elle va.

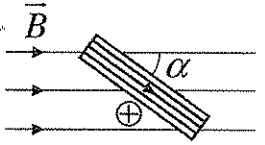
☐ Lorsqu'un énoncé précise par exemple « la vitesse du dispositif est constante », il faut comprendre que l'extérieur (la main d'un opérateur, un moteur,...) impose cette vitesse (qui à défaut évoluerait), et par conséquent il ne faut pas oublier son intervention dans un bilan de forces, de moments ou d'énergie.

☐ L'induction s'oppose à la *variation* d'un courant (et non au courant lui-même !) ; ainsi, s'il est bien connu qu'une inductance dans un circuit retarde l'établissement d'un courant ($\tau = L/R$), il faut également avoir présent à l'esprit que lorsqu'un courant est établi et qu'on ouvre le circuit, elle s'oppose également à sa diminution, donc favorise son maintien.

Applications directes du cours

■ Généralités

16. Une bobine plate, de surface $S = 50\ \text{cm}^2$ et comportant $N = 100$ spires, est placée dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0{,}02\ \text{T}$. L'angle entre le champ et le plan des spires est $\alpha = 30°$. Calculer le flux Φ du champ magnétique à travers la bobine orientée comme sur la figure. Le résultat est-il modifié si l'on inverse le sens de l'orientation ?



17. Comment peut-on interpréter le signe – dans l'expression de la loi de Faraday ?

18. Dans l'expérience de la spire et de l'aimant décrite aux questions **3.** et **4.** prévoir par la loi de Lenz le sens du courant d'intensité i induit dans la spire si :
– au lieu d'approcher la spire et l'aimant, on les éloigne
– on approche la spire et l'aimant en ayant retourné ce dernier.

Inductances propre et mutuelle

19. Inductance d'un solénoïde

Un tronçon de solénoïde, de longueur l, de section S, extrait d'un solénoïde suffisamment long (voir les questions **5.** et **18.** du chapitre **12**), comporte N spires.

* Déterminer son inductance L.

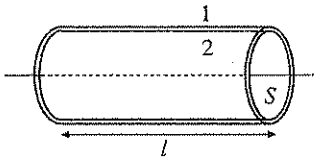
AN : Estimer L pour une bobine de TP à peu près cubique de côté 10 cm et comportant 300 spires.

* On double le nombre de spires (en gardant inchangées les autres caractéristiques) ; comment est modifiée l'inductance L ?

* Montrer que l'énergie magnétique $U_m = LI^2/2$ de la bobine peut s'écrire $U_m = u_m V$ où V est le volume du tronçon de solénoïde ; exprimer la densité volumique d'énergie magnétique u_m en fonction du champ B dans le solénoïde et de μ_0.

20. Qu'est ce qui interdit les discontinuités de courant dans un circuit électrique ?

21. Inductance mutuelle entre deux bobines en influence totale



Deux tronçons de bobines « infinies » de même axe, de même longueur l et de section quasi identique S sont l'une à l'intérieur de l'autre de manière à être en influence totale (toute ligne de champ qui passe dans une bobine passe dans l'autre). La plus extérieure (numéro 1) possède N_1 spires et est parcourue par un courant i_1, et la plus intérieure (numéro 2) possède N_2 spires et est parcourue par un courant i_2. Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle M entre ces bobines et vérifier la relation $M^2 = L_1 L_2$.

22. Association de deux bobines

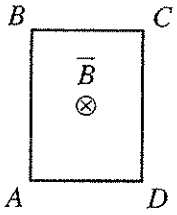
Deux bobines non résistives et d'inductances L_1 et L_2 sont disposées en série et couplées par une inductance mutuelle M (de signe quelconque).

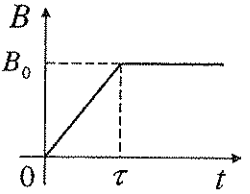
a) Quelle est l'inductance équivalente $L_{éq}$ de l'ensemble ? Commenter le résultat et l'expliquer qualitativement en fonction du signe de M. Quelle loi retrouve-t-on en éloignant les bobines l'une de l'autre ?

b) Quel résultat retrouve-t-on lorsque les bobines sont identiques et en influence totale ?

Circuit fixe dans un champ magnétique variable

23. Une spire rectangulaire de côtés $a = 12{,}5$ cm et $b = 8{,}0$ cm, de résistance $R = 0{,}10\ \Omega$ est placée dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son plan comme indiqué sur la figure et dont la norme est fonction du temps comme l'indique le graphe ci-dessous, avec $B_0 = 0{,}50$ T et $\tau = 1{,}0$ s.



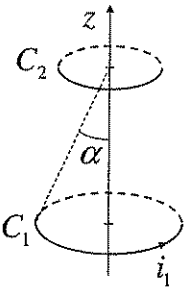


a) Déterminer successivement le sens et l'intensité du courant induit pour t tel que $0 \le t \le \tau$ en négligeant l'inductance propre de la spire.

b) Calculer la charge q transportée par le courant induit pendant l'intervalle de temps τ ; dépend-elle de τ ?

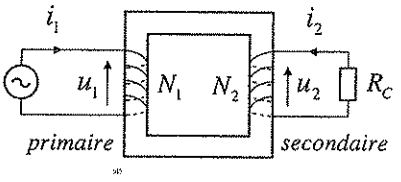
c) Que se passe-t-il pour $t \ge \tau$ sachant que l'inductance propre de la spire (unique) est $L \approx 1\ \mu H$.

24. Deux spires C_1 et C_2 de même axe, de rayons a_1 et a_2 sont distantes de D avec $D \gg a_1$ et $D \gg a_2$. C_1 est parcouru par un courant d'intensité $i_1(t)$ créé par un générateur (non représenté). Estimer simplement le flux envoyé par C_1 à travers C_2 (le champ créé par une spire sur son axe est supposé connu) et en déduire e_2 la force électromotrice induite dans C_2. Vérifier sur le champ $\overline{B}_2$ lié au courant induit $i_2(t)$ dans C_2 que la loi de Lenz est satisfaite. Quelle approximation a été faite ?



25. Le transformateur de tension

Un transformateur est schématiquement constitué de deux circuits de résistances négligeables et d'inductances propres L_1 et L_2, de nombre de spires N_1 dans le primaire (tension alternative $u_1(t)$ délivrée par un générateur) et N_2 dans le secondaire (tension $u_2(t)$ utile pour alimenter une résistance de charge R_C). Ces enroulements sont traversés par un carcasse magnétique (constituée en général d'un matériau ferromagnétique) qui canalise les lignes de champ magnétique, ce qui permet entre les deux circuits d'obtenir un couplage parfait : $M^2 = L_1 L_2$. Écrire les équations de maille et établir, en utilisant le résultat de la question **19.**, le rapport des tensions $u_2(t)/u_1(t)$; commenter.

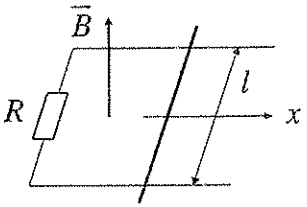


AN : Le primaire d'un transformateur a 50 spires et le secondaire 500 ; quelle est la tension aux bornes du secondaire quand le primaire est branché sur le secteur de 230 V. Le transformateur est parfait (sans pertes) ; quel est le rapport des intensités du secondaire au primaire ?

■ Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

26. Les rails de Laplace (1)

Un circuit est constitué de deux rails rectilignes, parallèles, horizontaux, de résistance négligeable et dont l'écartement est l. Le circuit comprend une résistance R et est fermé par une tige, parfaitement conductrice, de masse m, qui peut glisser sans frottement sur les deux rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical.



À l'instant $t = 0$, il n'y a pas de courant, $i(0) = 0$, et la tige est lancée avec une vitesse $v_0 \vec{u}_x$ ($v_0 > 0$), puis abandonnée à elle-même.

a) Calculer le flux et en déduire la fém e dont le circuit est le siège. Écrire l'équation électrique du système.

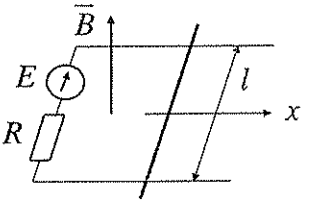
b) Calculer la force de Laplace et préciser le sens de déplacement de la tige. Écrire l'équation mécanique du système. Comment s'applique la loi de Lenz ? Déterminer la vitesse $v(t)$ de la tige.

c) Que devient l'énergie cinétique initiale de la tige ?

27. Les rails de Laplace (2)

Dans le même dispositif qu'à la question précédente, le circuit électrique comporte en plus de la résistance R, un générateur continu de force électromotrice E placé en série.

Les conditions initiales sont modifiées : à l'instant $t = 0$, le circuit est fermé, le courant s'établit instantanément et la tige immobile ($v_0 = 0$) est libre de se mouvoir.



a) Exprimer la force de Laplace $\vec{f}_L$ et préciser le sens de déplacement de la tige. Écrire l'équation mécanique du système.

b) Déterminer la force électromotrice e_{AB} induite dans la tige lorsqu'elle possède la vitesse $\vec{v}$. Comment s'applique la loi de Lenz ?

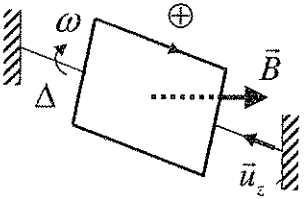
c) Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la tige ; introduire une vitesse limite v_l et un temps caractéristique τ.

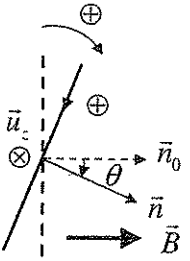
d) Effectuer le bilan de puissance ; de quel type de conversion s'agit-il ?

28. Principe d'un alternateur

Un cadre rectangulaire de surface S (le côté parallèle à l'axe est de longueur b et celui perpendiculaire à l'axe de largeur a) comporte N spires.

L'ensemble, de résistance R, est mobile autour d'un axe de suspension Δ horizontal (un axe de symétrie du cadre) et qui est fixé en ses extrémités à des supports par des liaisons pivot parfaites.





Le cadre est entraîné à une vitesse de rotation constante ω autour de l'axe et il est placé dans un dispositif où règne un champ magnétique $\vec{B}$ pris uniforme et horizontal.

Les conventions sont indiquées sur les deux figures, aussi bien pour l'orientation du cadre que pour l'angle θ dont a tourné le cadre par rapport à une position initiale verticale d'où le sens d'orientation du vecteur $\vec{u}_z$ sur Δ avec $\dot{\theta} = \omega$.

a) Évaluer le flux du champ magnétique à travers le cadre et montrer qualitativement qu'un courant induit d'intensité i prend naissance dans les spires ; quelle est la caractéristique de ce courant ?

b) Quelle hypothèse sur le champ magnétique extérieur permet de négliger l'inductance propre de circuit ? Écrire l'équation électrique et établir l'expression $i(t)$ de l'intensité du courant lorsque le circuit électrique constitué par les N spires se referme sur lui-même.

c) Calculer le couple électromagnétique M_L qui s'applique sur le cadre. La loi de Lenz est-elle satisfaite ? Écrire l'équation mécanique sachant que pour maintenir la rotation du cadre, il faut lui appliquer un couple extérieur Γ_e.

d) Proposer un bilan de puissance et montrer qu'il y a conversion de puissance, dans quel sens ici ?

e) En réalité le circuit des N spires n'est pas refermé sur lui-même mais entre le fil qui arrive sur le cadre (en A) sur la $1^{\text{ère}}$ spire et le fil qui quitte le cadre (en B) par la $N^{\text{ième}}$ spire, s'établit une différence de potentiel $V_A - V_B$ qui est mise à profit pour alimenter l'extérieur. Adapter le bilan de la question précédente et donner l'expression de la puissance P_{AB} disponible aux bornes extérieures du dipôle AB.

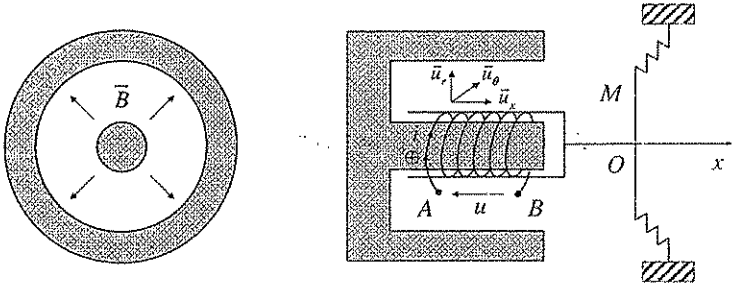
Proposer une application de ce dispositif simplifié en précisant quel phénomène est à l'origine de la rotation à vitesse constante du cadre.

29. Principe du haut-parleur électrodynamique

Schématiquement, un haut-parleur électrodynamique est composé :

- d'un aimant permanent (parties grisées sur la figure), qui fournit un champ magnétique $\vec{B}$ radial dans l'entrefer en forme de cavité annulaire
- d'une bobine de longueur totale de fil l, de résistance R, d'inductance L, située dans l'entrefer de l'aimant et soumise à la tension $u(t)$ d'un amplificateur entre ses deux extrémités A et B

– d'une membrane M solidaire de la bobine. L'ensemble mobile possède une masse m et peut osciller autour d'une position moyenne $(x=0)$ suivant l'axe Ox grâce à un dispositif de rappel schématisé par un ressort de raideur k. La transmission acoustique de la membrane à l'air environnant se traduit par une force de frottement fluide $-\alpha\vec{v}$ $(\alpha>0)$ opposée à la vitesse de la membrane, et dont la puissance correspond à la puissance sonore émise.



Expliquer brièvement et sans calculs le fonctionnement du haut-parleur et en particulier par quels mécanismes une tension $u(t)$ sinusoïdale délivrée par un amplificateur permet d'engendrer une onde sonore.
Pourquoi parle-t-on de couplage et de transducteur électrodynamiques ?
(pour une étude quantitative, se reporter à la question **53.**)

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

30. Montrer qualitativement que, quelle que soit la situation de départ (circuit dans un champ magnétique stationnaire, soit mobile sans courant soit immobile avec courant), force électromotrice et force de Laplace interviennent simultanément.

31. Quel physicien est considéré comme le père de l'induction électromagnétique ? Quelles conséquences théoriques et pratiques sa découverte a-t-elle eues ?

32. Comment faut-il comprendre l'expression de force « électromotrice » ?

33. Pourquoi le calcul d'une inductance propre par sa définition de la question **7.** est-il impossible à effectuer ?

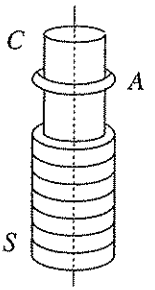
34. Le haut-parleur étudié à la question **53.** est un haut-parleur basse fréquence (les sons graves) avec un rendement mauvais dès que l'on s'en éloigne ; il n'est donc pas adapté à une restitution fidèle de sons audibles qui suppose au contraire un rendement quasi constant sur tout le spectre audible. Comment procèdent les fabricants d'enceintes ?

35. Un appareil expérimental dû à Thomson est composé d'un solénoïde S vertical parcouru par un courant sinusoïdal, et traversé par un cylindre plein C en fer doux

qui a pour effet d'augmenter le champ magnétique créé. Sur ce noyau de fer qui dépasse largement la longueur du solénoïde, on enfile un anneau métallique A (en aluminium) en forme de spire torique.

En l'absence de courant dans le solénoïde, l'anneau repose sur la face supérieure du solénoïde ; l'établissement du courant dans le solénoïde éjecte l'anneau spectaculairement vers le haut le long du noyau de fer sur quelques dizaines de centimètres.

Comment appliquer la loi de Lenz (au flux) pour expliquer le saut de l'anneau ? Pour quelles raisons le flux créé par le solénoïde à travers l'anneau varie-t-il ?



36. Un disque de cuivre suspendu à une tige peut osciller dans un plan vertical entre les pièces polaires d'un électro-aimant. Lorsque l'électro-aimant n'est pas excité, le pendule oscille librement en étant peu amorti. Lorsque le champ magnétique est établi, le pendule est freiné énergiquement. Interpréter ce phénomène et donner la définition des courants de Foucault.

37. Qu'appelle-t-on four à induction ?

38. Comment fonctionne une plaque à induction ?

39. Lorsqu'on veut utiliser des courants induits (dits de Foucault) pour chauffer un conducteur, a-t-on intérêt à prendre une fréquence élevée ?

40. Qu'appelle-t-on freinage par courants de Foucault ? En citer une application.

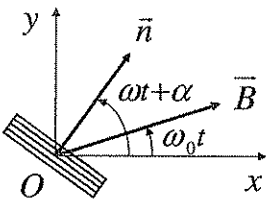
41. Quel est le principe d'un alternateur permettant la production de courant électrique à partir d'une action mécanique ?

42. À quoi sert un transformateur ? Citer des applications dans la vie quotidienne (pour la salle de TP voir la question **58.**).

43. Pourquoi utilise-t-on des lignes à haute tension pour transporter l'énergie électrique ? Comment s'y prend-on ?

44. Dans le plan xOy, le champ magnétique $\vec{B}$ produit par le stator est un champ tournant à la vitesse angulaire ω_0 et de norme constante.

Le rotor, une petite bobine plate, fermée sur elle-même, est constitué de N spires, leur axe étant dirigé par le vecteur unitaire $\vec{n}$ également dans le plan xOy. Cette bobine peut tourner à la vitesse ω autour d'un de ses diamètres porté par l'axe Oz (l'arbre du moteur).



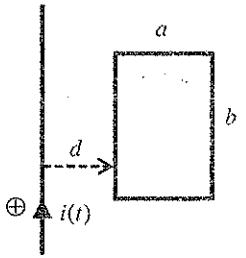
Montrer qualitativement, comment en régime permanent de rotation, ce dispositif peut fonctionner en moteur et justifier son nom de « moteur asynchrone ». Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$?

45. Quel est l'intérêt des moteurs électriques sur les moteurs thermiques (à explosion ou Diesel) ?

Exercices

46. Une bobine dans le champ inhomogène et variable d'un fil

Un fil rectiligne infini est parcouru par un courant d'intensité $i(t) = \sqrt{2} I_e \cos(\omega t)$; sa fréquence est de $f = 300$ Hz. Il est disposé dans le plan d'une bobine plate (représentée par son cadre) constituée de $N = 100$ spires conductrices de résistance totale $R = 1{,}0\ \Omega$, de côtés $a = 8{,}0$ cm et $b = 12{,}0$ cm, et dont le côté le plus proche se trouve à une distance $d = 2{,}0$ cm du fil.



a) Rappeler l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le fil infini.

b) Proposer une orientation du cadre et calculer le flux du champ du fil envoyé à travers la bobine.

c) En déduire le coefficient d'inductance mutuelle M entre le fil et la bobine ; commentaires. Application numérique.

d) Exprimer la force électromotrice induite $e(t)$ dans la bobine en introduisant M.

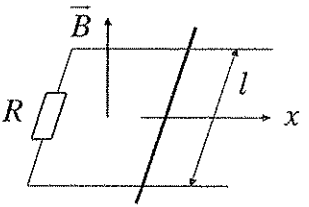
e) Expliquer l'approximation qui consiste à négliger l'inductance propre de la bobine. Quelle est alors l'intensité du courant induit $i_b(t)$ dans la bobine ? Et quel est le rapport entre les valeurs efficaces de $i_b(t)$ et $i(t)$? Application numérique.

f) Décrire sans calcul explicite les actions mécaniques entre le fil et la spire.

g) On tient compte à présent de l'inductance L de la bobine. Évaluer numériquement L sachant que l'épaisseur de la bobine est $l \approx 1$ cm. Par quelle autre équation est déterminé le nouveau courant induit $i_b'(t)$ dans le cadre. Quelle est, en régime permanent, sa nouvelle valeur efficace et son déphasage sur $i(t)$? Applications numériques et commentaires.

47. Les rails de Laplace (3)

On reprend le dispositif de la question **26.** : un circuit est constitué de deux rails rectilignes, parallèles, horizontaux, de résistance négligeable et dont l'écartement est l. Le circuit comprend une résistance R et est fermé par une tige, parfaitement conductrice, de masse m, qui peut glisser sans frottement sur les deux rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical.



Un opérateur exerce sur la tige une force $\vec{F}_{op}$ communiquant à cette dernière une vitesse constante $\vec{V} = V\,\vec{u}_x$ $(V > 0)$.

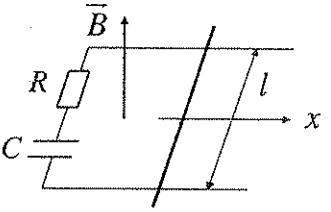
a) Déterminer la force $\vec{F}_{op}$ nécessaire pour permettre à la tige d'avoir son mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V}$.

b) Réaliser un bilan de puissance du dispositif ; commentaires.

c) Comment adapter ce dispositif de la tige « en translation » pour un dispositif où la tige est « en rotation » ? Application.

48. Les rails de Laplace (4) (*)

Dans le même dispositif qu'à la question précédente, le circuit électrique comporte en plus de la résistance R, une capacité C placée en série. Les conditions initiales sont modifiées : à l'instant $t = 0$, le condensateur est chargé $(q = q_0)$ et la tige est immobile $(v_0 = 0)$.



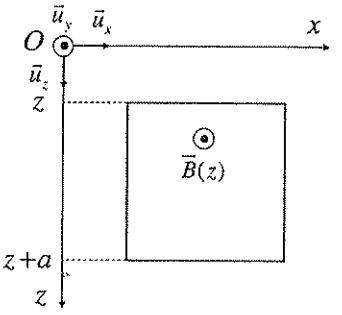
a) Choisir l'armature positive du condensateur de manière à ce que la tige se déplace vers les x croissants. Puis écrire les équations du système. Comment s'applique la loi de Lenz ?

b) Faire un bilan instantané de puissance ; de quel type de conversion s'agit-il ?

c) On pose $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{B^2 l^2}{mR}$. Donner les solutions $q(t)$, $i(t)$ et $v(t)$. Que constate-t-on lorsque $t \to \infty$? Expliquer.

49. Chute d'un cadre

Un cadre carré de côté $a = 10$ cm, de masse $m = 10{,}2$ g est constitué d'un fil conducteur de résistance $R = 10^{-3}\ \Omega$; il est placé dans le plan vertical xOz où Oz est la verticale descendante, perpendiculairement à un champ magnétique permanent mais non uniforme $\vec{B} = (B_0 - bz')\,\vec{u}_y$.



On note z la cote du côté supérieur du cadre et $b = 6{,}4$ T.m^{-1}. À $t = 0$, le cadre est lâché dans le champ de pesanteur $(g = 9{,}8$ m.s$^{-2})$ avec une vitesse initiale nulle.

a) Prévoir le sens du courant induit dans le cadre.

b) Calculer la force électromotrice induite e dans le cadre et en déduire le courant induit i.

c) Quelle est la résultante $\vec{f}_L$ des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre ? Commentaires.

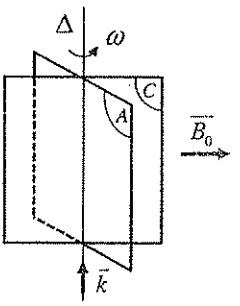
d) Que peut-on dire du mouvement de chute du cadre ? Applications numériques.

50. Cadres tournants dans un champ magnétique

Deux cadres A et C, liés rigidement entre eux, isolés électriquement l'un de l'autre, verticaux, et orthogonaux, chacun de résistance R, de surface S et de moment d'inertie J par rapport à l'axe, tournent autour de l'axe Δ porté par le vecteur unitaire $\vec{k}$.

À l'instant $t=0$, où ils ont une vitesse angulaire ω_0, ils sont plongés dans un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ constant, uniforme, et horizontal de norme B_0.

On appelle θ l'angle orienté entre $\overrightarrow{B_0}$ et la normale au cadre orienté A, à l'instant t et ω la vitesse angulaire de rotation de l'ensemble.



a) Calculer, à l'instant t, l'intensité du courant induit i circulant dans le cadre A en fonction de θ, ω, S, B_0, et R.

b) Calculer le moment $\overrightarrow{\Gamma_A}$ des actions de Laplace par rapport à Δ s'exerçant sur A ; le signe de la projection sur $\vec{k}$ était-il prévisible ? Former ensuite le moment $\overrightarrow{\Gamma_{tot}}$ sur l'ensemble A et C.

c) En déduire l'équation du mouvement, introduire un temps caractéristique τ, puis exprimer ω en fonction du temps ;.commentaire.

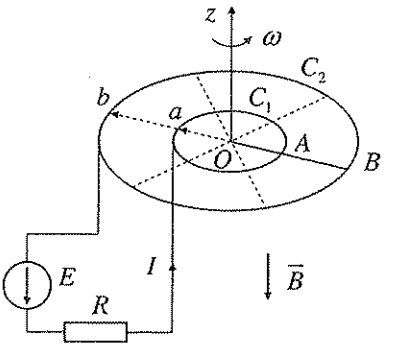
d) Faire un bilan de puissance en prenant bien soin de distinguer i_A et i_C pour les intensités dans les deux cadres et commenter le résultat.

51. Moteur à courant continu à entrefer plan (*)

Le rotor d'un moteur tournant à la vitesse ω autour de l'axe fixe Oz est constitué de p tiges homogènes infiniment conductrices du type OB, toutes identiques, de masse m et de longueur l, régulièrement réparties et rigidement liées les unes aux autres pour assurer l'équilibrage du moteur et éviter les à-coups.

Elles tournent dans le plan perpendiculaire à Oz en s'appuyant sur deux rails conducteurs circulaires C_1 et C_2 d'axe Oz et de rayons respectifs a et b. Entre les rails est branché un générateur de tension constante E et la résistance du circuit est équivalente à une résistance unique R.

Le stator (non représenté sur la figure) est constitué d'un aimant permanent (dit inducteur) à entrefer plan et qui, dans l'espace où se trouve l'équipage mobile, établit un champ magnétique constant et pris uniforme $\overrightarrow{B} = -B_0 \vec{u}_z$.



0. Préliminaires

Procéder à une analyse qualitative rapide pour montrer comment ce dispositif peut fonctionner en moteur. Avec quel autre dispositif bien connu peut-on faire l'analogie ?

1. Étude d'une tige seule

Supposons pour l'instant que le rotor soit constitué d'une seule tige OB, le courant d'intensité I parcourant la tige entre les points de contact A et B dans le sens de A vers B qui est celui de $\vec{u}_r$.

a) Calculer en fonction de B_0, a, b et I, le moment M_L^{Oz} par rapport à l'axe Oz des forces magnétiques exercées sur la tige.

b) Écrire *a priori* le bilan auxiliaire et en déduire l'expression de la force électromotrice e_{AB} (dont l'évaluation directe est plus difficile) en fonction de B_0, a, b et ω.

2. Mouvement du rotor complet

On revient au système à p tiges décrit dans l'introduction, parcouru par un courant total I.

a) Comment, d'un point de vue purement électrocinétique, sont disposés ces p conducteurs entre C_1 et C_2 ?

Que devient alors la différence de potentiel $V_A - V_B$ issue de la question **1**.a) et comment s'obtient le moment des forces sur l'ensemble du rotor en fonction du résultat de la question **1**.b) ? Montrer que les résultats sont inchangés ; quel intérêt y a-t-il alors à prendre p tiges ?

b) Écrire les équations mécanique et électrique du système donnant $I(t)$ et $\omega(t)$ sachant que :

- $J = ml^2/3$ est le moment d'inertie d'une tige par rapport à l'axe Oz ;
- on impose au moteur (c'est son rôle) de fournir sur son arbre un couple de moment égal à Γ_e constant ;
- le phénomène d'auto-induction du circuit est négligé.

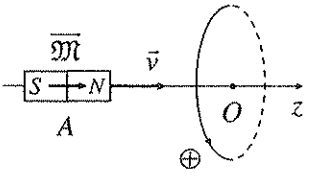
c) En déduire l'équation différentielle relative à l'évolution de la vitesse angulaire ω. Intégrer cette équation sachant qu'à l'instant initial le rotor est au repos, en introduisant un temps caractéristique τ et une valeur limite ω_l.

AN: Calculer ω_l et τ pour $E = 4$ V ; $R = 0{,}2\ \Omega$; $B_0 = 0{,}3$ T ; $a = 1$ cm ; $b = l = 5$ cm ; $m = 5$ g ; $p = 6$; $\Gamma_e = 5.10^{-3}$ m.N.

d) Montrer que le couple Γ_e fourni par le moteur à l'extérieur ne peut pas dépasser une valeur maximale Γ_{em} à déterminer.

52. Courant induit par un aimant mobile (*)

Une spire circulaire d'axe Oz, de rayon a et de résistance R (le coefficient d'inductance propre est ici négligeable) est immobile. Sur son axe, on déplace à vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_z$ constante ($v > 0$) un



petit aimant A d'abscisse $z<0$ assimilé à un dipôle magnétique de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}_z$.

a) Prévoir le sens du courant i induit dans la spire.

b) Calculer le flux envoyé par l'aimant à travers la spire (en choisissant une surface convenable qui s'appuie sur le contour) sachant que les composantes en coordonnées sphériques d'origine A du champ de l'aimant au niveau de la spire sont :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3},\quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\varphi = 0$$

Exprimer $\Phi(t)$ en fonction de $z(t)$.

c) En déduire le courant induit dans la spire. Dans quelle position de l'aimant (vis-à-vis de la spire) le courant induit est-il maximal ?

d) Quelle est la force magnétique qu'exerce l'aimant sur la spire ?

53. Le haut-parleur électrodynamique

Le schéma, les notations et le principe du haut-parleur ont été développés à la question **29.** En particulier, les grandeurs électriques sont définies algébriquement comme l'indique la figure (le sens positif est suivant $\vec{u}_\theta$) et tout vecteur est exprimé sur la base directe $\vec{u}_x$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_r$.

a) La bobine est parcourue par un courant $i(t)$; calculer la force de Laplace qu'elle subit et écrire l'équation mécanique reliant le déplacement $x(t)$ de l'ensemble membrane et bobine et leur vitesse $v(t) = dx(t)/dt$ à $i(t)$. Quelle est la puissance P_{Lapl} de la force de Laplace ?

b) Comment le bilan auxiliaire permet-il d'accéder à $P_{fém}$ puissance de la force électromotrice ? En déduire la force électromotrice e_{AB} ; quelle analogie peut-on faire ? La bobine est soumise à une tension $u(t)$; écrire l'équation électrique reliant $u(t)$, $i(t)$ et $v(t)$. Commentaire sur les deux équations.

c) Établir le bilan de puissance global sous la forme : $ui = \frac{d}{dt}(E_r) + P_1(i) + P_2(v)$ en donnant les expressions de E_r, P_1 et P_2, et interpréter physiquement chacun des termes du bilan. Que devient ce bilan de puissance en valeur moyenne temporelle pour un régime périodique ? Interpréter physiquement le résultat.
En déduire une définition du rendement η du haut-parleur. Comment améliorer ce rendement ?
Expliquer le rôle du champ magnétique dans le transfert de la puissance électrique à la puissance acoustique. Intervient-il dans η ?

La tension appliquée à la bobine est à présent sinusoïdale de pulsation ω ; seul le régime forcé est étudié et en notation complexe, la tension est écrite $\underline{u} = u_0 e^{j\omega t}$.

d) Montrer que l'on peut écrire $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ avec $\underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{am}$, où $\underline{Z}_e$ représente l'impédance électrique de la bobine et $\underline{Z}_{am}$ l'impédance acousto-mécanique (ou motionnelle) du haut-parleur. Donner les expressions de $\underline{Z}_e$ et $1/\underline{Z}_{am}$.

Montrer que dans l'hypothèse simplificatrice où α ne dépend pas de ω, l'impédance acousto-mécanique peut être modélisée par trois composants électriques notés R', L' et C' à déterminer en fonction des données. Quelle caractéristique mécanique représente chacun de ces composants ?

AN : Calculer la valeur de ces composants pour $B = 0{,}20$ T ; $l = 20$ m ; $m = 120$ g ; $k = 43.10^3$ N.m^{-1} et $\alpha = 6{,}0$ kg.s^{-1}, puis proposer le schéma électrique équivalent à l'ensemble du haut-parleur.

e) Donner l'expression du rendement η défini à la question c) en fonction des données. Pour quelle valeur ω_0 de la pulsation est-il maximal ?

Calculer numériquement la fréquence f_0 correspondante ainsi que la valeur η_0 du rendement sachant qu'en plus des valeurs numériques précédentes, $R = 2{,}0\ \Omega$.

Sachant qu'à cette fréquence f_0, la puissance moyenne reçue par le haut-parleur est $P = 15$ W et que le courant efficace est $i_{eff} = 1{,}8$ A, calculer la vitesse efficace v_{eff} et le déplacement efficace x_{eff} de la membrane.

Donner ensuite la valeur du rendement η pour une fréquence $f = 300$ Hz.

Travaux pratiques

54. L'approche d'un aimant d'une bobine circulaire (au voisinage de son axe) provoque une déviation du spot lumineux du galvanomètre auquel elle est reliée, ce qui montre la création d'un courant passager dans la bobine. Et que se passe-t-il si on déplace à présent la bobine le long de son axe en maintenant l'aimant fixe ? Signaler les analogies et différences de ces deux expériences.

55. Lorsqu'on ouvre un interrupteur dans un circuit inductif dans lequel circule un courant important, il n'est pas rare de voir ce que l'on appelle une « étincelle de rupture » entre les deux bornes de l'interrupteur ; expliquer.

56. La chute d'un petit aimant A possédant un moment magnétique $\overline{\mathcal{M}}$ dirigé vers le bas s'effectue à l'intérieur d'un tuyau vertical creux, de cuivre, dont la longueur est de 1 m. Dans ces conditions la durée de chute est de l'ordre de 13 s alors que dans un tube de verre de même géométrie, elle est de 0,5 s. Expliquer qualitativement cette différence sur des expériences faciles à réaliser ; comment la loi de Lenz est-elle satisfaite ?

57. Pourquoi les pièces métalliques d'un transformateur sont-elles feuilletées ?

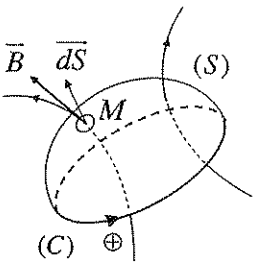
58. Où rencontre-t-on des transformateurs en salle de TP ?

Réponses aux questions

Le cours d'abord

Flux d'un champ magnétique

1. On considère un contour fermé plan (C) orienté arbitrairement dans le sens indiqué par $\oplus$. Alors une surface (S) qui s'appuie sur ce contour est orientée d'après la règle du tire-bouchon appliquée à $\oplus$: cela signifie qu'à un élément de surface dS en M on peut associer un vecteur $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$ dont la norme est égale à dS et où le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ a le sens de l'avancée du tire-bouchon lorsque celui est tourné dans le sens $\oplus$. On commence par des points loin du contour, puis on oriente de proche en proche.



Alors le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface (S) s'appuyant sur le contour orienté (C) est :

$$\boxed{\Phi = \iint_{(S)} \vec{B}.\overrightarrow{dS}}$$

L'unité du flux est le $T.m^2$ appelé weber (symbole Wb).

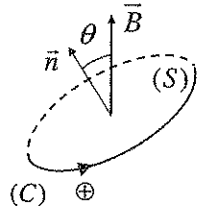
Comme grandeur algébrique, le signe de Φ dépend du sens $\oplus$ choisi sur le contour et des sens et direction de $\vec{B}$.

En revanche, Φ ne dépend pas de la surface (S) choisie, mais uniquement du contour (C) sur lequel elle s'appuie (résultat admis).

Lorsque le champ magnétique est uniforme et lorsque la surface choisie est la surface plane qui s'appuie sur le contour, le calcul du flux est aisé :

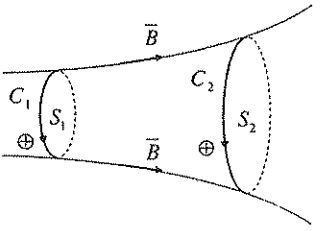
$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \vec{B}.\left(\iint_{(S)} \overrightarrow{dS}\right) = \vec{B}.\vec{S} = BS\cos\theta$$

où θ est l'angle entre le champ et la normale à la surface.



2. Un tube de champ magnétique est l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour donné.

Une propriété importante du champ magnétique est la suivante : « Le long d'un tube de champ le flux magnétique se conserve ».

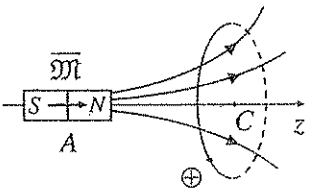


Sur la figure ci-dessus où C_1 et C_2 sont deux contours sur lesquels s'appuie le même tube de champ, on a $\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2}$, et comme $S_2 > S_1$, on en déduit $B_2 < B_1$.

C'est la propriété vue à la question **2.** du chapitre **12** : la norme du champ magnétique diminue lorsque les lignes de champ s'écartent et inversement.

La loi de Faraday

3. Considérons un aimant A de moment magnétique $\overline{\mathcal{M}}$ sur l'axe Cz d'une spire circulaire de centre C. En l'absence de mouvement relatif il ne se passe rien : le champ magnétique de l'aimant n'a pas d'action sur la spire. Le flux du champ de l'aimant à travers la spire ne dépend pas du temps.



On peut alors envisager pour l'étude de la spire les deux situations suivantes :

- La spire reste fixe en C et on approche l'aimant de la spire ; la spire, immobile dans le référentiel d'étude, est alors placée dans le champ magnétique variable de l'aimant ; en effet, le champ magnétique est plus intense près du pôle de l'aimant que loin (les lignes de champ de l'aimant sont en effet plus serrées au voisinage de l'aimant).
- L'aimant reste fixe en A et on approche la spire de l'aimant ; la spire est alors mobile (dans le référentiel d'étude où l'aimant est fixe) dans le champ magnétique stationnaire de l'aimant.

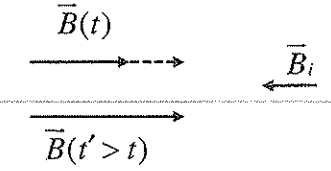
Dans les deux cas, le flux $\Phi(t)$ est fonction du temps, à la fois parce que l'intensité du champ augmente et parce l'angle entre le champ et le vecteur surface varie. Mais le mouvement relatif de l'aimant et de la spire est le même dans les deux situations (qui se déduisent l'une de l'autre par un changement de référentiel) et les phénomènes observés sont identiques à savoir l'apparition d'un courant dit « induit » dans la spire (alors qu'*a priori* elle ne comporte pas de générateur, mais c'est elle qui « devient un générateur » !).

4. La loi de Lenz, qui est une loi de modération, affirme que :

« L'ensemble des phénomènes d'induction ont des conséquences qui s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance ».

Lorsque spire et aimant s'approchent l'une de l'autre, l'intensité du champ magnétique de l'aimant au niveau de la spire augmente. Donc le courant induit va créer un champ propre induit $\overline{B}_i$ qui s'oppose à cette augmentation du champ $\overline{B}$ de l'aimant, et qui dans ce cas particulier est dirigé dans le sens opposé à $\overline{B}$, comme sur le schéma.

En effet, si on note $\overline{B}(t)$ le champ ressenti par la spire à un instant donné et $\overline{B}(t')$ celui à un instant ultérieur, alors la spire réagit en créant un champ propre induit $\overline{B}_i$ qui s'oppose à l'augmentation (en pointillé) du champ de l'aimant.



Ceci est le cas pour un courant induit d'intensité $i<0$ (de sens opposé à l'orientation choisie) correspond à un champ propre (le champ induit) dirigé suivant Oz^-.

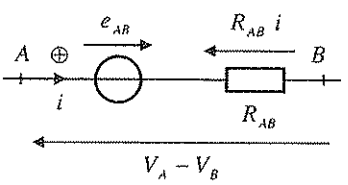
5. Tout se passe alors pour interpréter ce courant induit comme s'il existait dans la spire un « générateur » dont la force électromotrice induite est orientée dans le sens $\oplus$ et dont l'expression est reliée à la *variation* de flux par la loi expérimentale de Faraday :

$$\boxed{e=-\frac{d\Phi}{dt}}$$

– dans le cas d'un circuit immobile placé dans un champ magnétique variable, $\Phi(t)$ est le flux magnétique à l'instant t à travers une surface (S) quelconque s'appuyant sur le circuit filiforme fermé (C).

– dans le cas d'un circuit mobile placé dans un champ magnétique permanent, $d\Phi$ est la variation de flux due au déplacement ou à la déformation du circuit (C) pendant dt.

6. Pour un tronçon de circuit AB orienté positivement dans ce sens, tout se passe comme s'il existait un « générateur » entre A et B, dont la flèche est orientée dans le sens de A vers B.
La loi d'Ohm généralisée (en convention récepteur) s'écrit :



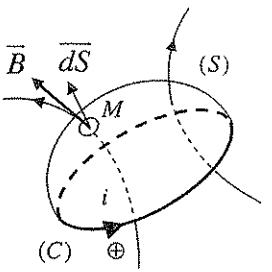
$$\boxed{V_A-V_B=R_{AB}\,i-e_{AB}}$$

* Dans un circuit fermé $V_A=V_B$, et un courant induit prend naissance par $\boxed{e=Ri}$.
Comme e, i peut être lié à deux causes :
- le circuit immobile est placé dans un champ magnétique variable,
- le circuit est mobile dans un champ magnétique permanent.

* Dans le cas d'un tronçon AB ouvert, $i=0$ et $V_A-V_B=-e_{AB}$; aux extrémités du dipôle apparaît alors une différence de potentiel égale en valeur absolue à la force électromotrice induite.

■ Auto-induction

7. Le flux propre d'un circuit (C) parcouru par un courant d'intensité i est le flux du propre champ $\overline{B}$ qu'il crée, envoyé par le circuit à travers lui-même (d'où la dénomination d'auto-induction).
On rappelle que le flux Φ du champ magnétique ne dépend pas de la surface (S) choisie, mais uniquement du contour (C) sur lequel elle s'appuie.



D'après le chapitre précédent, la norme $\|\vec{B}\|$ du champ magnétique créé est proportionnelle à $|i|$ en tout point M de l'espace ; il en est donc de même pour le flux propre $\Phi = \iint_{(S)} \vec{B}.\overrightarrow{dS}$ et on pose :

$$\boxed{\Phi = Li}$$

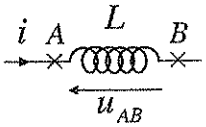
où L est par définition le coefficient d'inductance propre du circuit (C).

Sur le dessin où on choisit $\vec{B}$ créé par $i>0$, on a également $\Phi>0$ car $\vec{B}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont orientés par le même sens, et donc $L>0$. Si le courant change de sens, donc $i<0$, alors $\vec{B}$ change de sens alors que $\overrightarrow{dS}$ est invariant (puisque lié à l'orientation positive) et donc $\Phi<0$, on a encore $L>0$. Dans tous les cas, on a $L>0$.

L ne dépend que de la géométrie propre du circuit (C) considéré ; elle s'exprime en henry (H) ou de manière plus pratique comme le produit $\mu_0 \times longueur$.

8. En régime variable (i fonction du temps), une bobine AB immobile est placée dans un champ magnétique variable : son propre champ ; elle est donc le siège d'une force électromotrice donnée par la loi de Faraday :

$$e_{AB} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \quad \text{puisque} \quad \Phi = Li$$



En convention récepteur pour une bobine parfaite ($r_{AB}=0$), la loi d'Ohm généralisée s'écrit pour le dipôle AB :

$$u_{AB} = r_{AB}\, i - e_{AB} = 0 - (-L\frac{di}{dt}) \quad \text{soit} \quad \boxed{u_{AB} = L\frac{di}{dt}}$$

résultat montrant que l'inductance L définie en induction est bien la même que celle utilisée en électrocinétique.

9. Le schéma électrique équivalent au phénomène d'auto-induction est celui de la question précédente. La puissance électrocinétique reçue par le dipôle AB (et due au générateur correspondant à l'auto-induction) est :

$$P = u_{AB}\, i = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

L'énergie magnétique (ainsi appelée par la présence d'un champ magnétique dans la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant) emmagasinée depuis l'instant initial où $i(t=0)=0$ et l'instant actuel où $i(t)=i$ est :

$$U_m = \int_0^t P dt = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^t = \frac{1}{2}Li(t)^2 - \frac{1}{2}Li(t=0)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_m = \frac{1}{2}Li(t)^2}$$

■ Inductance mutuelle

10. Soient deux circuits (C_1) et (C_2) orientés et parcourus par des courants d'intensité i_1 et i_2.

(C_1) envoie à travers (C_1) le flux propre $\Phi_{1\to1} = \iint_{(S_1)} \overline{B}_1.\overline{dS}_1 \equiv L_1 i_1$

(C_2) envoie à travers (C_1) le flux noté $\Phi_{2\to1} = \iint_{(S_1)} \overline{B}_2.\overline{dS}_1 \equiv M\, i_2$

car la norme $\| \overline{B}_2 \|$ en chaque point est proportionnel à i_2.

(C_1) reçoit donc le flux total : $\Phi_1 = \Phi_{1\to1} + \Phi_{2\to1} = L_1 i_1 + M\, i_2$

et de même pour (C_2) : $\Phi_2 = \Phi_{2\to2} + \Phi_{1\to2} = L_2 i_2 + M\, i_1$

M est appelée l'inductance mutuelle des circuits (C_1) et (C_2) ; elle s'exprime en henry et son signe dépend des orientations arbitraires choisies sur (C_1) et (C_2).

Alors d'après la loi de Faraday pour chaque circuit :

$$\boxed{e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}} \quad \text{et} \quad \boxed{e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}}$$

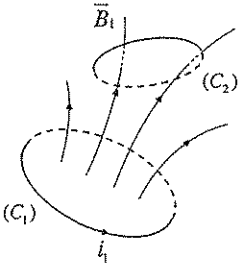
Ces expressions montrent que les phénomènes électriques dans les deux circuits sont interdépendants (e_1 dépend de i_2 et inversement) alors même que les deux circuits n'ont pas de contact ohmique entre eux.

Rq : Il y a donc *échange d'information* entre les deux circuits : cette idée suggère déjà une transmission possible d'information par un phénomène électromagnétique (ondes radio) comme cela sera vu en deuxième année.

11. Le long d'un tube de champ de $\overline{B}_1$, le flux est conservé. Or l'ensemble des lignes de champ de $\overline{B}_1$ passant par (C_1) ne passent pas forcément par (C_2) ; il est clair que le flux propre de (C_1) soit $\Phi_{1\to1} = L_1 i_1$ est supérieur ou égal à la valeur absolue du flux envoyé par (C_1) à travers (C_2) soit $\Phi_{1\to2} = M i_1$,

d'où $L_1 \geq |M|$ et de même pour $L_2 \geq |M|$ soit :

$$\boxed{L_1 L_2 \geq M^2}$$



Alors on définit le coefficient de couplage entre les deux circuits par :

$$\boxed{\alpha = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}} \quad \text{ce qui assure les limites} \quad \boxed{0 \leq \alpha \leq 1}$$

12. Pour deux circuits à la fois rigides et fixes l'un par rapport à l'autre, l'équation de maille s'écrit pour chaque circuit :

$$E_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

et de même

$$E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

Il s'agit d'équations différentielles couplées, les circuits n'étant pas indépendants malgré l'inexistence d'un « contact ohmique ».
Le bilan de puissance s'obtient par $(1)\times i_1 + (2)\times i_2$:

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)$$

L'énergie délivrée par les générateurs est en partie perdue par effet Joule dans les résistances et en partie stockée dans les bobines sous forme d'énergie magnétique récupérable (prise nulle en l'absence de courants, donc de champs) :

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2}$$

Bien sûr, pour un circuit unique, on retrouve $U_m = \frac{1}{2}Li^2$, le résultat de la question **9**.

À la somme des énergies propres de chaque circuit se rajoute un terme d'énergie mutuelle.

■ Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

13. Dans ce genre de système « électromécanique » on est toujours amené à écrire l'équation électrique qui contient la force électromotrice et l'équation mécanique qui contient les actions de Laplace (plus précisément les forces de Laplace dans un mouvement de translation et le moment des actions de Laplace dans un mouvement de rotation). Ces deux équations sont couplées puisque l'équation électrique fait intervenir la vitesse par l'intermédiaire de la force électromotrice alors que l'équation mécanique fait intervenir l'intensité du courant par les actions de Laplace ; ce couplage mathématique traduit physiquement que les phénomènes électriques et mécaniques sont interdépendants (voir à ce sujet la question **30.**).

Si la cause est mécanique (mouvement initial par exemple) alors la conséquence est électrique (circulation d'un courant par exemple), mais la conséquence va rétroagir sur la cause pour tenter de la diminuer. Si la cause est électrique (présence d'un générateur dans le circuit par exemple) alors la conséquence est mécanique (mise en mouvement d'une pièce mobile par exemple), mais la conséquence va rétroagir sur la cause pour essayer de l'amoindrir. Dans les deux cas, cette modération traduit la loi de Lenz.

14. La puissance électrique de la force électromotrice $P_{fém} = ei$ et la puissance mécanique des actions de Laplace $P_{Lapl} = \vec{f}_L.\vec{v}$ (en translation) ou $P_{Lapl} = M_L\,\omega$ (en rotation) sont liées par le bilan auxiliaire :

$$\boxed{P_{Lapl} + P_{fém} = 0}$$

Sa démonstration n'est pas au programme ; elle traduit l'interdépendance des phénomènes mécaniques et électriques.

Rq : La nullité du second membre est liée au fait que le champ magnétique ne travaille pas au niveau microscopique $(q\vec{V}\wedge\vec{B}).\vec{V} = 0$. En revanche les actions

de Laplace et la force électromotrice, qui contiennent le champ magnétique, elles, travaillent l'une contre l'autre !

Le bilan global de puissance est obtenu en multipliant l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v (en translation) ou ω (en rotation) ; en éliminant $P_{fém}$ et P_{Lapl} après avoir vérifié le bilan auxiliaire on accède naturellement au bilan global de puissance avec ses termes électriques et ses termes mécaniques et qui montre la provenance de l'énergie et sa destination.

15. L'intérêt de ces systèmes (aussi appelés transducteurs) est de permettre une conversion de puissance d'un domaine de la physique à un autre.
Un moteur (de type machine à laver ou de sèche-cheveux par exemple) reçoit l'énergie électrique du secteur et la transforme en énergie mécanique (au démarrage en énergie cinétique de rotation, mais en régime permanent, l'énergie cinétique de rotation est constante, la puissance mécanique est alors transmise à la charge du moteur) ; c'est le cas aussi d'un haut-parleur qui reçoit de l'énergie électrique de l'amplificateur de la chaîne HiFi et la convertit en énergie mécanique de la membrane qui transmet ses vibrations à l'air sous forme d'ondes sonores.

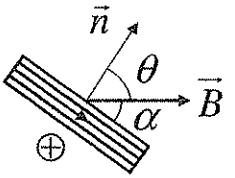
Inversement une éolienne dont les pales sont entraînées par action du vent (la source d'énergie est gratuite) convertit l'énergie mécanique (en fait cinétique de rotation) en énergie électrique transmise à la sortie de la génératrice vers les fils électriques permettant l'alimentation de foyers. De même un groupe électrogène est un dispositif autonome capable de produire de l'électricité d'appoint à partir d'un moteur thermique (à essence, gazole,...) qui actionne un alternateur ; la source d'énergie est chimique (la combustion du carburant) et passe par l'énergie mécanique de rotation de l'alternateur.

Dans tous les cas la présence d'un dispositif produisant un champ magnétique est indispensable (c'est un aimant permanent seulement dans les dispositifs de faible puissance, alors que dans les machines industrielles de puissance, ce champ est produit par des courants et renforcé par des tôles ferromagnétiques qui s'aimantent).

Applications directes du cours

Généralités

16. Dans le calcul du flux, l'angle qui importe est celui entre le champ et la normale aux spires, soit ici $\theta = \pi/2 - \alpha$. Par ailleurs le flux à travers la bobine est égal à la somme des flux à travers chaque spire :



$$\Phi = N(\vec{B}.\vec{S}) = NBS\cos\theta = NBS\sin\alpha$$

AN : $\Phi = 5.10^{-3}$ Wb

En inversant le sens de l'orientation positive, $\vec{n}$ donc $\vec{S}$ changent de sens, on trouve $\Phi = -5.10^{-3}$ Wb

17. Le signe – dans la loi de Faraday traduit une loi de modération (la loi de Lenz) : la force électromotrice induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance, à savoir la *variation* du flux magnétique à travers le circuit.

18. Revoir la figure et les conventions à la question 3. et réfléchir préalablement sur la question 4.

* En éloignant la spire et l'aimant, le flux reste positif, $\vec{B}$ va du Nord vers le Sud à l'extérieur de l'aimant, mais diminue ; pour s'opposer à cette variation, le flux propre doit être positif, d'où $i>0$ pour que le champ magnétique induit soit suivant Oz^+.
* En approchant la spire du côté du pôle Sud de l'aimant (après avoir retourné ce dernier), le flux est négatif et diminue (il augmente en valeur absolue) ; pour s'opposer à cette variation, le flux propre doit être positif, d'où $i>0$ également.

Dans les deux cas, le sens du courant induit est donc modifié.

Inductances propre et mutuelle

19. Inductance d'un solénoïde

* Rappelons que pour un solénoïde infiniment long (hypothèse simplificatrice retenue ici), $\vec{B}_{ext}=\vec{0}$ et $\vec{B}_{int}=\mu_0 n I \vec{u}_z=\mu_0\dfrac{N}{l}I\vec{u}_z$ uniforme.

Le flux à travers le bobinage des N spires jointives est N fois le flux à travers une spire : $\Phi=\iint \vec{B}.\overrightarrow{dS}=N\left(\mu_0\dfrac{N}{l}I\right).S=\mu_0\dfrac{N^2}{l}S.I$ du type $\Phi=LI$

on en déduit : $\boxed{L=\mu_0\dfrac{N^2S}{l}}$

Cette expression est bien homogène à $\mu_0\times longueur$.

AN : $\underline{L\approx 11\text{ mH}}$ ce qui est tout à fait le bon ordre de grandeur.

* On note qu'en doublant le nombre de spires, L n'est pas multipliée par 2, mais par 4.

* L'énergie magnétique de la bobine s'écrit :

$$U_m=\frac{1}{2}LI^2=\mu_0\frac{N^2S}{2l}I^2=\frac{1}{2\mu_0}\left(\mu_0\frac{N}{l}I\right)^2.Sl$$

Le volume du tronçon est $V=Sl$ et l'expression entre parenthèse est le champ B dans le solénoïde, d'où :

$$U_m=\frac{B^2}{2\mu_0}.V \quad \text{et} \quad \boxed{u_m=\frac{B^2}{2\mu_0}}$$

20. Pour un circuit inductif unique, l'expression de l'énergie magnétique est $U_m=Li^2/2$; cette énergie stockée dans la bobine interdit les discontinuités de courant (la discontinuité de i entraînerait celle de U_m conduisant à une puissance

infinie, non physique). Remarquons que tout circuit électrique fermé forme une « boucle » et présente donc une inductance, même très faible.

21. Inductance mutuelle entre deux bobines en influence totale

La champ créé par le solénoïde 1 est parallèle à l'axe, uniforme, et vaut $B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1$. Il traverse les N_2 spires du solénoïde 2 toutes de section S d'où le flux envoyé par 1 à travers 2 (les conventions sont telles que les grandeurs sont positives) :

$$\Phi_{1\to 2} = N_2(B_1 S) = N_2 \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 S \equiv M\, i_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S}$$

expression homogène au produit $\mu_0 \times longueur$ et inchangée en intervertissant les indices 1 et 2.

Rappelons que les inductances propres des deux bobines sont (question **19.**) :

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 S}{l} \quad \text{et} \quad L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 S}{l}$$

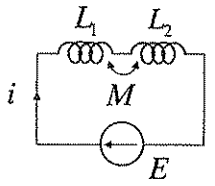
on vérifie facilement que $M^2 = L_1 L_2$ traduisant un coefficient de couplage $\alpha = 1$.

22. Association de deux bobines

a) Dans le montage en série, la loi des mailles donne :

$$E = -e_1 - e_2 = \left(L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}\right) + \left(L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}\right)$$

soit $E = (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$



alors que pour une bobine unique, on aurait $E = L_{éq} \frac{di}{dt}$

d'où l'inductance équivalente : $\boxed{L_{éq} = L_1 + L_2 + 2M}$

Si le branchement des bobines est tel que leurs champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont de même sens, alors les champs se renforcent, $M > 0$, et $L > L_1 + L_2$. Dans le cas contraire, les champs se contrarient, $M < 0$, et $L < L_1 + L_2$.

En éloignant les deux bobines l'une de l'autre, le couplage diminue (toutes les lignes de champ sortant de L_1 ne rentrent plus forcément dans L_2) et rapidement l'inductance mutuelle M tend vers zéro ; alors la loi d'association des inductances ($L_{éq} = L_1 + L_2$) s'identifie à celle des résistances.

b) Pour des bobines identiques $L_1 = L_2 = L$ et en influence totale (ce qui suppose que l'une soit à l'intérieur de l'autre, voir la question **21.**) $M = \pm\sqrt{L_1 L_2} = \pm L$, et alors $L_{éq} = 0$ ou $L_{éq} = 4L$.

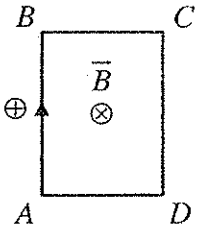
Dans le premier cas les courants se contrarient et le champ total est nul : il n'y a plus d'induction !

Dans le second cas les courants sont de même sens et tout se passe comme si on avait sur la même longueur une bobine dont le nombre de spires est double, l'inductance est alors quadruplée puisque proportionnelle au carré du nombre de spires.

■ Circuit fixe dans un champ magnétique variable

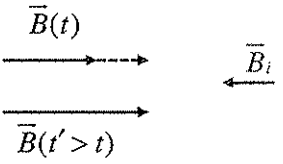
23. La spire fixe est placée dans un champ magnétique variable, elle est donc le siège d'un phénomène d'induction et un courant induit y prend naissance.

a) Il y a deux possibilités pour trouver le sens du courant induit :



– orientons positivement le cadre dans le sens $ABCD$; alors le vecteur surface est dans le même sens que $\overline{B}$, le flux est donc positif et augmente puisque la norme de $\overline{B}$ augmente ; alors, par la loi de Faraday $e = -d\Phi / dt$, la fém est négative et il en est de même du courant induit puisque $e = Ri$; ce courant circule donc dans le sens négatif $ADCB$

– l'augmentation du champ magnétique $\overline{B}$ (en pointillé sur la figure entre deux instants t et $t' > t$) est dirigée vers l'arrière de la figure ; d'après la loi de Lenz le système réagit en créant un champ magnétique induit $\overline{B}_i$ opposé à cette variation et donc dirigé vers l'avant ; seul un courant induit dans le sens $ADCB$ peut créer un tel champ induit.



Bien sûr ce courant induit cesse au-delà de $t = 1$ s lorsque le champ devient stationnaire.

Le flux du champ extérieur est $\Phi(t) = \overline{B}.\overline{S} = B(t)ab > 0$

Pendant la phase de croissance : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -ab\dfrac{dB}{dt} = -ab\dfrac{B_0}{\tau} = -5{,}0$ mV

Ne pas tenir compte du flux propre c'est négliger l'inductance propre (très faible) de la spire unique, alors $i = \dfrac{e}{R} = -50$ mA < 0, soit un courant assez faible vu les autres valeurs.

b) L'intensité est reliée à la charge transportée par :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad q = i\tau = -50.10^{-3} \text{ C} \quad \text{puisque } i \text{ est constant sur l'intervalle}$$

En réalité q n'est pas proportionnelle à τ car i est en $1/\tau$, en effet :

$$i = \frac{e}{R} = -ab\frac{B_0}{R\tau} \quad \Rightarrow \quad q = -ab\frac{B_0}{R}$$

Plus généralement : $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{e}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad q = -\dfrac{\Delta\Phi}{R}$ indépendant de τ

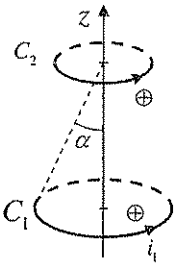
c) Dans la suite du raisonnement du a), pour $t \geq \tau$ la norme de $\vec{B}$ est stationnaire et donc le phénomène d'induction cesse : $e = 0$ et $i = 0$, ce qui conduit à une discontinuité du courant à $t = \tau$. Sauf que le flux du champ extérieur $\vec{B}$ devenant constant, on ne peut plus négliger les variations du flux propre lié à $\vec{B}_i$ et où intervient l'inductance de la spire :

$$e = e_{ext} + e_p = 0 - \frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

d'où l'équation de maille sur le contour fermé : $0 = Ri - e = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

ce que l'on pouvait écrire directement pour un circuit RL en régime libre.
Il apparaît alors que le courant n'est plus discontinu en $t = \tau$, mais passe de $i = -50$ mA à $i = 0$ en un temps caractéristique $\tau' = L/R \approx 10\ \mu$s : l'induction s'oppose aux discontinuités de courant !

24. Le flux envoyé par C_1 à travers C_2 est $\Phi = \iint \vec{B}_1 . \overrightarrow{dS}_2$



avec $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 i_1}{2a_1}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z$ sur l'axe, champ créé par C_1 supposé uniforme sur C_2, et $\vec{S}_2 = \pi a_2^2\,\vec{u}_z$ vu l'orientation choisie sur C_2

$$\text{d'où} \quad \Phi(t) \approx \frac{\mu_0 i_1(t)}{2a_1}\sin^3\alpha . \pi a_2^2$$

Ce flux est variable, la fem induite qui lui correspond est donnée par la loi de Faraday : $e_2 = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{\pi\mu_0 a_2^2}{2a_1}\sin^3\alpha\dfrac{di_1}{dt}$

On constate que lorsque i_1 croît, soit $\dfrac{di_1}{dt} > 0$ alors $e_2 < 0$ et donc le courant induit dans le circuit fermé est d'intensité $i_2 < 0$ pour l'orientation choisie. Le champ $\vec{B}_2$ créé par i_2 en son centre est alors dirigé suivant $-\vec{u}_z$; il s'oppose donc bien à *l'augmentation* de $\vec{B}_1$ conformément à la loi de Lenz (attention, il est faux de dire que « $\vec{B}_2$ s'oppose à $\vec{B}_1$ », car la cause du phénomène d'induction n'est pas le champ $\vec{B}_1$ lui-même, mais bien sa variation !). On peut aussi évoquer la diminution du flux...

En réalité le flux total à travers C_2 est obtenu en rajoutant au flux précédent le flux propre ; le courant induit d'intensité i_2 s'obtient alors en tenant compte de l'inductance propre du circuit C_2, négligeable lorsque celui-ci n'est constitué que d'une seule spire...

25. Le transformateur de tension

Les équations de mailles s'écrivent dans le primaire et le secondaire :

$$u_1 = \cancel{r i_1} - e_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = \cancel{r_2 i_2} - e_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

Par élimination de $\frac{di_1}{dt}$: $u_2 = \frac{M}{L_1}\left(u_1 - M\frac{di_2}{dt}\right) + L_2\frac{di_2}{dt} = \frac{M}{L_1}u_1 + \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1}\frac{di_2}{dt}$

et toujours avec $M^2 = L_1L_2$: $u_2 = \pm\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}u_1$, et comme L_i proportionnel à N_i^2,

$$\boxed{\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \pm\frac{N_2}{N_1}}$$

soit $u_{gén}/u_{R_c} = \pm N_2/N_1$, alors qu'en branchant directement la charge sur la source $u_{gén}/u_{R_c} = 1$. Ce résultat important appelé « loi des tensions » permet de modifier l'amplitude de la tension variable délivrée par le générateur (en revanche sa fréquence est inchangée).

AN : en tensions efficaces : $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow U_2 = 2300$ V

La puissance est conservée $U_1I_1 = U_2I_2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{10}$

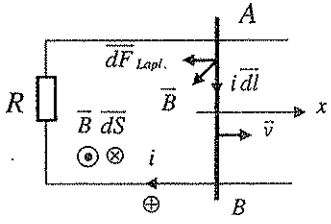
On perd en courant ce que l'on gagne en tension…

Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

26. Les rails de Laplace (1)

a) Équation électrique

La tige mobile dans un champ magnétique est le siège d'une force électromotrice dont le signe va déterminer le sens du courant induit. Choisissons l'orientation positive ⊕ dans le sens indiqué sur la figure d'où la disposition de A et B (on va de A à B dans le sens positif).



Le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit se détermine par $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS}$.

Il faut être attentif aux signes puisque, d'après l'orientation positive choisie, $\overrightarrow{dS}$ est vers l'arrière de la figure alors que $\vec{B}$ est vers l'avant : le flux est donc négatif (et diminue, il augmente en valeur absolue).

$$\Phi = \Phi_0 - Blx$$

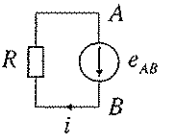
où $\Phi_0 = \Phi(t=0)$ et $x(t)$ le déplacement de la tige depuis $x(0) = 0$

La loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ donne $e = +Bl\frac{dx}{dt} = Blv > 0$

où $v > 0$ est la vitesse de la tige.

Rq : $\vec{B}$ désigne ici le champ extérieur ; le champ propre, non permanent, est négligé (ce qui revient à ne pas tenir compte de l'inductance L du circuit).

Pour écrire l'équation électrique, on redessine le contour fermé où la fém est représentée par une source de tension de fém e_{AB}. Il apparaît immédiatement que $e_{AB} = Ri$, d'où l'équation électrique :



$$\boxed{Ri = Blv} \quad (1)$$

Cette relation donne un courant d'intensité positive si $v > 0$, ce qui nous conforte *a posteriori* dans le choix de l'orientation positive.

b) Équation mécanique

Parcourue par un courant et placée dans un champ $\vec{B}$, la tige subit la force de Laplace, ici de freinage par courant induit comme l'indique la figure.

Sur la figure on a choisi $i > 0$ pour dessiner $i\vec{dl}$ et $\vec{dF}_{Lapl.}$.

$$\vec{F}_{Lapl.} = \int i\vec{dl} \wedge \vec{B} = i(\int \vec{dl}) \wedge \vec{B} = -ilB\vec{u}_x$$

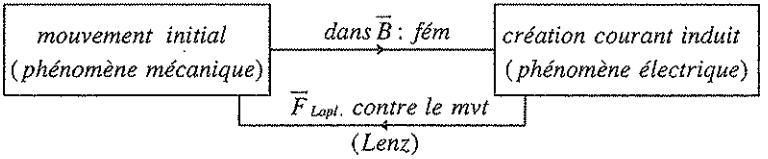
car $\vec{B}$ est uniforme et i est la même dans tout le circuit.

Le fait que la force de Laplace s'oppose au mouvement initial traduit simplement la loi de Lenz.

L'équation mécanique projetée sur Ox donne :

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -ilB} \quad (2)$$

On peut illustrer la loi de Lenz sur le schéma suivant où la cause est à gauche et la conséquence à droite :



Les phénomènes électriques et mécaniques sont interdépendants, ce qui se traduit par le fait que les équations (1) et (2) sont couplées.

En y éliminant i, on a :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0\, e^{-t/\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{B^2l^2}$$

c) On multiplie l'équation électrique (1) par i : $Ri^2 = Blvi$ (1')

Et l'équation mécanique (2) par v : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = -ilBv$ (2')

Les seconds membres, égaux (au signe près) s'interprètent de la manière suivante :

– dans (1') : $Blvi = e_{AB}.i = P_{fém}$ est la puissance de la force électromotrice

– dans (2') : $-ilBv = F_{Lapl.}.v = P_{Lapl.}$ est la puissance de la force de Laplace.

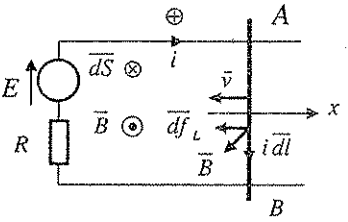
C'est donc bien le bilan auxiliaire : $P_{fém} + P_{Lapl.} = 0$ qui permet d'accéder au bilan global par (1') + (2') :

$$\boxed{-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Ri^2 > 0}$$

montrant que l'énergie cinétique cédée par la barre est dissipée par effet Joule dans la résistance. Il s'agit d'un cas de conversion de puissance mécanique en puissance électrique. Le dispositif peut servir de générateur lorsque ce courant est récupéré pour être utilisé à l'extérieur.

27. Les rails de Laplace (2)

a) On choisit l'orientation positive du circuit ⊕ comme indiqué sur la figure ; ceci détermine également le sens de circulation $\overrightarrow{dl}$ sur la tige orientée de A vers B.
La figure indique pour $i > 0$ directement le sens de la force de Laplace vers les x décroissants :



$$\overrightarrow{df}_L = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} \quad \text{et par intégration} \quad \vec{f}_L = -ilB\vec{u}_x$$

Soumise à cette seule force (le poids de la tige est compensé par les réactions verticales des rails, car il n'y a pas de mouvement vertical), la tige a un mouvement donné par la loi de Newton, en projection sur Ox :

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -ilB} \quad (1)$$

où v est la projection de la vitesse sur l'axe Ox, donc ici $v < 0$ si $i > 0$ (lié à $E > 0$).

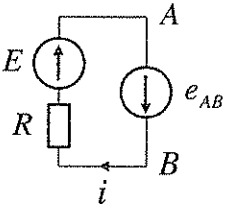
b) D'après l'orientation positive choisie, $\overrightarrow{dS}$ est vers l'arrière de la figure alors que $\vec{B}$ est vers l'avant : le flux est donc négatif (et augmente, il diminue en valeur absolue).

$$\Phi = \Phi_0 - Blx$$

où $\Phi_0 = \Phi(t=0)$ et $x(t)$ la position de la tige depuis $x(0) = 0$

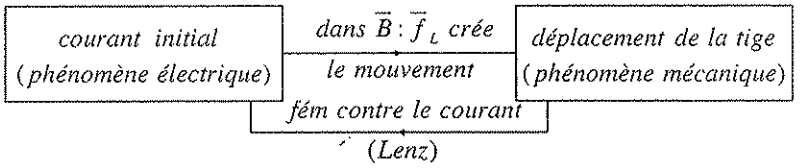
La loi de Faraday $e_{AB} = -\frac{d\Phi}{dt}$ donne $e_{AB} = +Bl\frac{dx}{dt} = Blv < 0$ avec $v < 0$

Pour écrire l'équation électrique, on redessine le contour fermé où la fém est représentée par un générateur orienté de A vers B. Et comme $e_{AB} < 0$, il apparaît que cette fém s'oppose à E (on parle de force contre électromotrice) et au passage du courant d'intensité i : c'est la traduction de la loi de Lenz.
L'équation électrique s'écrit :



$$E + e_{AB} = Ri \quad \text{soit} \quad \boxed{E = Ri - Blv} \quad (2)$$

On peut illustrer la loi de Lenz sur le schéma suivant où la cause est à gauche et la conséquence à droite :



c) Les équations (1) et (2) sont couplées, ce qui traduit l'interdépendance des phénomènes électriques et mécaniques. Pour obtenir l'équation en $v(t)$, il faut éliminer $i(t)$ entre les deux équations :

$$m\frac{dv}{dt}+\frac{B^2l^2}{R}v=-\frac{BlE}{R}$$

Sous la forme : $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=\frac{v_l}{\tau}$ avec la condition $v(t=0)=0$

la solution de l'équation est : $\boxed{v(t)=v_l(1-e^{-t/\tau})}$

avec $\boxed{\tau=\frac{mR}{B^2l^2}}$ et $\boxed{v_l=-\frac{E}{Bl}}$

τ apparaît bien comme un temps caractéristique de la prise de vitesse de la tige, sa vitesse limite étant $v_l<0$ atteinte pour un temps de plusieurs τ. À noter que cette vitesse est réglable par choix de la tension d'alimentation E.

d) On multiplie l'équation mécanique (1) par v : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=-ilBv$ (1')

Et l'équation électrique (2) par i : $Ei=Ri^2-Blvi$ (2')

On constate que dans le second membre :

– de (1') : $-ilBv=f_L.v=P_L>0$ est la puissance de la force de Laplace.

– dans (2') : $Blvi=e_{AB}.i=P_{fém}<0$ est la puissance de la force électromotrice

On vérifie bien le bilan auxiliaire : $P_{fém}+P_L=0$; il permet d'accéder au bilan global par (2') – (1') :

$$\boxed{Ei=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+Ri^2}$$

montrant que l'énergie apportée par le générateur est en partie dissipée par effet Joule dans la résistance, mais sert surtout à procurer de l'énergie cinétique à la tige. Il s'agit d'un cas de conversion de puissance électrique en puissance mécanique.

C'est le principe élémentaire d'un moteur qui en charge peut alors fournir un travail mécanique : le dispositif peut par exemple servir à soulever une masse suspendu à un fil accroché à la tige par l'intermédiaire d'une poulie…

28. Principe d'un alternateur

Les conventions sont indiquées sur les deux figures.

a) La normale $\vec{n}$ au cadre est orientée par l'orientation $\oplus$ sur le cadre. Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = N(\vec{B}.\vec{S}) = NBS\cos\theta = NBS\cos(\omega t) \quad \text{puisque } \theta = \omega t$$

ce flux est donc alternativement positif et négatif.

Le cadre mobile dans un champ magnétique permanent est le siège de phénomènes d'induction ; la variation de ce flux entraîne l'apparition d'une force électromotrice et donc d'un courant induit. Ce courant d'intensité $i(t)$ est lui-même alternatif.

b) Le champ magnétique extérieur est en intensité bien plus important que le champ magnétique créé par le courant induit ; négliger le flux du champ magnétique induit revient à ne pas tenir compte du phénomène d'auto-induction donc à négliger l'inductance propre de circuit.

L'équation de maille écrite en supposant le cadre fermé sur lui-même :

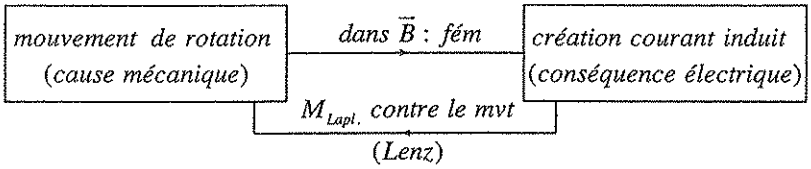
$$e = Ri = NBS\omega\sin(\omega t) \quad (1) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{NBS\omega}{R}\sin(\omega t)$$

c) Il n'est pas nécessaire de recalculer le moment des forces de Laplace sur les 4 côtés des N spires comme à la question **12.** du chapitre **12** ; assimilant le cadre à un dipôle magnétique de moment magnétique variable $\overline{\mathfrak{M}} = Ni(t)S\vec{n}$, on a directement :

$$\overline{M}_L = \overline{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B} = -Ni(t)SB\sin\theta\,\vec{u}_z = -Ni(t)SB\sin(\omega t)\,\vec{u}_z$$

car la norme du produit vectoriel est égale au produit des normes que multiplie le sinus de l'angle entre les deux vecteurs, et l'orientation est vers l'avant de la figure. En réalité lorsque le cadre se retourne, alors $i(t)$ change de signe si bien que le moment des forces électromagnétiques est toujours résistant conformément à la loi de Lenz : la cause de l'induction est le mouvement du cadre, le système réagit contre ce mouvement.

Cela est résumé sur le schéma ci-dessous dont les flèches illustrent le fait que la cause entraîne la conséquence, et la conséquence rétroagit sur la cause :



Le moment par rapport à l'axe est :

$$M_L = -Ni(t)SB\sin(\omega t) = -\frac{(NBS)^2\omega}{R}\sin^2(\omega t) < 0$$

La loi du moment cinétique appliquée au cadre de moment d'inertie J par rapport à l'axe Δ orienté par $\vec{u}_z$, sans oublier le moment positif Γ_e qui entraîne le cadre et sachant que le moment du poids et des réactions d'axe sont nuls par rapport à l'axe :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma_e + M_L = 0 \quad (2) \text{ car le cadre tourne à vitesse constante}$$

d) L'équation (1) multipliée par i donne :

$$ei = Ri^2 \quad \text{avec} \quad P_{fém} = ei = NBSi(t)\omega\sin(\omega t)$$

L'équation (2) multipliée par ω donne :

$$\Gamma_e\omega + M_L\omega = 0 \quad \text{avec} \quad P_{Lapl} = M_L\omega = -Ni(t)SB\omega\sin(\omega t)$$

On vérifie le bilan auxiliaire $P_{fém} + P_{Lapl} = 0$ ce qui conduit au bilan global (faire la somme membre à membre des deux équations) :

$$\boxed{\Gamma_e\omega = Ri^2}$$

Cela signifie que toute la puissance mécanique apportée pour faire tourner le cadre est dissipée (donc perdue) en puissance Joule (donc électrique) dans la résistance du circuit. Cette conversion de puissance (dans le sens mécanique vers électrique) n'est pas très intéressante sous cette forme...

e) Entre le fil qui arrive sur le cadre (en A) sur la 1ère spire et le fil qui quitte le cadre (en B dans le sens $\oplus$) par la $N^{ième}$ spire, s'établit une fém :

$$e_{AB} = -\frac{d\Phi}{dt} = +NBS\omega\sin(\omega t)$$

La loi d'Ohm généralisée s'écrit alors :

$$V_A - V_B = Ri - e_{AB} \quad \text{avec} \quad e_{AB} = NBS\omega\sin(\omega t) \quad (1')$$

L'équation mécanique reste inchangée :

$$\Gamma_e + M_L = 0 \quad \text{avec} \quad M_L = -NiSB\sin(\omega t) \quad (2)$$

L'équation électrique (1') multipliée par i donne :

$$-P_{AB} = Ri^2 - P_{fém} \quad \text{avec} \quad P_{fém} = e_{AB}\,i = NBSi\omega\sin(\omega t)$$

car la puissance disponible à l'extérieur du cadre est $P_{AB} = -(V_A - V_B)i$ (le cadre est considéré comme un générateur dont le courant débité est $-i$).

L'équation mécanique (2) multipliée par ω donne :

$$\Gamma_e\omega + P_{Lapl} = 0 \quad \text{avec} \quad P_{Lapl} = M_L\omega = -NiSB\omega\sin(\omega t)$$

On vérifie toujours le bilan auxiliaire $P_{fém} + P_{Lapl} = 0$ ce qui conduit au bilan global :

$$\boxed{P_{AB} = \Gamma_e\omega - Ri^2}$$

Cela signifie que toute la puissance mécanique apportée pour faire tourner le cadre ôtée de la puissance Joule dissipée dans la résistance (cette dernière peut être choisie faible) est disponible sous forme électrique à l'extérieur du dispositif. Il s'agit là du principe de l'alternateur, le cadre étant mis en mouvement par l'écoulement d'un fleuve (centrale hydroélectrique) ou sous l'action d'une vapeur d'eau (centrale thermique ou nucléaire) dans le but d'envoyer une puissance électrique sur les lignes de distribution, ce qui rend cette conversion bien plus intéressante.

Rq : Avec des termes tous positifs, $\Gamma_e\omega = Ri^2 + P_{AB}$, on voit mieux d'où provient l'énergie et ce qu'il en advient.

29. Principe du haut-parleur électrodynamique

La tension $u(t)$ délivrée par l'amplificateur provoque un courant d'intensité $i(t)$ dans la bobine résistive. Parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique, cette bobine (libre de se mouvoir) subit la force de Laplace qui la déplace de manière sinusoïdale ; ces oscillations de la membrane dont la bobine est solidaire sont transmises à l'air sous forme d'ondes sonores. Mais la bobine se déplaçant dans le champ magnétique de l'aimant est le siège d'une force électromotrice d'induction qui, d'après la loi de Lenz, va se soustraire à la tension $u(t)$ d'origine.

Le fonctionnement du haut-parleur est résumé sur le schéma ci-dessous :

$$\text{tension} \xrightarrow{} \text{courant} \xrightarrow{\vec{B}} \text{force de Laplace} \xrightarrow{} \text{déplacement} \xrightarrow{} \text{onde sonore}$$
$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \vec{B}$$
$$\leftarrow \qquad \text{force électromotrice} \qquad \leftarrow$$

Ce mécanisme fait bien apparaître le couplage entre grandeurs électriques et grandeurs mécaniques. Le haut-parleur est un transducteur électrodynamique puisqu'il convertit l'énergie électrique reçue par l'amplificateur en énergie mécanique sous forme d'ondes acoustiques transmises à l'air.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

30. * Le circuit n'est pas initialement parcouru par un courant, mais il est mobile dans un champ magnétique permanent ; il est donc le siège d'une force électromotrice, responsable d'un courant induit. Parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique, le circuit est alors soumis à la force de Laplace qui perturbe le mouvement initial.

* Le circuit est initialement immobile, mais il est parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique ; il subit donc la force de Laplace qui le met en mouvement. Mobile dans un champ magnétique (permanent), il est alors le siège d'une force électromotrice qui perturbe le courant initial.

31. C'est Michael Faraday qui, en 1831 (soit à peine une dizaine d'années après la théorie de la magnétostatique due à Ampère), comprend en approchant un aimant d'une bobine fermée sur elle-même, que ce n'est pas le champ magnétique lui-même qui crée le courant qu'il réussit à engendrer, mais *les variations* de ce champ. Ces expériences fondamentales ont révolutionné la physique car pour la première fois un champ magnétique variable engendre un phénomène électrique ce qui entrouvre les portes de l'électromagnétisme. Mais elles sont également à l'origine d'un essor sans précédent des techniques et plus particulièrement du développement des machines électriques (générateurs, moteurs, alternateurs,...) mises au point progressivement au cours du XIX^{e} siècle après celui des machines à vapeur.

32. Il faut comprendre « électromoteur » par « mise en mouvement des électrons » car c'est le flux variable par la loi de Faraday qui est la cause du courant induit. Notons que cette « force » est une tension qui s'exprime en volt !

33. L'intégrale $\Phi = \iint_{(S)} \overline{B}.\overline{dS} \equiv Li$ est en général incalculable, par méconnaissance de $\overline{B}$ sur toute la surface (S), par ailleurs infini sur le fil...

34. Les fabricants associent dans une même enceinte trois haut-parleurs pour des bandes de fréquences différentes : le boomer ou woofer pour les sons graves, le medium pour les fréquences intermédiaires et le tweeter pour les sons aigus.

35. Pour s'opposer à l'augmentation du flux lors de la mise sous tension du solénoïde, l'anneau s'élève pour diminuer la norme de $\overline{B}$ créé par le solénoïde et développe un courant induit de sens opposé à celui qui circule dans le solénoïde afin que le flux (ou champ) propre se soustraie à l'augmentation du flux (ou champ) extérieur.
Le flux créé par le solénoïde à travers l'anneau varie pour deux raisons : d'abord, parce que le champ du solénoïde varie lors de la mise sous tension (le flux dépend explicitement du temps à travers la variation du courant) ; ensuite, parce que l'anneau bouge (le flux dépend implicitement du temps par l'altitude de l'anneau dans la norme du champ).

36. Dans ses oscillations le pendule coupe normalement les lignes de champ de l'aimant. Or un conducteur mobile dans un champ magnétique permanent est le siège d'une force électromotrice, d'où des courants induits qui circulent dans la masse du pendule en cuivre. Parcourus par des courants (dits de Foucault) et toujours placé dans le champ de l'aimant, le disque est soumis à des actions mécaniques de Laplace. D'après la loi de Lenz, le sens de ces actions est tel que celles-ci s'opposent à la cause qui leur a donné naissance, c'est-à-dire au mouvement du disque : ce dernier est donc freiné et s'échauffe, preuve que l'énergie mécanique initiale est convertie en chaleur par effet Joule.
On appelle courants de Foucault les courants induits qui prennent naissance dans tout conducteur à 2 ou 3 dimensions, qu'il soit en mouvement dans un champ magnétique ou qu'il soit fixe et soumis à un champ magnétique variable.

37. Les courant des Foucault sont souvent considérés comme un inconvénient parce qu'ils freinent les parties métalliques et/ou conduisent à des pertes par effet Joule comme à la question précédente.
Mais les courants de Foucault peuvent aussi mis à profit pour faire fondre des métaux. Un bloc métallique est placé dans une bobine parcourue par un courant alternatif de fréquence élevée (quelques milliers de Hertz). Alors les courants induits, de grande intensité, qui se développent dans la masse métallique en provoquent la fusion. Ces fours à induction permettent d'obtenir des métaux purifiés ou à hautes caractéristiques mécaniques.

38. Sous la plaque est disposée une bobine circulaire (horizontale, à enroulements de cuivre), qui crée un champ magnétique axial (vertical) variable lorsque qu'un courant alternatif la traverse (les effets de l'induction étant d'autant plus importants

que les variations du champ magnétique sont rapides, on emploie des courants de fréquence 20 kHz). Dans la partie métallique constituant le fond épais de la casserole posée sur la plaque, ce champ magnétique variable engendre un courant électrique induit, lui-même variable et circulaire (ce qui n'est pas dangereux au toucher). L'effet Joule dégagé par ces courants de Foucault alternatifs chauffe le métal dans son volume, et l'énergie thermique est ensuite transférée aux aliments contenus dans la casserole par conduction. À noter que la plaque en elle-même n'est pas chauffée par la bobine (mais seulement par le fond de casserole), et le corps humain n'étant pas assez conducteur, toucher la plaque à induction ou mettre la main au-dessus ne provoque pas de brûlure. Par ailleurs, aucune chaleur n'est produite si la table à induction reste sous tension en l'absence de casserole.

39. Oui, car plus la fréquence est élevée, plus la puissance Joule liée aux courants de Foucault est importante (elle est en ω^2), d'où le choix à la question précédente. Non, car la puissance volumique à plus haute fréquence n'est pas uniforme et a tendance à se limiter d'autant plus en surface que la fréquence est très élevée, empêchant ainsi un chauffage uniforme. D'où un compromis comme d'habitude en physique...

40. Lorsque, suivant l'expérience réalisée par Foucault en 1855, on fait tourner un disque de cuivre dans l'entrefer d'un aimant, il apparaît par induction (conducteur mobile dans un champ magnétique stationnaire) des courants induits dits courants de Foucault. La dissipation par effet Joule de ces courants induits s'effectue au détriment de l'énergie cinétique du disque. Si le mouvement de rotation n'est pas entretenu, toute l'énergie mécanique initiale du disque se transforme en énergie thermique (ou chaleur), et le disque s'arrête de tourner.
Ce principe est mis à profit dans les ralentisseurs pour camions (appelés « TELMA »), un type de frein magnétique qui équipe aujourd'hui la majorité des poids lourds. Leur avantage est d'être sans contact, donc sans usure. Dans ces dispositifs, des disques solidaires de l'arbre de transmission tournent entre des électroaimants alimentés par une batterie. En appuyant sur les freins du véhicule, on alimente en courant ces électroaimants. Plus la vitesse du véhicule est grande, plus la rotation des disques entre les électroaimants est grande et plus le freinage est efficace. En revanche, cette efficacité s'amoindrit aux faibles vitesses jusqu'à s'annuler à l'arrêt : c'est pourquoi, pour les faibles allures, on leur adjoint des freins mécaniques.

41. Un alternateur est une pièce métallique dont la rotation est obtenue et maintenue par une action mécanique, soit par un débit d'eau (centrale hydraulique), soit par une vapeur d'eau sous pression (obtenue en chauffant de l'eau à l'aide d'un combustible fossile ou nucléaire, centrale respectivement thermique ou nucléaire). La rotation de l'alternateur dans un champ magnétique statique crée par induction des forces électromotrices récupérées aux extrémités sous forme de tension électrique.

42. Un transformateur sert à élever ou à abaisser la valeur d'une tension alternative (tout en conservant sa fréquence). Si les nombres de spires des deux enroulements sont N_1 pour le primaire (tension u_1) et N_2 pour le secondaire (tension u_2), alors son fonctionnement est donné par $u_2(t)/u_1(t) = N_2/N_1$, résultat établi à la question 25..

Dans la vie courante, les transformateurs sont très présents et d'un usage très courant. Beaucoup d'appareils électroménagers comportent un transformateur abaisseur de tension, souvent suivis d'un redresseur, pour l'alimentation d'une tension d'utilisation de l'ordre de 10 V (comme dans les éléments d'une chaîne HiFi, les spots halogènes,...)
Dans les salles de bain, un transformateur d'isolement entre le secteur et la prise pour appareils électriques évite les risques d'électrocution.

43. Pour diminuer les pertes par effet Joule sur une ligne de résistance donnée, l'intensité du courant est abaissée ce qui suppose, à puissance constante, d'augmenter la tension (jusqu'à 400 kV pour les lignes de très haute tension). Les transformateurs se chargent d'augmenter les tensions alternatives depuis la centrale électrique (production à 25 kV) vers les lignes, puis à l'inverse, en plusieurs étapes, depuis les lignes vers les utilisateurs (≈ 20 kV pour des usines, 230 V pour les particuliers).

44. Du fait que $\omega \neq \omega_0$, le champ $\vec{B}$ tourne par rapport à la bobine : il envoie donc un flux variable à travers ses spires. Fermée sur elle-même, la petite bobine, siège d'un courant induit, est alors assimilable à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$. Son interaction avec le champ $\vec{B}$ extérieur (un couple $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$) l'entraîne autour de l'axe Oz et ce mouvement est susceptible de fournir à l'extérieur un travail moteur. Dans la pratique ω_0 et ω sont voisins avec ω (la conséquence) inférieure à ω_0 (la cause) ; la solution $\omega = \omega_0$ n'est pas possible car si le champ et la bobine tournaient à la même vitesse, le flux serait constant, et l'absence de courants induits dans la bobine rendrait l'entraînement impossible, d'où le nom de moteur asynchrone pour ce dispositif.

45. Les moteurs électriques sont d'une facilité d'emploi surtout dans le cas de démarrages fréquents (ils démarrent seuls et facilement) avec possibilité d'inversion du sens de rotation (sans dispositif annexe). Ils ont souvent un fort couple moteur à faible vitesse (et donc ne nécessitent ni embrayage ni boîte de vitesse) et un couple utile régulier. Ils ont un meilleur rendement, sont moins polluants et moins bruyants, mais sont aussi moins autonomes d'où leur moindre emploi dans les automobiles.

Exercices

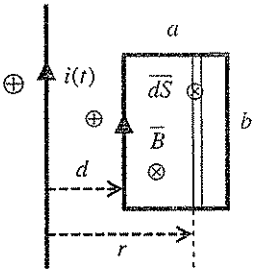
46. Une bobine dans le champ inhomogène et variable d'un fil

a) En coordonnées cylindriques d'axe Oz le fil, le champ magnétique créé par le courant d'intensité $i(t)$ à une distance r du fil rectiligne infini est orthoradial et d'expression :

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\vec{u}_\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I_e \cos(\omega t)}{2\pi r}\vec{u}_\theta}$$

Il s'agit bien d'un champ variable (il est fonction du temps) et inhomogène (il décroît avec la distance à l'axe).

b) Le courant induit étant lui-même sinusoïdal, le choix de l'orientation du cadre est indifférent. Néanmoins pendant la demi-période où le courant d'intensité $i(t)>0$ et le champ magnétique $\overline{B}(t)$ vers l'arrière de la figure, le flux est positif si le vecteur surface est lui-même vers l'arrière, d'où le choix indiqué sur le cadre. Le flux à travers N spires est N fois le flux à travers une spire :



$$\Phi(t) = N\iint \overline{B}.\overline{dS} = N\iint B(r,t)dS$$

par produit scalaire de deux vecteurs de même direction (attention si $\overline{dS}$ garde un sens fixe, $\overline{B}(t)$ en revanche change de sens toutes les demi-périodes, ce qui est traduit par $B(r,t)$ algébrique).

L'intégrale ne porte que sur r, choisissons comme surface élémentaire une bande (en grisé sur la figure) de hauteur b et de largeur dr (comprise entre r et $r+dr$) : $dS = bdr$

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 N\sqrt{2}I_e b\cos(\omega t)}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dr}{r} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Phi(t) = \frac{\mu_0 N\sqrt{2}I_e b\cos(\omega t)}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)}$$

c) Ce flux envoyé par le fil à travers la bobine est proportionnel au courant dans le fil :

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 Nbi(t)}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{d}\right) \equiv Mi(t) \quad \text{où} \quad \boxed{M = \frac{\mu_0 Nb}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)}$$

est le coefficient d'inductance mutuelle entre le fil et la bobine ; on constate qu'il est bien homogène à $\mu_0 \times longueur$ et qu'il diminue lorsque la distance d augmente, c'est-à-dire lorsque l'on éloigne les deux circuits.

AN : $\underline{M = 3{,}9\ \mu H}$ ce qui est une valeur très modeste.

d) D'après la loi de Faraday (l'induction ici concerne la bobine fixe placée dans le champ magnétique variable du fil) :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi(t) = \sqrt{2}MI_e\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e(t) = \sqrt{2}MI_e\omega\sin(\omega t)}$$

e) Négliger l'inductance propre de la bobine liée au flux propre $\Phi_p = Li_b(t)$ c'est négliger le champ $\overline{B}_i$ induit dans les spires par le courant induit $i_b(t)$ devant le champ $\overline{B}$ du fil (pour le circuit, d'un point de vue électrocinétique cela revient à faire $L\omega \ll R$).

Alors la loi d'Ohm s'écrit simplement $e = Ri_b$ d'où le courant induit dans le cadre :

$$\boxed{i_b(t) = \frac{\sqrt{2}MI_e\omega\sin(\omega t)}{R}}$$

Les courants $i_b(t)$ et $i(t)$ sont en quadrature (retard de $\pi/2$ de $i_b(t)$ sur $i(t)$) ; le rapport entre leurs valeurs efficaces est :

$$\frac{I_{bc}}{I_e} = \frac{M\omega}{R} = \frac{2\pi M f}{R}$$

AN : $\underline{I_{bc} / I_e = 7{,}4.10^{-3}}$, le rapport est faible.

f) Le champ du fil étant parallèle au moment magnétique de la bobine (tous les deux suivant $\vec{u}_\theta$), il n'y a pas de moment des forces de Laplace.

Mais le champ magnétique du fil étant non uniforme, on doit s'attendre à une résultante non nulle. Se convaincre sur une figure que les forces sur les côtés horizontaux se compensent, mais pas celles sur les côtés verticaux puisque $B(d) > B(d+a)$. Cependant la force de Laplace sur un côté vertical est horizontale et proportionnelle à $i_b(t)B(t)$ soit à $\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \sin(2\omega t)/2$; elle est donc alternativement attractive puis répulsive et sa valeur moyenne sur une période est nulle.

g) En assimilant grossièrement la bobine plate d'épaisseur l à un tronçon de solénoïde dont l'inductance $L = \mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$ a été déterminée à la question **19.**, on a avec $S = ab$, $\underline{L \approx 12 \text{ mH}}$, ordre de grandeur habituel.

L'équation de maille pour le circuit RL mis en régime forcé de pulsation ω s'écrit pour une fém inchangée :

$$L\frac{di_b'}{dt} + Ri_b' = e(t) = \sqrt{2}MI_e\omega\sin(\omega t)$$

Pour résoudre cette équation en régime permanent (le régime transitoire tend rapidement vers zéro), il faut passer en notation complexe :

$$(R + jL\omega)\underline{i}_b' = -j\sqrt{2}MI_e\omega \quad \Rightarrow \quad \underline{i}_b' = -j\frac{\sqrt{2}MI_e\omega}{R + jL\omega}$$

car si $\cos(\omega t)$ est remplacé par $e^{j\omega t}$, $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$ est remplacé par $e^{j(\omega t - \pi/2)} = -je^{j\omega t}$. On retrouve $e(t) = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -M\dfrac{di}{dt}$ et $\underline{e} = -M\, j\omega \underline{i}$

* L'égalité des modules des deux membres conduit à :

$$\sqrt{2}I_{bc}' = \frac{\sqrt{2}MI_e\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \quad \text{d'où} \quad \frac{I_{bc}'}{I_e} = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{I_{bc}}{I_e}\frac{1}{\sqrt{1 + L^2\omega^2/R^2}}$$

AN : avec $\underline{L\omega/R = 22{,}7}$, l'approximation de la question e) n'est pas valable et

$\dfrac{I_{bc}'}{I_e} = 3{,}3.10^{-4}$ soit $\underline{I_{bc}'/I_{bc} \approx 0{,}04}$.

* On cherche $i_b'(t) = \sqrt{2}I_{bc}'\cos(\omega t + \varphi)$, l'égalité de l'argument des deux membres conduit à :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{L\omega}{R}$$

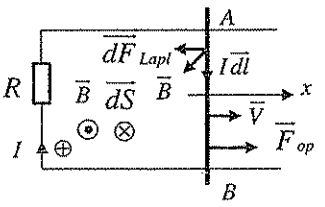
Le retard de $\pi/2 = 90°$ de la question e) s'aggrave de arctan $L\omega/R = 87°$, d'où $\varphi = -177°$; le courant dans la bobine est pratiquement en opposition de phase sur celui du fil.

47. Les rails de Laplace (3)

a) * Équation électrique

Choisissons l'orientation positive ⊕ dans le sens indiqué sur la figure.

Alors $\overrightarrow{dS}$ est vers l'arrière de la figure alors que $\vec{B}$ est vers l'avant : le flux $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS}$ est donc négatif.



$$\Phi = \Phi_0 - Blx$$

où $\Phi_0 = \Phi(t=0)$ et $x(t)$ le déplacement de la tige depuis l'origine $x(0) = 0$

La loi de Faraday $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ donne $e = +Bl\dfrac{dx}{dt} = BlV > 0$

où $V > 0$ est la vitesse de la tige.

Rq : $\vec{B}$ désigne ici le champ extérieur ; le champ propre, non permanent, est négligé (ce qui revient à ne pas tenir compte de l'inductance L du circuit).

L'équation de maille sur un contour fermé s'écrit : $0 = e - RI$, d'où l'équation électrique :

$$\boxed{RI = BlV} \quad (1)$$

Cette relation donne un courant d'intensité positive, conforme à la loi de Lenz, le déplacement $\vec{V} \Rightarrow \overrightarrow{dF}_{Lapl.} \Rightarrow I > 0$; comme la vitesse, ce courant est constant.

* Équation mécanique

Parcourue par un courant et placée dans un champ $\vec{B}$, la tige subit la force de Laplace, ici de freinage par courant induit comme l'indique la figure.

$$\vec{F}_{Lapl} = \int I\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = I\left(\int \overrightarrow{dl}\right) \wedge \vec{B} = -I\,lB\,\vec{u}_x$$

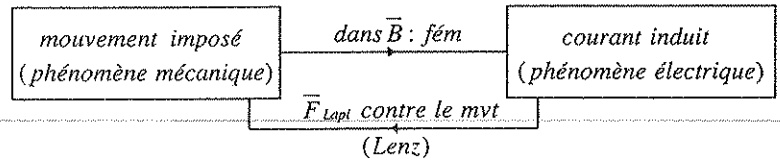
car $\vec{B}$ est uniforme et I est la même dans tout le circuit.

Le fait que la force de Laplace s'oppose au mouvement initial traduit simplement la loi de Lenz.

L'équation mécanique projetée sur Ox donne :

$$\boxed{m\frac{dV}{dt} = 0 = F_{op} - I\,lB} \quad (2)$$

On peut illustrer la loi de Lenz sur le schéma suivant où la cause est à gauche et la conséquence à droite :



La relation (2) donne la force que doit exercer l'opérateur :

$$\vec{F}_{op} = I\,l\vec{B}\,\vec{u}_x \quad \text{et d'après (1) sachant que } V\,\vec{u}_x = \vec{V} \; : \quad \boxed{\vec{F}_{op} = \frac{B^2 l^2}{R}\vec{V}}$$

Cette force est d'autant plus importante que l'on souhaite communiquer à la tige une grande vitesse. Comme elle est opposée à la force de Laplace, cette dernière écrite sous la forme $\vec{F}_{Lapl} = -\alpha\vec{V}$ apparaît comme une force de frottement fluide.

b) Les phénomènes électriques et mécaniques sont interdépendants, ce qui se traduit par le fait que les équations (1) et (2) sont couplées.

On multiplie l'équation électrique (1) par I : $RI^2 = BlVI$ (1')
Et l'équation mécanique (2) par v : $F_{op}V - I\,lBV = 0$ (2')
Comme d'habitude, les termes identiques s'interprètent de la manière suivante :
– dans (1') : $BlVI = e_{AB}.I = P_{fém}$ est la puissance de la force électromotrice
– dans (2') : $-I\,lBV = F_{Lapl}.V = P_{Lapl.}$ est la puissance de la force de Laplace.
Le bilan auxiliaire : $P_{fém} + P_{Lapl.} = 0$ est vérifié et il permet d'accéder au bilan :

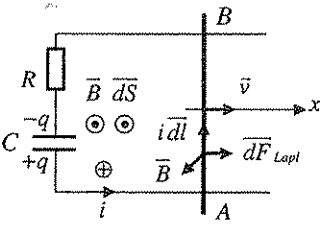
$$\boxed{P_{op} = F_{op}.V = RI^2 > 0}$$

montrant que la puissance fournie par l'opérateur à la tige est dissipée par effet Joule dans la résistance. Il s'agit d'un cas de conversion de puissance mécanique en puissance électrique.

d) L'inconvénient des rails parallèles et de la tige en translation est que le dispositif est limité dans l'espace par une longueur finie et par l'impossibilité d'avoir un champ magnétique uniforme sur une grande étendue. On peut « courber » les rails pour en faire deux cercles concentriques et déplacer la tige perpendiculairement aux rails dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Le dispositif est représenté sur la figure de la question **35.** du chapitre **12.** Suivant le sens de la conversion de puissance, on a ou le principe d'un l'alternateur, ou celui d'un moteur.

48. Les rails de Laplace (4) (*)

a) Le condensateur se décharge ; choisissons de prendre son armature positive $(+q)$ comme indiqué sur la figure. On choisit l'orientation positive $\oplus$ d'où $i = -\dfrac{dq}{dt}$; il en résulte la position des points A et B sur la tige.



* La tige est soumise à une force de Laplace motrice (suivant $\vec{u}_x$ si $i > 0$), d'où l'équation mécanique :

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = ilB} \quad (1)$$

* La tige mobile dans $\vec{B}$ est alors le siège d'une fém. On constate sur la figure que $\vec{B}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont de même sens d'où un flux $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS}$ positif :

$$\Phi = \Phi_0 + Blx$$

où $\Phi_0 = \Phi(t=0)$ et $x(t)$ le déplacement de la tige depuis l'origine $x(0)=0$

La loi de Faraday $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ donne $e = -Bl\dfrac{dx}{dt} = -Blv < 0$ si $v > 0$

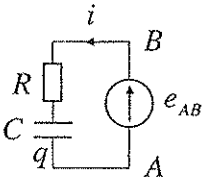
où $v > 0$ est la vitesse de la tige.

Rq : $\vec{B}$ désigne ici le champ extérieur ; le champ propre, non permanent, est négligé (ce qui revient à ne pas tenir compte de l'inductance L du circuit).

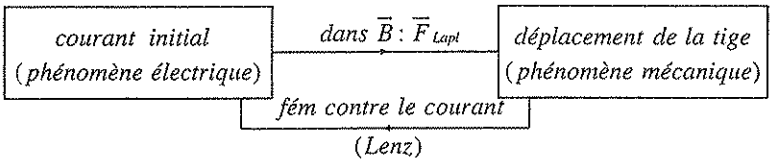
Rq : Ce système fonctionnant en moteur, il est courant de noter $e' = -e$ et de parler de force contre-électromotrice.

La loi des mailles sur le circuit où e_{AB}, fém induite, est toujours orientée de A vers B :

$$e_{AB} = Ri - \frac{q}{C} \quad \text{soit} \quad \boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = Blv} \quad (2)$$



La loi de Lenz s'illustre sur le schéma suivant :



b) Les équations (1) et (2) sont couplées :

$$(1) \times v : \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = ilBv \quad \text{avec} \quad ilBv = \vec{F}_{Lapl}.\vec{v} = P_{Lapl}$$

$$(2) \times i : -Ri^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = Blvi \quad \text{avec} \quad Blvi = -e_{AB}.i = -P_{fém}$$

Le bilan auxiliaire $P_{fém} + P_{Lapl.} = 0$ est toujours satisfait ; il permet d'accéder au bilan global où tous les termes sont positifs :

$$\boxed{-\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2 > 0}$$

Il confirme que le condensateur est la source d'énergie dans le circuit (comme un générateur) ; son énergie électrique est transférée en énergie cinétique de la tige et en chaleur par effet Joule dans la résistance. C'est un exemple élémentaire de transducteur électromécanique dans une conversion de puissance électrique en puissance mécanique.

c) L'équation (1) s'écrit : $m\dfrac{dv}{dt} = -lB\dfrac{dq}{dt}$; intégrée entre $t = 0$ et t, on en tire :

$$v = \frac{Bl}{m}(q_0 - q) \quad (1')$$

On reporte ce résultat dans l'équation (2) en posant $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{RC} + \dfrac{B^2l^2}{mR}$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{B^2l^2}{mR}q_0 \text{ de solution générale } q(t) = K\,e^{-t/\tau} + \frac{B^2l^2\tau}{mR}q_0$$

La condition initiale $q(t=0) = q_0$ permet la détermination de la constante K :

$$\boxed{q(t) = q_0\left(1 - \frac{B^2l^2\tau}{mR}\right)e^{-t/\tau} + \frac{B^2l^2\tau}{mR}q_0} \text{ et donc } i = -\frac{dq}{dt} \text{ donne } \boxed{i(t) = \frac{q_0}{RC}e^{-t/\tau}}$$

Ce qui établit le résultat attendu : $i > 0$ pour $q_0 > 0$.

Rq : Ce courant est plus faible que dans une décharge habituelle de dipôle RC (soit $\dfrac{q_0}{RC}e^{-t/RC}$) car $\tau < RC$; en effet l'induction l'empêche d'être aussi important et retarde ainsi la décharge du condensateur.

La vitesse s'obtient alors par (1') : $\boxed{v(t) = \dfrac{q_0Bl}{m}\dfrac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + B^2l^2C/m}}$

Valeurs limites pour $t \to \infty$:

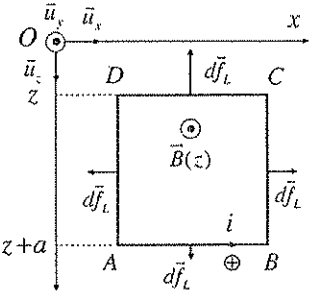
$$q_\infty = \frac{q_0}{1 + m/B^2l^2C} \; ; \; i_\infty = 0 \; ; \; v_\infty = \frac{q_0/BlC}{1 + m/B^2l^2C}$$

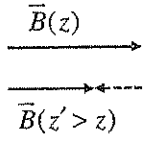
La tige prend une vitesse constante parce que la force de Laplace tend vers zéro comme le courant. À cause du mouvement, l'induction subsiste, et $i_\infty = 0$ signifie que la fém est exactement opposée à la tension aux bornes du condensateur ; c'est ce qui explique que le condensateur ne se décharge pas complètement (on peut d'ailleurs vérifier que $q_\infty/C - v_\infty Bl = 0$).

49. Chute d'un cadre

a) Le conducteur mobile dans un champ permanent est le siège d'une fém d'induction et donc d'un courant induit.

* Le cadre au cours de sa chute vers les z croissants, voit le champ $\vec{B}(z)$ diminuer en norme. D'après la loi de Lenz, il réagit donc en créant un champ propre ou induit $\vec{B}_i$ qui, pour s'opposer à cette diminution (en pointillé sur le schéma), est dirigé dans le





même sens que $\vec{B}(z)$! ceci est le cas pour un courant induit circulant dans le sens indiqué sur la figure (en tournant le tire-bouchon dans ce sens, il avance de l'arrière vers l'avant). C'est alors seulement que l'on choisit l'orientation positive $\oplus$ dans le sens indiqué sur la figure afin que $i>0$; on place ensuite les points $ABCD$ dans ce sens.

* De manière équivalente, et sans connaître le sens du courant, on peut orienter arbitrairement le cadre dans le sens $ABCD$ indiqué ; alors le flux du champ $\vec{B}(z)$ est positif (car vu l'orientation $\oplus$, le vecteur surface, comme $\vec{B}(z)$, est dirigé suivant $\vec{u}_y$) ; comme ce flux diminue au cours de la chute, on a d'après la loi de Faraday, $e>0$ soit $i>0$.

b) Calculons le flux :

$$\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \iint B\,dS = \int_z^{z+a} (B_0 - bz')\,a\,dz' = a^2\left(B_0 - b(z+a/2)\right)$$

La surface élémentaire choisie est une bande horizontale de largeur a et d'épaisseur dz' : $dS = a\,dz'$

d'où la fém : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = +a^2 b v$ où $v = \dot{z}$ est la vitesse du cadre

(négliger le flux propre du cadre revient à ne pas tenir compte de l'inductance L dans la loi d'Ohm).

et l'intensité du courant induit $i = \dfrac{e}{R}$ soit $\boxed{i = \dfrac{a^2 b}{R} v}$ positive comme prévu.

c) Les forces de Laplace sur les quatre côtés tendent globalement à faire éclater le cadre (voir la figure ci-dessus où $id\vec{l}$ avec $i>0$ est orienté dans le sens de parcours direct)

Les contributions sur les côtés verticaux DA et BC s'annulent car $\vec{B}$ ne dépend que de z. En revanche, pour les côtés horizontaux, la contribution du côté supérieur CD l'emporte sur celle du côté inférieur AB donnant une résultante vers le haut conformément à la loi de Lenz : le courant induit est tel que la résultante de Laplace s'oppose au mouvement de chute du cadre. Globalement sur toute la longueur des côtés horizontaux :

$$\vec{f}_L = \vec{f}_L^{\,CD} + \vec{f}_L^{\,AB} = -ia(B_0 - bz)\vec{u}_z + ia(B_0 - b(z+a))\vec{u}_z = -ia^2 b\,\vec{u}_z$$

Et avec l'expression de l'intensité i : $\boxed{\vec{f}_L = -\dfrac{a^4 b^2}{R} v\,\vec{u}_z}$

Sous la forme $\vec{f}_L = -\alpha\vec{v}$, la force de Laplace apparaît dans ce cas comme une force de frottement fluide.

d) Avec l'hypothèse que le cadre reste dans le plan vertical, le théorème du centre de masse appliqué au cadre et projeté sur $\vec{u}_z$ donne :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{a^4b^2}{R}v \quad \text{du type} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g \quad \text{en ayant posé} \quad \tau = \frac{mR}{a^4b^2}$$

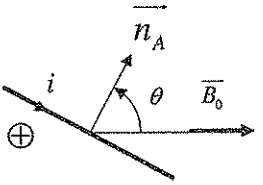
ce qui avec la condition initiale $v(t=0)=0$ conduit à : $\boxed{v(t) = g\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

AN : $\underline{\tau = 2{,}5 \text{ ms}}$ et $\underline{v_l = g\tau = 2{,}5 \text{ cm.s}^{-1}}$

Il résulte de cette application numérique que la vitesse limite v_l est atteinte presque instantanément, conduisant à un mouvement de chute rectiligne uniforme et lent, loin du mouvement uniformément accéléré, traditionnel, de la chute libre.

50. Cadres tournants dans un champ magnétique

a) Soit $\overrightarrow{n_A}$ la normale au cadre A orientée en accord avec le cadre A (voir la figure en vue de dessus). Ce cadre est un circuit mobile fermé sur lui-même et placé dans un champ permanent. Il est donc le siège d'un phénomène d'induction responsable de l'apparition d'un courant induit d'intensité i.



Rq : i peut être négative (i est algébrique).

Pour calculer i, on applique la loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$,

le flux Φ de $\overrightarrow{B_0}$ étant défini par $\Phi = \iint_{S_A} \overrightarrow{B_0}.\overrightarrow{dS}$ où S_A est la surface plane d'aire S sur laquelle repose le cadre A et $\overrightarrow{dS} = dS\,\overrightarrow{n_A}$ est un élément de cette surface.

Comme $\overrightarrow{B_0}.\overrightarrow{dS} = dS\,\overrightarrow{B_0}.\overrightarrow{n_A} = B_0\cos\theta\, dS$, on obtient $\Phi = B_0\cos\theta\, S$ et

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0\dot{\theta}\sin\theta\, S = B_0\omega\sin\theta\, S \quad \text{avec} \quad \dot{\theta} = \omega$$

Le circuit, de résistance R, est directement fermé sur lui-même, on en déduit :

$$\boxed{i = \frac{e}{R} = \frac{B_0\omega\sin\theta\, S}{R}}$$

Rq : i va créer un champ propre à ne pas confondre avec $\overrightarrow{B_0}$. Il peut donc y avoir un phénomène d'auto-induction dû à ce champ propre. On pourrait en tenir compte en utilisant le flux propre $\Phi_{propre} = Li$ et obtenir l'équation électrique : $e = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ à la place de $e = Ri$, mais l'auto-inductance L n'est pas donnée ; par ailleurs, le cadre n'étant constitué que d'un seul tour de fil, le champ propre, très faible devant $\overrightarrow{B_0}$, peut être négligé (ce qui revient à prendre $L = 0$).

b) Le moment magnétique du cadre A peut alors s'écrire : $\overrightarrow{M} = i\,\overrightarrow{S_A} = iS\,\overrightarrow{n_A}$.

Plongé dans le champ $\overrightarrow{B_0}$, le cadre A est donc soumis à un couple de Laplace de moment mécanique : $\overrightarrow{\Gamma_A} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B_0} = i S \overrightarrow{n_A} \wedge \overrightarrow{B_0} = -i S B_0 \sin\theta \vec{k}$ (le signe $-$ provient du produit vectoriel).
En remplaçant i par son expression, il vient :

$$\overrightarrow{\Gamma_A} = -\frac{(B_0 S \sin\theta)^2}{R}\omega\vec{k}$$

qui a tendance à freiner le cadre tournant autour de Δ.
Rq : Ce freinage par induction est prévisible directement par la loi de Lenz : en effet, la conséquence (le freinage) s'oppose à la cause de l'induction (ici le mouvement de rotation du cadre).

Pour le cadre C, on recommence le même calcul, mais il suffit de remarquer que tout est identique à condition de changer θ en $\theta + \pi/2$ puisque les deux cadres sont perpendiculaires ; par ailleurs formant un solide, ils ont même vitesse de rotation ω.
On obtient alors sur le cadre C un couple de moment mécanique :

$$\overrightarrow{\Gamma_C} = -\frac{(B_0 S \sin(\theta+\pi/2))^2}{R}\omega\vec{k} = -\frac{(B_0 S \cos\theta)^2}{R}\omega\vec{k}$$

Sur l'ensemble des deux cadres, les moments mécaniques s'ajoutent :

$\overrightarrow{\Gamma_{tot}} = -\frac{(B_0 S \sin\theta)^2}{R}\omega\vec{k} - \frac{(B_0 S \cos\theta)^2}{R}\omega\vec{k}$ et finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{tot}} = -\frac{(B_0 S)^2}{R}\omega\vec{k}}$$

Ce moment s'oppose à la vitesse de rotation, il s'agit d'un moment de frottement fluide.

c) Pour trouver l'équation du mouvement, on choisit comme système l'ensemble des deux cadres (moment d'inertie global $2J$), on travaille dans le référentiel galiléen du laboratoire, et on remarque que le mouvement décrit est une rotation autour de l'axe fixe Δ.
Il suffit donc d'écrire le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe Δ :

$$2J\frac{d\omega}{dt} = \overrightarrow{\Gamma_{tot}}.\vec{k} = -\frac{(B_0 S)^2}{R}\omega$$

les moments des poids des cadres et des actions de contact sur l'axe étant nul par rapport à l'axe.
On peut faire apparaître une constante de temps τ pour simplifier cette équation différentielle :

$$\boxed{\tau = \frac{2JR}{(B_0 S)^2}} \quad \text{et on obtient :} \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = 0$$

dont la solution est, en tenant compte de la condition initiale : $\boxed{\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$

ce qui correspond bien à un mouvement freiné par induction avec un temps caractéristique τ d'autant plus grand que l'inertie du cadre est élevée et que B_0 est faible.

d) Multiplions pour le cadre A les deux membres de l'équation électrique $Ri_A = e_A$ par i_A dont l'expression a été vue à la question a) :

$$Ri_A^2 = e_A i_A = \frac{(B_0 S\omega \sin\theta)^2}{R} = P_{fémA}$$

De même pour le cadre C ($\theta \to \theta + \pi/2$) :

$$Ri_C^2 = e_C i_C = \frac{(B_0 S\omega \cos\theta)^2}{R} = P_{fémC}$$

et pour l'ensemble des deux cadres :

$$Ri_A^2 + Ri_C^2 = \frac{(B_0 S)^2 \omega^2}{R} = P_{fém}$$

Multiplions les deux membres de l'équation mécanique $2J\dfrac{d\omega}{dt} = \Gamma_{tot}$ par ω avec l'expression de Γ_{tot} vue à la question c) :

$$2J\frac{d\omega}{dt}\omega = \Gamma_{tot}\omega = -\frac{(B_0 S)^2}{R}\omega^2 = P_{Lapl}$$

On vérifie le bilan auxiliaire $P_{fém} + P_{Lapl} = 0$ qui conduit au bilan global :

$$\boxed{-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(2J)\omega^2\right) = Ri_A^2 + Ri_C^2}$$

L'énergie cinétique de rotation perdue par les cadres est convertie en énergie électrocinétique via le phénomène d'induction couplé aux actions de Laplace, puis dégradée en chaleur par effet Joule dans les résistances.

51. Moteur à courant continu à entrefer plan (*)

0. Préliminaires

Chaque tige parcourue par un courant entre les points de contact A et B et placée dans le champ magnétique $\vec{B}$ subit un moment des forces de Laplace qui entraîne le mouvement de rotation du rotor autour de l'axe Oz dans le sens indiqué sur la figure, ce qui permet au moteur (c'est son rôle) de fournir sur son arbre un couple utile (un presse agrumes, une scie circulaire,...). Il s'agit d'une conversion de puissance électrique en puissance mécanique. Par ailleurs la tige conductrice est mobile dans un champ magnétique, elle est donc le siège d'une force électromotrice. L'analogie avec les rails de Laplace est évidente, sauf qu'ici les rails C_1 et C_2 sont circulaires et la tige OB en rotation autour de l'axe fixe Oz.

1. Étude d'une tige seule

a) Parcouru par le courant d'intensité I et placé dans le champ magnétique $\vec{B}$, l'élément de tige $\vec{dl} = dr\,\vec{u}_r$ subit la force de Laplace élémentaire :

$$\vec{df}_L = I\vec{dl} \wedge \vec{B} = Idr\,\vec{u}_r \wedge (-B_0\,\vec{u}_z) = IB_0 dr\,\vec{u}_\theta$$

qui fait bien tourner la tige dans le sens positif autour de Oz et dont le moment élémentaire par rapport à Oz est, avec un bras de levier r :

$$dM_L^{Oz} = +df_L\, r = IB_0 r dr$$

Seule la partie de la tige entre a et b est concernée (car elle seule est parcourue par un courant), d'où le moment résultant par rapport à l'axe :

$$M_L^{Oz} = IB_0 \int_a^b r dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_L^{Oz} = \frac{IB_0}{2}(b^2 - a^2)}$$

Ce moment positif est bien moteur (grâce au générateur extérieur E qui délivre le courant).

b) Le bilan auxiliaire s'écrit comme d'habitude : $P_{fém} + P_{Lapl} = 0$.

La puissance des actions de Laplace est :

$$P_{Lapl} = M_L^{Oz}\omega = \frac{1}{2} IB_0\omega(b^2 - a^2)$$

On en déduit la puissance de la force électromotrice est :

$$P_{fém} = -P_{Lapl} = -\frac{1}{2} IB_0\omega(b^2 - a^2)$$

Or $P_{fém} = e_{AB} I$ d'où il vient l'expression de la force électromotrice :

$$\boxed{e_{AB} = -\frac{1}{2} B_0\omega(b^2 - a^2)}$$

Rq : Comme $e_{AB} < 0$, conformément à la loi de Lenz, le mouvement de la tige (la conséquence) par l'induction s'oppose au passage du courant (la cause) ; c'est ce qui justifie la notion de force contre-électromotrice $-e_{AB} > 0$ pour un moteur.

Rq : Le calcul direct de la force électromotrice e_{AB} (en négligeant le champ magnétique propre) se fait en considérant le secteur d'angle $d\theta = \omega dt$ que balaye la tige pendant dt entre C_1 et C_2, et en évaluant la variation de flux $d\Phi$ pendant cet intervalle de temps…

2. Mouvement du rotor complet

a) Les p tiges sont placées en parallèle et toutes parcourues par le même courant donc d'intensité I/p s'écoulant de C_1 au potentiel V_A vers C_2 au potentiel V_B.

La différence de potentiel $V_A - V_B$ est la même pour toutes et est inchangée ; en effet la loi d'Ohm généralisée s'exprime pour une tige :

$$V_A - V_B = rI - e_{AB} = -e_{AB} \quad \text{car pour la tige } r = 0$$

La puissance totale de la fém est additive pour les p tiges :

$$P'_{fém} = p\left(e_{AB}\frac{I}{p}\right) = P_{fém}$$

Il en est de même du moment des forces de Laplace par rapport à l'axe :

$$M_L'^{Oz} = p\left(\frac{I}{p}\frac{B_0}{2}(b^2-a^2)\right) = M_L^{Oz} \quad \text{soit} \quad P'_{Lapl} = P_{Lapl}$$

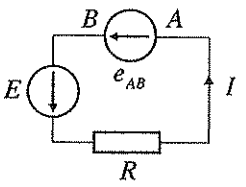
conduisant à un bilan auxiliaire inchangé : $P'_{Lapl} + P'_{fém} = 0$

La modélisation du rotor par une seule tige est donc tout à fait satisfaisante, mais dans la pratique elle n'assure pas l'équilibrage ; le rotor à une tige, à grande vitesse, conduirait à une rapide déformation et usure de l'axe, d'où la nécessité de p tiges disposées en étoile.

b) Si le moteur fournit à l'extérieur un couple Γ_e, c'est que l'extérieur exerce sur le moteur un couple de freinage $-\Gamma_e$. La loi du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz pour l'ensemble des tiges de moment d'inertie total pJ est :

$$\boxed{pJ\frac{d\omega}{dt} = \frac{b^2-a^2}{2}B_0 I - \Gamma_e} \quad (1)$$

Le circuit électrique équivalent est donné sur le schéma ci-contre ; la loi d'Ohm généralisée s'écrit :



$$E = RI - e_{AB}$$

soit $\boxed{RI + \frac{b^2-a^2}{2}B_0\omega = E}$ (2)

Les équations (1) et (2) sont évidemment couplées pour les grandeurs $I(t)$ et $\omega(t)$, comme cela est le cas pour tout transducteur électromécanique.

c) Éliminons l'intensité I entre les deux équations :

$$pJ\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{R}\left(\frac{b^2-a^2}{2}B_0\right)^2\omega = \frac{b^2-a^2}{2R}B_0E - \Gamma_e$$

Sous la forme : $\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_l}{\tau}$ avec la condition $\omega(t=0) = 0$

la solution de l'équation est : $\boxed{\omega(t) = \omega_l(1-e^{-t/\tau})}$

avec $\boxed{\tau = \frac{4pRJ}{(b^2-a^2)^2B_0^2}}$ et $\boxed{\omega_l = \frac{4R}{(b^2-a^2)^2B_0^2}\left(\frac{b^2-a^2}{2R}B_0E - \Gamma_e\right)}$

τ apparaît bien comme un temps caractéristique de la prise de vitesse du rotor, sa vitesse de rotation limite étant ω_l atteinte pour un temps de plusieurs τ. À noter que cette vitesse de rotation est réglable par choix de la tension d'alimentation

E. Passé cette phase, l'équation (1) indique que $\Gamma_e = M_L^{0z}$, le couple fourni par l'arbre à l'extérieur est intégralement égal au couple magnétique reçu.

AN : $\tau = 39$ s et $\omega_l = 3{,}4$ rad.s^{-1} = 540 tours/s, une vitesse qui ne sera pas atteinte à cause des frottements.

d) Pour que $\omega_l > 0$, le couple Γ_e fourni ne doit pas être trop important, sinon le moteur ne se met pas à tourner, ou même tourne en sens inverse en recevant de la puissance de l'extérieur.

$$\boxed{\Gamma_{em} = \frac{b^2 - a^2}{2R} B_0 E}$$

AN : $\Gamma_{em} = 7.10^{-3}$ m.N

52. Courant induit par un aimant mobile (*)

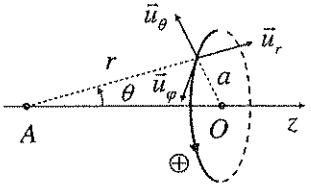
a) La spire immobile est placée dans le champ magnétique variable de l'aimant (à cause de l'approche), elle est donc le siège d'une fém d'induction et un courant induit va prendre naissance dans la spire.

* Les lignes de champ de l'aimant se referment du pôle Nord au pôle Sud ; au niveau de la spire, la projection du champ sur l'axe est donc suivant Oz^+. Le sens du vecteur surface de la spire est également suivant Oz^+ vu le sens positif indiqué sur la figure. Il en résulte que le flux envoyé par l'aimant à travers la spire est positif, et que dans le mouvement d'approche, ce flux augmente puisque le champ de l'aimant s'intensifie près des pôles. D'après la loi de Faraday, on en déduit que $e = -d\Phi / dt < 0$, d'où $i = e / R < 0$.

* Dans le référentiel d'étude, la spire fixe est placée dans le champ $\vec{B}$ de l'aimant, variable à cause de son mouvement. Lorsque l'aimant A se rapproche de O, la norme $\|\vec{B}\|$ de son champ au niveau de la spire augmente ($\vec{B}$ est dans le sens de $\vec{u}_z$) ; le circuit réagit conformément à la loi de Lenz contre cette augmentation par un champ induit $\vec{B}_i$ opposé à $d\vec{B}/dt$, donc suivant $-\vec{u}_z$. Ce qui suppose la création d'un courant induit $i < 0$ (de sens opposé à l'orientation choisie).

Bien sûr, le sens du courant induit est modifié si au lieu d'approcher l'aimant de la spire, on le retire, ou si on approche l'aimant de la spire après l'avoir retourné.

b) L'angle θ est variable du centre au bord de la spire (la figure représente θ_m, l'angle maximal). Si l'on choisit comme surface la surface plane, alors r est également variable du centre au bord, et en plus, comme dans ce cas $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}_z$, les deux composantes B_r et B_θ du champ vont contribuer au flux... Il est



bien plus commode de choisir comme surface la calotte sphérique de centre A et qui s'appuie sur la spire : r y est alors constant du centre au bord, et en plus, comme dans ce cas $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}_r$, seule la composante B_r contribue au flux !

$$\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \iint B_r\,dS = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathfrak{M}}{r^3}\iint dS\cos\theta$$

Or multiplier un élément de surface dS de la calotte sphérique par $\cos\theta$ revient à la projeter sur le plan de la spire ; l'intégrale dans l'expression du flux donne alors simplement la surface de la spire : $\iint dS\cos\theta = \pi a^2$

$$\text{d'où}\quad \Phi = \frac{\mu_0 a^2 \mathfrak{M}}{2r^3}$$

Ce flux est variable car r dépend du temps à cause du mouvement ; le théorème de Pythagore donne $r^2(t) = a^2 + z^2(t)$

$$\text{d'où}\quad \boxed{\Phi(t) = \frac{\mu_0 a^2 \mathfrak{M}}{2\left(a^2 + z^2(t)\right)^{3/2}}}$$

c) La loi de Faraday donne $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d\Phi}{dz}\dfrac{dz}{dt}$ par dérivée composée ;

$e = \dfrac{3\mu_0 a^2 \mathfrak{M} z v}{2(a^2+z^2)^{5/2}}$ car $\dfrac{dz}{dt} = v$, projection de la vitesse de l'aimant sur l'axe Oz

d'où le courant induit donné par la loi d'Ohm $i = \dfrac{e}{R}$

$$\text{soit}\quad \boxed{i(t) = \frac{3\mu_0 a^2 \mathfrak{M} v z(t)}{2R(a^2 + z^2(t))^{5/2}}}$$

À noter que ce courant est bien négatif comme prévu puisque $z = \overline{OA} < 0$; de plus il change bien de signe lorsque v ou $\mathfrak{M}$ changent de signe.

Il est maximal lorsque $\dfrac{di}{dz} = 0$, soit dans ce cas pour $\boxed{z = -a/2}$

d) L'élément de spire $d\vec{l}$ parcouru par le courant i et placé dans le champ $\vec{B}$ de l'aimant subit la force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{f}_L = i\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = idl\,\vec{u}_\varphi \wedge (B_r\vec{u}_r + B_\theta\vec{u}_\theta) = idl(B_r\vec{u}_\theta - B_\theta\vec{u}_r)$$

et en projection sur l'axe Oz avec $B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2\mathfrak{M}\cos\theta_m}{r^3}$ et $B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathfrak{M}\sin\theta_m}{r^3}$:

$$d\vec{f}_L.\vec{u}_z = idl(-B_r\sin\theta_m - B_\theta\cos\theta_m) = idl\left(\frac{\mu_0\mathfrak{M}}{4\pi r^3}\right)(-3\cos\theta_m\sin\theta_m)$$

d'où la résultante, et avec $\sin\theta_m = \dfrac{a}{r}$ et $\cos\theta_m = -\dfrac{z}{r} > 0$:

$$f_{Lz} = i2\pi a.\frac{3\mu_0 \mathcal{M} az}{4\pi r^5}$$

En remplaçant i par son expression précédente, il vient :

$$\boxed{\vec{f}_L = \frac{9\mu_0^2 a^4 \mathcal{M}^2 v z^2}{4R(a^2+z^2)^5}\vec{u}_z}$$

Cette force qu'exerce l'aimant sur la spire a une projection positive ; la spire, si elle était libre, aurait tendance à fuir l'aimant (loi de Lenz).

53. Le haut-parleur électrodynamique

a) Un élément $\overrightarrow{dl}$ de bobine parcouru par un courant d'intensité i et placé dans le champ magnétique $\vec{B}$ subit la force de Laplace :

$$d\vec{f}_{Lapl} = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = idl\,\vec{u}_\theta \wedge B\,\vec{u}_r = idlB\,\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_{Lapl} = ilB\,\vec{u}_x$$

La RFD appliquée à l'ensemble membrane et bobine s'écrit en projection sur Ox :

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -kx - \alpha v + ilB} \quad (1)$$

La puissance de la force de Laplace est $P_{Lapl} = \vec{f}_{Lapl}.\vec{v} = ilBv$ puisque $\vec{v} = v\vec{u}_x$.

b) Le bilan auxiliaire $P_{Lapl} + P_{fém} = 0$ permet d'accéder à $P_{fém} = -ilBv$. Écrite sous la forme $P_{fém} = e_{AB}\,i$, on déduit immédiatement $e_{AB} = -Blv < 0$ d'après Lenz.

Le calcul habituel de la force électromotrice par le flux pose ici problème, d'où le passage proposé par la puissance. On peut néanmoins noter l'analogie aussi bien pour l'expression de $\vec{f}_{Lapl}$ que pour celle de e_{AB} avec les rails de Laplace des questions **27.** et **48.**

La bobine est aussi le siège d'un phénomène d'auto-induction puisque placée dans son propre champ variable, la loi d'Ohm généralisée s'écrit donc :

$$\boxed{u = Ri + L\frac{di}{dt} + vBl} \quad (2)$$

Comme attendu, les équations (1) et (2) sont couplées puisque l'équation mécanique (1) dépend de la grandeur électrique i et l'équation électrique (2) de la grandeur mécanique v.

c) Il suffit pour obtenir des termes homogènes à une puissance de multiplier l'équation (1) par $v = dx/dt$ et l'équation (2) par i :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) - \alpha v^2 + ilBv \quad (1')$$

$$ui = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + vBli \quad (2')$$

L'élimination entre les équations (1') et (2') des termes de couplage $(Bl)iv$ présents dans les deux équations (et qui traduit simplement le bilan auxiliaire) conduit au bilan de puissance global :

$$\boxed{ui = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 + \alpha v^2} \quad (3)$$

ui est la puissance délivrée par le générateur (la sortie de l'amplificateur).

$E_r = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2$ est la somme des énergies cinétique, potentielle élastique et magnétique de l'ensemble bobine et membrane ; $P_1 = Ri^2$ est la puissance Joule et $P_2 = \alpha v^2$ est la puissance acoustique.

En moyenne temporelle pour un régime périodique $\frac{1}{T}\int_T \frac{dE_r}{dt}dt = 0$.

E_r est une énergie « récupérable » puisqu'en augmentant et en diminuant alternativement, la puissance dE_r/dt correspondante change de signe, alors que P_1 et P_2 sont toujours positives, d'où :

$$\boxed{< ui > = R < i^2 > + \alpha < v^2 >} \quad (3')$$

La puissance moyenne fournie par l'amplificateur au haut-parleur est donc en partie perdue par effet Joule dans la résistance de la bobine et en partie transférée à l'air, c'est-à-dire rayonnée sous forme sonore, d'où le rendement :

$$\eta = \frac{< P_2 >}{< ui >} = \frac{\alpha < v^2 >}{R < i^2 > + \alpha < v^2 >} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{1}{1 + \dfrac{R < i^2 >}{\alpha < v^2 >}} < 1} \quad (4)$$

Pour un rendement η élevé, il faut évidemment R petit et α grand.

Le champ $\vec{B}$ n'intervient pas explicitement dans le bilan de puissance global (3) ; pourtant sa valeur n'est pas indifférente puisque c'est lui qui par le bilan auxiliaire $P_{Lapl} + P_{fém} = 0$ réalise le couplage électromagnétique ($\vec{B} = \vec{0}$, c'est-à-dire un haut-parleur sans aimant, ne donne rien !). En fait il intervient de manière implicite dans le rapport $< i^2 > / < v^2 >$ dans η, car à i donné, v est d'autant plus important que B est grand.

d) Réécrivons les équations (1) et (2) en gardant comme grandeurs complexes en $e^{j\omega t}$, la vitesse $\underline{v}$ et l'intensité $\underline{i}$:

$$(1) \Rightarrow \left(mj\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha\right)\underline{v} = Bl\underline{i} \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow \underline{u} = (R + jL\omega)\underline{i} + Bl\underline{v}$$

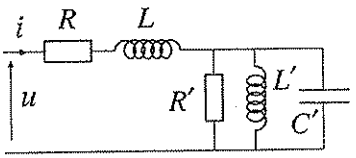
L'élimination de $\underline{v}$ entre ces deux équations conduit à l'impédance :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + jL\omega + \frac{B^2l^2}{\alpha + jm\omega + k/j\omega} \quad \text{qu'il est possible d'écrire} \quad \underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{am}$$

avec $\underline{Z}_e = R + jL\omega$ l'impédance électrique de la bobine

et $\frac{1}{\underline{Z}_{am}} = \frac{\alpha}{B^2l^2} + \frac{jm\omega}{B^2l^2} + \frac{k}{j\omega B^2l^2} \equiv \frac{1}{R'} + jC'\omega + \frac{1}{jL'\omega}$

L'écriture précédente montre que l'impédance motionnelle $\underline{Z}_{am}$ est constituée de trois composants électriques en parallèle. Dans le schéma électrique équivalent :



$R' = \frac{B^2l^2}{\alpha}$ représente la transmission acoustique à l'air ; $L' = \frac{B^2l^2}{k}$ représente le ressort et $C' = \frac{m}{B^2l^2}$ représente la masse. AN : $\underline{R' = 2{,}7\ \Omega}$; $\underline{L' = 0{,}37\ \text{mH}}$; $\underline{C' = 7{,}5.10^{-3}\ \text{F}}$

e) Rappelons que pour une fonction sinusoïdale f :

$$< f^2 > = \frac{1}{2} |\underline{f}|^2 \text{ (valeurs efficaces)}$$

Ceci permet d'évaluer simplement dans l'expression (4) du rendement η, le rapport :

$$\frac{< i^2 >}{< v^2 >} = \frac{|\underline{i}|^2}{|\underline{v}|^2} = \left|\frac{\underline{i}}{\underline{v}}\right|^2 \text{ sachant que d'après (1) : } \frac{\underline{i}}{\underline{v}} = \frac{\alpha + j(m\omega - k/m)}{Bl}$$

d'où $\boxed{\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2 + (m\omega - k/m)^2}{B^2l^2}}}$

Notons que, comme prévu à la question c), le rendement augmente lorsque B augmente ; il est maximal pour la pulsation libre d'oscillation du système :

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \text{ ; alors } \eta_0 = \eta(\omega_0) = \frac{1}{1 + R/R'}$$

AN : $\underline{f_0 = 95\ \text{Hz}}$ et $\underline{\eta_0 = 0{,}57 = 57\,\%}$

Par définition des grandeurs efficaces : $P = Ri_{eff}^2 + \alpha v_{eff}^2$

AN : $\underline{v_{eff} = 1{,}2\ \text{m.s}^{-1}}$ et $\underline{x_{eff} = v_{eff}/2\pi f_0 = 1{,}9\ \text{mm}}$ ce qui est visible.

AN : à $f = 300$ Hz, $\underline{\eta = 1{,}2.10^{-3} = 0{,}12\,\%}$

Il s'agit donc clairement d'un haut-parleur basse fréquence ($f_0 \approx 100$ Hz) avec un rendement très mauvais dès que l'on s'éloigne de la fréquence de résonance.

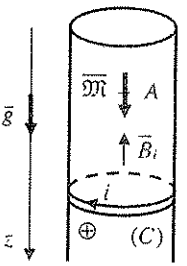
Travaux pratiques

54. Le spot lumineux du galvanomètre auquel est reliée la bobine dévie de la même manière, preuve que le courant induit n'est fonction que du mouvement relatif des deux parties du système (c'est l'invariance par changement de référentiel galiléen).

Si le résultat est le même, la manière de décrire les phénomènes diffère puisque dans le 1er cas il s'agit d'une spire fixe placée dans le champ magnétique de l'aimant qui dépend du temps (dans le référentiel de la spire) et dans le 2e cas il s'agit d'une spire mobile placée dans le champ magnétique stationnaire de l'aimant.

55. L'induction s'oppose *aux variations* de courant ; ce dernier demeure donc dans le circuit (tout en diminuant progressivement) après l'ouverture de l'interrupteur. Les deux extrémités de l'interrupteur se chargent, l'une négativement par accumulation d'électrons, l'autre positivement par déficit, constituant un effet capacitif. Alors très rapidement le champ électrique ainsi créé entre ces extrémités proches atteint la valeur pour laquelle l'air est ionisé (le champ disruptif dans l'air est de $30\ \text{kV.cm}^{-1}$), auquel cas il devient conducteur et l'étincelle de rupture apparaît.
Suivant le même principe un circuit est fermé en posant un clou sur une lime d'atelier bien râpeuse ; par déplacement du clou le long de la lime le circuit s'ouvre et se referme fréquemment provoquant un jet continu d'étincelles.

56. Il est commode de raisonner sur un circuit (C) de cote z constitué d'un tronçon de tuyau de hauteur dz. Dans le référentiel d'étude, ce circuit fixe est placé dans le champ $\overline{B}$ de l'aimant, variable à cause de sa chute (circuit fixe placé dans un champ magnétique variable). Lorsque l'aimant A se rapproche de (C), la norme $\|\overline{B}\|$ de son champ au niveau de (C) augmente ($\overline{B}$ est dans le sens de $\vec{u}_z$) ; le flux positif à travers le contour orienté (C) augmente, ce dernier est donc le siège d'une fém $e<0$ et d'un courant induit d'intensité $i<0$. Le circuit réagit donc (contre cette augmentation) par la création d'un champ induit $\overline{B}_i$ opposé à $d\overline{B}/dt$, donc suivant $-\vec{u}_z$, ce qui est conforme à la loi de Lenz. Le moment magnétique $\overline{\mathcal{M}}$ placé dans ce champ induit inhomogène (celui d'une spire) subit alors une force (l'opposée de la force de Laplace qu'exerce l'aimant sur la spire) et qui en freine considérablement la chute (toujours Lenz), au point que celle-ci est très rapidement décrite par un mouvement à vitesse constante.



Dans le même tube en verre, cette induction n'a pas lieu et donc la chute est libre comme si elle se produisait à l'extérieur du tube.

57. Les courant des Foucault sont souvent considérés comme un inconvénient parce qu'ils freinent les parties métalliques et/ou conduisent à des pertes par effet Joule comme à la question **36.**. Pour éviter ces circulations de courant dans les noyaux de fer des électro-aimants ou carcasses de transformateurs, les pièces métalliques sont découpées en tranches puis réassemblées en étant séparées les unes des autres par des matières isolantes. Lorsque le feuilletage est perpendiculaire à la direction principale des courants de Foucault, alors ces derniers sont considérablement réduits.

58. En TP d'optique on le rencontre comme abaisseur de tension (230 V à 12 V) pour l'alimentation des lampes blanches (quartz-iode) ou comme élévateur de tension (230 V à ≈ 800 V) pour l'alimentation des lampes spectrales. En TP d'électricité il

est dissimulé dans de nombreux appareils qui fonctionnent à des tensions bien moins élevées que celle du secteur.

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance