TRAITEMENT DU SIGNAL

L3 SRIT PHY 3352A

M. OULOBLY Stéphane Ronin

Enseignant-Chercheur
stephane.oulobly@esatic.edu.ci

TRAITEMENT DU SIGNAL

CONTENU

ESATIC

TRAITEMENT DU SIGNAL

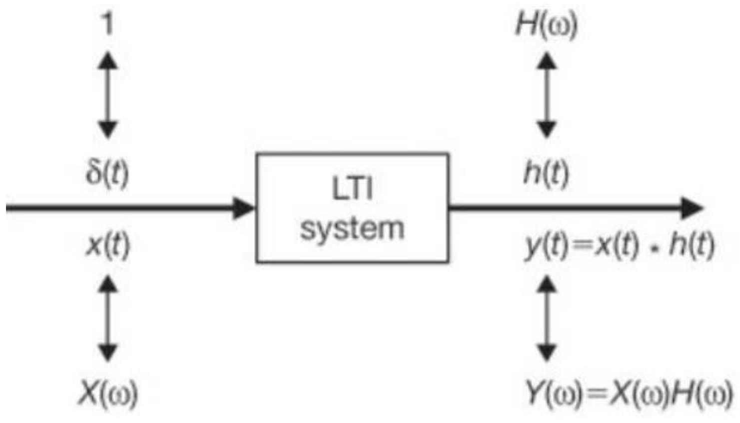
Chap 4: Éléments de filtrage Analogique

I. RÉPONSE EN FRÉQUENCE D'UN SYSTÈME SLIC

Dans les chapitres précédents nous avons montré que la sortie $y(t)$ d'un système LTI à temps continu est égale à la convolution de l'entrée $x(t)$ avec la réponse impulsionnelle h(t) ; C'est-à-dire $y(t) = x(t) * (t)$
En appliquant la propriété de convolution, on obtient : $Y(\omega) = X(\omega).H(\omega)$

La fonction $H(\omega)$ s'appelle la réponse en fréquence du système. Relations représentées par les équations sont illustrés à la Fig.

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_H(\omega)}$$



Alors $|H(\omega)|$ est appelée réponse en amplitude du système et $\theta_H(\omega)$ la réponse en phase du système.

Ainsi, le comportement d'un système LTI à temps continu dans le domaine fréquentiel est complètement caractérisé par sa réponse en fréquence $\mathrm{H}(\omega)$. Soit

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta_X(\omega)} \qquad Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\theta_Y(\omega)}$$

Puis nous avons

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)|$$

$$\theta_Y(\omega) = \theta_X(\omega)\theta_H(\omega)$$

2. Transmission sans distorsion :

Pour une transmission sans distorsion via un système LTI, nous demandons que la forme exacte du signal d'entrée soit reproduite à la sortie, bien que son amplitude puisse être différente et qu'il puisse être retardé. Par conséquent, si $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ est le signal d'entrée, la sortie requise est

$$y(t) = Kx(t - t_d)$$

où td est le délai et K (> 0) est une constante de gain. Ceci est illustré aux figures 1.2 (a) et (b). Prendre la transformée de Fourier des deux côtés de l'équation, on obtient

$$Y(\omega) = K.X(\omega).e^{-j\omega t_d}$$

TRAITEMENT DU SIGNAL

Chap 4: Éléments de filtrage Analogique

I. **RÉPONSE EN FRÉQUENCE D'UN SYSTÈME SLIC**
II. TRANSMISSION DE SIGNAUX VIA LES SYSTÈMES SLIC
III. FILTRES IDÉAUX ET RÉALISABLES
IV. TRONCATURE DES DONNÉES PAR FENÊTRAGE
V. SPÉCIFICATION DES FILTRES (REELS) PRATIQUES
VI. TRANSFORMATIONS DE FILTRES ANALOGIQUES
VII. FAMILLES DE FILTRES PRATIQUES

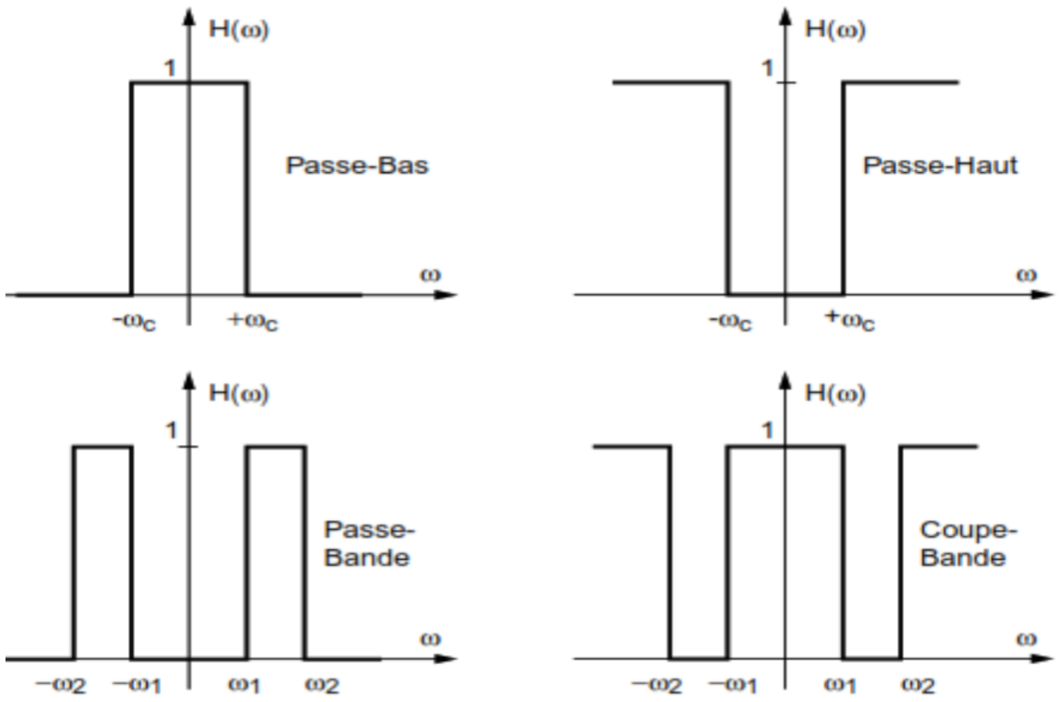
Filtrage Définition

Le filtrage est l'opération qui consiste à modifier les composantes spectrales d'un signal. Le filtre est un circuit qui réalise cette opération. Les intervalles de fréquence où les composantes du signal sont transmises sont appelées bandes passantes ; les intervalles où les signaux sont bloqués sont désignés sous le nom de bandes d'arrêt ou d'atténuation.

Filtre idéal

Un filtre idéal est caractérisé par :

1. Une réponse fréquentielle dont le module vaut 1 dans les bandes passantes ;
2. Une réponse fréquentielle dont le module vaut 0 dans les bandes d'arrêt ;
3. Un temps de propagation 01 qui est le même pour toutes les composantes spectrales.



Formes canoniques

Les filtres réels sont généralement représentés par des fonctions de transfert H(s) dont les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes en s. Ces polynômes sont ordonnés de manière croissante (forme de Bode) ou dans l'ordre décroissant (forme de Laplace). Dans chaque cas, le premier coefficient de ces polynômes doit être égal à un.

Afin de faciliter l'analyse, le tracé des réponses fréquentielles et la réalisation des filtres, ces polynômes sont généralement décomposés en facteurs simples d'ordre 1 ou 2. Ces facteurs simples font intervenir une pulsation caractéristique et, pour ceux d'ordre 2, un facteur de qualité θ_0 ou, son inverse, le coefficient d'amortissement $\zeta = 1/2\theta_0$.

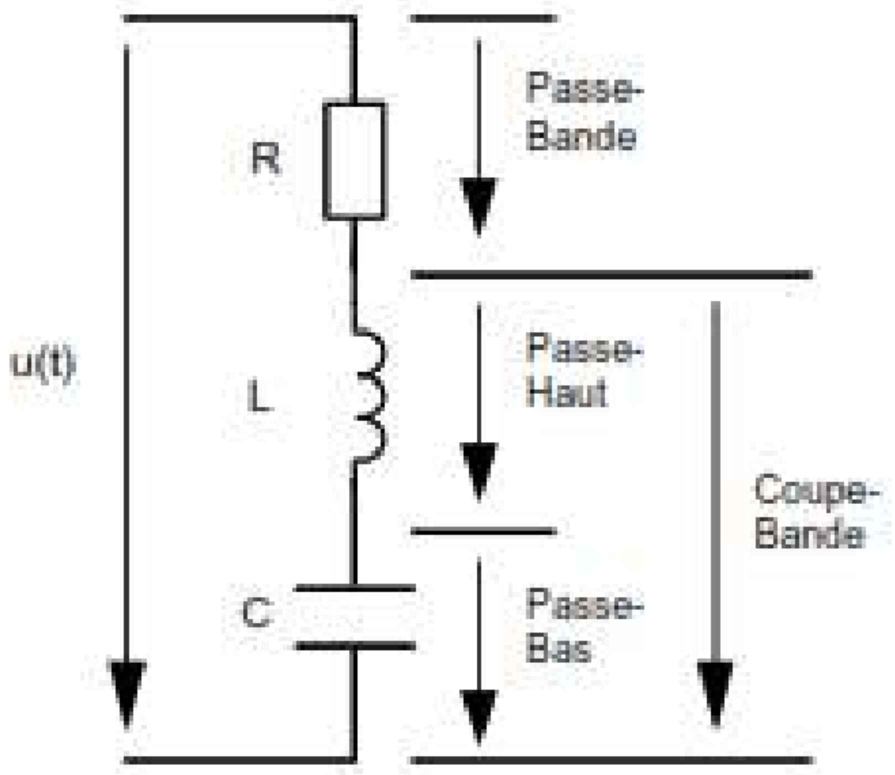
L'ensemble des possibilités de description des filtres se réduit donc aux facteurs simples suivants représentés sous la forme de Bode :

$$\frac{s}{\omega_1} \qquad 1+\frac{1}{Q_0}\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

$$1+\frac{s}{\omega_1} \qquad 1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

Filtres d'ordre 2

Les filtres fondamentaux sont du type passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande.



$$H_{PB}(s) = \frac{1}{1 + 2\theta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \qquad H_{P\Delta}(s) = \frac{2\theta(s/\omega_0)}{1 + 2\theta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2}$$

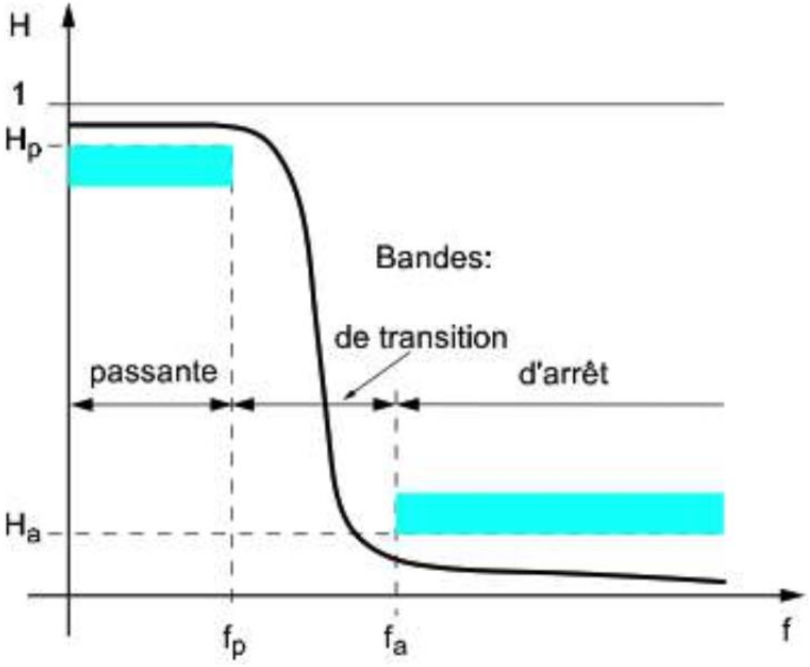
$$H_{PH}(s) = \frac{(s/\omega_0)^2}{1 + 2\theta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \qquad H_{R\Delta}(s) = \frac{1 + (s/\omega_0)^2}{1 + 2\theta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2}$$

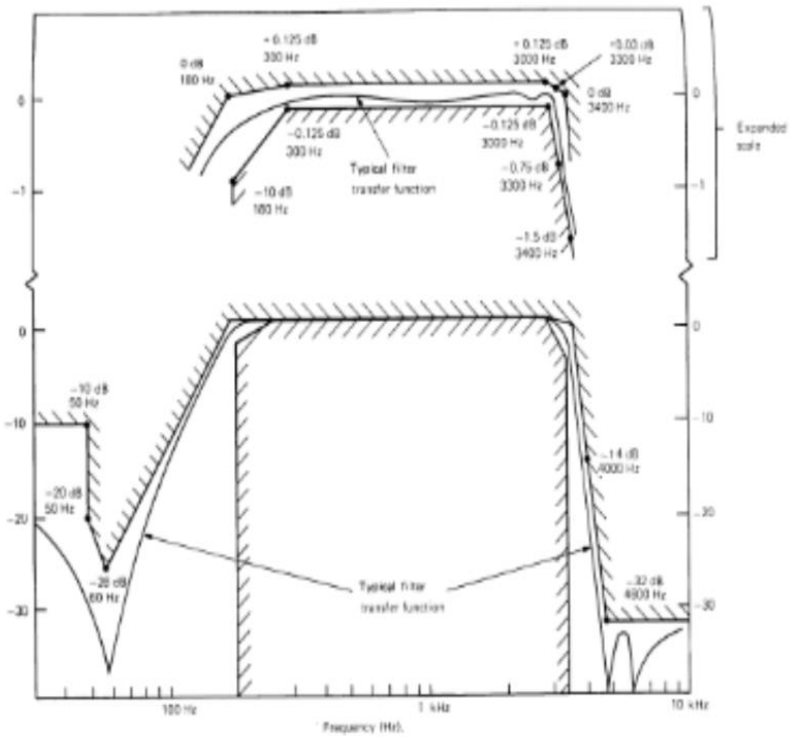
Filtres optimums

1. Gabarit

Contrairement au filtre idéal, un filtre réel possède une bande de transition entre les bandes passantes et d’arrêt et les spécifications du filtre sont généralement données à l’aide d’un gabarit. Celui-ci précise les bandes passantes, bandes de transition et bandes d’arrêt souhaitées.

A la donnée du gabarit, on peut ajouter des spécifications telles que
– l’amplitude de l’ondulation acceptée dans les bandes passantes et/ou d’arrêt
– l’uniformité du temps de propagation dans la bande passante (phase linéaire).





ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

TRAITEMENT DU SIGNAL

Chap 4: Éléments de filtrage Analogique

Approximations

Suivant le cahier des charges donné, la réalisation d'un filtre passe-bas conduit à des fonctions de transfert dont les dénominateurs sont des polynômes qui optimisent au mieux les contraintes demandées. Ces polynômes, appelés polynômes d'approximation, réalisent des filtres caractérisés par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

– une bande passante plate au maximum pour les filtres de Butterworth ;
– un temps de propagation uniforme (ou une phase linéaire) dans la bande passante pour les filtres de Bessel ;
– une bande de transition étroite obtenue au dépend d'une ondulation de la réponse fréquentielle dans la bande passante pour les filtres de Tchebycheff de type I.

Les filtres ci-dessus sont des filtres dits tout pôles pour lesquels le numérateur est d'ordre 0.
Leurs fonctions de transfert s'écrivent alors sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)}$$

D'autres approximations de filtres réels existent comme par exemple :
– les filtres de Tchebycheff de type II qui n'ont pas d'ondulations dans la bande passante mais en possèdent dans la bande d'arrêt ;
– les filtres elliptiques pour lesquels on accepte des ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt.

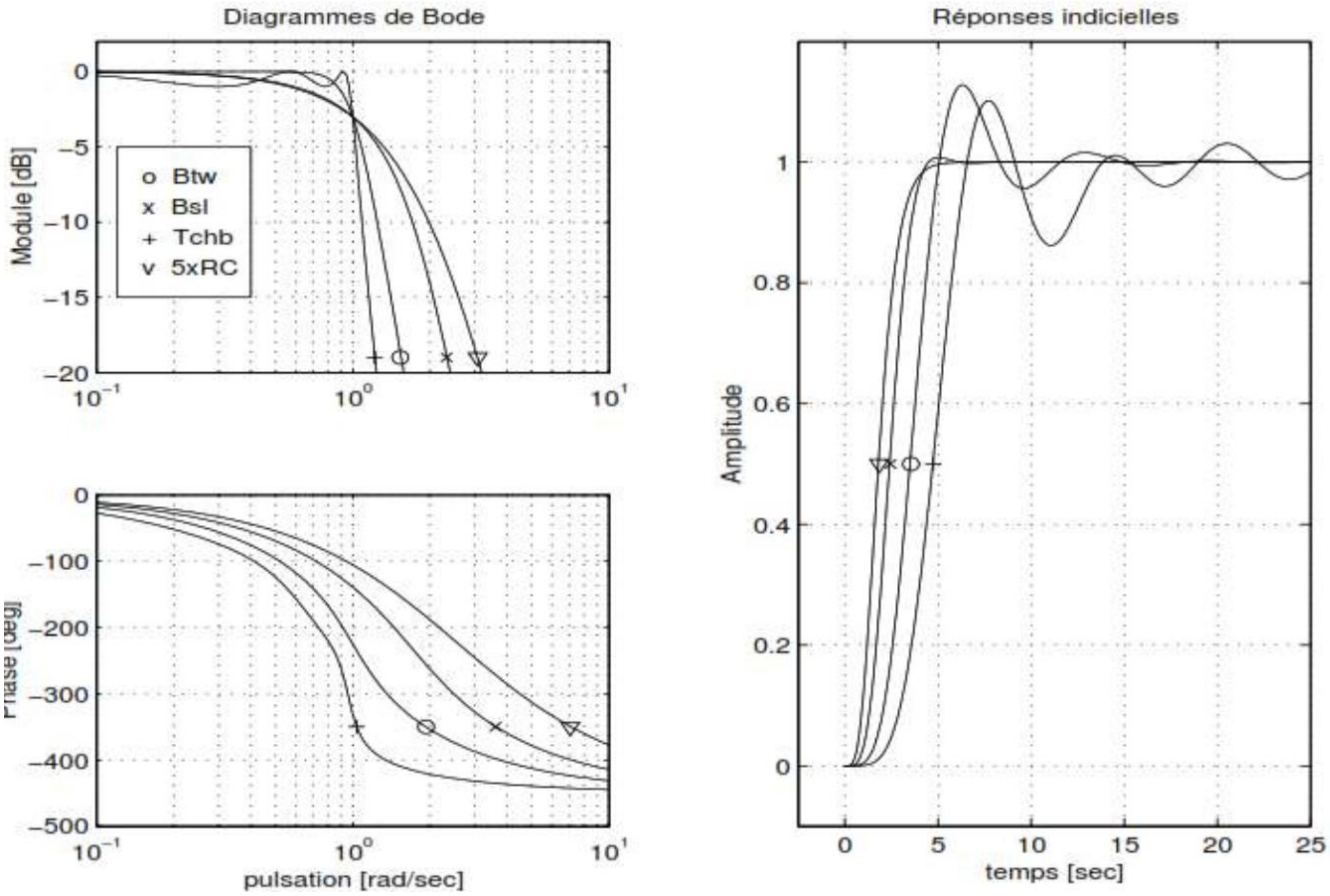
Les fonctions de transfert de ces filtres sont alors décrites par un rapport de deux polynômes :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

	Butterworth	Bessel	Tchebycheff I	Tchebycheff II
Régularité de la courbe d'amplitude	excellente	satisfaisante	ondulations	bonne
Raideur de la transition	faible	médiocre	bonne	moyenne
Régularité du temps de propagation	faible	excellente	médiocre	faible
Qualité de la réponse temporelle	satisfaisante	excellente	mauvaise	bonne
Facteurs de qualité	moyens	faibles	élevés	moyens
Disparité des composants	faible	très faible	forte	faible

TRAITEMENT DU SIGNAL

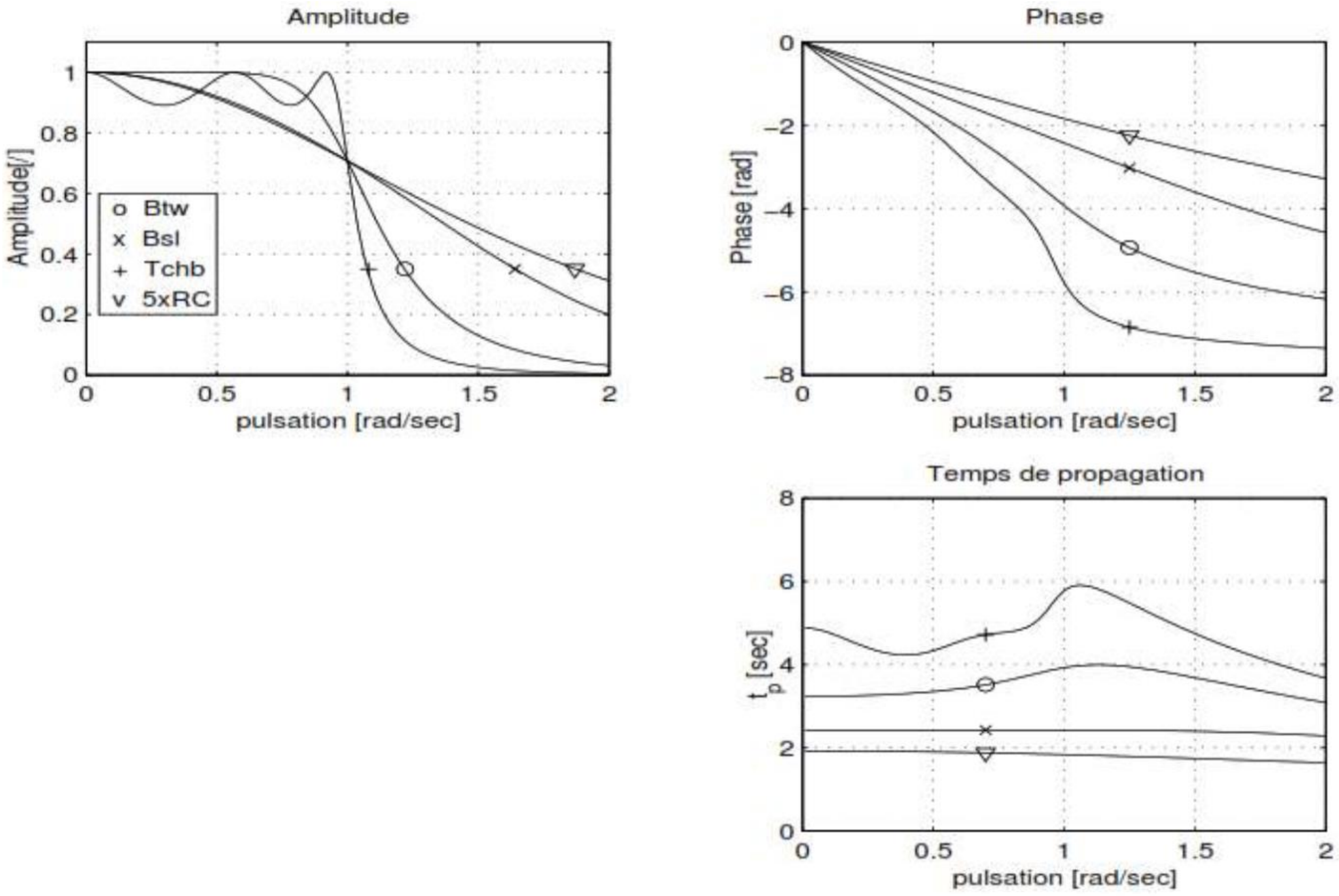
Chap 4: Éléments de filtrage Analogique



Comparaison des réponses fréquentielles et indicielles

TRAITEMENT DU SIGNAL

Chap 4: Éléments de filtrage Analogique



Diagrammes linéaires et temps de propagation

III. Ordre, Nature, Bande passante et fréquences de coupure d'un système

1. Ordre d'un système

L'ordre d'un système est donné par le degré de son modèle dans le domaine temporel ou par le degré de sa fonction de transfert dans le domaine fréquentiel.

2. Nature d'un filtre

Plusieurs méthodes existent pour déterminer la nature d'un filtre mais la plus simple et plus pratique est celle qui consiste à calculer les limites de sa fonction de transfert à l'origine et à l'infini.

Soit **H(s)** la fonction de transfert d'un filtre et **A** une constante réelle. Pour déterminer sa nature Passe bas, passe haut, passe bande ou rejecteur de bande on procède comme suit :

- **Filtre Passe Bas (FPB)**

$$\lim_{s\to 0} H(s) = A \quad et \quad \lim_{s\to +\infty} H(s) = 0$$

- **Filtre Passe Haut (FPH)**

$$\lim_{s\to 0} H(s) = 0 \quad et \quad \lim_{s\to +\infty} H(s) = A$$

- **Filtre Passe Bande (FPBD)**

$$\lim_{s\to 0} H(s) = 0 \quad et \quad \lim_{s\to +\infty} H(s) = 0$$

- **Filtre Coupe Bande (FCB)**

$$\lim_{s\to 0} H(s) = A \quad et \quad \lim_{s\to +\infty} H(s) = A$$

ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

TRAITEMENT DU SIGNAL

Chap 4: Éléments de filtrage Analogique

3. Bande passante de Filtre (ou système) :

Un concept important dans l'analyse des systèmes est la bande passante d'un système LTI. Il existe de nombreuses définitions différentes de la bande passante du système.

a) Bande passante absolue :

La largeur de bande la passante $\boldsymbol{W_B}$ d'un filtre passe-bas idéal est égale à sa fréquence de coupure ; c'est-à-dire que $\boldsymbol{W_B = \omega_c}$. Dans ce cas, $\boldsymbol{W_B}$ s'appelle la bande passante absolue.

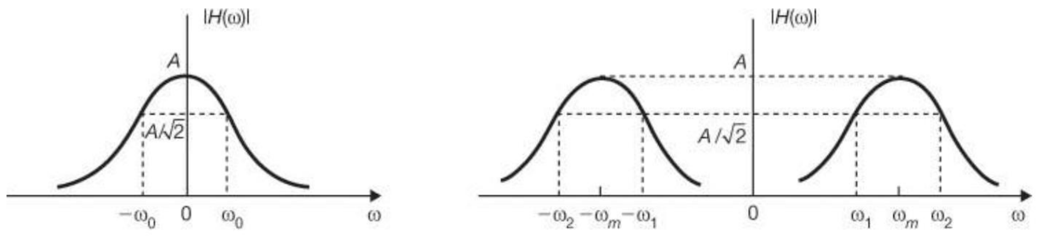
La largeur de bande absolue d'un filtre passe-bande idéal est donnée par $\boldsymbol{W_B = \omega_1 - \omega_2}$

Un filtre passe-bande est appelé bande étroite si $\boldsymbol{W_B \ll \omega_c}$, où $\boldsymbol{\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)}$ est la fréquence centrale du filtre.

Aucune bande passante n'est définie pour un filtre passe-haut ou coupe-bande.

b) Largeur de bande de 3 dB (ou demi-puissance) :

Pour les filtres causaux ou pratiques, une définition courante de la largeur de bande du filtre (ou du système) est la largeur de bande à 3 dB, $\boldsymbol{W_{3dB}}$. Dans le cas d'un filtre passe-bas, tel que le filtre RC décrit par Eq. (5.92) ou sur la Fig.1.14 (b), OQ-> est défini comme la fréquence positive à laquelle le spectre d'amplitude $|H(\omega)|$ tombe à une valeur égale à $|H(0)|/\sqrt{2}$, comme illustré à la Fig. 1.14 (a).

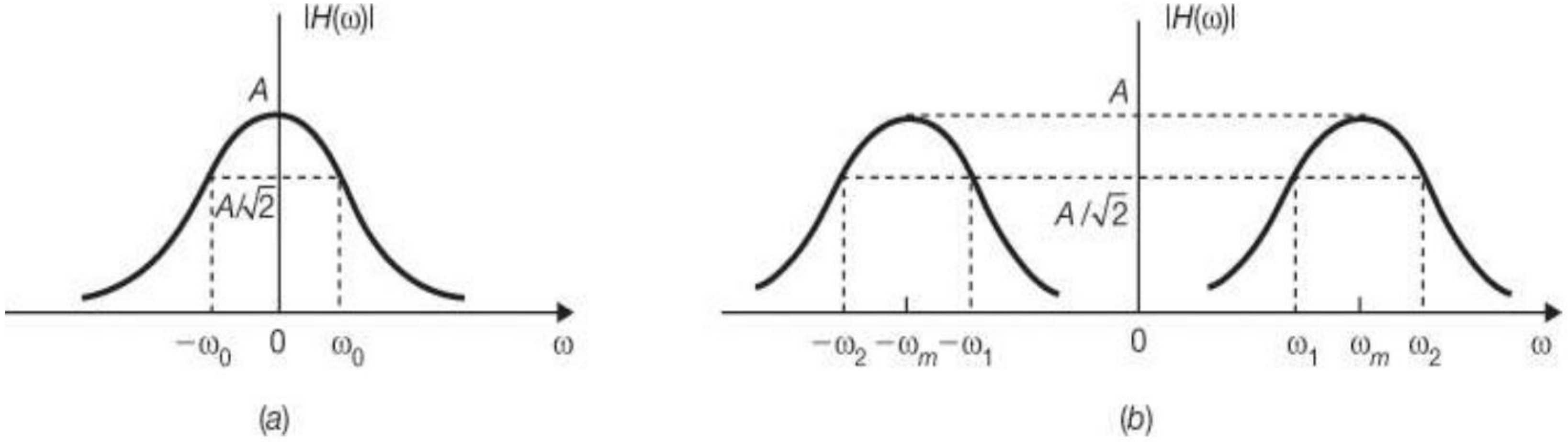


(a) (b)

ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

TRAITEMENT DU SIGNAL

Chap 4: Éléments de filtrage Analogique



Notez que $|H(0)|$ est la valeur maximale de $\mathrm{H}(\omega)$ pour le filtre passe-bas RC. La largeur de bande à 3 dB est également appelée largeur de bande à demi-puissance car une atténuation de tension ou de courant de 3 dB équivaut à une atténuation de puissance d'un facteur 2. Dans le cas d'un filtre passe-bande, W_{3dB} correspond à fréquences auxquelles $|H(\omega)|$ tombe à une valeur égale à 1/√2 fois la valeur maximale $|H(\omega_m)|$ comme illustré à la Fig. 1.14 (b).

Cette définition de $O_{Q\text{->}}$ est utile pour les systèmes à réponse en amplitude unimodale (dans la gamme de fréquences positive) et constitue un critère largement accepté pour mesurer la largeur de bande d’un système, mais elle peut devenir ambiguë et non unique avec des systèmes à plusieurs réponses en amplitude de crête.

IV. Filtres de Butterworth

Les filtres de Butterworth sont caractérisés par une réponse en amplitude extrêmement plate dans la bande passante. Le carré du module de cette réponse fréquentielle est décrit par :

On notera que cette réponse est normalisée par rapport à la pulsation de coupure ω_c pour laquelle le filtre possède une atténuation de $\sqrt{2} = 3dB$.

En écrivant la fonction de transfert avec la variable de Laplace et en choisissant $\omega_c = 1$, on obtient une description équivalente :

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-s^2)^n}$$

On voit ainsi que le dénominateur de cette description est un polynôme d'ordre 2n

$$D(s) = 1 + (-s^2)^n = 0$$

dont les racines sont uniformément réparties sur un cercle de rayon unité. L'angle entre chaque racine vaut π/n et, suivant que l'ordre est pair ou impair

Comme on l'a dit plus haut, les filtres passe-bas étudiés ici sont des filtres tout pôles décrits de manière générale par :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}$$

Pour calculer le polynôme A(s), il suffit de connaître les coordonnées de chacun des pôles correspondant aux trinômes constitutifs du polynôme.

$$A(s) = \begin{cases} (s+a+jb)(s+a-jb) \\ s^2+2as+a^2+b^2 \\ s^2+2as+1 \end{cases}$$

Dans le cas d'un polynôme d'ordre 5, ce dernier sera décomposé en 3 polynômes de base provenant du pôle réel et des 2 paires de pôles complexes :

Pôles	Polynômes
$p_1 = -1$	$P_1(s) = 1 + s$
$p_{2,3} = -0.809 \pm j0.588$	$P_2(s) = 1 + 1.618s + s^2$
$p_{4,5} = -0.309 \pm j0.951$	$P_3(s) = 1 + 0.618s + s^2$

On notera que pour chaque cellule d'ordre 2, le facteur de qualité correspondant Q_{0k} est donné par l'inverse du deuxième coefficient. Ainsi, pour le polynôme d'ordre 5, on aura $Q_{02} = 1/1.618$ et $Q_{03} = 1/0.618$.

ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

TRAITEMENT DU SIGNAL

Chap 4: Éléments de filtrage Analogique

1. Tableau des polynômes de Butterworth

Connaissant la position des pôles d'un polynôme d'ordre ***n*** quelconque, il est aisé d'en calculer les trinômes constitutifs. Ceux-ci sont donnés dans le tableau 1.2.

2. Ordre et pulsation caractéristique d'un filtre

Dans l'analyse des filtres, il est fréquent d'exprimer la réponse fréquentielle à l'aide de l'atténuation $A(j\omega)$ définie comme l'inverse de $H(\omega)$:

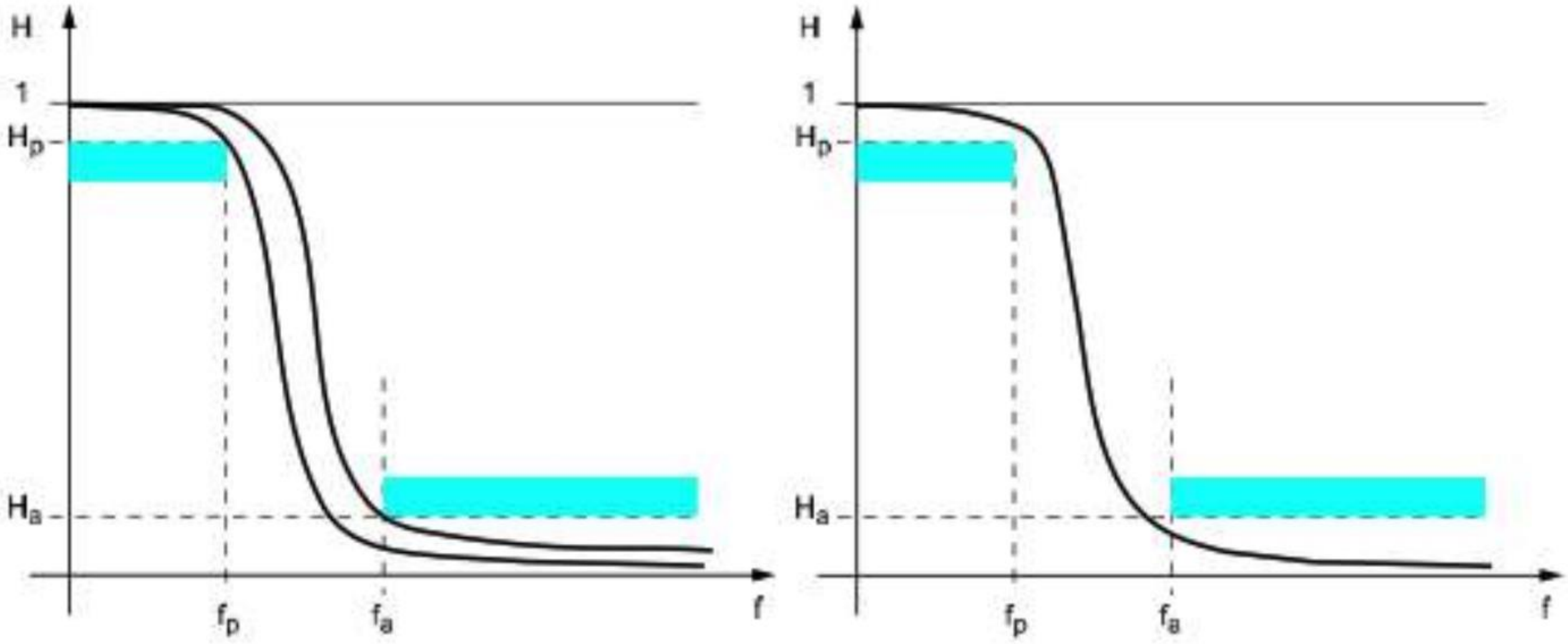
$$A(j\omega) \equiv \frac{1}{H(j\omega)}$$

L'atténuation d'un filtre de Butterworth est alors décrite par

$$|A(j\omega)|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}$$

n	$P(s)$
1	$(1+s)$
2	$(1+1.414s+s^2)$
3	$(1+s)(1+1.000s+s^2)$
4	$(1+1.848s+s^2)(1+0.765s+s^2)$
5	$(1+s)(1+1.618s+s^2)(1+0.618s+s^2)$
6	$(1+1.932s+s^2)(1+1.414s+s^2)(1+0.518s+s^2)$
7	$(1+s)(1+1.802s+s^2)(1+1.247s+s^2)(1+0.445s+s^2)$
8	$(1+1.962s+s^2)(1+1.663s+s^2)(1+1.111s+s^2)(1+0.390s+s^2)$
9	$(1+s)(1+1.879s+s^2)(1+1.532s+s^2)(1+1.000s+s^2)(1+0347s+s^2)$
10	$(1+1.975s+s^2)(1+1.782s+s^2)(1+1.414s+s^2)(1+0.908s+s^2)(1+0.313s+s^2)$

Comme la connaissance des 2 paramètres n et $\boldsymbol{\omega_c}$ suffit à caractériser la réponse fréquentielle d'un filtre de Butterworth, la donnée d'un gabarit passe-bas à l'aide de 2 coordonnées suffit pour déterminer complètement le filtre



En effet, sachant que les atténuations aux points P (fin de la bande passante) et A (début de la bande d'arrêt) s'écrivent :

$$|A(j\omega_p)|^2 \equiv A_p^2 = 1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n}$$

$$|A(j\omega_a)|^2 \equiv A_a^2 = 1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2n}$$

On résout aisément ce système de 2 équations à 2 inconnues en effectuant le rapport des deux équations après avoir passé la valeur 1 dans le membre de gauche. Prenant le logarithme des deux membres de l'équation, on obtient finalement :

$$n \geq \frac{1}{2}\frac{\log\left[\left(A_p^2-1\right)/\left(A_a^2-1\right)\right]}{\log\left(\omega_p/\omega_a\right)}$$

Avec $\omega_m = \omega_p \; ou \; \omega_a$

Comme la valeur trouvée pour l'ordre **n** du filtre n'est généralement pas un entier, on l'arrondit à une valeur entière supérieure. On peut ainsi calculer deux valeurs différentes pour $\boldsymbol{\omega_c}$ l'une avec la pulsation ω_p et l'autre avec la pulsation ω_a

En choisissant l'une ou l'autre de ces deux pulsations caractéristiques, la courbe de réponse fréquentielle touchera l'une ou l'autre partie du gabarit (figure 1.16a) ; ce qui n'est pas satisfaisant. Par contre, en prenant pour $\boldsymbol{\omega_c}$ la moyenne géométrique des deux valeurs ainsi trouvées, on permettra à la courbe de réponse fréquentielle de ne pas toucher le gabarit (figure 1.16b).

TRAITEMENT DU SIGNAL

Chap 4: Éléments de filtrage Analogique

I. **RÉPONSE EN FRÉQUENCE D'UN SYSTÈME SLIC**
II. TRANSMISSION DE SIGNAUX VIA LES SYSTÈMES SLIC
III. FILTRES IDÉAUX ET RÉALISABLES
IV. TRONCATURE DES DONNÉES PAR FENÊTRAGE
V. SPÉCIFICATION DES FILTRES (REELS) PRATIQUES
VI. TRANSFORMATIONS DE FILTRES ANALOGIQUES
VII. FAMILLES DE FILTRES PRATIQUES