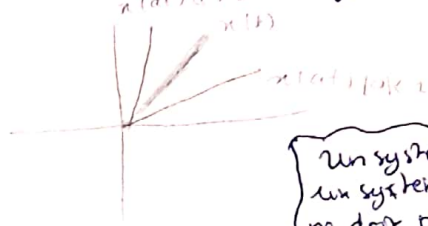


EXERCISE 1

- 1- a ; La fonction $x(t)$ et $x'(t)$ ne sont pas associées par addition donc la question 1-a est fautive.
- 2- a ; le b n'est pas stationnaire car les coefficients de B ne sont pas constants ; les fonctions de a ne sont pas additionnées mais leurs coefficients sont constants
- 3- a, d.
- 4- b, c, f.



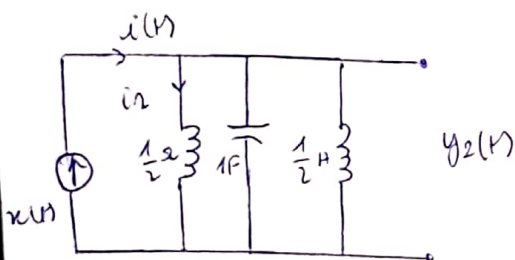
Un système causal est un système dont la sortie ne doit pas précéder l'entrée

Un système est linéaire si ses fonctions sont associées par addition

En L3, on travaille en SISO

Étude temporelle

EXERCISE 2



Sur le schéma, on a : $x(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \int y_2(t) dt$ (1).

On a : $x(t) = y_2(t)$

(1) dérivons : $x'(t) = \frac{1}{C} y_2(t)$; Donc

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= y_2(t) \\ x'(t) &= \frac{1}{C} y_2(t) \end{aligned}}$$

EXERCISE 3

① Déterminons l'équation reliant le débit q_0 à l'entrée q_i .

On a : $q_0 = R h$

$$(q_i - q_0) \Delta t = A \Delta h$$

$$\text{On a : } (q_i - q_0) \frac{1}{A} = \frac{\Delta h}{\Delta t} \Leftrightarrow (q_i - q_0) \cdot \frac{1}{A} = h'(t).$$

$$\text{or } h'(t) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dq_0}{dt} \quad \text{Donc } (q_i - q_0) \frac{1}{A} = \frac{1}{R} \frac{dq_0}{dt}$$

$$\Rightarrow R(q_i - q_0) = A \cdot \frac{dq_0}{dt} \Rightarrow R q_i = R q_0 + A \cdot \frac{dq_0}{dt}$$

$$\boxed{\text{Donc } q_i = \frac{A}{R} \frac{dq_0}{dt} + q_0}$$

Déterminons également l'équation différentielle reliant la tête h à e en

$$\text{On a: } (q_i - q_0) \Delta b = A \Delta h \Rightarrow (q_i - R h) = A \frac{\Delta h}{\Delta b}$$

$$\Rightarrow q_i = R h + A h'(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{q_i = A h'(t) + R h}$$

EXERCICE 4

$$(D+1)(D^2+5D+6)y(t) = 0x(t) \text{ avec } y_0(0^-) = 2, y'_0(0^-) = -1, y''_0(0^-) = 5.$$

1.) Trouvons:

① le polynôme caractéristique.

$$\text{Posons } Q(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+6)$$

② Equation caractéristique

$$Q(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+6) = 0.$$

③ Racines caractéristiques

$$Q(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda+1) = 0 \text{ ou } \lambda^2+5\lambda+6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ou } (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = -3.$$

Les ~~raci~~ racines caractéristiques sont donc: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -3$.

④ Les modes caractéristiques:

Ce sont $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ et $e^{\lambda_3 t}$ soit e^{-t} , e^{-2t} et e^{-3t} .

Trouvons $y_0(t)$ la composante libre.

$$\text{On a: } y_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t}$$

$$y'_0(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} - 3C_3 e^{-3t}$$

$$y''_0(t) = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} + 9C_3 e^{-3t}.$$

$$\text{On a: } y_0(0^-) = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 2$$

$$y'_0(0^-) = -1 \Rightarrow -C_1 - 2C_2 - 3C_3 = -1$$

$$y''_0(0^-) = 5 \Rightarrow C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 5$$

$$\text{On obtient: } \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ -C_1 - 2C_2 - 3C_3 = -1 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 5 \end{cases}$$

calculés, on obtient: $C_3 = 3$, $C_2 = -7$ et $C_1 = 6$

donc $y_0(t) = 6e^{-t} - 7e^{-2t} + 3e^{-3t}$.

3) Déterminons la réponse impulsionnelle

On a: $h(t) = A_0 \delta(t) + C' \times \text{modes caractéristiques}$

Ici, le coefficient du polynôme caractéristique est supérieur strict au coefficient de celui dans l'autre partie $[(D+2)(D^2+5D+6)$ a un degré supérieur à D]. Ainsi, $A_0 \delta(t)$ est nul.

On a donc $h(t) = C_1' e^{-t} + C_2' e^{-2t} + C_3' e^{-3t}$.

4) Déterminons les conditions initiales.

Ici, comme le degré du polynôme caractéristique est 3, nous aurons 3 conditions initiales.

$h(0) = 0 \Rightarrow h(0^+) = K_1$, Ainsi, $h'(t) = K_1 \delta(t)$

$h'(0) = 0$ et $h'(0^+) = K_2$, Ainsi, $h''(t) = K_2 \delta(t) + K_1 \delta'(t)$

$h''(0) = 0$ et $h''(0^+) = K_3$, Ainsi, $h'''(t) = K_3 \delta(t) + K_2 \delta'(t) + K_1 \delta''(t)$.

On a: $(D+2)(D^2+5D+6)h(t) = D \delta(t)$

$\Rightarrow (D^3+5D^2+6D+D^2+5D+6)h(t) = D \delta(t)$

$\Rightarrow (D^3+6D^2+11D+6)h(t) = \delta'(t)$

$\Rightarrow D^3 h(t) + 6D^2 h(t) + 11D h(t) + 6h(t) = \delta'(t)$

$\Rightarrow h'''(t) + 6h''(t) + 11h'(t) + 6h(t) = \delta'(t)$

$\Rightarrow K_1 \delta''(t) + K_2 \delta'(t) + K_3 \delta(t) + 6[K_1 \delta'(t) + K_2 \delta(t)] + 11[K_1 \delta(t)] + 6h(t) = \delta'(t)$

$\Rightarrow K_1 \delta''(t) + \delta'(t)[K_2 + 6K_1] + \delta(t)[K_3 + 6K_2 + 11K_1] + 6h(t) = \delta'(t)$

Remarque: $D \delta(t) = \delta'(t)$
D représente comme une dérivée

Donc $\begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 + 6K_1 = 1 \\ K_3 + 6K_2 + 11K_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = 1 \\ K_3 = -6 \end{cases}$

Donc $h(0^+) = 0$, $h'(0^+) = 1$ et $h''(0^+) = -6$.

On a: $h(t) = C_1' e^{-t} + C_2' e^{-2t} + C_3' e^{-3t}$

$h'(t) = -C_1' e^{-t} - 2C_2' e^{-2t} - 3C_3' e^{-3t}$

$h''(t) = C_1' e^{-t} + 4C_2' e^{-2t} + 9C_3' e^{-3t}$

On a: $\begin{cases} h(0) = 0 \Rightarrow C_1' + C_2' + C_3' = 0 \\ h'(0) = 1 \Rightarrow -C_1' - 2C_2' - 3C_3' = 1 \\ h''(0) = -6 \Rightarrow C_1' + 4C_2' + 9C_3' = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' + C_3' = 0 \\ -C_1' - 2C_2' - 3C_3' = 1 \\ C_1' + 4C_2' + 9C_3' = -6 \end{cases}$

Après résolution, on obtient: $C_3 = -\frac{3}{2}$; $C_2 = 2$ et $C_1 = -\frac{1}{2}$

On obtient donc

$$h(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} \right) u(t)$$

$h(t) = \text{expression}$
On met $h(t)$ car $h(t)$

= 4.) Réponse forcée pour $x(t) = 2e^{-5t} u(t)$

On a: $y_f = (x * h)(t)$.

En utilisant le tableau, on obtient:

$$y_f(t) = 2e^{-5t} * \left(-\frac{1}{2} e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} \right)$$

$$= e^{-5t} * (-e^{-t} + 4e^{-2t} - 3e^{-3t})$$

$$= e^{-5t} * (-e^{-t}) + e^{-5t} * 4e^{-2t} + e^{-5t} * (-3e^{-3t})$$

$$= -e^{-5t} * e^{-t} + e^{-5t} * 4e^{-2t} - e^{-5t} * 3e^{-3t}$$

On a: $e^{\lambda_1 t} u(t) * e^{\lambda_2 t} u(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(t)$.

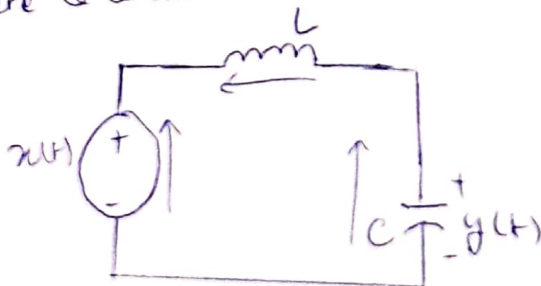
D'où $y_f(t) = -\frac{e^{-5t} - e^{-t}}{-5+1} + 4 \frac{e^{-5t} - e^{-2t}}{-5+2} - 3 \frac{e^{-5t} - e^{-3t}}{-5+3}$

$$= \left[\frac{e^{-5t} - e^{-t}}{4} - \frac{4(e^{-5t} - e^{-2t})}{3} + \frac{3(e^{-5t} - e^{-3t})}{2} \right] u(t)$$

$$\Rightarrow y_f(t) = \left[\frac{5}{12} e^{-5t} - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{4}{3} e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} \right] u(t)$$

EXERCICES.

On considère le circuit:



Déterminons l'équation différentielle qui relie $x(t)$ à $y(t)$

D'après la loi des mailles, $x(t) = u_L + u_C$

$$x(t) = L \frac{di(t)}{dt} + y(t) \Rightarrow x(t) = L i'(t) + y(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt}, \text{ et } u_C = \frac{q}{C} = y(t) \Rightarrow q = C y(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C y'(t)$$

$$i(t) = C y''(t). \text{ Ainsi, } \boxed{x(t) = LC y''(t) + y(t)}$$

1) Déterminons l'équation caractéristique du circuit.

On a: $x(t) = LC y''(t) + y(t) \Rightarrow (LC D^2 + 1)y(t) = x(t)$

L'équation caractéristique est: $LC\lambda^2 + 1 = 0$

⑤ les racines: On a: $\lambda^2 = \frac{-1}{LC} \Rightarrow \lambda = i \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ou $\lambda = -i \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

3) Déterminons la réponse d'entrée nulle

On a: $y_0(t) = C e^{-\alpha t} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \theta\right)$

$y_0(t) = C \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \theta\right)$

Conditions initiales: On a: $v_C(0) = 1$ et $i_L = 0$

Ainsi, $y_0(0) = 1 \Rightarrow C \cos \theta = 1$

On a: $y'(t) = -\frac{C}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \theta\right)$

Donc $y_0'(0) = -\frac{C}{\sqrt{LC}} \sin(\theta)$

On obtient, $\begin{cases} y_0(0) = 1 \Rightarrow C \cos \theta = 1 \\ y_0'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{C}{\sqrt{LC}} \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{C} \\ \sin \theta = 0 \end{cases}$

~~$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$~~

$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \arctan(0) \Rightarrow \theta = 0 + k\pi$

On a: $\cos \theta = \frac{1}{C} = 1 \Rightarrow C = 1$

Donc $y_0(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$

4) Tracons $y_0(t)$

1 - c
2 - c
3 - b
4 - b
5 - c, a
6 - c
7 - a
8 - b, a

EXERCICE 2

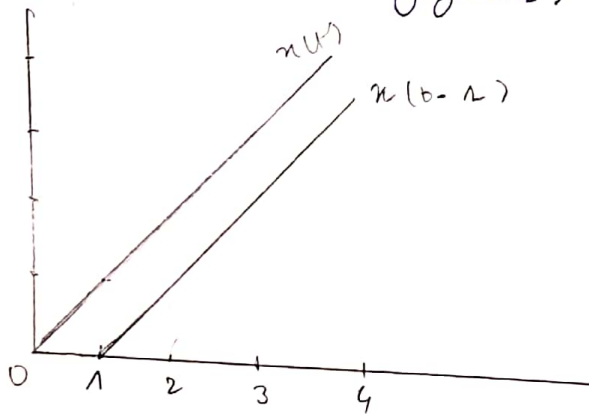
1°) Choisis les opérations à appliquer au signal $x(t)$ pour obtenir $y(t)$.
On a : $y'(t) = x(t) \cdot 2e^{-3t} \Rightarrow y'(t) = 2b e^{-3t} u(t) \Rightarrow$ amortissement
 $y(t) = 2(t+2)e^{-3(t+2)} u(t+2) \Rightarrow$ décalage de temps $b = -2$.

Ainsi, les opérations sont :

- ⊗ Décalage de temps $b = -2$
- ⊗ Un amortissement de $2e^{-3t}$.

2°) On considère $x(t)$.

a) Traçons $x(t)$ sur la figure 1. b) Traçons $x(t-2)$.



3°) Calculons l'énergie du signal

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_0^{+\infty} [(b-2)u(b-2)]^2 dt$$

$$= \int_2^{+\infty} (b-2)^2 dt = \int_1^{+\infty} (t^2 - 2t + 2) dt$$

Calculons la puissance moyenne

$= +\infty$.

Le signal n'est ni à énergie finie ni à puissance finie

5°) L'expression causale de $x(t)$.

$$x(t) = x(t-2) = (b-2)u(b-2).$$

6) Les parties paires et impaires

$$u_P = \frac{1}{2} [u_1(t) + u_2(-b)] \rightarrow u_P = \frac{1}{2} [(b-1)u(b-1) + (-b-1)u(-b-1)]$$

$$u_I = \frac{1}{2} [u_1(t) - u_2(-b)] \rightarrow u_I = \frac{1}{2} [(b-1)u(b-1) - (-b-1)u(-b-1)]$$

$$\Rightarrow u_P = \frac{1}{2} [(b-1)u(b-1) - (b+1)u(-b-1)]$$

$$u_I = \frac{1}{2} [(b-1)u(b-1) + (b+1)u(-b-1)]$$

Question sup: Déterminons l'expression par morceaux de la partie paire

On utilise un tableau de valeur pour déterminer l'expression par morceaux d'une expression causale.

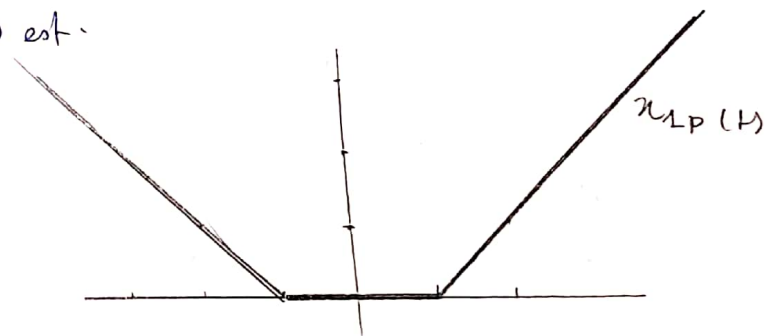
On cherche les valeurs particulières (celles relatives à $u(t)$)

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\frac{1}{2} [(b-1)u(b-1)]$	0	⊕	⊕	$\frac{1}{2}(b-1)$
$\frac{1}{2} [(b+1)u(-b-1)]$	$-\frac{1}{2}(b+1)$	⊕	⊕	0
$u_P(t)$	$-\frac{1}{2}(b+1)$	⊕	⊕	$\frac{1}{2}(b-1)$

Si la lim au borne de la composante est égal au zéro correspondant, alors l'intervalle est fermé

Ainsi, l'expression par morceaux de $u_P(t)$ est:

$$u_P(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(b-1); & t \in]-\infty; -1] \\ 0; & t \in [-1; 1] \\ \frac{1}{2}(b-1); & t \in [1; +\infty[\end{cases}$$



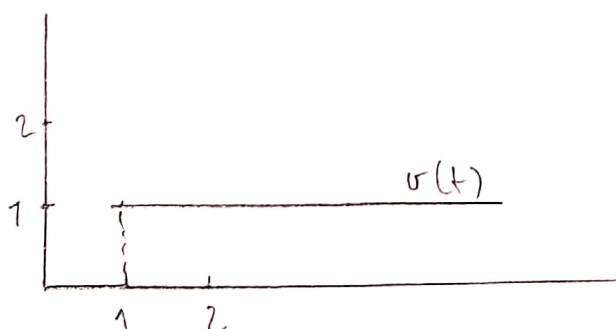
7) Déterminons $v(t)$ de $u(t)$.

$$u'(t) = (b-1)'u(b-1) + u'(t-1)(b-1)$$

$$= u(t-1) - \delta(b-1)(b-1)$$

$$v(t) = u(b-1)$$

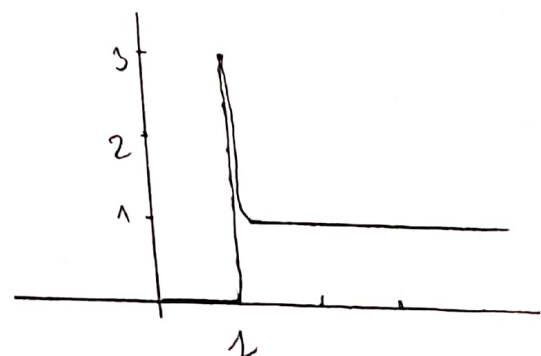
8) Représentation.



L'impulsion de durée n'a lieu qu'à l'instant t qui annule ce qui est dans le S

Prenons note

$$[(t+2)u(t-1)]' = u(b-1) + \delta(b-1) = u(t-1) + 3\delta(b)$$



avec 3
 Déterminons la classe énergétique de $x(t)$
 Le graphe de $x(t)$ est transitoire ; on en déduit que $x(t)$
 est à énergie finie

Une fonction est paire
 si symétrique par rapport
 à l'axe des y
 Une fonction est impaire
 si symétrique par
 rapport au centre

2) Déterminons son expression par morceaux

$$\begin{cases} x(t) = 0 & \forall t \in]-\infty; -3] & (1) \\ x(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} & \forall t \in [-3; -2] & (2) \\ x(t) = -t & \forall t \in [-2; 0] & (3) \\ x(t) = t & \forall t \in [0; 1] & (4) \\ x(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} & \forall t \in [1; 3] & (5) \\ x(t) = 0 & \forall t \geq 3 & (6) \end{cases}$$

Pour trouver la transfor-
 mée de Laplace, il faut
 plutôt utiliser l'expression
 causale au lieu de l'ex-
 pression par morceaux. La repré-
 sentation par morceaux est
 meilleure pour les représentations
 graphiques

Expression causale.

Pour trouver l'expression causale, on fait $[(2)-(1)]u(t - \text{borne commune}) + \dots +$
 $[(n)-(n-1)]u(t - \text{borne commune})$, où (n) est la n ème expression par morceaux.
 Ainsi, on a :
 $x(t) = \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\right)u(t+3) - \frac{3}{2}(t+2)u(t+2) - \frac{3}{2}(t-1)u(t-1) + \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}\right)u(t-3) + 2tu(t)$

3) Expression de $x'(t)$ et $x''(t)$

$$\textcircled{*} x'(t) = \frac{1}{2}u(t+3) - \frac{3}{2} \cdot u(t+2) - \frac{3}{2}u(t-1) + \frac{1}{2}u(t-3) + \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\right)\delta(t+3) - \frac{3}{2}(t+2)\delta(t+2) - \frac{3}{2}(t-1)\delta(t-1) + \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}\right)\delta(t-3) + 2u(t) + 2t\delta(t)$$

$$x'(t) = \frac{1}{2}u(t+3) - \frac{3}{2}[u(t+2) + u(t-1)] + \frac{1}{2}u(t-3) + 2u(t)$$

$$\textcircled{*} x''(t) = \frac{1}{2}\delta(t+3) - \frac{3}{2}[\delta(t+2) + \delta(t-1)] + \frac{1}{2}\delta(t-3) + 2\delta(t)$$

4) Représentation graphique

