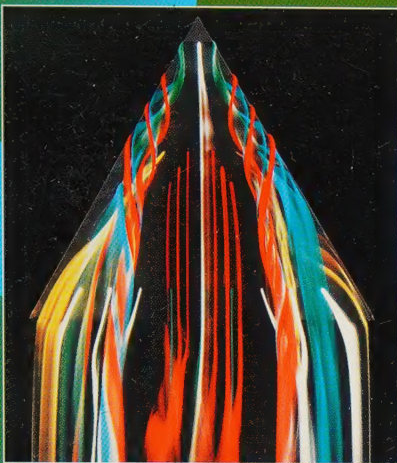


taup e-niveau



classes préparatoires scientifiques

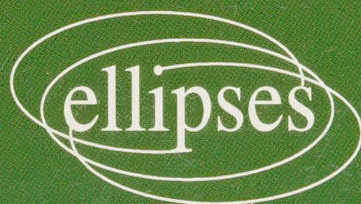
**exercices corrigés**

# Mécanique des fluides

2<sup>e</sup> année

PC - PC\* - PSI - PSI\*

Christian FRÈRE  
Pierre KREMPF





*taupe-niveau*

classes préparatoires aux Grandes Écoles Scientifiques

**exercices corrigés**

# **MÉCANIQUE DES FLUIDES**

2<sup>e</sup> année

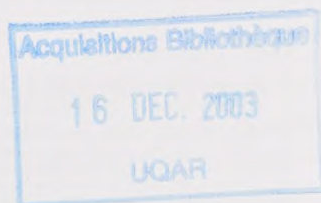
**PC – PC\* – PSI – PSI\***

**Christian Frère**

Agrégé de l'université,  
Docteur en Astronomie, Docteur en Médecine,  
Professeur en classe de Mathématiques Spéciales PC à Amiens

**Pierre Krempf**

Ancien élève de l'ENS Lyon,  
Agrégé de l'université, Docteur en Mécanique,  
Professeur en classe de Mathématiques Spéciales PC à Lyon



La collection *taupe-niveau* en physique est conçue par une équipe de professeurs en classes préparatoires aux Grandes Écoles Scientifiques.

Pierre Andrieu  
Magali Andry  
Aline Auroux  
Jean-Michel Bauduin  
Daniel Balou  
Vincent Bourges  
André Broutée  
David Chapelier  
Pierre Colin  
Mireille Coulombeau  
Gérard Dareau  
François Delmas  
Sylvie Devillard  
Pascal Doré  
Éric Fabritius  
Yann Ferchaux  
Denis Fiel  
Christian Frère  
André Gilles  
Annie Guérillot  
Christian Grossetête

Dominique Irlinger  
Lionel Jannaud  
Olivier Kempf  
Pierre Krempf  
Chloé Ledoux  
Frédéric Masset  
Manuel Marco  
Dominique Meier  
Anne-Sophie Moreau  
Pascal Olive  
Jacques Randria  
Georges Rousselet  
Paul Roux  
Charles Scheidt  
Nicolas Schlosser  
Jean-Robert Seigne  
Joël Soubrenie  
Alain Théron  
Gérard Tourret  
Christophe Voisin

PC  
45.2  
=74  
2002  
éditeur : Aymeric Chauprade

ISBN 2-7298-1120-6

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2002  
32, rue Bague 75740 Paris cedex 15

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L.122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (Art. L.122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.  
[www.editions-ellipses.com](http://www.editions-ellipses.com)

## AVANT-PROPOS

Ce recueil d'exercices est destiné aux étudiants des filières PC et PSI qui ont un cours commun de Mécanique des Fluides. A ce niveau de premier cycle d'enseignement supérieur, ne sont étudiés que les écoulements de fluides parfaits et les écoulements laminaires de fluides réels, sans entrer dans les problèmes thermiques et de diffusion. Il s'agit de modèles pas toujours réalistes mais desquels on peut tirer nombre de résultats intéressants. Voici donc une quarantaine d'exercices nouveaux, avec des applications originales et concrètes, recouvrant l'ensemble du programme.

Bien qu'il en soit indépendant, ce livre d'exercices est la suite du cours de la même collection et est construit dans la même optique, à savoir centré sur les problèmes de dynamique, l'aspect cinématique des écoulements n'étant qu'un résultat intermédiaire pour un calcul dont le but est de calculer les efforts subis par les corps solides placés dans des fluides. Ce livre ne reprend donc aucun des exercices ou des applications déjà envisagés dans le cours.

Un premier court chapitre est consacré à la statique. Bien qu'elle soit abordée en première année, qui plus est dans le cadre du cours de Thermodynamique, il n'aurait pas été cohérent de l'éviter totalement puisqu'elle constitue en fait un cas particulier de la Mécanique des Fluides.

Les fluides parfaits sont l'objet des trois chapitres suivants, avec un découpage en systèmes ouverts, écoulements non stationnaires et écoulements potentiels. Les grands classiques, notamment les problèmes à hélice, n'ont pas été repris car d'une part ils ont été très détaillés dans le cours et d'autre part sont un peu passés de mode dans les sujets de concours depuis l'introduction des écoulements de fluides visqueux. Les exercices sont donc recentrés sur les écoulements potentiels, qui constituent la véritable raison d'être du modèle du fluide parfait, avec des calculs de coefficients de frottement permis par l'introduction de discontinuités a priori.

Les fluides visqueux font l'objet des trois derniers chapitres, avec un découpage en écoulements stationnaires et non stationnaires et une étude séparée des conduites. Par rapport aux fluides parfaits, leur sont consacrés un volume et un nombre d'exercices presque équivalents, ce qui signifie que nous sommes souvent bien au-delà du strict programme. Cela m'a semblé utile car ils ont quasiment supplanté les fluides parfaits dans les sujets de concours et les écoule-

ments laminaires, malgré leur rareté « naturelle », mettent en évidence des propriétés des fluides déjà fort réalistes et insoupçonnables quand on se limite au modèle du fluide parfait.

Certains exercices apparaîtront un peu délicats car ils font appel à des méthodes de résolution auxquelles ne sont pas accoutumés les étudiants dans le cours de Physique. C'est une occasion pour eux d'une part de mettre en application ce qu'ils apprennent en Mathématiques et de constater ainsi que les disciplines ne sont pas cloisonnées comme ils le croient trop souvent, d'autre part de réaliser que des modèles physiques sont parfois bâtis sur des hypothèses très simplificatrices et difficiles à justifier, enfin de constater qu'il est indispensable en Mécanique des Fluides de savoir travailler sur la dimension des variables et sur les ordres de grandeur.

Il s'agit d'exercices longs pour la plupart, car c'est bien à ce genre d'épreuves qu'il faut se préparer pour les concours. Et, à moins de donner nombre de résultats intermédiaires, un problème de Mécanique des Fluides ne se résout pas en quelques lignes. N'oublions pas que c'est la branche de la physique classique qui pose le plus de difficultés mathématiques, qui est la plus déroutante quand on la découvre à cause des multiples astuces qu'ont dû imaginer les mécaniciens pour contourner ces difficultés, et elle n'est d'ailleurs toujours pas close.

[Proétudes.blogspot.com](http://Proétudes.blogspot.com)

**PROÉTUDES**  
Surfer en toute confiance

# STATIQUE

## EXERCICE 1

### Stabilité de l'atmosphère

La couche inférieure de l'atmosphère, appelée troposphère, est chauffée par la surface terrestre et présente un gradient de température vertical dirigé vers le bas et que l'on supposera uniforme. On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire  $M$ , de coefficient thermodynamique  $\gamma$  constant, de température et pression au sol  $P_0$  et  $T_0$ , en équilibre hydrostatique et placé dans un champ de pesanteur  $\vec{g}$  uniforme.

On suppose le référentiel terrestre galiléen et les propriétés de l'atmosphère invariantes par translation dans le plan horizontal  $Oxy$ .

#### 1. Stabilité de la troposphère.

1.1. Écrire la condition d'équilibre hydrostatique vertical reliant les champs de pression  $P(z)$  et de masse volumique  $\mu(z)$  à l'accélération de la pesanteur  $g$ .

1.2. En déduire la différence de masse volumique  $d\mu$  entre deux niveaux très voisins d'altitudes respectives  $z$  et  $z + dz$ . L'exprimer en fonction de la différence des températures  $dT = T(z + dz) - T(z)$ , de  $dz$ , de  $\mu(z)$ , de  $g$  et des coefficients thermoélastiques de l'air  $\alpha = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_P$  et  $\kappa_T = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T$  à l'altitude  $z$ .

1.3. Expliciter  $\alpha = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_P$  et  $\kappa_T = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T$  pour le gaz parfait. En déduire

l'expression de  $d\mu$  en fonction de  $g$ ,  $M$ ,  $\mathcal{R}$  (constante des gaz parfaits),  $dz$  et des valeurs de  $P$ ,  $T$  et  $\frac{dT}{dz}$  à l'altitude  $z$ . On appellera abusivement  $\frac{dT}{dz}$  gradient thermique alors qu'il ne s'agit que de la composante verticale du vecteur gradient.

1.4. Une petite masse d'air initialement à l'altitude  $z$  est déplacée verticalement de la petite quantité  $dz$  sous l'effet d'une perturbation extérieure. Celle-ci est suffisamment petite pour admettre que l'évolution de la masse est réversible. De plus, la conductivité thermique de l'air est assez faible pour considérer les échanges thermiques très lents, avec une échelle de temps nettement supérieure à celle des mouvements. Le déplacement est ainsi considéré adiabatique. Enfin, la mise en équilibre de pression entre la petite masse et l'air environnant est immédiate.

Exprimer la variation de sa masse volumique  $d\mu'$  entre les deux altitudes en fonction de sa variation de température  $dT'$ , de  $dz$ , de  $\mu(z)$  et des coefficients thermoélastiques puis en fonction de  $g$ ,  $M$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $dz$ ,  $P$ ,  $T$  et  $\frac{dT'}{dz}$ .

1.5. En déduire la résultante des forces qu'elle subit à l'altitude  $z + dz$ . On l'exprimera en fonction de  $d\mu$ ,  $d\mu'$ ,  $g$ ,  $\mu(z)$  et de sa masse  $\delta m$ .

1.6. Montrer que pour que l'atmosphère soit effectivement en équilibre hydrostatique il faut avoir  $\frac{dT'}{dz} - \frac{dT}{dz} < 0$ .

2. Gradient thermique adiabatique.

2.1. Exprimer  $\frac{dT'}{dz}$  en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\gamma$ .

2.2. Une atmosphère isotherme pourrait-elle être stable ?

2.3. L'atmosphère est quasi transparente dans le domaine visible du spectre électromagnétique. Expliquer pour quelle raison on a forcément  $\frac{dT}{dz} < 0$ .

2.4. Le sol reçoit en moyenne une puissance surfacique  $\mathcal{P}_s = 150 \text{ W.m}^{-2}$  provenant du Soleil. La conductivité de l'air étant  $\lambda = 25,7 \cdot 10^{-3} \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , quelle devrait être la valeur de  $\frac{dT}{dz}$  pour avoir un équilibre thermique par conduction ? Que faut-il en conclure ?

2.5. Puisque l'atmosphère est globalement stable verticalement, quelle est le pourcentage maximal du bilan énergétique du sol que peut assurer la conduction ? On demande une valeur numérique et on prendra  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $\gamma = 1,4$  et  $\mathcal{R} = 8,31 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Que peut-on en conclure ?

2.6. On appelle  $\frac{dT'}{dz}$  gradient thermique adiabatique. Justifier ce terme.

2.7. Dans la troposphère, le gradient thermique est presque égal au gradient adiabatique et devient occasionnellement supérieur en valeur absolue. Quel phénomène météorologique en résulte-t-il quand cela se produit ? Comment agit-il sur le gradient thermique ?

2.8. Le gradient thermique atmosphérique s'annule à la limite supérieure de la troposphère, appelée tropopause, et dans la stratosphère, située au-dessus, il est positif. Pourquoi le ciel apparaît-il toujours dégagé dans celle-ci ?

1.1. Du fait de l'invariance dans le plan horizontal, les champs de pression et de masse volumique ne dépendent que de la coordonnée verticale  $z$  et l'équation d'équilibre dans le champ de pesanteur  $-\frac{\text{grad } P}{\mu} + \vec{g} = \vec{0}$  ne présente qu'une projection utile suivant  $Oz$  :

$$-\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} - g = 0, \text{ ou encore } \frac{dP}{dz} = -\mu g.$$

1.2. Entre deux niveaux très proches on peut écrire :

$$\begin{aligned} d\mu &= \mu(z + dz) - \mu(z) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T dP = -\mu \alpha dT + \mu \kappa_T dP \\ &= -\mu \alpha dT + \mu \kappa_T \frac{dP}{dz} dz = -\mu \alpha dT - \mu^2 \kappa_T g dz. \end{aligned}$$

1.3. A partir de l'équation d'état locale du gaz parfait  $\mu = \frac{PM}{\mathcal{R}T}$  on calcule :

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{PM}{\mathcal{R}T^2} = \frac{1}{T} \text{ et } \kappa_T = \frac{1}{\mu} \frac{M}{\mathcal{R}T} = \frac{1}{P}.$$

On reporte dans l'expression de  $d\mu$  :

$$\begin{aligned} d\mu &= -\frac{\mu}{T} dT - \frac{\mu^2}{P} g dz = -\frac{PM}{\mathcal{R}T^2} dT - \frac{PM^2}{\mathcal{R}^2 T^2} g dz = -\frac{PM}{\mathcal{R}T^2} \left( dT + \frac{Mg}{\mathcal{R}} dz \right) \\ &= -\frac{PM}{\mathcal{R}T^2} \left( \frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{\mathcal{R}} \right) dz. \end{aligned}$$

1.4. Entre les deux altitudes on écrit de même pour la petite masse, sa variation de pression étant par hypothèse égale à  $dP$  puisqu'elle s'équilibre immédiatement avec la pression de l'air :

$$\begin{aligned} d\mu' &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P dT' + \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T dP = -\mu \alpha dT' + \mu \kappa_T dP \\ &= -\mu \alpha dT' + \mu \kappa_T \frac{dP}{dz} dz = -\mu \alpha dT' - \mu^2 \kappa_T g dz \\ &= -\frac{\mu}{T} dT' - \frac{\mu^2}{P} g dz = -\frac{PM}{\mathcal{R}T^2} dT' - \frac{PM^2}{\mathcal{R}^2 T^2} g dz = -\frac{PM}{\mathcal{R}T^2} \left( dT' + \frac{Mg}{\mathcal{R}} dz \right) \\ &= -\frac{PM}{\mathcal{R}T^2} \left( \frac{dT'}{dz} + \frac{Mg}{\mathcal{R}} \right) dz. \end{aligned}$$

1.5. La petite masse est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède. Si on note  $\delta V$  son volume à l'altitude  $z + dz$  on a :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \delta m \vec{g} - \mu(z + dz) \delta V \vec{g} = \delta m \vec{g} - \mu(z + dz) \frac{\delta m}{\mu(z) + d\mu'} \vec{g} \\ &= \left( 1 - \frac{\mu(z) + d\mu}{\mu(z) + d\mu'} \right) \delta m \vec{g} = \frac{d\mu' - d\mu}{\mu(z) + d\mu'} \delta m \vec{g} \approx \frac{d\mu' - d\mu}{\mu(z)} \delta m \vec{g}. \end{aligned}$$

On en déduit avec les expressions précédentes :

$$d\vec{F} \approx \frac{d\mu' - d\mu}{\mu(z)} \delta m \vec{g} = -\frac{PM}{\mathcal{R}T^2 \mu} \left( \frac{dT'}{dz} - \frac{dT}{dz} \right) dz \delta m \vec{g}.$$

1.6. Pour que l'atmosphère soit stable, il faut que la force apparaissant spontanément s'oppose à la perturbation qui a déplacé la particule. Sinon, n'importe quelle petite masse d'air subissant la moindre perturbation s'éloignera indéfiniment de sa position initiale, ce qui finira par donner macroscopiquement des mouvements verticaux dans l'atmosphère. Le vecteur  $d\vec{F}$  doit donc être opposé au déplacement  $dz \vec{u}_z$ , d'où la condition :

$$\frac{dT'}{dz} - \frac{dT}{dz} < 0.$$

2.1. A partir de la formule de Laplace  $P = K\mu^\gamma$  pour une évolution adiabatique réversible on a pour la petite masse d'air :

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\mu'}{\mu} \quad \text{et à partir de l'équation d'état :}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\mu'}{\mu} + \frac{dT'}{T}.$$

On en déduit en éliminant la variation relative de masse volumique :

$$\frac{dP}{P} = \gamma \left( \frac{dP}{P} - \frac{dT'}{T} \right), \quad \text{soit :}$$

$$\frac{dT'}{T} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{dP}{P} = - \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\mu g}{P} dz = - \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{Mg}{\mathcal{R}T} dz$$

et finalement :

$$\frac{dT'}{dz} = - \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{Mg}{\mathcal{R}T}.$$

2.2. Dans une atmosphère isotherme le gradient de température est nul. La condition d'équilibre devient alors :

$$\frac{dT'}{dz} < 0.$$

Or l'expression de  $\frac{dT'}{dz}$  montre qu'il s'agit d'une grandeur strictement négative et l'inégalité est donc respectée. Une atmosphère isotherme serait stable.

2.3. Le rayonnement solaire parvient sans absorption jusqu'au sol et chauffe celui-ci. Comme la température de la surface de la Terre n'augmente pas en moyenne au cours du temps, le flux reçu du Soleil doit être compensé par une libération d'énergie vers l'espace. Une partie correspond au rayonnement infrarouge de la Terre mais une partie est évacuée par conduction dans l'air. Il faut donc avoir un vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_Q = -\lambda \overline{\text{grad } T}$  dirigé suivant la verticale ascendante, ce qui impose une valeur négative de  $\frac{dT}{dz}$ .

2.4. L'équilibre par conduction seule impose l'égalité de la puissance surfacique et du module de la densité de courant thermique :

$$\mathcal{P}_s = \lambda \left| \frac{dT}{dz} \right|, \text{ soit numériquement } \frac{dT}{dz} = -\frac{\mathcal{P}_s}{\lambda} = -\frac{150}{25,7 \cdot 10^{-3}} = -5840 \text{ K.m}^{-1}.$$

C'est une valeur aberrante, trop élevée de plusieurs ordres de grandeur par rapport à la réalité, ce qui signifie que l'essentiel de l'équilibre thermique n'est pas réalisé par la conduction dans l'air.

2.5. Si l'atmosphère est stable on a au maximum :

$$\left| \frac{dT}{dz} \right| = \left| \frac{dT'}{dz} \right| = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{Mg}{\mathcal{R}} = \left( 1 - \frac{1}{1,4} \right) \frac{29 \cdot 10^{-3} \times 10}{8,31} = 9,97 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}.$$

Il y a ainsi un rapport de  $\frac{9,97 \cdot 10^{-3}}{5840} = 1,70 \cdot 10^{-6}$  entre le flux maximal que peut évacuer l'air par conduction et celui qu'il faudrait pour assurer l'équilibre. On peut donc considérer que la conduction ne participe pas du tout à l'équilibre thermique de la Terre.

2.6. Dans une atmosphère telle que  $\frac{dT}{dz} = \frac{dT'}{dz}$  une petite masse d'air déplacée verticalement se retrouverait spontanément en équilibre thermique avec son environnement tout en subissant une évolution adiabatique. Il n'y aurait ainsi aucun échange de chaleur dans cette atmosphère qui serait de ce fait localement (pour

toute couche d'air) adiabatique. D'où le terme de gradient adiabatique pour la valeur de  $\frac{dT}{dz}$  dans une telle atmosphère.

2.7. L'atmosphère devient instable verticalement quand le gradient adiabatique est franchi. Il apparaît alors des courants ascendants et l'air qui monte subit une détente adiabatique réversible, c'est-à-dire avec refroidissement (car on a dans ce cas la relation  $P^{1/\gamma} T^\gamma = \text{cte}$ ). A une certaine altitude, la température de liquéfaction de la vapeur d'eau est atteinte et il se forme des nuages. Comme la liquéfaction libère de l'énergie, l'atmosphère est réchauffée dans la zone nuageuse et la température décroît moins vite avec l'altitude que dans un air sec. Le gradient thermique devient donc plus faible en valeur absolue au-dessus de la base des nuages.

2.8. La stratosphère est donc stable verticalement et il ne peut se former de nuages. Le ciel apparaît donc toujours dégagé car les nuages sont situés plus bas. Ils ne peuvent pas franchir la limite de la tropopause.

## EXERCICE 2

### Plafond d'un aérostat

Un ballon sphérique de rayon  $R$  fixe est gonflé avec un gaz parfait de masse molaire  $M$  et lâché dans l'atmosphère. Celle-ci est supposée isotherme, à la température  $T_0$  et on note  $M_a$  la masse molaire de l'air, supérieure à  $M$ . L'enveloppe du ballon et sa charge utile ont une masse totale  $m$ .

1.1. Établir le profil vertical  $P(z)$  de pression dans l'atmosphère, l'air étant assimilé à un gaz parfait. On notera  $g$  le champ de pesanteur,  $H$  la constante  $\frac{\mathcal{R}T_0}{M_a g}$  et  $P_0$  la pression atmosphérique au sol.

1.2. Le ballon reste en permanence en équilibre thermique avec l'atmosphère. Établir son profil interne de pression  $P_{\text{gaz}}(z)$  en notant  $P_C$  la pression en son centre  $C$ ,  $z_C$  l'altitude de ce point et  $H_{\text{gaz}}$  la constante  $\frac{\mathcal{R}T_0}{Mg}$ .

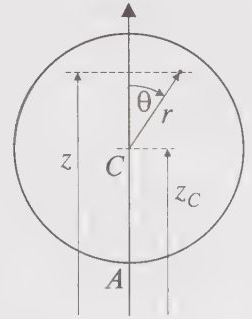
2. On donne  $T_0 = 280 \text{ K}$ ,  $M_a = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  et  $\mathcal{R} = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Calculer les valeurs numériques de  $H$  et  $H_{\text{gaz}}$ .

3.1. En remarquant que  $P_C$  constitue une certaine pression moyenne dans le ballon, quelle relation doit-on attendre entre le volume  $V$  de celui-ci,  $P_C$ ,  $H_{\text{gaz}}$ ,  $g$  et la masse  $m_{\text{gaz}}$  du gaz qu'il contient ?

3.2. La cote relative  $z - z_C$  restant petite devant  $H_{\text{gaz}}$ , montrer qu'il faudrait aller au deuxième ordre en  $z - z_C$  dans l'expression de  $P_{\text{gaz}}(z)$  pour obtenir une correction à la relation précédente et qu'on obtiendrait ainsi :

$$m_{\text{gaz}} \approx \frac{P_C V}{H_{\text{gaz}} g} \left( 1 - \frac{R^2}{10 H_{\text{gaz}}^2} \right).$$

On utilisera pour ce calcul un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  d'origine  $C$ .



3.3. Exprimer à la même approximation (second ordre)  $m_{\text{gaz}}$  en fonction non de  $P_C$  mais de la pression  $P_A$  au point  $A$  situé à l'extrémité inférieure du ballon.

On se contente de développements limités au premier ordre en  $\frac{R}{H_{\text{gaz}}}$  ou  $\frac{R}{H}$  désormais dans toutes les expressions.

4. Calculer la poussée d'Archimède  $\vec{\Pi}$  exercée sur le ballon (le volume de la charge utile étant négligeable) à une altitude  $z_C$  donnée en fonction de la pression de l'air à cette altitude  $P(z_C)$ , de  $V$  et de  $H$ .

5. Le ballon est gonflé à la pression  $P_g$  par un orifice en  $A$  placé à sa partie inférieure, ensuite fermé, puis lâché dans l'air.

5.1. A quelle condition sur  $P_g$  peut-il décoller du sol ?

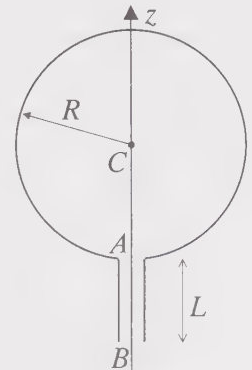
5.2. Celle-ci étant remplie, quelle altitude maximale  $z_m$  peut-il atteindre ?

5.3. Calculer numériquement  $z_m$  avec les valeurs suivantes  $P_0 = 1$  bar,  $m = 1000$  kg,  $R = 25$  m,  $P_g = 0,5$  bar.

6.1. L'orifice en  $A$  est maintenu ouvert. Pour quelle raison le ballon peut-il atteindre une altitude plus élevée ?

6.2. Calculer la nouvelle expression de  $z_m$  et sa valeur numérique.

7.1. Le ballon est relié à l'air libre par une manche étroite de hauteur  $L$ , fixée en  $A$  et elle aussi maintenue ouverte en  $B$ . Pourquoi le ballon ne peut-il atteindre une altitude aussi élevée que sans manche ? La masse de la manche et le volume de gaz qu'elle contient sont négligeables.



7.2. Calculer la nouvelle expression de  $z_m$  et sa valeur numérique pour  $L = 2R$ .  
Conclusion.

8. On veut envoyer un ballon-sonde dans la mésosphère, vers 35 km d'altitude, et on souhaite qu'il s'y maintienne pendant une durée suffisamment longue. Contre quel phénomène faut-il lutter ? Quel est l'intérêt de la manche ? Que pourrait-on imaginer pour prolonger cette durée ?

1.1. L'équation d'équilibre s'écrit  $-\frac{\overline{\text{grad } P}}{\mu} + \vec{g} = \vec{0}$  et se projette sur la verticale en

$$\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} + g = 0,$$

les projections horizontales montrant que  $P$  ne dépend que de la coordonnée  $z$ . En utilisant l'équation d'état locale  $P = \frac{\mu \mathcal{R}T_0}{M_a}$  on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = -\frac{M_a g}{\mathcal{R}T_0} \quad \text{qui s'intègre en :}$$

$$\ln P = -\frac{M_a g z}{\mathcal{R}T_0} + \text{cte} = -\frac{z}{H} + \text{cte}.$$

Puisqu'on doit retrouver  $P = P_0$  au niveau du sol, il vient finalement :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

1.2. Dans le ballon, on a la même équation différentielle avec  $M$  au lieu de  $M_a$  et on obtient ainsi :

$$\ln P_{\text{gaz}} = -\frac{Mgz}{\mathcal{R}T_0} + \text{cte} = -\frac{z}{H_{\text{gaz}}} + \text{cte}.$$

Pour  $z = z_C$  on a  $P_{\text{gaz}} = P_C$  et on écrit donc :

$$P_{\text{gaz}}(z) = P_C \exp\left(-\frac{z - z_C}{H_{\text{gaz}}}\right).$$

2. L'application numérique donne :

$$H = \frac{8,314 \times 280}{29.10^{-3} \times 9,81} = 8183 \text{ m et } H_{\text{gaz}} = \frac{8,314 \times 280}{4.10^{-3} \times 9,81} = 59330 \text{ m.}$$

3.1. Si le profil de pression dans le ballon est remplacé par une valeur uniforme, il est naturel de prendre la valeur au centre et on utilise l'équation d'état d'un système homogène :

$$m_{\text{gaz}} = Mn_{\text{gaz}} = M \frac{P_C V}{\mathcal{R}T_0} = \frac{P_C V}{g} \frac{Mg}{\mathcal{R}T_0} = \frac{P_C V}{gH_{\text{gaz}}}.$$

3.2. Un développement limité au second ordre donne :

$$P_{\text{gaz}}(z) \approx P_C \left( 1 - \frac{z - z_C}{H_{\text{gaz}}} + \frac{(z - z_C)^2}{2H_{\text{gaz}}^2} \right)$$

et c'est cette expression que l'on utilise pour calculer la masse de gaz contenue dans le ballon :

$$\begin{aligned} m_{\text{gaz}} &= \int_V \mu_{\text{gaz}} dV = \int_V \frac{P_{\text{gaz}} M}{\mathcal{R}T_0} dV = \frac{MP_C}{\mathcal{R}T_0} \int_V \exp\left(-\frac{r \cos \theta}{H_{\text{gaz}}}\right) dV \\ &\approx \frac{MP_C}{\mathcal{R}T_0} \int_V \left( 1 - \frac{r \cos \theta}{H_{\text{gaz}}} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{2H_{\text{gaz}}^2} \right) dV \\ &= \frac{MP_C V}{\mathcal{R}T_0} - \frac{MP_C}{\mathcal{R}T_0 H_{\text{gaz}}} \int_V r \cos \theta dV + \frac{MP_C}{2\mathcal{R}T_0 H_{\text{gaz}}^2} \int_V r^2 \cos^2 \theta dV \\ &= \frac{P_C V}{H_{\text{gaz}} g} - \frac{P_C}{H_{\text{gaz}}^2 g} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &\quad + \frac{P_C}{2H_{\text{gaz}}^3 g} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^4 \cos^2 \theta \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{P_C V}{H_{\text{gaz}} g} - \frac{2\pi P_C R^4}{H_{\text{gaz}}^2 g} \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta + \frac{\pi P_C R^5}{H_{\text{gaz}}^3 g} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{P_C V}{H_{\text{gaz}} g} - 0 + \frac{\pi P_C R^5}{H_{\text{gaz}}^3 g} \times \frac{2}{3} = \frac{P_C V}{H_{\text{gaz}} g} + \frac{2\pi P_C R^5}{15H_{\text{gaz}}^3 g} \\ &= \frac{P_C V}{H_{\text{gaz}} g} + \frac{P_C VR^2}{10H_{\text{gaz}}^3 g} = \frac{P_C V}{H_{\text{gaz}} g} \left( 1 - \frac{R^2}{10H_{\text{gaz}}^2} \right). \end{aligned}$$

On remarque que la correction à l'ordre 1 n'intervient pas dans le résultat car l'intégrale  $\int z dV$  est nulle dans le volume d'une sphère centrée sur l'origine.

3.3. On a par ailleurs à la partie inférieure du ballon :

$$P_A = P_{\text{gaz}}(z_C - R) \approx P_C \left( 1 - \frac{-R}{H_{\text{gaz}}} + \frac{(-R)^2}{2H_{\text{gaz}}^2} \right) = P_C \left( 1 + \frac{R}{H_{\text{gaz}}} + \frac{R^2}{2H_{\text{gaz}}^2} \right).$$

Il vient à la même approximation :

$$\begin{aligned} P_C &= P_A \left( 1 + \frac{R}{H_{\text{gaz}}} + \frac{R^2}{2H_{\text{gaz}}^2} \right)^{-1} \approx P_A \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} - \frac{R^2}{2H_{\text{gaz}}^2} + \left( \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right)^2 \right) \\ &= P_A \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} + \frac{R^2}{2H_{\text{gaz}}^2} \right) \end{aligned}$$

et on obtient ainsi :

$$m_{\text{gaz}} = \frac{P_A V}{H_{\text{gaz}} g} \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} + \frac{R^2}{2H_{\text{gaz}}^2} \right) \left( 1 - \frac{R^2}{10H_{\text{gaz}}^2} \right) \approx \frac{P_A V}{H_{\text{gaz}} g} \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} + \frac{2R^2}{5H_{\text{gaz}}^2} \right).$$

4. On somme les forces de pression exercées sur le ballon en utilisant également un développement au premier ordre en  $z - z_C$  pour la pression extérieure :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= - \int_S P(z) d\vec{S} = - \int_S P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) d\vec{S} = - \int_S P(z_C) \exp\left(-\frac{z - z_C}{H}\right) d\vec{S} \\ &\approx - \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} P(z_C) \left( 1 - \frac{z - z_C}{H} \right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{u}_r, \end{aligned}$$

et comme la résultante est par symétrie colinéaire à  $\vec{u}_z$  on peut écrire directement :

$$\begin{aligned} \Pi &= - \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} P(z_C) \left( 1 - \frac{z - z_C}{H} \right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z \\ &= -P(z_C) R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left( 1 - \frac{z - z_C}{H} \right) \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi \\ &= -2\pi P(z_C) R^2 \int_0^{\pi} \left( 1 - \frac{R \cos\theta}{H} \right) \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= -2\pi P(z_C) R^2 \left[ \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{R \cos^3\theta}{3H} \right]_0^{\pi} = -2\pi P(z_C) R^2 \left[ -\frac{2R}{3H} \right] \\ &= \frac{4\pi R^3 P(z_C)}{3H} = \frac{VP(z_C)}{H}. \end{aligned}$$

5.1. La masse de gaz contenue dans le ballon est constante et la relation entre  $m_{\text{gaz}}$  et  $P_C$  montre que  $P_C$  ne dépend pas de l'altitude. Comme le rapport  $\frac{P_A}{P_C}$  non plus (Cf. question 3.3),  $P_A$  garde également à toute altitude la même valeur qu'au sol, soit  $P_g$ , ce qui donne au premier ordre en  $\frac{R}{H_{\text{gaz}}}$  :

$$m_{\text{gaz}} \approx \frac{P_g V}{H_{\text{gaz}} g} \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right).$$

Pour que le ballon décolle, il faut que la poussée d'Archimède l'emporte sur son poids au niveau du sol, d'où la condition :

$$\frac{VP(R)}{H} > (m + m_{\text{gaz}})g = mg + \frac{P_g V}{H_{\text{gaz}}} \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right).$$

Avec, également au premier ordre,  $P(R) = P_0 \exp\left(-\frac{R}{H}\right) \approx P_0 \left(1 - \frac{R}{H}\right)$ , il vient :

$$\frac{H_{\text{gaz}}}{H} P_0 \left( 1 - \frac{R}{H} \right) > \frac{mgH_{\text{gaz}}}{V} + P_g \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right),$$

ce qui donne :

$$P_g < \frac{H_{\text{gaz}}}{H} P_0 \left( 1 - \frac{R}{H} \right) \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right)^{-1} - \frac{mgH_{\text{gaz}}}{V} \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right)^{-1},$$

soit encore au premier ordre :

$$P_g < \frac{M_a}{M} P_0 \left( 1 - \frac{R}{H} \right) \left( 1 + \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right) - \frac{mgH_{\text{gaz}}}{V} \left( 1 + \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right)$$

et enfin :

$$P_g < \frac{M_a}{M} P_0 \left( 1 + \frac{R}{H_{\text{gaz}}} - \frac{R}{H} \right) - \frac{mg}{V} (H_{\text{gaz}} + R).$$

5.2. Comme la pression atmosphérique décroît avec l'altitude, la poussée d'Archimède diminue au cours de l'ascension et finit par ne plus compenser le poids qui reste lui constant. Ceci se produit à l'altitude telle que :

$$\frac{VP(z_m)}{H} = (m + m_{\text{gaz}})g = mg + \frac{P_g V}{H_{\text{gaz}}} \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right)$$

et on obtient :

$$z_m = -H \ln \left[ \frac{mgH}{VP_0} + \frac{P_g H}{P_0 H_{\text{gaz}}} \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \right] = -H \ln \left[ \frac{mgH}{VP_0} + \frac{P_g M}{P_0 M_a} \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \right]$$

5.3. L'application numérique donne :

$$z_m = -8183 \ln \left[ \frac{1000 \times 9,81 \times 8183}{\frac{4\pi}{3} 25^3 \times 10^5} + \frac{0,5 \cdot 10^5 \times 4 \cdot 10^{-3}}{10^5 \times 29 \cdot 10^{-3}} \left(1 - \frac{25}{59330}\right) \right] = 20546 \text{ m.}$$

6.1. La pression en  $A$  diminue alors avec l'altitude puisqu'elle reste égale à la pression atmosphérique locale. La masse de gaz contenue dans le ballon va alors progressivement décroître (il se vide dans l'air pour assurer l'équilibre de pression), ce qui allège d'autant la masse totale alors que la poussée d'Archimède n'est pas modifiée par ce phénomène. Le ballon, plus léger, peut donc monter plus haut dans l'atmosphère.

6.2. La masse de gaz, qui n'est plus constante, est donnée par :

$$m_{\text{gaz}} \approx \frac{P_A V}{H_{\text{gaz}} g} \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) = \frac{P_0 V}{H_{\text{gaz}} g} \exp\left(-\frac{z_A}{H}\right) \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right)$$

A l'altitude maximale on écrit cette fois :

$$\begin{aligned} \frac{VP(z_m)}{H} &= (m + m_{\text{gaz}})g = mg + \frac{P_0 V}{H_{\text{gaz}}} \exp\left(-\frac{z_A}{H}\right) \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \\ &= mg + \frac{P(z_m) V}{H_{\text{gaz}}} \exp\left(\frac{z_m - z_A}{H}\right) \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \\ &\approx mg + \frac{P(z_m) V}{H_{\text{gaz}}} \left(1 + \frac{R}{H}\right) \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \approx mg + \frac{P(z_m) V}{H_{\text{gaz}}} \left(1 + \frac{R}{H} - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$P(z_m) = \frac{mg}{V} \left[ \frac{1}{H} - \frac{1}{H_{\text{gaz}}} \left(1 + \frac{R}{H} - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \right]^{-1}$$

et on obtient :

$$z_m = -H \ln \left\{ \frac{mg}{P_0 V} \left[ \frac{1}{H} - \frac{1}{H_{\text{gaz}}} \left( 1 + \frac{R}{H} - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right) \right]^{-1} \right\},$$

soit numériquement :

$$z_m = -H \ln \left\{ \frac{1000 \times 9,81}{10^5 \times \frac{4\pi}{3} \times 25^3} \left[ \frac{1}{8183} - \frac{1}{59330} \left( 1 + \frac{25}{8183} - \frac{25}{59330} \right) \right]^{-1} \right\}$$

$$= 34790 \text{ m.}$$

Le gain en altitude est considérable. Elle est presque doublée par le simple fait de laisser le ballon se vider d'une partie du gaz.

7.1. La pression à l'extrémité inférieure de la manche est maintenue à la valeur ambiante dans l'air. On a donc en  $A$  :

$$\begin{aligned} P_A &= P_B \exp\left(-\frac{z_A - z_B}{H_{\text{gaz}}}\right) = P_B \exp\left(-\frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) \\ &= P(z_A) \exp\left(-\frac{z_B - z_A}{H}\right) \exp\left(-\frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) = P(z_A) \exp\left(\frac{L}{H}\right) \exp\left(-\frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) \\ &= P(z_A) \exp\left(\frac{L}{H} - \frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right). \end{aligned}$$

Comme  $H < H_{\text{gaz}}$ , la pression en  $A$  est supérieure à ce qu'elle était quand la communication avec l'air se faisait directement en  $A$ . Il reste donc plus de gaz dans le ballon à une altitude donnée. Comme l'ensemble est plus lourd, l'altitude maximale est plus faible.

7.2. On écrit maintenant la masse de gaz :

$$\begin{aligned} m_{\text{gaz}} &\approx \frac{P_A V}{H_{\text{gaz}} g} \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right) = P(z_A) \exp\left(\frac{L}{H} - \frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) \frac{V}{H_{\text{gaz}} g} \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right) \\ &= \frac{P_0 V}{H_{\text{gaz}} g} \exp\left(-\frac{z_A}{H}\right) \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right) \exp\left(\frac{L}{H} - \frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) \\ &\approx \frac{P_0 V}{H_{\text{gaz}} g} \exp\left(-\frac{z_A}{H}\right) \left( 1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}} \right) \left( 1 + \frac{L}{H} - \frac{L}{H_{\text{gaz}}} \right) \end{aligned}$$

et il vient à l'altitude maximale :

$$\begin{aligned}
 \frac{VP(z_m)}{H} &= (m + m_{\text{gaz}})g = mg + \frac{P_0 V}{H_{\text{gaz}}} \exp\left(-\frac{z_A}{H}\right) \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \left(1 + \frac{L}{H} - \frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) \\
 &= mg + \frac{P(z_m)V}{H_{\text{gaz}}} \exp\left(\frac{z_m - z_A}{H}\right) \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \left(1 + \frac{L}{H} - \frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) \\
 &\approx mg + \frac{P(z_m)V}{H_{\text{gaz}}} \left(1 + \frac{R}{H}\right) \left(1 - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \left(1 + \frac{L}{H} - \frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) \\
 &\approx mg + \frac{P(z_m)V}{H_{\text{gaz}}} \left(1 + \frac{R}{H} - \frac{R}{H_{\text{gaz}}}\right) \left(1 + \frac{L}{H} - \frac{L}{H_{\text{gaz}}}\right) \\
 &\approx mg + \frac{P(z_m)V}{H_{\text{gaz}}} \left(1 + \frac{R+L}{H} - \frac{R+L}{H_{\text{gaz}}}\right).
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$z_m = -H \ln \left\{ \frac{mg}{P_0 V} \left[ \frac{1}{H} - \frac{1}{H_{\text{gaz}}} \left( 1 + \frac{R+L}{H} - \frac{R+L}{H_{\text{gaz}}} \right) \right]^{-1} \right\}.$$

soit numériquement :

$$\begin{aligned}
 z_m &= -H \ln \left\{ \frac{1000 \times 9,81}{10^5 \times \frac{4\pi}{3} \times 25^3} \left[ \frac{1}{8183} - \frac{1}{59330} \left( 1 + \frac{75}{8183} - \frac{75}{59330} \right) \right]^{-1} \right\} \\
 &= 34790 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

On obtient la même altitude à quatre chiffres significatifs. La manche ne modifie l'altitude que de quelques fractions de mètres au maximum.

8. Pour atteindre la mésosphère, il faut utiliser un ballon dont le gaz communique avec l'air. Un ballon hermétique ne pourrait monter aussi haut, à moins d'être sous gonflé au sol mais ceci poserait le problème du maintien du volume de l'enveloppe

Or, à cause de la communication, il existe inévitablement un phénomène de diffusion par l'orifice et le gaz léger est remplacé lentement par l'air. Le ballon s'alourdit et va redescendre. La manche, par sa longueur, diminue le gradient de concentration entre l'intérieur du ballon et l'air, pour des compositions intérieure et extérieure données, ce qui ralentit les échanges gazeux puisqu'ils sont régis par la loi de Fick. Le maintien en altitude sera donc plus durable.

Pour compenser la diffusion, il faut imaginer une opération qui maintiendrait  $H_{\text{gaz}}$  constante malgré le remplacement progressif de  $M$  par  $M_a$ . La seule possibilité est

de faire croître la température du gaz en proportion. Il faudrait donc embarquer un système de chauffage.

## EXERCICE 3

### Modèle polytropique d'une étoile

On modélise une étoile par une sphère gazeuse de rayon  $R$  et de masse  $m$  en équilibre statique dans son propre champ de gravitation. On ne tient compte d'aucun phénomène de rotation et le gaz est supposé parfait quelles que soient les conditions de température et de pression. Du fait de l'isotropie du problème, on travaille en coordonnées sphériques avec l'origine  $O$  au centre de l'étoile.

On rappelle qu'il existe pour le champ de gravitation  $\vec{\mathcal{E}}$  un théorème semblable au théorème de Gauss du champ électrique sur toute surface fermée  $S$  :

$$\int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = -4\pi k m_{\text{int}},$$

$m_{\text{int}}$  étant la masse intérieure à  $S$  et  $k$  la constante de Cavendish de la gravitation.

1. Établir la relation :

$$\vec{\mathcal{E}}(M) = -\frac{4\pi k}{r^2} \int_0^r \mu(\rho) \rho^2 d\rho \vec{u}_r, \quad \mu \text{ étant le champ de masse volumique.}$$

2. Quelle est la condition d'équilibre reliant les champs de pression  $P$  et de gravitation ? En déduire une équation différentielle du second ordre liant  $P$  et  $\mu$ .

3. Pour l'intégrer, on a besoin d'une seconde équation. On suppose pour cela une relation polytropique, c'est-à-dire que la pression et la masse volumique respectent l'égalité  $P = A\mu^\alpha$ . Les deux constantes  $A$  et  $\alpha$  sont indéterminées a priori et doivent être obtenues à partir de données expérimentales propres à l'étoile.

Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\mu(r)$  et la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2\mu}{dr^2} + \dots \frac{d\mu}{dr} + \dots \left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2 = \dots$$

4.1. On adimensionne cette équation en introduisant des grandeurs relatives

$\mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$  et  $r' = \frac{r}{R}$ ,  $\mu_0$  étant la masse volumique au centre de l'étoile. Que de-

vient l'équation ? On fera apparaître la constante  $K = \frac{4\pi k R^2}{\alpha A} \mu_0^{2-\alpha}$ .

4.2. Quel est le domaine d'intégration de cette équation ? Quelles sont les conditions « initiales » au centre ? Quel doit être le comportement global de  $\mu'(r')$  ?

5. L'équation contenant deux paramètres libres,  $K$  et  $\alpha$ , il faut ajouter quelques contraintes pour limiter le nombre de solutions acceptables. Tout d'abord, en appelant abusivement gradient thermique la composante radiale (la seule non nulle) du vecteur gradient de température, l'étoile ne peut être en équilibre que si ce gradient thermique ne dépasse nulle part en valeur absolue le gradient adiabatique local

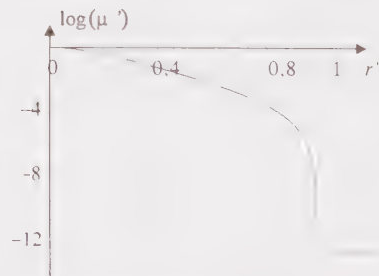
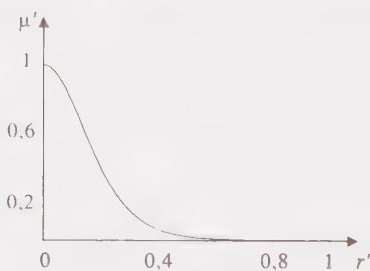
que local  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{M \mathcal{E}}{\mathcal{R}}$  (Cf. exercice 1), avec  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  et  $M$  étant la

masse molaire du gaz. Cette condition impose l'inégalité  $\alpha \leq \gamma$ . L'étoile étant supposée formée d'atomes et d'ions simples, on prend  $\gamma = \frac{4}{3}$ . Ensuite, on doit

obtenir  $P = 0$  à la surface puisque l'étoile est en contact avec le vide, ce qui impose du fait de la relation polytropique  $\mu'(1) = 0$ . Enfin, il paraît raisonnable de situer la constante  $K$  dans l'intervalle  $[10, 1000]$  dans l'état des connaissances actuelles de la structure des étoiles.

5.1. La résolution numérique de l'équation différentielle adimensionnée ne posant pas de problème, proposer un protocole permettant de sélectionner les solutions acceptables. Quelle est la valeur minimale de  $\alpha$  à considérer ?

5.2. On trouve ainsi que  $\alpha$  doit être compris entre 1,25 et  $\frac{4}{3}$  et  $K$  entre 200 et 1000 mais la résolution numérique montre qu'il est impossible d'annuler exactement  $\mu'$  en  $r' = 1$ . Au-dessus du bord de l'étoile, il persiste toujours une très faible quantité de matière avec une masse volumique relative  $\mu' \sim 10^{-13}$ . Ainsi on a représenté ci-dessous la courbe  $\mu'(r')$  en coordonnées linéaires et logarithmiques pour  $\alpha = 1,333$  et  $K = 150$ . Ce sont ces deux valeurs que l'on garde pour la suite de l'exercice. Il s'agit du modèle dit entièrement convectif ( $\alpha = \gamma$ ).



Commenter ces courbes et définir deux régions dans l'étoile.

6. Pression centrale.

6.1. On a calculé au cours de la résolution l'intégrale  $I = 4\pi \int_0^1 \mu' r'^2 dr'$  et obtenu  $I = 0,0723$ . Exprimer la masse  $m$  de l'étoile en fonction de  $I$ ,  $R$  et  $\mu_0$ .

6.2. Expliciter  $K$  en fonction de  $R$ ,  $\mu_0$ ,  $\alpha$ ,  $k$  et de la pression  $P_0$  au centre de l'étoile. En déduire l'égalité approchée  $P_0 \approx 12 \frac{km^2}{R^4}$ .

6.3. On note respectivement  $P_\odot$ ,  $R_\odot$  et  $m_\odot$  la pression centrale, le rayon et la masse du Soleil. Établir la (célèbre) relation pression-masse-rayon :

$$\frac{P_0}{P_\odot} = \left( \frac{m}{m_\odot} \right)^2 \left( \frac{R_\odot}{R} \right)^4.$$

6.4. Calculer la pression centrale pour le Soleil sachant que  $m_\odot = 2.10^{30}$  kg,  $R_\odot = 696.10^3$  km et  $k = 6,67.10^{-11}$  USI. La comparer avec la valeur estimée à  $2.10^{16}$  Pa à partir de modèles de structure stellaire sophistiqués.

7. Température centrale.

7.1. Exprimer  $K$  en fonction de  $R$ ,  $\mu_0$ ,  $\alpha$ ,  $k$ , de la température  $T_0$  et de la masse molaire  $M_0$  centrales. En déduire l'égalité approchée  $T_0 \approx 0,87 \frac{kM_0 m}{\mathcal{R}R}$ .

7.2. On note  $T_\odot$  la température centrale du Soleil. Établir la (très célèbre) relation température-masse-rayon :

$$\frac{T_0}{T_\odot} = \frac{m}{m_\odot} \frac{R_\odot}{R} \quad \text{à condition de faire une hypothèse qu'on précisera.}$$

7.3. Le Soleil et les étoiles sont essentiellement formés d'hydrogène atomique partiellement ionisé. En déduire un encadrement de  $T_\odot$ . Comparer avec la valeur communément admise de  $15.10^6$  K. On prendra  $\mathcal{R} = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

7.4. En déduire une estimation du taux d'ionisation au centre du Soleil.

8. Température de surface. Le bord optique d'une étoile est malaisé à définir car toutes les couches contribuent à l'émission lumineuse et il est impossible de dire a priori au-delà de quelle valeur de  $r'$  on ne reçoit plus de lumière parce que la matière présente n'est plus assez dense et chaude pour émettre. A la lecture de la courbe logarithmique de la page précédente, on peut seulement prévoir qu'il doit correspondre à une valeur de  $\log \mu'$  comprise environ entre  $-12,5$  et  $-8$ .

8.1. En supposant que la température et le taux d'ionisation au centre sont comparables à ceux du centre du Soleil, donner une fourchette des valeurs de la température  $T_s$  effective des étoiles, c'est-à-dire de la température de la couche qui émet le rayonnement reçu et qu'on suppose a priori formée de gaz neutre.

La majorité des étoiles ont une température effective comprise entre 2500 et 25000 K. Est-ce compatible avec la fourchette obtenue ?

8.2. La température effective du Soleil est  $T_{s\odot} = 5750$  K. Quelle est la profondeur de la couche qui émet le rayonnement par rapport au « bord » défini par  $r' = 1$  ? Dans la partie à décroissance rapide de la courbe logarithmique on a avec une bonne précision :

$$r' \approx 0,761 - 5,67 \cdot 10^{-2} \log \mu' - 5,00 \cdot 10^{-3} \log^2 \mu' - 1,49 \cdot 10^{-4} \log^3 \mu'.$$

9. Luminosité. On appelle luminosité  $\mathcal{L}$  d'une étoile la puissance électromagnétique totale rayonnée. Elle vaut  $4\pi R^2 \sigma T_s^4$ ,  $\sigma$  étant la constante de Boltzmann, égale à  $5,67 \cdot 10^{-8}$  USI.

9.1. Calculer numériquement la luminosité solaire  $\mathcal{L}_\odot$  puis établir la relation :

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_\odot} = \left( \frac{R}{R_\odot} \right)^2 \left( \frac{T_s}{T_{s\odot}} \right)^4.$$

9.2. On appelle naines blanches une famille d'étoiles de luminosité anormalement faible que l'on attribue à un rayon très petit. Donner un ordre de grandeur de celui-ci avec les valeurs typiques  $\mathcal{L} \sim 10^{-3} \mathcal{L}_\odot$ ,  $T_s \sim 10^4$  K,  $m \sim m_\odot$ . En déduire la température et la masse volumique centrales. On pourra utiliser la valeur de  $P_\odot$  calculée à la question 6.4. Peut-il s'agir au centre de gaz neutre ?

9.3. On appelle supergéantes rouges une famille d'étoiles de luminosité anormalement élevée compte tenu de leur faible température effective et on l'attribue à une taille gigantesque. Donner un ordre de grandeur de leur rayon avec les valeurs caractéristiques  $\mathcal{L} \sim 10^4 \mathcal{L}_\odot$ ,  $T_s \sim 3500$  K,  $m \sim 10m_\odot$ . En déduire la température et la masse volumique centrales. Que peut-on dire de ces étoiles ?

1. Du fait de la symétrie sphérique, le champ de gravitation est radial et son module ne dépend que de  $r$ . On peut donc le calculer rapidement à l'intérieur de l'étoile en utilisant comme surface de « Gauss » la sphère  $S$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \mathcal{E}(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \mathcal{E}(r) \int_S dS = 4\pi r^2 \mathcal{E}(r) = -4\pi k \int_0^r 4\pi \rho^2 \mu(\rho) d\rho.$$

On obtient ainsi :

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{4\pi k}{r^2} \int_0^r \mu(\rho) \rho^2 d\rho \vec{u}_r.$$

2. L'équation du mouvement s'écrit à l'équilibre :

$$-\frac{\overline{\text{grad } P}}{\mu} + \vec{\mathcal{E}} = \vec{0} \quad \text{et se projette sur } \vec{u}_r \text{ en :}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} - \mathcal{E} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{4\pi k}{r^2} \int_0^r \mu(\rho) \rho^2 d\rho = 0.$$

Les projections sur les deux autres vecteurs de la base sphérique donnant  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$

et  $\frac{\partial P}{\partial \phi} = 0$ , on écrit plus simplement :

$$\frac{r^2}{4\pi k \mu} \frac{dP}{dr} + \int_0^r \mu(\rho) \rho^2 d\rho = 0 \quad \text{et en dérivant :}$$

$$\frac{1}{4\pi k} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\mu} \frac{dP}{dr} \right) + r^2 \mu = 0.$$

3. On reporte  $P = A\mu^\alpha$  dans l'équation différentielle :

$$\frac{1}{4\pi k} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\mu} \frac{d}{dr} (A\mu^\alpha) \right) + r^2 \mu = 0, \quad \text{soit en développant :}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{A}{4\pi k} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\mu} \alpha \mu^{\alpha-1} \frac{d\mu}{dr} \right) + r^2 \mu = \frac{A}{4\pi k} \frac{d}{dr} \left( r^2 \alpha \mu^{\alpha-2} \frac{d\mu}{dr} \right) + r^2 \mu \\ &= \frac{\alpha A}{4\pi k} \left[ r^2 \mu^{\alpha-2} \frac{d^2 \mu}{dr^2} + 2r \mu^{\alpha-2} \frac{d\mu}{dr} + r^2 (\alpha-2) \mu^{\alpha-3} \left( \frac{d\mu}{dr} \right)^2 \right] + r^2 \mu \end{aligned}$$

puis en divisant par  $r^2 \mu$  :

$$\mu^{\alpha-3} \frac{d^2 \mu}{dr^2} + \frac{2}{r} \mu^{\alpha-3} \frac{d\mu}{dr} + (\alpha-2) \mu^{\alpha-4} \left( \frac{d\mu}{dr} \right)^2 = -\frac{4\pi k}{\alpha A}$$

et en réarrangeant :

$$\frac{d^2\mu}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\mu}{dr} + \frac{\alpha-2}{\mu} \left( \frac{d\mu}{dr} \right)^2 = -\frac{4\pi k}{\alpha A} \mu^{3-\alpha}.$$

4.1. On reporte  $r = Rr'$  et  $\mu = \mu_0 \mu'$  dans l'équation :

$$\frac{\mu_0}{R^2} \frac{d^2\mu'}{dr'^2} + \frac{2}{r'} \frac{\mu_0}{R^2} \frac{d\mu'}{dr'} + \frac{\mu_0(\alpha-2)}{R^2 \mu'} \left( \frac{d\mu'}{dr'} \right)^2 = -\frac{4\pi k}{\alpha A} \mu_0^{3-\alpha} \mu'^{3-\alpha}$$

et il vient finalement :

$$\frac{d^2\mu'}{dr'^2} + \frac{2}{r'} \frac{d\mu'}{dr'} + \frac{\alpha-2}{\mu'} \left( \frac{d\mu'}{dr'} \right)^2 = -\frac{4\pi k \mu_0^{2-\alpha} R^2}{\alpha A} \mu'^{3-\alpha} = -K \mu'^{3-\alpha}.$$

4.2. La variable réduite  $r'$  est comprise entre 0 et 1. Au centre, on a par définition  $\mu' = 1$  et pour la dérivée on écrit :

$$\frac{d\mu'}{dr'} = \frac{R}{\mu_0} \frac{d\mu}{dr} = \frac{R}{\mu_0} \frac{1}{A\alpha\mu^{\alpha-1}} \frac{dP}{dr} = -\frac{R}{\mu_0} \frac{\mu^\alpha}{A\alpha\mu^{\alpha-1}}.$$

Comme au centre le champ de gravitation ne peut être que nul par symétrie (toutes les directions y sont équivalentes) on a  $\left( \frac{d\mu'}{dr'} \right)_{r'=0} = 0$ . On a ainsi deux conditions

« initiales » pour une équation du second ordre.

La pression est une fonction monotone décroissante de  $r$  du fait de l'équation d'équilibre. A cause de la relation polytropique, c'est également le cas de la masse volumique. On a donc  $\mu'(r')$  elle aussi monotone décroissante.

5.1. L'équation est du second ordre et on possède deux conditions « initiales ». La résolution se fait donc en fixant a priori les valeurs de  $\alpha$  et de  $K$ . On choisit un tableau de valeurs de  $\alpha$  et de  $K$  et on recherche dans celui-ci les couples  $(\alpha, K)$  donnant la valeur  $\mu' = 0$  pour  $r' = 1$ . Seuls ces couples sont acceptables.

Le coefficient  $\alpha$  est inférieur à  $\frac{4}{3}$  et par ailleurs la valeur 1 correspond à une étoile de température uniforme car  $\frac{P}{\mu} = \frac{RT}{M}$ . Il n'est donc pas réaliste de prendre des valeurs inférieures à 1 et on peut se limiter au tableau ci-contre.

$K \backslash \alpha$	1	...	1,333
10			
...			
1000			

5.2. En échelle linéaire, on observe une décroissance régulière de  $\mu'$  qui devient négligeable devant 1 à partir de  $r' \approx 0,5$ . Il est de ce fait difficile de définir la fron-

tière entre l'étoile et le vide. Par contre, en échelle logarithmique, on constate une décroissance brutale entre  $r' \approx 0,95$  et 1. On retrouve bien la limite de l'étoile en  $r' = 1$  mais on constate qu'il reste de la matière au-delà, même si c'est en quantité apparemment très faible. On peut ainsi définir le corps de l'étoile, pour  $r' < 1$ , et une enveloppe ou atmosphère, pour  $r' > 1$  et d'extension indéfinie.

6.1. La masse de l'étoile est donnée par l'intégrale :

$$m = \iiint \mu d^3V = \int_0^R 4\pi r^2 \mu dr = R^3 \mu_0 \int_0^1 4\pi r'^2 \mu' dr' = R^3 \mu_0 I.$$

6.2. La constante  $K$  est définie par :

$$K = \frac{4\pi k R^2}{\alpha A} \mu_0^{2-\alpha} = \frac{4\pi k R^2}{\alpha P \mu^{-\alpha}} \mu_0^{2-\alpha} = \frac{4\pi k R^2}{\alpha P_0 \mu_0^{-\alpha}} \mu_0^{2-\alpha} = \frac{4\pi k R^2}{\alpha P_0} \mu_0^2$$

et on obtient ainsi :

$$P_0 = \frac{4\pi k R^2}{\alpha K} \mu_0^2.$$

On élimine  $\mu_0$  entre les deux relations :

$$P_0 = \frac{4\pi k R^2}{\alpha K} \left( \frac{m}{R^3 I} \right)^2 = \frac{4\pi k m^2}{\alpha K I^2 R^4}, \text{ ce qui donne numériquement :}$$

$$P_0 \approx \frac{4\pi}{\frac{4}{3} \times 150 \times 0,0723^2} \frac{km^2}{R^4} \approx 12 \frac{km^2}{R^4}.$$

6.3. On fait le rapport de cette égalité et de son équivalent pour le Soleil :

$$P_{\odot} \approx 12 \frac{km_{\odot}^2}{R_{\odot}^4} \text{ et on obtient ainsi immédiatement :}$$

$$\frac{P_0}{P_{\odot}} = \left( \frac{m}{m_{\odot}} \right)^2 \left( \frac{R_{\odot}}{R} \right)^4.$$

6.4. L'application numérique donne :

$$P_{\odot} \approx 12 \times \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times (2 \cdot 10^{30})^2}{(696 \cdot 10^6)^4} = 1,36 \cdot 10^{16} \text{ Pa.}$$

C'est environ les deux tiers de la pression (supposée) réelle. Compte tenu de la simplicité de notre modèle, c'est un résultat remarquable.

7.1. On repart de la définition de  $K$  :

$$K = \frac{4\pi k R^2}{\alpha A} \mu_0^{2-\alpha} = \dots = \frac{4\pi k R^2}{\alpha P_0} \mu_0^2 = \frac{4\pi k R^2 M_0}{\alpha \mu_0 \mathcal{R} T_0} \mu_0^2 = \frac{4\pi k R^2 M_0 \mu_0}{\alpha \mathcal{R} T_0}$$

ce qui donne :

$$T_0 = \frac{4\pi k R^2 M_0 \mu_0}{\alpha \mathcal{R} K}$$

On élimine ensuite  $\mu_0$  entre cette relation et celle obtenue à la question 6.1 :

$$T_0 = \frac{4\pi k R^2 M_0}{\alpha \mathcal{R} K} \frac{m}{R^3 I} = \frac{4\pi}{\alpha \mathcal{R} K I} \frac{k M_0 m}{R}, \text{ soit numériquement :}$$

$$T_0 \approx \frac{4\pi}{\frac{4}{3} \times 150 \times 0,0723} \frac{k M_0 m}{\mathcal{R} R} \approx 0,87 \frac{k M_0 m}{\mathcal{R} R}$$

7.2. On fait le rapport de cette égalité et de son équivalent pour le Soleil :

$$T_{\odot} \approx 0,87 \frac{k M_{\odot} m_{\odot}}{\mathcal{R} R_{\odot}}$$

et on obtient ainsi immédiatement, en admettant que toutes les étoiles ont la même masse molaire au centre, c'est-à-dire la même composition chimique :

$$\frac{T_0}{T_{\odot}} = \frac{m}{m_{\odot}} \frac{R_{\odot}}{R}$$

7.3. Pour de l'hydrogène non ionisé, on a  $M_0 = M_H = 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$ . Pour un gaz entièrement ionisé, formé en même proportion de protons et d'électrons,  $M_0$  est donné par une pondération :

$$M_0 = \frac{M_{H^+} + M_{e^-}}{2} \approx \frac{M_{H^+}}{2} \approx \frac{M_H}{2} = 5.10^{-4} \text{ kg.mol}^{-1}$$

On a donc l'encadrement  $5.10^{-4} \leq M_0 \leq 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$  et on en déduit :

$$10^7 \leq T_{\odot} \leq 2.10^7 \text{ K.}$$

C'est parfaitement compatible avec la valeur admise.

7.4. Si on note  $x$  la proportion d'atomes ionisés au centre du Soleil on a :

$$M_0 = x \frac{M_H}{2} + (1-x)M_H = \left(1 - \frac{x}{2}\right)M_H$$

et on peut donc écrire :

$$T_\odot \approx 0,87 \frac{kM_H m_\odot}{\mathcal{R}R_\odot} \left(1 - \frac{x}{2}\right), \text{ soit } x \approx 2 \left[1 - \frac{\mathcal{R}R_\odot T_\odot}{0,87kM_H m_\odot}\right] \approx 0,50.$$

Un atome sur deux apparaît ionisé.

8.1. Sur la surface « optique » on écrit l'équation d'état pour de l'hydrogène atomique :

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{P_s M}{\mathcal{R} \mu_s} = \frac{A M_H}{\mathcal{R}} \mu_s^{\alpha-1} = \frac{P_0 M_H}{\mu_0^\alpha \mathcal{R}} \mu_0^{\alpha-1} \mu_s'^{\alpha-1} = \frac{P_0 M_H}{\mu_0 \mathcal{R}} \mu_s'^{\alpha-1} = \frac{T_0 M_H}{M_0} \mu_s'^{\alpha-1} \\ &= \frac{\mu_s'^{\alpha-1}}{1 - \frac{x}{2}} T_0. \end{aligned}$$

Avec les valeurs « solaires »  $T_0 = 15.10^6$  K et  $x = 0,5$  on a numériquement :

$$T_s = 2.10^7 \mu_s'^{1/3} \text{ et on obtient l'encadrement :}$$

$$1360 < T_s < 43000 \text{ K.}$$

C'est un encadrement totalement compatible avec les températures données.

8.2. On calcule la valeur de  $\mu'$  correspondante :

$$\mu' = \left[ \left(1 - \frac{x}{2}\right) \frac{T_s \odot}{T_0} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left[ \left(1 - \frac{0,5}{2}\right) \frac{5750}{15.10^6} \right]^3 = 2,38.10^{-11}$$

soit  $\log \mu' = -10,6$  et on en déduit à partir de l'expression polynomiale  $r' \approx 0,978$ .

La couche émettrice se trouve donc à la profondeur :

$$(1 - r')R = 0,022 \times 696.10^3 = 15300 \text{ km}$$

sous le « bord » mathématique.

9.1. On effectue l'application numérique :

$$\mathcal{L}_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_s^4 = 4\pi \times (696.10^6)^2 \times 5,67.10^{-8} \times 5750^4 = 3,77.10^{26} \text{ W.}$$

On fait le rapport des deux relations  $\mathcal{L} = 4\pi R^2 \sigma T_s^4$  et  $\mathcal{L}_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_{s\odot}^4$  et il vient immédiatement :

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_\odot} = \left( \frac{R}{R_\odot} \right)^2 \left( \frac{T_s}{T_{s\odot}} \right)^4.$$

9.2. Cette relation s'écrit encore :

$$\frac{R}{R_\odot} = \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_\odot} \right)^{1/2} \left( \frac{T_s}{T_{s\odot}} \right)^{-2}, \text{ soit pour une naine blanche :}$$

$$R = (10^{-3})^{1/2} \left( \frac{10^4}{5750} \right)^{-2} \times 696 \cdot 10^3 \approx 7300 \text{ km.}$$

C'est une valeur proche du rayon de la Terre (6400 km).

On utilise la relation température-masse-rayon  $\frac{T_0}{T_\odot} = \frac{m}{m_\odot} \frac{R_\odot}{R}$  qui donne ici :

$$T_0 = 1 \times \frac{696 \cdot 10^3}{7300} \times 15 \cdot 10^6 \approx 1,4 \cdot 10^9 \text{ K}$$

et la relation pression-masse-rayon  $\frac{P_0}{P_\odot} = \left( \frac{m}{m_\odot} \right)^2 \left( \frac{R_\odot}{R} \right)^4$ , soit :

$$P_0 = 1 \times \left( \frac{696 \cdot 10^3}{7300} \right)^4 \times 1,36 \cdot 10^{16} \approx 1,1 \cdot 10^{24} \text{ Pa.}$$

Si on suppose l'équation d'état du gaz parfait encore applicable on obtient :

$$\mu_0 = \frac{M_0 P_0}{\mathcal{R} T_0} = \frac{10^{-3} \times 1,1 \cdot 10^{24}}{8,31 \times 1,4 \cdot 10^9} \approx 9,5 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ pour un gaz neutre}$$

et la moitié pour un gaz entièrement ionisé. Ceci correspond à une densité environ 10000 fois supérieure à celle du fer. Dans ces conditions, il est impossible d'admettre que la matière est formée d'atomes d'hydrogène puisqu'on a affaire à un état plusieurs milliers de fois plus compact que le solide. Il ne peut exister que des ions  $\text{H}^+$  et  $e^-$ , qui sont des milliards de fois moins volumineux que les atomes H, une telle densité ne pouvant s'obtenir qu'en supprimant le grand volume vide situé entre le noyau et le nuage électronique.

9.3. On reprend la relation :

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_{\odot}} \right)^{1/2} \left( \frac{T_s}{T_{s\odot}} \right)^{-2}, \text{ laquelle donne ici :}$$

$$R = (10^4)^{1/2} \left( \frac{3500}{5750} \right)^{-2} \times 696 \cdot 10^3 \approx 190 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

Il s'agit d'une valeur supérieure au demi-grand axe de l'orbite terrestre ( $150 \cdot 10^6$  km). Autour d'une telle étoile, Mercure Vénus et la Terre n'existeraient plus.

La relation température-masse-rayon  $\frac{T_0}{T_{\odot}} = \frac{m}{m_{\odot}} \frac{R_{\odot}}{R}$  donne ici :

$$T_0 = 10 \times \frac{696 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} \times 15 \cdot 10^6 \approx 550 \cdot 10^3 \text{ K}$$

et la relation pression-masse-rayon  $\frac{P_0}{P_{\odot}} = \left( \frac{m}{m_{\odot}} \right)^2 \left( \frac{R_{\odot}}{R} \right)^4$  :

$$P_0 = 10^2 \times \left( \frac{696 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} \right)^4 \times 1,36 \cdot 10^{16} \approx 2,4 \cdot 10^8 \text{ Pa.}$$

En appliquant l'équation d'état du gaz parfait on obtient :

$$\mu_0 = \frac{MP_0}{RT_0} = \frac{10^{-3} \times 2,4 \cdot 10^8}{8,31 \times 550 \cdot 10^3} \approx 0,053 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ pour un gaz neutre}$$

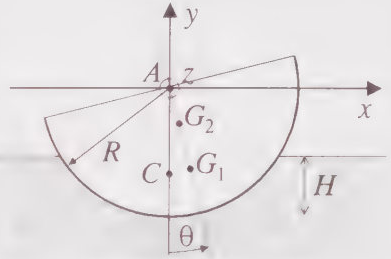
et la moitié pour un gaz entièrement ionisé. Il s'agit cette fois d'une densité très faible, vingt fois inférieure à celle de l'air. Ces étoiles sont presque « vides ».

## EXERCICE 4

### Équilibre d'un navire

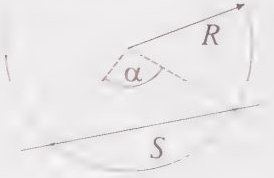
On représente un navire par un demi-cylindre creux de rayon  $R$ , de longueur  $L$ , de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G_1$ , partiellement immergé dans de l'eau au repos, de masse volumique  $\mu$ . Il renferme une cargaison de masse  $M$ , assimilée au point matériel  $G_2$ . Le problème étant supposé invariant par translation le long de l'axe  $Az$  de révolution du cylindre, on travaille dans le plan  $Axy$  vertical qui contient les points  $G_1$ ,  $G_2$  et le centre de force  $C$  de la poussée d'Archimède de l'eau. On ne tient pas compte de la poussée d'Archimède exercée par l'air.

La position dans l'eau est repérée par la profondeur immergée  $H$  et l'attitude dans le plan par l'angle  $\theta$  entre la droite  $AG_1$ , qui passe également par  $G_2$ , et la verticale  $Ay$ .



On donne  $AG_1 = \frac{2R}{\pi}$  et on note  $AG_2 = L$ .

1. Calculer la poussée d'Archimède  $\vec{\Pi}$  de l'eau pour  $H$  donnée et inférieure à  $R$  lorsque le navire est en équilibre. On rappelle que l'aire limitée par un cercle et une corde a pour valeur  $S = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2} R^2$ .



Est-elle modifiée lorsque le navire présente une inclinaison  $\theta$  ?

2. Quelle est pour cette valeur de  $H$  la masse de l'ensemble navire+cargaison ?

Représenter graphiquement  $\frac{m+M}{\mu LR^2}$  en fonction de  $X = \frac{H}{R}$  et montrer qu'une

graduation à peu près linéaire tracée sur la coque permet de connaître la masse de l'ensemble pour les valeurs de  $X$  pas trop proches de 0.

3. Pour éviter un risque de chavirement en cas de fort roulis, on ne dépasse pas  $X = \frac{2}{3}$ . Exprimer la masse maximale de la cargaison en fonction de  $m$ ,  $\mu$ ,  $L$  et  $R$ .

Faire l'application numérique pour un cargo avec les valeurs suivantes,  $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $L = 200 \text{ m}$ ,  $R = 10 \text{ m}$  et  $m = 9000 \text{ t}$ . On adopte pour la suite cette valeur calculée de  $M$ .

4. Quelle inclinaison maximale peut supporter le navire sans que l'eau n'atteigne le pont ? Faire l'application numérique.

5. Calculer le moment en  $G_1$  des forces exercées sur l'ensemble du navire pour une inclinaison  $\theta$ . L'exprimer en fonction de  $m$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $L$ ,  $R$  et  $\theta$ .

6. Le système est-il stable vis-à-vis du roulis ? Qu'en serait-il si la cargaison était placée au-dessus du pont ?

7. Le navire présente un léger mouvement de roulis et  $\theta$  reste suffisamment petit pour admettre que  $H$  ne varie pas.

- 7.1. On note  $\vec{G}$  le centre d'inertie de l'ensemble navire+cargaison. Exprimer le vecteur  $\vec{G_1G}$  en fonction de  $m$ ,  $M$  et du vecteur  $\vec{G_1G_2}$ .

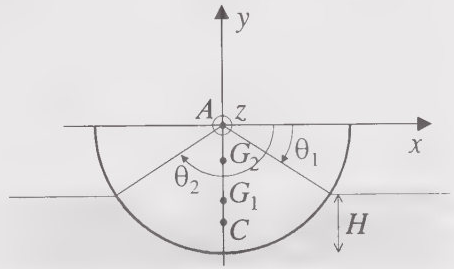
7.2. On note  $\mathcal{J}$  le moment d'inertie du navire (vide) par rapport à l'axe  $G_1z$ . Exprimer le moment cinétique en  $G$  de l'ensemble navire+cargaison en fonction de  $\mathcal{J}$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $L$  et  $\dot{\theta}$ .

7.3. Écrire le théorème du moment cinétique en  $G$ . En déduire l'équation linéaire vérifiée par  $\theta(t)$ .

7.4. Quelle est la période du mouvement de roulis ? Faire l'application numérique sachant que  $\mathcal{J} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mR^2$  et en prenant  $G_1$  et  $G_2$  confondus. On prendra par ailleurs  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

1. A l'équilibre l'angle  $\theta$  est nul. On peut calculer  $\bar{\Pi}$  en sommant les forces de pression exercées sur la partie immergée de la coque, mais il s'agit plus rapidement de l'opposé du poids d'eau déplacé par le navire, c'est-à-dire du poids du volume d'eau grisé sur la figure ci-contre. D'après la donnée géométrique de l'énoncé on a donc :

$$\bar{\Pi} = \mu g L \frac{\theta_2 - \theta_1 - \sin(\theta_2 - \theta_1)}{2} R^2 \bar{u}_y.$$



Avec  $\theta_1 = \text{Arcsin}\left(\frac{R-H}{R}\right)$  et  $\theta_2 = \pi - \theta_1$

on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \mu g L \frac{\pi - 2\theta_1 - \sin(2\theta_1)}{2} R^2 \bar{u}_y = \mu g L \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1 \right) R^2 \bar{u}_y \\ &= \mu g L \left( \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{R-H}{R}\right) - \left(\frac{R-H}{R}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{R-H}{R}\right)^2} \right) R^2 \bar{u}_y \\ &= \mu g L \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{R-H}{R}\right) - \frac{(R-H)\sqrt{H(2R-H)}}{R^2} \right] R^2 \bar{u}_y. \end{aligned}$$

Le volume situé au-dessous de la ligne de flottaison n'est pas modifié si on incline le bateau sans changer  $H$ . Donc cette force ne dépend pas de  $\theta$ .

2. A l'équilibre, la poussée d'Archimède compense exactement le poids et on a :

$$\mu g L \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{R-H}{R}\right) - \frac{(R-H)\sqrt{H(2R-H)}}{R^2} \right] R^2 = (m + M)g$$

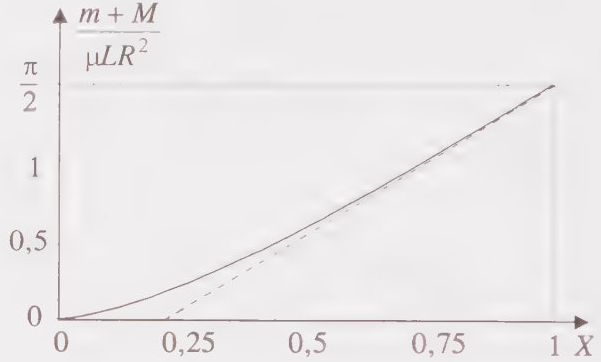
soit :

$$\begin{aligned} \frac{m+M}{\mu LR^2} &= \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{R-H}{R}\right) - \frac{(R-H)\sqrt{H(2R-H)}}{R^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(1-X) - (1-X)\sqrt{X(2-X)}. \end{aligned}$$

On trace ainsi la courbe ci-contre. La masse totale maximale vaut  $\frac{\pi}{2}\mu LR^2$ , ce qui correspond au poids de l'eau occupant tout le volume du demi-cylindre.

A partir de  $X \approx 0,6$  la relation entre  $X$  et la masse totale est quasi linéaire (droite en pointillés mixtes sur le graphe).

On peut par conséquent tracer sur la coque des traits horizontaux, régulièrement espacés suivant la verticale, indiquant une suite arithmétique de valeurs de la masse totale du navire. Il suffit de lire la valeur au niveau de la ligne de flottaison pour connaître celle-ci.



3. Avec  $X = \frac{2}{3}$  la relation précédente donne :

$$M = \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}} \right] \mu LR^2 - m \approx 0,917\mu LR^2 - m$$

et on obtient pour l'application numérique :

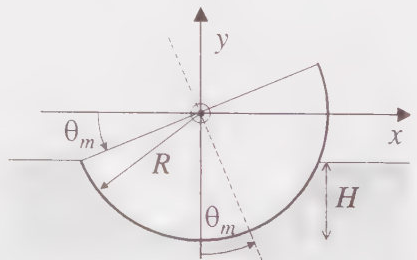
$$M = 0,917 \times 10^3 \times 200 \times 10^2 - 9 \cdot 10^6 = 9,33 \cdot 10^6 \text{ kg} = 9330 \text{ t.}$$

Puisqu'on adopte cette valeur, on a désormais  $X = \frac{2}{3}$ .

4. La situation extrême est représentée ci-contre et on a alors :

$$R \sin \theta_m = R - H, \text{ soit :}$$

$$\begin{aligned} \theta_m &= \text{Arcsin}\left(\frac{R-H}{R}\right) = \text{Arcsin}(1-X) \\ &\approx 19,5^\circ. \end{aligned}$$

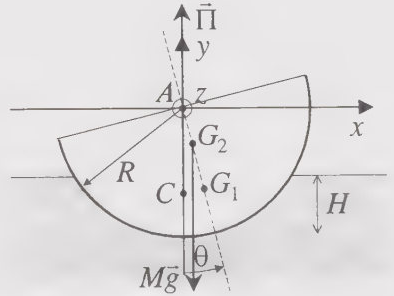


5. En ce point, le moment du poids du navire vide est nul et il reste, le centre de poussée étant toujours situé à la verticale de  $A$  puisque le volume de liquide déplacé ne dépend pas de  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{G_1} &= \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{G_1 C} \wedge \vec{\Pi} = \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge -Mg\vec{u}_y + (\overrightarrow{G_1 A} + \overrightarrow{AC}) \wedge \Pi\vec{u}_y \\ &= \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge -Mg\vec{u}_y + \overrightarrow{G_1 A} \wedge \Pi\vec{u}_y \end{aligned}$$

et en explicitant les produits vectoriels :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{G_1} &= \left[ -\left(\frac{2R}{\pi} - L\right)Mg + \frac{2R}{\pi}\Pi \right] \begin{vmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ &= \left[ \left(\frac{2R}{\pi} - L\right)Mg - \frac{2R\Pi}{\pi} \right] \sin\theta \vec{u}_z. \end{aligned}$$



Puisque la poussée d'Archimède compense exactement le poids total on a encore :

$$\vec{\mathcal{M}}_{G_1} = \left[ \left(\frac{2R}{\pi} - L\right)Mg - \frac{2R}{\pi}(m + M)g \right] \sin\theta \vec{u}_z = -g \left[ LM + \frac{2R}{\pi}m \right] \sin\theta \vec{u}_z.$$

6. Le navire n'est stable que si ce moment tend à le ramener dans sa position initiale après une perturbation ayant provoqué un roulis. Il faut donc que le moment soit orienté en sens inverse du vecteur déplacement angulaire  $\theta \vec{u}_z$ , ce qui est automatiquement vérifié du fait du signe négatif. Le navire est stable sans condition sur la position de la cargaison.

Si celle-ci était placée au-dessus du pont,  $L$  serait négatif et il faudrait que l'intérieur du crochet reste positif, ce qui imposerait l'inégalité :

$$-L < \frac{2R}{\pi} \frac{m}{M}.$$

7.1. Le centre d'inertie  $G$  de l'ensemble navire+cargaison est défini par :

$$m\overrightarrow{GG_1} + M\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}, \text{ soit } (m + M)\overrightarrow{GG_1} = -M\overrightarrow{GG_2} \text{ et donc :}$$

$$\overrightarrow{G_1 G} = \frac{M}{m + M} \overrightarrow{G_1 G_2}.$$

7.2. Le moment cinétique total en  $G$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_G &= \vec{\mathcal{L}}_G^{\text{navire}} + \vec{\mathcal{L}}_G^{\text{cargaison}} = \vec{\mathcal{L}}_{G_1}^{\text{navire}} + \overrightarrow{GG_1} \wedge m\vec{v}_{G_1} + \overrightarrow{GG_2} \wedge M\vec{v}_{G_2} \\ &= \mathfrak{I}\dot{\theta}\vec{u}_z + \overrightarrow{GG_1} \wedge m\vec{v}_{G_1} - \overrightarrow{GG_1} \wedge m\vec{v}_{G_2} = \mathfrak{I}\dot{\theta}\vec{u}_z + \overrightarrow{GG_1} \wedge m(\vec{v}_{G_1} - \vec{v}_{G_2}) \end{aligned}$$

et on explicite la vitesse relative :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{L}}_G &= \mathcal{J}\dot{\theta}\vec{u}_z + \overrightarrow{GG_1} \wedge m(\overrightarrow{G_1G_2} \wedge \dot{\theta}\vec{u}_z) = \mathcal{J}\dot{\theta}\vec{u}_z - \frac{M}{m+M}\overrightarrow{G_1G_2} \wedge m(\overrightarrow{G_1G_2} \wedge \dot{\theta}\vec{u}_z) \\ &= \mathcal{J}\dot{\theta}\vec{u}_z - \frac{Mm}{m+M} \left[ (\overrightarrow{G_1G_2} \cdot \dot{\theta}\vec{u}_z) \overrightarrow{G_1G_2} - G_1G_2^2 \dot{\theta}\vec{u}_z \right] \\ &= \mathcal{J}\dot{\theta}\vec{u}_z + \frac{Mm}{m+M} \left( \frac{2R}{\pi} - L \right)^2 \dot{\theta}\vec{u}_z = \left( \mathcal{J} + \frac{Mm}{m+M} \left( \frac{2R}{\pi} - L \right)^2 \right) \dot{\theta}\vec{u}_z.\end{aligned}$$

7.3. Le moment des forces en  $G$  s'écrit en vertu du théorème de transport :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{\mathcal{M}}_{G_1} + \overrightarrow{GG_1} \wedge (m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{\Pi}) = \vec{\mathcal{M}}_{G_1}$$

puisque, si  $H$  reste constant, la poussée d'Archimède ne varie pas et continue à compenser exactement le poids total. Le théorème du moment cinétique s'écrit donc

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_G}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G_1} \text{ et se projette en :}$$

$$\left( \mathcal{J} + \frac{Mm}{m+M} \left( \frac{2R}{\pi} - L \right)^2 \right) \ddot{\theta} = -g \left[ LM + \frac{2R}{\pi} m \right] \sin \theta$$

soit pour des petits mouvements :

$$\ddot{\theta} + \frac{g \left( LM + \frac{2R}{\pi} m \right)}{\mathcal{J} + \frac{Mm}{m+M} \left( \frac{2R}{\pi} - L \right)^2} \theta = 0.$$

7.4. Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J} + \frac{Mm}{m+M} \left( \frac{2R}{\pi} - L \right)^2}{g \left( LM + \frac{2R}{\pi} m \right)}}.$$

Avec  $\mathcal{J} = \left( 1 - \frac{4}{\pi^2} \right) mR^2$  et  $L = \frac{2R}{\pi}$  il vient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left( 1 - \frac{4}{\pi^2} \right) mR^2}{\frac{2Rg}{\pi} (M+m)}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left( 1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \times 9.10^6 \times 10^2}{2 \times 10 \times 10 \frac{9,33.10^6 + 9.10^6}{\pi}}} = 4,26 \text{ s.}$$

# SYSTEMES OUVERTS – THEOREME DE BERNOULLI

## EXERCICE 1

### Polaire d'une aile d'avion

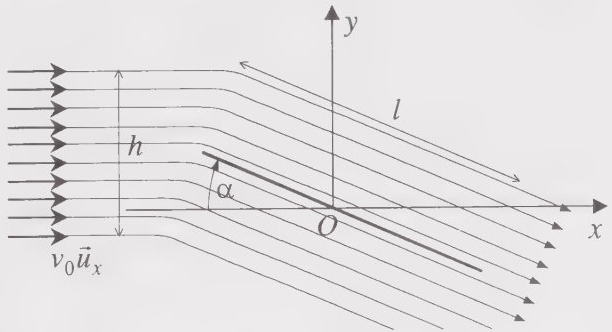
Une aile rectangulaire de longueur  $L$  et de largeur  $l$  se déplace dans un fluide parfait incompressible de masse volumique  $\mu$  à la vitesse constante  $\vec{V} = -v_0 \vec{u}_x$  et son plan est incliné de l'angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $Ox$ . Les coefficients aérodynamiques  $C_x$  et  $C_y$  sont définis tels que la force qu'exerce le fluide sur l'aile a pour expression :

$$\vec{F} = \frac{\mu L l V^2}{2} (C_x \vec{u}_x + C_y \vec{u}_y).$$

Le premier est appelé coefficient de traînée et le second coefficient de portance. On travaille dans le référentiel galiléen de l'aile et, dans celui-ci, le fluide semble arriver de l'infini à la vitesse  $v_0 \vec{u}_x$ .

On fait les deux hypothèses simplificatrices suivantes :

- la force de contact exercée par l'aile sur le fluide est normale à sa surface (pas de frottement),
- le fluide est dévié de manière collective sur une hauteur  $h$  et présente une vitesse uniforme  $\vec{v}$  parallèle à l'aile, après la déviation.



- 1.1. Quel est le débit massique  $D_m$  de fluide dévié par l'aile dans ces conditions ?
  - 1.2. Exprimer  $v = |\vec{v}|$  en fonction de  $v_0$  et  $\alpha$ . Qu'en déduit-on sur la hauteur du jet après la déviation ?
  - 1.3. Calculer la force qu'exerce l'aile sur l'écoulement à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement.
- 2.1. En déduire les expressions de  $C_x$  et de  $C_y$  en fonction de  $\alpha$ ,  $l$  et  $h$ .

2.2. Tracer la courbe représentant  $C_y$  en fonction de  $C_x$ , appelée polaire de l'aile, en supposant que  $h$  est une constante.

3. Le modèle adopté est extrêmement naïf mais il prévoit deux propriétés essentielles des ailes :

- la dépendance linéaire de  $C_y$  vis-à-vis de  $\alpha$  aux petites incidences.

- le décrochage aérodynamique, c'est-à-dire la chute de portance au-delà d'une certaine incidence critique.

3.1. Retrouver ces deux propriétés et calculer l'incidence critique de décrochage.

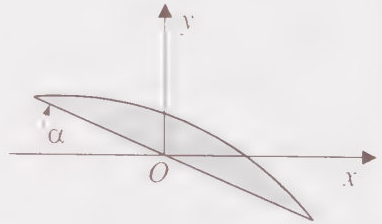
3.2. Quel domaine d'incidences faut-il utiliser en pratique ?

3.3. Quels sont les deux moyens de modifier l'altitude de vol de l'aile ? Lequel serait le plus avantageux dans le cadre de ce modèle pour une ascension ?

4. On conçoit intuitivement que  $h$  doit varier dans le même sens que la largeur  $l$  de l'aile. Si on suppose qu'il y a simplement proportionnalité, quelle importance pratique ceci a-t-il ?

5.1. Quel phénomène physique explique la portance de l'aile ? Quel phénomène supplémentaire explique que la forme ci-contre permet d'augmenter considérablement  $C_y$  ?

5.2. La polaire ne part pas de l'origine mais d'un point d'abscisse positive situé sur l'axe des  $C_x$ . Comment peut-on le justifier ?

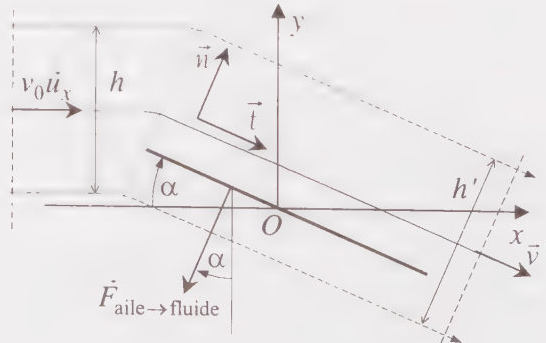


1.1. On calcule le flux, dans le sens de l'écoulement, du vecteur  $\mu \vec{v}$  à travers le rectangle de longueur  $L$  suivant  $Oz$  et de hauteur  $h$  suivant  $Oy$  :

$$D_m = \int \mu \vec{v}(M) \cdot d\vec{S} = \int \mu v_0 \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = \mu v_0 L h.$$

Comme il se conserve en régime stationnaire, il est plus simple de mener le calcul en amont de l'aile, où le champ de vitesse est connu.

1.2. On introduit une base définie par l'orientation de l'aile (Cf. ci-contre). La force de contact exercée par l'aile sur le fluide étant portée par le vecteur  $\vec{n}$ , la



projection sur  $\vec{t}$  de la quantité de mouvement du jet incident reste constante. On peut donc écrire la conservation de la projection de la vitesse suivant  $\vec{t}$  :

$$v_0 \vec{u}_x \cdot \vec{t} = v \cdot \vec{t}, \text{ soit } v = v_0 \cos \alpha.$$

La conservation du débit massique (ou volumique) permet d'exprimer la hauteur  $h'$  du jet après la déviation :

$$\mu v_0 L h = \mu v h' L, \text{ soit :}$$

$$h' = \frac{v_0 h}{v} = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

Il ne se conserve donc pas et on retrouve en fait l'angle  $\alpha$  entre l'axe  $Oy$  et le front dévié représenté en traits mixtes sur la figure précédente.

1.3. On utilise le volume de contrôle limité par les pointillés et grisé sur la figure. Pendant l'intervalle de temps  $dt$ , il sort de ce volume la quantité de mouvement  $\vec{v} D_m dt = v D_m dt \vec{t} = \mu v_0^2 \cos \alpha L h dt \vec{t}$  alors qu'il entre  $v_0 \vec{u}_x D_m dt = \mu v_0^2 L h dt \vec{u}_x$ . On a donc avec ces grandeurs élémentaires l'équation bilan en régime stationnaire de ce volume de fluide :

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{p}}{Dt} &= \frac{\mu v_0^2 \cos \alpha L h dt \vec{t} - \mu v_0^2 L h dt \vec{u}_x}{dt} = \vec{F}_{\text{aile} \rightarrow \text{fluide}} = \mu v_0^2 L h (\cos \alpha \vec{t} - \vec{u}_x) \\ &= \mu v_0^2 L h [(\cos^2 \alpha - 1) \vec{u}_x - \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}_y] \\ &= -\mu v_0^2 L h (\sin^2 \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}_y). \end{aligned}$$

2.1. On en déduit d'après le principe de l'action et de la réaction :

$$\vec{F} = -\vec{F}_{\text{aile} \rightarrow \text{fluide}} = \mu v_0^2 L h (\sin^2 \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}_y),$$

ce qui donne pour les coefficients aérodynamiques :

$$C_x = \frac{2h}{l} \sin^2 \alpha \quad \text{et} \quad C_y = \frac{2h}{l} \cos \alpha \sin \alpha.$$

On retrouve en particulier  $\tan \alpha = \frac{C_x}{C_y} = \frac{F_x}{F_y}$ , ce qui traduit le fait que la force de contact est normale au plan de l'aile, c'est-à-dire l'absence de frottement entre le fluide parfait et l'aile.

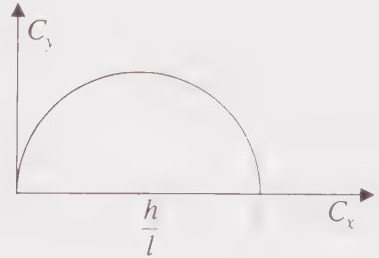
2.2. On élimine  $\alpha$  entre les deux en deux étapes :

$$C_x^2 + C_y^2 = \frac{4h^2}{l^2} \sin^4 \alpha + \frac{4h^2}{l^2} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{4h^2}{l^2} \sin^2 \alpha = \frac{2h}{l} C_x,$$

soit encore :

$$\left(C_x - \frac{h}{l}\right)^2 + C_y^2 = \frac{h^2}{l^2}.$$

Il s'agit d'un cercle, dans le plan  $C_x$ - $C_y$ , de centre  $\left(\frac{h}{l}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{h}{l}$ . Seules les valeurs positives ayant une signification, on ne trace que le demi-cercle supérieur.



3.1. Pour  $\alpha$  suffisamment petit, on peut linéariser les fonctions trigonométriques :

$\sin \alpha \approx \alpha$  et  $\cos \alpha \approx 1$ , ce qui donne :

$$C_x = \frac{2h}{l} \alpha^2 \text{ et } C_y = \frac{2h}{l} \alpha.$$

On voit qu'effectivement le coefficient de portance est proportionnel à  $\alpha$ .

L'expression exacte  $C_y = \frac{2h}{l} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{h}{l} \sin(2\alpha)$  montre que  $C_y$  est maximal pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  qui est donc l'incidence critique. Au-delà, le coefficient de portance décroît quand l'incidence augmente et l'aile « décroche ».

3.2. Il faut optimiser la portance et réduire la traînée pour qu'une aile puisse voler sans avoir à lutter contre une trop forte résistance de l'air. La courbe montre que le domaine le plus intéressant, évidemment tel que  $C_y$  est le plus grand possible relativement à  $C_x$ , est celui des faibles incidences. Plus on se rapproche du décrochage, plus la traînée augmente vite par rapport à la portance, ce qui est sans intérêt.

3.3. Pour modifier l'altitude, il faut rompre l'équilibre poids-portance, donc changer la portance. C'est possible en modifiant la vitesse (on accélère pour monter ou on ralentit pour descendre) ou en modifiant l'incidence de l'aile (on cabre pour monter ou on pique pour descendre). Dans le premier cas, on joue directement sur la portance elle-même, dans le second, on joue sur la valeur de  $C_x$ . Mais, on modifie la traînée dans les deux cas (même dans le second puisque  $C_x$  varie avec  $C_y$ ).

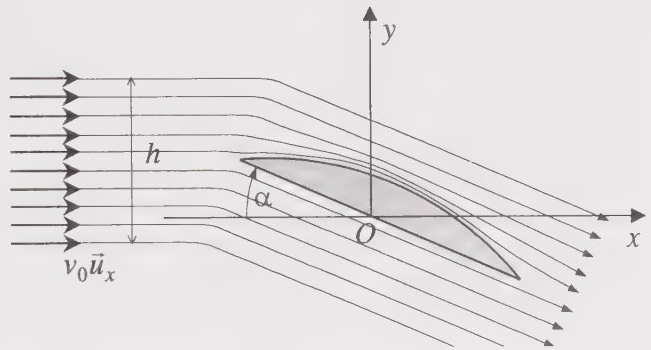
Pour une ascension, on augmente de la même manière portance et traînée en accélérant (les deux sont proportionnelles à  $v_0^2$ ) mais, puisqu'on utilise de faibles incidences, on augmente beaucoup plus la portance que la traînée en cabrant l'aile ( $C_x$  augmente moins vite avec  $\alpha$  que  $C_y$  quand  $\alpha$  est petit). La dépense énergétique

supplémentaire pour lutter contre l'accroissement de traînée est donc plus faible, ce qui est bien sûr plus avantageux.

4. Dans ce cas, le rapport  $\frac{h}{l}$  est indépendant de la largeur de l'aile et devient une constante numérique universelle. Toutes les ailes rectangulaires ont alors la même polaire et on peut ainsi prévoir leurs qualités aérodynamiques en vol en utilisant de simples modèles réduits en soufflerie.

5.1. La configuration inclinée de l'aile par rapport au jet permet de dévier celui-ci vers le bas. C'est le changement de quantité de mouvement du fluide qui crée par réaction de celui-ci sur l'aile la force  $\vec{F}$ .

Pour une aile de section bombée, les lignes de courant sont déformées par la face supérieure et se resserrent. Il y a donc une augmentation locale de la vitesse et, en vertu du théorème de Bernoulli, ceci s'accompagne d'une diminution de pression du fluide. On retrouve un effet Venturi et on a donc



une dépression relative sur la surface supérieure de l'aile. Elle tend à aspirer vers le haut et augmente ainsi la portance, indépendamment de la déviation du fluide vers le bas. Le coefficient  $C_y$  est donc plus élevé que pour une aile sans épaisseur.

5.2. Ceci signifie qu'il existe déjà une traînée sans portance, c'est-à-dire quand l'incidence est encore nulle. Cette traînée ne peut s'expliquer dans le cadre du fluide parfait et est donc associée à la viscosité. Il s'agit de la somme des contraintes tangentielles sur les deux faces de l'aile provenant de l'existence de la couche limite.

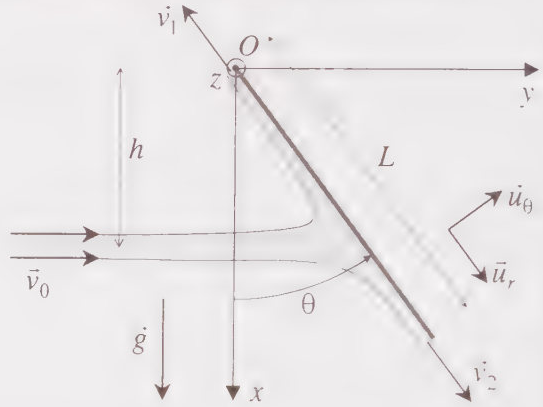
## EXERCICE 2

### Déviation d'une plaque par un jet

Une plaque rectangulaire de masse  $M$ , de côtés  $L$  et  $l$  et de centre d'inertie  $G$  peut tourner librement autour de l'axe  $Oz$  passant par un de ses côtés (liaison parfaite). Du fait de la pesanteur, elle adopte une position verticale d'équilibre. Un jet de fluide parfait incompressible, de masse volumique  $\mu$ , de section rectangulaire, de même largeur  $l$  suivant  $Oz$  que la plaque et dont on négligera l'épaisseur afin de considérer la vitesse uniforme sur toute section droite en aval, vient frapper celle-ci avec une vitesse horizontale  $\vec{v}_0$  à une cote  $h$  au-dessous de l'axe  $Oz$ .

La pression de l'air est uniforme et égale à  $P_0$ . On néglige l'action de la pesanteur sur le fluide mais pas sur la plaque. On se place en régime stationnaire et on suppose le problème invariant par translation sur la largeur du jet (suivant  $Oz$ ).

Sous les actions de la pesanteur et du jet la plaque s'incline et forme l'angle  $\theta$  avec la verticale. Le jet se divise ainsi en deux parties, l'une s'écoulant sur la plaque et la quittant à la vitesse  $\vec{v}_2$ , l'autre remontant le long de celle-ci et la quittant à la vitesse  $\vec{v}_1$ . Le débit massique incident est  $D_m$  et se partage en débits descendant  $D_2$  et ascendant  $D_1$ .



1. Montrer que  $v_1 = v_2 = v_0$  (modules des trois vitesses).

2.1. Calculer le débit net de moment cinétique en  $O$  entrant dans le volume de contrôle du jet, grisé sur la figure ci-dessus, en fonction de  $D_m$ ,  $v_0$  et  $h$ .

2.2. Quelle relation y a-t-il entre ce débit et la dérivée particulière  $\frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt}$  du moment cinétique du jet ?

3. Dédire du théorème du moment cinétique appliqué au jet l'expression du moment en  $O$   $\vec{\mathcal{M}}_{O_{pl} \rightarrow \text{jet}}$  des actions de contact de la plaque sur le jet en fonction de  $\frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt}$  et de l'intégrale  $P_0 \int_{S_{pl}} \overline{OM} \wedge d\vec{S}$ . On utilisera l'identité  $\int \overline{OM} \cdot d^2\vec{S} = \vec{0}$  sur toute surface fermée.

4. Appliquer le théorème du moment cinétique à la plaque pour obtenir une seconde expression de moment  $\vec{\mathcal{M}}_{O_{pl} \rightarrow \text{jet}}$ .

5. En déduire qu'à l'équilibre on a  $\sin \theta = \frac{2hv_0 D_m}{LMg}$ .

6. Comment faut-il positionner le jet par rapport à la plaque pour obtenir l'inclinaison maximale ? Pouvait-on le prévoir ? Que vaut alors celle-ci ?

7.1. Calculer le débit net de quantité de mouvement entrant dans le volume de contrôle du jet en fonction de  $D_m$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  et  $v_0$ .

7.2. Quelle relation y a-t-il entre ce débit et la dérivée particulière  $\frac{D\bar{p}}{Dt}$  de la quantité de mouvement du jet ?

8. Dédurre l'égalité  $D_2 - D_1 = D_m \sin \theta$  de la relation fondamentale de la dynamique. On se servira de l'identité  $\int d\vec{S} = \vec{0}$  sur toute surface fermée.

9. Donner les expressions de  $D_1$  et  $D_2$  en fonction de  $D_m$ ,  $h$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $\mu$ ,  $g$  et de la section  $\Sigma$  du jet incident.

10.1. Cette section est fixée et on pose désormais  $D_0 = \sqrt{\frac{\mu \Sigma L M g}{2h}}$ . Quelle est la dimension de cette constante ? En donner la signification physique et décrire qualitativement ce qui se passe quand  $D_m$  est supérieur à  $D_0$ .

10.2. Représenter graphiquement  $\frac{D_1}{D_0}$  et  $\frac{D_2}{D_0}$  en fonction de  $X = \frac{D_m}{D_0}$ .

11. Quelle est la plus grande valeur possible  $D_{1\max}$  de  $D_1$  pour  $D_0$  donné ? Quelle fraction de  $D_m$  représente-t-il alors ?

12. On prend  $\mu = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\Sigma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $M = 10 \text{ kg}$ ,  $L = 2 \text{ m}$ ,  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Calculer la valeur numérique de  $D_{1\max}$ , celle de  $D_m$  pour l'obtenir et celle de  $v_0$  dans le cas où le jet rencontre la plaque à sa partie inférieure.

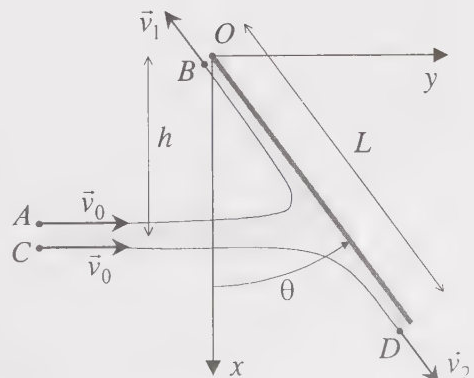
13. A partir de considérations énergétiques, donner une estimation de la durée dont a besoin la plaque pour atteindre sa position d'équilibre lorsque le jet apparaît. Faire l'application numérique avec les valeurs précédentes.

1. Le problème est invariant par translation le long de  $Oz$  et on raisonne systématiquement dans le plan  $Oxy$  de la figure de l'énoncé.

On écrit le théorème de Bernoulli le long des lignes de courant. Rigoureusement on a entre les points  $A$  et  $B$  :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_0}{\mu} - gh = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_0}{\mu}$$

mais le rôle de la pesanteur est négligé



geable sur l'écoulement et on ne tient pas compte du produit  $gh$ , ce qui donne simplement :

$$v_0 = v_A = v_B = v_1.$$

Le théorème de Bernoulli s'écrit de même entre  $C$  et  $D$  :

$$\frac{v_C^2}{2} + \frac{P_0}{\mu} - gh = \frac{v_D^2}{2} + \frac{P_0}{\mu} - gL \cos \theta.$$

En négligeant encore le terme de pesanteur on obtient  $v_0 = v_C = v_D = v_2$ . La vitesse reste en fait uniforme en module à la surface du jet, car la cote disparaît systématiquement quand on ne tient pas compte de la pesanteur, et dans le jet puisqu'on suppose la vitesse uniforme sur chaque section droite en l'absence de frottements internes dans un fluide parfait.

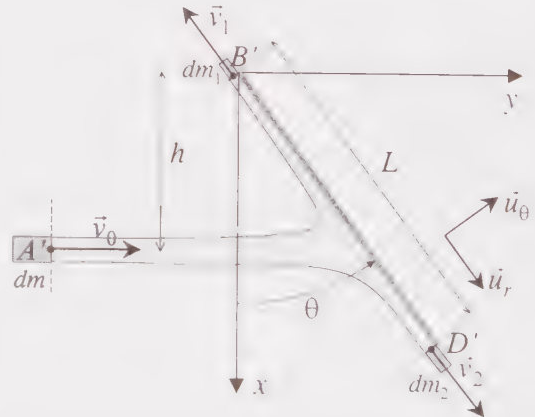
2.1. Pendant l'intervalle de temps  $dt$ , il entre dans le volume de contrôle  $\dot{V}$  du jet (limité par les trois sections en pointillés sur la figure ci-dessous) une masse élémentaire  $dm = D_m dt$  qui apporte le moment cinétique :

$$d\vec{\mathcal{L}}_{O_e} = \overrightarrow{OA'} \wedge dm \vec{v}_0 = hv_0 dm \vec{u}_z.$$

Pendant la même durée, il sort de ce volume de contrôle, au niveau des extrémités de la plaque, les masses  $dm_1 = D_1 dt$  et  $dm_2 = D_2 dt$ , emportant le moment cinétique :

$$d\vec{\mathcal{L}}_{O_s} = \overrightarrow{OB'} \wedge dm_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{OD'} \wedge dm_2 \vec{v}_2$$

qui peut être considéré nul quand on néglige l'épaisseur du jet. En effet,  $B'$  est quasi confondu avec  $O$  et  $\overrightarrow{OD'}$  est colinéaire à  $\vec{v}_2$ .



Finalement, par unité de temps, le volume de contrôle  $\dot{V}$  reçoit la quantité nette de moment cinétique :

$$\vec{D}_{\mathcal{L}} = \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O_e} - d\vec{\mathcal{L}}_{O_s}}{dt} = hv_0 \frac{dm}{dt} \vec{u}_z = hv_0 D_m \vec{u}_z.$$

2.2. Le système matériel défini à l'instant  $t$  par  $\dot{V}$  plus la masse  $dm$  s'est déplacé pendant  $dt$  pour occuper le volume défini par  $\dot{V}$  et celui des masses  $dm_1$  et  $dm_2$ . Son moment cinétique a varié pendant cet intervalle de temps infinitésimal et on a le bilan :

$$\frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt} = \frac{\vec{\mathcal{L}}_O(t+dt) - \vec{\mathcal{L}}_O(t)}{dt} = \frac{\vec{\mathcal{L}}_{O_{V'}} + d\vec{\mathcal{L}}_{O_S} - \vec{\mathcal{L}}_{O_{V'}} - d\vec{\mathcal{L}}_{O_e}}{dt} = \frac{-d\vec{\mathcal{L}}_{O_e}}{dt} = -\vec{D}_{\mathcal{L}}.$$

Il s'agit de la dérivée particulière par définition et le signe négatif devant le débit provient du fait que celui-ci a été défini comme entrant, ce qui est l'inverse des conventions habituelles.

3. Le théorème du moment cinétique s'écrit pour ce système :

$$\frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt} = \mathfrak{M}_{O_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}}} + \mathfrak{M}_{O_{\text{air} \rightarrow \text{jet}}}.$$

Le second moment s'écrit  $\mathfrak{M}_{O_{\text{air} \rightarrow \text{jet}}} = \int_{S^* - S_{\text{pl}}} \overline{OM} \wedge -P_0 d\vec{S}$ . L'intégrale porte sur la surface du fluide en contact avec l'air, c'est-à-dire la surface de contrôle fermée  $S^*$  moins celle  $S_{\text{pl}}$  de contact avec la plaque, et  $d\vec{S}$  est orienté suivant la normale sortante. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{O_{\text{air} \rightarrow \text{jet}}} &= -P_0 \int_{S^* - S_{\text{pl}}} \overline{OM} \wedge d\vec{S} = -P_0 \int_{S^*} \overline{OM} \wedge d\vec{S} + P_0 \int_{S_{\text{pl}}} \overline{OM} \wedge d\vec{S} \\ &= P_0 \int_{S_{\text{pl}}} \overline{OM} \wedge d\vec{S}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathfrak{M}_{O_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}}} = \frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt} - \mathfrak{M}_{O_{\text{air} \rightarrow \text{jet}}} = \frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt} - P_0 \int_{S_{\text{pl}}} \overline{OM} \wedge d\vec{S}.$$

4. La plaque étant immobile, la somme des moments en  $O$  des forces qu'elle subit est nulle :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overline{OG} \wedge M\vec{g} + \mathfrak{M}_{O_{\text{jet} \rightarrow \text{pl}}} + \mathfrak{M}_{O_{\text{air} \rightarrow \text{pl}}} \\ &= \frac{L}{2} \vec{u}_r \wedge Mg\vec{u}_x - \mathfrak{M}_{O_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}}} + \int_{S_{\text{pl}}} \overline{OM} \wedge -P_0 d\vec{S} \end{aligned}$$

et on obtient donc :

$$\mathfrak{M}_{O_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}}} = \frac{L}{2} \vec{u}_r \wedge Mg\vec{u}_x + \int_{S_{\text{pl}}} \overline{OM} \wedge -P_0 d\vec{S}.$$

5. En égalant les deux expressions de  $\mathfrak{M}_{O_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}}}$  il vient :

$$\frac{L}{2} \vec{u}_r \wedge Mg\vec{u}_x = -\frac{LMg}{2} \sin\theta \vec{u}_z = \frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt} = -\vec{D}_{\mathcal{L}} = -h\nu_0 D_m \vec{u}_z, \text{ donc :}$$

$$\sin \theta = \frac{2h\nu_0 D_m}{LMg}$$

6. Pour  $\nu_0$  et  $D_m$  donnés, on obtient la plus grande valeur de  $\theta$  en prenant  $h$  maximal tout en maintenant le jet sur la plaque, soit  $h = L \cos \theta$ . Au-delà, il n'y a plus de contact et  $\theta$  diminue sous l'action du poids de la plaque jusqu'à ce que ce contact soit retrouvé ou jusqu'à s'annuler si  $h > L$ . La valeur maximale vérifie donc :

$$\sin \theta = \frac{2\nu_0 D_m \cos \theta}{Mg}, \text{ soit } \tan \theta_{\max} = \frac{2\nu_0 D_m}{Mg}.$$

Il est normal qu'elle soit atteinte quand le jet frappe la plaque à son extrémité inférieure. C'est dans cette situation que le bras de levier est le plus grand.

7.1. Pendant l'intervalle de temps  $dt$ , la masse  $D_m dt$  entrant dans le volume de contrôle du jet apporte la quantité de mouvement :

$$d\bar{p}_e = dm \bar{v}_0 = D_m dt \nu_0 \bar{u}_y$$

et la masse sortante emporte la quantité de mouvement :

$$d\bar{p}_s = dm_1 \bar{v}_1 + dm_2 \bar{v}_2 = -D_1 dt \nu_0 \bar{u}_r + D_2 dt \nu_0 \bar{u}_r = (D_2 - D_1) dt \nu_0 \bar{u}_r$$

Finalement, par unité de temps, le volume  $V$  reçoit la quantité de mouvement :

$$\bar{D}_p = \frac{d\bar{p}_e - d\bar{p}_s}{dt} = [D_m \bar{u}_y + (D_1 - D_2) \bar{u}_r] \nu_0.$$

7.2. Le système matériel défini à l'instant  $t$  par le volume de contrôle  $V$  et la masse  $dm$  s'est déplacé pendant  $dt$  pour occuper le volume défini par  $V'$  et celui des masses  $dm_1$  et  $dm_2$ . Sa quantité de mouvement a varié de :

$$\frac{D\dot{p}}{Dt} = \frac{\dot{p}(t+dt) - \dot{p}(t)}{dt} = \frac{\bar{p}_{V'} - \dot{p}_{V'} - d\bar{p}_e}{dt} = \frac{d\bar{p}_s - d\bar{p}_e}{dt} = -\bar{D}_p.$$

Le signe négatif devant le débit provient encore du choix d'un débit entrant.

8. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au jet s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{p}}{Dt} &= \vec{F}_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}} + \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{jet}} = \vec{F}_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}} + \int_{S^*_{-S_{\text{pl}}}} -P_0 d\vec{S} \\ &= \vec{F}_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}} - P_0 \int_{S^*} d\vec{S} + P_0 \int_{S_{\text{pl}}} d\vec{S} = \vec{F}_{\text{pl} \rightarrow \text{jet}} + P_0 \int_{S_{\text{pl}}} d\vec{S}. \end{aligned}$$

Les deux forces sont colinéaires au vecteur  $\bar{u}_\theta$  et la projection sur  $\bar{u}_r$  de la dérivée particulière est donc nulle. On en déduit ainsi :

$$\bar{D}_p \cdot \bar{u}_r = [D_m \bar{u}_y \cdot \bar{u}_r + D_1 - D_2]v_0 = [D_m \sin \theta + D_1 - D_2]v_0 = 0$$

et finalement  $D_2 - D_1 = D_m \sin \theta$ .

9. Cette dernière relation combinée avec la conservation du débit  $D_2 + D_1 = D_m$  donne immédiatement :

$$D_2 = D_m \frac{1 + \sin \theta}{2} = D_m \left( \frac{1}{2} + \frac{h v_0 D_m}{LMg} \right) \text{ et :}$$

$$D_1 = D_m \frac{1 - \sin \theta}{2} = D_m \left( \frac{1}{2} - \frac{h v_0 D_m}{LMg} \right).$$

En écrivant  $D_m = \mu \Sigma v_0$  on peut éliminer la vitesse du jet incident :

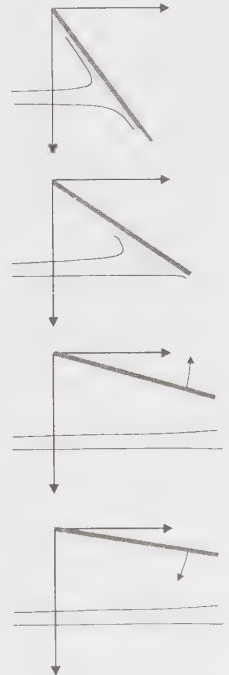
$$D_2 = D_m \left( \frac{1}{2} + \frac{h D_m^2}{\mu \Sigma LMg} \right) \text{ et } D_1 = D_m \left( \frac{1}{2} - \frac{h D_m^2}{\mu \Sigma LMg} \right).$$

10.1. En introduisant  $D_0$  on simplifie ces deux relations :

$$D_2 = \frac{D_m}{2} \left( 1 + \frac{D_m^2}{D_0^2} \right) \text{ et } D_1 = \frac{D_m}{2} \left( 1 - \frac{D_m^2}{D_0^2} \right).$$

On voit ainsi que  $D_0$  est homogène à un débit massique.

De plus, l'expression de  $D_1$  montre que  $D_0$  constitue une limite supérieure à la valeur de  $D_m$ . Au-delà de  $D_m = D_0$ , il n'y a plus de solution mathématique, donc plus d'équilibre possible. Ceci provient du fait que la poussée du jet dépasse dans ce cas le moment de rappel du poids. La plaque est alors repoussée suffisamment pour perdre le contact avec le jet (et  $D_1$  et  $D_2$  n'ont plus à être définis). Ensuite, selon l'énergie cinétique qu'elle a acquise, soit elle effectue une rotation complète si le jet est suffisamment puissant, soit elle revient vers lui après avoir atteint une cote maximale. Dans le premier cas, il y aura de nouveau contact après une rotation, de nouvelle répulsion et on obtient un mouvement circulaire entretenu par le jet. Dans le second cas, on aura une succession d'oscillations forcées de la plaque entretenues par le jet. C'est ce qui est représenté sur le dessin ci-contre. Dans les deux cas, on se trouve évidemment hors équilibre.

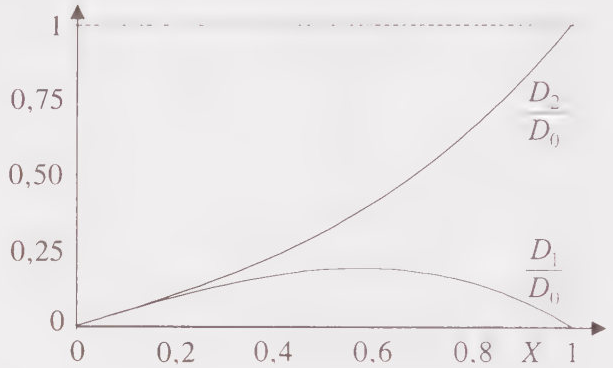


La limite  $D_0$  est donc la frontière entre les solutions statique et dynamique du problème.

10.2. On représente graphiquement les deux rapports sans dimension :

$$\frac{D_2}{D_0} = \frac{X}{2}(1+X^2) \text{ et } \frac{D_1}{D_0} = \frac{X}{2}(1-X^2) \text{ avec } X = \frac{D_m}{D_0}$$

Dans le domaine de valeurs utiles de  $X$ , c'est-à-dire entre 0 et 1, le premier est une fonction monotone croissante alors que le second présente obligatoirement un maximum puisque c'est une fonction positive et qu'elle vaut 0 aux bornes.



11. Le débit  $D_1$  est maximal pour (on voit sur la courbe ci-dessus qu'il n'y a qu'un maximum) :

$$\frac{d}{dX} \left[ \frac{X}{2}(1-X^2) \right] = 0 \text{ soit } \frac{1-3X^2}{2} = 0,$$

ce qui donne  $X = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et il vaut alors :

$$D_{1\max} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) D_0 = \frac{D_0}{3\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\mu \Sigma L M g}{54h}}$$

Cela représente la fraction  $\frac{D_1}{D_m} = \frac{D_1}{X D_0} = \frac{1}{3}$ .

12. On a alors  $\sin \theta = 1 - \frac{2D_1}{D_m} = \frac{1}{3}$ . Par ailleurs la valeur  $h$  est  $L \cos \theta$  quand le contact est à la partie inférieure de la plaque, ce qui donne :

$$\frac{h}{L} = \cos \theta = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

On obtient ainsi avec les valeurs numériques :

$$D_{1\max} = \sqrt{\frac{\mu \Sigma L M g}{54h}} = \sqrt{\frac{3\mu \Sigma M g}{108\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 1000 \times 5.10^{-3} \times 10 \times 10}{108\sqrt{2}}} = 3,13 \text{ kg.s}^{-1}$$

Le débit massique total est dans ce cas  $D_m = 3D_{1\max} = 9,40 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  et la vitesse du fluide :

$$v_0 = \frac{D_m}{\mu\Sigma} = \frac{9,40}{1000 \times 5 \cdot 10^{-3}} = 1,88 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

13. Pour passer de sa position verticale à son équilibre sous l'action du jet, la plaque a besoin d'acquérir la quantité d'énergie potentielle :

$$\Delta\mathcal{E}_p = Mg \frac{L}{2} (1 - \cos\theta).$$

Par ailleurs, le jet emporte un débit d'énergie cinétique :

$$D_{\mathcal{E}_c} = D_m \frac{v_0^2}{2}.$$

Le rapport des deux est homogène à un temps et correspond à peu près à la durée nécessaire pour que ce débit apporte l'énergie potentielle requise. On peut donc dire qu'il s'agit de l'ordre de grandeur de la durée recherchée.

Numériquement on a :

$$D_{\mathcal{E}_c} = D_m \frac{v_0^2}{2} = 9,40 \times \frac{1,88^2}{2} = 16,6 \text{ W et :}$$

$$\Delta\mathcal{E}_p = Mg \frac{L}{2} (1 - \cos\theta) = 10 \times 10 \times \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 5,72 \text{ J.}$$

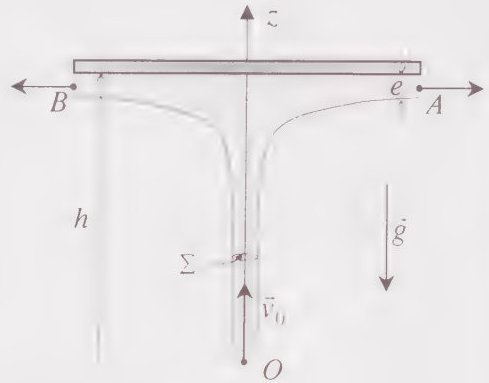
Leur rapport vaut 2,90 s. On peut donc estimer à la seconde l'ordre de grandeur de la durée recherchée. C'est une valeur qui apparaît réaliste.

## EXERCICE 3

### Sustentation d'une plaque

Une plaque de forme discale, de masse  $m$  et de rayon  $a$ , est maintenue en l'air malgré son poids par un jet vertical de fluide parfait incompressible, de masse volumique  $\mu$ , qui la frappe par sa face inférieure et est évacué radialement à sa périphérie. Ce jet est émis par une source située au voisinage du point  $O$ , avec un débit massique constant  $D_m$ , une vitesse d'éjection  $v_0$  sur sa section  $\Sigma$ . Il présente une symétrie de révolution autour de la verticale  $Oz$  qui est aussi l'axe de révolution de la plaque. Celle-ci se trouve à la hauteur  $h$  au-dessus de la source. La pression de l'air est uniforme et égale à  $P_0$ .

A la périphérie de la plaque (ensemble des points  $A$  ou  $B$ ) on note  $e$  l'épaisseur du jet et on la suppose a priori très inférieure à  $h$ , de manière à considérer la vitesse d'évacuation horizontale et uniforme en module sur cette épaisseur.



1.1. Exprimer la vitesse du fluide à la périphérie de la plaque en fonction de  $g$ ,  $h$  et de  $v_0$ . En déduire la valeur minimale de  $v_0$  pour que le système soit réalisable

1.2. Donner l'expression de  $e$  en fonction de  $v_0$ ,  $\Sigma$ ,  $a$ ,  $g$  et  $h$ .

2.1. Calculer le débit net de quantité de mouvement qui entre dans le jet.

2.2. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au fluide contenu dans le jet et en déduire l'expression de la force  $\vec{F}$  exercée sur la plaque en fonction de  $\mu$ ,  $\Sigma$ ,  $v_0$ ,  $a$ ,  $g$ ,  $P_0$  et de la masse  $M$  de fluide contenu dans le jet. On rappelle que  $\int d\vec{S} = \vec{0}$  sur toute surface fermée.

3.1. Quelle est la valeur  $v_m$  de  $v_0$  qui permet l'équilibre de la plaque ? On l'exprimera en fonction de  $\mu$ ,  $g$ ,  $m$  et  $\Sigma$  et on négligera  $M$  devant  $m$

3.2. Calculer numériquement  $v_m$  pour  $\mu = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\Sigma = 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $a = 20 \text{ cm}$ .

4. On suppose maintenant que la plaque n'est pas en équilibre mais que son mouvement (seulement vertical) est assez lent pour ne pas modifier l'expression de  $\vec{F}$  obtenue à la question 2.2.

4.1. Montrer que la plaque se stabilise à une hauteur précise si  $v_0 > v_m$  et qu'elle tombe sur la source si  $v_0 < v_m$ .

4.2. Représenter graphiquement la hauteur d'équilibre en fonction de  $v_0$ . Montrer que la plaque ne peut pas se stabiliser à une distance de la plaque inférieure à une certaine valeur seuil  $h_{\min}$ . Faire l'application numérique.

4.3. On prend  $v_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . A quelle hauteur se stabilise la plaque ?

5.1. Le modèle contient une incohérence. Laquelle ? On cherchera la valeur de  $e$  à l'altitude de stabilisation pour répondre.

5.2. Calculer la valeur numérique de  $h$  si on suppose  $e = \frac{h}{10}$ . Conclure sur le rôle de l'incohérence constatée.

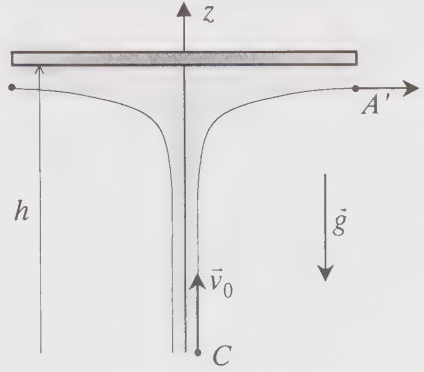
1.1. On est dans un état stationnaire et on peut donc écrire le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant située à la périphérie du jet (entre les points  $C$  et  $A'$ ) :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\mu} = \frac{v_{A'}^2}{2} + \frac{P_0}{\mu} + gh, \text{ d'où :}$$

$$v_{A'} = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Il faut que  $v_{A'}$  soit défini et donc  $v_0 > \sqrt{2gh}$ .

Sinon, le jet ne peut pas arriver à la hauteur de la plaque à cause de son propre poids.



1.2. Le débit massique se conserve dans le jet et les vitesses sont uniformes en module au niveau de la source et de la périphérie de la plaque en l'absence de frottements internes. On a donc l'égalité :

$$D_m = \mu \Sigma v_0 = \mu \times 2\pi a e v_{A'}, \text{ ce qui entraîne :}$$

$$e = \frac{\Sigma v_0}{2\pi a v_{A'}} = \frac{\Sigma v_0}{2\pi a \sqrt{v_0^2 - 2gh}} = \frac{\Sigma}{2\pi a \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}}.$$

2.1. A travers la surface de contrôle du jet on a un débit entrant de quantité de mouvement au niveau de  $\Sigma$  et un débit sortant à la périphérie de la plaque. Ce dernier est nul car, étant donnée la symétrie de révolution, les vecteurs élémentaires  $\mu \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$  s'annulent deux à deux à une même altitude. Le débit global entrant de quantité de mouvement est donc :

$$\vec{D}_p = \int_{\Sigma} \mu \vec{v}_0 (\vec{v}_0 \cdot d\vec{S} \vec{u}_z) = \int_{\Sigma} \mu \vec{v}_0 (v_0 dS) = \mu v_0^2 \Sigma \vec{u}_z.$$

2.2. En régime stationnaire, la dérivée particulaire de la quantité de mouvement du fluide traversant le volume du jet est égale au débit global sortant, c'est-à-dire à l'opposé du débit  $\vec{D}_p$  calculé. On écrit donc la relation fondamentale de la manière suivante, en faisant intervenir la force  $-\vec{F}$  qu'exerce la plaque sur le fluide, le poids

de celui-ci et la résultante des forces de pression de l'air sur la surface de contrôle  $\dot{S}^*$  du jet :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = -\vec{D}_p = -\vec{F} + M\vec{g} - \int_S P_0 d\vec{S},$$

le vecteur  $d\vec{S}$  étant orienté suivant la normale extérieure à la surface de contrôle. L'ensemble de  $\dot{S}^*$  et de la surface de contact  $S$  entre la plaque et le fluide constitue une surface fermée sur laquelle on a  $\int P_0 d\vec{S} = P_0 \int d\vec{S} = \vec{0}$  et on peut donc écrire :

$$-\vec{D}_p = -\vec{F} + M\vec{g} + P_0 \int_S d\vec{S} = -\vec{F} + M\vec{g} + P_0 \int_S dS \vec{u}_z = -\vec{F} + M\vec{g} + P_0 \pi a^2 \vec{u}_z.$$

le vecteur  $d\vec{S}$  étant orienté suivant la normale extérieure à la surface du fluide au niveau de la plaque, c'est-à-dire suivant  $+\vec{u}_z$ . Il vient finalement :

$$\vec{F} = \vec{D}_p + M\vec{g} + P_0 \pi a^2 \vec{u}_z = (\mu v_0^2 \Sigma - Mg + P_0 \pi a^2) \vec{u}_z.$$

3.1. La plaque restant immobile, la somme des forces qu'elle subit est nulle et on a en tenant compte de son poids, de l'action du jet et des forces de pression de l'air sur sa face supérieure :

$$m\vec{g} + \vec{F} - P_0 \pi a^2 \vec{u}_z = \vec{0}, \text{ soit } \vec{F} = P_0 \pi a^2 \vec{u}_z - m\vec{g}.$$

On en déduit l'égalité :

$$(\mu v_m^2 \Sigma - Mg + P_0 \pi a^2) \vec{u}_z = \vec{F} = mg \vec{u}_z + P_0 \pi a^2 \vec{u}_z, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{(M+m)g}{\mu \Sigma}} \approx \sqrt{\frac{mg}{\mu \Sigma}}.$$

Le débit de quantité de mouvement compense simplement le poids de la plaque.

3.2. On obtient numériquement :

$$v_m = \sqrt{\frac{5 \times 10}{1000 \times 10^{-3}}} = 7.07 \text{ m.s}^{-1}.$$

4.1. Le mouvement de la plaque étant vertical, on écrit la projection utile de la relation fondamentale, sachant que sa cote est  $h$  :

$$m\ddot{h} = F - mg - P_0 \pi a^2 = \mu v_0^2 \Sigma - Mg - mg \approx \mu v_0^2 \Sigma - mg = \mu \Sigma (v_0^2 - v_m^2).$$

On voit que l'accélération de la plaque est constante, notamment indépendante de  $h$  et de la vitesse avec laquelle le fluide s'écoule de sa périphérie.

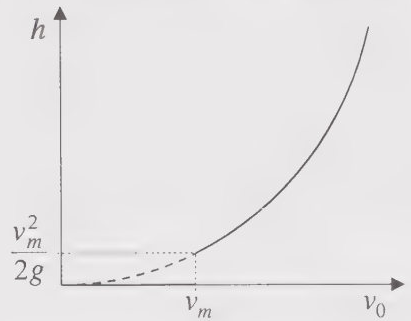
Si  $v_0 > v_m$ , elle est positive et la plaque monte donc tant que le contact avec le fluide est maintenu. Or le jet ne peut pas dépasser la hauteur  $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$  qui annule sa vitesse d'écoulement à la périphérie de la plaque. La plaque ne peut pas monter plus haut, car elle ne serait plus en contact avec le jet et retomberait jusqu'à ce que ce contact soit rétabli. La plaque se stabilise donc à cette altitude.

Si  $v_0 < v_m$  l'accélération est négative quel que soit  $h$ . La plaque tombe jusqu'au sol.

4.2. On obtient le graphique ci-contre. Pour une vitesse inférieure à  $v_m$  la plaque est au sol. Pour une vitesse supérieure, on a une loi parabolique. Il existe une discontinuité, la plaque ne pouvant s'approcher de la source à une distance inférieure à :

$$h_{\min} = \frac{v_m^2}{2g} = \frac{m}{2\mu\Sigma} \text{ sans tomber.}$$

Pour descendre plus bas, il faudrait une vitesse du jet incompatible avec la sustentation de la plaque.



Ceci donne numériquement :

$$h_{\min} = \frac{5}{2 \times 1000 \times 10^{-3}} = 2,50 \text{ m.}$$

4.3. On a dans ce cas :

$$h = \frac{10^2}{2 \times 10} = 5 \text{ m.}$$

5.1. On a montré que la plaque se stabilise à l'altitude qui annule en fait la vitesse avec laquelle le fluide la quitte. On a donc  $v_{A'} = 0$  et par conséquent l'épaisseur  $e$  du jet à la périphérie de la plaque est infinie (résultat de la question 1.2). La conservation du débit massique empêche bien sûr l'annulation physique de la vitesse et il faut en réalité comprendre que  $v_{A'}$  devient très faible et donc  $e$  très grand. Or ceci n'a pas de sens car cette épaisseur ne peut être supérieure à  $h$ . De plus, on a supposé  $\frac{e}{h} \ll 1$  pour mener nos calculs. On constate donc que l'hypothèse de départ n'est pas respectée par nos résultats. Le modèle n'est pas cohérent.

5.2. Pour  $e = \frac{h}{10}$  on peut encore admettre  $\frac{e}{h} \ll 1$  et on peut donc utiliser les formules obtenues, soit notamment :

$$\frac{h}{10} = e = \frac{\Sigma}{2\pi a \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}}, \text{ ce qui donne l'équation du troisième degré :}$$

$$\frac{h^2}{100} \left( 1 - \frac{2gh}{v_0^2} \right) = \frac{\Sigma^2}{4\pi^2 a^2}, \text{ et numériquement } h^2 \left( 1 - \frac{h}{5} \right) = 6.3326 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

Le membre de droite est très petit et on doit avoir  $h$  très proche de 5 m. On peut ainsi se contenter de l'équation approchée  $25 \left( 1 - \frac{h}{5} \right) = 6.3326 \cdot 10^{-5}$  qui donne sans résoudre l'équation du troisième degré  $h = 5 - 1,27 \cdot 10^{-5}$  m. On constate que la valeur de  $e$  a très peu d'influence sur celle de  $h$  puisque celle-ci vaut 5 m pour  $e$  infini. Il suffit donc de modifier notre résultat  $h = 5$  m obtenu avec une incohérence de quelques micromètres ( $\sim 13 \mu\text{m}$  !) pour obtenir une valeur de  $e$  compatible avec les hypothèses du modèle. L'incohérence n'est donc pas gênante en calculant  $h$  sans se préoccuper de la valeur de  $e$ . L'erreur commise n'est pas mesurable.

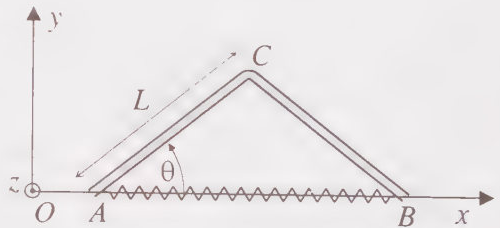
## EXERCICE 4

### Étude de stabilité dynamique

Une conduite est formée de deux tubes rigides identiques, de longueur  $L$  et de section  $s$ , réunis par un coude souple sans torsion. La section est suffisamment faible pour supposer l'entrée, la sortie et le coude ponctuels et définis par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Dans ces conditions, les forces de pression exercées en  $A$  et  $B$  sont négligeables.

On néglige également les forces de pesanteur. Un ressort est fixé en  $A$  et  $B$  et présente une raideur  $k$  et une longueur à vide  $l_0$ .

Un fluide incompressible, de masse volumique uniforme  $\mu$ , circule dans la conduite avec un débit volumique constant  $D_V$  dans le sens  $A \rightarrow B$ . Enfin, ces deux points sont astreints à se déplacer sur un axe  $Ox$  par des liaisons sans frottement.



1.1. En quel point l'action mutuelle conduite  $\leftrightarrow$  fluide s'exerce-t-elle ?

1.2. Calculer le débit global de quantité de mouvement du fluide circulant dans la conduite en régime stationnaire.

1.3. En déduire l'expression de la force  $\vec{F}$  exercée par l'écoulement sur la conduite en fonction de  $D_V$ ,  $\mu$ ,  $s$  et l'angle  $\theta$  formé par la conduite avec l'axe  $Ox$ .

1.4. Exprimer, en appliquant le principe fondamental de la dynamique à la conduite, les réactions qu'elle subit en  $A$  et en  $B$  en fonction des mêmes paramètres.

2. En raisonnant sur un seul tube, montrer que l'angle  $\theta$  est donné par :

$$\theta = 0 \text{ ou } \cos\theta = \frac{l_0}{\frac{\mu D_V^2}{ks} + 2L}.$$

Le ressort est-il allongé ou comprimé ?

3.1. Donner le principe de l'étude de stabilité de ces deux états stationnaires.

3.2. Faire cette étude pour les deux valeurs de  $\theta$  avec un minimum de calculs. On séparera les cas  $l_0 < 2L$  et  $l_0 > 2L$  et on précise que pour chaque valeur de  $D_V$ , il existe toujours au moins un état stable.

3.3. Représenter graphiquement  $\theta$  en fonction de  $D_V$  lorsque  $l_0 < 2L$ . On tracera en pointillés les états instables.

3.4. Reprendre la question précédente lorsque  $l_0 > 2L$ .

4.1. Quelles sont les coordonnées cartésiennes du point d'application de  $\vec{F}$  ?

4.2. Montrer que  $\vec{F}$  est conservative et calculer l'énergie potentielle associée, exprimée en fonction des coordonnées de  $C$ , puis de  $\theta$ .

4.3. On rappelle que l'énergie potentielle associée à un ressort de longueur instantanée  $l$  s'écrit  $\frac{k}{2}(l - l_0)^2$ . En déduire l'énergie potentielle du système ressort + conduite, exprimée en fonction de  $\theta$ .

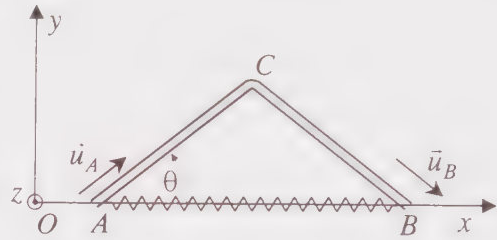
5. Retrouver énergétiquement les états stationnaires et discuter de leur stabilité.

1.1. Dans la première partie rectiligne de la conduite, le fluide n'est pas dévié et la somme des forces qu'il subit de la part du tuyau  $AC$  est donc nulle. Il en est de même dans la partie  $CB$  et ce ne peut par conséquent être qu'au niveau du coude que s'exerce l'action mutuelle, au point où le fluide est justement dévié.

1.2. Le débit de quantité de mouvement entrant en  $A$  dans la conduite est :

$$\bar{D}_{pA} = \int_S \mu \bar{v} (\bar{v} \cdot dS \bar{u}_A) = \int_S \mu v \bar{u}_A (v dS) = \mu v^2 s \bar{u}_A$$

puisqu'on peut considérer la vitesse uniforme sur toute section droite en l'absence de frottement. La conservation du débit volumique pour un fluide incompressible et l'uniformité de la section de la conduite font que la vitesse en sortie est identique à celle en entrée et on a donc le débit sortant en  $B$  :



$$\bar{D}_{pB} = \int_S \mu \bar{v} (\bar{v} \cdot dS \bar{u}_B) = \int_S \mu v \bar{u}_B (v dS) = \mu v^2 s \bar{u}_B.$$

Ainsi le débit global de quantité de mouvement sortant de la conduite, qui s'identifie à la dérivée particulaire en régime stationnaire, est :

$$\frac{D\bar{p}}{Dt} = \bar{D}_{pB} - \bar{D}_{pA} = \mu v^2 s (\bar{u}_B - \bar{u}_A)$$

et s'exprime en fonction du débit volumique la traversant, ici simplement égal à  $s v$  :

$$\frac{D\bar{p}}{Dt} = \frac{\mu D_V^2}{s} (\bar{u}_B - \bar{u}_A) = -\frac{2\mu D_V^2}{s} \sin\theta \bar{u}_y.$$

1.3. La relation fondamentale pour le volume du fluide contenu dans la conduite s'écrit, en ne prenant en compte que la force  $-\bar{F}$  qu'exerce la conduite sur celui-ci puisque les forces de pression exercées par l'air en  $A$  et  $B$  et son poids sont négligés :

$$\frac{D\bar{p}}{Dt} = -\bar{F}.$$

On en déduit :

$$\bar{F} = \frac{2\mu D_V^2}{s} \sin\theta \bar{u}_y.$$

1.4. On note  $\bar{R}_A$  la réaction de l'axe sur la conduite en  $A$  et  $\bar{R}_B$  la réaction en  $B$ . Ces liaisons étant sans frottement, elles sont orthogonales au déplacement éventuel de leur point d'application et s'écrivent respectivement  $\bar{R}_A = R_A \bar{u}_y$  et  $\bar{R}_B = R_B \bar{u}_y$ . On note par ailleurs  $\bar{F}_r$  la force de rappel qu'exerce le ressort en  $A$ . Elle s'écrit explicitement :

$$\bar{F}_r = k(AB - l_0) \bar{u}_x = k(2L \cos\theta - l_0) \bar{u}_x,$$

tirant le point  $A$  dans le sens des  $x$  croissants quand le ressort est allongé. Bien entendu la force de rappel exercée en  $B$  est égale et opposée à celle-ci.

La relation fondamentale appliquée à la conduite immobile donne :

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{F}_r - \vec{F}_r = \vec{0} \quad \text{et on en déduit :}$$

$$R_A + R_B + \frac{2\mu D_V^2}{s} \sin \theta = 0.$$

Le théorème du moment cinétique appliqué à la conduite s'écrit au point fixe  $C$  :

$$\vec{CA} \wedge \vec{R}_A + \vec{CB} \wedge \vec{R}_B + \vec{CC} \wedge \vec{F} + \vec{CA} \wedge \vec{F}_r - \vec{CB} \wedge \vec{F}_r = \vec{0}, \quad \text{soit :}$$

$$-L\vec{u}_A \wedge R_A\vec{u}_y + L\vec{u}_B \wedge R_B\vec{u}_y - L(\vec{u}_A + \vec{u}_B) \wedge \vec{F}_r = \vec{0}.$$

Avec  $\vec{u}_A + \vec{u}_B = 2 \cos \theta \vec{u}_x$  il vient :

$$-LR_A \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{u}_z + LR_B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{u}_z - 2L \cos \theta \vec{u}_x \wedge F_r \vec{u}_x = \vec{0},$$

soit simplement :

$$L \cos \theta (R_B - R_A) = 0$$

et on en déduit  $R_A = R_B$ . L'égalité tirée de la relation fondamentale donne alors :

$$R_A = R_B = -\frac{\mu D_V^2}{s} \sin \theta.$$

L'écoulement de fluide tend à soulever la conduite et les deux réactions sont de ce fait dirigées vers le bas. Leur égalité n'est pas surprenante car elle est nécessaire à l'annulation du moment des forces exercées sur la conduite.

On aurait également pu appliquer le théorème du moment cinétique en  $A$ . Dans ce cas, ce sont  $\vec{R}_A$  et  $\vec{F}_r$  qui disparaissent dans le produit vectoriel et on obtient une relation entre  $R_B$  et  $F$ , de laquelle on déduit  $R_B$  connaissant  $F$ . Ensuite, en appliquant le théorème du moment cinétique en  $B$ , on trouverait de la même manière l'expression de  $R_A$ .

2. En écrivant le théorème du moment cinétique pour le tube  $AC$  au point  $C$  on écarte l'action du fluide et l'action mutuelle des deux tubes et on a :

$$\vec{CA} \wedge \vec{R}_A + \vec{CA} \wedge \vec{F}_r = \vec{0}, \quad \text{soit :}$$

$$-L\vec{u}_A \wedge R_A \vec{u}_y - L\vec{u}_A \wedge k(AB - l_0)\vec{u}_x = -L \begin{vmatrix} \cos \theta & k(2L \cos \theta - l_0) \\ \sin \theta & -\frac{\mu D_V^2 \sin \theta}{s} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

On obtient ainsi une seule projection utile, sur  $Oz$  :

$$\frac{\mu D_V^2 \sin \theta \cos \theta}{s} + k(2L \cos \theta - l_0) \sin \theta = \left[ \frac{\mu D_V^2 \cos \theta}{s} + k(2L \cos \theta - l_0) \right] \sin \theta = 0$$

et l'angle  $\theta$ , s'il n'est pas nul, est donné par :

$$\cos \theta = \frac{l_0}{\frac{\mu D_V^2}{ks} + 2L}, \text{ soit } \theta_0 = \text{Arccos} \left( \frac{l_0}{\frac{\mu D_V^2}{ks} + 2L} \right).$$

La relation trois lignes au-dessus montre que la longueur du ressort  $2L \cos \theta$  est inférieure à sa longueur à vide. Il est donc comprimé. Par ailleurs, on voit que l'angle  $\theta_0$  n'existe que si cette longueur à vide n'est pas trop élevée.

Si  $\theta$  est nul, on ne peut savoir quel est l'état du ressort sans information sur les valeurs relatives de  $L$  et  $l_0$ .

3.1. A partir d'une des deux valeurs possibles de  $\theta$ , on imagine qu'une petite perturbation provoque un écartement  $\delta\theta$  et on regarde si la résultante des actions exercées par le fluide et le ressort sur la conduite a pour effet d'accentuer l'écartement ou s'oppose à  $\delta\theta$ .

3.2. Commençons par le cas  $l_0 < 2L$ . Pour  $\theta = 0$ , le ressort est allongé et tend en permanence à couder la conduite initialement droite. Un petit écart  $\delta\theta$ , par exemple positif, fait apparaître un moment en  $A$  de cette force dans le sens de l'axe  $Oz$ <sup>1</sup>. Il agit alors en ramenant  $A$  vers  $B$ , soit dans le sens d'une augmentation de  $\theta$ . La force exercée par l'écoulement  $\vec{F} = \frac{2\mu D_V^2}{s} \sin(\delta\theta) \vec{u}_y \approx \frac{2\mu D_V^2}{s} \delta\theta \vec{u}_y$  agit dans le même sens en tirant le point  $C$  vers le haut. Ainsi, la perturbation s'amplifie spontanément. Cet état est instable.

Pour  $\theta = \theta_0$ , angle bien défini pour  $l_0 < 2L$ , on ne peut connaître sans calcul l'effet des forces car, le ressort étant comprimé, il tend à redresser la conduite alors que la force exercée par l'écoulement, qui est une fonction croissante de  $\theta$ , agit encore en

<sup>1</sup> Un écart négatif l'orienterait en sens inverse.

sens inverse. Mais, puisque l'énoncé précise qu'il existe toujours un état stable, ce ne peut être que celui-ci et tout calcul est inutile.

Pour le cas  $l_0 > 2L$ , le ressort est en permanence comprimé et tend toujours à écarter les points  $A$  et  $B$ , agissant en sens inverse de la force exercée par l'écoulement. On ne peut donc pas discuter de la stabilité des deux états possibles sans calcul. L'angle  $\theta_0$  n'est défini que si  $l_0 < \frac{\mu D_V^2}{ks} + 2L$ , c'est-à-dire au-delà d'un certain débit minimal. Pour  $D_V < \sqrt{\frac{ks(l_0 - 2L)}{\mu}}$  on ne peut avoir que  $\theta = 0$  et cet état unique est donc stable. Au-delà, le calcul est inévitable.

La recherche de stabilité étant certainement plus simple autour de  $\theta = 0$ , menons le calcul pour ce seul état. On développe au premier ordre en  $\delta\theta$  le moment en  $C$  des forces s'exerçant sur le premier tube. D'après la question 2 on a :

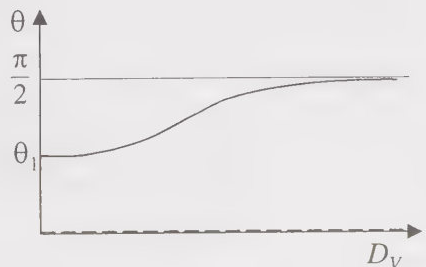
$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_C(\delta\theta) &= -L \begin{vmatrix} \cos(\delta\theta) & k(2L \cos(\delta\theta) - l_0) \\ \sin(\delta\theta) & -\frac{\mu D_V^2 \sin(\delta\theta)}{s} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= L \left[ \frac{\mu D_V^2 \sin(\delta\theta) \cos(\delta\theta)}{s} + k(2L \cos(\delta\theta) - l_0) \sin(\delta\theta) \right] \vec{u}_z \\ &\approx L \left[ \frac{\mu D_V^2 \delta\theta}{s} + k(2L - l_0) \delta\theta \right] \vec{u}_z = L \left[ \frac{\mu D_V^2}{s} + k(2L - l_0) \right] \delta\theta \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Lorsque  $D_V < \sqrt{\frac{ks(l_0 - 2L)}{\mu}}$  ce moment est dirigé en sens inverse de  $\vec{u}_z$  et tend à ramener le tube à l'horizontale. On a donc un état stable comme on l'avait remarqué juste avant le calcul. Par contre, lorsque  $D_V > \sqrt{\frac{ks(l_0 - 2L)}{\mu}}$  il devient instable et c'est par conséquent l'état  $\theta = \theta_0$  qui est stable.

3.3. Dans ce cas,  $\theta_0$  est défini pour toute valeur de  $D_V$  et correspond à l'état stable.

La courbe croît de manière monotone de  $\theta_1 = \text{Arccos}\left(\frac{l_0}{2L}\right)$  à  $\frac{\pi}{2}$  lorsque  $D_V$  varie de 0 à l'infini.

L'état  $\theta = 0$  est quant à lui toujours instable.

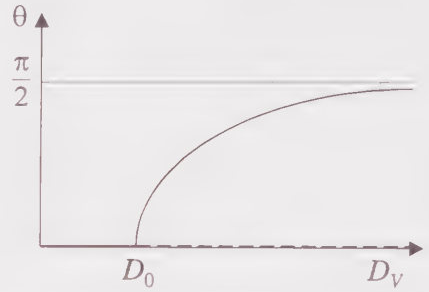


3.4. Ici,  $\theta_0$  n'existe que pour des valeurs de

$D_V$  supérieures à  $D_0 = \sqrt{\frac{ks(l_0 - 2L)}{\mu}}$  et

croît monotonement de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  lorsque  $D_V$

varie de  $D_0$  à l'infini. En deçà, c'est  $\theta = 0$  qui correspond à l'état stable, alors qu'il devient instable au-delà.



4.1. L'action du liquide sur la conduite s'exerce au coude, c'est-à-dire au point  $C$  de coordonnées :

$$x_C = L \cos \theta \quad \text{et} \quad y_C = L \sin \theta.$$

4.2. La force exercée par l'écoulement sur la conduite s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{2\mu D_V^2}{s} \sin \theta \vec{u}_y \quad \text{et on voit qu'elle se met sous la forme :}$$

$$\vec{F} = \frac{2\mu D_V^2}{sL} L \sin \theta \vec{u}_y = \frac{2\mu D_V^2}{sL} y_C \vec{u}_y = \frac{\partial}{\partial y_C} \left( \frac{\mu D_V^2}{sL} y_C^2 \right) \vec{u}_y = -\text{grad} \left( -\frac{\mu D_V^2}{sL} y_C^2 \right).$$

Elle est par conséquent conservative et l'énergie potentielle s'écrit :

$$\mathcal{E}_{p\vec{F}} = -\frac{\mu D_V^2}{sL} y_C^2 + \text{cte} = -\frac{\mu D_V^2 L}{s} \sin^2 \theta + \text{cte}.$$

4.3. L'énergie potentielle totale est par conséquent :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{\mu D_V^2 L}{s} \sin^2 \theta + \frac{k}{2} (2L \cos \theta - l_0)^2 + \text{cte}.$$

La cte est inessentielle et on peut toujours la prendre nulle pour la suite.

5. Les équilibres correspondent à des minima de l'énergie potentielle relativement à la variable de position, c'est-à-dire à une dérivée première par rapport à  $\theta$  nulle et une dérivée seconde positive. On calcule donc successivement :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} &= -\frac{2\mu D_V^2 L}{s} \sin \theta \cos \theta - 2k(2L \cos \theta - l_0)L \sin \theta \\ &= 2L \sin \theta \left[ k(l_0 - 2L \cos \theta) - \frac{\mu D_V^2}{s} \cos \theta \right] = 2L \sin \theta \left[ kl_0 - \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL \right) \cos \theta \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\theta^2} &= 2L \cos \theta \left[ kl_0 - \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL \right) \cos \theta \right] + 2L \sin \theta \left[ \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL \right) \sin \theta \right] \\ &= 2L(1 - 2 \cos^2 \theta) \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL \right) + 2Lkl_0 \cos \theta.\end{aligned}$$

On a gardé la seule fonction  $\cos \theta$  dans l'expression de la dérivée seconde de manière à simplifier la discussion de son signe.

On annule ensuite la dérivée première pour trouver les états stationnaires, ce qui donne :

$\sin \theta = 0$  et donc  $\theta = 0$  ( $\pi$  est exclus), ou :

$$\cos \theta = \frac{kl_0}{\frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL} \quad \text{et donc} \quad \theta = \text{Arccos} \left( \frac{kl_0}{\frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL} \right).$$

On regarde enfin le signe de la dérivée seconde pour ces deux valeurs :

$$\left( \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} = -2L \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL \right) + 2Lkl_0 = 2Lk \left( l_0 - 2L - \frac{\mu D_V^2}{sk} \right).$$

Elle est positive pour  $l_0 - 2L - \frac{\mu D_V^2}{sk}$  positif et  $\theta = 0$  correspond donc un équilibre à cette condition. Ensuite :

$$\begin{aligned}\left( \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right)_{\theta=\text{Arccos}(\ )} &= 2L \left[ 1 - 2 \frac{k^2 l_0^2}{\left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL \right)^2} \right] \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL \right) + \frac{2Lk^2 l_0^2}{\frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL} \\ &= 2L \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL \right) - \frac{2Lk^2 l_0^2}{\frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL} \\ &= \frac{2L}{\frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL} \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL - kl_0 \right) \left( \frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL + kl_0 \right).\end{aligned}$$

Cette valeur est positive pour  $\frac{\mu D_V^2}{s} + 2kL - kl_0$  positif et  $\theta = \theta_0$  à cette condition.

On retrouve finalement les mêmes résultats que par l'étude dynamique, mais cette fois sans a priori sur l'existence ou non d'au moins un état stable.

# FLUIDES PARFAITS NON STATIONNAIRES

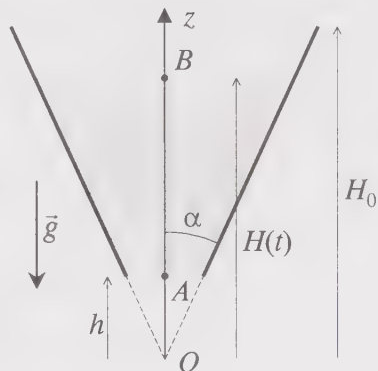
## EXERCICE 1

### Vidange d'un récipient conique

Un récipient de forme conique, d'axe de révolution  $Oz$ , d'angle au sommet  $\alpha$ , est limité par les deux surfaces ouvertes  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  situées aux cotes respectives  $H_0$  et  $h$ . Il est initialement entièrement rempli d'un fluide parfait incompressible de masse volumique  $\mu$ . La pression de l'air à l'extérieur est uniforme et égale à  $P_0$ .

Sous l'action de la pesanteur, il commence à s'écouler par l'orifice inférieur avec une vitesse initiale nulle. On repère par la cote  $H(t)$  le niveau supérieur du fluide au cours du temps et on note  $S(z)$  la section du récipient à une cote donnée. L'angle  $\alpha$  du cône est suffisamment petit pour admettre que le champ de vitesse est de la forme  $\vec{v}(M) = v(z, t)\vec{u}_z$ , mais sans pouvoir

écrire  $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z}$  pour autant.



1.1. Justifier cette dernière remarque.

1.2. Donner l'équation macroscopique équivalente à  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  en définissant le débit volumique. En déduire que le champ de vitesse s'écrit  $\vec{v}(M) = \frac{S(H)\dot{H}}{S(z)}\vec{u}_z$ .

1.3. Expliciter  $S(z)$  en utilisant l'angle  $\alpha$ . En déduire l'expression de  $\vec{v}$  en fonction de  $H$ ,  $\dot{H}$  et  $z$ .

2.1. Écrire l'équation d'Euler dans le fluide. Quelle difficulté fait-elle apparaître ?

2.2. On suppose a priori que le terme inertiel est petit devant l'accélération locale. Justifier cette nouvelle approximation et intégrer dans ce cas l'équation sur la ligne reliant les points  $A$  et  $B$  définis sur la figure précédente.

2.3. En déduire l'équation différentielle du niveau et montrer qu'elle s'écrit :

$$H\ddot{H} + 2\dot{H}^2 = -gh.$$

2.4. Intégrer une fois cette équation, en posant  $u = \left(\frac{H}{H_0}\right)^3$ , pour se ramener à une équation de la forme  $\dot{H} = f(H)$ .

2.5. On donne l'expression approchée :

$$\int_0^x \frac{x'^2 dx'}{\sqrt{1-x'^4}} \approx \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{14} + \frac{41x^{29}}{210} \quad \text{pour } x \leq 1.$$

Exprimer la durée  $\tau$  nécessaire à la vidange complète du récipient en fonction de  $H_0$ ,  $h$  et  $g$ .

2.6. Faire l'application numérique pour  $H_0 = 50$  cm,  $h = 10$  cm et  $g = 10$  m.s<sup>-2</sup>. Commenter sa valeur. N'est-il pas surprenant que  $\tau$  ne dépende pas de  $\alpha$  ?

2.7. Montrer, a posteriori, qu'on ne peut pas négliger le terme inertiel comme on l'a fait.

3. On recherche la même durée en supposant que le régime est quasi permanent dans le réservoir.

3.1. A quelle condition sur  $h$  et  $H_0$  cette hypothèse est-elle acceptable ?

3.2. Appliquer alors le théorème de Bernoulli entre  $A$  et  $B$  et établir la nouvelle équation différentielle  $\dot{H} = f(H)$ .

3.3. On donne  $\int_1^x \sqrt{(x'+1)(x'^2+1)} dx' \approx \frac{2}{5}(x^{5/2}-1) + \frac{59}{48}(x-1)$ . Exprimer la

durée  $\tau'$  de vidange du récipient en fonction de  $H_0$ ,  $h$  et  $g$ . Donner une expression approchée compte tenu de la réponse à la question 3.1.

3.4. Quelle remarque peut-on faire en comparant  $\tau$  et  $\tau'$  ? En déduire une conclusion définitive sur la validité de l'expression de  $\tau$ .

4.1. On peut résoudre numériquement l'équation différentielle suivante avec les conditions initiales  $H = H_0$  et  $\dot{H} = 0$  :

$$H\ddot{H} + 2\dot{H}^2 - \frac{\dot{H}^2}{2h^3}(h+H)(h^2+H^2) = -gh$$

pour trouver l'instant  $\tau''$  auquel on a  $H = h$ . On obtient la solution approchée

$$\tau'' = 1,038 \frac{H_0}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{H_0}\right)^2}. \text{ La comparer à } \tau' \text{ et commenter.}$$

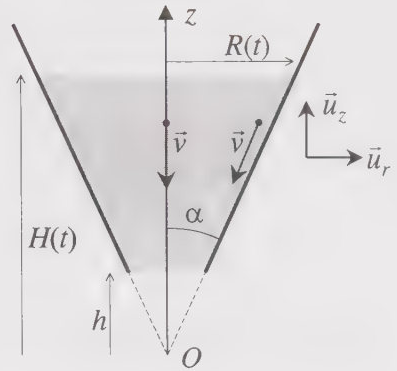
4.2. Calculer  $\tau'$  et  $\tau''$  pour les valeurs numériques données à la question 2.6. Laquelle des trois valeurs  $\tau$ ,  $\tau'$  et  $\tau''$  semble la plus réaliste ?

1.1. Lorsque l'angle  $\alpha$  est petit, la composante radiale  $v_r$  du champ de vitesse est petite devant la composante longitudinale  $v_z$ .

En effet, près des bords on a  $\frac{v_r}{v_z} \sim \tan \alpha$  et

par symétrie on a sur l'axe  $\frac{v_r}{v_z} = 0$ . Comme

le rapport des deux composantes doit avoir un comportement régulier, on peut raisonnablement prévoir qu'il sera partout compris entre 0 et  $\tan \alpha$ .



En revanche, en ce qui concerne les dérivées partielles, les ordres de grandeur sont :

$$\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right| \sim \frac{v_z}{H-h} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial v_r}{\partial r} \right| \sim \frac{v_r}{R}.$$

On en déduit :

$$\frac{\frac{\partial v_z}{\partial z}}{\frac{\partial v_r}{\partial r}} \sim \frac{\frac{v_z}{H-h}}{\frac{v_r}{R}} = \frac{v_z R}{v_r (H-h)} = \frac{v_z H \tan \alpha}{v_r (H-h)}$$

et on voit que ce rapport est de l'ordre de 1. Donc :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ne peut pas être limité au seul dernier terme.

1.2. On remplace alors l'équation de continuité du fluide incompressible  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  par sa forme intégrale  $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$  sur toute surface fermée, ce qui signifie que le débit volumique à travers une section transversale :

$$D_V = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{v} \cdot dS \vec{u}_z \approx v(z, t) S(z)$$

est uniforme dans le fluide et ne dépend ainsi que du temps.

En particulier on peut l'écrire au niveau  $H(t)$  de la surface libre du fluide :

$$D_V = v(H) S(H) = \dot{H} S(H) \quad \text{et on obtient ainsi :}$$

$$v(z, t) = \frac{D_V(t)}{S(z)} = \frac{\dot{H} S(H)}{S(z)}, \quad \text{ce qui donne bien :}$$

$$\vec{v}(M) = \frac{S(H) \dot{H}}{S(z)} \vec{u}_z.$$

1.3. A une cote  $z$  donnée, le rayon du cône est  $r = z \tan \alpha$  et l'aire de la section droite s'écrit par conséquent :

$$S(z) = \pi r^2 = \pi z^2 \tan^2 \alpha.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\vec{v}(M) = \frac{\pi H^2 \tan^2 \alpha \dot{H}}{\pi z^2 \tan^2 \alpha} \vec{u}_z = \frac{H^2(t) \dot{H}(t)}{z^2} \vec{u}_z.$$

2.1. L'équation d'Euler s'écrit ici :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\operatorname{grad}}) \vec{v} = -\frac{\overline{\operatorname{grad} P}}{\mu} + \vec{g}$$

et se projette sur la verticale en :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} - g.$$

On ne peut pas négliger l'opérateur  $v_r \frac{\partial}{\partial r}$ , qui est de l'ordre de  $\frac{v_r}{R}$ , devant  $v_z \frac{\partial}{\partial z}$ , qui est de l'ordre de  $\frac{v_z}{H-h}$  d'après ce qu'on a vu à la question 1.1. Ceci nous contraint à garder trois inconnues dans l'équation.

Par contre, les deux autres projections montrent que les dérivées du champ de pression par rapport aux coordonnées horizontales sont petites devant  $\frac{\partial P}{\partial z}$  et on peut par conséquent considérer que  $P$  est de la forme  $P(z, t)$ .

2.2. Dans un récipient de forme cylindrique on aurait exactement  $\vec{v}(M) = v(z, t)\vec{u}_z$  et l'équation de continuité du fluide incompressible s'écrirait  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . Le terme inertiel  $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$  serait identiquement nul alors que l'accélération locale  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  ne le serait pas (il est aisé de vérifier qu'elle serait égale à  $\vec{g}$ ). On peut donc supposer que pour les faibles valeurs de  $\alpha$ , qui font ressembler notre récipient à un cylindre, ce terme reste petit devant l'accélération locale.

Dans ce cas on retient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad \text{et l'intégration donne le long de la ligne de courant :}$$

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\partial v}{\partial t} dz &= \int_A^B \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H^2 \dot{H}}{z^2} \right) dz = \int_A^B \frac{d}{dt} (H^2 \dot{H}) \frac{dz}{z^2} = \frac{d}{dt} (H^2 \dot{H}) \left( \frac{1}{z_A} - \frac{1}{z_B} \right) \\ &= - \int_A^B \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} dz - \int_A^B g dz = \frac{P_A - P_B}{\mu} - g(z_B - z_A). \end{aligned}$$

Il vient ainsi :

$$\frac{d}{dt} (H^2 \dot{H}) \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{H(t)} \right) = -g(H(t) - h).$$

2.3. Cette équation s'écrit encore :

$$\frac{d}{dt} (H^2 \dot{H}) \frac{H - h}{hH} = -g(H - h) \quad \text{et en explicitant la dérivée :}$$

$$H^2 \ddot{H} + 2H\dot{H}^2 = -gHh,$$

ce qui donne finalement en divisant par  $H$  :

$$H\ddot{H} + 2\dot{H}^2 = -gh.$$

2.4. On pose  $H = H_0 u^{1/3}$  et on calcule les deux dérivées temporelles :

$$\dot{H} = H_0 \frac{u^{-2/3} \dot{u}}{3}, \quad \ddot{H} = \frac{H_0}{3} \left( u^{-2/3} \ddot{u} - \frac{2}{3} u^{-5/3} \dot{u}^2 \right).$$

On reporte ces expressions dans l'équation différentielle :

$$\frac{H_0^2}{3} \left( u^{-1/3} \ddot{u} - \frac{2}{3} u^{-4/3} \dot{u}^2 \right) + 2H_0^2 \frac{u^{-4/3} \dot{u}^2}{9} = -gh$$

et, la dérivée première disparaissant, il vient :

$$\ddot{u} = -\frac{3gh}{H_0^2} u^{1/3}.$$

L'intégration peut se faire en multipliant chaque membre par  $\dot{u}$  et donne :

$$\frac{\dot{u}^2}{2} = -\frac{9gh}{4H_0^2} u^{4/3} + \text{cte.}$$

A l'instant initial on a  $u = 1$  et  $\dot{u} = 0$ , ce qui détermine la constante et il vient :

$$\frac{\dot{u}^2}{2} = \frac{9gh}{4H_0^2} (1 - u^{4/3}).$$

Il reste à revenir aux grandeurs physiques sachant que  $\dot{u} = \frac{3\dot{H}}{H_0} u^{2/3}$  :

$$\frac{9\dot{H}^2}{H_0^2} \left( \frac{H}{H_0} \right)^4 = \frac{9gh}{2H_0^2} \left( 1 - \left( \frac{H}{H_0} \right)^4 \right), \text{ d'où finalement :}$$

$$\dot{H}^2 = \frac{gh}{2} \left( \left( \frac{H_0}{H} \right)^4 - 1 \right).$$

Le niveau ne peut que baisser au cours du temps et on obtient donc :

$$\dot{H} = -\sqrt{\frac{gh}{2}} \sqrt{\left( \frac{H_0}{H} \right)^4 - 1}.$$

2.5. Cette équation s'écrit encore en introduisant  $X(t) = \frac{H(t)}{H_0}$  :

$$\frac{\dot{H}}{\sqrt{\left( \frac{H_0}{H} \right)^4 - 1}} = -\sqrt{\frac{gh}{2}} = \frac{H^2 \dot{H}}{\sqrt{H_0^4 - H^4}} = H_0 \frac{\left( \frac{H}{H_0} \right)^2 \dot{H}}{\sqrt{1 - \left( \frac{H}{H_0} \right)^4}} = H_0 \frac{X^2 \dot{X}}{\sqrt{1 - X^4}}$$

et s'intègre formellement en :

$$\int_1^{X(t)} \frac{X'^2 dX'}{\sqrt{1-X'^4}} = -\frac{1}{H_0} \sqrt{\frac{gh}{2}} t \quad \text{puisque } X(0)=1.$$

La durée recherchée correspond à  $X = \frac{h}{H_0}$  et vérifie par conséquent :

$$\tau = -H_0 \sqrt{\frac{2}{gh}} \int_1^{h/H_0} \frac{X'^2 dX'}{\sqrt{1-X'^4}} = H_0 \sqrt{\frac{2}{gh}} \int_{h/H_0}^1 \frac{X'^2 dX'}{\sqrt{1-X'^4}}.$$

En utilisant le résultat donné par l'énoncé on obtient :

$$\begin{aligned} \tau &= H_0 \sqrt{\frac{2}{gh}} \left( \int_0^1 - \int_0^{h/H_0} \right) \frac{X'^2 dX'}{\sqrt{1-X'^4}} \\ &= H_0 \sqrt{\frac{2}{gh}} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{41}{210} - \frac{h^3}{3H_0^3} - \frac{h^7}{14H_0^7} - \frac{41h^{29}}{210H_0^{29}} \right) \\ &= H_0 \sqrt{\frac{2}{gh}} \left( \frac{126}{210} - \frac{h^3}{3H_0^3} - \frac{h^7}{14H_0^7} - \frac{41h^{29}}{210H_0^{29}} \right) \\ &= H_0 \sqrt{\frac{2}{gh}} \left( \frac{3}{5} - \frac{h^3}{3H_0^3} - \frac{h^7}{14H_0^7} - \frac{41h^{29}}{210H_0^{29}} \right). \end{aligned}$$

2.6. L'application numérique donne :

$$\tau = 0,5 \sqrt{\frac{2}{10 \times 0,1}} \left( \frac{3}{5} - \frac{0,2^3}{3} - \frac{0,2^7}{14} - \frac{41 \times 0,2^{29}}{210} \right) = 0,422 \text{ s.}$$

On attendait a priori une valeur de l'ordre de la seconde et elle est donc satisfaisante, même si elle paraît un peu faible.

Le fait que  $\tau$  ne dépende pas de l'angle  $\alpha$  est a priori surprenant<sup>1</sup>. En effet, sur les bords du récipient, la vitesse du fluide ne peut pas être verticale et les grandes valeurs de  $\alpha$  ont donc pour effet de ralentir l'écoulement en imposant une pesanteur « efficace » d'accélération  $g \cos \alpha$ . On devrait donc s'attendre à obtenir une expression de la durée de vidange faisant croître  $\tau$  avec  $\alpha$ . Il faut cependant remarquer que ce « freinage » est du second ordre en  $\alpha$  pour les petits angles (à cause

<sup>1</sup> Ceci ne signifie pas que la durée de vidange est la même que pour un récipient cylindrique car, dans ce dernier cas, on a systématiquement  $\frac{H_0}{h} \rightarrow 1$  et notre formule donne une durée nulle inacceptable.

de la fonction cosinus), c'est-à-dire indécélable. Il n'est finalement pas si étonnant qu'il ne se manifeste pas dans notre résultat puisque le modèle est construit sur l'hypothèse préalable que  $\alpha$  est petit.

2.7. Dans notre modèle, le terme inertiel s'écrit :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \frac{H^2 \dot{H}}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{H^2 \dot{H}}{z^2} \vec{u}_z \right] = \frac{-2H^4 \dot{H}^2}{z^5} \vec{u}_z$$

et quand on l'intègre entre  $A$  et  $B$  on obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^B -2H^4 \dot{H}^2 \frac{dz}{z^5} &= 2H^4 \dot{H}^2 \left( \frac{1}{4H^4} - \frac{1}{4h^4} \right) = \frac{\dot{H}^2}{2h^4} (h^4 - H^4) \\ &= \frac{\dot{H}^2}{2h^4} (h^2 - H^2)(h^2 + H^2) = \frac{\dot{H}^2}{2h^4} (h - H)(h + H)(h^2 + H^2). \end{aligned}$$

Dans l'équation différentielle  $H\ddot{H} + 2\dot{H}^2 = -gh$  obtenue à la question 2.3 il fait ainsi apparaître le terme supplémentaire  $-\frac{\dot{H}^2}{2h^3}(h + H)(h^2 + H^2)$  dans le membre de gauche. Il est comparable à  $2\dot{H}^2$ , quel que soit  $\alpha$ , et on ne peut donc pas justifier a posteriori le fait de l'avoir négligé devant l'accélération locale.

3.1. En régime quasi permanent, le niveau doit baisser suffisamment lentement pour que le champ de vitesse évolue lui aussi lentement dans le temps. Ceci n'est possible que si le débit volumique est faible en regard du volume initial de fluide et impose à  $\Sigma'$  d'être petite devant  $\Sigma$ . Puisque  $\frac{\Sigma'}{\Sigma} = \frac{S(h)}{S(H_0)} = \frac{\pi h^2 \tan^2 \alpha}{\pi H_0^2 \tan^2 \alpha}$  il faut avoir  $h \ll H_0$ .

3.2. On peut écrire le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant axiale entre  $A$  et  $B$ , le seul champ de forces étant celui de pesanteur :

$$\begin{aligned} \frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\mu} + gh &= \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\mu} + gH, \text{ soit :} \\ \frac{v_B^2}{2} \left( 1 - \frac{v_A^2}{v_B^2} \right) &= g(h - H). \end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs :

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{S(H)}{S(h)} = \frac{\pi H^2 \tan^2 \alpha}{\pi h^2 \tan^2 \alpha} = \frac{H^2}{h^2}$$

du fait de l'uniformité du débit volumique, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{H}^2 = v_B^2 &= \frac{2g(H-h)}{\frac{H^4}{h^4} - 1} = \frac{2gh^4(H-h)}{H^4 - h^4} = \frac{2gh^4(H-h)}{(H^2 - h^2)(H^2 + h^2)} \\ &= \frac{2gh^4}{(H+h)(H^2 + h^2)} \end{aligned}$$

et le passage à la racine carrée donne,  $H$  étant une fonction décroissante du temps :

$$\dot{H} = -\sqrt{\frac{2gh^4}{(H+h)(H^2 + h^2)}}$$

3.3. Pour faire apparaître l'intégrale donnée, on adimensionne cette équation :

$$\frac{\dot{H}}{h} = -\frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{H}{h} + 1\right)\left(\frac{H^2}{h^2} + 1\right)}} = -\sqrt{\frac{2g}{h}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{H}{h} + 1\right)\left(\frac{H^2}{h^2} + 1\right)}}$$

En posant cette fois  $X(t) = \frac{H(t)}{h}$  on trouve l'équation différentielle :

$$\dot{X} = -\sqrt{\frac{2g}{h}} \frac{1}{\sqrt{(X+1)(X^2 + 1)}}$$

qui s'intègre formellement en :

$$\int_{H_0/h}^1 \sqrt{(X+1)(X^2 + 1)} dX = -\sqrt{\frac{2g}{h}} \tau' \quad \text{et donne donc :}$$

$$\tau' = \sqrt{\frac{h}{2g}} \int_1^{H_0/h} \sqrt{(X+1)(X^2 + 1)} dX = \sqrt{\frac{h}{2g}} \left[ \frac{2}{5} \left( \left( \frac{H_0}{h} \right)^{5/2} - 1 \right) + \frac{59}{48} \left( \frac{H_0}{h} - 1 \right) \right]$$

Puisque le rapport  $\frac{H_0}{h}$  est grand, sinon notre calcul n'a pas de sens, on peut se contenter du terme dominant :

$$\tau' \approx \frac{2}{5} \sqrt{\frac{h}{2g}} \left( \frac{H_0}{h} \right)^{5/2}$$

3.4. La durée  $\tau$  obtenue à la question 2.5 devrait tendre vers  $\tau'$  pour  $\frac{H_0}{h}$  suffisamment grand. Or on a dans ce cas :

$$\tau \approx \frac{3}{5} H_0 \sqrt{\frac{2}{gh}}$$

et on voit que la dépendance en  $H_0$  et en  $h$  n'est pas du tout la même. Comme l'application du théorème de Bernoulli ne repose pas sur l'hypothèse que le terme inertiel est négligeable dans l'équation du mouvement, c'est cette hypothèse qui semble poser problème et inciterait à invalider l'expression de  $\tau$ .

4.1. Quand  $\frac{h}{H_0}$  est très petit, on se trouve comme on l'a déjà remarqué dans le domaine d'application de la formule de Bernoulli. L'expression limite de  $\tau''$  devrait donc coïncider avec  $\tau'$  quand  $\frac{h}{H_0}$  tend vers 0 car  $\tau''$  apparaît comme la solution exacte du problème de la durée de vidange puisque l'équation différentielle dont elle est solution tient compte du terme inertiel. Or on obtient dans ce cas :

$$\tau'' \rightarrow 1,038 \frac{H_0}{\sqrt{gh}}$$

et cela ne correspond pas du tout. On retrouve en fait la même dépendance en  $H_0$  et  $h$  qu'avec  $\tau$ , avec un facteur numérique supérieur d'environ 20 %. Il faut donc revenir sur la conclusion de la question précédente. Le désaccord constaté entre le résultat obtenu par application de la formule de Bernoulli et par l'intégration de l'équation du mouvement ne peut plus être expliqué par l'omission d'un terme dans celle-ci. On ne peut donc plus préférer  $\tau'$  à  $\tau$ .

4.2. Numériquement on obtient :

$$\tau' \approx 1,58 \text{ s par la formule approchée et } \tau'' = 0,51 \text{ s.}$$

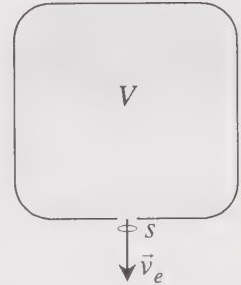
Les trois valeurs sont du même ordre de grandeur et ne permettent donc pas de choisir le meilleur modèle. Il faut donc discuter des méthodes d'obtention elles-mêmes. Entre la première et la dernière c'est celle-ci qui semble la meilleure puisqu'elle tient compte du terme inertiel. Ensuite on peut remarquer que, quel que soit le rapport  $\frac{H_0}{h}$ , en deçà d'un certain niveau on ne peut plus admettre qu'on reste en état stationnaire car la section de l'orifice devient comparable à celle du niveau supérieur du fluide. L'application du théorème de Bernoulli ne peut donc donner correctement que des temps de vidange partiels, tant que le niveau reste suffisamment haut pour respecter la condition  $H(t) \gg h$ . Il semble donc plus légitime d'adopter le dernier modèle et la valeur de  $\tau''$ .

## EXERCICE 2

### Libération d'un gaz contenu dans une bouteille

Une bouteille de volume  $V$  renferme un gaz parfait de masse molaire  $M$  et de coefficient  $\gamma = \frac{4}{3}$  à la pression initiale  $P_i$  et à la température ambiante  $T_0$ . La pression extérieure  $P_0$  est uniforme et constante et inférieure à  $P_i$ .

A un instant initial, on ouvre un petit orifice de section  $s$  et on laisse le gaz s'échapper à la vitesse  $\vec{v}_e$ . Celui-ci est assimilable à un fluide parfait compressible et on suppose le débit sortant suffisamment faible pour que l'écoulement dans la bouteille soit quasi stationnaire et pour que la température interne  $T(t)$  reste uniforme. On néglige d'autre part l'action de la pesanteur.



1.1. Montrer dans ces conditions, à partir de l'équation d'Euler, que le long d'une ligne de courant on a la relation différentielle :

$$\frac{\mathcal{R}T}{M} \frac{dP}{P} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

1.2. L'intégrer entre l'intérieur de la bouteille et un point de la section de sortie. On négligera pour cela la vitesse de l'écoulement dans le volume du gaz devant  $\vec{v}_e$  et on notera  $P(t)$  la pression interne, supposée uniforme pour la suite.

1.3. En déduire l'expression de la vitesse d'éjection du gaz en fonction de  $T(t)$ ,  $M$ ,  $P_0$ ,  $P(t)$  et de la constante des gaz parfaits  $\mathcal{R}$ . Pour quelle valeur de  $P(t)$  la bouteille cessera-t-elle de se vider ?

2.1. Exprimer le débit massique sortant  $D_m$  en fonction de  $s$ ,  $v_e$ ,  $M$ ,  $P_0$ ,  $\mathcal{R}$  et  $T(t)$ .

2.2. En déduire l'équation différentielle d'évolution de la pression du gaz sous la forme  $\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{T}\right) = F(P, T)$ .

3. On suppose que la paroi est suffisamment conductrice de la chaleur pour que l'évolution du gaz soit isotherme et on donne l'expression approchée :

$$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{\ln(t)}} \approx 2\sqrt{x-1} \left(1 + \frac{x}{24}\right) \text{ avec une erreur inférieure à 5 \% pour } x \leq 15.$$

3.1. Donner  $P(t)$  sous forme implicite. On posera  $\tau = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{M}{2\epsilon RT_0}}$  et  $\Pi = \frac{P(t)}{P_0}$ .

3.2. Représenter graphiquement  $\frac{P}{P_0}$  en fonction de  $\frac{t}{\tau}$  et commenter la courbe pour  $P_i = 15P_0$ .

3.3. Quelle durée  $\Delta t$  prend l'évacuation du gaz ? Quelle est la fraction massique restant ensuite dans la bouteille ?

3.4. Faire les applications numériques pour  $P_i = 15P_0$ ,  $V = 0,1 \text{ m}^3$ ,  $s = 10^{-5} \text{ m}^2$ ,  $T_0 = 300 \text{ K}$  et  $M = 60 \text{ g.mol}^{-1}$ . La valeur de  $\Delta t$  est-elle compatible avec l'hypothèse a priori du régime quasi stationnaire ?

4. On suppose maintenant que la paroi est suffisamment isolante pour négliger les échanges thermiques avec l'extérieur pendant l'évacuation du gaz

4.1. Que devient l'équation d'évolution de la pression ? On utilisera encore  $\tau$  et  $\Pi$ .

4.2. On donne :

$$\int_1^x \frac{dt}{t^8 \sqrt{\ln(t)}} \approx 2\sqrt{x-1} \left(1 + \frac{x}{24}\right) \left(1 - \frac{x}{80}\right) \text{ avec une erreur inférieure à } 2\%$$

pour  $x \leq 15$ .

Quelle durée  $\Delta t'$  prend l'évacuation du gaz ? Quelle est la fraction massique restant ensuite dans la bouteille ?

4.3. Refaire les deux applications numériques et les comparer à celles obtenues à la question 3.3.

5. Que dire de la durée d'évacuation et de la fraction de gaz restant dans la bouteille lorsque ses parois ne sont ni bonnes conductrices ni bonnes isolantes ?

1.1. L'équation d'Euler dans de la bouteille s'écrit en régime quasi stationnaire :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\mu} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}.$$

Si on la projette sur une ligne de courant, de vecteur élémentaire  $d\vec{l}$  colinéaire à  $\vec{v}(M)$  il vient :

$$-\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \overline{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) d\vec{l}, \text{ soit } \frac{dP}{\mu} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

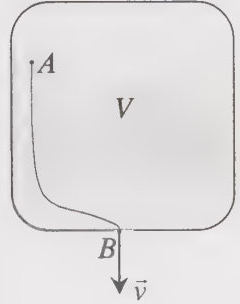
Il reste à utiliser l'équation d'état du gaz parfait sous forme locale  $P = \frac{\mu \mathcal{R}T}{M}$  pour éliminer la masse volumique :

$$\frac{\mathcal{R}T}{M} \frac{dP}{P} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

1.2. Entre les points  $A$  et  $B$  d'une même ligne de courant on peut ainsi écrire :

$$\frac{\mathcal{R}T(t)}{M} \int_A^B \frac{dP}{P} + \int_A^B d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \text{ soit :}$$

$$\frac{\mathcal{R}T(t)}{M} \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right) + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} = 0$$



et d'après les informations de l'énoncé :

$$\frac{\mathcal{R}T(t)}{M} \ln\left(\frac{P_0}{P(t)}\right) + \frac{v_e^2}{2} = 0.$$

1.3. On en déduit :

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mathcal{R}T(t)}{M} \ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right)}.$$

On voit que la vitesse d'éjection s'annule lorsque  $P = P_0$ . Les pressions étant égales de part et d'autre de l'orifice de sortie, il n'y a plus d'écoulement possible et on constate qu'il est impossible de vider totalement la bouteille de son gaz.

2.1. Le débit massique de gaz sortant de la bouteille s'écrit, en considérant la vitesse uniforme sur la section  $s$  :

$$D_m = \int_s \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} = \mu_0 v_e s,$$

$\mu_0$  étant sa masse volumique sur  $s$ . Comme la pression du gaz y vaut  $P_0$  elle s'écrit :

$$\mu_0 = \frac{P_0 M}{\mathcal{R}T(t)} \text{ et on a donc } D_m = \frac{v_e s P_0 M}{\mathcal{R}T(t)}.$$

2.2. La masse intérieure vérifie donc l'équation différentielle  $\frac{dm}{dt} = -D_m$  et puis-  
qu'on suppose la pression intérieure uniforme on peut écrire :

$$m = \int_V \mu dV = \int_V \frac{P(t)M}{\mathcal{R}T(t)} dV = \frac{P(t)MV}{\mathcal{R}T(t)}.$$

Il vient ainsi l'équation :

$$\frac{MV}{\mathcal{R}} \frac{d}{dt} \left( \frac{P(t)}{T(t)} \right) = -\frac{v_e s P_0 M}{\mathcal{R}T(t)} = -\sqrt{\frac{2s\mathcal{R}T(t)}{M}} \ln \left( \frac{P(t)}{P_0} \right) \frac{s P_0 M}{\mathcal{R}T(t)}$$

soit plus simplement :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P(t)}{T(t)} \right) = -\sqrt{\frac{2s\mathcal{R}T(t)}{M}} \ln \left( \frac{P(t)}{P_0} \right) \frac{s P_0}{VT(t)}.$$

3.1. Pour une évolution isotherme on pose  $T(t) = T_0$  et l'équation devient :

$$\frac{dP}{dt} = -\sqrt{\frac{2s\mathcal{R}T_0}{M}} \ln \left( \frac{P(t)}{P_0} \right) \frac{s P_0}{V}, \text{ ou encore :}$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\sqrt{\frac{2s\mathcal{R}T_0}{M}} \ln(\Pi) \frac{s}{V} = -\frac{\sqrt{\ln(\Pi)}}{\tau}.$$

en posant  $\Pi = \frac{P(t)}{P_0}$  et  $\tau = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{M}{2s\mathcal{R}T_0}}$ . En séparant les variables on reconnaît  
l'intégrale donnée dans l'énoncé :

$$\frac{d\Pi}{\sqrt{\ln(\Pi)}} = -\frac{dt}{\tau} \text{ et on obtient ainsi :}$$

$$\int_{P_i/P_0}^{P(t)/P_0} \frac{d\Pi}{\sqrt{\ln(\Pi)}} = -\frac{t}{\tau} = 2\sqrt{\frac{P(t)}{P_0} - 1} \left( 1 + \frac{P(t)}{24P_0} \right) - 2\sqrt{\frac{P_i}{P_0} - 1} \left( 1 + \frac{P_i}{24P_0} \right).$$

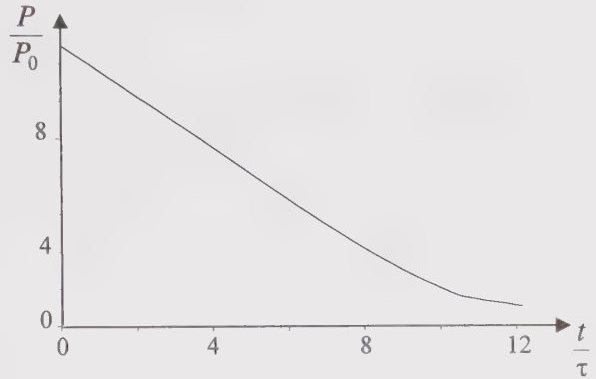
On ne peut inverser cette relation pour donner la pression en fonction du temps  
sous forme explicite qu'en résolvant une équation du troisième degré, ce qui n'est  
pas très pratique.

3.2. Il s'agit de tracer la courbe :

$$-\frac{t}{\tau} = 2\sqrt{\frac{P(t)}{P_0} - 1} \left( 1 + \frac{P(t)}{24P_0} \right) - 2\sqrt{14} \left( 1 + \frac{15}{24} \right), \text{ soit :}$$

$$\frac{t}{\tau} \approx 12,16 - 2\sqrt{\frac{P(t)}{P_0} - 1} \left( 1 + \frac{P(t)}{24P_0} \right).$$

On constate une décroissance à peu près linéaire de la pression au cours du temps pendant l'essentiel de l'évacuation du gaz (ce que l'expression analytique précédente ne permettait pas de prévoir). C'est seulement à la fin que la pression intérieure n'est plus suffisante pour maintenir le débit et qu'on constate un ralentissement net.



3.3. L'instant pour lequel la libération de gaz s'arrête est donné par :

$$\frac{\Delta t}{\tau} = 2\sqrt{\frac{P_i}{P_0} - 1} \left( 1 + \frac{P_i}{24P_0} \right) - 2\sqrt{\frac{P_0}{P_0} - 1} \left( 1 + \frac{P_0}{24P_0} \right) = 2\sqrt{\frac{P_i}{P_0} - 1} \left( 1 + \frac{P_i}{24P_0} \right).$$

La pression dans la bouteille vaut alors  $P_0$ , ce qui correspond à une fraction restante :

$$\frac{m_f}{m_i} = \frac{\mu_f V}{\mu_i V} = \frac{P_f}{P_i} = \frac{P_0}{P_i}.$$

Comme la température n'a pas varié, le rapport des masses est le rapport des pressions.

3.4. On obtient numériquement :

$$\Delta t = 2\sqrt{15 - 1} \left( 1 + \frac{15}{24} \right) \times \frac{0,1}{10^{-5}} \sqrt{\frac{60 \cdot 10^{-3}}{2 \times 8,314 \times 300}} = 422 \text{ s et :}$$

$$\frac{m_f}{m_i} = \frac{1}{15} \approx 0,0667.$$

Le temps d'évacuation est de quelques minutes pour un volume de 100 l. Pour valider ou non l'approximation du régime quasi stationnaire, on peut faire une analyse dimensionnelle. Avec  $\left| (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right| \sim \frac{U^2}{L}$  et  $\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{U}{\Delta t}$ ,  $L$  étant une longueur caractéristique de la bouteille et  $U$  une vitesse caractéristique du gaz dans celle-ci, on fait l'estimation :

$$\frac{\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|}{\left| (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right|} \sim \frac{U L}{\Delta t U^2} = \frac{L}{U \Delta t}.$$

Pour  $L$  on ne peut prendre que  $V^{1/3}$  en espérant que les trois dimensions de la bouteille sont comparables et pour  $U$  on prend la moyenne des vitesses d'éjection

$$\text{initiale et finale, soit } U = \frac{\sqrt{\frac{2\mathcal{R}T_0}{M} \ln\left(\frac{P_i}{P_0}\right)} + 0}{2}.$$

On obtient ainsi numériquement  $L = 0,46 \text{ m}$  et  $U \approx 240 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui donne :

$$\frac{\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|}{\left| (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right|} \sim \frac{0,46}{240 \times 422} = 4,6 \cdot 10^{-6}.$$

Se placer en régime quasi stationnaire apparaît ainsi parfaitement justifié.

4.1. On a dans ce cas une évolution adiabatique. Elle est de plus réversible puisque très lente et puisqu'il n'y a pas de frottements dans un fluide parfait. Pour un gaz parfait, il y a donc conservation au cours du temps de la combinaison  $P^{1-\gamma} T^\gamma$  (loi de Laplace). En éliminant la température, qu'on écrit :

$$T(t) = \frac{T_0 P_0^{1-\gamma}}{P(t)^\gamma},$$

dans l'équation obtenue à la question 2.2 il vient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P^{\frac{1}{\gamma}}}{T_0 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \right) = - \sqrt{\frac{2\mathcal{R}T_0 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{MP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \frac{s P_0 P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{VT_0 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}},$$

soit après arrangement :

$$\frac{d}{dt} \left( \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right) = - \sqrt{\frac{2\mathcal{R}T_0}{M} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \frac{s}{V}} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{d}{dt} \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

et finalement avec la valeur de  $\gamma$  :

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{4\Pi^{\frac{1}{8}}\sqrt{\ln(\Pi)}}{3\tau}$$

4.2. D'après l'énoncé on peut écrire :

$$\int_{P_i/P_0}^{P(t)/P_0} \frac{d\Pi}{\Pi^{\frac{1}{8}}\sqrt{\ln(\Pi)}} = -\frac{4t}{3\tau} = 2\sqrt{\frac{P(t)}{P_0}-1}\left(1+\frac{P(t)}{24P_0}\right)\left(1-\frac{P(t)}{80P_0}\right) - 2\sqrt{\frac{P_i}{P_0}-1}\left(1+\frac{P_i}{24P_0}\right)\left(1-\frac{P_i}{80P_0}\right)$$

et par conséquent :

$$\frac{\Delta t'}{\tau} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{P_i}{P_0}-1}\left(1+\frac{P_i}{24P_0}\right)\left(1-\frac{P_i}{80P_0}\right)$$

La pression finale dans la bouteille est encore  $P_0$ , mais la fraction massique restante est différente :

$$\frac{m_f}{m_i} = \frac{\mu_f V}{\mu_i V} = \frac{P_f T_i}{T_f P_i} = \frac{P_f P_f^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{P_i P_i^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = \frac{P_f^{\frac{1}{\gamma}}}{P_i^{\frac{1}{\gamma}}} = \left(\frac{P_0}{P_i}\right)^{\frac{3}{4}}$$

4.3. L'application numérique donne :

$$\Delta t' = \frac{3}{2}\sqrt{15-1}\left(1+\frac{15}{24}\right)\times\left(1-\frac{15}{80}\right)\times\frac{0,1}{10^{-5}}\sqrt{\frac{60\cdot 10^{-3}}{2\times 8,314\times 300}} = 257 \text{ s et :}$$

$$\frac{m_f}{m_i} = \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}} \approx 0,131.$$

Il reste plus de gaz dans le cas adiabatique car il se refroidit dans la bouteille au cours de l'évacuation et la pression décroît ainsi plus rapidement vers la valeur extérieure, ce qui laisse une plus grande quantité restante quand les pressions s'égalisent et qui explique également pourquoi cette égalisation est plus rapide.

5. Dans le cas général on doit obtenir des valeurs intermédiaires par rapport à celles obtenues pour ces deux cas extrêmes. On a donc les encadrements :

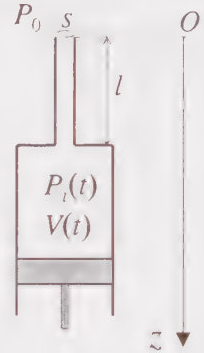
$$257 \leq \Delta t \leq 422 \text{ s et } 0,067 \leq \frac{m_f}{m_i} \leq 0,131.$$

## EXERCICE 3

### Entrée d'air dans un moteur thermique – Courbe de couple

Un cylindre fermé par un piston mobile est alimenté en air par une conduite cylindrique de longueur  $l$  et de section  $s$ . L'air est prélevé dans l'atmosphère et peut être aspiré dans le cylindre tant que la pression interne  $P_i(t)$  est inférieure à la pression atmosphérique  $P_0$ .

On suppose que la température de l'air aspiré reste constante dans le cylindre comme dans la conduite et égale à  $T_0$ . Dans cette dernière, il se comporte comme un fluide incompressible de masse volumique  $\mu$  alors que dans le cylindre il occupe évidemment tout le volume et sa masse volumique est donnée par l'équation d'état du gaz parfait.



Le piston présente un mouvement rectiligne sinusoïdal et le volume du cylindre est de la forme  $V(t) = V_0 \left[ 1 + (a - 1) \sin^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right) \right]$ . La constante  $a$  est supérieure à

1 et appelée rapport volumétrique (ou encore taux de compression mais ce dernier terme est incorrect). L'air est aspiré pendant la phase de descente, pour  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$ . Ensuite, pendant la phase de remontée, une soupape ferme la communication avec la conduite et l'air admis est comprimé avant la combustion du carburant. Toutes les grandeurs thermodynamiques sont supposées uniformes dans le cylindre et la pesanteur n'est pas prise en compte.

1. Montrer à partir de l'équation d'Euler que la vitesse de l'air  $v \vec{u}_z$  dans la conduite vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P_0 - P_i(t)}{\mu l}.$$

2.1. On note  $M$  la masse molaire de l'air. Quelle relation y a-t-il entre  $v$ ,  $M$ ,  $s$ ,  $\mu$  et  $n(t)$  nombre de moles d'air contenues dans le cylindre ?

2.2. Le cylindre est en réalité alimenté par  $N$  conduites parallèles (et  $N$  soupapes). Que devient la relation précédente ?

3. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $n(t)$ . On fera apparaître le nombre  $n_0$  initial de moles contenues dans le cylindre (la soupape étant ouverte et l'équilibre de pression réalisé) et on raisonnera sur la nouvelle variable  $X(t) = \frac{n(t)}{n_0}$ .

4. On adimensionne l'équation en posant  $\tau^2 = \frac{MlV_0}{NsRT_0}$  et en utilisant la nouvelle

échelle de temps  $t' = \frac{\omega t}{2}$ . Montrer qu'on obtient alors :

$$\frac{\omega^2 \tau^2}{4} \frac{d^2 X}{dt'^2} + \frac{X}{1 + (a-1)\sin^2(t')} = 1.$$

Quelle est la valeur de  $t'$  à la fin de la phase de descente ?

5. On adopte désormais  $a = 11$ . La fonction  $X$  solution de l'équation :

$$K^2 \frac{d^2 X}{dt'^2} + \frac{X}{1 + 10\sin^2(t')} = 1$$

vérifie  $X\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{11 + 260K^2}{1 + \frac{K}{7} - 26K^2 + 233K^3}$ . Exprimer le nombre de moles  $n_{\text{final}}$  d'air

dans le cylindre à la fin de la descente du piston en fonction de  $\omega$ ,  $\tau$  et  $n_0$ .

6.1. Pour un cylindre de moteur atmosphérique on prend les valeurs caractéristiques  $l = 25$  cm,  $V_0 = 400$  cm<sup>3</sup>,  $s = 20$  cm<sup>2</sup> et  $N = 1$ . On donne par ailleurs  $M = 29$  g.mol<sup>-1</sup>,  $\mathcal{R} = 8,31$  J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>,  $P_0 = 1$  bar et  $T_0 = 300$  K. Calculer les valeurs numériques de  $\tau$  et  $n_0$ .

6.2. Les valeurs habituelles du régime de rotation d'un moteur thermique sont comprises entre 700 et 7000 tours par minute et le rendement en couple est  $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{n_{\text{final}}} = 170$  m.N.mol<sup>-1</sup>. Donner l'expression numérique de  $\Gamma(\Omega)$ ,  $\Omega$  étant la vitesse de rotation exprimée en milliers de tours par minute et préférée à  $\omega$ .

6.3. Représenter graphiquement les courbes de couple  $\Gamma(\Omega)$  d'un moteur à quatre cylindres et d'un moteur à six cylindres. Quel est le plus performant ?

6.4. La fonction  $\frac{11K + 260K^3}{1 + \frac{K}{7} - 26K^2 + 233K^3}$  présente un maximum de 2,313 pour

$K \approx 0,207$ . Calculer la puissance maximale des deux moteurs et la vitesse de rotation correspondante. Exprimer la puissance en ch sachant que 1 ch = 735 W.

7. On cherche à améliorer la puissance du moteur à quatre cylindres pour se rapprocher de celle du six cylindres. On propose pour cela quatre solutions :

- un moteur dit multisoupapes, soit  $N = 2$ , les autres valeurs étant inchangées,

- un moteur à compresseur, dans lequel l'air entre avec une pression  $P_0 = 1,5$  bar, les autres valeurs restant inchangées,
- un moteur avec des cylindres plus grands, soit  $V_0 = 600 \text{ cm}^3$ , les autres valeurs restant inchangées,
- un moteur avec retard à la fermeture, la soupape étant encore ouverte pendant une partie de la compression, toutes les valeurs numériques étant inchangées.

7.1. Préciser qualitativement comment chacune de ces solutions améliore la puissance du moteur.

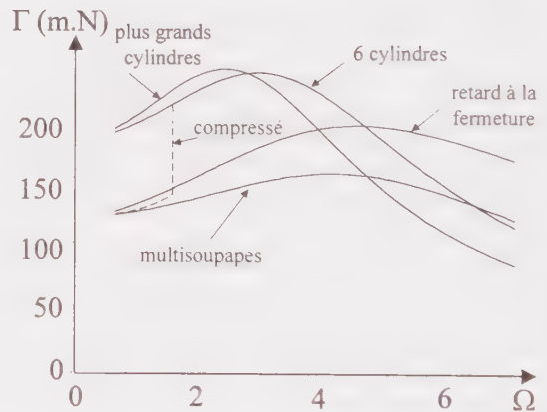
7.2. Sur quel(s) paramètre(s) du modèle agissent ces trois premières solutions ? Comment agit la dernière ?

7.3. Reprendre les questions 6.1, 6.2 et 6.4 pour le moteur multisoupapes.

7.4. Reprendre les mêmes questions pour le moteur à compresseur.

7.5. Reprendre les mêmes questions pour le moteur à plus grands cylindres.

7.6. Ci-contre sont représentées les courbes de couple pour les quatre solutions proposées et pour le moteur à six cylindres. Le compresseur ne fonctionnant qu'à partir d'un régime minimal de rotation, la courbe du moteur compressé est identique à celle du moteur « de base » à bas régime et figure en pointillés (ce n'est pas pris en compte à la question 7.4). Elle se confond avec celle du moteur à six cylindres ensuite.



Quels sont les avantages et les inconvénients de chaque solution ? Peut-on imaginer une combinaison optimale ?

1. Dans la conduite l'écoulement peut être considéré uniforme sur une section droite du fait de l'absence de frottements sur les parois. On a alors  $\vec{v}(M) = v(z, t) \vec{u}_z$  et  $P(M) = P(z, t)$ . L'équation de continuité du fluide incompressible  $\text{div } \vec{v} = 0$  se réduit à  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . On a finalement  $\vec{v}(M) = v(t) \vec{u}_z$  et l'équation d'Euler ne fait plus apparaître de terme non linéaire :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{\overline{\text{grad} P}}{\mu} = \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

On l'intègre sur la longueur de la conduite de manière à faire apparaître les pressions :

$$\int_0^l \frac{dv}{dt} \bar{u}_z \cdot dz \bar{u}_z = -\int_0^l \frac{\overline{\text{grad} P}}{\mu} \cdot dz \bar{u}_z, \text{ soit :}$$

$$\frac{dv}{dt} \int_0^l dz = -\frac{1}{\mu} \int_0^l dP \text{ et enfin :}$$

$$l \frac{dv}{dt} = \frac{P_0 - P_i(t)}{\mu}$$

puisque par continuité  $P(z=l, t) = P_i(t)$ ,

2.1. Le débit massique dans la conduite, dans le sens de l'écoulement, s'écrit :

$$D_m = \int_s \mu \bar{v} \cdot dz \bar{u}_z = \mu v s$$

et le nombre de moles entrant dans le cylindre par unité de temps est donc :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dm}{dt} = \frac{D_m}{M} = \frac{\mu v s}{M}.$$

2.2. Dans ce cas le débit entrant est multiplié par le nombre d'entrées d'air :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{N \mu v s}{M}.$$

3. Par ailleurs l'équation d'état du gaz parfait s'écrit dans le cylindre :

$$P_i(t) = \frac{n(t) \mathcal{R} T_0}{V(t)}.$$

On peut ainsi éliminer la vitesse et la pression dans l'équation différentielle obtenue à la question précédente et il vient :

$$l \frac{M}{\mu N s} \frac{d^2 n}{dt^2} = \frac{P_0 - \frac{n \mathcal{R} T_0}{V(t)}}{\mu}, \text{ soit encore :}$$

$$\frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{N s \mathcal{R} T_0}{M l V(t)} n = \frac{N s P_0}{M l}.$$

Initialement le cylindre contient un nombre de moles :

$$n_0 = \frac{P_0 V_0}{\mathcal{R}T_0}$$

puisque  $P_i$  vaut alors  $P_0$  (équilibre de pression) et on peut encore écrire :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{n}{n_0} \right) + \frac{Ns \mathcal{R}T_0}{MlV(t)} \frac{n}{n_0} = \frac{NsP_0}{Mln_0} = \frac{Ns \mathcal{R}T_0}{MlV_0}, \text{ donc :}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{Ns \mathcal{R}T_0}{MlV(t)} X = \frac{Ns \mathcal{R}T_0}{MlV_0}.$$

4. En explicitant le volume il vient :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{Ns \mathcal{R}T_0}{MlV_0} \frac{X}{1 + (a-1) \sin^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right)} = \frac{Ns \mathcal{R}T_0}{MlV_0}, \text{ soit :}$$

$$\tau^2 \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{X}{1 + (a-1) \sin^2 \left( \frac{\omega t}{2} \right)} = 1 \text{ et enfin :}$$

$$\frac{\omega^2 \tau^2}{4} \frac{d^2 X}{dt'^2} + \frac{X}{1 + (a-1) \sin^2(t')} = 1 \text{ puisque } dt = \frac{2dt'}{\omega}.$$

A la fin de la descente  $V$  est maximal et  $\frac{\omega t}{2}$  vaut par conséquent  $\frac{\pi}{2}$ , soit :

$$t'_{\text{final}} = \frac{\pi}{2}.$$

5. L'équation différentielle donnée dans l'énoncé est celle obtenue à la question précédente en posant  $K = \frac{\omega \tau}{2}$ . On a donc :

$$X(t'_{\text{final}}) \approx \frac{11 + 260 \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)^2}{1 + \frac{\omega \tau}{14} - 26 \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)^2 + 233 \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)^3} = \frac{11 + 65(\omega \tau)^2}{1 + \frac{\omega \tau}{14} - \frac{13}{2} (\omega \tau)^2 + \frac{233}{8} (\omega \tau)^3}$$

et ainsi :

$$n_{\text{final}} \approx \frac{11 + 65(\omega\tau)^2}{1 + \frac{\omega\tau}{14} - \frac{13}{2}(\omega\tau)^2 + \frac{233}{8}(\omega\tau)^3} n_0.$$

6.1. Avec ces valeurs on obtient :

$$\tau = \sqrt{\frac{29.10^{-3} \times 0,25 \times 400.10^{-6}}{1 \times 20.10^{-4} \times 8,31 \times 300}} = 7,63.10^{-4} \text{ s et :}$$

$$n_0 = \frac{10^5 \times 400.10^{-6}}{8,31 \times 300} = 0,0160 \text{ mol.}$$

6.2. On tient compte de la conversion  $\omega = \frac{2000\pi}{60} \Omega$  (1 tour =  $2\pi$  rd et 1 mn = 60 s).

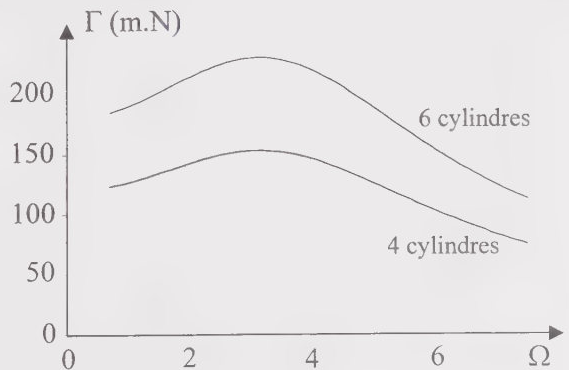
Le couple fourni par un cylindre s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 n_{\text{final}} = \Gamma_0 n_0 X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11 + 65(\omega\tau)^2}{1 + \frac{\omega\tau}{14} - \frac{13}{2}(\omega\tau)^2 + \frac{233}{8}(\omega\tau)^3} \Gamma_0 n_0 \\ &= \frac{11 + 65\left(\frac{2000\pi}{60} \Omega \tau\right)^2}{1 + \frac{2000\pi}{14} \Omega \tau - \frac{13}{2}\left(\frac{2000\pi}{60} \Omega \tau\right)^2 + \frac{233}{8}\left(\frac{2000\pi}{60} \Omega \tau\right)^3} \Gamma_0 n_0 \end{aligned}$$

ce qui donne numériquement :

$$\Gamma = \frac{29,92 + 1,129\Omega^2}{1 + 0,0057\Omega - 0,0415\Omega^2 + 0,0149\Omega^3}.$$

6.3. Pour le moteur à quatre cylindres, on représente graphiquement  $4\Gamma$  en fonction de  $\Omega$  et pour le six cylindres  $6\Gamma$ , ce qui donne les deux courbes ci-contre. Elles sont dans un rapport constant  $\frac{3}{2}$  et le plus performant est le moteur à six cylindres. C'était prévisible puisque c'est celui qui reçoit la plus grande quantité totale d'air à chaque phase d'admission.



6.4. La puissance maximale est obtenue avec  $\frac{\omega\tau}{2} = 0,207$ , soit :

$$\Omega = \frac{60}{2000\pi} \times \frac{2 \times 0,207}{\tau} = 5,18 \text{ milliers de tours par minute.}$$

Pour un cylindre la puissance fournie s'écrit :

$$\mathcal{P} = \Gamma\omega = \frac{2\Gamma K}{\tau} = \frac{2\Gamma_0 n_{\text{final}} K}{\tau} = \frac{2\Gamma_0 n_0 K}{\tau} X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\Gamma_0 n_0}{\tau} \frac{11K + 260K^3}{1 + \frac{K}{7} - 26K^2 + 233K^3}$$

et sa valeur maximale est donc :

$$\mathcal{P}_{\text{max}} = 2,313 \times \frac{2\Gamma_0 n_0}{\tau} = 16500 \text{ W.}$$

On obtient  $4 \times 16,5 = 66$  kW pour le moteur à quatre cylindres et  $6 \times 16,5 = 99$  pour celui à six cylindres, soit encore respectivement  $\frac{66000}{735} \approx 90$  ch et  $\frac{99000}{735} \approx 135$  ch.

On retrouve le fait que le moteur à six cylindres est le plus performant.

7.1. Le moteur multisoupapes possède deux conduites d'admission d'air par cylindre et peut donc se remplir mieux pendant la descente du piston.

Le moteur à compresseur est alimenté par de l'air comprimé. La pression à l'entrée de la conduite étant plus élevée, le débit entrant est plus grand.

Le moteur avec des cylindres plus grands présente un volume plus élevé et la pression interne augmente moins vite au cours de l'admission. Elle s'oppose ainsi d'autant moins à  $P_0$  puisque c'est la différence  $P_0 - P_i$  qui contrôle le débit d'air.

A la fin de la descente du piston, rien ne permet d'affirmer que la pression interne est suffisante pour annuler le débit d'air entrant. Il se peut par conséquent qu'en retardant la fermeture de la soupape on permette une entrée supplémentaire d'air.

7.2. Dans un moteur multisoupapes on diminue la valeur de  $\tau$ , ce qui décale la courbe de couple vers des régimes de rotation plus élevés. La puissance maximale est augmentée puisqu'elle varie en  $\frac{1}{\tau}$ .

Dans un moteur à compresseur, c'est la valeur de  $n_0$  qui est augmentée et la courbe de couple est déplacée « vers le haut ». La puissance est multipliée par le même facteur à tous les régimes de rotation.

Dans un moteur avec des cylindres plus grands, la valeur de  $\tau$  est diminuée et la courbe de couple est donc déplacée vers les bas régimes, ce qui est défavorable à la puissance, mais la valeur de  $n_0$  est par ailleurs augmentée et pour prévoir l'effet

global il faut remarquer que  $\mathcal{P}_{\max}$  varie comme  $\frac{n_0}{\tau}$ , que  $\tau$  varie comme  $\sqrt{V_0}$  et que  $n_0$  varie comme  $V_0$ . Globalement on a donc une augmentation de puissance.

Dans un moteur avec retard à la fermeture aucun paramètre du modèle n'est modifié et il faut résoudre l'équation différentielle pour des valeurs de  $t'$  supérieures à  $\frac{\pi}{2}$  pour vérifier si on atteint une valeur de  $n_{\text{final}}$  effectivement plus grande.

7.3. Pour le moteur multisoupapes on a :

$$\tau = \sqrt{\frac{29 \cdot 10^{-3} \times 0,25 \times 400 \cdot 10^{-6}}{2 \times 20 \cdot 10^{-4} \times 8,31 \times 300}} = 5,40 \cdot 10^{-4} \text{ s et encore :}$$

$$n_0 = \frac{10^5 \times 400 \cdot 10^{-6}}{8,31 \times 300} = 0,0160 \text{ mol.}$$

La valeur de  $\tau$  plus faible modifie les valeurs numériques des coefficients et on obtient cette fois pour un cylindre :

$$\Gamma = \frac{29,92 + 0,565\Omega^2}{1 + 0,0040\Omega - 0,0208\Omega^2 + 0,0053\Omega^3}.$$

La puissance maximale est obtenue au régime de rotation :

$$\Omega = \frac{60}{2000\pi} \times \frac{2 \times 0,207}{\tau} = 7,32 \text{ milliers de tours par minute et vaut :}$$

$$\mathcal{P}_{\max} = 4 \times 2,313 \times \frac{2\Gamma_0 n_0}{\tau} = 93200 \text{ W ou } 127 \text{ ch.}$$

7.4. Pour le moteur à compresseur on a toujours :

$$\tau = \sqrt{\frac{29 \cdot 10^{-3} \times 0,25 \times 400 \cdot 10^{-6}}{1 \times 20 \cdot 10^{-4} \times 8,31 \times 300}} = 7,63 \cdot 10^{-4} \text{ s et cette fois :}$$

$$n_0 = \frac{1,5 \cdot 10^5 \times 400 \cdot 10^{-6}}{8,31 \times 300} = 0,0240 \text{ mol.}$$

Comme la valeur de  $\tau$  est inchangée, le couple est uniformément multiplié par le même coefficient 1,5 :

$$\Gamma = \frac{1,5 \times (29,92 + 1,129\Omega^2)}{1 + 0,0057\Omega - 0,0415\Omega^2 + 0,0149\Omega^3}.$$

La puissance maximale est obtenue au même régime de rotation 5180 tours par minute et vaut  $66 \times 1,5 \approx 99$  kW ou 135 ch.

7.5. Pour le moteur à plus grands cylindres on a :

$$\tau = \sqrt{\frac{29 \cdot 10^{-3} \times 0,25 \times 600 \cdot 10^{-6}}{1 \times 20 \cdot 10^{-4} \times 8,31 \times 300}} = 9,34 \cdot 10^{-4} \text{ s et :}$$

$$n_0 = \frac{10^5 \times 600 \cdot 10^{-6}}{8,31 \times 300} = 0,0240 \text{ mol.}$$

La valeur de  $\tau$  plus forte modifie l'expression numérique du couple par cylindre :

$$\Gamma = \frac{44,880 + 2,540\Omega^2}{1 + 0,0016\Omega - 0,0622\Omega^2 + 0,0273\Omega^3}$$

La puissance maximale est obtenue au régime de rotation :

$$\Omega = \frac{60}{2000\pi} \times \frac{2 \times 0,207}{\tau} = 4,233 \text{ milliers de tours par minute et vaut :}$$

$$\mathcal{P}_{\max} = 4 \times 2,313 \times \frac{2\Gamma_0 n_0}{\tau} = 80800 \text{ W ou } 110 \text{ ch.}$$

7.6. La solution à compresseur est celle qui se rapproche le plus du moteur à six cylindres mais il faut pour cela atteindre un régime de rotation minimal. En deçà, le moteur manque de couple. Qui plus est, la transition est brutale et c'est un moteur qui fonctionne en « tout ou rien ». La solution à plus grands cylindres offre un bon couple à bas régime mais n'atteint pas la puissance du moteur à six cylindres, le couple « s'effondrant » à régime élevé. La solution avec retard de fermeture n'est intéressante qu'à haut régime où elle offre un couple nettement supérieur à celui du moteur à six cylindres mais elle en manque à bas régime. Enfin la solution multisoupapes offre un faible couple quel que soit le régime de rotation eu égard à sa puissance. C'est un moteur qui apparaît « creux ».

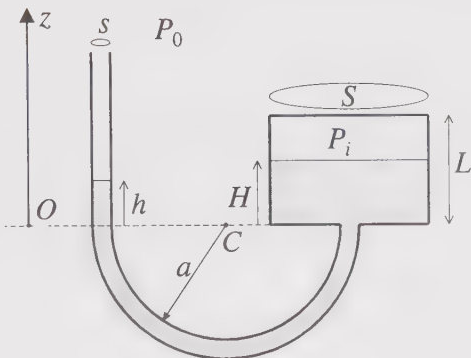
Il faut bien entendu tempérer ces appréciations par le fait que les deux moteurs atteignant leur couple maximal aux régimes les plus élevés vont bénéficier d'une boîte de vitesse plus « courte » que les autres, ce qui remontera les courbes d'accélération en fonction du régime de rotation. Le manque de couple à bas régime sera atténué mais restera effectif.

Pour obtenir une courbe de couple intéressante sur toute la plage de régimes, il semble qu'un bon compromis s'obtiendrait par une combinaison grands cylindres et retard à la fermeture, celui-ci n'étant utilisé par exemple qu'au-delà du point de croisement des deux courbes données dans l'énoncé. On aurait alors un moteur plus performant que celui à six cylindres.

## EXERCICE 4

## Oscillations d'un baromètre

Un réservoir contient un liquide de masse volumique  $\mu$  surmonté d'un gaz parfait de masse molaire  $M$ . Il est relié à l'air, au niveau d'un petit orifice à sa base, par une conduite de forme circulaire puis rectiligne partiellement remplie du liquide. La section uniforme  $s$  de celle-ci est petite devant celle  $S$  du réservoir et  $s^2$  est entièrement négligeable devant  $S^2$ . On néglige également  $\sqrt{s}$  devant le rayon de courbure  $a$ .



Toutes les données géométriques sont indiquées sur la figure ci-dessus. La pression de l'air  $P_0$  ne dépend pas du temps et le champ de pesanteur est dirigé en sens inverse de la verticale  $Oz$ . Les niveaux du liquide dans la conduite et le réservoir sont repérés respectivement par les cotes  $h$  et  $H$  définies à partir de la base horizontale de celui-ci. L'évolution du système reste isotherme et à l'équilibre  $H$  a pour valeur  $H_0 = \frac{L}{2}$  et la pression  $P_i$  du gaz vaut  $P_0$ .

1. Que vaut  $h$  à l'équilibre ?

A un instant initial, la pression de l'air passe brutalement à  $P_0 + \Delta P$  et ne change plus. On observe alors des oscillations du niveau dans la conduite mais la valeur de  $\Delta P$  n'est pas assez élevée pour que  $h$  devienne négatif.

2.1. Pour quelle raison peut-on appliquer le théorème de Bernoulli dans le réservoir ? Montrer qu'on obtient alors deux relations entre  $\dot{h}$  et  $\dot{H}$ .

2.2. Que vaut la somme  $SH + sh$  ?

3.1. Dédire de l'intégration de l'équation d'Euler dans la conduite, et en négligeant le rapport  $\frac{s^2}{S^2}$ , l'équation différentielle :

$$(\pi a + h)\ddot{h} + \frac{\dot{h}^2}{2} + g\left(1 + \frac{s}{S}\right)h = \frac{P_i - P_0 - \Delta P}{\mu} + g\left(1 + \frac{s}{S}\right)\frac{L}{2}.$$

3.2. Retrouve-t-on la valeur de  $h$  à l'équilibre ?

3.3. Exprimer  $P_i$  en fonction de  $h$  au premier ordre en  $\frac{S}{S}$ .

4.1. Quelle est finalement l'équation différentielle satisfaite par  $h(t)$  ? Que peut-on en dire ?

4.2. Quelle est la nouvelle valeur  $h'_0$  de  $h$  à l'équilibre ?

5. On suppose que  $h$  reste suffisamment voisin de sa valeur d'équilibre pour la linéariser.

5.1. Montrer que le niveau présente des oscillations sinusoïdales de pulsation  $\omega$

voisine de  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}}}$ .

5.2. Exprimer la correction au premier ordre en  $\frac{S}{S}$  entre  $\omega$  et  $\omega_0$ .

6. Calculer les valeurs numériques de  $\omega_0$  et de  $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$  pour  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

$a = 10 \text{ cm}$ ,  $L = 20 \text{ cm}$ ,  $\mu = 10000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\frac{S}{S} = 0,01$ ,  $P_0 = 1 \text{ bar}$  et  $\Delta P = 0,05$

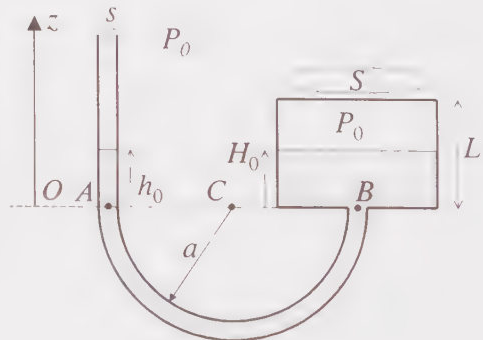
bar. La correction en  $\frac{S}{S}$  est-elle utile si on souhaite connaître  $\omega$  à une précision de 1 % ?

7. Comment l'observation des oscillations du niveau peut-elle permettre de déterminer la valeur de  $\Delta P$  et de définir ce dispositif comme un baromètre ?

1. A l'équilibre, les pressions sont égales aux points  $A$  et  $B$  de cote nulle limitant la partie circulaire de la conduite, sinon le moment en  $C$  des forces exercées sur le fluide (de pression et de pesanteur) contenu dans ce volume ne serait pas nul et il se mettrait en mouvement. On peut relier par ailleurs les pressions en ces points à  $P_0$  et  $P_i$  et on obtient :

$$P_0 + \mu g h_0 = P_A = P_B = P_i + \mu g H_0.$$

Or à l'équilibre on a d'après l'énoncé  $P_i = P_0$ , ce qui donne simplement :



$$h_0 = H_0 = \frac{L}{2}.$$

2.1. La section de la conduite étant faible devant celle du réservoir, le niveau du liquide dans celui-ci varie lentement au cours du temps et on peut considérer que le régime d'écoulement y est quasi stationnaire. Comme par ailleurs un liquide est incompressible et les seules forces volumiques présentes sont conservatives (la pesanteur) le théorème de Bernoulli est applicable.

Du fait de l'absence de frottement sur les parois, le champ de vitesse est uniforme au niveau supérieur dans le réservoir et à l'entrée de la conduite. Écrivons le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant  $DB$  les reliant, sachant que  $\dot{H} = \vec{v}_D \cdot \vec{u}_z$  par continuité :

$$\frac{v_D^2}{2} + \frac{P_i}{\mu} + gH = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\mu} = \frac{\dot{H}^2}{2} + \frac{P_i}{\mu} + gH.$$

La conservation du débit volumique dans un fluide incompressible permet par ailleurs d'écrire, définissant  $D_V$  dans le sens réservoir  $\rightarrow$  air libre :

$$\begin{aligned} D_V &= \int_{s_B} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_s v_B \vec{u}_z \cdot dS(-\vec{u}_z) = -v_B S \\ &= \int_{s_D} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_s \dot{H} \vec{u}_z \cdot dS(-\vec{u}_z) = -\dot{H} S \\ &= \int_{s_E} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_s v_E \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = v_E S = \dot{h} s \end{aligned}$$

et il vient ainsi :

$$\frac{\dot{h}^2}{2} + \frac{P_B}{\mu} = \frac{\dot{H}^2}{2} + \frac{P_i}{\mu} + gH.$$

Avec  $\dot{H}S = -\dot{h}s$  on dispose bien de deux relations entre les vitesses de variation des deux niveaux.

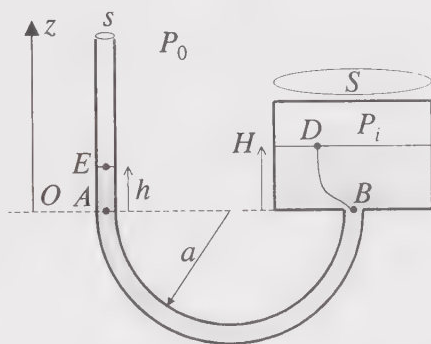
2.2. Cette dernière s'intègre en :

$$SH + sh = \text{cte}$$

et la constante s'obtient avec les valeurs initiales :

$$\text{cte} = SH_0 + sh_0 = (S + s) \frac{L}{2}.$$

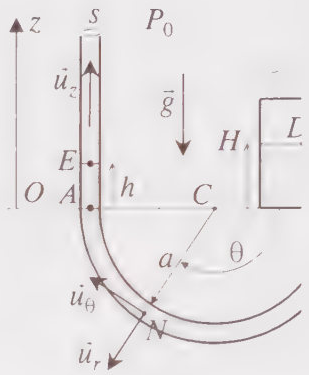
3.1. La section de la conduite étant uniforme, la conservation du débit volumique impose l'uniformité du module du champ de vitesse. Dans la partie circulaire, l'équation d'Euler donne donc :



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(v(t)\vec{u}_\theta) + \left(\frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}\right)(v(t)\vec{u}_\theta) &= -\frac{\overline{\text{grad} P}}{\mu} + \vec{g} \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta - \frac{v^2}{a}\vec{u}_r \end{aligned}$$

car  $CN = r \approx a$  d'après l'énoncé. Dans la partie rectiligne elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(v(t)\vec{u}_z) + \left(v \frac{\partial}{\partial z}\right)(v(t)\vec{u}_z) = -\frac{\overline{\text{grad} P}}{\mu} + \vec{g} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_z.$$



Intégrons l'équation le long du demi-cercle  $BA$  :

$$\int_B^A \left( \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta - \frac{v^2}{a}\vec{u}_r \right) \cdot a d\theta \vec{u}_\theta = \int_B^A \left( -\frac{\overline{\text{grad} P}}{\mu} + \vec{g} \right) \cdot a d\theta \vec{u}_\theta, \text{ soit :}$$

$$\frac{dv}{dt} \int_B^A a d\theta = \int_B^A \left( -\frac{1}{\mu a} \frac{\partial P}{\partial \theta} + g \cos \theta \right) a d\theta, \text{ ce qui donne :}$$

$$\pi a \frac{dv}{dt} = -\frac{P_A - P_B}{\mu} + ga [\sin \theta]_0^\pi = \frac{P_B - P_A}{\mu}.$$

Intégrons-la ensuite le long du segment  $AE$  :

$$\int_A^E \frac{dv}{dt} \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = \int_A^E \left( -\frac{\overline{\text{grad} P}}{\mu} + \vec{g} \right) dz \vec{u}_z, \text{ soit cette fois :}$$

$$h \frac{dv}{dt} = -\frac{P_E - P_A}{\mu} - gh.$$

Faisons enfin la somme des deux équations scalaires :

$$(\pi a + h) \frac{dv}{dt} = \frac{P_B - P_E}{\mu} - gh.$$

Or  $P_E = P_0 + \Delta P$  et  $P_B$  est donné par le théorème de Bernoulli :

$$\frac{P_B}{\mu} = \frac{\dot{H}^2 - \dot{h}^2}{2} + \frac{P_i}{\mu} + gH = \left( \frac{s^2}{S^2} - 1 \right) \frac{\dot{h}^2}{2} + \frac{P_i}{\mu} + gH.$$

On obtient ainsi :

$$(\pi a + h) \frac{dv}{dt} = \frac{P_B - P_E}{\mu} - gh = \left( \frac{s^2}{S^2} - 1 \right) \frac{\dot{h}^2}{2} + \frac{P_i - P_0 - \Delta P}{\mu} + g(H - h).$$

Enfin, sachant que  $SH + sh = (S + s) \frac{L}{2}$  et que  $v = \dot{h}$ , on obtient l'équation différentielle :

$$(\pi a + h) \ddot{h} = \left( \frac{s^2}{S^2} - 1 \right) \frac{\dot{h}^2}{2} + \frac{P_i - P_0 - \Delta P}{\mu} + g \left[ \frac{S + s}{2S} L - \frac{s}{S} h - h \right].$$

Compte tenu des valeurs relatives des deux sections, le terme  $\frac{s^2}{S^2}$  est un infiniment petit du second ordre et on peut se limiter à :

$$(\pi a + h) \ddot{h} = -\frac{\dot{h}^2}{2} + \frac{P_i - P_0 - \Delta P}{\mu} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) \left[ \frac{L}{2} - h \right],$$

d'où finalement :

$$(\pi a + h) \ddot{h} + \frac{\dot{h}^2}{2} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) h = \frac{P_i - P_0 - \Delta P}{\mu} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) \frac{L}{2}.$$

3.2. A l'équilibre initial, les dérivées temporelles sont nulles,  $\Delta P$  est nul et  $P_i$  vaut  $P_0$ .

On retrouve bien  $h_0 = \frac{L}{2}$ .

3.3. Pour une évolution isotherme, le produit  $PV$  est constant dans un gaz parfait et on a donc :

$$PV = P_i S(L - H) = P_0 S(L - H_0) = \frac{P_0 S L}{2}, \text{ soit :}$$

$$P_i = \frac{P_0 L}{2(L - H)} = \frac{P_0 L}{2 \left( L + \frac{s}{S} h - \left( 1 + \frac{s}{S} \right) \frac{L}{2} \right)} = \frac{P_0}{\left( 1 + \frac{s}{S} \left( \frac{2h}{L} - 1 \right) \right)}.$$

On obtient une valeur approchée  $P_i \approx P_0$  mais si on veut garder une dépendance en  $h$  il ne faut pas prendre le dénominateur égal à 1. On doit par conséquent faire un développement limité en  $\frac{s}{S}$ , le premier ordre suffisant puisqu'on a auparavant

négligé  $\frac{s^2}{S^2}$  devant 1 :

$$P_i \approx \left( 1 - \frac{s}{S} \left( \frac{2h}{L} - 1 \right) \right) P_0.$$

4.1. On obtient ainsi en reportant ce résultat dans l'équation différentielle :

$$(\pi a + h)\ddot{h} + \frac{\dot{h}^2}{2} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) h = -\frac{s}{S} \left( \frac{2h}{L} - 1 \right) \frac{P_0}{\mu} - \frac{\Delta P}{\mu} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) \frac{L}{2}.$$

Elle n'est pas linéaire et on ne peut pas la résoudre analytiquement.

4.2. A l'équilibre, toutes les dérivées temporelles sont nulles et il reste :

$$g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) h'_0 = -\frac{s}{S} \left( \frac{2h'_0}{L} - 1 \right) \frac{P_0}{\mu} - \frac{\Delta P}{\mu} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) \frac{L}{2}.$$

On en déduit :

$$g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) \left( h'_0 - \frac{L}{2} \right) + \frac{2s}{LS} \left( h'_0 - \frac{L}{2} \right) \frac{P_0}{\mu} = -\frac{\Delta P}{\mu} \quad \text{et enfin :}$$

$$h'_0 = \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu} \left[ g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) + \frac{2s}{LS} \frac{P_0}{\mu} \right]^{-1}.$$

5.1. On écrit alors  $h(t) = h'_0 + \delta(t)$  et on ne garde que les termes linéaires en  $\delta$  et ses dérivées dans l'équation différentielle :

$$(\pi a + h'_0)\ddot{\delta} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) (h'_0 + \delta) = \frac{s}{S} \left( 1 - \frac{2(h'_0 + \delta)}{L} \right) \frac{P_0}{\mu} - \frac{\Delta P}{\mu} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) \frac{L}{2}.$$

Étant donnée la valeur de  $h'_0$  elle se réduit à :

$$(\pi a + h'_0)\ddot{\delta} + g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) \delta = -\frac{s}{S} \left( \frac{2\delta}{L} \right) \frac{P_0}{\mu}, \quad \text{soit encore :}$$

$$(\pi a + h'_0)\ddot{\delta} + \left[ g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) + \frac{2sP_0}{SL\mu} \right] \delta = 0.$$

Le crochet est de signe positif. On a donc affaire à l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) + \frac{2sP_0}{SL\mu}}{\pi a + h'_0}}.$$

Le niveau dans le tube présente donc des oscillations sinusoïdales autour de la nouvelle valeur d'équilibre  $h'_0$  (lorsque l'amplitude des oscillations reste faible devant la position moyenne).

Le rapport  $\frac{s}{S}$  étant petit, on a approximativement :

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{\pi a + h'_0}} \approx \sqrt{\frac{g}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}}} = \omega_0$$

et on constate bien que  $\omega$  est proche de  $\omega_0$ .

5.2. L'expression exacte de  $\omega$  est :

$$\omega = \sqrt{\frac{g\left(1 + \frac{s}{S}\right) + \frac{2sP_0}{SL\mu}}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu} \left[g\left(1 + \frac{s}{S}\right) + \frac{2s}{LS} \frac{P_0}{\mu}\right]^{-1}}$$

On simplifie d'abord le dénominateur :

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g + \frac{s}{S}\left(g + \frac{2P_0}{L\mu}\right)}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g} \left[1 + \frac{s}{S}\left(1 + \frac{2P_0}{gL\mu}\right)\right]^{-1}} \approx \sqrt{\frac{g + \frac{s}{S}\left(g + \frac{2P_0}{L\mu}\right)}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g} \left[1 - \frac{s}{S}\left(1 + \frac{2P_0}{gL\mu}\right)\right]}} \\ &= \sqrt{\frac{g + \frac{s}{S}\left(g + \frac{2P_0}{L\mu}\right)}{\left(\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}\right) \left[1 - \frac{\frac{s}{S} \frac{\Delta P}{\mu g} \left(1 + \frac{2P_0}{gL\mu}\right)}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}}\right]}} \\ &\approx \sqrt{\frac{g + \frac{s}{S}\left(g + \frac{2P_0}{L\mu}\right)}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}} \left[1 + \frac{\frac{s}{2S} \frac{\Delta P}{\mu g} \frac{1 + \frac{2P_0}{gL\mu}}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}}\right]} \end{aligned}$$

On passe ensuite au numérateur :

$$\begin{aligned}
 \omega &\approx \sqrt{\frac{g}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}}} \sqrt{1 + \frac{s}{S} \left(1 + \frac{2P_0}{gL\mu}\right)} \left[ 1 + \frac{s}{2S} \frac{\Delta P}{\mu g} \frac{1 + \frac{2P_0}{gL\mu}}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}} \right] \\
 &\approx \omega_0 \left( 1 + \frac{s}{2S} \left(1 + \frac{2P_0}{gL\mu}\right) \right) \left[ 1 + \frac{s}{2S} \frac{\Delta P}{\mu g} \frac{1 + \frac{2P_0}{gL\mu}}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}} \right] \\
 &\approx \omega_0 \left( 1 + \frac{s}{2S} \left(1 + \frac{2P_0}{gL\mu}\right) + \frac{s}{2S} \frac{\Delta P}{\mu g} \frac{1 + \frac{2P_0}{gL\mu}}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}} \right) \\
 &= \omega_0 \left[ 1 + \frac{s}{2S} \left( 1 + \frac{2P_0}{gL\mu} + \frac{\Delta P}{\mu g} \frac{1 + \frac{2P_0}{gL\mu}}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

et on effectue une ultime factorisation :

$$\begin{aligned}
 \omega &\approx \omega_0 \left[ 1 + \frac{s}{2S} \left(1 + \frac{2P_0}{gL\mu}\right) \left( 1 + \frac{\Delta P}{\mu g} \frac{1}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}} \right) \right] \\
 &= \omega_0 \left[ 1 + \frac{s}{2S} \left(1 + \frac{2P_0}{gL\mu}\right) \frac{\pi a + \frac{L}{2}}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}} \right] = \omega_0 \left[ 1 + \frac{s}{2S} \frac{1 + \frac{2P_0}{gL\mu}}{1 - \frac{\Delta P}{\mu g \left(\pi a + \frac{L}{2}\right)}} \right]
 \end{aligned}$$

La dépendance linéaire en  $\frac{s}{S}$  est déjà assez difficile à obtenir et il est donc impensable d'aller au-delà.

6. On obtient numériquement :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\pi a + \frac{L}{2} - \frac{\Delta P}{\mu g}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,1\pi + \frac{0,2}{2} - \frac{5000}{10^4 \times 9,81}}} = 5,1972 \text{ rd.s}^{-1},$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{s}{2S} \frac{1 + \frac{2P_0}{gL\mu}}{1 - \frac{\Delta P}{\mu g \left( \pi a + \frac{L}{2} \right)}} = \frac{s}{2S} \frac{1 + \frac{2 \times 10^5}{9,81 \times 0,2 \times 10^4}}{1 - \frac{5000}{10^4 \times 9,81 \times \left( 0,1\pi + \frac{0,2}{2} \right)}} = 0,0638.$$

La correction est de 6 % et doit par conséquent être prise en compte.

7. A priori, on pourrait utiliser soit  $h'_0$  soit  $\omega$ . Cette dernière grandeur présentant une dépendance en  $\Delta P$  non linéaire, le choix se porte sans hésiter sur  $h'_0$ . Si le niveau moyen est difficile à observer directement, il suffit de calculer la demi-somme des élongations extrémales du niveau du liquide et d'utiliser la relation linéaire :

$$\Delta P = \mu \left[ g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) + \frac{2s}{LS} \frac{P_0}{\mu} \right] \frac{L}{2} - \mu \left[ g \left( 1 + \frac{s}{S} \right) + \frac{2s}{LS} \frac{P_0}{\mu} \right] h'_0.$$

On peut donc directement graver une échelle de pression linéaire sur le tube et lire les « hauteurs » en bars ou Pascals.

## EXERCICE 5

### Liquide en suspension

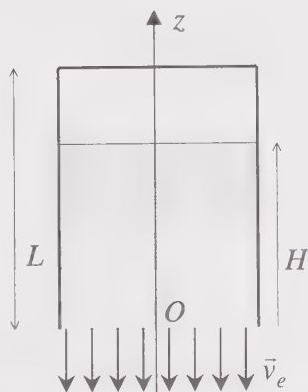
Un liquide, assimilé à un fluide parfait incompressible de masse volumique  $\mu$ , occupe la totalité d'un récipient cylindrique de hauteur  $L$  et de section  $S$ . Le récipient est entièrement ouvert à sa base à partir d'un instant initial et le liquide est ainsi mis en communication avec l'air de pression  $P_0$  uniforme et constante.

Sous l'action de la pesanteur, le liquide quitte le récipient à la vitesse  $\vec{v}_e$ , ce qui fait apparaître une cavité vide dans celui-ci, au-dessus du liquide.

On note  $H(t)$  la hauteur instantanée de liquide et on suppose que le champ de vitesse dans celui-ci est de la forme  $\vec{v}(M) = v(x, y, z, t) \vec{u}_z$ . Enfin, on écarte toute entrée d'air éventuelle venant occuper la cavité vide après avoir traversé le liquide.

1. Que déduit-on de l'équation de continuité et de l'absence de frottement dans un fluide parfait ?

2.1. Établir en intégrant l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $H(t)$ .



2.2. Montrer qu'elle se met sous la forme :

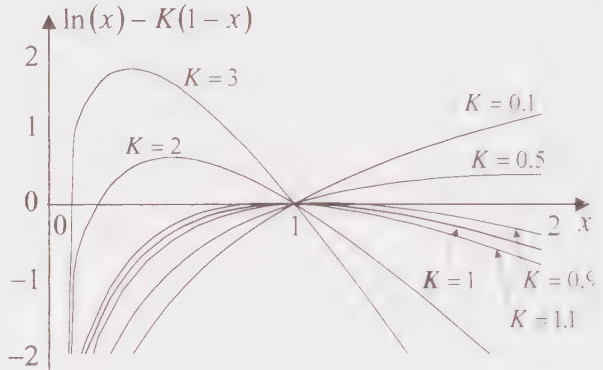
$$\frac{\dot{H}^2}{2} = \frac{P_0}{\mu} \ln\left(\frac{H}{L}\right) + g(L - H).$$

3. On pose  $X = \frac{H}{L}$  et  $\tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{2P_0}{\mu}}$ . Comment s'écrit l'équation précédente avec ces nouvelles variables ? Quel est le domaine de valeurs de  $X$  ? On introduira la constante  $k = \frac{\mu g L}{P_0}$ .

4. On a tracé ci-contre la fonction  $\ln(x) - K(1-x)$  pour quelques valeurs du paramètre positif  $K$ .

4.1. Qu'en déduit-on pour l'écoulement étudié si la constante  $k$  est inférieure ou égale à 1 ? Interpréter.

4.2. Décrire qualitativement l'écoulement si  $k > 1$ .



5.1. On suppose  $k$  très légèrement supérieur à 1. Résoudre directement l'équation du second ordre obtenue à la question 2.1 après avoir remarqué que  $H$  doit rester voisin de  $L$ , ce qui permettra de procéder à une linéarisation de l'équation différentielle.

5.2. Préciser le domaine temporel de validité de la solution obtenue.

5.3. Quel est le mouvement ultérieur ? Retrouve-t-on le comportement prévu qualitativement ?

1. L'équation de continuité d'un fluide incompressible donne ici :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Par ailleurs, du fait de l'absence de frottement interne, il n'y a aucune raison que le champ de vitesse ne soit pas uniforme sur une section horizontale du réservoir. On écrira donc :

$$\vec{v}(M) = v(t) \vec{u}_z \quad \text{dans le liquide.}$$

2.1. Puisque le terme inertiel  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$  est identiquement nul, l'intégration de l'équation d'Euler le long de la ligne de courant  $AB$  s'écrit :

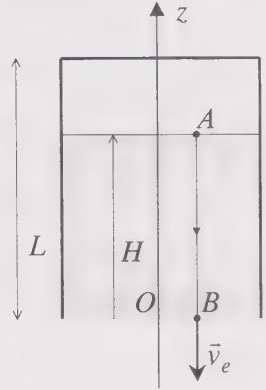
$$\int_A^B \frac{dv}{dt} \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = \int_A^B -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu} \cdot dz \vec{u}_z - \int_A^B g \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z$$

et il vient :

$$-H \frac{dv}{dt} = \frac{P_A - P_B}{\mu} + gH.$$

Dans la cavité vide la pression est nulle et en  $B$  elle est égale par continuité à la pression de l'air. Ensuite la vitesse du fluide en  $A$  est aussi la vitesse de variation du niveau  $\dot{H}$  et on obtient finalement :

$$\ddot{H} = \frac{P_0}{\mu H} - g.$$



2.2. En multipliant cette équation différentielle par  $\dot{H}$  on peut l'intégrer une fois :

$$\dot{H}\ddot{H} = \frac{P_0\dot{H}}{\mu H} - g\dot{H} \Rightarrow \frac{\dot{H}^2}{2} = \frac{P_0}{\mu} \ln(H) - gH + \text{cte.}$$

A l'instant initial le réservoir est entièrement occupé par le liquide et celui-ci est encore immobile, ce qui permet de déterminer la constante d'intégration :

$$0 = \frac{P_0}{\mu} \ln(L) - gL + \text{cte}$$

et on aboutit à l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\dot{H}^2}{2} = \frac{P_0}{\mu} \ln\left(\frac{H}{L}\right) + g(L - H).$$

3. Avec ces nouvelles variables on a  $\frac{dH}{dt} = \frac{L\sqrt{2P_0}}{L\sqrt{\mu}} \frac{dX}{d\tau}$  et par conséquent :

$$\frac{P_0}{\mu} \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = \frac{P_0}{\mu} \ln(X) + gL(1 - X).$$

En introduisant  $k$  il vient finalement :

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = \ln(X) + k(1 - X).$$

La variable  $X$  est comprise entre 1 (état initial) et 0 (état final si le réservoir se vide complètement).

4.1. Les courbes représentées dans l'énoncé correspondent à  $\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = f(X)$  pour différentes valeurs de  $k = K$ . On constate que la fonction  $f$  est négative pour  $X \leq 1$  lorsque  $k \leq 1$ , ce qui signifie que  $\frac{dX}{d\tau}$  n'est pas défini dans ce cas. Le réservoir ne se vide pas et  $X(\tau)$  reste égal indéfiniment à 1, ce qui correspond à la solution triviale de l'équation différentielle.

L'inégalité  $k \leq 1$  signifie que la force de pression de l'air  $P_0S$  exercée sur sa base est supérieure ou égale au poids  $\mu L S g$  de la colonne de liquide. C'est pourquoi elle reste en équilibre dans le réservoir.

4.2. Dans ce cas,  $\frac{dX}{d\tau}$  est défini sur l'intervalle  $[X_0, 1]$  où  $f$  est positive. Le liquide va donc s'écouler jusqu'au niveau  $LX_0$ , d'a-

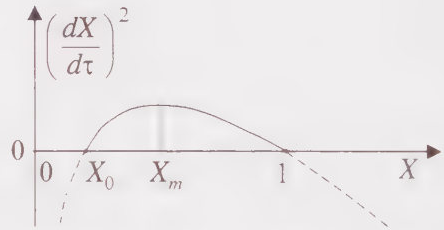
bord à vitesse croissante ( $\frac{dX}{d\tau}$  croît en valeur absolue quand  $X$  diminue de 1 à  $X_m$ )

puis décroissante ( $\frac{dX}{d\tau}$  décroît en valeur absolue quand  $X$  diminue de  $X_m$  à  $X_0$ ).

Pour  $X = X_m$  il y a compensation exacte du poids de liquide restant  $\mu L X_m S g$  par la force de pression de l'air  $P_0 S$  puisque la dérivée de  $\left(\frac{dX}{d\tau}\right)$  (proportionnelle à

l'accélération du fluide puisqu'on vérifie rapidement que  $\frac{d}{dX}\left(\frac{dX}{d\tau}\right) = \frac{d^2 X}{d\tau^2} / \frac{dX}{d\tau}$ )

s'annule<sup>2</sup>. Mais la descente se poursuit encore un certain temps du fait de l'inertie du liquide. Quand elle s'arrête, le poids restant de liquide est donc inférieur à la pression de l'air et la colonne restante d'épaisseur  $LX_0$  va remonter dans le réservoir. Comme il n'entre pas de masse de liquide supplémentaire dans le réservoir au cours de l'ascension, la colonne remonte jusqu'au sommet, poussée par la pression et vient « percuter » le couvercle du réservoir avec une vitesse non nulle. S'il n'y a pas de dissipation par la réaction du couvercle, elle est « réfléchi » et redescend avec la même vitesse. On peut envisager un comportement oscillant.



<sup>2</sup> Ceci montre notamment que  $X_m = \frac{1}{k}$ , valeur qui annule la dérivée de  $f$  par rapport à  $X$ .

5.1. Si  $k$  est proche de 1, la valeur de  $X_0$  l'est également (Cf. les courbes données dans l'énoncé) et le liquide va à peine descendre, ce qui signifie que  $H$  reste voisin de  $L$ . On reprend l'équation  $\ddot{H} = \frac{P_0}{\mu H} - g$  en cherchant une solution de la forme :

$$H(t) = L - h(t) \text{ avec } 0 \leq h(t) \ll L.$$

Ceci va nous permettre de linéariser l'équation :

$$-\ddot{h} = \frac{P_0}{\mu(L-h)} - g = \frac{P_0}{\mu L \left(1 - \frac{h}{L}\right)} - g \approx \frac{P_0}{\mu L} \left(1 + \frac{h}{L}\right) - g, \text{ soit :}$$

$$\ddot{h} + \frac{P_0}{\mu L^2} h = g - \frac{P_0}{\mu L}.$$

Il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique qui a pour solution :

$$h = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{\mu L^2}{P_0} \left(g - \frac{P_0}{\mu L}\right) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{P_0}{\mu L^2}}.$$

Compte tenu des conditions initiales  $h(0) = 0$  et  $\dot{h}(0) = 0$ , on doit avoir :

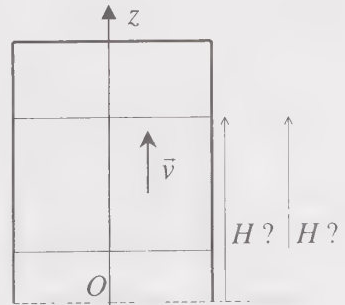
$$A \sin \phi = 0 \text{ et } A \cos \phi + \frac{\mu L^2}{P_0} \left(g - \frac{P_0}{\mu L}\right) = 0,$$

ce qui donne la seule solution non nulle :

$$\begin{aligned} h &= \frac{\mu L^2}{P_0} \left(g - \frac{P_0}{\mu L}\right) (1 - \cos(\omega_0 t)) = L \left(\frac{\mu L g}{P_0} - 1\right) (1 - \cos(\omega_0 t)) \\ &= L(k - 1)(1 - \cos(\omega_0 t)) = 2L(k - 1) \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right). \end{aligned}$$

5.2. Elle est acceptable tant que la définition de  $H$  reste inchangée. Si le liquide remonte après avoir été arrêté par la pression de l'air, on ne peut confondre la hauteur de la colonne liquide et la cote de son niveau supérieur (Cf. ci-contre). On a alors affaire à une masse de fluide constante et l'équation obtenue à la question 2.1 n'est plus valide. La solution est donc acceptable jusqu'à  $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ , soit le premier

maximum de  $h$  (et le premier minimum de  $H$ ).



5.3. La remontée se fait à masse constante, l'épaisseur de fluide étant désormais  $L - 2L(k - 1) = (3 - 2k)L$ . On écrit donc la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un système fermé en appelant  $H$  la cote du niveau supérieur du liquide :

$$\mu S(3 - 2k)L\ddot{H} = P_0 S - \mu S(3 - 2k)Lg, \text{ soit :}$$

$$\ddot{H} = \frac{P_0}{\mu(3 - 2k)L} - g = \left( \frac{1}{(3 - 2k)k} - 1 \right) g.$$

Avec  $k > 1$  la parenthèse est bien positive. En redéfinissant l'origine des temps à l'instant où l'ascension commence on a pour conditions initiales  $\dot{H} = 0$ ,  $H = LX_0$  et l'intégration donne :

$$H = \left( \frac{1}{(3 - 2k)k} - 1 \right) \frac{gt^2}{2} + LX_0.$$

Pour  $X_0$  on peut se satisfaire d'une expression approchée en résolvant l'équation

$$\ln(X_0) + k(1 - X_0) = 0.$$

Comme on sait qu'il est très proche de 1, on pose  $X_0 = 1 - \varepsilon$  et on développe le logarithme au second ordre :

$$\ln(1 - \varepsilon) + k\varepsilon = 0 \approx -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + k\varepsilon = \varepsilon \left( k - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

ce qui donne  $\varepsilon \approx 2k - 2$  (la solution  $\varepsilon = 0$  étant écartée) et donc :

$$X_0 \approx 1 + 2 - 2k = 3 - 2k.$$

On écrit par conséquent :

$$H = \left( \frac{1}{(3 - 2k)k} - 1 \right) \frac{gt^2}{2} + (3 - 2k)L$$

et la colonne de liquide atteint le sommet du réservoir pour :

$$T = \sqrt{\frac{2[L - (3 - 2k)L]}{g \left( \frac{1}{(3 - 2k)k} - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} \sqrt{\frac{(2k - 2)(3 - 2k)k}{(1 - 3k + 2k^2)}} = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{(3 - 2k)k}{2k - 1}}.$$

Ensuite, s'il y a inversion de la vitesse de collision sans dissipation, le mouvement est reproduit à l'identique en sens inverse, puisque les forces de pesanteur et de pression sont inchangées, et on obtient au bout du compte des oscillations de période  $2T$ .

# ÉCOULEMENTS POTENTIELS

## EXERCICE 1

### Associations de sources

Une source à symétrie cylindrique occupe l'axe  $Oz$  et émet sur une hauteur unité et radialement (normalement à l'axe) un fluide parfait incompressible, de masse volumique  $\mu$ , avec un débit volumique  $D_V$ . On se place en régime stationnaire et on suppose le problème invariant le long de cette hauteur unité. On travaille en coordonnées cylindriques, le laplacien et la divergence s'écrivant alors :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}, \quad \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

1. Déterminer le champ de vitesse dans le fluide à partir de l'équation de continuité. Que se passe-t-il sur l'axe  $Oz$  ? Quelle en est la signification physique ?

2. Montrer que l'écoulement est potentiel et calculer le potentiel des vitesses  $\varphi$ .

3.1. On déplace la source et on l'amène à l'abscisse positive  $a$  sur l'axe  $Ox$ . Quelle est l'expression du potentiel  $\varphi_1$  ? L'exprimer en coordonnées cartésiennes.

3.2. Même question si on place à l'abscisse  $-a$  une source de débit  $D'_V = \frac{D_V}{\alpha}$  ( $\alpha$  constante) en notant  $\varphi_2$  le potentiel des vitesses.

3.3. On superpose les deux sources précédentes. Écrire le potentiel des vitesses  $\varphi$  et en déduire, toujours en coordonnées cartésiennes, le champ de vitesse  $\vec{v}$ . On ne cherchera pas à le simplifier.

3.4. On peut écrire  $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(A(x, y)\vec{u}_z)$ . Le justifier et déterminer  $A(x, y)$ . On rappelle que  $\int \frac{du}{x^2 + u^2} = \frac{1}{x} \operatorname{Arctan} \left( \frac{u}{x} \right)$ .

3.5. Montrer que  $A$  est uniforme sur une ligne de courant.

4. On a placé à l'abscisse  $-a$  une source de débit  $-D_V$ <sup>1</sup>.

4.1. Quelle est alors l'équation des lignes de courant ? On rappelle l'identité :

<sup>1</sup> Il s'agit dans ce cas d'un « puits » puisqu'il absorbe le fluide.

$$\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b) = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \text{ à } \pi \text{ près.}$$

4.2. Montrer qu'il s'agit d'une famille de cercles bien précis et faire une représentation de l'écoulement.

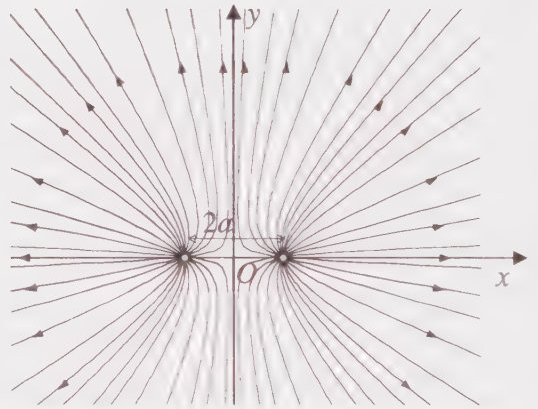
4.3. Décrire le cas limite  $a \rightarrow 0$ . On parle de dipôle. Quelle analogie ce terme évoque-t-il ?

4.4. Donner, dans ce cas limite, une expression de  $\varphi$  en un point  $M$  loin de  $O$  par un développement limité. Montrer qu'on peut écrire  $\varphi = \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$ , où  $\vec{r} = \overline{OM}$ , et définir le vecteur  $\vec{p}$ .

4.5. En déduire l'expression du champ de vitesse dans la base cylindrique à grande distance. Commenter.

5. On place maintenant à l'abscisse  $-a$  une source de débit  $D_V$  et on obtient cette fois la représentation ci-contre des lignes de courant, correspondant à une famille d'hyperboles et associée à l'équation suivante des lignes de courant :

$$(x - Ky)^2 - (1 + K^2)y^2 = a^2$$



5.1. On dit que les deux sources se partagent l'espace. Pourquoi ?

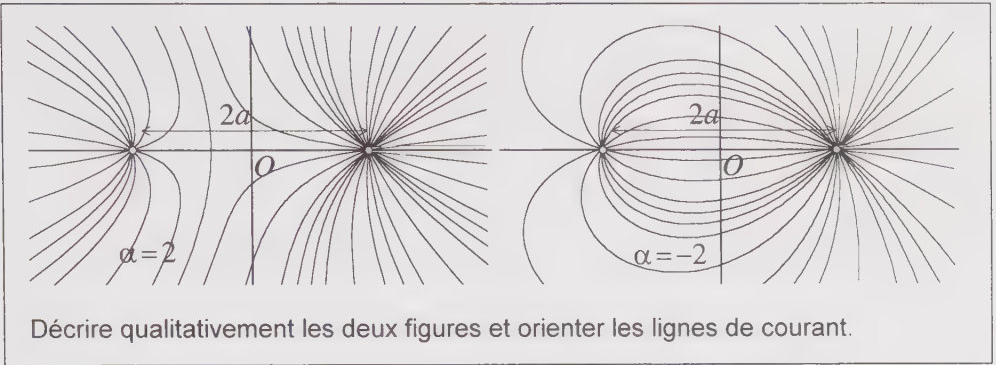
5.2. On reprend la seule source d'abscisse  $a$  et on immerge dans le fluide un obstacle plan solide au niveau du plan  $Oyz$ . Décrire ce nouvel écoulement sans calcul supplémentaire.

5.3. Calculer la vitesse du fluide à l'infini sur l'axe  $Ox$  et sur la surface solide.

5.4. La pression vaut  $P_0$  dans toutes les zones où le fluide est au repos et du côté de l'obstacle qui n'est pas en contact avec l'écoulement. Calculer la résultante des forces de pression exercées sur cet obstacle. Commenter le résultat. On

donne 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

6. Dans les cas  $\alpha = 2$  et  $\alpha = -2$  les lignes de courant ont les allures représentées à la page suivante.



1. Le problème est invariant par rotation autour de  $Oz$  et le long de cet axe sur la hauteur de la source. On écrit donc le champ de vitesse  $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_r$ , en coordonnées cylindriques et l'équation de continuité s'écrit alors :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) = 0, \text{ soit } rv = \text{cte}.$$

Il reste à déterminer la constante d'intégration. La seule donnée de l'énoncé étant celle du débit, on relie la constante à celui-ci en le calculant. On utilise un cylindre de même hauteur que la source et dont elle constitue l'axe :

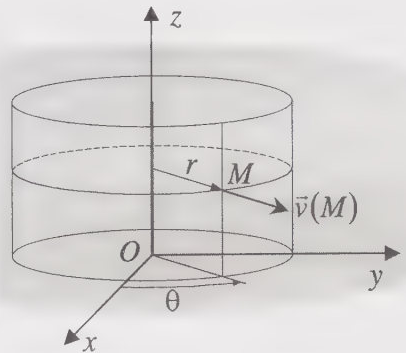
$$D_V = \int_{S_l} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{S_l} \frac{\text{cte}}{r} \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 \frac{\text{cte}}{r} r d\theta dz = \int_0^{2\pi} \frac{\text{cte}}{r} r d\theta = 2\pi \text{cte}.$$

L'intégration porte uniquement sur la surface latérale  $S_l$  du cylindre car, sur les faces supérieure et inférieure, le vecteur normale est orthogonal à la vitesse.

On écrit donc finalement :

$$\vec{v} = \frac{D_V}{2\pi r} \vec{u}_r.$$

On constate que cette expression diverge sur l'axe  $Oz$ . Donc on ne peut assimiler la source à une distribution linéique que si on ne s'en approche pas trop. Sinon, il faut tenir compte de son épaisseur qui est forcément non nulle.



2. Le vecteur  $\vec{v}$  est le gradient d'une fonction  $f(r) = \frac{D_V}{2\pi} \ln(r) + K$ , quelle que soit la constante  $K$ . On peut donc choisir le potentiel des vitesses :

$$\varphi(M) = \frac{D_V}{2\pi} \ln(r).$$

Cette expression pose un léger problème d'homogénéité puisque l'argument du logarithme possède une dimension. On pourrait donc plutôt choisir :

$$\varphi(M) = \frac{D_V}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{L}\right).$$

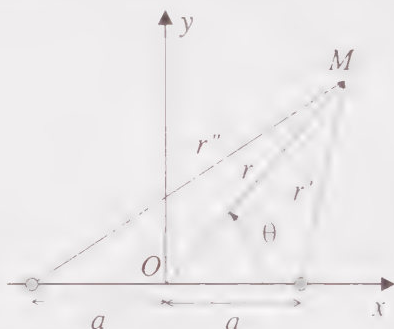
$L$  étant une certaine longueur, mais ceci ne change en rien les résultats des questions qui suivent.

3.1. Dans ce cas, la distance intervenant dans le logarithme est  $r'$  (Cf figure ci-dessous) et on écrit :

$$\begin{aligned} \varphi_1(M) &= \frac{D_V}{2\pi} \ln(r') = \frac{D_V}{4\pi} \ln(r'^2) \\ &= \frac{D_V}{4\pi} \ln[(x-a)^2 + y^2]. \end{aligned}$$

3.2. Il suffit simplement de remplacer  $a$  par  $-a$  et  $D_V$  par  $D'_V$  :

$$\varphi_2(M) = \frac{D'_V}{2\pi} \ln(r'') = \frac{D_V}{4\pi\alpha} \ln[(x+a)^2 + y^2].$$



3.3. Le potentiel des vitesses obéit à l'équation linéaire  $\Delta\varphi = 0$ . Par conséquent, c'est une grandeur additive et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \varphi_1(M) + \varphi_2(M) \\ &= \frac{D_V}{4\pi} \ln[(x-a)^2 + y^2] + \frac{D_V}{4\pi\alpha} \ln[(x+a)^2 + y^2] \\ &= \frac{D_V}{4\pi} \left( \ln[(x-a)^2 + y^2] + \frac{1}{\alpha} \ln[(x+a)^2 + y^2] \right). \end{aligned}$$

On obtient ensuite le champ de vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \overline{\text{grad}}\varphi = \frac{D_V}{4\pi} \left( \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \ln[(x-a)^2 + y^2] + \frac{1}{\alpha} \ln[(x+a)^2 + y^2] \right) \\ &= \frac{D_V}{4\pi\alpha} \left[ \frac{2\alpha(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{2(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} \right] \vec{u}_x + \frac{D_V}{4\pi\alpha} \left[ \frac{2\alpha y}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \vec{u}_y. \end{aligned}$$

3.4. Tout champ de vecteur de divergence nulle est un rotationnel. Donc on peut écrire  $\vec{v} = \overline{\text{rot}} \vec{A}$ , le champ de vecteur  $\vec{A}$  étant défini à un gradient près. Ensuite, le

champ de vitesse est partout orthogonal au vecteur  $\vec{u}_z$ . Physiquement, un rotationnel possède des propriétés de symétrie inverses de celles du champ dont il est issu et lui est par conséquent orthogonal. On adopte donc un vecteur orienté suivant  $Oz$ , pour s'assurer qu'il est effectivement partout orthogonal au champ de vitesse, et on écrit  $\vec{v} = \overline{\text{rot}}(A(x, y)\vec{u}_z)$ .

Pour déterminer la fonction  $A$ , on explicite les composantes cartésiennes du rotationnel :

$$\overline{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{u}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{u}_y$$

et on obtient les deux équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{D_V}{4\pi\alpha} \left[ \frac{2\alpha(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{2(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{D_V}{4\pi\alpha} \left[ \frac{2\alpha y}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \end{cases}$$

On intègre la première par rapport à  $y$  :

$$A = \frac{D_V}{4\pi\alpha} \left[ 2\alpha \text{Arctan}\left(\frac{y}{x-a}\right) + 2 \text{Arctan}\left(\frac{y}{x+a}\right) \right] + f(x)$$

puis on dérive ce résultat par rapport à  $x$  pour en déduire  $f(x)$  par comparaison avec la seconde équation :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{D_V}{2\pi\alpha} \left[ \frac{-\frac{\alpha y}{(x-a)^2}}{1 + \left(\frac{y}{x-a}\right)^2} + \frac{-\frac{y}{(x+a)^2}}{1 + \left(\frac{y}{x+a}\right)^2} \right] + \frac{df}{dx}$$

Il vient ainsi :

$$\frac{df}{dx} = 0, \text{ soit } f(x) = \text{cte.}$$

Comme  $A$  n'est défini que par ses dérivées, on fait le choix le plus simple d'une cte nulle :

$$A(x, y) = \frac{D_V}{2\pi\alpha} \left[ \alpha \text{Arctan}\left(\frac{y}{x-a}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{y}{x+a}\right) \right]$$

3.5. Sur une ligne de courant, on a colinéarité en tout point  $M$  entre  $\vec{v}(M)$  et un petit vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  tangent à celle-ci. Leur produit vectoriel est donc nul :

$$\vec{v} \wedge d\vec{l} = \vec{0} = \begin{vmatrix} v_x & dx \\ v_y & dy \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (v_x dy - v_y dx) \vec{u}_z = \left( \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) \vec{u}_z = dA \vec{u}_z$$

et la différentielle  $dA$  entre deux points infiniment proches de la ligne de courant l'est donc également. On a bien  $A = \text{cte}$  le long de celle-ci.

4.1. Dans ce cas  $\alpha = -1$  et la relation  $A = \text{cte}$  devient :

$$\frac{D_V}{2\pi} \left[ \text{Arctan} \left( \frac{y}{x-a} \right) - \text{Arctan} \left( \frac{y}{x+a} \right) \right] = \text{cte},$$

soit encore d'après l'indication donnée et en incluant éventuellement  $\pm \pi$  dans la constante :

$$\begin{aligned} \frac{D_V}{2\pi} \text{Arctan} \left( \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y}{x-a} \frac{y}{x+a}} \right) &= \text{cte} = \frac{D_V}{2\pi} \text{Arctan} \left( \frac{y(x+a) - y(x-a)}{x^2 - a^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{D_V}{2\pi} \text{Arctan} \left( \frac{2ay}{x^2 - a^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{x^2 - a^2 + y^2}{2ay} = \text{cte}' = K.$$

C'est l'équation d'un cercle. On réduit au même dénominateur et on fait apparaître des carrés parfaits :

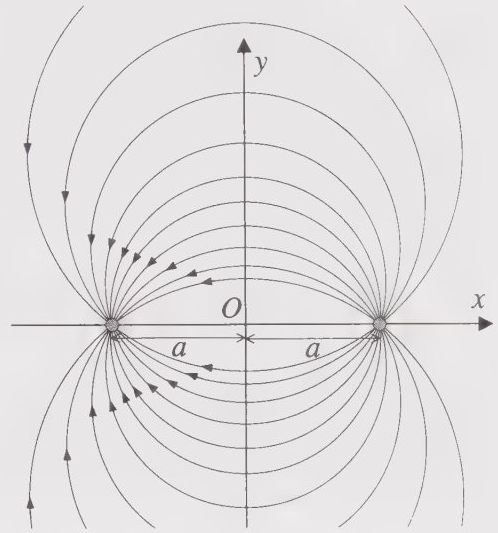
$$x^2 - a^2 + y^2 - 2aKy = 0 = x^2 - a^2 + (y - aK)^2 - a^2 K^2.$$

On obtient finalement :

$$x^2 + (y - aK)^2 = a^2(1 + K^2).$$

4.2. Ce cercle a pour centre le point  $(0, aK)$  et pour rayon  $a\sqrt{1 + K^2}$ . Quel que soit  $K$ , son centre est sur l'axe  $Oy$  et décrit tout l'axe quand  $K$  varie. On voit notamment qu'il passe par les deux points  $(a, 0)$  et  $(-a, 0)$ .

Les lignes de courant sont donc définies par la famille des cercles passant par les deux sources. On les oriente bien entendu dans le sens des  $x$  décroissants, de la source vers le « puits ». L'axe  $Ox$  correspond au cas limite  $K$  infini tandis que  $K$  nul correspond au seul cercle dont  $Ox$  est un diamètre.



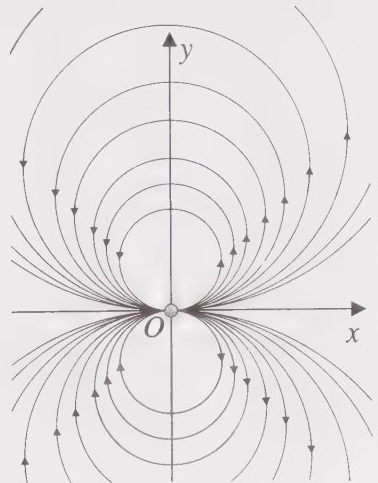
Dans l'espace, on doit imaginer sur une hauteur unité un « empilement » de plans parallèles à  $Oxy$  et contenant chacun cette famille de cercles. On remarque notamment que, très près des sources, l'écoulement reste radial.

Enfin, toutes les lignes de courant partant de la source rejoignent le puits. Il n'y a pas « d'échappée » du fluide à l'infini. Ce résultat est dû au fait que le débit total  $D_V - D_V$  du système est nul

4.3. Dans ce cas, les sources sont confondues au point  $O$  et les lignes de courant sont les cercles passant par  $O$  et dont le centre se trouve sur  $Oy$  (figure ci-dessous). Elles sont semblables aux lignes de champ du dipôle électrique et du dipôle magnétique, d'où l'appellation.

Quand  $a$  tend vers 0, le produit  $aK$  doit rester fini non nul, sinon on obtiendrait l'unique équation  $x^2 + y^2 = 0$  qui n'est pas celle d'un cercle mais celle définissant la position des deux sources se confondant en  $O$ . On obtient par conséquent l'équation de cette nouvelle famille de cercles en posant  $K' = aK$  :

$$x^2 + (y - K')^2 = a^2 + K'^2 \rightarrow K'^2.$$



Il est clair qu'ils passent tous par  $O$ .

Dans l'espace, il faut encore concevoir sur une hauteur unité une superposition de plans parallèles à  $Oxy$  et contenant chacun la même famille de cercles.

4.4. A grande distance, le potentiel des vitesses s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varphi(M) &= \frac{D_V}{4\pi} \left( \ln \left[ (x-a)^2 + y^2 \right] - \ln \left[ (x+a)^2 + y^2 \right] \right) \\
 &= \frac{D_V}{4\pi} \left( \ln \left[ x^2 + y^2 - 2ax + a^2 \right] - \ln \left[ x^2 + y^2 + 2ax + a^2 \right] \right) \\
 &= \frac{D_V}{4\pi} \left( \ln \left[ (x^2 + y^2) \left( 1 - \frac{2ax - a^2}{x^2 + y^2} \right) \right] - \ln \left[ (x^2 + y^2) \left( 1 + \frac{2ax + a^2}{x^2 + y^2} \right) \right] \right) \\
 &= \frac{D_V}{4\pi} \left( \ln \left[ 1 - \frac{2ax - a^2}{x^2 + y^2} \right] - \ln \left[ 1 + \frac{2ax + a^2}{x^2 + y^2} \right] \right)
 \end{aligned}$$

et on fait un développement limité :

$$\begin{aligned}
 \varphi(M) &\approx \frac{D_V}{4\pi} \left( -\frac{2ax - a^2}{x^2 + y^2} - \frac{2ax + a^2}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{D_V}{\pi} \frac{ax}{x^2 + y^2} = -\frac{D_V}{\pi} \frac{ar \cos\theta}{r^2} \\
 &= -\frac{aD_V}{\pi} \frac{\cos\theta}{r} = -\frac{aD_V}{\pi} \frac{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_r}{r} = -\frac{aD_V \vec{u}_x \cdot r\vec{u}_r}{\pi r^2} = \vec{p} \cdot \frac{\vec{r} - z\vec{u}_z}{r^2} = \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}.
 \end{aligned}$$

C'est une expression analogue à celle du potentiel scalaire du dipôle électrique sous forme vectorielle :

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Seuls changent la constante multiplicative et l'exposant en dénominateur.

Ceci permet de définir un « moment dipolaire » hydrodynamique  $\vec{p} = -\frac{aD_V}{\pi} \vec{u}_x$ ,

orienté de la source vers le « puits ». La dépendance du dénominateur en  $\frac{1}{r^2}$  et

non en  $\frac{1}{r^3}$  tient au fait qu'on est ici dans un problème à symétrie cylindrique pour

chaque source alors que chacune des charges constituant le dipôle électrostatique admet une symétrie sphérique. Par ailleurs, il est à noter qu'en coordonnées cylindriques et sphériques  $r$  n'a pas la même signification géométrique (alors que le vecteur  $\vec{r}$  est toujours le vecteur position). L'analogie reste donc limitée et serait plus profonde si on utilisait une source et un puits ponctuels puisque les propriétés de symétrie seraient alors identiques entre les problèmes électrostatique et hydrodynamique.

4.5. On obtient la vitesse en prenant le gradient de  $\varphi$  plutôt qu'en cherchant une expression approchée du résultat final de la question 3.3 :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M) &= -\frac{aD_V}{\pi} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) = -\frac{aD_V}{\pi} \left(-\frac{\cos\theta}{r^2} \vec{u}_r - \frac{\sin\theta}{r^2} \vec{u}_\theta\right) \\ &= \frac{aD_V}{\pi r^2} (\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta) = -\frac{p'}{r^2} (\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta). \end{aligned}$$

L'analogie avec le dipôle électrostatique se retrouve puisque son champ a pour expression :

$$\vec{E}(M) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta).$$

Les propriétés de symétrie différentes (cylindriques au lieu de sphériques) font partir le facteur 2 dans la composante radiale et donnent un dénominateur en  $\frac{1}{r^2}$  au lieu de  $\frac{1}{r^3}$ .

5.1. Il est très net sur la représentation graphique que les lignes de courant issues d'une source ne traversent pas l'axe  $Oy$  (ou dans l'espace le plan  $Oyz$ ). Chaque source débite donc dans une moitié du domaine de l'écoulement total, sans partie commune avec l'autre.

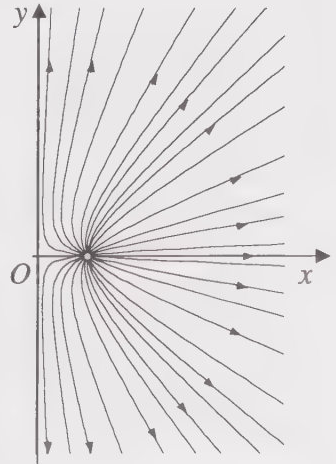
5.2. L'équation de Laplace des écoulements potentiels étant linéaire, deux problèmes satisfaisant à cette équation et admettant des conditions aux limites identiques dans une partie commune de l'espace sont forcément semblables dans cette partie. Il s'agit du théorème d'unicité. Si on reprend la solution précédente dans le domaine  $x \geq 0$ , elle admet pour conditions aux limites :

- écoulement radial de débit volumique  $D_V$  au voisinage de  $(a,0)$ ,
- composante  $v_x$  nulle sur le plan d'équation  $x = 0^+$ .

Or le nouveau problème admet pour conditions aux limites :

- écoulement radial de débit volumique  $D_V$  au voisinage de  $(a,0)$  qui est la source unique,
- composante normale de la vitesse nulle sur l'obstacle solide.

Il s'agit des mêmes conditions et la solution est donc la même dans les deux cas dans le domaine commun  $x \geq 0$ . Par contre, de l'autre côté de la plaque plane, il n'y a pas de source et le fluide reste au repos. On obtient ainsi l'écoulement représenté ci-contre.



5.3. Le champ de vitesse s'écrit d'après le résultat de la question 3.3 :

$$\vec{v} = \frac{D_V}{2\pi} \left[ \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} \right] \vec{u}_x + \frac{D_V}{2\pi} \left[ \frac{y}{(x-a)^2+y^2} + \frac{y}{(x+a)^2+y^2} \right] \vec{u}_y.$$

On a donc en particulier sur l'obstacle :

$$\vec{v}_p = \frac{D_V}{2\pi} \left[ \frac{-a}{a^2+y^2} + \frac{a}{a^2+y^2} \right] \vec{u}_x + \frac{D_V}{2\pi} \left[ \frac{y}{a^2+y^2} + \frac{y}{a^2+y^2} \right] \vec{u}_y = \frac{D_V}{\pi} \frac{y}{a^2+y^2} \vec{u}_y,$$

tandis qu'à l'infini il s'annule (sur l'axe  $Ox$  ou ailleurs).

5.4. Dans un écoulement potentiel stationnaire, en l'absence de champ de force extérieur, la somme  $\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2}$  est uniforme. Puisqu'elle vaut  $P_0$  quand la vitesse s'annule (ce qui est le cas quand  $x$  ou  $y$  tend vers l'infini), on a pour la pression  $P_p$  sur la paroi de l'obstacle :

$$\frac{P_p}{\mu} + \frac{D_V^2}{2\pi^2} \frac{y^2}{(a^2+y^2)^2} = \frac{P_0}{\mu}, \text{ soit } P_p = P_0 - \frac{\mu D_V^2}{2\pi^2} \frac{y^2}{(a^2+y^2)^2}.$$

Par contre, sur l'autre face de la paroi, la pression est par hypothèse égale à  $P_0$ . Chaque élément de surface  $dS$  de l'obstacle est donc soumis à une résultante des forces de pression :

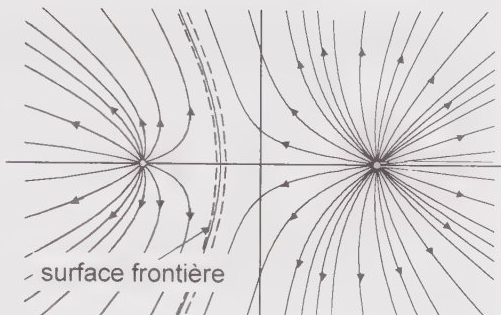
$$d\vec{F} = (P_0 - P_p) dS \vec{u}_x = \frac{\mu D_V^2}{2\pi^2} \frac{y^2 dS}{(a^2+y^2)^2} \vec{u}_x$$

et on a ainsi pour l'ensemble de la surface :

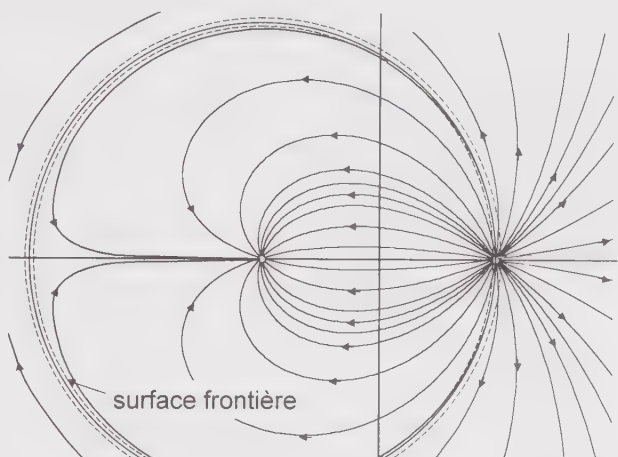
$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{z=0}^l \int_{y=-x}^{+x} \frac{\mu D_V^2}{2\pi^2} \frac{y^2}{(a^2+y^2)^2} \vec{u}_x dy dz = \frac{\mu D_V^2}{2\pi^2} \vec{u}_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(a^2+y^2)^2} dy \\ &= \frac{\mu D_V^2}{2\pi^2 a} \vec{u}_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} = \frac{\mu D_V^2}{4\pi a} \vec{u}_x. \end{aligned}$$

Cette force est orientée vers la source et celle-ci « aspire » paradoxalement la plaque plane. Il s'agit en fait d'une sorte d'effet Venturi. Près de la paroi, les particules fluides ont une vitesse non nulle car elles peuvent glisser librement. Donc la pression est plus faible que sur l'autre face où le fluide reste au repos. L'écoulement ne repousse pas l'obstacle mais l'attire.

6. Dans le cas  $\alpha = 2$ , la source d'abscisse positive a un débit plus élevé que l'autre et repousse ainsi le fluide émis par la seconde. Il existe donc une surface frontière qui sépare deux écoulements distincts, comme dans le cas  $\alpha = 1$ , mais elle est située nettement plus près de la source de plus faible débit et sa forme témoigne du refoulement que subit le fluide qu'elle émet. Les lignes de courant sont aisées à orienter puisqu'elles partent des deux sources.



Dans le cas  $\alpha = -2$ , la source a un débit plus élevé en valeur absolue que le « puits » et celui-ci ne peut donc pas récupérer tout le fluide qu'elle émet. La moitié du débit est envoyée à l'infini et il doit encore exister une surface frontière séparant deux écoulements distincts. A l'intérieur de celle-ci, on doit observer un écoulement source  $\rightarrow$  puits, analogue au cas  $\alpha = -1$ . A l'extérieur de cette surface, on doit avoir un écoulement illimité, sans relation avec le « puits ». Les lignes de courant sont encore aisées à orienter puisqu'elles partent toutes de la source.



## EXERCICE 2

### Source placée dans un jet

Une source à symétrie cylindrique, confondue avec l'axe  $Oz$ , émet radialement (normalement à l'axe) un fluide parfait incompressible, de masse volumique  $\mu$ , avec un débit volumique  $D_V$  par unité de hauteur. Elle est placée dans un jet venant de l'infini du même fluide et de vitesse uniforme  $v_0 \vec{u}_x$ . On se place en régime stationnaire et on travaille en coordonnées cylindriques, le laplacien et la divergence s'écrivent :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}, \quad \text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1. Déterminer le champ de vitesse résultant et le potentiel  $\varphi$  associé. On les exprimera en coordonnées cylindriques.

2.1. Établir l'équation des lignes de courant et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$r = \frac{D_V}{2\pi v_0} \frac{\theta_0 - \theta}{\sin \theta}, \text{ où } \theta_0 \text{ est une constante propre à chaque ligne.}$$

2.2. En exploitant la symétrie de l'écoulement, donner une signification géométrique à la constante  $\theta_0$ . En déduire qu'il existe deux familles de lignes de courant, qui se distinguent par la valeur de  $\theta_0$  relativement à  $\pi$ , et les décrire qualitativement.

2.3. Décrire le cas  $\theta_0 = \pi$ . Comment déterminer sans calcul l'ordre de grandeur de la distance minimale  $r_{\min}$  d'une telle ligne à la source ? Représenter les lignes de courant de l'écoulement.

3. On ne tient compte d'aucun champ de force extérieur.

3.1. Montrer que la pression est uniforme dans le jet loin de la source. On la notera  $P_0$ . Exprimer ensuite le champ de pression  $P(M)$  en fonction de  $P_0$ ,  $\mu$ ,  $v_0$  et de  $v(M)$ .

3.2. Déterminer le champ de pression au voisinage immédiat d'un point  $Q$  du fluide de vitesse nulle après avoir précisé sa position. On utilisera pour cela un développement en  $\frac{y}{r_{\min}}$  et  $\frac{x + r_{\min}}{r_{\min}}$  limité au deuxième ordre.

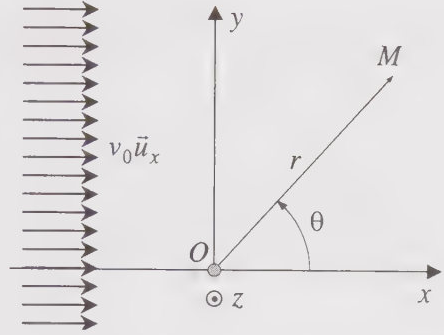
3.3. Quelle est l'allure des isobares dans ce voisinage ? En déduire le mouvement d'une particule quasi ponctuelle qu'on aurait placé en ce point.

4.1. Exprimer la composante  $v_x$  de la vitesse en fonction de  $D_I$ ,  $x$  et de  $y$  de manière à mettre en évidence la perturbation sur le jet qu'exerce la présence de la source.

4.2. On définit la zone perturbée de l'écoulement comme le domaine dans lequel on a  $|v_x - v_0| > \frac{v_0}{10}$ . Déterminer sa frontière et montrer que la perturbation s'exerce assez loin en amont de la source. Représenter quelques profils verticaux de vitesse horizontale sur des plans d'abscisse fixée.

5. Qu'est ce qui changerait si la source était ponctuelle et isotrope ?

1. L'écoulement lié à la source seule constitue un problème invariant par rotation autour de  $Oz$  et par translation le long de cet axe. Le champ de vitesse est nécessairement radial et s'écrit donc en coordonnées cylindriques  $\vec{v}_1(M) = v(r)\vec{u}_r$ .



L'équation de continuité donne alors :

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) = 0, \text{ soit } rv = \text{cte.}$$

Il reste à déterminer la cte. Le débit volumique de la source s'écrit à travers un cylindre de hauteur unité et d'axe  $Oz$  :

$$D_V = \int_{S_l} \vec{v}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S_l} \frac{\text{cte}}{r} \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 \frac{\text{cte}}{r} r d\theta dz = \int_0^{2\pi} \frac{\text{cte}}{r} r d\theta = 2\pi \text{cte},$$

l'intégration portant uniquement sur sa surface latérale  $S_l$  car le produit scalaire  $\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}$  est nul sur les faces supérieure et inférieure. On a ainsi :

$$\vec{v}_1 = \frac{D_V}{2\pi r} \vec{u}_r \text{ et il s'agit d'un gradient évident :}$$

$$\frac{D_V}{2\pi r} \vec{u}_r = \frac{d}{dr} \left( \frac{D_V}{2\pi} \ln(r) \right) \vec{u}_r = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left( \frac{D_V}{2\pi} \ln(r) \right)$$

à une constante additive près.

L'écoulement lié au jet présente un potentiel encore plus évident :

$$\vec{v}_2 = v_0 \vec{u}_x = \frac{d}{dx} (v_0 x) \vec{u}_x = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (v_0 x) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (v_0 r \cos \theta),$$

toujours à une constante additive près.

Comme les écoulements « partiels », associés respectivement à la source et au jet, sont potentiels, ils vérifient l'équation de Laplace, qui est linéaire. On peut donc additionner les vitesses et les potentiels pour décrire l'écoulement résultant.

On obtient ainsi le champ de vitesse :

$$\vec{v} = \frac{D_V}{2\pi r} \vec{u}_r + v_0 \vec{u}_x = \frac{D_V}{2\pi r} \vec{u}_r + v_0 \cos \theta \vec{u}_r - v_0 \sin \theta \vec{u}_\theta$$

et le potentiel :

$$\varphi(M) = \frac{D_V}{2\pi} \ln(r) + v_0 r \cos \theta,$$

à une constante additive près.

2.1. Il s'agit d'un problème plan et les lignes de courant sont toutes planes, dans un plan parallèle à  $Oxy$ . On est donc pour l'une d'entre elles à  $z$  constant et on écrit que les vecteurs  $\vec{v}(M)$  et  $d\vec{l}$  tangent à celle-ci sont colinéaires :

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge d\vec{l} = \vec{0} &= \begin{vmatrix} v_r & dr \\ v_\theta & r d\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (v_r r d\theta - v_\theta dr) \vec{u}_z \\ &= \left[ \left( \frac{D_V}{2\pi r} + v_0 \cos \theta \right) r d\theta + v_0 \sin \theta dr \right] \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Elle est donc définie par l'équation différentielle :

$$\left( \frac{D_V}{2\pi r} + v_0 \cos \theta \right) r d\theta + v_0 \sin \theta dr = 0, \text{ soit :}$$

$$\frac{D_V}{2\pi} d\theta + v_0 d(r \sin \theta) = 0.$$

Elle s'intègre en :

$$\frac{D_V}{2\pi} \theta + v_0 r \sin \theta = \text{cte}, \text{ ce qui donne } r = \frac{\text{cte} - \frac{D_V}{2\pi} \theta}{v_0 \sin \theta}.$$

On redéfinit la constante d'intégration de manière à écrire :

$$r = \frac{\frac{D_V}{2\pi} \theta_0 - \frac{D_V}{2\pi} \theta}{v_0 \sin \theta} = \frac{D_V}{2\pi v_0} \frac{\theta_0 - \theta}{\sin \theta}.$$

2.2. Le plan  $Oxz$  est de symétrie pour le problème. Il suffit donc de déterminer les lignes de courant dans le demi-espace  $y \geq 0$  pour connaître entièrement la topographie de l'écoulement. On se limite par conséquent à  $0 \leq \theta \leq \pi$  dans nos calculs, auquel cas  $\theta$  a un sinus positif et,  $r$  étant positif par définition,  $\theta_0$  constitue, du fait de la formule précédente, la plus grande valeur que peut prendre théoriquement  $\theta$  sur une ligne de courant. Elle est de ce fait strictement positive puisque si elle est nulle on a forcément  $\theta = 0$  quel que soit  $r$ , ce qui représente le demi-axe  $Ox$  du côté  $x \geq 0$  qui est une ligne de courant triviale. Mais rien ne prouve que la valeur  $\theta_0$  soit accessible à  $\theta$  sur une ligne donnée.

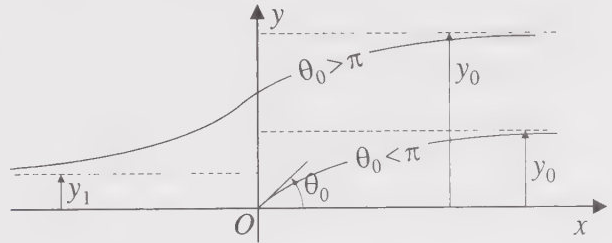
Puisque le problème est invariant par translation le long de  $Oz$ , plaçons-nous dans le plan d'équation  $z = 0$ . On peut écrire également l'équation de la ligne de courant :

$$y = r \sin \theta = \frac{D_V}{2\pi\nu_0} (\theta_0 - \theta),$$

ce qui permet de voir que, quand  $\theta$  tend vers 0, elle est équivalente à une droite horizontale d'ordonnée  $y_0 = \frac{D_V \theta_0}{2\pi\nu_0}$ . Comme  $y$  reste fini et  $\theta$  tend vers 0,  $r$  devient très grand, ce qui signifie qu'il s'agit d'un comportement asymptotique loin de  $O$  du côté  $x > 0$ .

Pour  $\theta_0 < \pi$ , on peut faire l'interprétation géométrique suivante. Quand  $\theta$  tend vers  $\theta_0$  on voit que  $r$  tend vers 0, ce qui signifie que  $\theta_0$  représente l'angle que forme la ligne de courant considérée avec l'axe  $Ox$  lorsqu'elle atteint la source.

Par contre, pour  $\theta_0 > \pi$ ,  $\theta$  ne peut pas tendre vers  $\theta_0$  et par conséquent  $r$  ne s'annule pas. La ligne de courant n'atteint pas la source. De plus,  $\theta$  peut alors croître jusqu'à  $\pi$  et  $r$  diverge. On retrouve un



comportement asymptotique  $y_1 = \frac{D_V}{2\pi\nu_0} (\theta_0 - \pi)$ , ce qui correspond à une droite horizontale d'ordonnée inférieure à  $y_0$ .

Finalement on obtient les deux types de courbes ci-dessus.

2.3. La limite qui les sépare correspond à l'équation :

$$r = \frac{D_V}{2\pi\nu_0} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta} = \frac{D_V}{2\pi\nu_0} \frac{\pi - \theta}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{D_V}{2\pi\nu_0} \frac{1}{\text{sinc}(\pi - \theta)},$$

avec  $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ . La fonction sinus cardinal est monotone décroissante entre 0 et  $\pi$ . La courbe limite passe donc à une distance minimale de la source pour  $\theta = \pi$ , qui correspond à la valeur maximale de  $\text{sinc}(\pi - \theta)$ , soit pour un point de l'axe  $Ox$  du côté  $x < 0$ , et elle vaut  $r_{\min} = \frac{D_V}{2\pi\nu_0}$ . Puis elle s'en éloigne monotonement quand  $\theta$  décroît, c'est-à-dire quand  $x$  croît (représentée en gras sur la figure de la page suivante ci-dessous et passant par le point  $Q$  défini à la question 3.2).



$$\begin{aligned}
 v^2 &= \left( \frac{D_V}{2\pi r} + v_0 \cos \theta \right)^2 + (v_0 \sin \theta)^2 = v_0^2 + \frac{D_V^2}{4\pi^2 r^2} + \frac{D_V v_0 \cos \theta}{\pi r} \\
 &= v_0^2 + \frac{D_V^2}{4\pi^2 r^2} + \frac{D_V v_0 r \cos \theta}{\pi r^2} = v_0^2 + \frac{D_V^2}{4\pi^2 (x^2 + y^2)} + \frac{D_V v_0 x}{\pi (x^2 + y^2)}.
 \end{aligned}$$

Au voisinage de  $Q$ , on écrit  $x = -r_{\min} + X$  avec  $|X| \ll r_{\min}$  et, comme on a aussi  $|y| \ll r_{\min}$  puisqu'on est au voisinage de  $\theta = \pi$ , on fait un développement limité en  $X$  et  $y$ . Il est nécessaire d'aller au second ordre car les termes du premier s'annulent (ce qu'on ne peut savoir a priori) :

$$\begin{aligned}
 v^2 &= v_0^2 + \left( \frac{D_V^2}{4\pi^2} + \frac{D_V v_0 x}{\pi} \right) (r_{\min}^2 - 2r_{\min} X + X^2 + y^2)^{-1} \\
 &= v_0^2 + v_0^2 \left[ r_{\min}^2 + 2r_{\min} (-r_{\min} + X) \right] (r_{\min}^2 - 2r_{\min} X + X^2 + y^2)^{-1} \\
 &= v_0^2 + v_0^2 \left( -1 + \frac{2X}{r_{\min}} \right) \left( 1 - \frac{2X}{r_{\min}} + \frac{X^2 + y^2}{r_{\min}^2} \right)^{-1} \\
 &\approx v_0^2 + v_0^2 \left( -1 + \frac{2X}{r_{\min}} \right) \left[ 1 + \frac{2X}{r_{\min}} - \frac{X^2 + y^2}{r_{\min}^2} + \left( \frac{2X}{r_{\min}} \right)^2 \right] \\
 &\approx v_0^2 + v_0^2 \left[ -1 - \frac{2X}{r_{\min}} + \frac{X^2 + y^2}{r_{\min}^2} - \left( \frac{2X}{r_{\min}} \right)^2 + \frac{2X}{r_{\min}} \left( 1 + \frac{2X}{r_{\min}} \right) \right] \\
 &\approx v_0^2 \left[ \frac{X^2 + y^2}{r_{\min}^2} \right].
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$P = P_0 + \frac{\mu v_0^2}{2} \left( 1 - \frac{X^2 + y^2}{r_{\min}^2} \right).$$

3.3. Les isobares correspondent ainsi à  $X^2 + y^2 = \text{cte}$  au voisinage de  $Q$  et constituent des cercles de centre  $Q$  dans le plan  $Oxy$  (et des cylindres dans l'espace).

La pression décroît dans toutes les directions de la même manière depuis  $Q$ . Par conséquent, une particule placée en ce point serait en état stationnaire instable. A la moindre perturbation elle s'échappera radialement, avec la même probabilité dans toute direction.

4.1. On repart de la vitesse exprimée dans la base cylindrique :

$$\begin{aligned}
 v_x &= \vec{v} \cdot \vec{u}_x = \left( \frac{D_V}{2\pi r} + v_0 \cos \theta \right) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x - v_0 \sin \theta \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x \\
 &= \left( \frac{D_V}{2\pi r} + v_0 \cos \theta \right) \cos \theta + v_0 \sin^2 \theta = v_0 + \frac{D_V \cos \theta}{2\pi r} \\
 &= v_0 + \frac{D_V r \cos \theta}{2\pi r^2} = v_0 + \frac{D_V x}{2\pi(x^2 + y^2)}.
 \end{aligned}$$

A  $x$  fixé, elle est de la forme  $v_0 + \frac{\text{cte}}{\text{cte}' + y^2}$  et le second terme représente la perturbation qu'exerce la source sur le jet (la composante  $v_y$  étant quant à elle entièrement due à cette perturbation).

4.2. On peut encore écrire :

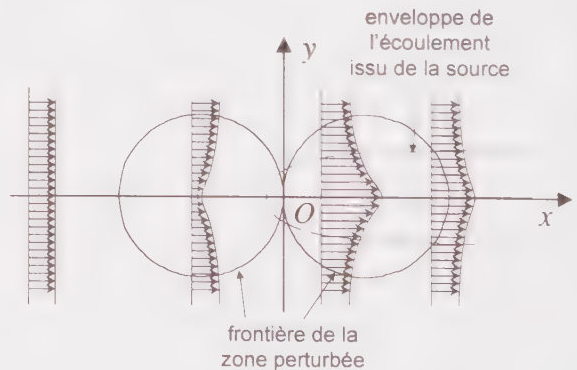
$$v_x = v_0 \left( 1 + \frac{D_V x}{2\pi v_0 (x^2 + y^2)} \right) = v_0 \left( 1 + \frac{r_{\min} x}{x^2 + y^2} \right).$$

On cherche la limite de la zone perturbée en écrivant :

$$\left| \frac{r_{\min} x}{x^2 + y^2} \right| = 0,1 = \frac{r_{\min} |x|}{x^2 + y^2} \text{ et on en déduit :}$$

$$y^2 + x^2 - 10r_{\min}|x| = 0, \text{ soit } y^2 + (x \pm 5r_{\min})^2 = 25r_{\min}^2.$$

Il s'agit, dans le plan  $Oxy$ , de deux cercles de rayon  $5r_{\min}$  et de centres  $(\pm 5r_{\min}, 0)$  et dans l'espace de deux cylindres. Ils passent tous les deux par la source. On voit sur la figure ci-contre que la zone perturbée se distingue nettement de celle traversée par le fluide issu de la source.



Les profils de vitesse montrent

un « déficit » en amont de la source et un excédent en aval. Même si le fluide émis par la source ne se mélange pas au jet, elle perturbe celui-ci à une distance considérable.

5. Dans ce cas, le problème serait invariant par rotation autour de l'axe  $Ox$ , et non par translation le long de  $Oz$ , mais les résultats devraient rester qualitativement semblables dans un plan contenant  $Ox$ .

## EXERCICE 3

### Interaction de deux tourbillons

Un écoulement tourbillonnaire, ou vortex, est défini par le champ de vitesse suivant en coordonnées cylindriques dans un fluide parfait incompressible de masse volumique  $\mu$  :

$$\vec{v}(M) = \frac{\mathcal{C}}{2\pi r} \vec{u}_\theta, \text{ avec } \mathcal{C} \text{ constante.}$$

On admet le problème invariant par translation le long de l'axe  $Oz$  et on se place dans le plan  $Oxy$  (tous les points de ce plan se prolongent en réalité par des droites parallèles à  $Oz$  dans l'espace).

1.1. Montrer que l'écoulement est potentiel et déterminer le champ de pression en la notant  $P_0$  à l'infini et sans tenir compte du champ de pesanteur.

1.2. Que se passe-t-il près du centre  $O$  du tourbillon ?

1.3. Donner une signification physique à  $\mathcal{C}$ .

2.1. Montrer que, pour un écoulement plan de la forme :

$$\vec{v}(M) = v_r(r, \theta) \vec{u}_r + v_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta,$$

il existe un champ de scalaire  $A(r, \theta)$ , appelé fonction de courant de l'écoulement, tel que  $\vec{v} = \overline{\text{rot}}(A \vec{u}_z)$ . On rappelle qu'en coordonnées cylindriques :

$$\overline{\text{rot}} \vec{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{\partial}{\partial r}(r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \frac{\vec{u}_z}{r}.$$

2.2. Montrer que  $A$  est uniforme sur toute ligne de courant.

2.3. Donner l'expression de  $A$  pour notre écoulement tourbillonnaire.

3. On place deux tourbillons de même constante  $\mathcal{C}$  aux points de coordonnées respectives  $Q(a, 0)$  et  $Q'(-a, 0)$ .

3.1. Quelle est la fonction de courant de l'écoulement résultant ? L'exprimer en coordonnées cartésiennes.

3.2. En déduire l'équation des lignes de courant.

3.3. Les représenter graphiquement après avoir étudié les cas limites très loin de  $O$  et très près des singularités.

3.4. Montrer qualitativement qu'il existe trois secteurs d'écoulement distincts. Donner l'équation de la frontière les séparant.

4. La constante du tourbillon placé en  $Q'(-a, 0)$  est maintenant égale à  $-\mathcal{C}$ .

4.1. Quelle est la fonction de courant de l'écoulement résultant ? L'exprimer en coordonnées cartésiennes.

4.2. En déduire l'équation des lignes de courant et les représenter graphiquement.

4.3. Déterminer le champ de vitesse.

4.4. On note  $P_0$  la pression à l'infini. Que vaut-elle dans le plan  $x = 0$  ?

4.5. Un mur de longueur et de hauteur infinies est placé dans le plan d'équation  $x = 0$ . Dans le demi-espace  $x > 0$  se trouve un tourbillon de centre à l'abscisse  $a$  et dans l'autre demi-espace le fluide est au repos, à la pression  $P_0$ . Que peut-on dire de la cinématique de cet écoulement ? Quelle force subit le mur par unité de hauteur le long de  $Oz$  et quel mouvement éventuel en résulte-t-il ?

1.1. On cherche si l'équation  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  admet une solution. En coordonnées cylindriques elle s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\mathcal{C}}{2\pi r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

La solution  $\varphi = \frac{\mathcal{C}\theta}{2\pi} + \text{cte}$  convient. Donc il s'agit bien d'un écoulement potentiel

La fonction scalaire  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu}$  est uniforme, puisqu'il n'y a pas de champ de force extérieur donc pas de terme d'énergie potentielle massique à prendre en compte. Si on note  $P_0$  la pression à l'infini, où la vitesse s'annule, on en déduit le champ de pression :

$$P(M) = P_0 - \frac{\mu}{2} \frac{\mathcal{C}^2}{4\pi r^2}.$$

1.2. On voit que  $P$  devient négative à une distance inférieure à  $\sqrt{\frac{\mu \mathcal{C}^2}{8\pi P_0}}$ , ce qui n'a pas de sens. De plus, on constate que la vitesse diverge quand  $r$  tend vers 0. Ces deux résultats aberrants montrent que l'expression du champ de vitesse ne peut rester celle-ci quand on se rapproche du centre de l'écoulement. Elle ne peut être acceptable qu'au-delà d'une certaine distance.

1.3. Si on calcule la circulation du champ de vitesse autour de n'importe quel contour fermé  $\Gamma$  du plan  $Oxy$  incluant le point  $O$ , en tournant dans le sens direct, on obtient :

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{C}}{2\pi r} \vec{u}_{\theta} \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_{\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathcal{C}}{2\pi r} r d\theta = \frac{\mathcal{C}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \mathcal{C}.$$

La constante  $\mathcal{C}$  est donc cette circulation, indépendante du contour choisi.

2.1. Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité  $\text{div } \vec{v} = 0$  entraîne l'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{v} = \overline{\text{rot}} \vec{A}$ . S'agissant d'un pseudo-vecteur, il a des propriétés de symétrie inverses de celles du champ de vitesse et lui est donc partout orthogonal. Puisque  $\vec{v}$  est orthoradial, le choix le plus pratique est de prendre  $\vec{A}$  suivant  $\vec{u}_z$ <sup>2</sup>. Comme le champ de vitesse est plan, dans le plan orthogonal à  $Oz$ , aucune grandeur, donc en particulier  $A = \vec{A} \cdot \vec{u}_z$ , ne doit dépendre de  $z$ .

Plus précisément, on a l'égalité vectorielle  $\overline{\text{rot}}(A\vec{u}_z) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_{\theta}$  et la fonction  $A$  est définie par les deux équations aux dérivées partielles :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v_{\theta} = -\frac{\partial A}{\partial r}.$$

2.2. Sur une ligne de courant, le produit vectoriel  $\vec{v}(M) \wedge d\vec{l}$  est nul en tout point. Comme le champ de vitesse possède une composante  $v_z$  identiquement nulle, toutes ces lignes sont contenues dans des plans parallèles à  $Oz$  et le produit vectoriel s'écrit dans chacun :

$$\vec{v}(M) \wedge d\vec{l} = \begin{vmatrix} v_r & \\ v_{\theta} & \\ 0 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ 0 \end{vmatrix} = (v_r r d\theta - v_{\theta} dr) \vec{u}_z = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial A}{\partial r} dr \right) \vec{u}_z = dA \vec{u}_z.$$

On a donc  $dA$  nul entre deux points infiniment proches d'une ligne de courant, ce qui signifie que  $A$  est uniforme sur celle-ci.

2.3. Dans notre cas, les deux équations aux dérivées partielles sont :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad v_{\theta} = -\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\mathcal{C}}{2\pi r}.$$

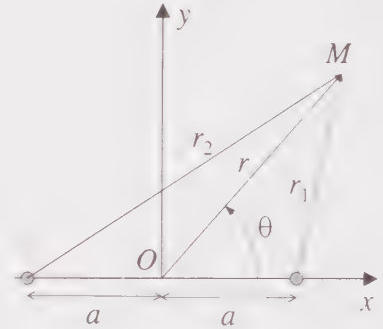
On en déduit immédiatement :

<sup>2</sup> Notamment plus pratique que suivant  $\vec{u}_r$ , qui ne définit pas une direction fixe.

$$A = -\frac{C}{2\pi} \ln(r) + \text{cte.}$$

3.1. Comme le rotationnel est un opérateur linéaire, on a additivité des fonctions de courant :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{C}{2\pi} \ln(r_1) + \text{cte}_1 - \frac{C}{2\pi} \ln(r_2) + \text{cte}_2 \\ &= -\frac{C}{2\pi} \ln(r_1 r_2) + \text{cte} \\ &= -\frac{C}{4\pi} \ln(r_1^2 r_2^2) + \text{cte.} \end{aligned}$$



Avec :

$$r_1^2 = (x - a)^2 + y^2 \quad \text{et} \quad r_2^2 = (x + a)^2 + y^2$$

on écrit en coordonnées cartésiennes :

$$A = -\frac{C}{4\pi} \ln \left[ \left[ (x - a)^2 + y^2 \right] \left[ (x + a)^2 + y^2 \right] \right] + \text{cte.}$$

3.2. Les lignes de courant sont définies par  $A = \text{cte}$ , soit ici :

$$\left[ (x - a)^2 + y^2 \right] \left[ (x + a)^2 + y^2 \right] = K.$$

Elles correspondent à des courbes fermées du quatrième degré. On voit que la constante  $K$  est nécessairement strictement positive (elle s'annule bien au niveau de chaque centre mais un point ne constitue pas une ligne de courant).

Pour les obtenir sous forme explicite, on calcule le produit de gauche :

$$K = (x^2 + a^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + a^2 + y^2 + 2ax) = (x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2 x^2$$

et on en déduit :

$$y^2 = \sqrt{K + 4a^2 x^2} - x^2 - a^2,$$

la racine  $-\sqrt{K + 4a^2 x^2} - x^2 - a^2$  étant exclue puisque négative.

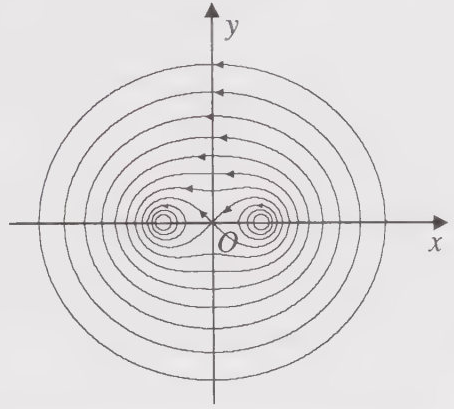
3.3. Très loin de l'origine, on doit avoir des valeurs grandes de  $x^2 + y^2$  devant  $a^2$  (donc la constante  $K$  est également grande) et on peut alors écrire :

$$\left[ x^2 + y^2 - 2ax + a^2 \right] \left[ x^2 + y^2 + 2ax + a^2 \right] = K \approx \left[ x^2 + y^2 \right]^2$$

On obtient ainsi des cercles de centre  $O$  (d'axe  $Oz$  dans l'espace) et de rayon  $K^{1/4}$ .

Très près du centre de chaque tourbillon, une des deux vitesses est dominante devant l'autre et on obtient donc des lignes de courant semblables à ce qu'elles seraient en présence d'un seul vortex, c'est-à-dire des cercles centrés sur celui-ci.

Les lignes de courant ont au total l'allure ci-contre et on voit que la « connexion » entre les deux familles de cercles limites fait nécessairement apparaître une ligne singulière qui, du fait de la symétrie du problème, passe par l'axe  $Oz$ .



3.4. Loin des centres, on a quasiment un écoulement tourbillonnaire de constante  $2\mathcal{C}$ . Près des centres, on a deux tourbillons distincts et on voit que les fluides ne se mélangent pas. Chacun est enfermé dans une enveloppe dont la forme évoque en coupe un « 8 ». On distingue donc deux écoulements propres autour de chaque singularité et un écoulement mixte, séparés par l'enveloppe croisant l'axe  $Oz$ .

Pour trouver cette enveloppe, on cherche quelles lignes de courant sont compatibles avec  $x = y = 0$ . On voit immédiatement qu'il faut avoir  $K = a^4$  et on obtient :

$$y^2 = \sqrt{a^4 + 4a^2x^2} - x^2 - a^2.$$

En particulier, pour  $y = 0$ , cette frontière croise l'axe  $Ox$  aux abscisses  $x = \pm\sqrt{2}a$ .

4.1. La fonction de courant est maintenant :

$$A = -\frac{\mathcal{C}}{2\pi} \ln(r_1) + \text{cte}_1 + \frac{\mathcal{C}}{2\pi} \ln(r_2) + \text{cte}_2 = \frac{\mathcal{C}}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \text{cte} = \frac{\mathcal{C}}{4\pi} \ln\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + \text{cte},$$

soit en coordonnées cartésiennes :

$$A = \frac{\mathcal{C}}{4\pi} \ln\left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}\right] + \text{cte}.$$

4.2. Les lignes de courant sont ici définies par :

$$\left[(x+a)^2 + y^2\right] = K\left[(x-a)^2 + y^2\right]$$

et il s'agit cette fois de cercles. La constante  $K$  est encore nécessairement positive.

On développe les carrés :

$$(x^2 + a^2 + y^2 + 2ax) = K(x^2 + a^2 + y^2 - 2ax) \text{ et on obtient :}$$

$$(1 - K)(x^2 + a^2 + y^2) + 2(1 + K)ax = 0,$$

soit en posant  $k = \frac{1 + K}{1 - K}$  :

$$x^2 + a^2 + y^2 + 2kax = 0 = (x + ka)^2 + y^2 + (1 - k^2)a^2$$

et il vient enfin :

$$(x + ka)^2 + y^2 = (k^2 - 1)a^2.$$

Ces cercles ont leur centre sur l'axe  $Ox$  et leur rayon  $a\sqrt{k^2 - 1}$  est inférieur à leur distance  $a|k|$  à  $O$ .

Quand la constante  $k$  varie de 1 à l'infini (car  $K$  est une constante positive), on obtient la famille ci-contre.

4.3. On calcule le champ de vitesse :

$$\vec{v} = \overline{\text{rot}}(A\vec{u}_z) = \frac{\partial A}{\partial y}\vec{u}_x - \frac{\partial A}{\partial x}\vec{u}_y,$$

en adoptant la forme la plus simple pour dériver (différence de logarithmes plutôt que logarithme d'un rapport) :

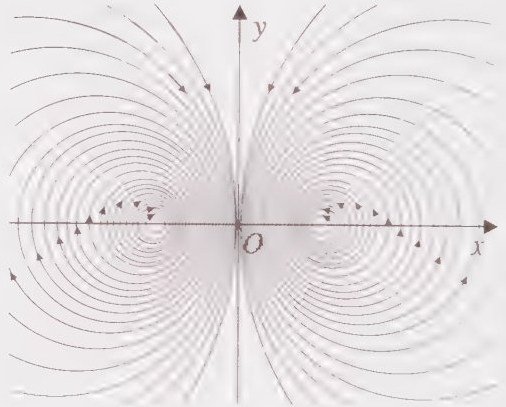
$$A = \frac{c}{4\pi} \left\{ \ln[(x+a)^2 + y^2] - \ln[(x-a)^2 + y^2] \right\}.$$

On obtient ainsi :

$$\vec{v} = \frac{c}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{2y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{2y}{(x-a)^2 + y^2} \right] \vec{u}_x - \left[ \frac{2(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right] \vec{u}_y \right\},$$

En particulier, pour  $x = 0$  on a :

$$\vec{v} = -\frac{ca}{\pi} \frac{\vec{u}_y}{a^2 + y^2},$$

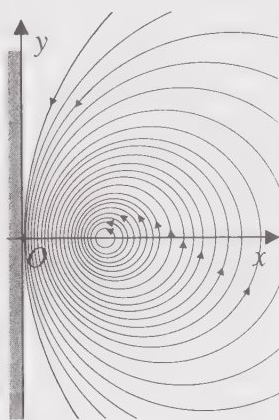


4.4. On sait que  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu}$  est uniforme dans un écoulement potentiel et on obtient ainsi, puisque la vitesse s'annule à l'infini :

$$P(x=0) = P_0 - \frac{\mu}{2} v^2(x=0) = P_0 - \frac{\mu}{2} \frac{\mathcal{C}^2}{\pi^2} \frac{a^2}{(a^2 + y^2)^2}.$$

4.5. Ce nouveau problème admet dans le demi-espace  $x \geq 0$  des conditions aux limites respectées par la superposition des deux tourbillons étudiées, soit un tourbillon placé en  $x = a$  et une vitesse colinéaire à  $Oy$  en  $x = 0$ . Donc il possède la même solution dans ce demi-espace (théorème d'unicité de l'équation de Laplace) et la pression sur la surface du mur est par conséquent donnée par l'expression précédente. La force de pression par unité de hauteur est ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{z=0}^1 \int_{y=-\infty}^{+\infty} [P_0 - P(x=0^+)] dy dz \vec{u}_x \\ &= \int_{z=0}^1 \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{2} \frac{\mathcal{C}^2}{\pi^2} \frac{a^2}{(a^2 + y^2)^2} dy dz \vec{u}_x \\ &= \frac{\mu}{2} \frac{\mathcal{C}^2 a^2}{\pi^2} \vec{u}_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(a^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$



Pour calculer l'intégrale, on fait le changement de variable  $y = a \tan \theta$ , ce qui ramène le domaine d'intégration

au segment  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\mu}{2} \frac{\mathcal{C}^2}{\pi^2 a^2} \vec{u}_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)^2} = \frac{\mu}{2} \frac{\mathcal{C}^2}{\pi^2 a} \vec{u}_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\mu}{4} \frac{\mathcal{C}^2}{\pi^2 a} \vec{u}_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{\mu}{4} \frac{\mathcal{C}^2}{\pi^2 a} \vec{u}_x \left[ \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu \mathcal{C}^2}{4\pi a} \vec{u}_x. \end{aligned}$$

On constate que le mur est attiré vers le tourbillon et ceci d'autant plus qu'ils sont proches l'un de l'autre. Rigoureusement, le mur a une masse infinie puisqu'il a une aire infinie et son accélération est par conséquent nulle. Mais le même calcul avec un mur de dimensions suffisamment grandes tout en restant finies ne changerait pas la dépendance en  $\frac{1}{a}$  et il se déplacerait alors vers le tourbillon avec une accélération croissante.

Il s'agit encore de l'équivalent d'un effet Venturi. Le resserrement marqué des lignes de courant près du mur montre que la vitesse y augmente considérablement et la dépression qui en résulte « aspire » le mur vers la droite.

## EXERCICE 4

### Superposition d'un doublet et d'un jet - écoulement autour d'une sphère

Dans un repère cartésien  $Oxyz$ , on a placé une source et un « puits », ponctuels et isotropes, respectivement aux points  $A(0,0,-a)$  et  $B(0,0,a)$ , le paramètre  $a$  étant positif. Ils ont en valeur absolue un même débit volumique  $D_V$ , indépendant du temps, de fluide parfait incompressible de masse volumique  $\mu$ . L'écoulement est radial à proximité immédiate de la source et du « puits ». On repère un point  $M$  de l'espace par ses coordonnées sphériques et on donne dans ce système de coordonnées :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi},$$

$$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi.$$

On appellera dans ce problème fonction de courant associée à un écoulement le champ de scalaire  $\psi(r, \theta, \phi)$  tel que le champ de vitesse s'écrive  $\vec{v} = \overline{\operatorname{rot}}(\psi \vec{u}_\phi)$ .

- 1.1. Calculer la fonction de courant pour une source de débit volumique  $D_V$  placée en  $O$ . On pourra commencer par la recherche du champ de vitesse à partir de l'équation de continuité.
- 1.2. En déduire celle  $\psi_1$  de la superposition de la source et du puits. L'exprimer en coordonnées sphériques.
- 2.1. Donner l'expression de  $\psi_1$  quand  $a$  tend vers 0, mais le produit  $D_V a$  reste fini. On parle alors de dipôle ou de doublet.
- 2.2. Cet écoulement est-il potentiel ?
3. On considère maintenant un écoulement parallèle uniforme de vitesse  $v_0 \vec{u}_z$ . Quelle est sa fonction de courant  $\psi_2$  ?
4. On superpose enfin celui-ci et le doublet. Exprimer la nouvelle fonction de courant  $\psi_1$  en fonction de  $D_V a$ ,  $v_0$ ,  $r$  et  $\theta$ .
5. Montrer que les lignes de courant ont pour équation  $r \sin \theta \psi_1 = \text{cte}$ .

6. En déduire l'équation des lignes de courant et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\left( r^2 - \frac{R^3}{r} \right) \sin^2 \theta = L^2,$$

$R$  étant une constante, que l'on définira en fonction de  $D_V a$  et  $v_0$ , et  $L$  étant une caractéristique propre à chaque ligne, ayant une signification géométrique éventuelle.

7. Représenter graphiquement les lignes de courant et montrer que le jet reste à l'extérieur d'une certaine surface.

8. Pour quelle raison l'écoulement extérieur à celle-ci est-il identique à celui obtenu par un jet venant rencontrer une sphère matérielle fixe ? Quelles sont les caractéristiques du jet et de la sphère ?

9. Déterminer le champ de vitesse autour de la sphère matérielle.

10. On note  $P_0$  la pression à l'infini. Calculer la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur cette sphère. Commenter.

1.1. Le champ de vitesse est de la forme  $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_r$ , puisque la source est isotrope et l'écoulement radial depuis  $O$ . Pour un fluide incompressible on a  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , soit ici :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = 0.$$

On en déduit une vitesse de la forme  $v = \frac{K}{r^2}$ ,  $K$  étant une constante à déterminer.

Pour cela, on écrit l'expression du débit volumique en utilisant une surface sphérique  $S$  centrée sur l'origine :

$$\begin{aligned} D_V &= \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{K}{r^2} \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r = K \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi K \end{aligned}$$

et on obtient finalement :

$$\vec{v} = \frac{D_V}{4\pi r^2} \vec{u}_r.$$

On a ensuite la relation vectorielle :

$$\vec{v} = \overline{\text{rot}}(\psi \vec{u}_\phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi) \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi) \vec{u}_\phi$$

de laquelle on déduit les deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi) = \frac{D_V}{4\pi r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial r} (r \psi) = 0$$

La première s'écrit encore :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi) = \frac{D_V \sin \theta}{4\pi r} \quad \text{et s'intègre en :}$$

$$\sin \theta \psi = -\frac{D_V \cos \theta}{4\pi r} + f(r, \phi), \quad \text{soit} \quad \psi = -\frac{D_V \cotan \theta}{4\pi r} + \frac{f(r, \phi)}{\sin \theta}$$

La seconde donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{f(r, \phi)}{\sin \theta} - \frac{D_V \cotan \theta}{4\pi} \right) = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{r f(r, \phi)}{\sin \theta} = g(\theta, \phi)$$

et on obtient finalement :

$$\psi = -\frac{D_V \cotan \theta}{4\pi r} + \frac{g(\theta, \phi)}{r}$$

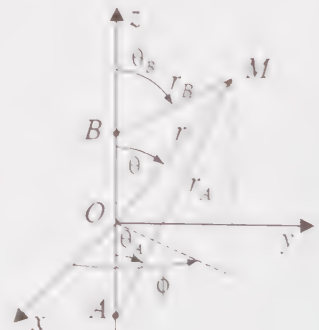
La fonction  $g$  ne modifiant pas le champ de vitesse, car quelle que soit  $g$  on obtient la même expression de  $\vec{v} = \overline{\text{rot}}(\psi \vec{u}_\phi)$ , faisons le choix le plus simple d'une fonction nulle :

$$\psi = -\frac{D_V \cotan \theta}{4\pi r}$$

1.2 On obtient ainsi pour l'association d'une source et d'un puits, en se référant aux notations de la figure ci-contre :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{D_V \cotan \theta_A}{4\pi r_A} - \frac{-D_V \cotan \theta_B}{4\pi r_B} \\ &= \frac{D_V}{4\pi} \left( \frac{\cotan \theta_B}{r_B} - \frac{\cotan \theta_A}{r_A} \right). \end{aligned}$$

En toute rigueur, ce sont les vecteurs  $\psi \vec{u}_\phi$  qui s'additionnent en tout point de l'écoulement, mais  $\vec{u}_\phi$  est le même en  $M$  que l'on prenne  $O$ ,  $A$  ou  $B$  comme origine.



On fait ensuite la substitution :

$$\begin{aligned} \frac{\cotan \theta_A}{r_A} &= \frac{r_A \cos \theta_A}{r_A^2 \sin \theta_A} = \frac{r \cos \theta + a}{r_A r \sin \theta} = \frac{r \cos \theta + a}{AM r \sin \theta} \\ &= \frac{r \cos \theta + a}{r \sin \theta \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\pi - \theta)}} = \frac{r \cos \theta + a}{r \sin \theta \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta}} \end{aligned}$$

et de même pour  $\frac{\cotan \theta_B}{r_B}$  en remplaçant  $a$  par  $-a$ , ce qui donne :

$$\Psi_1 = \frac{D_V}{4\pi r \sin \theta} \left( \frac{r \cos \theta - a}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} - \frac{r \cos \theta + a}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta}} \right).$$

2.1. Dans ce cas, il faut préalablement faire un développement limité au premier ordre en  $\frac{a}{r}$  car remplacer directement  $a$  par 0 donne un résultat nul :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{D_V}{4\pi r \sin \theta} \left[ \frac{r \cos \theta - a}{r \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a \cos \theta}{r} \right)^{1/2}} - \frac{r \cos \theta + a}{r \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a \cos \theta}{r} \right)^{1/2}} \right] \\ &\approx \frac{D_V}{4\pi r^2 \sin \theta} \left[ (r \cos \theta - a) \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{r} \right) - (r \cos \theta + a) \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{r} \right) \right] \\ &= \frac{D_V}{4\pi r^2 \sin \theta} (2a \cos^2 \theta - 2a) = -\frac{D_V a \sin^2 \theta}{2\pi r^2 \sin \theta} = -\frac{D_V a \sin \theta}{2\pi r^2}. \end{aligned}$$

Passer à la limite ne modifie pas cette expression qui est donc celle recherchée.

2.2. On peut vérifier si l'écoulement est potentiel en calculant le rotationnel du champ de vitesse :

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}} \vec{v} &= \overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} (\Psi_1 \vec{u}_\phi) = \overline{\text{rot}} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Psi_1) \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi_1) \vec{u}_\theta \right] \\ &= \overline{\text{rot}} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{D_V a \sin^2 \theta}{2\pi r^2} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{D_V a \sin \theta}{2\pi r} \right) \vec{u}_\theta \right] \\ &= \overline{\text{rot}} \left[ -\frac{D_V a \cos \theta}{\pi r^3} \vec{u}_r - \frac{D_V a \sin \theta}{2\pi r^3} \vec{u}_\theta \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{D_V a \sin \theta}{2\pi r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{D_V a \cos \theta}{\pi r^3} \right) \right] \vec{u}_\phi = \vec{0} \end{aligned}$$

et il l'est effectivement.

3. On a en coordonnées sphériques :

$$v_0 \vec{u}_z = v_0 (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

et il faut intégrer les deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi_2) = v_0 \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_2) = v_0 \sin \theta.$$

La première s'écrit également :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi_2) = v_0 r \cos \theta \sin \theta \quad \text{et on en déduit :}$$

$$\sin \theta \psi_2 = \frac{v_0 r \sin^2 \theta}{2} + f(r, \phi), \quad \text{soit :}$$

$$\psi_2 = \frac{v_0 r \sin \theta}{2} + \frac{f(r, \phi)}{\sin \theta}.$$

On obtient alors avec la seconde :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \psi_2) = v_0 r \sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} [r f(r, \phi)] = v_0 r \sin \theta$$

et ainsi  $r f(r, \phi) = g(\phi)$ , d'où finalement :

$$\psi_2 = \frac{v_0 r \sin \theta}{2} + \frac{g(\phi)}{r \sin \theta}.$$

Encore une fois, la fonction  $g$  ne modifie pas le champ de vitesse et on fait le choix le plus simple d'une fonction nulle :

$$\psi_2 = \frac{v_0 r \sin \theta}{2}.$$

4. On additionne les fonctions de courant<sup>3</sup> :

$$\psi_r(M) = \psi_2(M) + \psi_1(M) = \frac{v_0 r \sin \theta}{2} - \frac{D_V a \sin \theta}{2\pi r^2}.$$

5. Une ligne de courant a pour équation  $\vec{v} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$  puisque le champ de vitesse en un point de celle-ci est colinéaire à sa tangente. Étant donné qu'aucun des trois

<sup>3</sup> La possibilité de superposer les fonctions de courant provient du fait que l'équation régissant les écoulements potentiels, l'équation de Laplace, est linéaire.

écoulements superposés ne présente de composante suivant  $\vec{u}_\phi$  de la vitesse, les lignes de courant sont toutes situées dans des plans contenant l'axe  $Oz$  et on peut donc prendre d'emblée  $v_\phi = 0$  et  $d\vec{r} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta$  pour toute ligne de courant.

On écrit ainsi :

$$\vec{v} \wedge d\vec{r} = \begin{vmatrix} v_r & dr \\ v_\theta & rd\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (v_r rd\theta - v_\theta dr)\vec{u}_\phi$$

et il faut par conséquent résoudre l'équation différentielle :

$$v_r rd\theta - v_\theta dr = 0,$$

soit en exprimant les composantes du champ de vitesse en fonction de  $\psi_t$  :

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi_t) rd\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_t) dr = 0.$$

Ceci donne en multipliant par  $r \sin \theta$  :

$$r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi_t) d\theta + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_t) dr = 0$$

et en faisant entrer dans chaque dérivée partielle une fonction de l'autre variable :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \psi_t) d\theta + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \psi_t) dr = 0.$$

On reconnaît la différentielle totale  $d(r \sin \theta \psi_t)$  et on aboutit ainsi à :

$$r \sin \theta \psi_t = \text{cte} = K.$$

6. Dans notre cas on obtient ainsi à partir de l'expression de  $\psi_t$  l'équation :

$$\frac{v_0 r^2 \sin^2 \theta}{2} - \frac{D_V a \sin^2 \theta}{2\pi r} = K = \left( v_0 r^2 - \frac{D_V a}{\pi r} \right) \frac{\sin^2 \theta}{2}.$$

On peut encore l'écrire :

$$\left( r^2 - \frac{D_V a}{\pi v_0 r} \right) \sin^2 \theta = \frac{2K}{v_0} \text{ et il suffit de poser :}$$

$$R^3 = \frac{D_V a}{\pi v_0} \text{ et } L^2 = \frac{2K}{v_0} \text{ pour obtenir effectivement :}$$

$$\left( r^2 - \frac{R^3}{r} \right) \sin^2 \theta = L^2.$$

La constante  $R$  est homogène à une longueur. D'autre part, si  $r$  peut devenir arbitrairement grand, l'équation admet la forme asymptotique :

$$r^2 \sin^2 \theta = L^2.$$

On constate ainsi que  $L$  représente la distance de la ligne de courant à l'axe  $Oz$  lorsque  $r \gg a$ . Puisque  $L^2$  est pour cette raison une grandeur positive, on a  $r > R$  en tout point de la ligne de courant. Elle reste donc systématiquement à l'extérieur de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  à partir du moment où elle peut partir à l'infini ou en provenir.

Mais on peut également imaginer que certaines lignes de courant ont au moins un de leurs points à une distance  $r$  inférieure à  $R$ . Dans ce cas  $L^2$  est négatif et on a de ce fait  $r < R$  sur la totalité de ces lignes. Elles restent ainsi à l'intérieur de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  et  $L$ , qui devient imaginaire, n'a plus aucune signification géométrique.

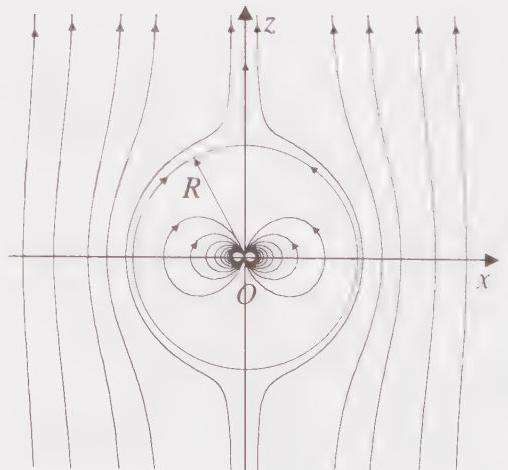
7. L'écoulement est invariant par rotation autour de  $Oz$ . On trace donc les lignes de courant seulement dans le plan  $Oxz$  (figure ci-dessous). On constate qu'il existe deux familles de courbes, séparées par une surface frontière correspondant au cas limite  $L = 0$ . Elle est définie par :

$$\left( r^2 - \frac{R^3}{r} \right) \sin^2 \theta = 0,$$

ce qui signifie soit  $\theta = 0$ , soit  $\theta = \pi$ , soit  $r = R$ .

Les deux premières solutions correspondent à l'axe  $Oz$ , lequel n'est à l'évidence pas une surface. La troisième est la sphère de rayon  $R$  déjà mentionnée et il s'agit de la surface frontière recherchée.

On constate que le jet provenant de l'infini reste à l'extérieur de cette sphère, ce qu'on retrouve analytiquement par le fait que les lignes de courant provenant de l'infini, propres au jet, sont obligatoirement associées à des valeurs positives de  $L^2$  pour lesquelles on a vu que  $r > R$ .



8. L'écoulement résultant est potentiel puisqu'il est la superposition de deux écoulements potentiels (pour le jet on a  $v_0 \vec{u}_z = \overline{\text{grad}}(v_0 z)$ ). Il est donc solution d'une équation de Laplace, qui est une équation linéaire. Les conditions aux limites du problème de l'écoulement potentiel autour d'une sphère fixe de centre  $O$  et de rayon  $R$  sont :

- vitesse  $v_0 \vec{u}_z$  à l'infini,
- vitesse purement tangentielle pour  $r = R$ ,

c'est-à-dire les mêmes que celle de l'écoulement étudié dans les questions précédentes si on se limite au sous-domaine  $r \geq R$ . Par conséquent, les deux problèmes admettent la même solution extérieure (propriété d'unicité des équations linéaires lorsque le nombre de conditions aux limites et initiales est suffisant). On vient ainsi de trouver la solution à l'écoulement d'un jet de vitesse à l'infini  $v_0 \vec{u}_z$  autour d'une

sphère de rayon  $\left(\frac{D_V a}{\pi v_0}\right)^{1/3}$  sans résoudre l'équation de Laplace.

9. On calcule les deux composantes non nulles du vecteur vitesse à partir de la fonction de courant, en notant que désormais cette expression n'est utilisée que pour  $r \geq R$  :

$$v_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi_t) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{v_0 r}{2} - \frac{D_V a}{2\pi r^2} \right) \sin^2 \theta \right] = \left( v_0 - \frac{D_V a}{\pi r^3} \right) \cos \theta,$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_t) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{v_0 r^2}{2} - \frac{D_V a}{2\pi r} \right) \sin \theta \right] = -\left( v_0 + \frac{D_V a}{2\pi r^3} \right) \sin \theta,$$

avec  $\frac{D_V a}{\pi v_0} = R^3$ . A la surface de la sphère on a ainsi :

$$v_r = \left( v_0 - \frac{D_V a}{\pi R^3} \right) \cos \theta = 0,$$

$$v_\theta = -\left( v_0 + \frac{D_V a}{2\pi R^3} \right) \sin \theta = -\left( v_0 + \frac{v_0}{2} \right) \sin \theta = -\frac{3v_0 \sin \theta}{2}.$$

10. L'écoulement étant potentiel, la fonction scalaire  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu}$  est uniforme, soit :

$$\frac{P}{\mu} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\mu} - \frac{v^2}{2} \text{ et ainsi :}$$

$$\begin{aligned}
 P(r=R) &= \frac{\mu v_0^2}{2} - \frac{\mu v^2(r=R)}{2} + P_0 = \frac{\mu v_0^2}{2} - \frac{9\mu v_0^2 \sin^2 \theta}{8} + P_0 \\
 &= \frac{\mu v_0^2}{2} \left( 1 - \frac{9 \sin^2 \theta}{4} \right) + P_0.
 \end{aligned}$$

On constate que la pression à la surface de la sphère est la même pour  $\theta$  et  $\pi - \theta$  et indépendante de l'azimut  $\phi$ . Par conséquent, les forces élémentaires de pression se compensent et ont une résultante nulle suivant  $Oz$ . Comme, par ailleurs, le problème est invariant par rotation autour de  $Oz$ , il ne peut exister d'autre composante non nulle de la résultante. La sphère n'est ainsi pas entraînée par le jet. C'est le paradoxe de d'Alembert, dont on sait qu'il faut introduire la notion de viscosité du fluide pour le lever.

## EXERCICE 5

### Coefficient de traînée d'une plaque rectangulaire

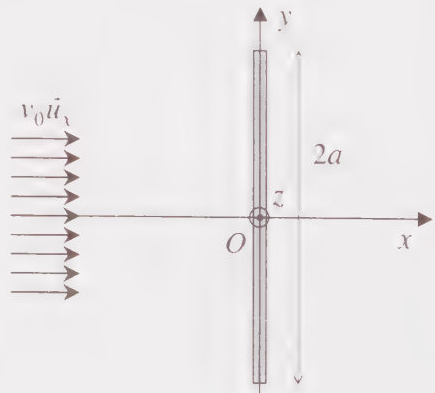
On considère une plaque plane, de largeur  $2a$  le long de l'axe  $Oy$  et de longueur  $L$  suivant l'axe  $Oz$  assez grande pour supposer le problème invariant par translation le long de celui-ci. La plaque reçoit un jet de fluide parfait incompressible, de masse volumique  $\mu$ , de vitesse uniforme  $v_0 \vec{u}_x$  suffisamment loin en amont. On ne tient pas compte de la pesanteur.

On se propose de faire une estimation de la valeur du coefficient de traînée  $C_x$  de la plaque, défini par la formule  $\vec{F} = \frac{\mu S C_x v_0^2}{2} \vec{u}_x$ ,  $S$  étant son aire et  $\vec{F}$  la force qu'exerce le jet sur elle.

On suppose l'écoulement plan et on ne tient pas compte de l'épaisseur de la plaque, de sorte que les conditions aux limites qu'elle impose s'écriront sur ses deux faces en  $x = 0$ .

On admet dans un premier temps que l'écoulement est potentiel dans tout l'espace (questions 1 et 2).

1.1. Montrer que le champ de vitesse peut s'écrire  $\vec{v}(M) = \overline{\text{rot}}(\psi(x, y) \vec{u}_z)$  et que la fonction  $\psi$  est solution de l'équation de Laplace.



1.2. Quelles sont les conditions aux limites sur  $\psi$  ?

1.3. On cherche une solution à variables séparées  $\psi(x, y) = f(x)g(y)$  car c'est une des méthodes les plus courantes de résolution de cette équation. Montrer que malheureusement elle ne peut satisfaire toutes les conditions aux limites.

2. En utilisant des variables complexes, on parvient à une solution entièrement acceptable qui s'écrit :

$$\psi = \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 - a^2} + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2},$$

avec  $\varepsilon = 1$  si  $y$  est positif ou nul et  $\varepsilon = -1$  si  $y$  est négatif.

2.1. Vérifier qu'elle respecte bien toutes les conditions aux limites.

2.2. Déterminer l'équation des lignes de courant après avoir établi qu'elles sont données par  $\psi = \text{cte}$ .

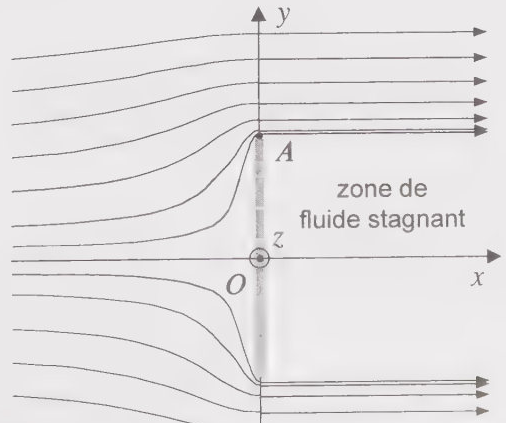
2.3. Montrer que cette équation se met sous la forme  $y^2 = y_\infty^2 \left( 1 + \frac{a^2}{x^2 + y_\infty^2} \right)$  en

donnant une signification géométrique à la constante  $y_\infty$ .

2.4. Faire une représentation graphique de l'écoulement. Montrer sans calcul qu'on retrouve le paradoxe de d'Alembert.

3. Pour lever celui-ci, on suppose que l'écoulement n'est pas partout potentiel. Derrière la plaque on admet l'existence d'une zone de stagnation, dans laquelle le fluide reste au repos à une certaine pression uniforme  $P_s$ . Sa frontière est définie par l'ensemble des lignes de courant passant par une ligne de décollement et le long desquelles la pression reste égale à  $P_s$ .

Le choix le plus simple consiste à admettre que les particules fluides ne sont plus déviées à partir du moment où elles ont franchi le plan  $Oyz$ . La ligne de décollement est alors le périmètre de la plaque et les lignes de courant ont l'allure ci-contre. Par continuité, la pression derrière la plaque est égale à sa valeur au point  $A$ .



3.1. Pour quelle raison peut-on prendre  $P_A \approx 0$  ?

3.2. Hormis la singularité de la vitesse en  $A$ , ce modèle présente un défaut sur la pression en aval de la plaque. Lequel ?

3.3. On note  $P_0$  la pression à l'infini en amont de la plaque. Donner son expression sur la face gauche de la plaque, notée  $P_p(y)$ .

3.4. Pour quelles ordonnées  $\pm Y$  s'annule-t-elle ? Quelle valeur est-il raisonnable de prendre pour  $a > |y| > Y$  ?

3.5. En déduire la résultante des forces de pression sur la plaque. On négligera dans celle-ci la contribution de  $P_0$  devant celle de  $\mu v_0^2$ .

3.6. Quelle est la valeur de  $C_x$  donnée par ce modèle ? La comparer avec la valeur expérimentale qui est de l'ordre de 1.

1.1. Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité se réduit à  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Il existe donc un champ de vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{v} = \overline{\text{rot}} \vec{A}$ . La vitesse doit être partout orthogonale à l'axe  $Oz$  puisque le mouvement est supposé plan. On peut donc choisir le potentiel vecteur de la forme  $\psi \vec{u}_z$ , ce qui assure l'orthogonalité systématique entre le champ de vitesse et son rotationnel du fait de leurs propriétés de symétrie opposées, et l'invariance par translation le long de  $Oz$  fait que cette unique composante  $\psi$  ne peut dépendre de  $z$ .

L'écoulement étant potentiel, on a par ailleurs  $\overline{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ , soit d'après l'identité entre opérateurs  $\overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} = \overline{\text{grad}}(\text{div}) - \Delta$  :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{0} = \overline{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \overline{\text{grad}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \Delta(\psi \vec{u}_z) = -\Delta \psi \vec{u}_z,$$

d'où une équation de Laplace :

$$\Delta \psi = 0.$$

1.2. Infiniment loin de la plaque, l'écoulement n'est pas perturbé et il faut retrouver :

$$\overline{\text{rot}}(\psi(x, y) \vec{u}_z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \text{ ce qui donne :}$$

$$\psi = v_0 y + \text{cte} \quad \text{à grande distance.}$$

Ensuite, sur les deux faces de la plaque, l'écoulement doit se faire tangentiellement, soit la condition :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } |y| < a.$$

1.3. Dans ce cas, l'équation de Laplace s'écrit :

$$\Delta \psi = 0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (fg) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (fg) = g \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{d^2 g}{dy^2}.$$

et donne encore, en divisant par le produit  $fg$  non identiquement nul :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2}.$$

On a ainsi l'égalité entre deux fonctions de deux variables indépendantes, ce qui signifie qu'il s'agit d'une même constante  $k$  et il faut résoudre séparément :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - kf = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 g}{dy^2} + kg = 0.$$

Si  $k$  est positive,  $f$  est une fonction exponentielle de  $x$  et  $g$  une fonction sinusoïdale de  $y$ . Il est donc impossible d'obtenir  $\psi \approx v_0 y + \text{cte}$  quand  $x$  devient infini.

Si  $k$  est négative,  $f$  est une fonction sinusoïdale de  $x$  et  $g$  une fonction exponentielle de  $y$ . Il est encore impossible de retrouver un équivalent satisfaisant quand  $x$  tend vers l'infini.

Si  $k$  est nulle, la solution est de la forme :

$$\psi = (\alpha x + \beta)(\gamma y + \delta)$$

et on ne peut toujours pas respecter la condition à l'infini. Le cas  $\alpha = 0$  permettrait de la satisfaire en adoptant  $\beta\gamma = v_0$ , mais il est par ailleurs incompatible avec la condition aux limites sur la plaque.

La forme choisie pour la solution n'est donc pas adaptée à ce problème. Ceci ne signifie qu'une solution à variables séparées est totalement exclue. Il se pourrait en effet qu'elle soit acceptable dans un autre système de coordonnées (cylindriques par exemple).

2.1. Loin de la plaque, on peut négliger les termes en  $a$  devant les autres :

$$\begin{aligned}\psi &\approx \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 + \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2}} = \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2}} \\ &= \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 + x^2 + y^2} = v_0 \varepsilon |y| = v_0 y.\end{aligned}$$

C'est de la forme voulue avec une constante d'intégration nulle (question 1.2). Vérifions ensuite l'autre condition. Il est plus simple de dériver  $\psi^2$ , de manière à n'avoir plus qu'une racine carrée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(\psi^2) &= \frac{v_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^2 - x^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2} \right] \\ &= \frac{v_0^2}{2} \left[ 2y + \frac{-4y(x^2 - y^2 + a^2) + 8x^2 y}{2\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \right] \\ &= v_0^2 y \left[ 1 + \frac{-(x^2 - y^2 + a^2) + 2x^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \right] \\ &= v_0^2 y \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \right]\end{aligned}$$

et on en déduit pour  $x = 0$  :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\psi^2) = v_0^2 y \left[ 1 + \frac{y^2 - a^2}{|a^2 - y^2|} \right], \text{ soit :}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{1}{2\psi} \frac{\partial}{\partial y}(\psi^2) = \frac{v_0^2 y}{2} \left[ 1 + \frac{y^2 - a^2}{|a^2 - y^2|} \right] \left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - a^2 + \sqrt{(-y^2 + a^2)^2}} \right]^{-1} \\ &= \frac{v_0 |y|}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \frac{y^2 - a^2}{|a^2 - y^2|} \right] \left[ \sqrt{y^2 - a^2 + |a^2 - y^2|} \right]^{-1} \\ &= \frac{v_0 |y|}{\sqrt{2}} \frac{1}{|a^2 - y^2|} \frac{|a^2 - y^2| + y^2 - a^2}{\sqrt{y^2 - a^2 + |a^2 - y^2|}} = \frac{v_0 |y|}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{y^2 - a^2 + |a^2 - y^2|}}{|a^2 - y^2|}.\end{aligned}$$

On trouve bien  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$  pour  $|y| < a$ . Ce n'est pas le cas pour  $|y| > a$  mais rien ne l'impose (on ne voit d'ailleurs pas comment le fluide serait empêché de traverser le plan  $Oyz$  au-dessus ou au-dessous de la plaque).

2.2. Les lignes de courant ont pour équation  $\vec{v} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$ . Avec  $d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$ , déplacement élémentaire le long d'une ligne de courant (sans composante suivant  $\vec{u}_z$  puisque l'écoulement est plan) on obtient :

$$\vec{v} \wedge d\vec{r} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) \vec{u}_z = d\psi \vec{u}_z = \vec{0}.$$

On en déduit  $d\psi = 0$  sur une ligne de courant, soit  $\psi = \text{cte}$ .

On pose par conséquent  $\psi^2 = K^2$  :

$$\psi^2 = \frac{v_0^2}{2} \left[ y^2 - x^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2} \right] = K^2, \text{ soit :}$$

$$\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2} = A^2 - (y^2 - x^2 - a^2),$$

$A$  étant une nouvelle constante, et on doit passer encore au carré :

$$(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2 = (A^2 + x^2 + a^2 - y^2)^2.$$

On obtient après simplification :

$$4x^2y^2 = A^4 + 2A^2(x^2 + a^2 - y^2), \text{ soit :}$$

$$y^2 = \frac{A^4 + 2A^2(x^2 + a^2)}{4x^2 + 2A^2}.$$

2.3. Quand  $x$  tend vers l'infini, ce qui est possible au moins en amont de la plaque, on a plus simplement :

$$y^2 \approx \frac{2A^2x^2}{4x^2} = \frac{A^2}{2} = \text{cte}.$$

Avec cet équivalent on retrouve le fait que loin de la plaque l'écoulement est parallèle à l'axe  $Ox$  en amont et on voit que c'est aussi le cas si le fluide repart à l'infini en aval, ce qui est physiquement imposé par l'incompressibilité (l'apport continu de fluide par le jet impose un refoulement équivalent dans le même sens car il ne peut y avoir accumulation de matière au voisinage de la plaque).

On pose  $A^2 = 2y_\infty^2$ , ce qui donne :

$$y^2 = \frac{4y_r^4 + 4y_x^2(x^2 + a^2)}{4x^2 + 4y_\infty^2} = \frac{y_r^4 + y_x^2(x^2 + a^2)}{x^2 + y_\infty^2} = y_\infty^2 \frac{y_r^2 + x^2 + a^2}{x^2 + y_\infty^2}$$

$$= y_r^2 \left( 1 + \frac{a^2}{x^2 + y_\infty^2} \right).$$

La constante positive ou négative  $y_x$  représente l'ordonnée de l'asymptote horizontale de la ligne de champ, vers laquelle elle tend aussi bien pour les valeurs négatives que positives de  $x$ .

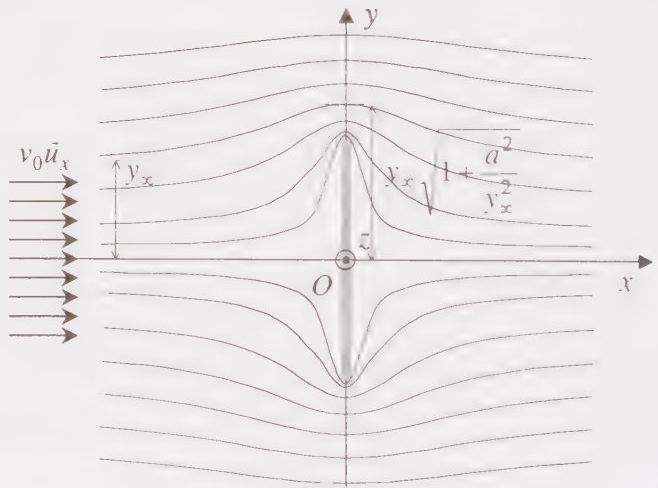
2.4. On voit que sur chaque ligne de courant  $y$  ne peut changer de signe quand  $x$  varie puisque  $y^2$  est une fonction continue de  $x$  et ne s'annule pas. Chaque ligne reste donc du même côté du plan  $Oxz$  et celui-ci ainsi que le plan  $Oxy$  constituent des plans de symétrie de l'écoulement puisque les coordonnées n'interviennent que par leurs carrés. D'autre part,  $y$  présente un extremum unique pour  $x = 0$  et vaut alors

$\pm y_x \sqrt{1 + \frac{a^2}{y_\infty^2}}$ . On en sait suffisamment pour tracer l'allure de l'écoulement et on

obtient les courbes ci-dessous.

Du fait de la symétrie des lignes de courant par rapport à  $Oyz$  et de l'absence de dissipation d'énergie dans un fluide parfait, la vitesse possède le même module aux quatre points de coordonnées respectives  $(x, y)$ ,  $(x, -y)$ ,  $(-x, y)$  et  $(-x, -y)$ .

On a donc la même pression de part et d'autre de chaque point de la plaque du



fait de l'uniformité de la fonction scalaire  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu}$  dans le fluide (écoulement potentiel sans pesanteur). La résultante des forces de pression sur la plaque est par conséquent nulle.

3.1. On constate que la composante  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  de la vitesse diverge aux deux extrémités de la plaque (Cf. fin de la question 2.1). Ce n'est déjà pas réaliste en soi

mais ceci entraîne de plus une divergence de la pression par valeurs négatives (toujours du fait de l'uniformité de la fonction  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu}$  dans la zone où l'écoulement a encore lieu). En réalité la vitesse doit rester finie pour deux raisons :

- d'une part la plaque possède une certaine épaisseur et ses bords n'ont jamais un profil rigoureusement rectangulaire. Ils sont forcément arrondis à une certaine échelle et la vitesse devient donc grande mais reste finie car c'est la présence d'arêtes qui provoque sa divergence ;

- d'autre part la viscosité du fluide intervient à proximité immédiate d'un obstacle, dans la couche limite, et impose l'adhérence au contact. Même si ce second argument n'est pas directement exploitable pour étudier le comportement de la pression, on comprend que la nécessité d'annuler la vitesse sur la plaque l'empêche de diverger dans la zone d'écoulement potentiel sus-jacente.

On peut donc admettre aisément que la vitesse devient assez grande à proximité du point  $A$  pour que la pression  $y$  soit négligeable par rapport à sa valeur dans le reste de l'écoulement, mais elle reste bornée par le fait que justement la pression ne peut s'annuler.

3.2. Dans l'écoulement au-dessus et au-dessous de la zone de stagnation, les lignes de courant restent parallèles entre elles et la vitesse ne varie donc plus le long de chacune. Elle a par continuité la valeur prise en  $x = 0$ , soit :

$$\vec{v} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{u}_x = \frac{v_0 |y| \sqrt{y^2 - a^2 + |a^2 - y^2|}}{\sqrt{2} |a^2 - y^2|} \vec{u}_x = \frac{v_0 |y|}{\sqrt{y^2 - a^2}} \vec{u}_x$$

et il est clair que ce vecteur n'est pas un gradient<sup>4</sup>. L'écoulement n'est plus potentiel en aval de la plaque. Pourtant, puisqu'on peut appliquer le théorème de Bernoulli le long de chaque ligne de courant, la pression sur chacune reste égale à sa valeur en  $x = 0$ . Puisque dans le plan  $Oyz$  on a encore  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} = \text{cte}$  (indépendante de  $y$  et  $z$ ) cette propriété reste vraie au-delà. Il y a donc une première contradiction avec le fait que l'écoulement n'est plus potentiel. Toujours est-il qu'on obtient ainsi un champ de pression en aval de la forme :

$$\frac{P}{\mu} = \text{cte} - \frac{v^2}{2} = \text{cte} - \frac{v_0^2 y^2}{2(y^2 - a^2)}.$$

Par ailleurs l'équation d'Euler s'y écrit :

<sup>4</sup> D'une part la fonction potentiel  $\varphi$  ne pourrait pas dépendre de  $y$  tout en ayant une dérivée partielle  $v_x$  par rapport à  $y$  nulle, d'autre part il est évident que le rotationnel de ce vecteur présente une composante non nulle suivant  $\vec{u}_z$ .

$$\frac{\text{grad } P}{\mu} = -(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v} = -\left(v \frac{\partial}{\partial x}\right)v(y)\vec{u}_x = \vec{0}, \text{ soit } P = \text{cte.}$$

On voit qu'il y a contradiction.

3.3. On sait déjà que  $v_x$  est nul sur la face gauche de la plaque. Il reste à calculer l'autre composante de la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\psi^2) &= \frac{v_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ y^2 - x^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2} \right] \\ &= \frac{v_0^2}{2} \left[ -2x + \frac{4x(x^2 - y^2 + a^2) + 8xy^2}{2\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} \right] \\ &= v_0^2 x \left[ -1 + \frac{x^2 + y^2 + a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} \right] \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2\psi} \frac{\partial}{\partial x}(\psi^2) = -\frac{v_0^2 x}{2} \left[ -1 + \frac{x^2 + y^2 + a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} \right] \times \\ &\quad \left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

C'est une forme indéterminée pour  $x = 0$ . Il faut donc faire un développement limité du dernier terme entre crochets (le premier terme restant fini non nul), sachant que  $|y| < a$  et  $x < 0$  dans tout le secteur qui nous intéresse. On néglige un premier terme en  $x^4$  :

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} \right]^{-1} \\ &\approx \left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - y^2)^2 + 2x^2(a^2 - y^2) + 4x^2y^2}} \right]^{-1} \\ &= \left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 - a^2 + (a^2 - y^2)} \sqrt{1 + \frac{2x^2(a^2 + y^2)}{(a^2 - y^2)^2}} \right]^{-1} \end{aligned}$$

puis on fait un développement de la racine dans la racine :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \right]^{-1} \\
 & \approx \left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 - a^2 + (a^2 - y^2)} \left[ 1 + \frac{x^2(a^2 + y^2)}{(a^2 - y^2)^2} \right] \right]^{-1} \\
 & = \left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{-x^2 + \frac{x^2(a^2 + y^2)}{(a^2 - y^2)}} \right]^{-1} = \left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2x^2 y^2}{a^2 - y^2}} \right]^{-1} = \left[ \frac{v_0 \varepsilon |xy|}{\sqrt{a^2 - y^2}} \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

et enfin, puisque  $\varepsilon |xy| = -x\varepsilon |y| = -xy$  :

$$\left[ \frac{v_0 \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{y^2 - x^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \right]^{-1} \approx -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{v_0 xy}$$

On obtient ainsi pour  $x \approx 0$  :

$$\begin{aligned}
 v_y & \approx -\frac{v_0^2 x}{2} \left[ -1 + \frac{x^2 + y^2 + a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \right] \times -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{v_0 xy} \\
 & = \frac{v_0}{2} \left[ -1 + \frac{x^2 + y^2 + a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \right] \times \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}
 \end{aligned}$$

et sur la plaque :

$$\begin{aligned}
 v_y & = \frac{v_0}{2} \left[ -1 + \frac{y^2 + a^2}{\sqrt{(a^2 - y^2)^2}} \right] \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} = \frac{v_0}{2} \left[ -1 + \frac{y^2 + a^2}{a^2 - y^2} \right] \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \\
 & = \frac{v_0}{2} \frac{2y^2}{a^2 - y^2} \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} = \frac{v_0 y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.
 \end{aligned}$$

On écrit donc la pression :

$$P_p(y) = P_0 + \frac{\mu}{2} (v_0^2 - v_y^2) = P_0 + \frac{\mu}{2} \left( v_0^2 - \frac{v_0^2 y^2}{a^2 - y^2} \right) = P_0 + \frac{\mu v_0^2}{2} \frac{a^2 - 2y^2}{a^2 - y^2}.$$

3.4. Cette expression diverge bien par valeurs négatives quand  $y \rightarrow \pm a$ . Mais elle s'annule avant les bords, aux deux ordonnées vérifiant :

$$P_0(a^2 - y^2) + \frac{\mu v_0^2}{2}(a^2 - 2y^2) = 0, \text{ soit :}$$

$$y = \pm a \sqrt{\frac{P_0 + \frac{\mu v_0^2}{2}}{P_0 + \mu v_0^2}} = \pm Y.$$

Pour  $a > |y| > Y$  on suppose qu'elle reste positive et très faible, car elle ne peut devenir négative, et on la prend donc nulle pour le calcul qui suit.

3.5. On calcule la résultante des forces de pression en sommant sur la face gauche de la plaque (sur la face droite la pression est égale à  $P_1$  et donc nulle) entre les ordonnées  $-Y$  et  $Y$  :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{\text{plaque}} P_p(y) dS \vec{u}_x = L \int_{-Y}^Y P_p(y) dy \vec{u}_x = L \int_{-Y}^Y \left[ P_0 + \frac{\mu v_0^2}{2} \frac{a^2 - 2y^2}{a^2 - y^2} \right] dy \vec{u}_x \\ &= L \int_{-Y}^Y \left[ P_0 + \frac{\mu v_0^2}{2} \left( 2 - \frac{a^2}{a^2 - y^2} \right) \right] dy \vec{u}_x \\ &= L \left[ (P_0 + \mu v_0^2) y - \frac{\mu v_0^2 a}{2} \text{Arctan} \left( \frac{y}{a} \right) \right]_{-Y}^Y \vec{u}_x \\ &= L \left[ 2(P_0 + \mu v_0^2) Y - \mu v_0^2 a \text{Arctan} \left( \frac{Y}{a} \right) \right] \vec{u}_x. \end{aligned}$$

C'est une expression assez lourde quand on reporte la valeur de  $Y$  mais qui se simplifie considérablement si on néglige le terme de pression devant celui de vitesse.

On adopte dans ce cas  $Y \approx a \sqrt{\frac{\mu v_0^2}{2\mu v_0^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{F} &\approx L \left[ 2\mu v_0^2 Y - \mu v_0^2 a \text{Arctan} \left( \frac{Y}{a} \right) \right] \vec{u}_x \approx L \left[ \sqrt{2}\mu v_0^2 a - \mu v_0^2 a \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \vec{u}_x \\ &= aL \left[ \sqrt{2}\mu v_0^2 - \mu v_0^2 \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \vec{u}_x = \frac{S\mu v_0^2}{2} \left[ \sqrt{2} - \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \vec{u}_x. \end{aligned}$$

3.6. On en déduit par identification :

$$C_x = \sqrt{2} - \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0,799.$$

C'est une valeur comparable à la valeur expérimentale. L'introduction de la zone de stagnation et la manière dont on a traité la divergence de la pression près des bords, malgré leur caractère arbitraire, donnent de bons résultats compte tenu de la difficulté de résolution des problèmes de mécanique des fluides.

## EXERCICE 6

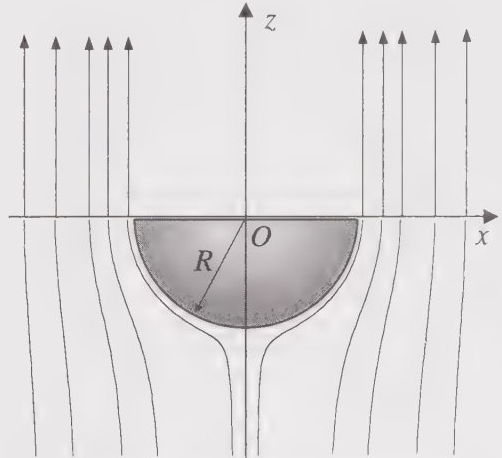
### Coefficient de traînée d'une demi-sphère

On utilise de nouveau le modèle de fluide stagnant avec décollement des lignes de courant en l'appliquant cette fois à une demi-sphère immobile. Elle est placée dans un écoulement uniforme de vitesse à l'infini en amont  $v_0 \vec{u}_z$ , parallèle à son axe de révolution  $Oz$  et on note  $R$  son rayon et  $O$  le centre de sa base.

On reprend dans le demi-espace  $z \leq 0$  la solution pour la sphère complète, obtenue à la fin de l'exercice 4 et dont le champ de vitesse s'écrit en coordonnées sphériques :

$$v_r = v_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta,$$

$$v_\theta = -v_0 \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta.$$



Le décollement a lieu sur la circonférence du disque et on suppose que les lignes de courant sont parallèles à  $Oz$  dans le demi-espace  $z > 0$ , la vitesse gardant sur chacune sa valeur pour  $z = 0$ . Dans la zone de stagnation cylindrique placée derrière la demi-sphère, le fluide est supposé au repos et la pression y est donc uniforme. Enfin, on note  $P_0$  la pression à l'infini en amont de la demi-sphère et on ne tient pas compte de la pesanteur.

1. Écrire le champ de vitesse pour  $z > 0$ , hors de la zone de stagnation. L'écoulement est-il potentiel ? L'équation d'Euler est-elle respectée ?
2. Calculer la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression exercées sur la sphère.
3. En déduire le coefficient de traînée  $C_z$  de la demi-sphère, défini pour ce problème par :

$$\vec{F} = \frac{\mu S C_z v_0^2}{2} \vec{u}_z, \quad S \text{ étant sa section dans un plan normal à } \vec{v}_0.$$

Dans quel domaine de valeurs du nombre de Reynolds peut-on valider ce résultat ? Les contradictions du modèle permettent-elles de l'invalider ?

4. La valeur expérimentale est de 0,40. Conclure.

1. Dans le plan  $Oxy$  on a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et les composantes de la vitesse s'écrivent :

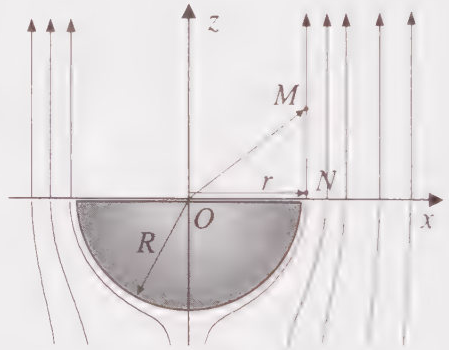
$$v_r = 0 \quad \text{et} \quad v_\theta = -v_0 \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right),$$

soit encore puisque dans ce plan  $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$  :

$$\vec{v}_{\text{plan}} = v_0 \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{u}_z.$$

Ensuite la vitesse reste indépendante de  $z$  et, pour tout point  $M$  de cote  $z$  positive, il faut remplacer  $r = OM$  par la distance  $r = ON$ , c'est-à-dire la distance de  $M$  à l'axe  $Oz$ , soit  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . On écrit donc pour  $z > 0$  :

$$\vec{v} = v_0 \left( 1 + \frac{R^3}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \vec{u}_z.$$



Ce vecteur est de la forme  $f(x, y) \vec{u}_z$  et il ne peut s'agir d'un gradient<sup>5</sup>. Par conséquent l'écoulement n'est pas potentiel dans cette partie de l'espace. De plus, l'équation d'Euler s'y écrit :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v \frac{\partial}{\partial z} (v \vec{u}_z) = v \frac{\partial v}{\partial z} \vec{u}_z = \vec{0} = - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu}.$$

Or la pression ne peut être uniforme puisque le théorème de Bernoulli montre qu'elle a sur chaque ligne de courant la même valeur que dans le plan  $z = 0$  sur la même

<sup>5</sup> Le système  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = f(x, y)$  n'a en effet pas de solution.

ligne. Dans ce plan, elle est donnée par  $P = P_0 + \frac{\mu}{2}(v_0^2 - v_{\text{plan}}^2)$ , car l'écoulement y est encore potentiel, et varie donc avec  $x$  et  $y$ . L'équation d'Euler aboutit ainsi à une contradiction. Ceci signifie que la solution que l'on a postulé en arrière de la demi-sphère n'est pas réaliste.

2. Sur la face sphérique, où l'écoulement est potentiel, on a :

$$P(R, \theta) = P_0 + \frac{\mu}{2}(v_0^2 - v^2) = P_0 + \frac{\mu}{2}\left(v_0^2 - \frac{9v_0^2 \sin^2 \theta}{4}\right) = P_0 + \frac{\mu v_0^2}{2}\left(1 - \frac{9 \sin^2 \theta}{4}\right)$$

et sur la face plane elle vaut par continuité  $P\left(R, \frac{\pi}{2}\right)$ , soit  $P_0 - \frac{5\mu v_0^2}{8}$ . On en déduit,

la symétrie cylindrique du problème permettant d'affirmer que la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression sur la demi-sphère est portée par  $\vec{u}_z$  :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} P(R, \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r - \int_{\text{disque}} P\left(R, \frac{\pi}{2}\right) dS \vec{u}_z \\ &= \left[ - \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} P(R, \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z) - \int_{\text{disque}} P\left(R, \frac{\pi}{2}\right) dS \right] \vec{u}_z \\ &= \left[ \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{9\mu v_0^2 \sin^2 \theta}{8} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \cos \theta + \int_{\text{disque}} \frac{9\mu v_0^2}{8} dS \right] \vec{u}_z \\ &\quad - \int_{\frac{1}{2} \text{ sphère}} \left( P_0 + \frac{\mu v_0^2}{2} \right) d\vec{S} = \left[ \frac{9\pi\mu v_0^2 R^2}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta + \frac{9\mu v_0^2}{8} \pi R^2 \right] \vec{u}_z - \vec{0} \\ &= \left[ -\frac{9\pi\mu v_0^2 R^2}{16} + \frac{9\mu v_0^2}{8} \pi R^2 \right] \vec{u}_z = \frac{9\mu v_0^2}{16} \pi R^2 \vec{u}_z. \end{aligned}$$

3. Avec  $S = \pi R^2$  on obtient par identification :

$$C_z = \frac{9}{8} = 1,125.$$

Cette valeur a été obtenue en ayant calculé la traînée seulement par le « déficit » de vitesse du fluide en arrière de la sphère. On n'a pas tenu compte de la viscosité du fluide, ce qui signifie que la traînée de frottement (que nous avons « oubliée ») dans la couche limite doit être négligeable devant la force calculée pour que la valeur de  $C_z$  soit acceptable. Il faut donc se placer dans des écoulements à très grands nombres de Reynolds. Plus précisément, notre résultat correspond à la valeur asymptotique de la fonction  $C_z(\mathcal{R})$  quand  $\mathcal{R}$  tend vers l'infini.

Nous avons par ailleurs vu que le modèle de fluide stagnant avec écoulement parallèle en aval de l'obstacle est irréaliste. Toutefois, le seul résultat a priori que nous

avons utilisé est que le fluide est au repos au contact de la face arrière de la demi-sphère. Or cette hypothèse n'est pas remise en cause si on admet que la zone de stagnation a une géométrie plus complexe que celle d'un cylindre. On peut donc admettre qu'il y a stagnation tout près de la face arrière de la demi-sphère, que ceci se produit dans un volume dont la forme permet le respect de l'équation d'Euler dans l'écoulement en aval et il n'est pas besoin de rechercher (à l'issue d'un calcul épouvantable !) les limites géométriques de ce volume pour connaître la pression sur cette face. Il suffit d'adopter la valeur en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  car on peut raisonnablement continuer à supposer que cette zone « naît » sur la circonférence du disque.

4. La valeur expérimentale est près de trois fois inférieure. Ceci signifie que le déficit de quantité de mouvement n'est en réalité pas aussi important que dans notre modèle. Même s'il existe une zone de stagnation, le fluide n'y est pas complètement au repos. Il a simplement une composante  $v_z$  plus faible qu'ailleurs.

## EXERCICE 7

### Oscillations d'une bulle dans un fluide

Une réaction exothermique violente dans un fluide au repos produit une bulle de gaz dans laquelle la pression et la température sont initialement très élevées. La bulle se dilate rapidement dans le fluide et on recherche l'évolution de son rayon  $R(t)$ , de sa pression  $P(t)$  et de sa température  $T(t)$  au cours du temps.

On travaille en coordonnées sphériques, le centre  $O$  de la bulle étant supposé fixe, et on fait les hypothèses suivantes :

- la réaction exothermique a lieu à l'origine des temps et crée instantanément une bulle de gaz parfait de rayon  $R_0$ , de température  $T_0$ , de pression  $P_0$  et de coefficient constant  $\gamma = \frac{4}{3}$ ,
- toute l'énergie libérée par la réaction est initialement sous forme d'énergie interne du gaz,
- l'évolution est suffisamment rapide pour négliger les échanges thermiques entre le fluide et la bulle, mais on la suppose réversible dans celle-ci,
- la température et la pression sont uniformes à tout instant dans la bulle,
- la pression dans le fluide très loin de la bulle reste égale à la constante  $P_\infty$ , très inférieure à  $P_0$ , et il est rigoureusement incompressible, de masse volumique  $\mu$ ,
- la pesanteur est négligée.

On donne la divergence en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

1. Montrer que le champ de vitesse apparaissant dans le fluide est de la forme :

$$v(r, t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}$$

2. Projeter l'équation d'Euler sur le vecteur  $\vec{u}_r$  et l'intégrer de  $R(t)$  à l'infini. En déduire l'équation différentielle que vérifie  $R(t)$  en fonction de  $P(t)$  et de  $P_\infty$ .

3. Établir la relation entre  $P(t)$ ,  $R(t)$ ,  $P_0$  et  $R_0$  traduisant la deuxième hypothèse.

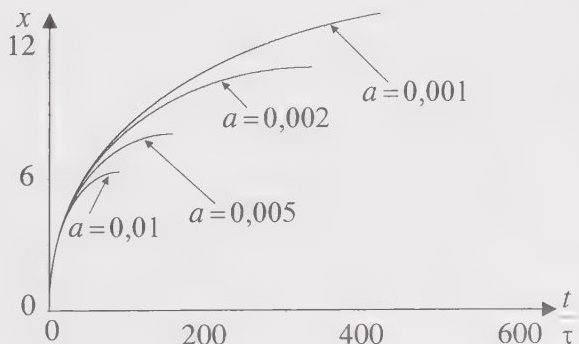
4.1. On pose  $u = \dot{R}^2$ . Exprimer  $\frac{du}{dR}$  et en déduire l'équation différentielle vérifiée par la nouvelle variable  $u(R)$ .

4.2. On pose enfin  $U = \frac{\mu u}{P_0}$  et  $x = \frac{R}{R_0}$ . Donner l'équation différentielle adimensionnée vérifiée par  $U$  en fonction du paramètre positif  $a = \frac{P_\infty}{P_0}$ .

4.3. On aboutit ainsi à une équation linéaire qu'on peut intégrer par variation de la constante. De quelle équation du premier ordre est solution  $f(x) = x^3 U(x)$ ? Quelle est la condition initiale sur  $f$ ?

4.4. Déterminer  $f(x)$ . En déduire l'équation différentielle donnant l'évolution du rayon de la bulle pendant la phase d'expansion sous la forme  $\dot{x} = \frac{F(x, a)}{\tau}$ ,  $\tau$  étant une constante homogène à une durée et  $F$  une fonction sans dimension.

5. L'équation n'est pas linéaire. Mais on constate ci-contre que la solution obtenue numériquement pour les valeurs intéressantes de  $a$ , inférieures à 0,01, est décrite dans sa phase de croissance par des courbes toutes semblables, d'allure elliptique. On pose donc :



$$\frac{\left(\frac{t}{\tau} - X\right)^2}{A^2} + \frac{(x - Y)^2}{B^2} = 1.$$

5.1. On note  $x_m$  la valeur maximale de  $x$  et  $\theta$  la valeur de  $\frac{t}{\tau}$  pour laquelle elle est obtenue. Exprimer les quatre constantes  $X$ ,  $Y$ ,  $A$  et  $B$  en fonction de  $x_m$  et  $\theta$  et préciser leur signification.

5.2. De quelle équation du troisième degré est solution  $x_m$  ? La résoudre de manière approchée sachant que  $a$  est petit. On remarquera pour cela que la solution est proche d'une valeur évidente et on fera une approximation linéaire.

5.3. On montre que  $\theta$  est donné de manière satisfaisante par la relation :

$$\theta = \frac{2}{a^\alpha} \text{ avec } \alpha = 0,8231\dots$$

Expliciter la fonction  $R(t)$ .

5.4. En déduire  $\dot{R}(t)$ ,  $P(t)$  et  $T(t)$ .

5.5. Quelle est la pression finale ? Comment expliquer qu'elle est inférieure à  $P_\infty$  ? Que va-t-il forcément se passer après la phase d'expansion ?

5.6. Sur les courbes de la page précédente une condition initiale semble violée, laquelle ? Que faudrait-il faire pour vérifier qu'elle est bien respectée ? Que penser alors de la modélisation par un arc d'ellipse ?

6. On adopte les valeurs numériques suivantes,  $R_0 = 30$  cm,  $T_0 = 5000$  K,  $P_0 = 1000$  bars,  $P_\infty = 1$  bar,  $\mu = 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> (milieu liquide).

6.1. Calculer le rayon, la pression et la température de la bulle à la fin de la phase d'expansion.

6.2. Calculer la durée de l'expansion et évaluer une vitesse moyenne de croissance de la bulle.

7. Quelle est l'équation vérifiée par  $R(t)$  après la phase d'expansion ? En déduire que la bulle a un comportement périodique et donner sa période avec les valeurs numériques précédemment données.

8.1. Décrire qualitativement le mouvement du fluide et déterminer pour une particule fluide la fonction  $r(t)$ .

8.2. En déduire l'amplitude  $\delta$  de ses oscillations suffisamment loin de la bulle et montrer qu'elle varie en  $\frac{1}{r^2}$ .

9. Reprendre les différentes applications numériques avec  $\mu = 1 \text{ kg.m}^{-3}$  (milieu gazeux). Quel phénomène apparaît alors ? Quelle en est la conséquence ?

10. L'écoulement est-il potentiel ? Pouvait-on le savoir a priori ? La réponse aurait-elle permis une autre méthode de résolution ?

1. Dans un fluide incompressible, l'équation de continuité s'écrit  $\text{div } \vec{v} = 0$  et, du fait de son isotropie, la bulle crée dans celui-ci un mouvement radial et indépendant de la direction. On a donc  $\vec{v}(M) = v(r, t) \vec{u}_r$  dans le fluide et l'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = 0, \text{ soit } r^2 v = f(t).$$

Pour déterminer la « constante » d'intégration  $f(t)$ , il suffit d'écrire la continuité de la vitesse à la surface de la bulle :

$$f(t) = R^2 v(R, t) = R^2 \frac{dR}{dt} = R^2 \dot{R} \text{ et on obtient :}$$

$$v(r, t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}.$$

2. Puisqu'on ne tient pas compte de la pesanteur, l'équation d'Euler dans le fluide s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu} = \frac{\partial v}{\partial t} \vec{u}_r + \left( v \frac{\partial}{\partial r} \right) \vec{v}.$$

En projection sur  $\vec{u}_r$ , elle donne :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r}, \text{ soit encore :}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (R^2 \dot{R}) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^2}{2} \right).$$

On peut alors l'intégrer aisément :

$$\frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2} + \left[ \frac{v^2}{2} \right]_R^{+\infty} = \left[ -\frac{P}{\mu} \right]_R^{+\infty}.$$

A la surface de la bulle, on a continuité de la pression qu'on prend donc égale à la pression interne  $P(t)$  et il est par ailleurs clair que le fluide est encore au repos à l'infini, d'où l'équation :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) - \frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{P(t) - P_\infty}{\mu} = R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2.$$

3. L'évolution de la bulle est adiabatique et réversible. On peut donc écrire la relation de Laplace pour le gaz parfait qu'elle contient :

$$PV^\gamma = \text{cte} = P_0 V_0^\gamma, \text{ soit } PR^{3\gamma} = P_0 R_0^{3\gamma}.$$

4.1. L'équation différentielle devient ainsi :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 - \frac{P_0 R_0^{3\gamma}}{\mu R^{3\gamma}} = -\frac{P_\infty}{\mu}.$$

Avec  $u = \dot{R}^2$  on a :

$$\frac{du}{dR} = \frac{d}{dR} (\dot{R}^2) = \frac{dt}{dR} \frac{d}{dt} (\dot{R}^2) = \frac{1}{\dot{R}} (2\dot{R}\ddot{R}) = 2\ddot{R}$$

et l'équation différentielle précédente donne :

$$\frac{R}{2} \frac{du}{dR} + \frac{3u}{2} - \frac{P_0 R_0^{3\gamma}}{\mu R^{3\gamma}} = -\frac{P_\infty}{\mu}.$$

4.2. On peut encore l'écrire :

$$\frac{R}{2} \frac{\mu}{P_0} \frac{du}{dR} + \frac{3\mu u}{2P_0} - \frac{R_0^{3\gamma}}{R^{3\gamma}} = -\frac{P_\infty}{P_0}, \text{ soit :}$$

$$\frac{x}{2} \frac{dU}{dx} + \frac{3U}{2} - x^{-3\gamma} = -a \text{ et finalement :}$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{3U}{x} = \frac{2}{x^{3\gamma+1}} - \frac{2a}{x}.$$

4.3. L'équation est linéaire et on commence donc par chercher la solution sans second membre, qui s'obtient aisément. Avec :

$$\frac{dU}{dx} + \frac{3U}{x} = 0, \text{ soit } \frac{dU}{U} + 3 \frac{dx}{x} = 0, \text{ on a :}$$

$$U = \frac{k}{x^3}.$$

On recherche la solution complète par variation de la constante, c'est-à-dire sous la forme  $U = \frac{f(x)}{x^3}$ , ce qui reporté dans l'équation complète donne :

$$\frac{1}{x^3} \frac{df}{dx} - \frac{3f}{x^4} + \frac{3f}{x^4} = \frac{2}{x^{3\gamma+1}} - \frac{2a}{x}, \text{ soit :}$$

$$\frac{df}{dx} = 2x^{2-3\gamma} - 2ax^2 = \frac{2}{x^2} - 2ax^2.$$

La fonction  $f$  s'écrit en fonction des grandeurs physiques :

$$f(x) = x^3 U(x) = \frac{R^3}{R_0^3} \frac{\mu}{P_0} \dot{R}^2.$$

Toute l'énergie du gaz est initialement de l'énergie interne, donc la bulle a initialement une vitesse d'expansion nulle,  $x$  valant alors 1, et la condition initiale sur  $f$  est de ce fait  $f(1) = 0$ .

4.4. L'intégration est immédiate :

$$f = -\frac{2}{x} - \frac{2ax^3}{3} + \text{cte} \text{ et, compte tenu de la condition initiale :}$$

$$f = 2 - \frac{2}{x} + \frac{2a}{3}(1 - x^3).$$

En revenant aux grandeurs physiques il vient :

$$\frac{R^3}{R_0^3} \frac{\mu}{P_0} \dot{R}^2 = 2 - \frac{2R_0}{R} + \frac{2a}{3} \left( 1 - \frac{R^3}{R_0^3} \right), \text{ ou encore :}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{2P_0}{\mu} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} + \frac{a}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) \right].$$

Le rayon de la bulle est une fonction croissante du temps, au moins tant que  $P(t)$  est supérieure à  $P_\infty$ , et on a donc :

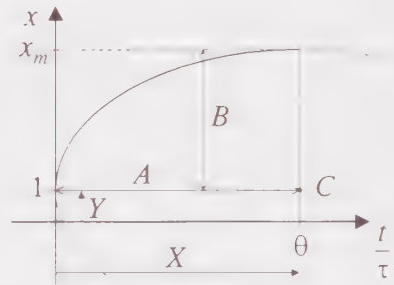
$$\dot{R} = +\sqrt{\frac{2P_0}{\mu}} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} + \frac{a}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) \right]^{1/2}, \text{ soit :}$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2P_0}{\mu R_0^2}} \left[ \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{a}{3} \left( \frac{1}{x^3} - 1 \right) \right]^{1/2}.$$

On pose  $\tau = \sqrt{\frac{\mu R_0^2}{2P_0}}$  et l'équation est bien de la forme indiquée.

5.1. Les quatre constantes géométriques correspondent respectivement aux coordonnées cartésiennes du centre  $C$  de l'ellipse et à ses demi-axes (Cf. ci-contre). L'ellipse apparaissant tangente à l'axe des ordonnées au départ et sachant que  $x(0) = 1$  on a de manière évidente :

$$X = \theta, Y = 1, A = \theta \text{ et } B = x_m - 1.$$



5.2. La valeur maximale de  $x$  est atteinte à l'instant où  $\dot{x}$  s'annule. Il faut donc chercher la racine de la fonction  $F_a(x)$ , c'est-à-dire résoudre l'équation du quatrième degré :

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{a}{3} \left( \frac{1}{x^3} - 1 \right) = 0.$$

On peut faire une factorisation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{a}{3} \left( \frac{1}{x^3} - 1 \right) &= \frac{x-1}{x^4} + \frac{a}{3x^4} (x-x^4) = \frac{x-1}{x^4} + \frac{ax}{3x^4} (1-x^3) \\ &= \frac{x-1}{x^4} \left[ 1 - \frac{ax}{3} (1+x+x^2) \right] \end{aligned}$$

et puisque  $x_m = 1$  ne peut convenir physiquement il s'agit bien d'une équation du troisième degré :

$$1 - \frac{ax}{3} (1+x+x^2) = 0, \text{ soit } x^3 + x^2 + x - \frac{3}{a} = 0.$$

Il n'y a qu'un changement de signe dans la suite des coefficients de ce polynôme donc il existe au maximum une racine positive. Comme  $\frac{3}{a}$  est grand devant 1, elle

doit être elle aussi grande et donc approximativement donnée par  $x^3 \approx \frac{3}{a}$  en gardant la puissance dominante du polynôme <sup>6</sup>. On recherche alors la solution sous la forme :

$$x_m = \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} (1 + \varepsilon) \text{ avec } |\varepsilon| \ll 1.$$

On reporte dans l'équation en faisant une approximation linéaire des puissances :

$$\left(\frac{3}{a}\right)(1 + 3\varepsilon) + \left(\frac{3}{a}\right)^{2/3} (1 + 2\varepsilon) + \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} (1 + \varepsilon) - \frac{3}{a} = 0$$

et il vient :

$$\left[ \frac{9}{a} + 2\left(\frac{3}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} \right] \varepsilon + \left(\frac{3}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} = 0, \text{ d'où :}$$

$$\varepsilon = -\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3}}{\frac{9}{a} + 2\left(\frac{3}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3}} = -\left(\frac{a}{3}\right)^{1/3} \frac{1 + \left(\frac{a}{3}\right)^{1/3}}{3 + 2\left(\frac{a}{3}\right)^{1/3} + \left(\frac{a}{3}\right)^{2/3}}.$$

A l'approximation linéaire, on se satisfait même de :

$$\varepsilon = -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{3}\right)^{1/3}$$

car les autres termes sont au moins d'un ordre de grandeur inférieur. On retient donc :

$$x_m \approx \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{3}\right)^{1/3}\right) = \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}.$$

5.3. De l'équation de l'ellipse, on tire pour la partie ascendante de la courbe (pour laquelle il faut assurer  $\dot{x}(t=0) > 0$  par le choix du signe devant  $B$ ) :

---

<sup>6</sup> Plus précisément, la racine cherchée est grande si  $\left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} \gg 1$  et non si  $\frac{3}{a} \gg 1$ , ce qui est plus

restrictif. Si on prend un ordre de grandeur 10 comme critère, la seconde condition impose  $a < 0.3$  alors que la première impose  $a < 0,003$ .

$$x = Y + B \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{t-X}{\tau}\right)^2}{A^2}} = 1 + (x_m - 1) \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{t-\theta}{\tau}\right)^2}{\theta^2}} \quad \text{soit :}$$

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 x = R_0 + R_0 \left[ \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} - \frac{4}{3} \right] \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{t-2}{\tau} - \frac{2}{a^\alpha}\right)^2}{\left(\frac{2}{a^\alpha}\right)^2}} \\ &= R_0 + R_0 \left[ \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} - \frac{4}{3} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{a^\alpha t}{2\tau} - 1\right)^2}. \end{aligned}$$

5.4. En dérivant par rapport au temps on obtient :

$$\dot{R}(t) = R_0 \left[ \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} - \frac{4}{3} \right] \frac{-2 \frac{a^\alpha}{2\tau} \left(\frac{a^\alpha t}{2\tau} - 1\right)}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{a^\alpha t}{2\tau} - 1\right)^2}} = \frac{R_0 a^\alpha}{2\tau} \left[ \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} - \frac{4}{3} \right] \frac{1 - \frac{a^\alpha t}{2\tau}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^\alpha t}{2\tau} - 1\right)^2}}.$$

Puis en réécrivant la relation de Laplace :

$$P(t) = \frac{P_0 R_0^{3\gamma}}{R^{3\gamma}} = \frac{P_0 R_0^4}{R^4} = \frac{P_0}{\left\{ 1 + \left[ \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} - \frac{4}{3} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{a^\alpha t}{2\tau} - 1\right)^2} \right\}^4}$$

et enfin, sachant qu'elle s'écrit également  $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$  en substituant le volume à la pression :

$$T(t) = \frac{T_0 R_0^{3(\gamma-1)}}{R^{3(\gamma-1)}} = \frac{T_0 R_0}{R} = \frac{T_0}{1 + \left[ \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} - \frac{4}{3} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{a^\alpha t}{2\tau} - 1\right)^2}}.$$

5.5. La pression finale s'obtient lorsque  $\frac{t}{\tau} = \theta$ , soit  $t = \frac{2\tau}{a^\alpha}$  et a pour expression :

$$P_f = \frac{P_0}{\left\{ \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} - 1 \right\}^4} = \frac{P_0}{x_m^4}.$$

Le rapport  $\frac{P_f}{P_\infty}$  vaut donc :

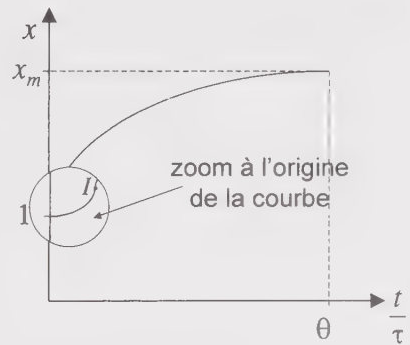
$$\frac{P_f}{P_\infty} = \frac{P_0}{P_\infty} \left[ \left( \frac{3}{a} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \right]^{-4} = \frac{1}{a} \left[ \left( \frac{3}{a} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \right]^{-4}$$

Avec  $a$  suffisamment petit, il est environ égal à :

$$\frac{P_f}{P_\infty} \approx \frac{1}{a} \left[ \left( \frac{3}{a} \right)^{1/3} \right]^{-4} = \frac{1}{a} \left( \frac{a}{3} \right)^{4/3} = \frac{a^{1/3}}{3^{4/3}} \approx 0,231 a^{1/3}$$

Ce rapport est nettement plus petit que 1. Lorsque la bulle cesse de se dilater, elle possède ainsi une pression interne très inférieure à celle régnant dans le fluide. Ce n'est pas surprenant. Tant que sa pression est supérieure à  $P_\infty$ , la bulle se dilate avec une vitesse qui augmente au cours du temps (accélération positive), puis quand sa pression devient inférieure à  $P_\infty$  du fait de la dilatation elle continue à voir son rayon croître mais de plus en plus lentement (accélération négative). Il est donc normal que sa pression soit inférieure à  $P_\infty$  quand elle cesse sa croissance. Bien entendu, elle est alors comprimée par le fluide et une phase de rétraction va succéder à celle d'expansion.

5.6. On a déjà noté que la vitesse de croissance initiale de la bulle est nulle. Par conséquent, les courbes représentant  $x(t)$  devraient démarrer, quel que soit  $a$ , avec une tangente horizontale. Pour le vérifier, il faudrait faire un « agrandissement » de ces courbes au voisinage de leur point de départ. Le fait que ceci n'apparaisse pas sur les courbes signifie que le point d'inflexion  $I$  se trouve très près de l'axe vertical. Physiquement, ce point traduit le changement de signe de la dérivée seconde  $\ddot{R}(t)$ . Il correspond donc à peu près à l'égalité  $P = P_\infty$  qui a ainsi lieu très tôt, à peu près seulement car la pression exercée sur la bulle par le fluide n'est pas égale à  $P_\infty$  mais  $P(t)$  puisqu'on a justement utilisé la continuité de la pression à la surface de la bulle pour résoudre ce problème.



La modélisation par un arc d'ellipse ne convient pas aux tous premiers instants. Pour faire mieux, on cherche une expression asymptotique de l'équation différentielle, obtenue à la fin de la question 4.4, pour  $x$  très voisin de 1. On pose  $x = 1 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \ll 1$  et on linéarise l'équation :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} - \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} + \frac{a}{3} \left( \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} - 1 \right) \right]^{1/2} \approx \frac{1}{\tau} \left[ 1 - 3\varepsilon - 1 + 4\varepsilon + \frac{a}{3} (-3\varepsilon) \right]^{1/2}$$

$$\approx \frac{1}{\tau} [\varepsilon - a\varepsilon]^{1/2} = \frac{\sqrt{1-a}}{\tau} \sqrt{\varepsilon}$$

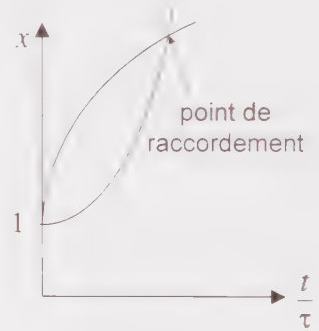
puis on sépare les variables :

$$\varepsilon^{-1/2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{1-a}}{\tau} dt, \text{ d'où } 2\sqrt{\varepsilon} = \frac{\sqrt{1-a}}{\tau} t + \text{cte.}$$

La condition initiale  $\varepsilon(0) = 0$  donne  $\text{cte} = 0$ , soit  $\varepsilon = \left( \frac{\sqrt{1-a}}{2\tau} t \right)^2$  et il vient enfin :

$$x = 1 + \left( \frac{\sqrt{1-a}}{2\tau} t \right)^2 = 1 + \frac{1-a}{4} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2.$$

On a donc un comportement parabolique au départ. Pour le raccorder à la modélisation elliptique, on pourrait par exemple chercher le point d'intersection des deux courbes (parabole et ellipse) et adopter l'équation de la conique au-delà de celui-ci, à condition que le point de raccordement se trouve très près de l'axe vertical.



6.1. On obtient toutes les valeurs finales pour  $t = \frac{2\tau}{a^\alpha}$ , soit avec  $\alpha = 10^{-3}$  :

$$R_f = R_0 + R_0 \left[ \left( \frac{3}{a} \right)^{1/3} - \frac{4}{3} \right] = 4,23 \text{ m,}$$

$$P_f = \frac{P_0}{\left\{ \left( \frac{3}{a} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \right\}^4} = 0,0254 \text{ bar, } T_f = \frac{T_0}{\left( \frac{3}{a} \right)^{1/3} - \frac{1}{3}} = 355 \text{ K.}$$

La pression est effectivement très inférieure à celle régnant loin dans le fluide.

6.2. La durée en question est donnée par :

$$t_f = \frac{2\tau}{a^\alpha} = \frac{2R_0}{a^\alpha} \sqrt{\frac{\mu}{2P_0}} = 0,395 \text{ s.}$$

C'est un phénomène très rapide et on peut définir seulement une vitesse moyenne d'expansion car on n'a pas le temps de « voir » le détail de la fonction  $R(t)$  :

$$\bar{\dot{R}} = \frac{R_f - R_0}{t_f} = 9,95 \text{ m.s}^{-1}.$$

7. L'équation différentielle obtenue à la question 4.4 :

$$\dot{R}^2 = \frac{2P_0}{\mu} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} + \frac{a}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) \right]$$

a été établie sans considération de signe sur  $\dot{R}$  et reste de ce fait valable, mais il faut maintenant faire apparaître un signe négatif en prenant la racine carrée. On écrit donc directement :

$$\dot{R} = -\sqrt{\frac{2P_0}{\mu} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} + \frac{a}{3} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) \right]^{1/2}}.$$

On a ainsi pour chaque valeur de  $R$  la vitesse exactement opposée de celle de la phase de dilatation. Il se produit par conséquent une contraction parfaitement symétrique de cette première phase. Elle s'achève quand  $\dot{R}$  s'annule, c'est-à-dire au bout d'une durée supplémentaire  $t_f$ . On a ainsi retrouvé l'état initial de la bulle, avec une pression interne très supérieure à celle du fluide. Ce caractère réversible provient du fait qu'on n'a pris en compte aucun phénomène de dissipation lors de l'évolution (notamment pas d'échange thermique avec le fluide).

Il apparaît finalement un comportement périodique, formé d'une alternance d'expansions et de contractions symétriques, de période  $2t_f$ . L'application numérique donne 0,79 s pour celle-ci.

8.1. Le champ de vitesse a pour expression dans le fluide  $v(r, t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}$ . Il va donc reproduire les oscillations de la bulle mais avec une amplitude amortie en  $\frac{1}{r^2}$ .

On passe en représentation lagrangienne en remplaçant pour une particule fluide le champ de vitesse eulérien  $v(r, t)$  par l'équation différentielle  $v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$  et en l'intégrant par rapport au temps :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}, \text{ soit } r^2 dr = R^2 \dot{R} dt = R^2 dR$$

et on obtient :

$$\frac{r^3}{3} = \frac{R^3}{3} + \text{cte} \quad \text{d'où enfin} \quad r(t) = \left( R^3(t) + r_0^3 - R_0^3 \right)^{1/3},$$

$r_0$  étant la distance de la particule fluide considérée au centre de la bulle à l'instant initial ( $r_0 > R_0$ ).

Remarquons que cette relation traduit simplement l'incompressibilité du fluide. Le volume de matière compris initialement entre les rayons  $r_0$  et  $R_0$  doit rester le même au cours du temps. Quand  $R$  varie, il faut donc que  $r$  varie d'une quantité telle que  $\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$  reste constant.

8.2. A grande distance, la particule décrit un mouvement d'oscillations d'amplitude

$$\begin{aligned} \delta &= \left( R_0^3(1+x_m)^3 + r_0^3 - R_0^3 \right)^{1/3} - r_0 = r_0 \left( 1 + R_0^3 \frac{(1+x_m)^3 - 1}{r_0^3} \right)^{1/3} - r_0 \\ &\approx r_0 \left( 1 + R_0^3 \frac{(1+x_m)^3 - 1}{3r_0^3} \right) - r_0 = R_0^3 \frac{(1+x_m)^3 - 1}{3r_0^2}. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\delta}{R_0}$  apparaît proportionnel à  $\frac{R_0^2}{r_0^2}$  on constate que  $\delta$  est petit devant  $R_0$ , et a

fortiori devant  $r_0$ . La particule fluide se déplace donc peu relativement à sa distance à  $O$  et on peut donc poser  $r(t) \approx r_0$ , soit  $\delta \approx R_0^3 \frac{(1+x_m)^3 - 1}{3r_0^2}$  sans chercher à préciser quelle valeur instantanée de  $r(t)$  il faut utiliser.

On avait déjà noté cette variation comme l'inverse du carré de la distance à  $O$  au début de la question précédente.

9. Les valeurs de  $R_f$ ,  $P_f$  et  $T_f$  ne dépendent pas de la masse volumique du fluide et restent par conséquent inchangées. Par contre,  $t_f$  est nettement inférieur (divisé par  $\sqrt{1000}$ ) et vaut 0,0125 s. La vitesse moyenne est donc considérablement augmentée (multipliée par  $\sqrt{1000}$ ) et vaut maintenant  $315 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

On voit que  $\bar{R}$  est de l'ordre de grandeur de la vitesse du son dans un gaz. Il est donc évident qu'au moins dans les premières étapes de l'expansion, où la vitesse de dilatation est la plus grande, l'écoulement du fluide est supersonique près de la bulle. Dans ce cas, le fluide ne peut plus être considéré comme incompressible et il se forme une onde de choc sonore qui se propage radialement. C'est la détonation qui accompagne les réactions explosives.

L'onde sonore emportant de l'énergie mécanique, les oscillations de la bulle vont être amorties et, si l'onde est suffisamment intense, il est même possible qu'elles disparaissent dès la première pseudo-période.

10. Un champ de vitesse de la forme  $\vec{v}(M) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \vec{u}_r$  s'écrit immédiatement comme un gradient :

$$\vec{v} = -\overline{\text{grad}} \left( -\frac{R^2 \dot{R}}{r} + f(t) \right)$$

et l'écoulement dans le fluide est donc potentiel.

On pouvait en fait le savoir immédiatement grâce aux propriétés de symétrie nous ayant fait choisir un champ de vitesse de la forme  $v(r, t) \vec{u}_r$ . En effet, l'équation  $v(r, t) \vec{u}_r = \overline{\text{grad}} \varphi$  admet la solution formelle  $\varphi(r, t) = \int v(r, t) dr + f(t)$  quelle que soit l'expression analytique de la fonction  $v(r, t)$  (même si l'intégrale n'a pas de primitive connue). On peut également vérifier qu'un tel champ de vitesse est un gradient en s'assurant que  $\overline{\text{rot}}[v(r, t) \vec{u}_r]$  est identiquement nul sans condition sur l'expression analytique de  $v(r, t)$  (Cf. l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques donnée dans l'énoncé de l'exercice 4).

On aurait alors pu utiliser l'équation de Laplace pour une fonction potentiel de la forme  $\varphi(r, t)$  du fait des invariances :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + 0 + 0 = 0.$$

On aurait obtenu successivement :

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = f(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{f(t)}{r^2} \quad \text{ce qui est } v(r, t) \text{ par définition du gradient.}$$

On n'aurait donc rien trouvé de plus que ce que nous a donné l'équation de continuité. Le caractère potentiel de l'écoulement n'est donc d'aucune aide particulière pour étudier ce problème. Par contre, si on voulait déterminer le champ de pression instantanée dans le fluide, l'uniformité de la combinaison  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2}$  pour les écoulements potentiels non stationnaires de fluides parfaits incompressibles nous permettrait de l'obtenir immédiatement sans avoir à intégrer l'équation d'Euler :

$$\overline{\text{grad}} \frac{P}{\mu} = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \left( \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}} \right) \vec{v}.$$

## EXERCICE 8

### Dilution d'une bulle dans un fluide

On reprend l'exercice précédent qui étudie l'évolution du rayon d'une bulle gazeuse dans un fluide incompressible en l'absence de pesanteur, en se limitant au cas où la pression est nulle dans le fluide très loin de la bulle, seul cas qui possède une solution analytique. L'équation différentielle régissant l'évolution de son rayon  $R(t)$  au cours du temps est alors pendant la phase de dilatation :

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2P_0}{\mu} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} \right]^{1/2}} \quad (\text{pour } P_\infty = 0),$$

$\mu$  étant la masse volumique du fluide,  $R_0$  le rayon initial de la bulle et  $P_0$  la pression initiale à l'intérieur de celle-ci.

1. L'intégrer sous la forme  $t = t(x)$  et tracer la courbe  $x(t)$ , avec  $x = \frac{R}{R_0}$ .

2.1. Montrer en utilisant le caractère potentiel de l'écoulement que le champ de pression dans le fluide est donné par :

$$\frac{p}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) - \frac{R^4 \dot{R}^2}{2r^4}.$$

On le note  $p$  pour éviter toute confusion avec la pression  $P(t)$  uniforme dans la bulle et on rappelle l'expression de la divergence d'un champ de vecteur en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

2.2. Retrouver cette expression de  $p$  en partant de l'équation d'Euler.

2.3. Exprimer  $p$  en fonction de  $r$ ,  $P_0$ ,  $R_0$  et  $R(t)$ .

3.1. Montrer qu'il existe un maximum de pression à une certaine distance du centre de la bulle. A partir de quel instant apparaît-il ?

3.2. Représenter graphiquement  $\frac{p}{P_0}$  en fonction de  $\frac{r}{R_0}$  à différents instants.

3.3. Pouvaient-on prévoir que le maximum instantané dépasserait  $P(t)$  ?

3.4. Calculer la vitesse de déplacement de ce maximum lorsque  $R \gg R_0$ . La comparer à celle des particules fluides. Commenter.

4.1. A quel instant et pour quelle valeur de  $R$  la vitesse d'expansion de la bulle est-elle la plus grande ?

4.2. Quelle valeur minimale de  $P_0$  fait apparaître une onde de choc ?

4.3. Faire l'application numérique pour l'eau, avec  $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $c = 1450 \text{ m.s}^{-1}$ , puis pour l'air, avec  $\mu = 1,17 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $c = 346 \text{ m.s}^{-1}$ . Comparer les deux valeurs.

5.1. La pression et la température étant supposées uniformes dans la bulle, exprimer le champ de vitesse à l'intérieur de celle-ci en fonction de  $R$ ,  $\dot{R}$  et  $r$ .

5.2. Montrer que l'équation d'Euler aboutit alors à une contradiction.

5.3. Que peut-on en conclure sur la validité de la solution dans le fluide ? On pourra se référer à l'exercice précédent pour observer de quelle manière a été obtenue l'équation différentielle d'évolution du rayon de la bulle.

1. On pose encore une fois  $x = \frac{R}{R_0}$  et  $\tau = \sqrt{\frac{\mu R_0^2}{2P_0}}$ , de manière à écrire l'équation sous une forme plus simple :

$$\dot{x} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right)^{1/2} = \frac{1}{\tau x^2} \sqrt{x-1} \quad \text{et on sépare les variables :}$$

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{dt}{\tau}$$

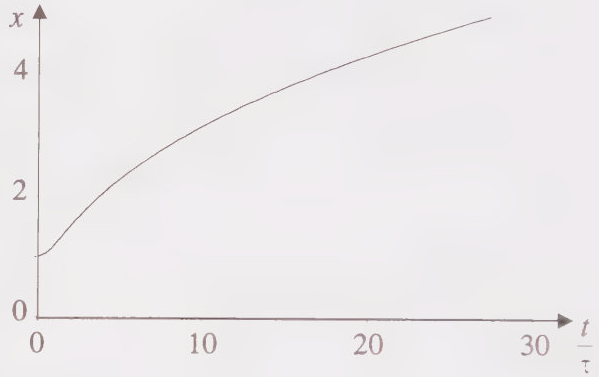
Il reste à intégrer par parties compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{aligned} \frac{t}{\tau} &= \int_1^x \frac{u^2 du}{\sqrt{u-1}} = \left[ 2u^2 \sqrt{u-1} \right]_1^x - \int_1^x 4u \sqrt{u-1} du \\ &= 2x^2 \sqrt{x-1} - \left[ \frac{8u(u-1)^{3/2}}{3} \right]_1^x + \int_1^x \frac{8(u-1)^{3/2}}{3} du \\ &= 2x^2 \sqrt{x-1} - \frac{8x(x-1)^{3/2}}{3} + \left[ \frac{16(u-1)^{5/2}}{15} \right]_1^x \end{aligned}$$

et il vient :

$$\frac{t}{\tau} = 2x^2 \sqrt{x-1} - \frac{8x(x-1)^{3/2}}{3} + \frac{16(x-1)^{5/2}}{15} = \frac{2}{15} \sqrt{x-1} (3x^2 + 4x + 8).$$

La relation n'est pas inversible car  $x$  serait donné en fonction de  $t$  en résolvant une équation du cinquième degré. Mais, le second membre étant une fonction monotone croissante de  $x$  (car le polynôme du second degré présente son minimum pour une valeur négative de  $x$ ), il est clair que  $x$ , et donc  $R$ , est une fonction monotone croissante du temps.



On a d'ailleurs l'expression asymptotique :

$$\frac{t}{\tau} \approx \frac{2x^{5/2}}{5} \quad \text{pour } t \text{ suffisamment grand devant } \tau, \text{ d'où :}$$

$$x \approx \left( \frac{5t}{2\tau} \right)^{2/5}.$$

2.1. Dans un fluide incompressible, l'équation de continuité s'écrit  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Du fait de son isotropie, le mouvement induit dans le fluide par l'expansion de la bulle est radial et indépendant de la direction, soit  $\vec{v}(M) = v(r, t) \vec{u}_r$ . L'équation de continuité donne alors :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = 0, \quad \text{soit } r^2 v = f(t).$$

Pour déterminer la « constante » d'intégration  $f(t)$ , il suffit d'écrire la continuité de la vitesse à la surface de la bulle :

$$f(t) = R^2 v(R, t) = R^2 \frac{dR}{dt} = R^2 \dot{R} \quad \text{et on obtient :}$$

$$v(r, t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}.$$

Or, on voit aisément que :

$$\frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \vec{u}_r = \overline{\text{grad}} \left( -\frac{R^2 \dot{R}}{r} \right)$$

et la fonction  $\varphi(r, t) = -\frac{R^2 \dot{R}}{r}$  est donc un potentiel des vitesses acceptable. Dans

ce cas, on sait que la combinaison  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2}$  est uniforme dans le fluide à tout instant et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{p(M)}{\mu} &= \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} + \frac{P_\infty}{\mu} + \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{v^2}{2} = 0 + 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R^2 \dot{R}}{r} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) - \frac{R^4 \dot{R}^2}{2r^4}. \end{aligned}$$

2.2. Puisqu'on ne tient pas compte de la pesanteur, l'équation d'Euler dans le fluide s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{\overline{\text{grad}} P}{\mu} = \frac{\partial v}{\partial t} \vec{u}_r + \left( v \frac{\partial}{\partial r} \right) \vec{v}$$

et elle donne en projection sur  $\vec{u}_r$  :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r}.$$

On a donc :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (R^2 \dot{R}) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(R^2 \dot{R})^2}{2r^4} \right)$$

et on intègre sans difficulté :

$$\frac{p}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) - \frac{(R^2 \dot{R})^2}{2r^4} + f(t).$$

À l'infini on doit retrouver une pression nulle et la fonction  $f$  est donc nécessairement identiquement nulle. On obtient ainsi la même expression qu'à la question précédente.

2.3. On explicite la vitesse de croissance du rayon de la bulle dans l'expression du champ de pression :

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\mu}{r} \frac{d}{dt} \left[ R^2 \sqrt{\frac{2P_0}{\mu} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} \right)^{1/2}} \right] - \frac{\mu}{2r^4} \left[ R^2 \sqrt{\frac{2P_0}{\mu} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} \right)^{1/2}} \right]^2 \\
 &= \frac{\mu}{r} \sqrt{\frac{2P_0}{\mu}} \frac{d}{dt} \left( \left( R_0^3 R - R_0^4 \right)^{1/2} \right) - \frac{P_0}{r^4} \left( R_0^3 R - R_0^4 \right) \\
 &= \frac{\mu}{r} \sqrt{\frac{P_0}{2\mu}} \left( R_0^3 R - R_0^4 \right)^{-1/2} R_0^3 \frac{dR}{dt} - \frac{P_0}{r^4} \left( R_0^3 R - R_0^4 \right)
 \end{aligned}$$

et en réexplicitant  $\frac{dR}{dt}$  :

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\mu}{r} \sqrt{\frac{P_0}{2\mu}} \left( R_0^3 R - R_0^4 \right)^{-1/2} R_0^3 \sqrt{\frac{2P_0}{\mu} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} \right)^{1/2}} - \frac{P_0}{r^4} \left( R_0^3 R - R_0^4 \right) \\
 &= \frac{P_0 R_0^3}{r R^2} - \frac{P_0}{r^4} \left( R_0^3 R - R_0^4 \right) = P_0 R_0^3 \left( \frac{1}{r R^2} + \frac{R_0 - R}{r^4} \right).
 \end{aligned}$$

3.1. Le champ de pression présente un extremum si la dérivée partielle de  $p$  par rapport à  $r$  s'annule, soit :

$$\frac{1}{r^2 R^2} + 4 \frac{R_0 - R}{r^5} = 0 \quad \text{et ceci a lieu pour :}$$

$$r = \left[ 4R^2(R - R_0) \right]^{1/3} = R \left[ 4 \left( 1 - \frac{R_0}{R} \right) \right]^{1/3}.$$

Il s'agit d'un maximum puisqu'il est unique alors que la pression est positive par définition et tend vers 0 à l'infini. Mais ce résultat n'a de sens que si la valeur de  $r$  ainsi obtenue est supérieure à  $R(t)$ , car la pression est par hypothèse uniforme à l'intérieur de la bulle. Il faut donc respecter la condition :

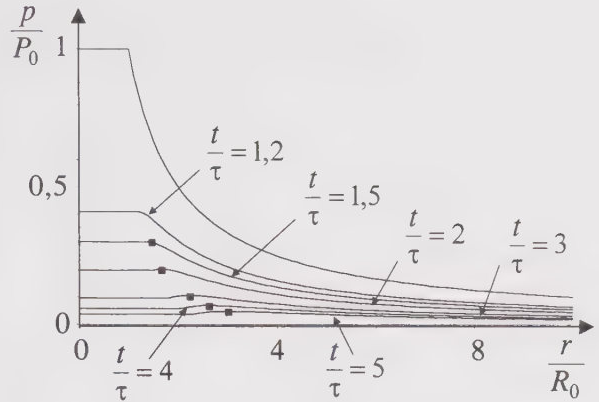
$$\frac{r}{R} = \left[ 4 \left( 1 - \frac{R_0}{R} \right) \right]^{1/3} > 1, \quad \text{soit} \quad \frac{R_0}{R} < \frac{3}{4}.$$

En reportant l'inégalité  $x > \frac{4}{3}$  dans l'expression obtenue à la question 1 il vient :

$$\frac{t}{\tau} > \frac{2}{15} \sqrt{\frac{4}{3}} - 1 \left( 3 \frac{16}{9} + 4 \frac{4}{3} + 8 \right) = \frac{2}{15} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{56}{3} \approx 1,44.$$

Avant cet instant, la pression dans le fluide décroît monotonement avec la distance et est donc maximale dans la bulle.

3.2. La partie horizontale de chaque courbe (Cf. ci-contre) correspond à la pression uniforme  $P(t)$  dans la bulle et on constate bien que le maximum de pression dans le fluide (visualisé par un carré noir) n'apparaît pas immédiatement. Il faut aussi noter qu'il n'est pas très marqué, qu'il « s'étale » au cours du temps, mais qu'il est néanmoins supérieur à la pression instantanée dans la bulle. C'est donc une surpression, située devant la bulle.



3.3. D'après les résultats de la question 1, la vitesse d'expansion de la bulle décroît au cours du temps. Ceci signifie que, malgré une pression nulle à grande distance dans le fluide, les forces de pression qui s'exercent sur elle s'opposent à la dilatation. A proximité de la bulle, la pression dans le fluide est donc supérieure à sa pression interne. Le maximum ne peut par conséquent être que supérieur à  $P(t)$ .

3.4. Lorsque  $R \gg R_0$ , la vitesse de déplacement de cette surpression est :

$$v_p = \frac{d}{dt} \left\{ R \left[ 4 \left( 1 - \frac{R_0}{R} \right) \right]^{1/3} \right\} \approx \frac{d}{dt} \{ 4^{1/3} R \} = 4^{1/3} \dot{R} \approx 1,59 \dot{R} .$$

Elle progresse plus vite dans le fluide que le rayon de la bulle.

On sait par ailleurs que le champ de vitesse dans le fluide s'écrit :

$$v = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} < \dot{R} < v_p$$

et par conséquent la surpression se déplace plus rapidement que les particules fluides. On a donc affaire à la progression d'une grandeur physique non associée à un déplacement conjoint de matière. Il s'agit d'une onde (plus précisément d'un front d'onde unique).

4.1. La fonction  $\dot{R}(R)$  est continue sur son domaine et a pour limites 0 et 0. Elle présente donc au moins un extremum et, avec pour équivalent :

$$\dot{R}(R \rightarrow +\infty) \approx \sqrt{\frac{2P_0}{\mu}} \frac{R_0^{3/2}}{R^{3/2}}$$

il existe nécessairement un maximum. Pour le localiser, on calcule la dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{R}}{dR} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2P_0}{\mu}} \left[ \frac{4R_0^4}{R^5} - \frac{3R_0^3}{R^4} \right] \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} \right]^{-1/2} \\ &= \frac{R_0^3}{R^4} \sqrt{\frac{P_0}{2\mu}} \left( \frac{4R_0}{R} - 3 \right) \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{R_0^4}{R^4} \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

et on voit qu'elle s'annule seulement une fois, pour  $R = \frac{4R_0}{3}$ . Il s'agit donc du maximum recherché et on a alors :

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2P_0}{\mu}} \left[ \left( \frac{3}{4} \right)^3 - \left( \frac{3}{4} \right)^4 \right]^{1/2} = \frac{9}{16} \sqrt{\frac{2P_0}{\mu}} \left( \frac{4}{3} - 1 \right)^{1/2} = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{6P_0}{\mu}}$$

L'instant correspondant est défini par :

$$\frac{t}{\tau} = \frac{2}{15} \sqrt{\frac{4}{3}} - 1 \left( 3 \frac{4^2}{3^2} + 4 \frac{4}{3} + 8 \right) = \frac{2}{15} \sqrt{\frac{1}{3}} \left( \frac{56}{3} \right) = \frac{112}{45\sqrt{3}} \approx 1.44$$

Ceci se produit très tôt, comme on peut le vérifier sur la figure de la question 1

4.2. Il faut que la vitesse d'expansion de la bulle atteigne au moins la vitesse du son quand elle est maximale pour qu'un écoulement transsonique apparaisse. On écrit donc :

$$\frac{3}{16} \sqrt{\frac{6P_0}{\mu}} \geq c, \text{ soit } P_0 \geq \frac{128\mu c^2}{27}$$

4.3. Dans le cas de l'eau, on obtient  $P_0 \geq 10^{10} \text{ Pa} = 10^5 \text{ bars}$ . Pour l'air on trouve  $P_0 \geq 6,67 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 6,67 \text{ bars}$ . Les effets sonores associés à l'expansion sont beaucoup plus discrets dans un fluide dense. Pour entendre le « bang » de la détonation dans un liquide, il faut une réaction explosive beaucoup plus violente que dans un gaz.

5.1. Dans la bulle l'écoulement est encore isotrope et radial mais il faut tenir compte de la compressibilité. L'uniformité de la pression et de la température entraînent également celle de la masse volumique du fait de l'équation d'état. On a alors, en notant  $m$  la masse constante du gaz contenu dans la bulle :

$$\rho_{\text{bulle}} = \frac{3m}{4\pi R^3} \text{ et l'équation de continuité s'y écrit :}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3m}{4\pi R^3} \right) + \text{div} \left( \frac{3m}{4\pi R^3} v(r,t) \vec{u}_r \right) = 0, \text{ soit encore :}$$

$$\frac{3m}{4\pi} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{R^3} \right) + \frac{3m}{4\pi R^3} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = 0$$

et il vient après simplification :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = \frac{3\dot{R}}{R} r^2.$$

L'intégration donne :

$$r^2 v = \frac{\dot{R}}{R} r^3 + f(t), \text{ soit } v = \frac{\dot{R}}{R} r + \frac{f(t)}{r^2}.$$

Devant retrouver  $v(r=R) = \dot{R}$ , on obtient finalement :

$$v = \frac{\dot{R}}{R} r.$$

5.2. L'accélération des particules fluides dans la bulle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{R}}{R} r \vec{u}_r \right) = \left( \frac{\ddot{R}r}{R} - \frac{\dot{R}^2 r}{R^2} + \frac{\dot{R}}{R} \frac{dr}{dt} \right) \vec{u}_r = \left( \frac{\ddot{R}r}{R} - \frac{\dot{R}^2 r}{R^2} + \frac{\dot{R}v}{R} \right) \vec{u}_r \\ &= \left( \frac{\ddot{R}r}{R} - \frac{\dot{R}^2 r}{R^2} + \frac{\dot{R}^2 r}{R^2} \right) \vec{u}_r = \frac{\ddot{R}r}{R} \vec{u}_r \end{aligned}$$

et l'équation d'Euler donne pour le champ de pression :

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu} = -\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\ddot{R}r}{R} \vec{u}_r, \text{ soit en projetant sur } \vec{u}_r :$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\mu \ddot{R}r}{R} = -\frac{3m \ddot{R}r}{4\pi R^4},$$

ce qui signifie qu'il n'est pas uniforme. Ce résultat contredit l'hypothèse d'uniformité qui a servi à l'obtenir.

5.3. On ne peut donc pas considérer la pression et la températures uniformes dans la bulle. Or l'hypothèse d'uniformité de la pression a été utilisée dans l'exercice précédent pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par  $R$ . Plus précisément, on a écrit la condition d'évolution adiabatique sous la forme  $PR^{3\gamma} = P_0 R_0^{3\gamma}$  et il serait bien difficile d'en trouver une expression mathématique exploitable en cas de non-uniformité. On pourrait toujours écrire localement  $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$  au cours de l'évolution d'une particule fluide, mais comment relier pression interne et rayon de la bulle ?

## EXERCICE 9

### Source tournante

Un tube cylindrique de rayon  $R$  est percé sur sa face latérale d'un grand nombre de trous et constitue une source de fluide parfait incompressible de débit volumique  $D_V$  par unité de hauteur le long de son axe de révolution  $Oz$ . L'émission est normalement radiale et on la suppose invariante par rotation et par translation relativement à cet axe. Il s'agit alors d'un écoulement potentiel plan. On note  $\mu$  la masse volumique du fluide, on se place en régime stationnaire et on ne tient pas compte de la pesanteur. On rappelle enfin qu'en coordonnées cylindriques la divergence a pour expression :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

1. Écrire le champ de vitesse en coordonnées cylindriques.
2. Le tube est maintenant en rotation à la vitesse angulaire constante  $\Omega$  dans le sens indirect (sens inverse du sens trigonométrique). Sous quelle forme faut-il chercher cette fois le champ de vitesse ? Quelle est sa composante radiale ?
3. Projeter dans ce même cas l'équation d'Euler sur la base cylindrique et montrer que la composante orthoradiale est  $v_\theta = \frac{\Omega R^2}{r}$ .
4. En déduire le champ de vitesse puis celui de pression. On notera  $P_0$  la pression à l'infini.
5. La combinaison  $\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2}$  est-elle uniforme ? Que peut-on en déduire ? La même déduction peut-elle être obtenue sans connaître le champ de pression ? Quel problème se pose alors ?
6. Donner l'équation différentielle des lignes de courant et les représenter graphiquement.
7. Quel couple par unité de hauteur faut-il exercer sur le cylindre pour maintenir sa rotation ? On ne prendra en considération aucune force de frottement.
8. Par construction, le débit  $D_V$  est proportionnel à la vitesse angulaire du cylindre. Définir une durée caractéristique d'arrêt  $\tau$  en l'absence du couple précédent. On notera pour cela  $I$  le moment d'inertie (constant) par rapport à  $Oz$  de l'ensemble du cylindre et du fluide qu'il contient et  $\Omega_0$  la valeur initiale de  $\Omega$ .
9. A quelle condition cette expression de  $\tau$  a-t-elle un sens ?

1. L'écoulement est radial et, du fait des invariances citées, le champ de vitesse s'écrit simplement  $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_r$ . L'équation de continuité se limite alors à :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rv) = 0.$$

On en déduit  $rv = \text{cte}$ , soit  $v = \frac{\text{cte}}{r}$  et la constante d'intégration se détermine en fonction du débit volumique. Celui-ci se conserve à travers toute surface cylindrique latérale d'axe  $Oz$  et on a ainsi :

$$D_V = \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{v} \cdot r d\theta dz \vec{u}_r = \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \text{cte} d\theta dz = 2\pi \times \text{cte}.$$

On obtient de cette façon :

$$\vec{v}(M) = \frac{D_V}{2\pi r} \vec{u}_r.$$

2. La rotation du tube ne modifie pas les propriétés d'invariance mais provoque évidemment l'apparition d'une composante orthoradiale du champ de vitesse. On écrit donc  $\vec{v}(M) = v_r(r)\vec{u}_r + v_\theta(r)\vec{u}_\theta$ . L'équation de continuité donne comme précédemment  $v_r = \frac{\text{cte}}{r}$  et on retrouve à l'aide du débit volumique la même composante radiale :

$$v_r = \frac{D_V}{2\pi r}.$$

3. Pour l'orthoradiale, on est obligé d'utiliser l'équation d'Euler. Le terme inertiel s'écrit ici :

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} &= \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [v_r(r)\vec{u}_r + v_\theta(r)\vec{u}_\theta] \\ &= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{u}_r + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{u}_\theta + \frac{v_\theta}{r} (v_r \vec{u}_\theta - v_\theta \vec{u}_r) \\ &= \left( v_r \frac{dv_r}{dr} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \vec{u}_r + \left( v_r \frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

et l'équation se projette ainsi en :

$$v_r \frac{dv_r}{dr} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr}, \quad v_r \frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta v_r}{r} = -\frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$

car l'invariance par rotation concerne aussi la pression. La seconde projection de l'équation s'intègre immédiatement en séparant les variables :

$$\frac{dv_\theta}{v_\theta} = -\frac{dr}{r} \text{ et on en déduit :}$$

$$\ln(v_\theta) = -\ln(r) + K, \text{ soit } v_\theta = \frac{K'}{r}.$$

On détermine la constante d'intégration en exprimant la vitesse d'éjection du fluide à la sortie du tube. Celle-ci s'y écrit du fait de la rotation :

$$\vec{v}(r=R) = v_r(R)\vec{u}_r + \Omega R\vec{u}_\theta, \text{ d'où } \Omega R = \frac{K'}{R}$$

ce qui donne bien :

$$v_\theta = \frac{\Omega R^2}{r}.$$

4. Le champ de vitesse s'écrit finalement :

$$\vec{v} = \frac{D_V}{2\pi r}\vec{u}_r + \frac{\Omega R^2}{r}\vec{u}_\theta.$$

Celui de pression s'obtient en intégrant la projection radiale de l'équation d'Euler :

$$\frac{dP}{dr} = \mu \frac{v_\theta^2}{r} - \mu v_r \frac{dv_r}{dr} = \mu \frac{\Omega^2 R^4}{r^3} + \mu \frac{D_V}{2\pi r} \frac{D_V}{2\pi r^2} = \left( \Omega^2 R^4 + \frac{D_V^2}{4\pi^2} \right) \frac{\mu}{r^3}, \text{ d'où :}$$

$$P = \text{cte} - \left( \Omega^2 R^4 + \frac{D_V^2}{4\pi^2} \right) \frac{\mu}{2r^2}$$

et en posant  $P = P_0$  à l'infini :

$$P = P_0 - \left( \Omega^2 R^4 + \frac{D_V^2}{4\pi^2} \right) \frac{\mu}{2r^2}.$$

5. On exprime cette combinaison :

$$v^2 + \frac{P}{\mu} = \frac{D_V^2}{8\pi^2 r^2} + \frac{\Omega^2 R^4}{2r^2} + \frac{P_0}{\mu} - \left( \Omega^2 R^4 + \frac{D_V^2}{4\pi^2} \right) \frac{1}{2r^2} = \frac{P_0}{\mu} = \text{cte}.$$

C'est bien une grandeur uniforme, ce qui signifie que l'écoulement est potentiel (ce qui n'était pas évident a priori).

On peut normalement établir cette dernière propriété en montrant qu'il existe un potentiel des vitesses. Il faut pour cela résoudre les deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r = \frac{D_V}{2\pi r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = v_\theta = \frac{\Omega R^2}{r}.$$

La première donne :

$$\varphi = \frac{D_V}{2\pi} \ln(r) + f(\theta)$$

et en reportant ceci dans la seconde on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{df}{d\theta} = \frac{\Omega R^2}{r}, \quad \text{soit :}$$

$$f(\theta) = \Omega R^2 \theta + \text{cte},$$

ce qui donne finalement :

$$\varphi = \frac{D_V}{2\pi} \ln(r) + \Omega R^2 \theta + \text{cte}.$$

On constate qu'il existe un problème d'univocité de cette fonction à chaque fois qu'on franchit l'axe des  $x$  si  $\theta$  n'est pas borné, ainsi qu'un problème de continuité, toujours au franchissement de l'axe, si on définit  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ . On pourrait donc douter de la validité de la fonction  $\varphi$  et de ce fait du caractère potentiel de l'écoulement, alors que la propriété d'uniformité de  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu}$  ne laisse aucun doute.

6. Comme il s'agit d'un écoulement plan, les lignes de courant sont simplement définies dans un plan orthogonal à  $Oz$  par :

$$(\vec{v} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{u}_z = v_r r d\theta - v_\theta dr = 0, \quad \text{soit :}$$

$$\frac{D_V}{2\pi} d\theta - \frac{\Omega R^2}{r} dr = 0.$$

On sépare les variables :

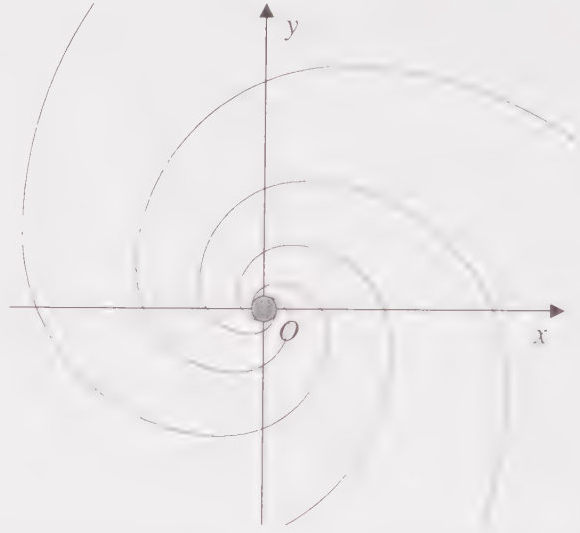
$$\frac{D_V}{2\pi\Omega R^2} d\theta = \frac{dr}{r} \quad \text{et il vient} \quad \frac{D_V \theta}{2\pi\Omega R^2} = \ln(r) + \text{cte}, \quad \text{soit :}$$

$$r = K \exp\left(\frac{D_V \theta}{2\pi\Omega R^2}\right).$$

Si on note  $\theta_0$  la valeur de  $\theta$  au point de départ de la ligne de courant sur le cylindre, on peut encore écrire :

$$r = R \exp\left(\frac{D_V(\theta - \theta_0)}{2\pi\Omega R^2}\right).$$

Il s'agit d'une spirale très ouverte, d'autant plus ouverte que  $\frac{D_V}{\Omega R^2}$  est grand, se développant dans le sens des  $\theta$  décroissants puisque  $\Omega$  est négatif pour une rotation dans le sens indirect.



7. L'éjection de fluide dans un écoulement présentant un caractère tournant s'accompagne d'une perte de moment cinétique pour le système formé par le cylindre et le fluide qu'il contient. Le débit sortant, par la surface latérale du cylindre, de moment cinétique en  $O$  est par unité de hauteur suivant l'axe  $Oz$  :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\mathcal{L}} &= \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \overline{OM} \wedge \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \overline{OM} \cdot \mu \vec{v} (v_r R d\theta dz) \\ &= \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} (R\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge \mu (v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta) (v_r R d\theta dz) \\ &= \mu \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} (Rv_\theta \vec{u}_z + zv_r \vec{u}_\theta - zv_\theta \vec{u}_r) (v_r R d\theta dz), \end{aligned}$$

soit, puisque les composantes de la vitesse ne dépendent ni de  $\theta$  ni de  $z$  :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\mathcal{L}} &= \mu R^2 v_r v_\theta \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{u}_z d\theta dz + \mu R v_r^2 \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} z \vec{u}_\theta d\theta dz \\ &\quad - \mu R v_r v_\theta \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} z \vec{u}_r d\theta dz. \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales sur  $\theta$  sont nulles par symétrie<sup>7</sup> et il reste :

$$\dot{D}_{\mathcal{L}} = \mu R^2 v_r v_\theta \int_{z=z_0}^{z_0+1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{u}_z d\theta dz = \mu R^2 \frac{D_V}{2\pi R} \Omega R \int_0^{2\pi} \vec{u}_z d\theta = \mu R^2 D_V \Omega \dot{u}_z.$$

<sup>7</sup> Il suffit de décomposer les deux vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  sur la base cartésienne pour voir que l'intégration sur  $\theta$  donne 0 pour toutes les composantes.

Le système perd ainsi (en module) du moment cinétique, ce qui signifie qu'il devrait ralentir et finir par s'arrêter. Pour maintenir le régime stationnaire, on doit donc exercer sur le cylindre un couple compensateur  $\vec{\mathcal{M}}_O$  vérifiant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt} = \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} + \vec{D}_{\mathcal{L}} = \vec{\mathcal{M}}_O, \text{ soit ici pour un régime stationnaire :}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{D}_{\mathcal{L}} = \mu R^2 D_V \Omega \vec{u}_z.$$

8. On écrit dans ce cas  $D_V = A\Omega$  (avec  $A$  négatif) et le théorème du moment cinétique donne cette fois en l'absence de couple extérieur :

$$\frac{D\vec{\mathcal{L}}_O}{Dt} = \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} + \vec{D}_{\mathcal{L}} = \vec{0}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = -\vec{D}_{\mathcal{L}} = -\mu R^2 D_V \Omega \vec{u}_z = -\mu R^2 A \Omega^2 \vec{u}_z \text{ avec } \vec{\mathcal{L}}_O = \mathfrak{J} \vec{\Omega}.$$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement :

$$\mathfrak{J} \dot{\Omega} = -\mu R^2 A \Omega^2 \text{ qui s'intègre en :}$$

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{\mu R^2 A t}{\mathfrak{J}} + \text{cte.}$$

A l'instant initial on a  $\frac{1}{\Omega_0} = \text{cte}$  et on écrit finalement :

$$\Omega = \left( \frac{\mu R^2 A t}{\mathfrak{J}} + \frac{1}{\Omega_0} \right)^{-1} = \Omega_0 \left( 1 + \frac{\mu R^2 \Omega_0 A t}{\mathfrak{J}} \right)^{-1}.$$

Il s'agit d'une fonction décroissante de  $t$  en valeur absolue puisque le produit  $\Omega_0 A$  est positif.

On peut par exemple définir  $\tau$  comme la durée pour laquelle  $\Omega$  est réduit au dixième de sa valeur initiale. L'argument de la parenthèse est alors égal à 10 quand  $t = \tau$ , d'où :

$$\tau = \frac{9\mathfrak{J}}{\mu R^2 \Omega_0 A}.$$

9. On a supposé pour aboutir à ce résultat que l'écoulement est stationnaire (le débit sortant de moment cinétique dépend du champ de vitesse qui a été calculé en ré-

gime stationnaire), ce qui est contradictoire avec un ralentissement progressif de la rotation du cylindre. Il faut donc admettre, si on veut que cette expression de  $\tau$  ait encore un sens, que la vitesse angulaire décroît suffisamment lentement pour que l'on soit à chaque instant dans un état quasi stationnaire. A posteriori, il faudra donc s'assurer numériquement que la valeur obtenue pour  $\tau$  est suffisamment grande. Plus précisément, on utilisera l'analyse dimensionnelle en comparant la dérivée temporelle du champ de vitesse et le terme inertiel :

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{U}{\tau} \quad \text{et} \quad \left| (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) v^2 \right| \sim \frac{U^2}{R}.$$

Notre résolution de l'équation d'Euler est acceptable si :

$$\frac{U}{\tau} \ll \frac{U^2}{R}, \quad \text{soit} \quad \tau \gg \frac{R}{U}$$

pour qu'il soit possible de négliger la dérivée temporelle dans le membre de gauche de l'équation d'Euler. Il reste à définir l'échelle caractéristique de vitesse  $U$ . Il en existe deux indépendantes,  $\frac{D_V}{2\pi R}$  et  $\Omega_0 R$ , correspondant aux deux composantes de la vitesse du fluide à la sortie du cylindre. Mais le ralentissement de la rotation ne concerne que la composante orthoradiale et c'est donc  $\Omega_0 R$  qui est la plus représentative. On obtient ainsi comme critère de validité :

$$\tau \gg \frac{1}{\Omega_0}.$$

Si on veut un critère a priori, il suffit de reprendre l'expression obtenue pour  $\tau$  :

$$\frac{9\eta}{\mu R^2 \Omega_0 A} \gg \frac{1}{\Omega_0}, \quad \text{soit} \quad \frac{9\eta}{\mu R^2 A} \gg 1.$$

Le critère ne dépend en fait d'aucune condition initiale.

## EXERCICE 10

### Déviations d'un jet par un plan

On étudie la déviation d'un jet de fluide parfait incompressible, de masse volumique  $\mu$ , par une plaque plane infinie fixe coïncidant avec le plan  $Oyz$ . On se place en régime stationnaire, on suppose a priori l'écoulement potentiel, avec une vitesse normale à la plaque sur l'axe  $Ox$ , direction d'émission du jet depuis une source unique non précisée.

On admet également que le problème est invariant par translation suivant  $Oz$  et que  $Oxy$  est un plan de symétrie de l'écoulement. Enfin, on ne tient pas compte de la pesanteur.

1. Comment s'écrivent les conditions aux limites sur le potentiel des vitesses en coordonnées cartésiennes et quelle doit être sa forme générale ?

2. On cherche ce potentiel sous la forme :

$$\varphi(M) = f(x)g(y).$$

Existe-t-il une solution acceptable ?

3. On le cherche ensuite sous la forme :

$$\varphi(M) = f(x) + g(y).$$

Existe-t-il une solution acceptable ?

4. On fait maintenant une recherche de solution en coordonnées polaires. Comment s'écrivent les conditions aux limites sur le potentiel des vitesses et quelle doit être sa forme générale compte tenu des symétries et invariances ?

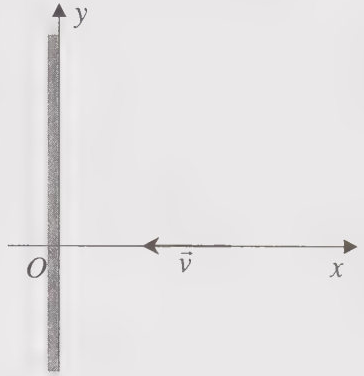
On rappelle que le laplacien s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

5. On cherche le potentiel des vitesses sous la forme  $\varphi(M) = f(r)g(\theta)$ . Existe-t-il une solution acceptable ?

6. On le cherche enfin sous la forme  $\varphi(M) = f(r) + g(\theta)$ . Existe-t-il une solution acceptable ?

7. Que faut-il conclure de cette étude ?



1. Sur la plaque, l'écoulement est nécessairement tangentiel et sur l'axe  $Ox$  il doit rester normal jusqu'à la plaque du fait de la symétrie présumée. On a donc  $v_x = 0$  pour  $x = 0$  quels que soient  $y$  et  $z$  et  $v_y = 0$  pour  $y = 0$  quels que soient  $x$  et  $z$ . Le potentiel des vitesses est de la forme  $\varphi(M) = \varphi(x, y)$  du fait de l'invariance par translation et doit donc vérifier les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0.$$

Enfin, la présence du plan de symétrie impose l'inversion de la composante  $v_y$  avec le changement de signe de  $y$ , ce qui signifie que  $v_y$  est une fonction impaire de  $y$  et donc que  $\varphi$  est une fonction paire de cette même variable.

2. L'équation de Laplace vérifiée par le potentiel des vitesses s'écrit dans ce cas :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = g \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{d^2 g}{dy^2} = 0,$$

ce qui donne l'équation à variables séparées :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2}.$$

Or l'égalité de deux fonctions de deux variables indépendantes, de  $x$  à gauche et de  $y$  à droite, n'est possible quelles que soient ces variables que si on a affaire à une même constante. On écrit donc :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = K, \text{ soit encore :}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - Kf = 0 \text{ et } \frac{d^2 g}{dy^2} + Kg = 0.$$

Si  $K$  est nul on obtient des fonctions affines :

$$\varphi = (Ax + B)(Cy + D)$$

mais les conditions aux limites donnent alors :

$$A(Cy + D) = 0 \text{ et } (Ax + B)C = 0$$

quels que soient  $x$  et  $y$ . On en déduit  $A = 0$  et  $C = 0$ , ce qui signifie un potentiel des vitesses uniforme et donc une vitesse nulle et pas d'écoulement. C'est par conséquent un cas à rejeter.

Si  $K$  est positif on obtient une solution exponentielle réelle, ou hyperbolique, pour  $f$  et sinusoidale pour  $g$  :

$$\varphi = [A \operatorname{ch}(\sqrt{K} x) + B \operatorname{sh}(\sqrt{K} x)] [C \cos(\sqrt{K} y) + D \sin(\sqrt{K} y)],$$

soit plus simplement à cause de la condition de parité :

$$\varphi = [\mathcal{A} \operatorname{ch}(\sqrt{K} x) + \mathcal{B} \operatorname{sh}(\sqrt{K} x)] \cos(\sqrt{K} y).$$

La condition aux limites en  $x = 0$  impose alors :

$$\sqrt{K} \mathcal{B} \cos(\sqrt{K} y) = 0 \text{ quel que soit } y,$$

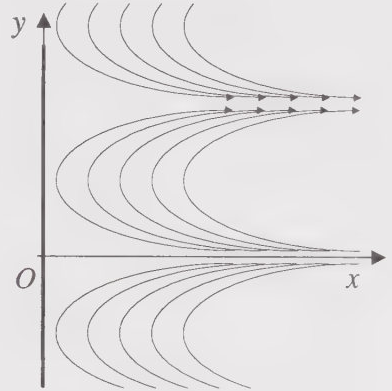
l'autre condition étant automatiquement respectée. La constante  $\mathcal{B}$  est ainsi nulle et on a finalement :

$$\varphi = \mathcal{A} \operatorname{ch}(\sqrt{K} x) \cos(\sqrt{K} y).$$

On constate un comportement périodique suivant l'axe  $Oy$ , ce qui signifie notamment qu'on va retrouver une vitesse colinéaire à  $Ox$  avec une période spatiale  $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ . Ceci n'est pas

compatible avec l'existence d'une source unique (condition imposée par l'énoncé) et correspond à une alternance de sources, séparées par des jets de retour, émettant vers la plaque en incidence normale et espacées de  $\frac{4\pi}{\sqrt{K}}$ . (Cf. ci-contre). Cette forme de solution

est donc à exclure également.



Si  $K$  est négatif, on obtient de manière analogue des fonctions hyperboliques et sinusoidales. Il vient avec la condition de parité :

$$\varphi = [\mathcal{A} \cos(\sqrt{-K} x) + \mathcal{B} \sin(\sqrt{-K} x)] \operatorname{ch}(\sqrt{-K} y).$$

La condition aux limites sur  $x$  s'écrit :

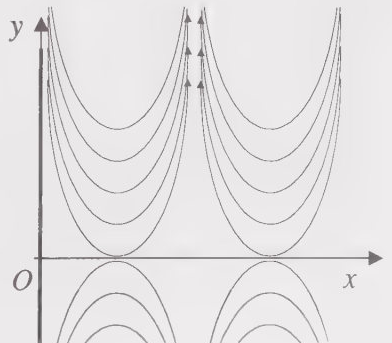
$$\sqrt{-K} \mathcal{B} \operatorname{ch}(\sqrt{K} y) = 0 \text{ quel que soit } y$$

et celle sur  $y$  est automatiquement respectée. La constante  $\mathcal{B}$  est encore nulle et on retrouve un comportement périodique :

$$\varphi = \mathcal{A} \cos(\sqrt{-K} x) \operatorname{ch}(\sqrt{-K} y).$$

Il est cette fois suivant l'axe  $Ox$  mais ce n'est toujours pas compatible avec l'existence d'une source unique. On aurait plutôt une alternance de sources, avec encore une période spatiale  $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ , séparées par des jets de retour, émet-

tant à l'infini les unes vers les autres parallèlement à la plaque. Cette forme de solution est aussi à exclure.



3. Cette fois, l'équation de Laplace donne :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2g}{dy^2} = 0, \text{ soit :}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{d^2g}{dy^2}$$

et on retrouve l'égalité de deux fonctions de deux variables indépendantes. Donc on résout séparément :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = K \text{ et } \frac{d^2g}{dy^2} = -K.$$

On obtient directement :

$$\varphi = \frac{Kx^2}{2} + Ax - \frac{Ky^2}{2} + By + C$$

et les conditions aux limites imposent :

$$A = 0 \text{ (condition pour } x = 0) \text{ et } B = 0 \text{ (condition pour } y = 0).$$

On retient donc en redéfinissant les constantes :

$$\varphi = A(x^2 - y^2) + B.$$

Il ne s'agit pas d'une fonction périodique et on n'a donc pas de raison de la rejeter a priori. Cherchons l'équation des lignes de courant pour voir si c'est une solution cinématiquement réaliste ou non. Pour un problème plan, la nullité du produit vectoriel  $\vec{v} \wedge d\vec{l}$  en tout point d'une ligne de courant donne une seule équation différentielle :

$$\begin{vmatrix} v_x & dx \\ v_y & dy \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (v_x dy - v_y dx) \vec{u}_z, \text{ soit } v_x dy - v_y dx = 0, \text{ soit encore :}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx = 2Axdy + 2Aydxdx = 0.$$

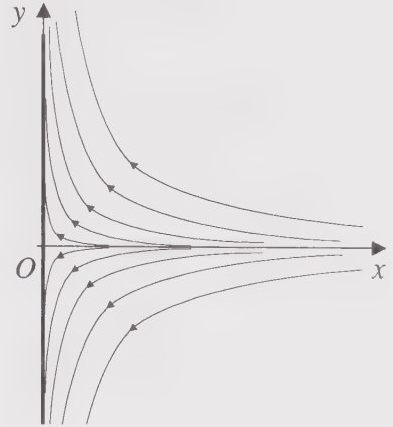
Elle s'intègre en séparant les variables :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \text{ d'où } \ln(x) = -\ln(y) + \text{cte}$$

et il vient finalement :

$$xy = K.$$

Il s'agit de branches d'hyperboles ayant les axes  $Ox$  et  $Oy$  pour asymptotes quand on se place dans le plan  $Oxy$ . On se limite bien entendu aux valeurs de  $x$  positives pour décrire l'écoulement qui nous intéresse et on constate que cette solution est effectivement satisfaisante d'un point de vue « graphique » (Cf. ci-contre) puisque les lignes de courant mettent en évidence une seule source sur l'axe  $Ox$ .



Malheureusement le champ de vitesse a pour expression :

$$\vec{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{u}_y = 2Ax\vec{u}_x - 2Ay\vec{u}_y$$

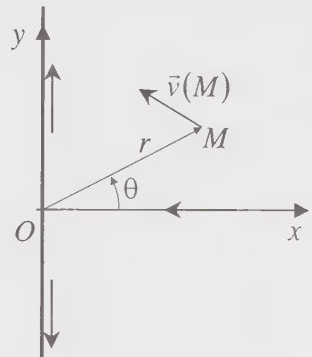
et on constate que  $v_y$  diverge sur la plaque quand on s'éloigne du lieu de rencontre du jet et de celle-ci. D'autre part, le jet doit être issu de la source et les lignes de courant sont donc divergentes depuis celle-ci. Ceci se produit effectivement sur l'axe  $Ox$  mais seulement quand  $x$  tend vers l'infini. Cette solution n'est donc compatible qu'avec une source située à l'infini et on constate alors que la composante  $v_x$  y diverge à son tour. A cause de ces vitesses infinies, physiquement irréalistes, notre solution n'est acceptable qu'à proximité du point  $O$  et il faut en fait la concevoir comme le développement limité au second ordre en  $x$  et  $y$  de la solution exacte, toujours inconnue.

4. Sur la plaque, l'écoulement est tangentiel, ce qui entraîne :

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0 \text{ pour } \theta = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Sur l'axe  $Ox$  il est en incidence normale jusqu'à la plaque, soit :

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0 \text{ pour } \theta = 0.$$



La dépendance en  $z$  n'apparaît toujours pas du fait de l'invariance imposée et la symétrie du champ de vitesse par rapport au plan  $Oxz$  impose une solution paire en  $\theta$  pour le potentiel des vitesses (si on le définit entre  $-\pi$  et  $\pi$ , ce qui est le choix le plus pratique), de manière à ce que  $v_\theta$  soit une fonction impaire de  $\theta$ .

5. L'équation de Laplace s'écrit dans ce cas :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{g}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \frac{f}{r^2} \frac{d^2g}{d\theta^2} = 0,$$

d'où l'équation à variables séparées :

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = -\frac{1}{g} \frac{d^2g}{d\theta^2}.$$

On retrouve l'égalité de deux fonctions de deux variables indépendantes et il faut donc résoudre séparément :

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = K \quad \text{et} \quad \frac{1}{g} \frac{d^2g}{d\theta^2} = -K.$$

La seconde équation différentielle s'écrit encore  $\frac{d^2g}{d\theta^2} + Kg = 0$  et impose à la constante  $K$  d'être strictement positive. Dans le cas contraire, on aurait une fonction  $g$  affine ( $K = 0$ ) ou exponentielle réelle ( $K < 0$ ) et il serait impossible de respecter les trois conditions aux limites sans annuler complètement  $g$ . On ne retient ainsi qu'une solution périodique qui, du fait de la parité, s'écrit :

$$g = A \cos(\sqrt{K} \theta).$$

Il faut ensuite annuler  $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{f}{r} \frac{dg}{d\theta}$  pour trois valeurs de  $\theta$ . C'est automatiquement vérifié pour  $\theta = 0$  et il reste :

$$-A\sqrt{K} \sin\left(\pm\sqrt{K} \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

On en déduit  $K = 4n^2$  avec  $n$  entier positif (les valeurs négatives n'apportent rien pour un carré). Il n'y a pas de raison que la composante  $v_\theta$  s'annule pour d'autres valeurs de  $\theta$  que celles déjà identifiées, sinon l'écoulement serait radial depuis  $O$  dans d'autres directions (celles définies par  $\theta = \pm \frac{\pi}{2n}, \pm \frac{\pi}{n}, \pm \frac{3\pi}{2n}, \pm \frac{2\pi}{n}$ ) et cela n'a aucune raison d'être avec une source unique. Il est par conséquent nécessaire de se limiter à  $K = 4$ <sup>8</sup>.

Ensuite on résout la seconde équation différentielle :

<sup>8</sup> Par exemple pour la valeur suivante  $K = 16$  on aurait une composante  $v_\theta$  en  $\sin(4\theta)$ , ce qui donnerait trois jets.

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - Kf = 0 = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - 4f.$$

Elle est linéaire et on constate que les trois termes de gauche sont de même degré si la solution est une puissance de  $r$ . Il suffit alors de chercher quelles puissances permettent d'annuler leur somme. En posant  $f = r^\alpha$ , l'équation devient :

$$\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + \alpha r^{\alpha-2} - 4r^{\alpha-2} = 0 = (\alpha^2 - 4)r^{\alpha-2}$$

et il faut donc prendre  $\alpha = \pm 2$ . La solution est alors une combinaison linéaire :

$$f = Cr^2 + \frac{D}{r^2}$$

mais il faut immédiatement prendre  $D$  nul car il provoquerait sinon une divergence des deux composantes de la vitesse au point  $O$ . On retient finalement :

$$\varphi = Ar^2 \cos(2\theta)$$

en redéfinissant la constante.

Les lignes de courant sont données en coordonnées cylindriques par l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} v_r r d\theta - v_\theta dr &= 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} r d\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} dr \\ &= 2Ar^2 \cos(2\theta) d\theta + 2Ar \sin(2\theta) dr \end{aligned}$$

résultant de la nullité de la troisième composante du produit vectoriel  $\vec{v} \wedge d\vec{l}$ . On en déduit en séparant les variables :

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} d\theta = -\frac{dr}{r}, \text{ soit :}$$

$$\ln[\sin(2\theta)] = -2 \ln(r) + \text{cte}, \text{ et finalement :}$$

$$r^2 \sin(2\theta) = K.$$

On remarque que cette équation s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$2r \sin \theta \times r \cos \theta = K = 2yx$$

et on retrouve les branches d'hyperboles obtenues à la question 3. Il s'agit par conséquent de la même solution, obtenue d'une manière différente, et la même conclusion s'impose.

6. L'équation de Laplace donne dans ce dernier cas :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2g}{d\theta^2} = 0,$$

soit par séparation des variables :

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = - \frac{d^2g}{d\theta^2}.$$

Les deux membres doivent être encore une même constante  $K$ . La parité de  $\varphi$  vis-à-vis de  $\theta$  impose alors :

$$g = -\frac{K\theta^2}{2} + K'$$

et les conditions aux limites nécessitent l'annulation de  $-K\theta$  en 0 et  $\pm \frac{\pi}{2}$ . On a donc  $K = 0$  et il est inutile de poursuivre car une solution indépendante de  $\theta$  n'est pas acceptable<sup>9</sup>.

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = -\frac{d^2g}{d\theta^2} = 0.$$

7. La recherche d'écoulements potentiels sous une forme simple, aussi bien en coordonnées cartésiennes que cylindriques, n'a pas donné de résultat satisfaisant. On pourrait envisager des formes plus complexes (le choix est illimité), par exemple  $f(r)g(r,\theta)$ , mais la plupart seraient incompatibles avec les conditions aux limites. On remarquera notamment que si deux formes aussi différentes (en apparence) que  $f(x) + g(y)$  et  $f(r)g(\theta)$  donnent la même solution, satisfaisante seulement en partie à cause des divergences de la vitesse, il y a une très forte probabilité pour que ce soit la seule acceptable pour ce problème. La conclusion la plus raisonnable est donc qu'il n'admet pas d'écoulement potentiel pour solution.

<sup>9</sup> Il s'agirait, dans le plan  $Oxy$ , d'un écoulement radial et isotrope, convergeant vers  $O$  ou issu de  $O$ , incompatible avec l'existence d'une source quelque part sur l'axe  $Ox$ .

# ÉCOULEMENTS LAMINAIRES STATIONNAIRES

## EXERCICE 1

### Couche limite laminaire

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , se déplace parallèlement à une surface plane semi-infinie, occupant la partie  $x > 0$  du plan horizontal  $Oxy$ . En amont de cette surface, il présente une vitesse uniforme  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ , qu'on retrouve également très au-dessus de celle-ci. Mais, à cause de la viscosité, la vitesse doit s'annuler sur la surface et il existe donc, à la différence du fluide parfait, une mince couche dans laquelle s'effectue le « freinage ». Il s'agit de la couche limite, dont nous allons établir un modèle simple (modèle de Prandtl) en supposant le problème invariant par translation le long de  $Oy$ .

On néglige la pesanteur, on se place en régime stationnaire, en écoulement laminaire et on suppose la pression uniforme dans le fluide.

1.1. Montrer que cette dernière hypothèse revient à considérer que le champ de pression dans la couche limite est le même que loin de celle-ci.

1.2. Malgré le caractère laminaire de l'écoulement, on ne peut pas écrire  $\vec{v} = v \vec{u}_x$  dans la couche limite car il est alors impossible de se « raccorder » à la solution à distance. Il faut introduire une composante verticale  $v_z$  (mais aucune suivant  $Oy$ ).

Toutefois on suppose  $|v_x| \gg |v_z|$  et  $\Delta \approx \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Justifier ces deux approximations.

2.1. Écrire et projeter sur les axes l'équation du mouvement dans la couche limite.

2.2. Écrire l'équation de continuité dans la couche limite.

3. Pour résoudre ces équations, on fait le changement de couple de variables indépendantes :

$$(x, z) \rightarrow \left( X = x, Z = \frac{z}{\sqrt{x}} \right).$$

3.1. Les écrire dans le nouveau système de variables.

3.2. Pour des raisons de similitude, on fait l'hypothèse supplémentaire que  $v_x$  ne dépend de  $x$  que par l'argument  $Z$ . Montrer que c'est alors également le cas pour  $\sqrt{X} v_z$ .

3.3. Réécrire dans ces conditions la projection sur  $Ox$  de l'équation du mouvement et l'équation de continuité en utilisant  $G(Z) = \sqrt{X} v_z$  plutôt que  $v_z$ .

3.4. Exprimer  $G$  en fonction de  $Z$ ,  $v_1$  de  $v_x$  et ses dérivées par rapport à  $Z$  en utilisant la première équation, puis reporter ceci dans l'équation de continuité. On pourra utiliser la notation ' pour désigner la dérivée par rapport à  $Z$ .

4. On adimensionne l'équation ainsi obtenue en faisant les changements de variables  $Z = \sqrt{\frac{v}{v_0}} \zeta$  et  $v_x = v_0 u$ . On aboutit alors à :

$$u''' - \frac{u''^2}{u'} + \frac{u'u}{2} = 0 \quad \text{en notant cette fois ' la dérivée par rapport à } \zeta.$$

4.1. Quelles conditions aux limites faut-il associer à cette équation différentielle ?

4.2. La solution n'est pas analytique mais elle est décrite avec une excellente précision par la fonction :

$$u = 1 - \exp \left[ -\frac{\zeta}{3} - \left( \frac{\zeta}{4} \right)^2 - \left( \frac{2\zeta}{9} \right)^3 \right].$$

Tracer la courbe  $\zeta = f(u)$ . Que représente-t-elle physiquement ? Que peut-on en conclure sur la contrainte de viscosité près de la surface ?

4.3. Calculer  $u(\zeta = 5)$ . En déduire l'épaisseur caractéristique  $\delta$  de la couche limite en fonction de  $x$ ,  $v_0$  et  $v$ . Comment varie-t-elle le long de la surface ?

4.4. Exprimer  $v_x$  en fonction de  $x$ ,  $z$ ,  $v_0$  et  $v$ .

5. Représenter graphiquement le profil de vitesse dans l'écoulement, en faisant apparaître en pointillés la frontière de la couche limite.

6.1. Calculer la contrainte tangentielle exercée par le fluide sur la surface.

6.2. La surface est en fait finie le long de  $Ox$  et présente une longueur  $L$ . Exprimer la force  $\vec{F}$  qu'elle subit par unité de longueur suivant  $Oy$  de la part du fluide.

6.3. En déduire le coefficient de frottement  $C_x$  défini par  $F = \frac{\mu S C_x v_0^2}{2}$ ,  $S$  étant l'aire sur laquelle s'exerce la force.

6.4. Définir le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  de l'écoulement et exprimer  $C_x$  en fonction de  $\mathcal{R}$ .

7. Définir un nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_\delta$  local dans la couche limite et en déduire un critère quantitatif de validité de notre modèle.

8. La surface est une aile de maquette volante d'avion de profondeur  $L = 10$  cm, se déplaçant à la vitesse  $v_0 = 10$  m.s<sup>-1</sup> dans l'air. On donne  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup> et  $\mu = 1,2$  kg.m<sup>-3</sup>.

8.1. Calculer numériquement  $\mathcal{R}$  et  $C_x$ . Le modèle est-il applicable ?

8.2. En ne considérant que le frottement provenant de l'écoulement de l'air sur l'aile, quelle devrait être la force de propulsion minimale du moteur de l'avion dans le cas d'une aile de 1 m de longueur ? Est-ce une valeur réaliste ?

8.3. Quelle est l'épaisseur de la couche limite au bord de fuite ?

8.4. On a utilisé une maquette à l'échelle 1/8 pour étudier le vol d'un avion à la vitesse de 600 km/h. L'étude du modèle réduit est-elle opportune ?

1.1. Loin de la couche limite, les forces de viscosité ont un rôle négligeable et le fluide obéit quasiment à l'équation d'Euler. La conservation de la vitesse le long d'une ligne de courant signifie alors que la pression ne dépend pas de  $x$  (théorème de Bernoulli). Comme la pesanteur n'est pas prise en compte, l'équation du mouvement montre qu'elle ne dépend également pas de  $z$ . Enfin, l'invariance du problème par translation le long de  $Oy$  supprime la dépendance en  $y$  pour toutes les grandeurs. La pression est donc uniforme loin de la couche limite. La considérer uniforme dans tout l'écoulement revient à admettre qu'elle se comporte dans la couche limite exactement comme dans le reste du fluide. C'est le mouvement global qui définit le champ de pression, même dans la couche limite, et non le freinage local. Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice très intéressante pour les calculs mais on ne peut la justifier complètement.

1.2. Loin de la couche limite l'écoulement est horizontal. Comme la surface solide est également horizontale, la vitesse dans la couche limite doit être essentiellement orientée comme  $\vec{v}_0$ . Si une composante verticale existe, elle doit rester faible. Quant à une composante  $v_y$ , elle est exclue du fait des symétries en écoulement laminaire.

La couche limite a une dimension  $\delta$  faible devant celle du corps solide faisant obstacle à l'écoulement. La vitesse doit donc varier le long de la verticale beaucoup plus rapidement que suivant le mouvement. Il faut notamment que la composante horizontale passe de 0 à  $v_0$  sur une épaisseur  $\delta$  alors qu'a priori on n'attend pas de variation avec  $x$ . Le terme dominant du laplacien est donc la dérivée seconde par rapport à  $z$  puisque  $y$  n'intervient pas par hypothèse (invariance par translation).

2.1. En régime stationnaire, l'équation du mouvement s'écrit en l'absence de champ de force et de gradient de pression :

$$\left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v} = \nu \Delta \vec{v} \approx \nu \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \quad \text{avec} \quad \left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

La dérivée  $\frac{\partial}{\partial z}$  doit être nettement plus importante que  $\frac{\partial}{\partial x}$ , mais comme  $v_x$  est également nettement supérieur à  $v_z$ , on ne peut faire aucune simplification dans le terme inertiel. Les projections sur  $Ox$  et  $Oz$  donnent :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

2.2. L'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Aucun terme n'est a priori dominant devant l'autre.

3.1. Il faut expliciter les dérivées partielles dans le nouveau jeu de variables :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{z}{2x^{3/2}} \frac{\partial}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial Z} \right) \right)_x = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial Z} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial}{\partial Z} \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

puis ne faire apparaître que celles-ci :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{Z}{2X} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{X}} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{X} \frac{\partial^2}{\partial Z^2}.$$

Les équations deviennent ainsi :

$$v_x \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{Z}{2X} \frac{\partial}{\partial Z} \right) v_x + \frac{v_z}{\sqrt{X}} \frac{\partial v_x}{\partial Z} = \frac{\nu}{X} \frac{\partial^2 v_x}{\partial Z^2},$$

$$v_x \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{Z}{2X} \frac{\partial}{\partial Z} \right) v_z + \frac{v_z}{\sqrt{X}} \frac{\partial v_z}{\partial Z} = \frac{\nu}{X} \frac{\partial^2 v_z}{\partial Z^2},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{Z}{2X} \frac{\partial}{\partial Z} \right) v_x + \frac{1}{\sqrt{X}} \frac{\partial v_z}{\partial Z} = 0.$$

3.2. Dans ce cas  $\frac{\partial v_x}{\partial X}$  est nul et l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{Z}{2X} \frac{dv_x}{dZ} - \frac{1}{\sqrt{X}} \frac{\partial v_z}{\partial Z} = 0, \text{ soit } \frac{dv_x}{dZ} = \frac{2\sqrt{X}}{Z} \frac{\partial v_z}{\partial Z} = \frac{2}{Z} \frac{\partial}{\partial Z} (\sqrt{X} v_z)$$

et on en conclut que  $\frac{\partial}{\partial Z} (\sqrt{X} v_z)$  ne dépend également que de  $Z$ . Il en résulte en intégrant que  $\sqrt{X} v_z$  est de la forme  $f(Z) + g(X)$ . Comme  $v_z$  doit s'annuler pour  $z = 0$  (condition obligatoire d'adhérence du fluide visqueux à la paroi), donc pour  $Z = 0$ , quel que soit  $x$ , donc quel que soit  $X$ , on doit avoir  $f(0) + g(X) = 0$  quel que soit  $X$ , ce qui implique que  $g$  est égale à la constante  $-f(0)$ . Finalement,  $\sqrt{X} v_z$  dépend de  $Z$  seulement.

3.3. On reprend la première projection de l'équation du mouvement :

$$-v_x \frac{Z}{2X} \frac{dv_x}{dZ} + \frac{v_z}{\sqrt{X}} \frac{dv_x}{dZ} = \frac{\nu}{X} \frac{d^2 v_x}{dZ^2}, \text{ soit :}$$

$$-v_x \frac{Z}{2} \frac{dv_x}{dZ} + G(Z) \frac{dv_x}{dZ} = \nu \frac{d^2 v_x}{dZ^2} \quad (\text{I}),$$

et l'équation de continuité telle qu'elle est apparue à la question précédente :

$$\frac{dv_x}{dZ} = \frac{2}{Z} \frac{dG}{dZ} \quad (\text{II}).$$

3.4. De la relation (I) on tire :

$$G(Z) = \nu \frac{\frac{d^2 v_x}{dZ^2}}{\frac{dv_x}{dZ}} + \frac{Z}{2} v_x = \nu \frac{v_x''}{v_x'} + \frac{Z}{2} v_x \quad (\text{III}).$$

L'équation (II) devient :

$$v'_x = \frac{2}{Z} \frac{d}{dZ} \left( v \frac{v_x''}{v_x'} + \frac{Z}{2} v_x \right) = \frac{2}{Z} \left( v \frac{v_x'''}{v_x'} - v \frac{v_x''^2}{v_x'^2} + \frac{Z}{2} v'_x + \frac{v_x}{2} \right), \text{ soit :}$$

$$v \frac{v_x'''}{v_x'} - v \frac{v_x''^2}{v_x'^2} + \frac{v_x}{2} = 0 \text{ et enfin :}$$

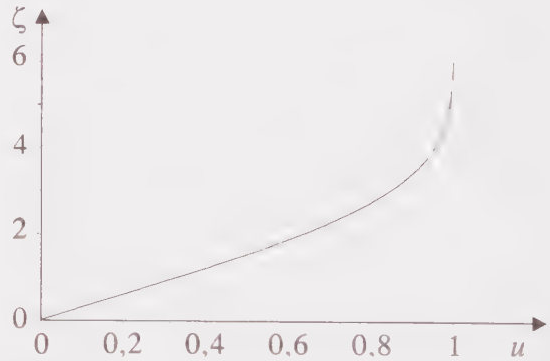
$$v_x''' - \frac{v_x''^2}{v_x'} + \frac{v_x' v_x}{2v} = 0.$$

4.1. L'équation différentielle est du troisième ordre. Il faut donc lui associer trois conditions. L'adhérence sur la plaque s'écrit  $u(0) = 0$ . Ensuite, lorsque  $\zeta$  tend vers l'infini, la vitesse horizontale doit tendre vers  $v_0$ , ce qui implique  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} u = 1$ . Enfin, la

vitesse verticale s'annulant également sur la surface, l'équation (III) nous permet d'écrire  $u''(0) = 0$ . On a bien trois conditions aux limites, même si elles ne portent pas sur chacune des dérivées.

4.2. On obtient la fonction ci-contre. Elle représente en variables adimensionnées le profil de la composante horizontale de la vitesse au-dessus de la surface plane. On constate que la viscosité impose un profil quasi linéaire près de la surface, ce qui signifie que  $\frac{du}{d\zeta}$  est à peu près

constant (jusque vers  $\zeta = 2$ ) et donc que la contrainte tangentielle se conserve sur une certaine épaisseur.



4.3. On obtient  $u(\zeta = 5) = 0,990$ . On peut donc considérer qu'au-delà de cette valeur de  $\zeta$  on se trouve hors de la couche limite puisque la vitesse s'écarte de  $v_0$  de moins de 1 %. On écrira donc :

$$5 = \zeta_{z=\delta} = \sqrt{\frac{v_0}{\nu}} Z_{z=\delta} = \sqrt{\frac{v_0}{\nu}} \frac{\delta}{\sqrt{x}}, \text{ soit } \delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}}.$$

On constate que l'épaisseur de la couche limite augmente régulièrement le long de la surface plane, comme  $\sqrt{x}$ .

4.4. On revient aux variables de départ :

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_0 u = v_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\zeta}{3} - \left(\frac{\zeta}{4}\right)^2 - \left(\frac{2\zeta}{9}\right)^3 \right] \right\} \\
 &= v_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\sqrt{\frac{v_0}{\nu}} \frac{Z}{3} - \left(\sqrt{\frac{v_0}{\nu}} \frac{Z}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{v_0}{\nu}} \frac{2Z}{9}\right)^3 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

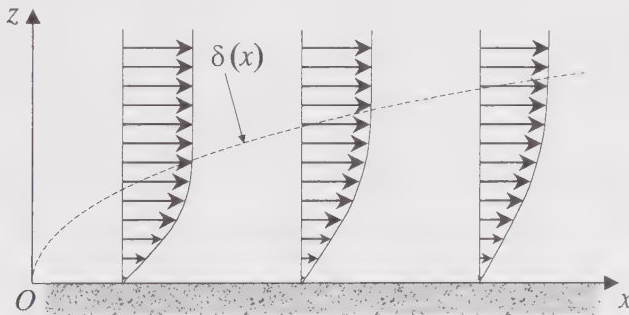
et on explicite  $Z$  :

$$v_x = v_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}} \frac{z}{3} - \left(\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}} \frac{z}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}} \frac{2z}{9}\right)^3 \right] \right\}.$$

5. On a partout le même profil, puisqu'il faut multiplier  $u$  par la même constante  $v_0$ , mais avec un changement d'échelle verticale puisque la vitesse peut encore s'écrire :

$$v_x = v_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{5z}{3\delta} - \left(\frac{5z}{4\delta}\right)^2 - \left(\frac{10z}{9\delta}\right)^3 \right] \right\}$$

et que  $\delta$  croît monotonement avec  $x$ .



6.1. Près de la surface, on constate que la vitesse varie quasi linéairement avec  $z$ . On peut donc se contenter de l'expression approchée au premier ordre :

$$v_x \approx v_0 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{5z}{3\delta} \right) \right\} = \frac{5v_0 z}{3\delta},$$

ce qui donne très rapidement la contrainte tangentielle :

$$\sigma = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_x = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_\delta = \frac{5\eta v_0}{3\delta} = \frac{\eta v_0}{3} \sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}.$$

Elle est positive, ce qui signifie que le fluide tend à entraîner la surface.

6.2. On effectue la sommation des contraintes sur la surface considérée :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_S \sigma \vec{u}_x dS = \frac{\eta v_0}{3} \sqrt{\frac{v_0}{\nu}} \vec{u}_x \int_{y=y_0}^{y_0+1} \int_{x=0}^L \frac{dx dy}{\sqrt{x}} = \frac{\eta v_0}{3} \sqrt{\frac{v_0}{\nu}} \vec{u}_x \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\eta v_0}{3} \sqrt{\frac{v_0 L}{\nu}} \vec{u}_x.\end{aligned}$$

Il s'agit en réalité d'une force par unité de longueur.

6.3. On écrit :

$$C_x = \frac{2F}{\mu S v_0^2} \text{ avec } S = L \times 1 \text{ qui est en fait une longueur, d'où :}$$

$$C_x = \frac{4\eta v_0}{3\mu S v_0^2} \sqrt{\frac{v_0 L}{\nu}} = \frac{4\nu}{3L v_0} \sqrt{\frac{v_0 L}{\nu}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\nu}{v_0 L}}.$$

6.4. Par ailleurs, on peut définir le nombre de Reynolds avec les deux seules échelles de longueur et de vitesse disponibles :

$$\mathcal{R} = \frac{v_0 L}{\nu} \text{ et on obtient ainsi :}$$

$$C_x = \frac{4}{3\sqrt{\mathcal{R}}}.$$

7. Dans la couche limite, il existe une échelle de distance plus adaptée à la description des variations de vitesse que  $L$ , à savoir son épaisseur  $\delta$  elle-même puisque sur celle-ci la vitesse horizontale (composante principale du vecteur  $\vec{v}$ ) passe de 0 à quasiment  $v_0$ . On définit donc :

$$\mathcal{R}_\delta = \frac{v_0 \delta}{\nu}.$$

L'écoulement dans la couche limite reste laminaire comme on l'a supposé dans l'énoncé si  $\mathcal{R}_\delta$  est inférieur à environ 2000. Au-delà il devient turbulent et nos calculs n'ont plus d'intérêt. Il faut donc avoir :

$$\frac{v_0 \delta}{\nu} = \frac{v_0}{\nu} \times 5 \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}} < 2000, \text{ soit } x < \frac{(400)^2 \nu}{v_0}.$$

Pour qu'il n'y ait aucune turbulence dans la couche limite, il faut que ce critère soit respecté en tout point de la surface. On prend donc la plus grande valeur de  $x$  :

$$L < \frac{(400)^2 \nu}{v_0}, \text{ soit finalement :}$$

$$\mathcal{R} = \frac{v_0 L}{\nu} < 1,6 \cdot 10^5.$$

On voit ainsi que la turbulence dans la couche limite apparaît plus tard que dans le reste de l'écoulement (où elle apparaît pour  $\mathcal{R} \sim 2000$ ).

8.1. On obtient numériquement  $\mathcal{R} = \frac{v_0 L}{\nu} = 6,67 \cdot 10^4$  et on se trouve en deçà de la valeur à ne pas dépasser. Le modèle est donc applicable et on peut calculer le coefficient de frottement :

$$C_x = \frac{4}{3\sqrt{\mathcal{R}}} = 0,00516.$$

8.2. Dans ce cas, la force de frottement a pour valeur :

$$F = \frac{\mu S C_x v_0^2}{2} = \frac{1,2 \times 0,1 \times 1 \times 0,00516 \times (10)^2}{2} = 0,0310 \text{ N}.$$

Il faudrait que la force fournie par le moteur soit au moins égale au double de cette valeur (l'aile est freinée par l'air sur ses deux faces supérieure et inférieure) pour que l'avion puisse accélérer jusqu'à atteindre cette vitesse. C'est une valeur très faible et en fait sous-évaluée car on ne peut pas écarter le frottement sur le fuselage qui doit être au moins du même ordre de grandeur.

8.3. Au bord de fuite on a :

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu L}{v_0}} = \frac{5L}{\sqrt{\mathcal{R}}} = 1,93 \text{ mm}.$$

Il se produit ainsi une variation de vitesse de l'ordre de 40 km/h sur une épaisseur millimétrique. C'est ce cisaillement très élevé qui impose le freinage de l'avion malgré la très faible viscosité de l'air.

8.4. Avec une vitesse près de vingt fois supérieure et une dimension linéaire huit fois plus élevée, on obtient un nombre de Reynolds plus de cent fois supérieur. On ne peut plus admettre que l'écoulement est laminaire dans la couche limite du véritable avion et le comportement du modèle réduit ne peut pas être extrapolé à l'avion réel (en particulier le calcul de  $C_x$  ne peut se faire par la formule obtenue à la question 6.4). L'écoulement dans sa couche limite devient turbulent à la distance

$x = \frac{(400)^2 \nu}{v_0} = 1,44 \text{ cm}$  du bord d'attaque. Il l'est donc quasiment sur toute l'aile.

## EXERCICE 2

### Formule de Stokes

Une sphère fixe de rayon  $R$  et de centre  $O$  pris pour origine d'un trièdre cartésien  $Oxyz$  est placée dans un écoulement de fluide incompressible, de viscosité cinématique  $\nu$  et de masse volumique  $\mu$ , ayant à grande distance une vitesse uniforme et constante  $v_0 \vec{u}_z$ . On se place en régime laminaire stationnaire, on néglige la pesanteur et on travaille en coordonnées sphériques pour exploiter la symétrie du problème.

On donne dans la base sphérique :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

$$\overline{\text{rot}}(\vec{a}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\phi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\phi) \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi,$$

ainsi que les dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_r}{\partial \phi^2} = \sin \theta (\cos \theta \vec{u}_\theta - \sin \theta \vec{u}_r), \quad \frac{\partial^2 \vec{u}_\theta}{\partial \phi^2} = \cos \theta (\sin \theta \vec{u}_r - \cos \theta \vec{u}_\theta).$$

On recherche tout d'abord les champs de vitesse et de pression dans le fluide.

1. Donner les expressions générales de ces champs  $\vec{v}(M)$  et  $P(M)$ , déduites des propriétés de symétries.
2. Pour quelle raison mathématique ce problème apparaît-il très difficile a priori ?
3. On recherche  $\vec{v}(M)$  sous la forme  $\overline{\text{rot}}(A(r, \theta) \vec{u}_\phi)$ . Justifier ce choix.
4. On se limite à un écoulement de très faible nombre de Reynolds. Le définir. Quelle est la signification physique de  $Re \ll 1$  et quelle grande simplification cette hypothèse permet-elle ? Comment s'écrit alors l'équation du mouvement ?
5. Montrer que le potentiel vecteur du champ de vitesse est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( A \vec{u}_\phi \right) \right) \right) \right) = \vec{0}.$$

Quelles conditions aux limites faut-il lui associer ?

6. Expliquer pourquoi  $A$  est nécessairement de la forme  $f(r)\sin\theta$  dans tout le fluide et déduire de ces conditions l'expression de  $A$  très loin de la sphère.

7. En explicitant la combinaison des quatre rotationnels pour  $A = f(r)\sin\theta$ , on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{4}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} = 0.$$

7.1. Donner l'expression générale de  $f$  sous la forme d'une combinaison linéaire de puissances de  $r$ .

7.2. Déterminer toutes les constantes d'intégration par les conditions aux limites et donner l'expression finale de  $A$ .

8.1. En déduire le champ de vitesse dans le fluide.

8.2. En déduire ensuite le champ de pression par l'équation du mouvement. On notera  $P_0$  la pression uniforme dans le fluide très loin de la sphère.

8.3. Représenter le profil de vitesse sur l'axe  $Oy$ . En déduire une épaisseur de couche limite caractéristique de ce problème. A-t-elle un sens ?

On recherche maintenant la résultante  $\vec{F}$  des forces exercées sur la sphère.

9.1. Donner l'expression de la pression à la surface de la sphère. Commenter.

9.2. En déduire la somme des forces de pression qu'elle subit.

10.1. Écrire la contrainte de viscosité exercée sur la sphère. On admettra qu'elle a pour expression  $\vec{\sigma} = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{u}_\theta$  (formule inexacte en coordonnées sphériques mais accidentellement vraie ici).

10.2. En déduire la force totale de viscosité.

11. Établir la formule de Stokes  $\vec{F} = 6\pi\eta R\vec{v}_0$ . Préciser toutes les conditions de validité. On introduira la notion d'échelle de temps caractéristique  $\tau$ .

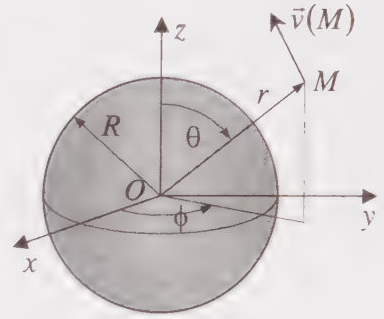
1. Il y a invariance du problème par rotation autour de l'axe  $Oz$  et aucune grandeur scalaire ne peut donc dépendre de l'azimut  $\phi$ . De plus le plan  $MOz$  est plan de symétrie de l'écoulement et le champ de vitesse n'a de ce fait pas de composante suivant  $\vec{u}_\phi$ . On écrit par conséquent :

$$\vec{v}(M) = v_r(r, \theta) \vec{u}_r + v_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta \quad \text{et :}$$

$$P(M) = P(r, \theta).$$

2. Le terme inertiel, non linéaire, n'est pas identiquement nul :

$$(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \vec{v},$$



ce qui va rendre l'équation du mouvement très difficile (et même impossible sauf cas exceptionnels) à résoudre. Quant à l'équation de continuité du fluide incompressible, elle ne donne rien d'exploitable sous sa forme explicite :



$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) = 0.$$

3. Puisque la divergence de la vitesse est identiquement nulle, il existe un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{v} = \overline{\text{rot}} \vec{A}$ . Étant en tout point orthogonal à  $\vec{v}$ , ce champ de vecteur peut être choisi colinéaire à  $\vec{u}_\phi$ , ce qui permet de ne considérer qu'une composante, et, du fait de l'invariance déjà mentionnée, son unique composante ne peut dépendre de  $\phi$ . On trouve bien l'expression proposée.

4. On peut définir le nombre de Reynolds à partir de  $R$  et de  $v_0$ , qui sont les deux seules échelles caractéristiques de longueur et de vitesse données, soit :

$$\mathcal{R} = \frac{v_0 R}{\nu}.$$

Physiquement sa faible valeur signifie que le terme inertiel reste petit devant le terme de viscosité, ce qui garantit le caractère laminaire puisque la turbulence est associée à la non-linéarité de l'équation du mouvement. Mathématiquement, ceci permet de le négliger dans l'équation du mouvement, ce qui supprime l'essentiel de la difficulté de résolution, et c'est alors le gradient de pression seul qui compense les forces de frottement. On écrit par conséquent l'équation linéaire approchée :

$$\vec{0} = -\frac{\overline{\text{grad}} P}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}, \quad \text{ou} \quad \overline{\text{grad}} P = \eta \Delta \vec{v}.$$

5. On élimine le gradient de pression en prenant le rotationnel de cette dernière égalité :

$$\overline{\text{rot}}(\eta \Delta \vec{v}) = \eta \overline{\text{rot}}(\Delta \vec{v}) = \vec{0}$$

et on se sert de l'identité  $\overline{\text{rot rot}} = \overline{\text{grad}(\text{div})} - \Delta$  pour écrire :

$$\overline{\text{rot}(\Delta \vec{v})} = \overline{\text{rot}} \left[ \overline{\text{grad}(\text{div} \vec{v})} - \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{v}) \right] = -\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{v})) = \vec{0}.$$

Enfin, en introduisant le potentiel vecteur on obtient bien :

$$\overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} (A \vec{u}_\phi) \right) \right) \right) = \vec{0}.$$

A la surface de la sphère on doit annuler la vitesse. Comme celle-ci s'écrit :

$$\vec{v} = \overline{\text{rot}}(A(r, \theta) \vec{u}_\phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A) \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \vec{u}_\theta$$

il faut respecter les deux conditions :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A(R, \theta)) = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right)_{r=R} = 0.$$

Très loin de la sphère (soit  $r \gg R$ ), on doit retrouver :

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A) \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \vec{u}_\theta = v_0 \vec{u}_z = v_0 (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta).$$

6. La seconde condition à la surface est une condition de nullité portant sur une valeur de  $r$ , quel que soit  $\theta$ . Elle ne peut être vérifiée que si  $rA$  est une somme ou un produit de deux fonctions indépendantes, respectivement de  $r$  et de  $\theta$ . Mais, dans le cas d'une somme, la condition à l'infini  $-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) = -v_0 \sin \theta$  ne pourrait être satisfaite, le membre de gauche de cette égalité ne dépendant plus de  $\theta$ . On prend donc  $rA$  sous la forme d'un produit de fonctions et on écrit dans tout le fluide, en faisant passer  $r$  à droite,  $A(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ .

La première condition à la surface montre alors que  $A(R, \theta) \sin \theta$  ne dépend pas de  $\theta$ , ce qui signifie soit que  $A$  varie comme  $\frac{1}{\sin \theta}$ , soit que  $A$  est nul pour  $r = R$ .

En reportant  $A(r, \theta) = f(r)g(\theta)$  on a loin de la sphère les équations différentielles :

$$\frac{f}{r \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta g) = v_0 \cos \theta \quad (\text{I}) \quad \text{et} \quad -\frac{g}{r} \frac{d}{dr} (rf) = -v_0 \sin \theta.$$

La seconde s'écrit encore :

$$\frac{g(\theta)}{\sin \theta} = rv_0 \left[ \frac{d}{dr} (rf) \right]^{-1} \quad (\text{II})$$

et on obtient ainsi l'égalité entre deux fonctions de deux variables indépendantes,  $\theta$  à gauche et  $r$  à droite. Il s'agit donc d'une même constante et on en déduit que  $g$  est de la forme  $K \sin \theta$ . Ce résultat étant valable quel que soit  $\theta$ , puisque la condition  $r$  grand n'a aucun caractère restrictif sur  $g(\theta)$ , c'est la forme générale de  $g$ . Incluant la constante  $K$  dans l'expression non encore établie de  $f$ , on adopte simplement :

$$g(\theta) = \sin \theta.$$

On voit ainsi que  $A$  ne varie pas comme  $\frac{1}{\sin \theta}$ . Par conséquent  $f(R) = 0$ . La première équation aux dérivées partielles (I) se réécrit enfin :

$$\frac{2f \cos \theta}{r} = v_0 \cos \theta, \text{ soit } f(r) = \frac{v_0 r}{2}.$$

On obtient ainsi l'expression asymptotique :

$$A = \frac{v_0 r}{2} \sin \theta \text{ pour } r \gg R.$$

7.1. Il s'agit d'une équation linéaire dont tous les termes sont de même degré si la solution est une puissance de  $r$  (équation de type Euler). On cherche toutes les puissances acceptables et on en fait une combinaison linéaire. Reportant :

$$f = r^\alpha \text{ dans l'équation } \frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{4}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} = 0$$

on obtient :

$$\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)r^{\alpha-4} + 4\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)r^{\alpha-4} - 4\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-4} = 0$$

quel que soit  $r$ , soit la condition sur  $\alpha$  :

$$\alpha(\alpha - 1)[(\alpha - 2)(\alpha - 3) + 4(\alpha - 2) - 4] = 0 = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 3)(\alpha + 2).$$

Les solutions sont  $\alpha = 0, 1, 3$  ou  $-2$  et on en déduit la combinaison :

$$f(r) = a + br + cr^3 + \frac{d}{r^2}, \text{ } a, b, c \text{ et } d \text{ étant des constantes.}$$

7.2. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{- pour } r \text{ très grand } f(r) \approx \frac{v_0 r}{2}, \text{ ce qui donne immédiatement } c = 0 \text{ et } b = \frac{v_0}{2}.$$

$$\text{- } \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A(R, \theta)) = 0 = 2 \sin \theta \cos \theta \left[ a + \frac{v_0 R}{2} + \frac{d}{R^2} \right],$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right)_{r=R} = 0 = \sin\theta \frac{d}{dr}\left(ra + \frac{v_0 r^2}{2} + \frac{d}{r}\right)_{r=R} = \sin\theta\left(a + v_0 R - \frac{d}{R^2}\right).$$

On déduit des deux dernières égalités  $a = -\frac{3v_0 R}{4}$  (par addition après élimination des fonctions trigonométriques qui ne sont pas identiquement nulles) et  $d = \frac{v_0 R^3}{4}$  (par soustraction). Finalement, il vient :

$$A(r, \theta) = \left(\frac{v_0 r}{2} - \frac{3v_0 R}{4} + \frac{v_0 R^3}{4r^2}\right) \sin\theta.$$

8.1. Le champ de vitesse est donné par le rotationnel :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A) \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA) \vec{u}_\theta = v_0 \cos\theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right) \vec{u}_r \\ &\quad - v_0 \sin\theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right) \vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

On constate notamment qu'il se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_0 \cos\theta \vec{u}_r - v_0 \sin\theta \vec{u}_\theta + v_0 \cos\theta \left(-\frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right) \vec{u}_r + v_0 \sin\theta \left(\frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right) \vec{u}_\theta \\ &= v_0 \vec{u}_z + \frac{v_0 R}{2r} \left[ \cos\theta \left(-3 + \frac{R^2}{r^2}\right) \vec{u}_r + \sin\theta \left(\frac{3}{2} + \frac{R^2}{2r^2}\right) \vec{u}_\theta \right] \end{aligned}$$

ce qui montre que la perturbation exercée par la sphère sur l'écoulement (différence entre  $\vec{v}(M)$  et  $v_0 \vec{u}_z$ ) décroît avec l'éloignement à peu près en  $\frac{1}{r}$ . On constate également que le champ de vitesse ne dépend pas de la viscosité qui n'a finalement d'influence qu'en imposant l'adhérence sur la sphère.

8.2. Pour obtenir le champ de pression, il est nécessaire de repartir de l'équation du mouvement linéarisée  $\overline{\text{grad}P} = \eta \Delta \vec{v}$  et on calcule le laplacien du champ de vitesse :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \vec{v} \\ &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cotan\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \vec{v}. \end{aligned}$$

Explicitons les différentes dérivées partielles l'une après l'autre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} &= -v_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{u}_r + v_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{u}_\theta \\ &\quad - v_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \vec{u}_\theta + v_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \vec{u}_r \\ &= v_0 \sin \theta \left( \frac{3R}{4r} - \frac{3R^3}{4r^3} \right) \vec{u}_r + v_0 \cos \theta \left( -\frac{3R}{4r} + \frac{3R^3}{4r^3} \right) \vec{u}_\theta \\ &= \left( \frac{3R}{4r} - \frac{3R^3}{4r^3} \right) v_0 (\sin \theta \vec{u}_r - \cos \theta \vec{u}_\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \theta^2} &= \left( \frac{3R}{4r} - \frac{3R^3}{4r^3} \right) v_0 (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta + \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta) \\ &= \left( \frac{3R}{2r} - \frac{3R^3}{2r^3} \right) v_0 (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \phi^2} &= v_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \frac{\partial^2 \vec{u}_r}{\partial \phi^2} - v_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \frac{\partial^2 \vec{u}_\theta}{\partial \phi^2} \\ &= v_0 \cos \theta \sin \theta \left( \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = v_0 \cos \theta \left( \frac{3R}{2r^2} - \frac{3R^3}{2r^4} \right) \vec{u}_r - v_0 \sin \theta \left( \frac{3R}{4r^2} + \frac{3R^3}{4r^4} \right) \vec{u}_\theta.$$

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial r^2} = v_0 \cos \theta \left( -\frac{3R}{r^3} + \frac{6R^3}{r^5} \right) \vec{u}_r - v_0 \sin \theta \left( -\frac{3R}{2r^3} - \frac{3R^3}{r^5} \right) \vec{u}_\theta.$$

On obtient ainsi en combinant ces différents termes :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v} &= \frac{3v_0 R^3}{r^5} \left( \cos \theta \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{2} \vec{u}_\theta \right) \\ &\quad + \left( \frac{3R}{4r^3} - \frac{3R^3}{4r^5} \right) v_0 \left[ 3 \cos \theta \vec{u}_r + \left( 2 \sin \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) \vec{u}_\theta \right] \\ &\quad + v_0 \cotan \theta \left( \frac{3R}{4r^3} - \frac{R^3}{4r^5} \right) (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta), \end{aligned}$$

soit après simplification :

$$\Delta \vec{v} = \frac{3\nu_0 R \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{3\nu_0 R \sin \theta}{2r^3} \vec{u}_\theta .$$

Ensuite, il nous reste à intégrer les deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{3\eta\nu_0 R \cos \theta}{r^3} \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3\eta\nu_0 R \sin \theta}{2r^3} .$$

La première donne :

$$P = -\frac{3\eta\nu_0 R \cos \theta}{2r^2} + f(\theta) .$$

En reportant dans la seconde, on obtient :

$$\frac{df}{d\theta} = 0, \text{ soit } f(\theta) = \text{cte} .$$

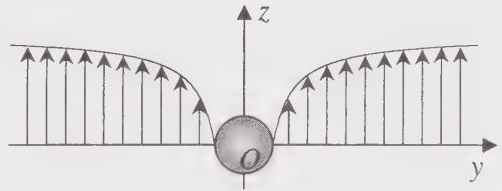
Avec la condition  $P = P_0$  pour  $r \rightarrow +\infty$  il vient finalement :

$$P = P_0 - \frac{3\eta\nu_0 R \cos \theta}{2r^2} .$$

8.3. Sur l'axe  $Oy$  on a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$  et  $r = |y|$ , d'où le champ de vitesse :

$$\vec{v} = \nu_0 \left( -1 + \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right) \vec{u}_\theta = \nu_0 \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \vec{u}_z = \nu_0 \left( 1 - \frac{3R}{4|y|} - \frac{R^3}{4|y|^3} \right) \vec{u}_z .$$

On obtient le profil ci-contre. On constate que  $v$  atteint 90 % de la valeur de  $\nu_0$  à une distance d'environ  $7,5R$  du centre de la sphère. On peut donc définir mathématiquement une épaisseur de couche limite  $\delta = 6,5R$ .

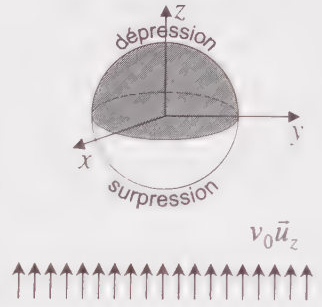


Elle pénètre donc profondément dans le fluide et la notion de couche limite n'a plus vraiment de sens physique. Et si on choisissait comme critère d'épaisseur de la couche limite la distance à laquelle la vitesse vaut 99 % de  $\nu_0$ , on obtiendrait une valeur de  $74R$  ! Il vaut finalement mieux considérer que l'écoulement est en fait sa propre couche limite dans cette direction transversale.

9.1. Sur la sphère on a :

$$P = P_0 - \frac{3\eta v_0 \cos \theta}{2R}$$

On constate qu'il y a surpression pour  $\theta > \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire sur la face qui est directement exposée au jet, et dépression pour  $\theta < \frac{\pi}{2}$ , sur la face non exposée. Les forces de pression ont donc pour effet d'entraîner la sphère dans le sens de l'écoulement.



9.2. On fait la somme des forces élémentaires de pression sur la sphère après avoir remarqué que  $Oxz$  et  $Oyz$  sont plans de symétrie du problème, ce qui impose à cette somme (qui est un vecteur polaire) de leur appartenir et de n'avoir ainsi qu'une composante sur  $\vec{u}_z$  :

$$\begin{aligned} F_\pi &= \vec{F}_\pi \cdot \vec{u}_z = \int_{\text{sphère}} -Pd\vec{S} \cdot \vec{u}_z = - \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} PR^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z \\ &= - \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left( P_0 - \frac{3\eta v_0 \cos \theta}{2R} \right) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \cos \theta \\ &= -P_0 R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi + \frac{3\eta v_0 R}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle car la primitive fait apparaître un  $\sin^2 \theta$  qu'il faut prendre entre 0 et  $\pi$ . La seconde donne :

$$\begin{aligned} \vec{F}_\pi &= \frac{3\eta v_0 R}{2} \vec{u}_z \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 3\pi\eta v_0 R \vec{u}_z \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 3\pi\eta v_0 R \vec{u}_z \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = 2\pi\eta v_0 R \vec{u}_z. \end{aligned}$$

10.1. On a sur la surface de la sphère :

$$\vec{\sigma} = \eta \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)_{r=R} \vec{u}_\theta = -\eta v_0 \sin \theta \left( \frac{3R}{4r^2} + \frac{3R^3}{4r^4} \right)_{r=R} \vec{u}_\theta = -\frac{3\eta v_0 \sin \theta}{2R} \vec{u}_\theta.$$

10.2. On effectue ensuite la sommation :

$$\vec{F}_v = \int_{\text{sphère}} \vec{\sigma} dS = -\frac{3\eta v_0}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} R \sin^2 \theta d\theta d\phi \vec{u}_\theta.$$

Cette force est également par symétrie portée par  $\vec{u}_z$ , d'où avec  $\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z = -\sin \theta$  :

$$\begin{aligned}\vec{F}_v &= -\frac{3\eta v_0}{2} \vec{u}_z \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} R \sin^2 \theta d\theta d\phi \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z \\ &= \frac{3\eta v_0}{2} \vec{u}_z \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} R \sin^3 \theta d\theta d\phi \\ &= 3\pi\eta R v_0 \vec{u}_z \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 3\pi\eta R v_0 \vec{u}_z \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 3\pi\eta R v_0 \vec{u}_z \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = 4\pi\eta R v_0 \vec{u}_z.\end{aligned}$$

11. On additionne les deux forces :

$$\vec{F} = \vec{F}_\pi + \vec{F}_v = 6\pi\eta v_0 R \vec{u}_z = 6\pi\eta R \vec{v}_0.$$

Cette expression n'est applicable qu'en régime stationnaire et à très faible nombre de Reynolds. Cela limite donc son application. On pourra toutefois l'étendre à des régimes lentement variables à la condition suivante. Si  $\tau$  est une échelle caractéristique des variations temporelles du problème, il faudra avoir :

$$\frac{\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|}{|\nu \Delta \vec{v}|} \sim \frac{\frac{v_0}{\tau}}{\nu \frac{v_0}{R^2}} = \frac{R^2}{\nu \tau} \ll 1, \text{ soit } \tau \gg \frac{R^2}{\nu}$$

pour négliger aussi l'accélération locale des particules fluides devant le terme de viscosité. Faible nombre de Reynolds signifie notamment écoulement laminaire, ce qui limite beaucoup son champ d'application puisque les écoulements naturels à notre échelle sont turbulents.

## EXERCICE 3

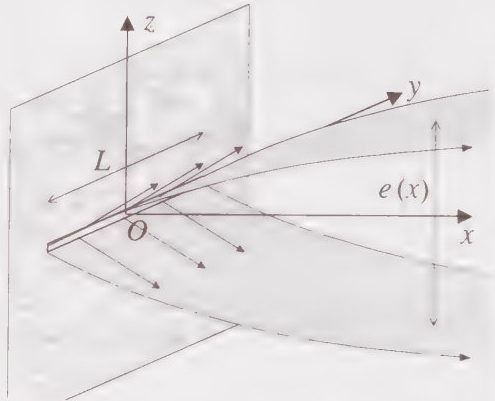
### Jet plan laminaire

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , est au repos dans le demi-espace défini par  $x > 0$ , limité par la paroi plane infinie d'équation  $x = 0$ . Celle-ci est munie d'une fente très longue, de longueur  $L$  et de largeur  $l \ll L$ , par laquelle un jet du même fluide vient se mélanger à celui au repos. On se propose de déterminer la forme du jet à grande distance de la fente, en utilisant un modèle laminaire stationnaire simple, proche de celui de la couche limite.

On se réfère aux notations de la figure ci-contre, l'influence de la pesanteur étant négligée, et on note  $D_0$  le débit volumique de fluide traversant la fente.

On suppose celle-ci suffisamment longue suivant  $Oy$  pour négliger les effets de bord et prendre  $v_y = 0$ .

On admet par ailleurs que la pression reste uniforme dans le fluide et que l'épaisseur du jet  $e$  est une fonction de  $x$  lentement variable.



1. Écrire les équations du fluide loin de la fente après avoir justifié les deux approximations  $|v_z| \ll |v_x|$  et  $\Delta \approx \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

2.1. On introduit une fonction  $F$  telle que :

$$v_x = -\frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Justifier ceci.

2.2. Écrire avec  $F$  la projection suivant  $Ox$  de l'équation du mouvement.

2.3. On effectue le changement de variable :

$$(x, z) \rightarrow \left( X = x^{1/3}, Z = \frac{z}{x^{2/3}} \right).$$

Montrer que cette équation devient avec les nouvelles variables :

$$3\nu \frac{\partial^3 F}{\partial Z^3} \approx \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + \frac{\partial F}{\partial Z} \left( \frac{2}{X} \frac{\partial F}{\partial Z} - \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial X} \right).$$

2.4. La parenthèse se simplifie si on prend  $F$  de la forme  $XG(Z)$ . Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $G$  ?

2.5. Intégrer cette équation en introduisant la limite  $G_\infty$  de  $G$  à l'infini et en utilisant le fait que,  $F$  n'étant définie que par ses dérivées, on peut toujours la choisir nulle sur l'axe  $Ox$ .

3. On ne tient désormais plus compte de  $v_z$  qui est petit devant  $v_x$ .

3.1. Dédire du résultat de la question 2.5 l'expression de  $v_x$  en fonction de  $G_\infty$ ,  $v$ ,  $x$  et  $z$ . Représenter le profil de vitesse pour quelques valeurs de  $x$  dans le plan  $Oxz$ .

3.2. Sachant que  $\text{ch}^2 2 \approx 14$  définir une largeur caractéristique  $e(x)$  du jet à la distance  $x$  de la fente.

3.3. En déduire une condition sur  $x$  relativement à  $v$  et  $G_\infty$  pour justifier a posteriori les hypothèses de la question 1.

4.1. Calculer le débit  $\bar{D}_p$  de quantité de mouvement traversant le plan d'abscisse  $x$  donnée. Expliquer pour quelle raison, bien qu'il ait été calculé loin de la fente, il s'agit aussi du débit de quantité de mouvement quittant la fente. On donne par ailleurs l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\text{ch}^4 u} = \frac{4}{3}$ .

4.2. En déduire l'expression de la constante  $G_\infty$  en fonction de  $v$ ,  $D_0$ ,  $l$  et  $L$ . On précise pour cela le profil de vitesse dans une conduite rectangulaire, de côtés  $l$  suivant  $Oz$  et  $L \gg l$  suivant  $Oy$  :

$$v = \frac{2D_V}{lL} \left( 1 - \frac{4z^2}{l^2} \right)$$

pour un débit volumique donné  $D_V$ , en négligeant les effets de bord et si l'origine  $O$  des coordonnées est sur l'axe de la conduite.

4.3. Reprendre alors le critère d'éloignement établi à la question 3.3 et faire apparaître le nombre de Reynolds  $\mathcal{R} = \frac{D_0}{vL}$ . Pouvait-on prévoir que ce critère se ramène à une relation de la forme  $x \gg lf(\mathcal{R})$  ?

4.4. On prend une fente de 1 cm de largeur et un nombre de Reynolds égal à 100. A partir de quelle distance à la fente le jet a-t-il la forme calculée ?

5.1. Calculer le débit volumique  $D_V(x)$  traversant le plan d'abscisse  $x$ .

5.2. Quel type de relation pouvait-on attendre entre ce débit,  $x$ ,  $l$ ,  $D_0$  et  $\mathcal{R}$  ? Expliquer celle-ci.

5.3. Que signifie le fait que  $D_V$  varie avec  $x$  ? Est-ce physiquement acceptable ?

6. Définir un nombre de Reynolds local dans le jet  $\mathcal{K}_{\text{jet}}$  et montrer qu'il devient turbulent au-delà d'une certaine distance  $x_m$ . Faire l'application numérique avec les valeurs données à la question 4.4.

1. En régime stationnaire et avec un champ de pression uniforme, l'équation du mouvement se réduit à :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \nu \Delta \vec{v}.$$

D'après les hypothèses du modèle, on a  $\vec{v}(M) = v_x(x, z)\vec{u}_x + v_z(x, z)\vec{u}_z$ , l'absence d'effets de bord supprimant la dépendance en  $y$  de toute fonction scalaire des coordonnées. Mais le jet doit finir par apparaître mince quand on s'éloigne de la fente. En effet, son épaisseur  $e$  varie par hypothèse lentement avec  $x$  et il existe de ce fait une distance à la fente au-delà de laquelle  $e$  devient petit devant  $x$ . Suffisamment loin, on peut donc écrire  $\frac{e(x)}{x} \ll 1$ . Or, les deux composantes de la vitesse vérifient à la frontière du jet

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{de}{dx} \sim \frac{e(x)}{x} \quad \text{et on en conclut que} \quad \left|\frac{v_z}{v_x}\right| \ll 1.$$

Cet ordre de grandeur doit rester vrai sur toute l'épaisseur du jet car  $v_z$  s'annule sur l'axe  $Ox$  du fait que  $Oxy$  est plan de symétrie du problème alors que ce n'est pas le cas de  $v_x$ .

Par ailleurs, les variations de la vitesse doivent être bien plus importantes suivant  $z$  que suivant  $x$  puisque l'échelle caractéristique de variation spatiale dans cette direction est de l'ordre de  $e$  alors qu'une variation notable suivant  $Ox$  s'effectue sur une distance de l'ordre de  $x$ . On a les ordres de grandeur des dérivées spatiales pour chaque composante de la vitesse :

$$\left|\frac{\partial v_i}{\partial z}\right| \sim \frac{|v_i|}{e(x)} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial v_i}{\partial x}\right| \sim \frac{|v_i|}{x}, \quad \text{d'où} \quad \left|\frac{\partial v_i}{\partial z}\right| \gg \left|\frac{\partial v_i}{\partial x}\right|$$

et de même pour les dérivées secondes. On écrira donc  $\Delta \approx \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Ainsi, l'équation du mouvement pour une composante  $v_i$  s'écrit :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)v_i = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)v_i \approx \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2}.$$

Quant à l'équation de continuité, elle n'autorise aucune simplification :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

car on ne peut rien dire de  $\frac{v_x}{x}$  relativement à  $\frac{v_z}{e}$  (c'est pour cette raison que l'opérateur  $(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})$  ne se simplifie également pas).

2.1. Puisque la divergence du champ de vitesse est nulle, celui-ci admet un potentiel vecteur  $\vec{A}$ . Étant donné que les deux champs sont orthogonaux, on le prend de la forme  $\vec{A} = F(x, z)\vec{u}_y$  (pas de dépendance en  $y$  du fait de l'absence d'effets de bord) pour assurer systématiquement cette orthogonalité et on écrit :

$$\vec{v} = \overline{\text{rot}} \vec{A} = -\frac{\partial F}{\partial z} \vec{u}_x + \frac{\partial F}{\partial x} \vec{u}_z.$$

2.2. La première projection de l'équation du mouvement donne alors :

$$\left( -\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( -\frac{\partial F}{\partial z} \right) \approx \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( -\frac{\partial F}{\partial z} \right), \text{ soit :}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \approx \nu \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}.$$

Les deux termes de gauche de cette équation sont comparables en ordre de grandeur et on ne peut rien dire de celui de droite car on n'a pas pour l'instant la possibilité de comparer  $\frac{F^2}{xe^2}$  (ordre de grandeur des membres de gauche) et  $\frac{\nu F}{e^3}$  (ordre de grandeur du membre de droite). On garde donc tous les termes de cette équation, a priori peu engageante !

2.3. On doit tout d'abord exprimer les différentes dérivées partielles dans le nouveau couple de variables :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{x^{-2/3}}{3} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{2z}{3x^{5/3}} \frac{\partial}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial}{\partial Z} \right) = \frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial Z} \right) = \frac{1}{x^{2/3}} \frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial}{\partial Z} \right) = x^{-4/3} \frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x^{-2/3}}{3} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{2z}{3x^{5/3}} \frac{\partial}{\partial Z} \right) = \frac{x^{-2/3}}{3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{2z}{3x^{5/3}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{2}{3x^{5/3}} \frac{\partial}{\partial Z} \\ &= \frac{x^{-2/3}}{3} \frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{2z}{3x^{5/3}} \frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{2}{3x^{5/3}} \frac{\partial}{\partial Z} \\ &= \frac{x^{-4/3}}{3} \frac{\partial^2}{\partial Z \partial X} - \frac{2z}{3x^{7/3}} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{2}{3x^{5/3}} \frac{\partial}{\partial Z}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left( x^{-4/3} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) = x^{-4/3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) = x^{-4/3} \frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) = x^{-2} \frac{\partial^3}{\partial Z^3}.$$

Puis on reporte dans l'équation à résoudre :

$$\begin{aligned} v x^{-2} \frac{\partial^3 F}{\partial Z^3} &\approx \left( \frac{x^{-2/3}}{3} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{2z}{3x^{5/3}} \frac{\partial F}{\partial Z} \right) \left( x^{-4/3} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial F}{\partial Z} \right) \left( \frac{x^{-4/3}}{3} \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial X} - \frac{2z}{3x^{7/3}} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} - \frac{2}{3x^{5/3}} \frac{\partial F}{\partial Z} \right) \end{aligned}$$

et on multiplie par  $x^2$  :

$$v \frac{\partial^3 F}{\partial Z^3} \approx \left( \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{2z}{3x} \frac{\partial F}{\partial Z} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial Z} \right) \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial X} - \frac{2z}{3x} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} - \frac{2}{3x^{1/3}} \frac{\partial F}{\partial Z} \right).$$

On ne garde que les nouvelles variables :

$$v \frac{\partial^3 F}{\partial Z^3} \approx \left( \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{2Z}{3X} \frac{\partial F}{\partial Z} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial Z} \right) \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial X} - \frac{2Z}{3X} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} - \frac{2}{3X} \frac{\partial F}{\partial Z} \right).$$

On obtient après simplification :

$$\begin{aligned} 3v \frac{\partial^3 F}{\partial Z^3} &\approx \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} - \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial X} + \frac{2}{X} \left( \frac{\partial F}{\partial Z} \right)^2 \\ &= \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + \left( \frac{2}{X} \frac{\partial F}{\partial Z} - \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial X} \right) \frac{\partial F}{\partial Z}. \end{aligned}$$

2.4. Dans ce cas il vient :

$$3vX \frac{d^3 G}{dZ^3} = XG \frac{d^2 G}{dZ^2} + X \left( 2 \frac{dG}{dZ} - \frac{dG}{dZ} \right) \frac{dG}{dZ}, \text{ soit :}$$

$$3\nu \frac{d^3 G}{dZ^3} = G \frac{d^2 G}{dZ^2} + \left( \frac{dG}{dZ} \right)^2 = \frac{d}{dZ} \left( G \frac{dG}{dZ} \right).$$

2.5. On intègre une première fois :

$$3\nu \frac{d^2 G}{dZ^2} = G \frac{dG}{dZ} + K, \text{ puis une seconde fois :}$$

$$3\nu \frac{dG}{dZ} = \frac{G^2}{2} + KZ + K'.$$

A l'infini, suivant  $z$ , la vitesse doit tendre vers 0 car on sort du jet et on passe dans le fluide au repos. Donc, pour la composante  $v_x$  qui s'écrit :

$$v_x = -\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{1}{x^{2/3}} \frac{\partial}{\partial Z} (XG(Z)) = -\frac{1}{X} \frac{dG}{dZ}$$

on doit avoir à  $x$  donné, c'est-à-dire à  $X$  donné,  $\frac{dG}{dZ}$  qui s'annule quand  $z$  diverge, c'est-à-dire quand  $Z$  diverge. Ceci signifie que la fonction  $G$  tend vers une constante que nous notons  $G_\infty$ . L'équation différentielle ci-dessus s'écrit par conséquent pour  $Z$  très grand  $\frac{G_\infty^2}{2} + KZ + K' \approx 0$ , ce qui montre que la constante  $K$  est nécessairement nulle et que  $K'$  vaut  $-\frac{G_\infty^2}{2}$ . Il nous reste à intégrer l'équation :

$$3\nu \frac{dG}{dZ} = \frac{G^2 - G_\infty^2}{2} \text{ et on procède par séparation des variables :}$$

$$\frac{dG}{G^2 - G_\infty^2} = \frac{dZ}{6\nu} = \frac{dG}{2G_\infty} \left( \frac{1}{G - G_\infty} - \frac{1}{G + G_\infty} \right), \text{ d'où :}$$

$$\ln \left( \left| \frac{G - G_\infty}{G + G_\infty} \right| \right) = \frac{G_\infty Z}{3\nu} + \text{cte.}$$

La composante  $v_x$  de la vitesse doit être partout positive, donc  $\frac{dG}{dZ} = -Xv_x$  doit être partout négative. Par conséquent on a également  $G^2 < G_\infty^2$  partout. On peut alors lever la valeur absolue dans le logarithme puisque dans ce cas  $\frac{G - G_\infty}{G + G_\infty} < 0$ <sup>1</sup>, soit :

<sup>1</sup> Il suffit de multiplier cette inégalité par  $G + G_\infty$  pour voir qu'elle équivaut à celle juste au-dessus.

$$\ln\left(\frac{G_\infty - G}{G + G_\infty}\right) = \frac{G_\infty Z}{3\nu} + \text{cte}, \text{ ce qui s'inverse en :}$$

$$\frac{G_\infty - G}{G + G_\infty} = A \exp\left(\frac{G_\infty Z}{3\nu}\right).$$

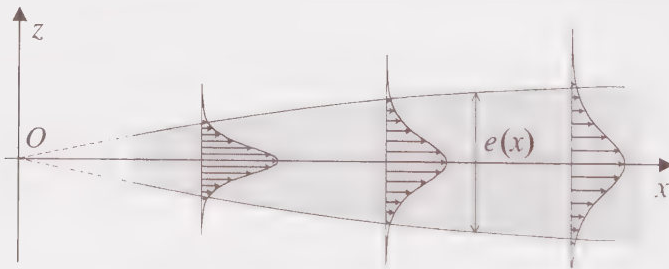
Si on veut annuler  $F$  sur  $Ox$ , il faut avoir  $G(0) = 0$ , ce qui signifie que la constante  $A$  est égale à 1. On obtient finalement :

$$G(Z) = G_\infty \frac{1 - \exp\left(\frac{G_\infty Z}{3\nu}\right)}{1 + \exp\left(\frac{G_\infty Z}{3\nu}\right)} = G_\infty \frac{\exp\left(-\frac{G_\infty Z}{6\nu}\right) - \exp\left(\frac{G_\infty Z}{6\nu}\right)}{\exp\left(-\frac{G_\infty Z}{6\nu}\right) + \exp\left(\frac{G_\infty Z}{6\nu}\right)} = -G_\infty \operatorname{th}\left(\frac{G_\infty Z}{6\nu}\right).$$

3.1. On revient à la composante dominante de la vitesse dominante, dont on a montré à la question précédente qu'elle s'écrit directement  $v_x = -\frac{1}{X} \frac{dG}{dZ}$  :

$$v_x = \frac{1}{X} \frac{G_\infty}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{G_\infty Z}{6\nu}\right)} \frac{G_\infty}{6\nu} = \frac{1}{x^{1/3}} \frac{G_\infty}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{G_\infty z}{6\nu x^{2/3}}\right)} \frac{G_\infty}{6\nu} = \frac{G_\infty^2}{6\nu x^{1/3} \operatorname{ch}^2\left(\frac{G_\infty z}{6\nu x^{2/3}}\right)}.$$

Elle présente un profil symétrique par rapport au plan  $xOy$ , ce qui était attendu. Elle décroît lentement avec  $x$ , en  $x^{-1/3}$ , mais, pour  $x$  donné, très rapidement avec  $z$ .



3.2. A une abscisse donnée,  $v_x$  est une fonction rapidement décroissante de part et d'autre de l'axe  $Ox$ . Elle vaut plus de 7 % (1/14) de sa valeur maximale sur le domaine de valeurs de  $z$  vérifiant :

$$\left| \frac{G_\infty z}{6\nu x^{2/3}} \right| < 2.$$

Au-delà, on peut considérer qu'on se trouve quasiment dans le fluide initialement au repos, même s'il est légèrement entraîné par le jet. On définit donc l'épaisseur du jet à partir de ce domaine de valeurs, soit :

$$e(x) = 2 \times \frac{12\nu x^{2/3}}{G_\infty} = \frac{24\nu x^{2/3}}{G_\infty}.$$

3.3. L'épaisseur du jet croît moins vite que la distance à la fente. Il existe donc une valeur de  $x$  au-delà de laquelle on a bien  $e \ll x$ . Or, tout notre calcul repose sur cette hypothèse. Il faut donc avoir pour la valider :

$$\frac{e(x)}{x} = \frac{24\nu}{G_\infty x^{1/3}} \ll 1, \text{ soit } x \gg \left(\frac{24\nu}{G_\infty}\right)^3.$$

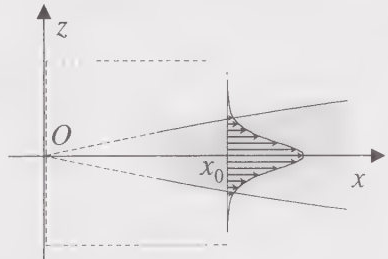
4.1. Le débit de quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{D}_p = \int \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot dS \vec{u}_x) = \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \mu \vec{v} (v_x dy dz).$$

Or la résultante suivant  $\vec{u}_z$  doit être nulle par symétrie de l'écoulement et il reste :

$$\begin{aligned} \vec{D}_p(x) &= \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \mu v_x \vec{u}_x (v_x dy dz) = \mu L \vec{u}_x \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 dz \\ &= \mu L \vec{u}_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_\infty^2 dz}{36\nu^2 x^{2/3} \text{ch}^4\left(\frac{G_\infty z}{6\nu x^{2/3}}\right)} = \frac{\mu L \vec{u}_x G_\infty^3}{6\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_\infty dz}{6\nu x^{2/3} \text{ch}^4\left(\frac{G_\infty z}{6\nu x^{2/3}}\right)} \\ &= \frac{\mu L \vec{u}_x G_\infty^3}{6\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\text{ch}^4(u)} = \frac{2\mu L G_\infty^3 \vec{u}_x}{9\nu}. \end{aligned}$$

On constate qu'il ne dépend pas de  $x$ . Il se conserve donc dans tout le jet, ce qui est naturel puisque le fluide dans lequel se dilue le jet n'exerce aucune force sur celui-ci (le champ de pression est uniforme et il n'y a pas de frottement dans un fluide parfait). La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la partie de jet située entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = x_0$  (volume de contrôle  $V^*$  limité par les pointillés sur la figure ci-contre) s'écrit alors :



$$\frac{D\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \int_{V^*} \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}).$$

En régime stationnaire il ne reste que la dérivée convective et elle s'écrit encore, l'intégrale étant nulle par symétrie sur l'ensemble des faces autres que les deux plans orthogonaux à  $Ox$  :

$$\int_V \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{\text{plan } x=x_0} \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot dS \vec{u}_x) + \int_{\text{plan } x=0} \mu \vec{v} (-\vec{v} \cdot dS \vec{u}_x) = \vec{D}_p(x_0) - \vec{D}_p(0)$$

On en déduit que  $\vec{D}_p$  est aussi le débit de quantité de mouvement à la sortie de la fente.

4.2. Ce dernier peut aisément être calculé d'après les données de l'énoncé. Pour un profil de vitesse parabolique on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{D}_p(0) &= \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{z=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu v_x \vec{u}_x (v_x dy dz) = \mu L \vec{u}_x \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} v_x^2 dz \\ &= \mu L \vec{u}_x \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[ \frac{2D_V(0)}{lL} \left( 1 - \frac{4z^2}{l^2} \right) \right]^2 dz \\ &= \frac{4\mu D_0^2 \vec{u}_x}{l^2 L} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( 1 - \frac{4z^2}{l^2} \right)^2 dz \\ &= \frac{4\mu D_0^2 \vec{u}_x}{l^2 L} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( 1 - \frac{8z^2}{l^2} + \frac{16z^4}{l^4} \right) dz \\ &= \frac{4\mu D_0^2 \vec{u}_x}{l^2 L} \left( l - \frac{2l^3}{3l^2} + \frac{l^5}{5l^4} \right) = \frac{32\mu D_0^2 \vec{u}_x}{15lL} \end{aligned}$$

Il suffit d'égaliser les deux expressions de  $\vec{D}_p$  et on obtient :

$$G_\infty^3 = \frac{48vD_0^2}{5lL^2}, \text{ soit } G_\infty = \left( \frac{48vD_0^2}{5lL^2} \right)^{1/3}$$

4.3. Le critère d'éloignement s'écrit alors :

$$x \gg \left( \frac{24v}{G_\infty} \right)^3 = (24v)^3 \frac{5lL^2}{48vD_0^2} = 1440 \frac{v^2 l L^2}{D_0^2} = \frac{1440l}{K^2}$$

Étant donné que  $x$  est homogène à une longueur, le rapport  $\frac{x}{l}$  est sans dimension et s'exprime donc comme une fonction de combinaisons sans dimension des différentes données du problème. Deux sont évidentes, le nombre de Reynolds et le rapport  $\frac{l}{L}$ . Comme le problème est supposé invariant par translation le long de  $Oy$ ,  $L$  n'est pas en fait une variable « utile » et ne doit par conséquent pas intervenir sur

des relations entre grandeurs intensives. Il est donc légitime d'attendre une relation de la forme  $\frac{x}{l} \gg f(\mathcal{R})$ . C'est bien ce que nous avons obtenu.

4.4. L'application numérique donne :

$$x \gg \frac{1440 \times 0,01}{100^2} = 0,00144 \text{ m} = 1,44 \text{ mm.}$$

On peut considérer qu'à quelques centimètres de la fente ce critère est respecté.

5.1. On applique la définition :

$$\begin{aligned} D_V(x) &= \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{z=-\infty}^{+\infty} v_x dy dz = L \int_{-\infty}^{+\infty} v_x dz \\ &= L \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_\infty^2 dz}{6vx^{1/3} \operatorname{ch}^2\left(\frac{G_\infty z}{6vx^{2/3}}\right)} = LG_\infty x^{1/3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{ch}^2(u)} \\ &= LG_\infty x^{1/3} [\operatorname{th}(u)]_{-\infty}^{+\infty} = 2LG_\infty x^{1/3}. \end{aligned}$$

On constate que le débit volumique varie avec  $x$ . En particulier, le fait irréaliste qu'il tende vers 0 avec  $x$  montre bien que nos calculs ne sont valables qu'à grande distance de la fente.

5.2. Les rapports  $\frac{D_V}{D_0}$  et  $\frac{x}{l}$  sont sans dimension. Il existe donc entre eux une relation ne faisant intervenir que des combinaisons sans dimension des données. Outre le nombre de Reynolds, il y a également  $\frac{l}{L}$  mais  $L$  ne peut intervenir du fait de l'invariance par translation suivant  $Oy$ . On pouvait donc prévoir le type de relation :

$$\frac{D_V(x)}{D_0} = f\left(\frac{x}{l}, \mathcal{R}\right).$$

En effectuant le calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{D_V(x)}{D_0} &= \frac{2l^{1/3} LG_\infty x^{1/3}}{D_0 l^{1/3}} = \frac{x^{1/3}}{l^{1/3}} \frac{2LG_\infty l^{1/3}}{D_0} = \frac{x^{1/3}}{l^{1/3}} \frac{2Ll^{1/3}}{D_0} \left(\frac{48\nu D_0^2}{5L^2}\right)^{1/3} \\ &= \frac{x^{1/3}}{l^{1/3}} \left(\frac{384\nu L}{5D_0}\right)^{1/3} = \frac{x^{1/3}}{l^{1/3}} \left(\frac{384}{5\mathcal{R}}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

5.3. Le débit volumique augmente avec la distance. Ceci signifie que le jet entraîne une partie du fluide extérieur. Les couches du fluide au repos les plus proches de la surface limitant le jet sont « forcées » à pénétrer dans celui-ci, ce qui paraît paradoxal quand on ne tient pas compte de la viscosité. Puisqu'il n'y a pas non plus de gradient de pression, il est difficile de donner une justification physique à ce résultat. En régime stationnaire, on ne voit pas comment ce débit pourrait ne pas se conserver. Il sortirait plus de matière à une abscisse donnée qu'il n'en entrerait à une abscisse inférieure et c'est inconcevable sans source locale. Il s'agit d'un défaut manifeste du modèle.

6. On prend comme vitesse caractéristique du jet la valeur de  $v_x$  sur l'axe  $Ox$  et comme distance caractéristique son épaisseur locale  $e(x)$  :

$$\begin{aligned} K_{\text{jet}} &= \frac{v_x(z=0)e(x)}{v} = \frac{G_x^2}{6vx^{1/3}} \frac{24x^{2/3}}{G_\infty} = \frac{4G_x x^{1/3}}{v} = \frac{4x^{1/3}}{v} \left( \frac{48vD_0^2}{5L^2} \right)^{1/3} \\ &= \frac{4x^{1/3}}{l^{1/3}} \left( \frac{48D_0^2}{5L^2v^2} \right)^{1/3} = \frac{4x^{1/3}}{l^{1/3}} \left( \frac{48K^2}{5} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Ce nombre croît de manière non bornée avec  $x$ . Il existe donc une distance à partir de laquelle il devient supérieur à  $\sim 2000$ . Malgré le fait que la vitesse décroît avec l'éloignement, l'écoulement finit par devenir turbulent si on se place assez loin. On n'aurait pas pu prévoir ceci en se limitant à la définition traditionnelle du nombre de Reynolds, ici  $\frac{D_0}{vL}$ , qui ne permet de ne prévoir un comportement laminaire ou turbulent qu'à une distance de l'ordre de la largeur de la fente.

L'apparition de la turbulence dans le jet se produit à la distance :

$$x_m = 2000^3 \times \frac{5l}{64 \times 48K^2} \approx 1,30 \cdot 10^7 \frac{l}{K^2}.$$

L'application numérique donne  $x_m \approx 13$  m. On est très loin de la fente.

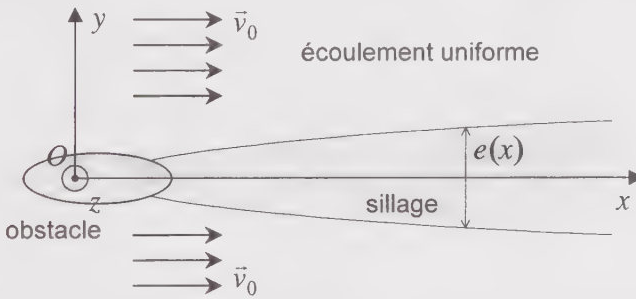
## EXERCICE 4

### Sillage laminaire

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , se déplace à vitesse constante et uniforme  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ , avec  $v_0 > 0$ , suffisamment loin en amont d'un obstacle solide fini et fixe. A proximité de celui-ci, les lignes de courant sont déviées et il n'est pas possible de les étudier sans connaître la géométrie de l'obstacle.

Toutefois, en aval de celui-ci et suffisamment loin, on peut déterminer les propriétés globales de l'écoulement en résolvant une équation du mouvement approchée, indépendamment de la forme exacte de l'obstacle. On fait pour cela les différentes hypothèses et approximations simplificatrices suivantes :

- l'écoulement est laminaire et stationnaire,
- la pesanteur n'est pas prise en compte,
- l'obstacle présente une invariance par translation le long de l'axe  $z'Oz$  et une symétrie par rapport au plan  $xOz$ ,
- loin de l'obstacle et en aval la vitesse du fluide est proche de  $\bar{v}_0$  et on note par conséquent  $\bar{v}(M) = \bar{v}_0 + \bar{v}'(M)$  avec  $|\bar{v}'| \ll v_0$  afin de pouvoir linéariser l'équation du mouvement,
- la région du fluide dans laquelle  $|\bar{v}'|$  prend ses plus grandes valeurs est appelée sillage et sa forme doit peu dépendre de la géométrie de l'obstacle, ceci étant d'autant plus vrai qu'on se trouve loin de celui-ci ; on se place donc à une distance à laquelle cette dépendance a disparu,
- l'épaisseur  $e$  du sillage dépend de  $x$  et est localement très inférieure à  $x$  ; on suppose donc a priori que  $e(x)$  croît moins vite que  $x$ .



1. En estimant l'ordre de grandeur de chacun des termes qu'elle contient, montrer que l'équation du mouvement s'écrit dans le sillage de manière approchée :

$$v_0 \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} = - \frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial y^2}.$$

2. Montrer à l'aide de l'équation de continuité que la composante  $v'_y$  est d'un ordre de grandeur inférieure à  $v'_x$ .
3. Expliquer à partir des projections de l'équation du mouvement pourquoi on peut considérer la pression uniforme dans le sillage.

4. L'équation vérifiée par  $v'_x$  est semblable à une équation de diffusion et on admet qu'elle a une solution de la forme  $\frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right)$  en l'absence de conditions aux limites. Déterminer la constante  $B$ .

5.1. Comment varie  $v'_x$  avec  $x$  et  $y$  ?

5.2. On définit arbitrairement le sillage comme la région dans laquelle  $v'_x$  dépasse le dixième de sa valeur sur l'axe  $Ox$ . Expliciter son épaisseur  $e(x)$  en fonction de  $v$ ,  $v_0$  et  $x$ .

5.3. A partir de quelle distance à l'obstacle notre modèle est-il acceptable ? Le critère ainsi trouvé est-il suffisant.

6.1. Calculer, à  $x$  fixé,  $\bar{F}_1(x, y) = \int_{-y}^{+y} \mu \bar{v}(v_x du)$  loin en aval de l'obstacle (en justifiant certaines approximations) et  $\bar{F}_0(y) = \int_{-y}^{+y} \mu \bar{v}(v_x du)$  loin en amont avec dans les deux cas  $y$  positif et très supérieur à  $e$ . On admettra :

$$\int_{-y}^{+y} \exp(-x^2) dx \approx \sqrt{\pi} \text{ pour } y \gg 1.$$

6.2. Calculer  $\bar{F}_1(x, y) - \bar{F}_0(y)$  et en donner la signification physique.

6.3. En déduire l'expression de  $v_x$  en fonction du module  $\mathcal{F}$  de la force exercée par le fluide sur l'unité de longueur de l'obstacle suivant  $z'z$ .

7. Dans le cas d'une plaque plane de longueur  $L$  suivant  $Ox$ , on obtient :

$$\mathcal{F} = \frac{4\mu}{3} \sqrt{\nu L v_0^3}.$$

Exprimer alors  $v_x$  en fonction de  $v_0$ ,  $X = \frac{x}{L}$ ,  $Y = \frac{y}{L}$  et  $\mathcal{K} = \frac{\nu_0 L}{\nu}$ .

8. Représenter pour la plaque plane le profil de vitesse pour quelques valeurs simples de  $X$  et faire apparaître les limites du sillage.

9. Calculer le déficit de débit volumique par unité de longueur le long de  $Oz$  en aval de l'obstacle. Que faut-il en conclure concernant ce modèle de sillage ?

1. L'échelle caractéristique des variations spatiales suivant  $x$  est  $x$  lui-même lorsqu'on se trouve à très grande distance de l'obstacle. Par contre, celle des variations suivant  $y$  est  $e$  puisque c'est la distance, à un facteur deux près, sur laquelle on passe du centre du sillage à la zone d'écoulement uniforme du fluide. On a donc formellement :

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{x} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{e(x)}, \text{ soit } \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}.$$

Par ailleurs, du fait de l'invariance de l'obstacle par translation le long de l'axe  $z'z$ , on a également  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ . Le terme de viscosité de l'équation du mouvement s'écrit de ce fait :

$$\nu \Delta \vec{v} = \nu \Delta (\vec{v}_0 + \vec{v}') = \nu \Delta \vec{v}' \approx \nu \frac{\partial^2 \vec{v}'}{\partial y^2}.$$

On linéarise ensuite le terme inertiel :

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} &= ((\vec{v}_0 + \vec{v}') \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) (\vec{v}_0 + \vec{v}') \\ &= (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 + (\vec{v}' \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}'. \end{aligned}$$

Or  $\vec{v}_0$  est uniforme et  $(\vec{v}' \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}'$  est par hypothèse très inférieur à  $(\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}'$ . Il vient donc :

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} &= (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}' \approx (\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}' = \left( v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{v}' \\ &= v_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x}. \end{aligned}$$

L'équation du mouvement est ainsi en régime stationnaire :

$$v_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu} + \nu \frac{\partial^2 \vec{v}'}{\partial y^2}.$$

2. L'équation de continuité donne en ordres de grandeur :

$$\text{div } \vec{v} = 0 = \text{div}(\vec{v}_0 + \vec{v}') = \text{div } \vec{v}' \sim \frac{v'_x}{x} + \frac{v'_y}{e}, \text{ soit :}$$

$$|v'_y| \sim \frac{e |v'_x|}{x} \ll |v'_x|.$$

3. Les deux projections de l'équation du mouvement s'écrivent :

$$v_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y^2},$$

$$v_0 \frac{\partial v'_y}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y^2}.$$

Elles montrent que  $\frac{\partial P}{\partial y}$  est d'un ordre de grandeur inférieure à  $\frac{\partial P}{\partial x}$ , puisque  $\frac{\partial P}{\partial y}$  dépend linéairement de  $v'_y$  et  $\frac{\partial P}{\partial x}$  de  $v'_x$ , ce qui signifie qu'on peut considérer que la pression ne dépend quasiment que de  $x$ . Elle est donc pratiquement la même, pour une valeur de  $x$  donnée, dans le sillage et dans la région d'écoulement uniforme. Or, dans cette dernière, l'équation du mouvement devient très simple

$$(\vec{v}_0 \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}_0 = \vec{0} = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + v \Delta \vec{v}_0 = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} \quad \text{et donne } P = \text{cte}$$

Il en résulte que la pression est quasi uniforme dans le sillage et égale à sa valeur hors du sillage (mais toujours loin en aval de l'obstacle).

4. L'équation vérifiée par  $v'_x$  est alors :

$$v_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x} = v \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y^2}.$$

Il s'agit formellement d'une équation de diffusion<sup>2</sup>, même si la dérivée première n'est pas par rapport au temps.

On calcule les dérivées partielles de la solution donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) \right] &= -\frac{A}{2x^{3/2}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) + \frac{By^2}{x^2} \frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) \\ &= \left( \frac{By^2}{x^2} - \frac{1}{2x} \right) \frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) \right] = -\frac{2By}{x} \frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) = -\frac{2ABy}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right).$$

<sup>2</sup> comme l'équation de la diffusion des particules, l'équation de la chaleur et l'équation du champ électromagnétique dans un conducteur à basse fréquence.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) \right] &= -\frac{2AB}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) + \frac{2By}{x} \frac{2ABBy}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) \\ &= \left(\frac{2By^2}{x} - 1\right) \frac{2AB}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right). \end{aligned}$$

L'équation du mouvement qui nous intéresse devient alors :

$$v_0 \left( \frac{By^2}{x^2} - \frac{1}{2x} \right) \frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right) = v \left( \frac{2By^2}{x} - 1 \right) \frac{2AB}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{By^2}{x}\right)$$

et on en déduit après simplification, la constante  $A$  ne pouvant être nulle :

$$v_0 \left( \frac{By^2}{x} - \frac{1}{2} \right) = 2vB \left( \frac{2By^2}{x} - 1 \right),$$

soit pour toutes valeurs de  $x$  et  $y$  dans le sillage :

$$\left( v_0 B - 4vB^2 \right) \frac{y^2}{x} + 2vB - \frac{v_0}{2} = 0.$$

En annulant les coefficients de ce polynôme de  $\frac{y^2}{x}$  on obtient les deux égalités :

$$v_0 B - 4vB^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2vB - \frac{v_0}{2} = 0, \quad \text{soit l'unique condition :}$$

$$B = \frac{v_0}{4v},$$

5.1. Puisque  $B$  est positif, on constate que  $v'_x$  est rapidement décroissant avec  $|y|$  de part et d'autre de l'axe  $Ox$ . Ensuite, sur cet axe, il varie comme  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  et présente donc une décroissance beaucoup plus lente.

5.2. On a par définition de l'épaisseur recherchée :

$$\frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{v_0 e^2}{4vx}\right) = \frac{A}{10\sqrt{x}}, \quad \text{soit :}$$

$$e = \sqrt{\frac{4vx \ln(10)}{v_0}} \approx 3,03 \sqrt{\frac{vx}{v_0}}.$$

L'épaisseur du sillage croît comme  $\sqrt{x}$ , c'est-à-dire plus lentement que  $x$  au-delà d'une certaine distance.

5.3. Ce résultat repose notamment sur l'hypothèse  $e(x) \ll x$ . Pour être cohérent, on doit donc se limiter à :

$$\sqrt{\frac{vX}{v_0}} \ll x, \text{ soit } x \gg \frac{v}{v_0}.$$

Ce critère ne dépend pas des dimensions de l'obstacle. Or, si on se place a priori loin en aval, il faut respecter également  $x \gg L$ ,  $L$  étant la dimension caractéristique de l'obstacle. Un critère complet, nécessaire à la validité des résultats du modèle, doit donc s'écrire  $x \gg \sup\left(\frac{v}{v_0}, L\right)$ .

6.1. Loin en amont on a  $\vec{v}(M) = v_0 \vec{u}_x$ , d'où simplement :

$$\vec{F}_0(y) = \int_{-y}^{+y} \mu v_0 \vec{u}_x (v_0 du) = \mu v_0^2 \vec{u}_x \int_{-y}^{+y} du = 2\mu v_0^2 y \vec{u}_x$$

Loin en aval on a  $\vec{v}(M) = (v_0 + v'_x) \vec{u}_x + v'_y \vec{u}_y$  et il vient :

$$\vec{F}_1(x, y) = \int_{-y}^{+y} \mu (v_0 + v'_x) \vec{u}_x (v_x du) + \int_{-y}^{+y} \mu v'_y \vec{u}_y (v_x du).$$

Du fait de la symétrie de l'écoulement on a  $v'_y(x, y) = -v'_y(x, -y)$  tandis que nos calculs montrent que  $v'_x(x, y) = v'_x(x, -y)$ . Par conséquent la seconde intégrale est nulle. Il nous reste :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(x, y) &= \int_{-y}^{+y} \mu (v_0 + v'_x) \vec{u}_x (v_x du) \\ &= \int_{-y}^{+y} \mu (v_0 + v'_x) \vec{u}_x (v_0 du) + \int_{-y}^{+y} \mu (v_0 + v'_x) \vec{u}_x (v'_x du) \\ &= \int_{-y}^{+y} \mu v_0 \vec{u}_x (v_0 du) + \int_{-y}^{+y} \mu v'_x \vec{u}_x (v_0 du) + \int_{-y}^{+y} \mu v_0 \vec{u}_x (v'_x du) \\ &\quad + \int_{-y}^{+y} \mu v'_x \vec{u}_x (v'_x du) \\ &\approx \int_{-y}^{+y} \mu v_0 \vec{u}_x (v_0 du) + \int_{-y}^{+y} \mu v'_x \vec{u}_x (v_0 du) + \int_{-y}^{+y} \mu v_0 \vec{u}_x (v'_x du) \end{aligned}$$

car on peut négliger le terme quadratique en  $v'_x$  qui est d'un ordre de grandeur inférieur aux autres puisque  $|\vec{v}'| \ll v_0$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(x, y) &\approx \int_{-y}^{+y} \mu v_0 \bar{u}_x(v_0 du) + \int_{-y}^{+y} \mu v'_x \bar{u}_x(v_0 du) + \int_{-y}^{+y} \mu v_0 \bar{u}_x(v'_x du) \\ &\approx 2\mu v_0^2 y \bar{u}_x + 2\mu v_0 \bar{u}_x \int_{-y}^{+y} v'_x du \\ &\approx 2\mu v_0^2 y \bar{u}_x + 2\mu v_0 \bar{u}_x \int_{-y}^{+y} \frac{A}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{v_0 u^2}{4\nu x}\right) du. \end{aligned}$$

Par hypothèse on a  $y \gg e$ , donc :

$$\frac{v_0 y^2}{4\nu x} \gg \frac{v_0 e^2}{4\nu x} = \frac{v_0}{4\nu x} \frac{4\nu x \ln(10)}{v_0} = \ln(10)$$

et a fortiori  $\frac{v_0 y^2}{4\nu x} \gg 1$  ( $\ln(10) \approx 2,3$ ). Ceci signifie qu'avec le changement de variable  $X = \sqrt{\frac{v_0}{4\nu x}} u$ , destiné à simplifier l'argument de l'exponentielle et à se ramener à l'intégrale donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(x, y) &= 2\mu v_0^2 y \bar{u}_x + 2\mu v_0 \bar{u}_x \int_{\frac{-v_0 y^2}{4\nu x}}^{\frac{v_0 y^2}{4\nu x}} \frac{A}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{4\nu x}{v_0}} \exp(-X^2) dX \\ &= 2\mu v_0^2 y \bar{u}_x + 4\mu A \sqrt{\nu v_0} \bar{u}_x \int_{\frac{-v_0 y^2}{4\nu x}}^{\frac{v_0 y^2}{4\nu x}} \exp(-X^2) dX \\ &\approx 2\mu v_0^2 y \bar{u}_x + 4\mu A \sqrt{\pi \nu v_0} \bar{u}_x. \end{aligned}$$

6.2. La différence  $\bar{F}_1(x, y) - \bar{F}_0(y)$  représente, par unité de longueur le long de  $z'z$ , le débit de quantité de mouvement du fluide en aval de l'obstacle moins le même débit en amont<sup>3</sup>. C'est par conséquent la dérivée particulière de la quantité de mouvement, ou encore la quantité de mouvement que gagne, par unité de temps et par unité de longueur le long de  $z'z$ , le fluide du fait de la présence de l'obstacle. Il s'agit donc, d'après la relation fondamentale de la dynamique, de la force qu'exerce l'obstacle sur le fluide par unité de longueur suivant  $z'z$ . Elle a pour expression :

$$\bar{F}_1(x, y) - \bar{F}_0(y) = 4\mu A \sqrt{\pi \nu v_0} \bar{u}_x$$

6.3. D'après le principe de l'action et de la réaction, c'est encore l'opposé de la force qu'exerce le fluide sur l'obstacle par unité de longueur suivant  $z'z$  (force dirigée dans le sens des  $x$  croissants). On a donc l'égalité :

<sup>3</sup> Rigoureusement on obtient le débit total en faisant tendre  $y$  vers l'infini pour ne pas exclure une partie de l'écoulement. Mais, la différence des deux intégrales vectorielles ne dépendant plus de  $y$ , le passage à la limite n'est pas nécessaire.

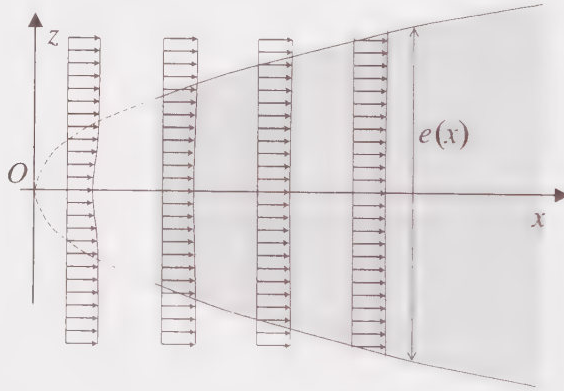
$-\mathcal{F} = 4\mu A\sqrt{\pi\nu v_0}$  et on en déduit :

$$v_x = v_0 - \frac{\mathcal{F}}{4\mu\sqrt{\pi\nu v_0}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{v_0 y^2}{4\nu x}\right).$$

7. Dans ce cas, la composante horizontale de la vitesse peut être complètement explicitée :

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 - \frac{4\mu}{3} \frac{\sqrt{\nu L v_0^3}}{4\mu\sqrt{\pi\nu v_0}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{v_0 y^2}{4\nu x}\right) \\ &= v_0 - \frac{v_0}{3} \sqrt{\frac{L}{\pi x}} \exp\left(-\frac{v_0 y^2}{4\nu x}\right) = v_0 \left[1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{L}{\pi x}} \exp\left(-\frac{v_0 y^2 L}{4\nu L x}\right)\right] \\ &= v_0 \left[1 - \frac{1}{3\sqrt{\pi X}} \exp\left(-\frac{KY^2}{4Lx}\right)\right] = v_0 \left[1 - \frac{1}{3\sqrt{\pi X}} \exp\left(-\frac{KY^2}{4X}\right)\right]. \end{aligned}$$

8. On obtient le profil ci-dessous, le sillage présentant une enveloppe parabolique (fonction racine carrée obtenue à la question 5.2), mais qu'il ne faut pas prolonger jusqu'à l'obstacle. En pratique, la condition  $x \gg \frac{\nu}{v_0}$  est vite respectée du fait des très faibles valeurs des viscosités cinématiques et c'est  $x \gg L$  qui sert de critère effectif d'éloignement.



Le déficit de vitesse apparaît modeste puisque, même à une distance faible de  $2L$  (soit  $X = 2$ ), il n'est que d'environ 13 % sur l'axe ( $\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \approx 0,13$ ). Toutefois, il se prolonge très loin puisqu'il faut aller au-delà de  $350L$  pour obtenir un déficit de vitesse inférieur à 1 % sur l'axe ( $\frac{1}{3\sqrt{350\pi}} \approx 0,010$ ).

9. Le déficit de débit volumique a une distance donnée s'écrit :

$$\begin{aligned} D_V &= \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=0}^1 [v_0 - v_x(x, y)] dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} [v_0 - v_x(x, y)] dy \\ &= Lv_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3\sqrt{\pi X}} \exp\left(-\frac{\mathcal{R}Y^2}{4X}\right) dY = \frac{Lv_0}{3\sqrt{\pi X}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \sqrt{\frac{4X}{\mathcal{R}}} du \\ &= \frac{2Lv_0}{3\sqrt{\pi \mathcal{R}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{2Lv_0}{3\sqrt{\mathcal{R}}} = \frac{2v_0\sqrt{\mathcal{R}}}{3}. \end{aligned}$$

On constate qu'il reste uniforme. Il y a donc une « disparition » de fluide entre l'amont et l'aval. Or, il ne peut y avoir d'accumulation locale au voisinage de l'obstacle en régime stationnaire. Ce déficit est par conséquent aberrant et constitue donc un défaut du modèle. C'est pourquoi on ne peut le considérer que « qualitatif ».

## EXERCICE 5

### Première correction à la formule de Stokes

La formule de Stokes exprime la force  $\vec{F}$  qu'exerce un écoulement laminaire stationnaire de fluide visqueux incompressible sur une sphère solide immobile, en l'absence de forces volumiques dans le fluide. Son expression analytique a été établie à l'exercice 2 :

$$\vec{F} = 6\pi\eta R\vec{v}_0,$$

$\eta$  étant la viscosité dynamique du fluide,  $\vec{v}_0$  sa vitesse uniforme loin de la sphère et  $R$  le rayon de celle-ci. Cette formule n'est acceptable que pour un nombre de Reynolds  $\mathcal{R} = \frac{v_0 R}{\nu}$  petit devant 1 ( $\nu = \frac{\eta}{\mu}$  étant la viscosité cinématique du fluide et  $\mu$  sa masse volumique).

On se propose d'améliorer la formule de Stokes, en précisant que la méthode utilisée pour cette amélioration pose des problèmes de cohérence à grande distance (que nous ne soulèverons toutefois pas). On donne pour cela le champ de vitesse dans le fluide en coordonnées sphériques quand on néglige le terme non linéaire devant le terme de viscosité dans l'équation du mouvement (Cf. exercice 2) :

$$\vec{v} = v_0 \vec{u}_z + \frac{v_0 R}{2r} \left[ \cos\theta \left( -3 + \frac{R^2}{r^2} \right) \vec{u}_r + \sin\theta \left( \frac{3}{2} + \frac{R^2}{2r^2} \right) \vec{u}_\theta \right],$$

l'origine  $O$  du repère étant le centre de la sphère et l'axe  $Oz$  celui défini par la direction et le sens du vecteur  $\vec{v}_0$ .

1. A partir de quelle distance la différence relative  $\frac{|\vec{v}(M) - v_0 \vec{u}_z|}{v_0}$  est-elle inférieure à 0,1 ? On admettra sans démonstration :

$$\sqrt{\cos^2 \theta \left( -3 + \frac{R^2}{r^2} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{3}{2} + \frac{R^2}{2r^2} \right)^2} \approx \frac{5}{2} \text{ quels que soient } r \text{ et } \theta.$$

2.1. On pose  $\vec{v}(M) = \vec{v}_0 + \vec{v}'(M)$  et on se place à une distance  $r$  de la sphère très grande devant  $R$ . Quel est l'intérêt de ce changement d'inconnue ? Quelle équation aux dérivées partielles doit vérifier  $\vec{v}'$  en régime stationnaire et en l'absence de champ de force extérieur ? Proposer une équation approchée linéaire et préciser la condition aux limites associée.

2.2. Évaluer l'ordre de grandeur du rapport  $\frac{(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}}{|\nu \Delta \vec{v}|}$  loin de la sphère en faisant apparaître le nombre de Reynolds  $\mathcal{R} = \frac{v_0 R}{\nu}$ .

2.3. En déduire en fonction de  $R$  et du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  jusqu'à quelle distance  $D$ , supposée très supérieure à  $R$ , l'expression du champ de vitesse donnée dans l'énoncé est acceptable. On prendra  $\frac{(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}}{|\nu \Delta \vec{v}|} < 0,1$  comme critère de validité.

2.4. Pour quel domaine de valeurs de  $\mathcal{R}$  la distance trouvée a-t-elle un sens ?

3.1. A proximité de la sphère le champ de vitesse déjà donné vérifie :

$$(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} \approx -\frac{9v_0^2 \sin^2 \theta}{4R} \left( \frac{r}{R} - 1 \right)^2 \vec{u}_r \text{ et } \Delta \vec{v} \approx \frac{3v_0 \cos \theta}{R^2} \vec{u}_r + \frac{3v_0 \sin \theta}{2R^2} \vec{u}_\theta.$$

Donner en fonction de  $R$  et  $\mathcal{R}$  la distance  $D'$ , supposée voisine de  $R$ , jusqu'à laquelle l'expression du champ de vitesse donnée dans l'énoncé est acceptable.

On prendra le même critère  $\frac{(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}}{|\nu \Delta \vec{v}|} < 0,1$  pour justifier la non-prise en compte du terme inertiel.

3.2. Pour quel domaine de valeurs de  $\mathcal{R}$  l'épaisseur ainsi trouvée a-t-elle un sens ?

4. Représenter graphiquement  $\frac{D}{R}$  et  $\frac{D'}{R}$  en fonction de  $\log(\mathcal{K})$ . Que représente la juxtaposition de ces deux courbes ? On ne cherchera pas à les raccorder à cause d'un domaine dans lequel ni l'autre ni l'autre ne sont acceptables.

5. Comme on ne peut pas résoudre l'équation du mouvement, on fait l'approximation suivante :

- de  $r = R$  à  $D$  ou  $D'$ , l'équation  $\vec{0} = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}$  est satisfaisante, associée aux conditions aux limites à la surface de la sphère,

- au-delà de  $r = D$ , l'équation établie à la question 1 est satisfaisante, associée aux conditions aux limites à l'infini,

- on raccorde ces deux solutions ainsi obtenues en ajustant les constantes d'intégration encore indéterminées (chaque équation « isolée » est associée à un nombre de conditions aux limites insuffisant pour fournir toutes les constantes d'intégration de la solution qui lui correspond).

Quel domaine de valeurs de  $\mathcal{K}$  est compatible avec ce raisonnement ?

6. Dans ce domaine, la méthode précédente aboutit à l'expression :

$$\vec{F} = 6\pi\eta R\vec{v}_0 + \frac{9}{4}\pi\mu R^2\nu_0\vec{v}_0.$$

Est-elle nettement différente de la formule de Stokes ? Que représente-t-elle mathématiquement ?

1. On calcule cette différence relative :

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{v} - \nu_0\vec{u}_z|}{\nu_0} &= \frac{R}{2r} \left| \cos\theta \left( -3 + \frac{R^2}{r^2} \right) \vec{u}_r + \sin\theta \left( \frac{3}{2} + \frac{R^2}{2r^2} \right) \vec{u}_\theta \right| \\ &= \frac{R}{2r} \sqrt{\cos^2\theta \left( -3 + \frac{R^2}{r^2} \right)^2 + \sin^2\theta \left( \frac{3}{2} + \frac{R^2}{2r^2} \right)^2} \approx \frac{5R}{4r} \end{aligned}$$

et on en déduit la condition :

$$\frac{5R}{4r} < 0,1, \text{ soit } r > \frac{5R}{0,4} = 12,5R.$$

2.1. L'équation exacte à résoudre en régime stationnaire est :

$$\left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu\Delta\vec{v}.$$

Mais à grande distance on a  $\vec{v} \approx v_0\vec{u}_z$ . C'est pourquoi on écrit :

$$\vec{v}(M) = v_0\vec{u}_z + \vec{v}'(M), \text{ avec } |\vec{v}'| \ll v_0.$$

Ce changement de variable va permettre de linéariser l'équation du mouvement relativement à cette petite différence de vitesse. L'équation s'écrit en régime stationnaire :

$$\begin{aligned} \left((v_0\vec{u}_z + \vec{v}') \cdot \overline{\text{grad}}\right)(v_0\vec{u}_z + \vec{v}') &= -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu\Delta\vec{v}, \text{ soit :} \\ \left(v_0\vec{u}_z \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v}' + \left(\vec{v}' \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v}' &= -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu\Delta\vec{v}'. \end{aligned}$$

Elle devient en se limitant au premier ordre :

$$\left(v_0\vec{u}_z \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v}' = v_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial z} \approx -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu\Delta\vec{v}'.$$

On associe à cette équation la condition  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \vec{v}' = \vec{0}$ . Il n'y a pas de condition à la surface de la sphère puisque l'équation linéarisée n'est valable qu'à grande distance.

2.2. Loin de la sphère, l'échelle caractéristique de distance ne dépend plus de  $R$  et doit plutôt être comparable à  $r$ . Puisque la vitesse  $y$  est très proche de  $v_0\vec{u}_z$ , elle varie spatialement très lentement et il faut parcourir une distance de l'ordre de  $r$ , c'est-à-dire revenir près de la sphère, pour observer une variation notable. On écrit donc :

$$\frac{\left| \left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v} \right|}{|\nu\Delta\vec{v}|} \sim \frac{v_0^2 r^2}{r \nu v_0} = \frac{v_0 r}{\nu} = \frac{v_0 R r}{\nu R} = \frac{\mathcal{R}r}{R}.$$

On voit que ce rapport peut devenir arbitrairement grand à distance, ce qui signifie que l'écoulement doit devenir turbulent loin de la sphère, puisque le terme non linéaire est le responsable de la turbulence.

2.3. La solution de l'énoncé n'est acceptable que si ce rapport est petit devant un, c'est-à-dire tant que :

$$\frac{\mathcal{R}r}{R} < 0,1, \text{ soit } r < \frac{0,1R}{\mathcal{K}} = D.$$

L'expression du champ de vitesse donné dans l'énoncé n'est plus valable au-delà.

2.4. Ce résultat repose sur l'hypothèse  $r \gg R$ . Il n'est donc cohérent que si :

$$\frac{0,1}{\mathcal{K}} \gg 1, \text{ soit } \mathcal{K} \ll 0,1.$$

3.1. Cette fois le rapport des termes inertiel et visqueux a l'expression approchée :

$$\begin{aligned} \frac{|\overrightarrow{(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}}|}{|v\Delta\vec{v}|} &\approx \frac{\frac{9v_0^2 \sin^2\theta}{4R} \left(\frac{r}{R}-1\right)^2}{v \left| \frac{3v_0 \cos\theta}{R^2} \vec{u}_r + \frac{3v_0 \sin\theta}{2R^2} \vec{u}_\theta \right|} = \frac{\frac{3Rv_0 \sin^2\theta}{4v} \left(\frac{r}{R}-1\right)^2}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{4}}} \\ &= \frac{3Rv_0 \sin^2\theta}{2v\sqrt{3\cos^2\theta+1}} \left(\frac{r}{R}-1\right)^2 = \frac{3\mathcal{K} \sin^2\theta}{2\sqrt{3\cos^2\theta+1}} \left(\frac{r}{R}-1\right)^2 \sim \mathcal{K} \left(\frac{r}{R}-1\right)^2. \end{aligned}$$

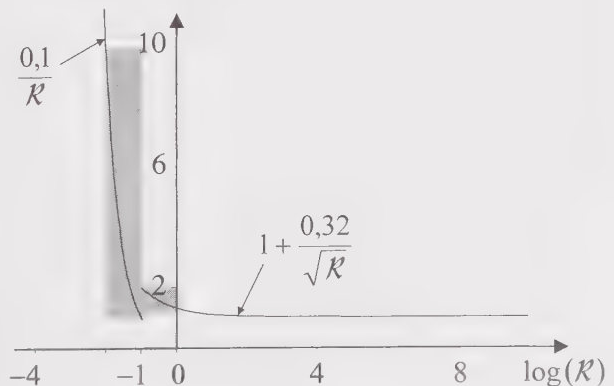
Très près de la sphère il existe donc une zone mince dans laquelle le terme inertiel est bien négligeable. Elle est d'autant plus mince que le nombre de Reynolds est élevé. Plus précisément, le rapport reste petit tant que :

$$\left(\frac{r}{R}-1\right)^2 < \frac{0,1}{\mathcal{K}}, \text{ soit } r < \left(1 + \frac{0,32}{\sqrt{\mathcal{K}}}\right)R = D'.$$

3.2. L'expression approchée de  $\overrightarrow{(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}}$  est valable pour  $r \approx R$ . Il faut donc, pour que le résultat précédent soit cohérent, que la limite trouvée soit comparable à  $R$ , c'est-à-dire la condition  $\frac{0,32}{\sqrt{\mathcal{K}}} \ll 1$ , ce qui donne :

$$\mathcal{K} \gg 0,1.$$

4. On obtient les deux courbes ci-contre en traits pleins, avec une échelle logarithmique en abscisse, de manière à visualiser un large intervalle de valeurs du nombre de Reynolds. Chaque courbe a été prolongée, pour envisager un raccordement, jusqu'à  $\mathcal{K} = 0,1$  mais on a grisé le domaine dans lequel chacune n'est plus valable, en prenant un facteur 10 pour



différence d'ordre de grandeur, soit entre 0,01 et 0,1 pour  $D = \frac{0,1R}{\mathcal{K}}$  et entre 0,1 et

$$1 \text{ pour } D' = \left(1 + \frac{0,32}{\sqrt{\mathcal{K}}}\right)R.$$

L'ensemble des deux courbes représente en fonction du nombre de Reynolds la distance relative au centre de la sphère jusqu'à laquelle la solution donnée dans l'énoncé est acceptable.

5. Il faut que la valeur de  $D$  ou de  $D'$ , selon le nombre de Reynolds, soit supérieure ou égale à  $12,5R$ , sinon le domaine dans lequel on utilise l'équation approchée

$v_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial z} \approx -\frac{\text{grad}P}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}'$  ne respecte pas partout la condition  $\vec{v} \approx v_0 \vec{u}_z$  et il y a

contradiction. On voit sur le graphique de la page précédente que c'est la courbe

$\frac{D}{R} = \frac{0,1}{\mathcal{K}}$  qui est concernée et on en déduit l'inégalité :

$$\frac{0,1}{\mathcal{K}} \geq 12,5, \text{ soit } \mathcal{K} \leq \frac{0,1}{12,5} = 0,008.$$

6. La force de frottement s'écrit encore :

$$\vec{F} = 6\pi\eta R \vec{v}_0 \left(1 + \frac{9\pi\mu R^2 v_0}{24\pi\eta R}\right) = 6\pi\eta R \vec{v}_0 \left(1 + \frac{3Rv_0}{8\nu}\right) = 6\pi\eta R \vec{v}_0 \left(1 + \frac{3\mathcal{K}}{8}\right)$$

On voit que pour  $\mathcal{K} \leq 0,008$  la correction par rapport à la formule de Stokes est très faible (moins de 3 ‰). Il s'agit seulement d'un léger gain de précision.

Cette formule peut être considérée comme la correction au premier ordre en  $\mathcal{K}$  de la formule de Stokes quand le nombre de Reynolds n'est pas nul. De même, la formule de Stokes constitue l'approximation à l'ordre zéro de l'expression exacte de la force qu'exerce le fluide sur la sphère.

## EXERCICE 6

### Paradoxe de Stokes – perte de charge pour un cylindre

Un cylindre fixe de rayon  $R$ , d'axe de révolution  $Oz$ , de longueur infinie afin de considérer le problème invariant par translation le long de celui-ci, est placé dans un fluide incompressible, de viscosité cinématique  $\nu$  et de masse volumique  $\mu$ , présentant à grande distance une vitesse uniforme et constante  $v_0 \vec{u}_z$ .

On se place en régime laminaire stationnaire, sans tenir compte de la pesanteur et on travaille dans le système de coordonnées cylindriques, pour lequel on a :

$$\overline{\text{rot}}(\vec{a}) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1.1. Donner les expressions générales des champs de vitesse et de pression  $\vec{v}(M)$  et  $P(M)$  dans le fluide, déduites des propriétés de symétries.

1.2. On recherche  $\vec{v}(M)$  sous la forme  $\overline{\text{rot}}(A(r, \theta) \vec{u}_z)$ . Justifier ce choix. Peut-on résoudre l'équation du mouvement sans approximation ?

1.3. On se limite à un écoulement de très faible nombre de Reynolds. Quelle simplification mathématique cette hypothèse permet-elle dans l'équation du mouvement ?

1.4. Montrer que le potentiel vecteur du champ de vitesse est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( A \vec{u}_z \right) \right) \right) = \vec{0}.$$

2. Déterminer le potentiel vecteur  $\vec{A}$  très loin du cylindre. On choisira l'expression la plus simple.

3. Du fait du résultat obtenu, on recherche partout une solution de la forme  $A = f(r) \sin \theta$  et, en explicitant la combinaison des quatre rotationnels, on obtient pour  $f$  l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{3}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{3f}{r^4} = 0.$$

3.1. Déterminer  $f(r)$  comme une combinaison linéaire de puissances de  $r$ .

3.2. Montrer que  $r \ln(r)$  est également solution.

3.3. En déduire la forme générale de  $f$ .

4.1. Utiliser les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration. Que constate-t-on malheureusement ?

4.2. Ce résultat surprenant est appelé paradoxe de Stokes. Comment peut-on l'expliquer ?

5. Par une méthode de raccordements asymptotiques, on obtient près du cylindre le potentiel vecteur suivant :

$$\dot{A} = \frac{v_0 R \sin \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{r}{2R} - \frac{R}{2r} - \frac{r}{R} \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right) \vec{u}_z, \text{ avec } \mathcal{K} = \frac{v_0 R}{\nu}.$$

Déterminer le champ de vitesse.

6. Déterminer ensuite le champ de pression. On note  $P_0$  la pression à la surface du cylindre en  $y = R$ .

7.1. En déduire la pression à la surface du cylindre. Comment se répartit-elle ?

7.2. Calculer la somme des forces de pression qu'il subit par unité de longueur suivant  $Oz$ .

7.3. Calculer la contrainte de viscosité à la surface du cylindre en admettant qu'elle s'écrit  $\vec{\sigma} = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{u}_\theta$ . En déduire la force de viscosité que subit le cylindre par unité de longueur suivant  $Oz$ .

7.4. Exprimer la résultante  $\vec{F}_l$  des forces exercées par le fluide sur l'unité de longueur du cylindre.

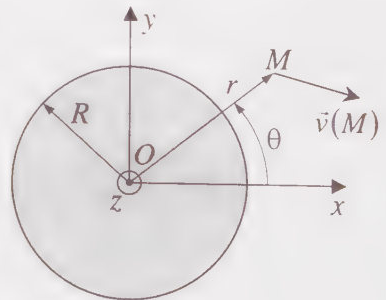
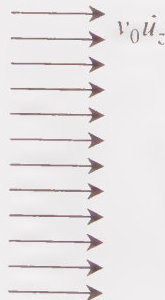
8.1. On définit le coefficient de frottement  $C_x = \frac{F_l}{\pi \mu R v_0^2}$ . L'exprimer en fonction

de  $\mathcal{K}$  seul. Cette relation est la loi de perte de charge.

8.2. Représenter graphiquement (en coordonnées logarithmiques) cette loi ainsi que la loi correspondante pour une sphère (formule de Stokes), avec dans ce cas

$C_z = \frac{2F}{\pi \mu R^2 v_0^2}$  et  $F = 6\pi \eta R v_0$ . Commenter les courbes. On se limite aux écoulements dits rampants, pour lesquels on a  $\mathcal{K} \leq 0,01$ .

1.1. Il y a invariance du problème par translation autour de l'axe  $Oz$  et tous les plans parallèles à  $Oxy$  sont donc des plans de symétrie du problème. L'écoulement autour du cylindre reste alors plan, comme à l'infini, et aucune grandeur scalaire ne dépend de  $z$ . On écrit ainsi :



$$\vec{v}(M) = v_r(r, \theta)\vec{u}_r + v_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad P(M) = P(r, \theta).$$

1.2. Le fluide est incompressible, donc on peut écrire :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}, \quad \text{relation équivalente à } \text{div} \vec{v} = 0.$$

Étant en tout point orthogonal à  $\vec{v}$ , ce champ de vecteur peut être pris colinéaire à  $\vec{u}_z$  et sa composante ne dépend pas de  $z$  du fait de l'invariance suivant cet axe. On écrit donc :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} [A(r, \theta)\vec{u}_z].$$

L'équation du mouvement en régime stationnaire :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}$$

est impossible à résoudre à cause du terme inertiel qui s'écrit ici :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\vec{v}.$$

1.3. Le nombre de Reynolds, qu'on définit ici par  $\mathcal{R} = \frac{v_0 R}{\nu}$ , est l'ordre de grandeur

du rapport  $\frac{\left|\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right|}{\left|\nu \Delta \vec{v}\right|}$  à distance modérée du cylindre. Lorsqu'il est faible devant

1, on néglige le terme inertiel devant le terme de viscosité dans l'équation du mouvement qui s'écrit ainsi :

$$-\frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu} + \nu \Delta \vec{v} \approx \vec{0}$$

et devient linéaire, c'est-à-dire beaucoup plus facile à résoudre.

1.4. On élimine la pression en prenant le rotationnel de cette égalité et en se servant de l'identité  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \Delta$ . On introduit le potentiel vecteur et on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{0} &\approx \overrightarrow{\text{rot}} (\Delta \vec{v}) = \Delta (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) = \Delta (\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})) \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}))) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}))) \\ &= -\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}))). \end{aligned}$$

Il reste effectivement à résoudre :

$$\overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} \left( \overline{\text{rot}} (A \vec{u}_z) \right) \right) \right) = \vec{0}$$

qui est une équation aux dérivées partielles linéaire.

2. Très loin du cylindre, la relation  $\vec{v} = \overline{\text{rot}} \vec{A}$  devient :

$$\vec{v}_0 = v_0 (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \approx \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_\theta \quad \text{et se projette en :}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} = v_0 \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial r} = v_0 \sin \theta.$$

La première équation aux dérivées partielles s'intègre en :

$$A = v_0 r \sin \theta + g(r)$$

et la seconde montre alors que  $g(r) = \text{cte}$ . Comme cette constante est inessentielle (sa valeur n'a aucune influence sur le champ de vitesse), le plus simple est de la prendre nulle et on retient finalement l'expression asymptotique :

$$A = v_0 r \sin \theta \quad \text{pour} \quad r \gg R.$$

3.1. C'est une équation de type Euler (linéaire à termes de même degré) qui admet notamment des puissances de  $r$  comme solutions. On écrit donc  $f = r^f$  et on reporte dans l'équation pour trouver toutes les puissances acceptables. On obtient ainsi :

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)r^{\alpha-4} + 2\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)r^{\alpha-4} - 3\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-4} + 3\alpha r^{\alpha-4} - 3r^{\alpha-4} = 0$$

quel que soit  $r$ , d'où la condition sur  $\alpha$  :

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) + 2\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) - 3\alpha(\alpha-1) + 3\alpha - 3 = 0.$$

Ce polynôme présente la racine évidente 1, ce qui permet la factorisation :

$$(\alpha-1)[\alpha(\alpha-2)(\alpha-3) + 2\alpha(\alpha-2) - 3\alpha + 3] = 0, \quad \text{soit encore :}$$

$$(\alpha-1)[\alpha(\alpha-2)(\alpha-1) - 3\alpha + 3] = 0.$$

On a encore la racine évidente 1, d'où une seconde factorisation :

$$(\alpha-1)^2 [\alpha^2 - 2\alpha - 3] = 0 \quad \text{et finalement :}$$

$$(\alpha-1)^2 (\alpha+1)(\alpha-3) = 0.$$

Comme l'équation différentielle est linéaire, la solution la plus complète est une combinaison linéaire des puissances acceptables et on écrit :

$$f(r) = K_1 r^3 + K_2 r + \frac{K_3}{r}.$$

3.2. Il suffit de calculer les dérivées successives :

$$\frac{d}{dr}[r \ln(r)] = 1 + \ln(r), \quad \frac{d^2}{dr^2}[r \ln(r)] = \frac{1}{r},$$

$$\frac{d^3}{dr^3}[r \ln(r)] = -\frac{1}{r^2}, \quad \frac{d^4}{dr^4}[r \ln(r)] = \frac{2}{r^3}.$$

On reporte alors dans l'équation différentielle :

$$\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r} \times -\frac{1}{r^2} - \frac{3}{r^2} \times \frac{1}{r} + \frac{3}{r^3} \times [1 + \ln(r)] - \frac{3}{r^4} \times r \ln(r) = 0.$$

Elle est bien vérifiée.

3.3. On écrit donc la solution générale :

$$f(r) = K_1 r^3 + K_2 r + \frac{K_3}{r} + K_4 r \ln(r).$$

4.1. Les conditions aux limites sont les suivantes. A la surface du cylindre, la vitesse s'annule :

$$\vec{v} = \overline{\text{rot}}(A \vec{u}_z) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_\theta = \vec{0}, \text{ d'où :}$$

$$\left( \frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_{r=R} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)_{r=R} = 0.$$

Très loin du cylindre, on doit retrouver  $v_0 \vec{u}_x$  :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_\theta = v_0 \vec{u}_x = v_0 (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta).$$

Les conditions à l'infini s'écrivent encore, puisqu'on a déjà l'expression asymptotique de  $A$  :

$$v_0 r = K_1 r^3 + K_2 r + K_4 r \ln(r), \text{ d'où :}$$

$$K_1 = 0, \quad K_2 = v_0 \quad \text{et} \quad K_4 = 0.$$

Celles à la surface s'écrivent :

$$f(R)\cos\theta = 0 \quad \text{et} \quad \sin\theta \left( \frac{df}{dr} \right)_{r=R} = 0$$

quel que soit  $\theta$  et entraînent :

$$v_0 R + \frac{K_3}{R} = 0 \quad \text{et} \quad v_0 - \frac{K_3}{R^2} = 0.$$

Ces deux dernières équations n'ont pas de solution. Les conditions aux limites sont incompatibles entre elles. Ceci n'est mathématiquement possible que parce que le nombre de constantes d'intégration est inférieur au nombre d'équations que fournissent les conditions aux limites. Il s'agit d'un système surdéterminé.

4.2. Les conditions aux limites ont une signification physique et ne peuvent de ce fait être écartées. Leur incompatibilité mutuelle traduit en fait leur incompatibilité avec l'équation du mouvement :

$$-\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu \Delta \vec{v} \approx \vec{0}.$$

Celle-ci a été écrite en supposant le terme inertiel négligeable. C'est donc cette hypothèse qui est fautive. Quel que soit le nombre de Reynolds, il existe toujours une distance au-delà de laquelle le terme inertiel devient prépondérant (Cf. l'exercice précédent pour le cas de la sphère) et la solution obtenue à la fin de la question 3 ne peut pas être retenue jusqu'à l'infini. Il n'est alors pas surprenant que l'utilisation des conditions aux limites à l'infini pour obtenir les constantes d'intégration aboutisse à une aberration.

5. On calcule le rotationnel du potentiel vecteur :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_\theta = \frac{v_0 R \cos\theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{1}{2R} - \frac{R}{2r^2} - \frac{1}{R} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right) \vec{u}_r \\ &\quad - \frac{v_0 R \sin\theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{1}{2R} + \frac{R}{2r^2} - \frac{1}{R} \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{R} \right) \vec{u}_\theta \\ &= \frac{v_0 \cos\theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{1}{2} - \frac{R^2}{2r^2} - \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right) \vec{u}_r - \frac{v_0 \sin\theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{R^2}{2r^2} - \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{2} \right) \vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

6. On utilise l'équation du mouvement à proximité du cylindre pour obtenir le champ de pression :

$$\overline{\text{grad}P} = \eta \Delta \vec{v}.$$

et on calcule les différentes dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} &= -\frac{v_0 \sin \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{1}{2} - \frac{R^2}{2r^2} - \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right) \bar{u}_r + \frac{v_0 \cos \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{1}{2} - \frac{R^2}{2r^2} - \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right) \bar{u}_\theta \\
&\quad - \frac{v_0 \cos \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{R^2}{2r^2} - \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{2} \right) \bar{u}_\theta + \frac{v_0 \sin \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{R^2}{2r^2} - \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{2} \right) \bar{u}_r \\
&= -\frac{v_0 \sin \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \bar{u}_r + \frac{v_0 \cos \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \bar{u}_\theta \\
&= -\frac{v_0}{\ln(\mathcal{K})} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) (\sin \theta \bar{u}_r - \cos \theta \bar{u}_\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} &= -\frac{v_0}{\ln(\mathcal{K})} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) (\cos \theta \bar{u}_r + \sin \theta \bar{u}_\theta + \sin \theta \bar{u}_\theta + \cos \theta \bar{u}_r) \\
&= -\frac{2v_0}{\ln(\mathcal{K})} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) (\cos \theta \bar{u}_r + \sin \theta \bar{u}_\theta),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = \frac{v_0 \cos \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{R^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \bar{u}_r + \frac{v_0 \sin \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{R^2}{r^3} + \frac{1}{r} \right) \bar{u}_\theta,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} = -\frac{v_0 \cos \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{3R^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \bar{u}_r - \frac{v_0 \sin \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{3R^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) \bar{u}_\theta.$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{v} &= \frac{v_0 \cos \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{3R^2}{r^4} \right) \bar{u}_r - \frac{v_0 \sin \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{3R^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) \bar{u}_\theta + \frac{v_0 \cos \theta}{r \ln(\mathcal{K})} \left( \frac{R^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \bar{u}_r \\
&\quad + \frac{v_0 \sin \theta}{r \ln(\mathcal{K})} \left( \frac{R^2}{r^3} + \frac{1}{r} \right) \bar{u}_\theta - \frac{2v_0}{r^2 \ln(\mathcal{K})} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) (\cos \theta \bar{u}_r + \sin \theta \bar{u}_\theta) \\
&= -\frac{2v_0 \cos \theta}{r^2 \ln(\mathcal{K})} \bar{u}_r - \frac{2v_0 \sin \theta}{r^2 \ln(\mathcal{K})} \bar{u}_\theta
\end{aligned}$$

et on intègre les deux équations aux dérivées partielles obtenues par les projections de l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{2\eta v_0 \cos \theta}{r^2 \ln(\mathcal{K})} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{2\eta v_0 \sin \theta}{r^2 \ln(\mathcal{K})}.$$

La première donne :

$$P = \frac{2\eta v_0 \cos \theta}{r \ln(\mathcal{K})} + f(\theta)$$

et, en reportant dans la seconde, on obtient :

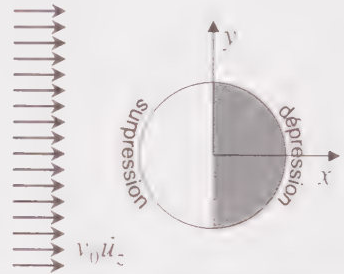
$$\frac{df}{d\theta} = 0, \text{ c'est-à-dire } f(\theta) = \text{cte.}$$

Sachant que  $P = P_0$  pour  $r = R$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$  il vient finalement :

$$P = P_0 + \frac{2\eta v_0 \cos \theta}{r \ln(\mathcal{K})}$$

7.1. A la surface on a ainsi :

$$P = P_0 + \frac{2\eta v_0 \cos \theta}{R \ln(\mathcal{K})}$$



Cette expression n'est acceptable que pour les nombres de Reynolds petits devant 1, puisque c'est sur cette hypothèse que repose le calcul du champ de vitesse. Par conséquent  $\ln(\mathcal{K})$  est négatif. On

constate alors qu'il y a surpression sur la face directement exposée au jet et dépression sur l'autre face. Les forces de pression entraînent logiquement le cylindre dans le sens de l'écoulement.

7.2. On somme les forces élémentaires sur une longueur unité suivant  $Oz$  de la surface latérale du cylindre :

$$\begin{aligned} \vec{F}_\pi &= - \int_{\text{cylindre}} P d\vec{S} = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 \left( P_0 + \frac{2\eta v_0 \cos \theta}{R \ln(\mathcal{K})} \right) R d\theta dz \vec{u}_r \\ &= - \int_0^{2\pi} \left( P_0 + \frac{2\eta v_0 \cos \theta}{R \ln(\mathcal{K})} \right) R d\theta \vec{u}_r \\ &= -P_0 R \int_0^{2\pi} d\theta \vec{u}_r - \frac{2\eta v_0}{\ln(\mathcal{K})} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \vec{u}_r \\ &= -P_0 R \int_0^{2\pi} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) d\theta - \frac{2\eta v_0}{\ln(\mathcal{K})} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \cos \theta d\theta \\ &= - \frac{2\eta v_0}{\ln(\mathcal{K})} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \cos \theta d\theta \\ &= - \frac{2\eta v_0}{\ln(\mathcal{K})} \pi \vec{u}_x. \end{aligned}$$

Il s'agit malgré la notation d'une force par unité de longueur, la force totale n'ayant pas de sens pour un cylindre infini <sup>4</sup>.

7.2. On a sur la surface :

$$\vec{\sigma} = \eta \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)_{r=R} \vec{u}_\theta = \frac{\eta v_0 \sin \theta}{\ln(\mathcal{K})} \left( \frac{R^2}{R^3} + \frac{1}{R} \right) \vec{u}_\theta = \frac{2\eta v_0 \sin \theta}{R \ln(\mathcal{K})} \vec{u}_\theta$$

et on obtient pour la force de viscosité par unité de longueur :

$$\begin{aligned} \vec{F}_v &= \int_{\text{cylindre}} \vec{\sigma} dS = \frac{2\eta v_0}{R \ln(\mathcal{K})} \int_{z=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin \theta R d\theta dz \vec{u}_\theta \\ &= \frac{2\eta v_0}{R \ln(\mathcal{K})} \int_0^{2\pi} \sin \theta R d\theta \vec{u}_\theta = \frac{2\eta v_0}{\ln(\mathcal{K})} \int_0^{2\pi} \sin \theta (\cos \theta \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_x) d\theta \\ &= -\frac{2\eta v_0}{\ln(\mathcal{K})} \pi \vec{u}_x. \end{aligned}$$

On retrouve la même expression que pour la force de pression.

7.3. Au total on a :

$$\vec{F}_l = \vec{F}_\pi + \vec{F}_v = -\frac{4\pi\eta v_0}{\ln(\mathcal{K})} \vec{u}_x.$$

Étant donné le signe de  $\ln(\mathcal{K})$  la force est dans le bon sens. Elle tend à entraîner le cylindre vers l'aval.

8.1. On obtient pour le coefficient de frottement :

$$C_x = \frac{F}{\pi\mu R v_0^2} = -\frac{4\pi\eta v_0}{\pi\mu R v_0^2 \ln(\mathcal{K})} = -\frac{4\nu}{R v_0 \ln(\mathcal{K})} = -\frac{4}{\mathcal{K} \ln(\mathcal{K})}.$$

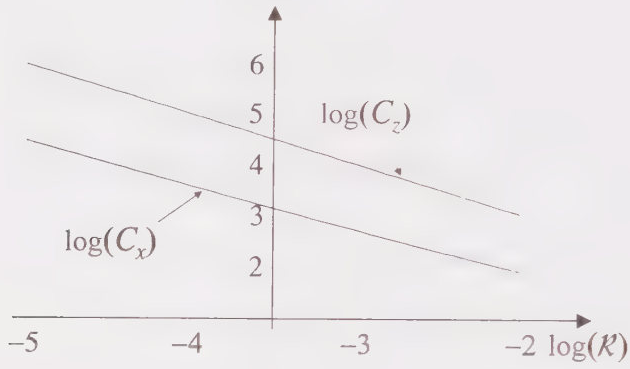
8.2. Pour la sphère, il vient :

$$C_z = \frac{2F}{\pi\mu R^2 v_0^2} = \frac{12\pi\eta R v_0}{\pi\mu R^2 v_0^2} = \frac{12\nu}{R v_0} = \frac{12}{\mathcal{K}}.$$

Les courbes sont représentées page suivante en échelle logarithmique. Le coefficient de frottement du cylindre apparaît systématiquement plus faible que celui de la sphère. En écoulement rampant, le fluide entraîne plus efficacement une sphère qu'un cylindre ou, d'après le principe de l'action et de la réaction, celui-ci s'oppose moins à l'écoulement que la sphère. C'est le comportement inverse de celui observé

<sup>4</sup> Si on le prenait fini, on ne pourrait pas résoudre l'équation même approximativement, car on perdrait l'invariance par translation suivant  $Oz$ .

en régime turbulent puisqu'on a alors  $C_x \approx 1$  et  $C_z \approx 0,4$  (impossible à faire apparaître sur le graphique car  $\ln(\mathcal{K})$  est supérieur à 3).

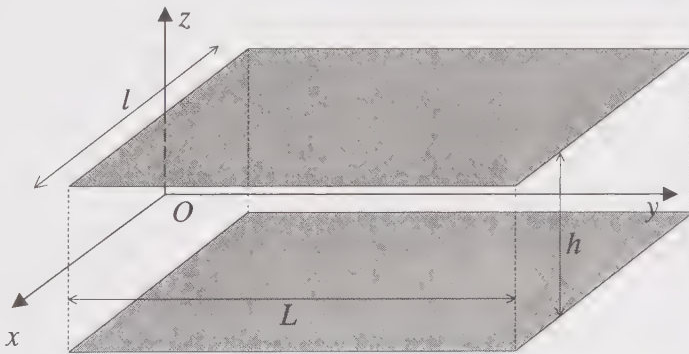


# ÉCOULEMENTS LAMINAIRES NON STATIONNAIRES

## EXERCICE 1

### Régime transitoire d'un écoulement

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , est placé au repos entre deux plaques planes rectangulaires parallèles, de côtés  $L$  et  $l \gg L$ , séparées par une distance  $h$ . On utilise le trièdre  $Oxyz$  dont les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont respectivement parallèles aux côtés des plaques de longueurs  $l$  et  $L$ , le plan  $Oxy$  étant à mi-distance de celles-ci et l'origine  $O$  au centre d'un rectangle de côtés  $h$  et  $l$ . La pression du fluide est uniforme et égale à  $P_0$ . Brutale­ment, à l'origine des dates, on impose une surpression constante  $\Delta P$  sur la face d'équation  $y = 0$  tout en maintenant en permanence  $P_0$  en  $y = L$ . On se propose d'étudier la phase qui précède le régime stationnaire. On suppose l'écoulement laminaire, on néglige les effets de bord le long de  $x'x$  et on ne tient pas compte de l'action de la pesanteur.



1. Quelles sont les formes générales de  $\vec{v}(M)$  et  $P(M)$  ?
2. Montrer que la vitesse et la pression sont solutions des deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} = f(t).$$

3. En déduire l'expression de la pression dans la conduite.

4. Montrer qu'une vitesse de la forme  $v = v_p(z) + v_t(z, t)$ , avec deux fonctions vérifiant les équations :

$$\frac{d^2 v_p}{dz^2} = -\frac{\Delta P}{\mu \nu L} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_t}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\eta}{\mu}$$

et les conditions aux limites et initiales :

$$v_p\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0, \quad v_t\left(\pm \frac{h}{2}, t\right) = 0, \quad v_p(z) + v_t(z, 0) = 0$$

est une solution acceptable pour la vitesse.

5. Déterminer  $v_p(z)$ .

6. On cherche  $v_t(z, t)$  sous la forme  $F(z)G(t)$ . Montrer qu'on obtient ainsi :

$$v_t(z, t) = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathcal{A}_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) e^{-n^2 \pi^2 \nu t / h^2}$$

après avoir préalablement remarqué que  $v_t$  doit être une fonction paire de  $z$ .

7. Calculer  $\mathcal{A}_n$  à partir des conditions initiales. Pour cela, on cherchera les coefficients de Fourier de la fonction de  $z$  définie par :

$$-f(z) = -v_p(z) \quad \text{pour } z \text{ compris entre } 0 \text{ et } \frac{h}{2},$$

$$-f(z) = \frac{\Delta P}{2\eta L} \left( 2hz - z^2 - \frac{3h^2}{4} \right) \quad \text{pour } z \text{ compris entre } \frac{h}{2} \text{ et } h,$$

-  $f$  est paire et périodique de période  $2h$ .

On donne :

$$\int_0^{h/2} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz = \frac{h^3}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2h^3}{n^3 \pi^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$\int_{h/2}^h \left( 2hz - z^2 - \frac{3h^2}{4} \right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz = -\frac{h^3}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2h^3}{n^3 \pi^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

8. Exprimer  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_3$  et expliquer pourquoi on peut se limiter à :

$$v_t(z, t) \approx \mathcal{A}_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{-\pi^2 \nu t / h^2}.$$

9.1. Donner l'expression de  $v(z, t)$  et en déduire une durée caractéristique  $\tau$  d'installation du régime stationnaire. Faire l'application numérique pour un système d'épaisseur 1 cm dans lequel circule de l'eau ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ).

9.2. Représenter le profil de vitesse pour  $t = \frac{\tau}{4}$ ,  $t = \tau$  et  $t \rightarrow +\infty$ .

1. Du fait de la nature laminaire de l'écoulement, les lignes de courant sont parallèles à l'axe  $Oy$ , « fuyant » la surface de surpression. Ensuite, du fait de l'invariance supposée par translation le long de  $x'x$ , le module de la vitesse et la pression ne dépendent pas de  $x$ . On écrit donc :

$$\vec{v}(M) = v(y, z, t) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad P(M) = P(y, z, t).$$

2. L'équation de continuité se réduit ici à :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

La vitesse ne dépend pas de  $y$ , ce qui traduit la conservation du débit volumique dans une conduite à section  $LL$  uniforme. Il nous reste  $\vec{v}(M) = v(z, t) \vec{u}_y$ .

Le terme inertiel de l'équation du mouvement est alors identiquement nul :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial y}\right) v(z, t) \vec{u}_y = \vec{0}$$

et l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}P}}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}.$$

Elle est linéaire et peut donc être résolue. En la projetant sur les axes du trièdre cartésien, on obtient :

$$0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \text{ sur } \vec{u}_x, \quad 0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \text{ sur } \vec{u}_z \text{ et :}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \text{ sur } \vec{u}_y.$$

Les deux premières équations montrent que la pression ne dépend que de  $y$  et de  $t$ . On a donc intérêt à écrire la troisième sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y},$$

ce qui représente l'égalité d'une fonction de  $z$  et de  $t$  (à gauche) et d'une fonction de  $y$  et de  $t$  (à droite) quels que soient  $y$ ,  $z$  et  $t$ . Donc  $\frac{\partial P}{\partial y}$  ne peut dépendre de  $y$  et le membre de gauche ne peut dépendre de  $z$ . Ceci montre que les deux membres de l'équation sont en fait une même fonction de la seule variable  $t$  et on a donc :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} = f(t).$$

3. On peut intégrer l'équation de la pression :

$$P = -\mu f(t)y + g(t).$$

Avec les conditions aux limites en  $y = 0$  et en  $y = L$  qui s'écrivent :

$$P_0 + \Delta P = g(t) \quad \text{et} \quad P_0 = -\mu f(t)L + g(t),$$

on obtient finalement :

$$P = -\frac{\Delta P}{L}y + P_0 + \Delta P.$$

La pression ne dépend pas du temps et le régime transitoire ne porte par conséquent que sur la vitesse, ce qu'on ne pouvait prévoir a priori.

4. L'équation de la vitesse s'écrit maintenant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\Delta P}{\mu L}.$$

Elle est linéaire, ce qui signifie qu'on peut en chercher la solution complète sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions partielles, pourvu que la superposition des conditions initiales et aux limites de celles-ci corresponde aux conditions initiales et aux limites du vrai problème. Or, il suffit de sommer les deux équations données dans l'énoncé, après avoir multiplié la première par  $-v$ , pour vérifier que la fonction  $v(z, t) = v_p(z) + v_t(z, t)$  est solution de l'équation ci-dessus. Les conditions aux li-

mites et initiales sur cette fonction, soit  $v\left(\pm \frac{h}{2}, t\right) = 0$  et  $v(z, 0) = 0$  correspondent

de plus aux conditions que doit respecter la vitesse dans le système. La forme proposée est donc une solution acceptable.

5. L'équation différentielle :

$$\frac{d^2 v_p}{dz^2} = -\frac{\Delta P}{\eta L} \quad \text{s'intègre immédiatement :}$$

$$v_p = -\frac{\Delta P}{2\eta L} z^2 + Kz + K'.$$

En écrivant les deux conditions aux limites  $v_p\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0$ , soit :

$$0 = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \frac{h^2}{4} + K \frac{h}{2} + K' \quad \text{et} \quad 0 = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \frac{h^2}{4} - K \frac{h}{2} + K'$$

on voit en faisant la différence que  $K$  est nul et ensuite que  $K' = \frac{\Delta P}{2\eta L} \frac{h^2}{4}$ . Il vient finalement :

$$v_p(z) = \frac{\Delta P}{2\eta L} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

6. Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles s'écrit :

$$F \frac{dG}{dt} - \nu G \frac{d^2 F}{dz^2} = 0, \quad \text{soit en séparant les variables :}$$

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = \frac{\nu}{F} \frac{d^2 F}{dz^2}.$$

Il s'agit encore de l'égalité entre deux fonctions de variables indépendantes et on écrit par conséquent :

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = \frac{\nu}{F} \frac{d^2 F}{dz^2} = \text{cte} = -K^2.$$

On note  $-K^2$  la constante car elle est nécessairement négative. Sinon, la fonction  $G$ , qui vérifie l'équation  $\frac{dG}{dt} - \text{cte} G = 0$ , divergerait au cours du temps et c'est impossible. La constante  $K$  est réelle et on la suppose tout d'abord non nulle. On obtient alors :

$$\frac{dG}{dt} + K^2 G = 0 \quad \text{soit} \quad G(t) = A e^{-K^2 t},$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{K^2 F}{\nu} = 0 \quad \text{soit} \quad F(z) = B \cos\left(\frac{Kz}{\sqrt{\nu}}\right) + C \sin\left(\frac{Kz}{\sqrt{\nu}}\right).$$

Or, la symétrie de l'écoulement fait qu'on doit avoir  $v(z, t) = v(-z, t)$ . Comme  $v_p$  est déjà une fonction paire de  $z$ , il en découle que  $v_t$  doit être lui aussi une fonction paire de  $z$ . Il vient donc nécessairement  $C = 0$ , d'où :

$$F(z) = B \cos\left(\frac{Kz}{\sqrt{\nu}}\right).$$

Avec les conditions aux limites :

$$0 = F\left(\pm \frac{h}{2}\right) G(t) = B \cos\left(\pm \frac{Kh}{2\sqrt{\nu}}\right) e^{-Kt} \quad \text{quel que soit } t$$

on a immédiatement,  $B$  ne pouvant être nul (sinon il n'y a plus de solution)

$$\frac{Kh}{2\sqrt{\nu}} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{avec } n \text{ entier.}$$

On en déduit :

$$K = \frac{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}}{h} \quad \text{et par conséquent :}$$

$$F(z) = B \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right).$$

On obtient ensuite pour l'autre fonction :

$$G(t) = A e^{-(2n+1)^2 \pi^2 \nu t / h^2}.$$

Mais l'équation dont est solution  $v_t$  ne permet pas a priori de choisir une valeur de  $n$  plutôt qu'une autre. Comme elle est linéaire, la solution la plus générale est une combinaison linéaire de toutes les solutions partielles associées à un entier  $n$  et on écrit ainsi :

$$v_t(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 \pi^2 \nu t / h^2}.$$

après avoir baptisé  $C_n$  le produit  $AB$  propre à chaque valeur de  $n$ . On effectue ensuite un regroupement, en notant  $u = \frac{\pi^2 \nu t}{h^2}$  afin d'alléger :

$$\begin{aligned} v_t(z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 u} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 u} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} \cos\left(\frac{(1-2n)\pi z}{h}\right) e^{-(1-2n)^2 u} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 u} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n-1)^2 u} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 u}. \end{aligned}$$

On fait un changement d'indice dans la première somme :

$$v_t(z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{-n-1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 u} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 u}$$

et on regroupe les deux :

$$\begin{aligned} v_t(z, t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (C_{-n-1} + C_n) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 u} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} D_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{h}\right) e^{-(2n+1)^2 \pi^2 \nu t / h^2}. \end{aligned}$$

La sommation ne contient que des « harmoniques » impairs.

Il reste à déterminer la solution correspondant à  $K$  nul. On a alors :

$$G(t) = \alpha \quad \text{et} \quad F(z) = \beta z + \gamma, \quad \text{avec } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ constantes.}$$

En annulant  $FG$  pour  $z = \pm \frac{h}{2}$ , on obtient  $\beta$  et  $\gamma$  nuls. Donc cette solution est sans intérêt. Finalement on retient en rebaptisant  $n$  l'entier impair  $2n+1$  et  $\mathcal{A}_n$  le coefficient  $D_{\frac{n-1}{2}}$  :

$$v_t(z, t) = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathcal{A}_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) e^{-n^2 \pi^2 \nu t / h^2}.$$

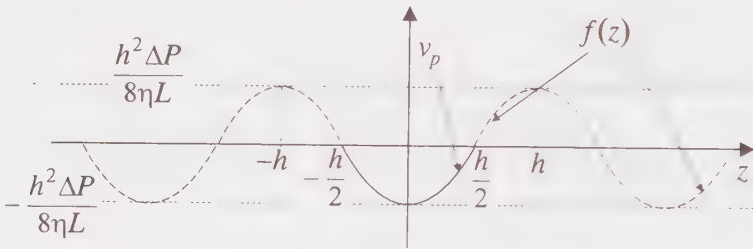
7. A l'instant initial, le fluide est encore au repos et on a donc  $v_t(z, 0) + v_p(z) = 0$ , soit :

$$v_l(z,0) = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathcal{A}_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) = -v_p(z) = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$

On reconnaît l'expression d'une série de Fourier, mais elle n'est pas complète puisqu'il manque les coefficients d'indice pair. Pour déterminer  $\mathcal{A}_n$ , il faut prolonger la

fonction  $z \rightarrow \frac{\Delta P}{2\eta L} \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)$  en la maintenant paire (puisqu'elle se décompose en

somme de cosinus) et périodique de période  $2h$  (du fait de l'expression de l'argument du cosinus) et en s'arrangeant pour que les  $\mathcal{A}_n$  d'indice pair soient nuls.



D'après l'énoncé, la fonction  $f$  satisfait les deux premières propriétés et, puisqu'elle est donnée, elle doit vraisemblablement satisfaire aussi la dernière. Elle est représentée ci-dessus et est constituée d'une juxtaposition d'arcs de paraboles identiques,  $2hz - z^2 - \frac{3h^2}{4}$  n'étant que la fonction  $z^2 - \frac{h^2}{4}$  « redressée » et translaturée de  $h$  suivant l'axe des abscisses.

Calculons donc les coefficients de Fourier de  $f$  :

$$\mathcal{C}_n = \frac{2}{2h} \int_{-h}^h f(z) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz = \frac{2}{h} \int_0^h f(z) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz.$$

Du fait de sa parité, on a divisé par deux l'intervalle d'intégration. Puis on explicite :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n &= \frac{2}{h} \int_0^{h/2} \frac{\Delta P}{2\eta L} \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz \\ &\quad + \frac{2}{h} \int_{h/2}^h \frac{\Delta P}{2\eta L} \left(2hz - z^2 - \frac{3h^2}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz \\ &= \frac{\Delta P}{\eta h L} \int_0^{h/2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz \\ &\quad + \frac{\Delta P}{\eta h L} \int_{h/2}^h \left(2hz - z^2 - \frac{3h^2}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz. \end{aligned}$$

D'après les données de l'énoncé, on a directement :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_n &= \frac{\Delta P}{\eta h L} \left[ \frac{h^3}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2h^3}{n^3 \pi^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{h^3}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2h^3}{n^3 \pi^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{4h^2 \Delta P}{\eta L \pi^3 n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

On constate qu'effectivement  $\mathcal{C}_n$  est nul pour les indices pairs. C'est aussi le cas pour  $\mathcal{C}_0$  car il est clair sur la figure de la page précédente que  $f$  est une fonction de moyenne nulle.

Finalement la fonction donnée respecte toutes les conditions et ses coefficients de Fourier  $\mathcal{C}_n$  s'identifient aux  $\mathcal{A}_n$ .

8. L'exposant du terme temporel varie comme  $-n^2$  et le coefficient de Fourier varie quasiment comme  $\frac{1}{n^3}$ , la convergence de la série étant rapide parce que la fonction créée par prolongement est continue. De ce fait, les harmoniques de la série de Fourier représentant  $v_t$  sont des fonctions très rapidement négligeables. On peut donc tronquer la série sans faire une grande erreur. Pour les deux premiers coefficients on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= -\frac{4h^2 \Delta P}{\eta L \pi^3} \approx -0,1290 \frac{h^2 \Delta P}{\eta L}, \\ \mathcal{A}_3 &= \frac{4h^2 \Delta P}{27\eta L \pi^3} \approx 0,0048 \frac{h^2 \Delta P}{\eta L}.\end{aligned}$$

On constate que le premier harmonique a une amplitude vingt sept fois inférieure à celle du fondamental. Avec la décroissance temporelle beaucoup plus rapide, du fait d'une durée caractéristique d'amortissement neuf fois plus faible, il n'y a pas à hésiter pour ne retenir que le premier terme de la série.

9.1. On écrit ainsi :

$$\begin{aligned}v(z, t) &\approx v_p(z) + \mathcal{A}_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{-\pi^2 vt/h^2} \\ &= \frac{\Delta P}{2\eta L} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) - \frac{4h^2 \Delta P}{\pi^3 \eta L} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{-\pi^2 vt/h^2} \\ &= \frac{h^2 \Delta P}{2\eta L} \left[ \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} - \frac{8}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{-\pi^2 vt/h^2} \right].\end{aligned}$$

Le profil de vitesse est ainsi modulé dans le temps par une fonction sinusoïdale maximale au centre de la conduite et nulle sur les bords, d'allure globalement semblable à une parabole.

On peut prendre comme durée caractéristique :

$$\tau = \frac{h^2}{\pi^2 \nu},$$

c'est-à-dire la valeur de  $t$  qui donne un argument  $-1$  dans l'exponentielle. Le régime stationnaire s'installe d'autant plus rapidement que la conduite est de faible hauteur.

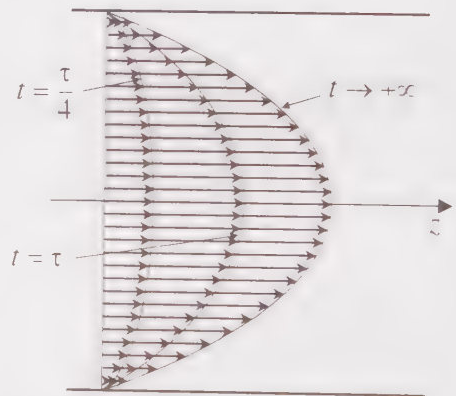
On obtient numériquement :

$$\tau = \frac{(5 \cdot 10^{-3})^2}{10^{-6} \pi^2} \approx 2,53 \text{ s.}$$

durée aisément mesurable.

9.2. Les trois profils sont représentés ci-contre. On constate qu'au bout d'une durée  $\tau$  la vitesse a atteint environ les deux tiers de sa valeur en régime stationnaire. Il n'est donc pas encore bien établi. Il faut attendre quelques  $\tau$  (l'infini rigoureusement). Pour par exemple  $5\tau$ , l'amplitude du terme dépendant du temps est divisée par  $e^5 \approx 148$ .

Le profil de vitesse ne devient rigoureusement parabolique qu'au bout d'une durée infinie mais, étant donnée l'allure du terme temporel, il apparaît quasiment parabolique dès le départ.



## EXERCICE 2

### Couplage par viscosité

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , est placé entre deux cylindres creux coaxiaux, d'axe  $Oz$ , de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), de même longueur  $L$  et de même moment d'inertie  $I$  par rapport à  $Oz$ . On se place dans un premier temps en régime stationnaire, les deux cylindres ayant des vitesses angulaires de rotation respectives  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

On suppose le problème invariant par translation le long de  $Oz$  (on exclut les effets de bord sur les faces supérieure et inférieure de chaque cylindre) et on ne tient pas compte de la pesanteur. Un point du fluide est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . L'écoulement étant laminaire, on écrit le champ de vitesse sous la forme  $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_\theta$ .

On rappelle par ailleurs qu'en coordonnées cylindriques le laplacien s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et qu'une équation différentielle linéaire de la forme  $\sum_k a_k r^k f^{(k)}(r) = 0$ ,  $f^{(k)}$  étant la dérivée  $k$ -ième de la fonction  $f$ , admet pour solutions élémentaires des puissances de  $r$  (équation différentielle dite d'Euler).

1. Justifier l'expression adoptée pour  $\vec{v}$ . Comment s'écrit le champ de pression ?

2. Quelles sont les conditions aux limites que doit vérifier  $\vec{v}$  ?

3. Écrire l'équation du mouvement et la projeter sur la base cylindrique.

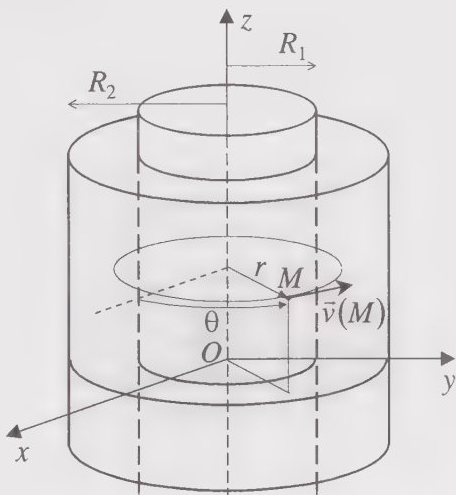
4.1. Déterminer le champ de vitesse.

4.2. La viscosité du fluide n'intervient pas explicitement dans son expression. Peut-on en conclure que la solution serait la même pour un fluide parfait ?

5. Sans calculer le champ de pression, expliquer mathématiquement et physiquement pourquoi la pression exercée sur le cylindre extérieur est plus élevée que celle exercée sur l'intérieur.

6.1. On admet que la contrainte de viscosité s'écrit  $\sigma = \eta \left( \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)$ ,  $\eta$  étant la viscosité dynamique du fluide. Calculer le moment en  $O$   $\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}$  des forces de frottement exercées par le fluide sur le cylindre intérieur.

6.2. Calculer de même le moment  $\vec{\mathcal{M}}_O^{(2)}$  des forces de frottement sur le cylindre extérieur.



On se place maintenant en régime variable, mais suffisamment lentement pour que tous les résultats précédents soient encore acceptables et le système cylindres + fluide est supposé isolé.

7.1. Quelle est l'évolution du mouvement des cylindres ? On demande une réponse qualitative.

7.2. Écrire les équations du mouvement des deux cylindres. On posera pour alléger  $\tau = \frac{\eta(R_2^2 - R_1^2)}{8\pi\eta LR_1^2 R_2^2}$ .

7.3. Donner les expressions de  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$  sachant qu'à l'instant initial on a  $\Omega_1 = \Omega_{10}$  et  $\Omega_2 = \Omega_{20}$ .

7.4. Représenter graphiquement (sur un même graphe) les deux fonctions avec par exemple  $\Omega_{10} > \Omega_{20}$ . Décrire l'état final du système.

8. Faire un bilan d'énergie pour l'ensemble des deux cylindres entre l'état initial du système et l'état final.

9. Quel peut être l'intérêt pratique d'un tel système ? Que faut-il prévoir ?

1. L'écoulement est laminaire, donc régulier, et les lignes de courant doivent « suivre » la géométrie des surfaces solides, d'où l'orientation du vecteur vitesse. Ensuite, le problème est invariant par rotation autour de  $Oz$  et par hypothèse invariant par translation le long du même axe. Donc aucune grandeur scalaire ne doit dépendre des coordonnées  $\theta$  et  $z$ . On arrive ainsi à l'expression proposée. Notons en particulier qu'elle vérifie automatiquement l'équation de continuité :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

et il est donc inutile de l'écrire pour rechercher la solution du problème.

Les mêmes invariances imposent d'autre part un champ de pression de la forme  $P(M) = P(r)$ .

2. Le fluide visqueux adhère aux parois solides. On doit donc retrouver à la surface des cylindres leur propre vitesse :

$$\vec{v}(r = R_1) = \Omega_1 R_1 \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{v}(r = R_2) = \Omega_2 R_2 \vec{u}_\theta.$$

3. En régime stationnaire et en ne tenant pas compte de la pesanteur, l'équation du mouvement se limite à :

$$\left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}.$$

Cette fois, les symétries du problème ne permettent pas d'annuler le terme inertiel et l'équation reste non linéaire. Ce terme s'écrit en effet :

$$\left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right)(v(r)\vec{u}_\theta) = \frac{v^2}{r} \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r,$$

et les deux autres :

$$\overline{\text{grad}P} = \frac{dP}{dr} \vec{u}_r,$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (v(r)\vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_\theta + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{u}_\theta}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_\theta - \frac{v}{r^2} \vec{u}_\theta = \left( \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} \right) \vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

On obtient ainsi les deux projections sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  :

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0.$$

4.1. La seconde équation est de type Euler (linéaire à coefficients tels que la somme ordre + degré reste constante) et a pour solution une combinaison linéaire de puissances de  $r$ . Posant  $v = r^\alpha$ , on obtient l'équation :

$$\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + \alpha r^{\alpha-2} - r^{\alpha-2} = 0 = (\alpha^2 - 1)r^{\alpha-2}$$

qui donne  $\alpha = \pm 1$ . On aboutit ainsi à  $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$  et on détermine les deux constantes d'intégration grâce aux conditions aux limites :

$$AR_1 + \frac{B}{R_1} = \Omega_1 R_1 \quad \text{et} \quad AR_2 + \frac{B}{R_2} = \Omega_2 R_2.$$

On obtient par différence, après avoir divisé chaque équation par le rayon qu'elle contient :

$$B = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}} = R_1^2 R_2^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_1^2 - R_2^2} \quad \text{puis :}$$

$$A = \Omega_1 - \frac{B}{R_1^2} = \Omega_1 - R_2^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}.$$

Il vient enfin pour le champ de vitesse :

$$v = Ar + \frac{B}{r} = \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} r + \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_1^2 - R_2^2} \frac{R_1^2 R_2^2}{r}.$$

4.2. La viscosité n'intervient pas et on pourrait penser que la solution reste applicable pour un fluide parfait. Toutefois, c'est le caractère visqueux du fluide qui a imposé les conditions aux limites. Dans le cas d'un fluide parfait, il n'y a pas de frottement sur les parois et il peut glisser librement. On n'aurait donc pas eu besoin d'annuler la vitesse sur les cylindres et la solution la plus évidente est alors  $\vec{v} = \vec{0}$ . N'étant pas entraîné par la rotation des cylindres, le fluide parfait reste au repos s'il l'était initialement. Mais il peut aussi se mouvoir avec un champ de vitesse orthoradial arbitraire puisqu'il n'y a pas de frottement interne.

5. L'autre équation :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr}$$

montre que  $P$  est une fonction monotone croissante de  $r$ . La pression est donc maximale sur la paroi du plus grand cylindre. Physiquement, on peut remarquer que la rotation du fluide crée une force centrifuge qui tendrait à l'accumuler sur la paroi intérieure du cylindre extérieure s'il était compressible. Pour compenser cette force, la résultante des forces de pression exercées sur une particule fluide doit être centripète, ce qui oblige la pression à croître monotonement avec  $r$ .

6.1. Sur la surface du cylindre intérieur en contact avec le fluide, il faut calculer la contrainte en prenant la variable par rapport à laquelle on dérive orientée vers l'extérieur (toujours dans le sens système subissant la contrainte  $\rightarrow$  système exerçant la contrainte). Il s'agit donc de  $r$  et on écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= +\eta \left[ \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r=R_1} - \frac{v(R_1)}{R_1} \right] = \eta \left[ \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2} \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_1^2 - R_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_1} \left( \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} R_1 + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1} \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_1^2 - R_2^2} \right) \right] \\ &= 2\eta R_2^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}. \end{aligned}$$

Cette contrainte est tangentielle, donc portée ici par  $\vec{u}_\theta$ . On somme ensuite sur la surface latérale  $S_1$  du cylindre les moments élémentaires :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)} &= \int_{S_1} \overline{OM} \wedge \sigma_1 \vec{u}_\theta dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=z_0}^{z_0+L} (R_1 \vec{u}_r + z \vec{u}_z) \wedge 2\eta R_2^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \vec{u}_\theta R_1 d\theta dz \\ &= 2\eta R_2^2 R_1 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=z_0}^{z_0+L} (R_1 \vec{u}_z - z \vec{u}_r) d\theta dz.\end{aligned}$$

Le moment résultant est suivant  $\vec{u}_z$  du fait de la symétrie cylindrique (de toute manière l'intégration de  $\vec{u}_r$  sur la variable  $\theta$  donne un résultat nul) et on calcule seulement :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)} &= 2\eta R_2^2 R_1 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=z_0}^{z_0+L} R_1 \vec{u}_z d\theta dz \\ &= 2\eta R_2^2 R_1^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} L \vec{u}_z \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi\eta L R_2^2 R_1^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \vec{u}_z.\end{aligned}$$

6.2. Sur l'autre cylindre, la contrainte doit être calculée en orientant la variable de dérivation dans l'autre sens, soit  $-r$ , d'où un changement de signe :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= -\eta \left[ \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r=R_2} - \frac{v(R_2)}{R_2} \right] = -\eta \left[ \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2} \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_1^2 - R_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_2} \left( \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} R_2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2} \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_1^2 - R_2^2} \right) \right] \\ &= -2\eta R_1^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}.\end{aligned}$$

Le moment résultant est encore suivant  $\vec{u}_z$  du fait de la symétrie cylindrique. On écrit donc directement :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O^{(2)} &= \int_{S_1} \overline{OM} \wedge \sigma_2 \vec{u}_\theta dS \\ &= - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=z_0}^{z_0+L} (R_2 \vec{u}_r + z \vec{u}_z) \wedge 2\eta R_1^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \vec{u}_\theta R_2 d\theta dz \\ &= -2\eta R_1^2 R_2^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \vec{u}_z \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=z_0}^{z_0+L} d\theta dz = -4\pi\eta L R_1^2 R_2^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \vec{u}_z.\end{aligned}$$

7.1. Chaque cylindre est soumis à un moment de forces qui s'oppose à sa rotation relativement à l'autre (le moment  $\vec{\mathcal{M}}_O^{(i)}$  est de la forme  $\text{cte}(\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i)$  avec une cte positive). Donc les deux vont évoluer dans le sens d'une égalisation de leurs vitesses angulaires. Par ailleurs, les deux moments de force sont égaux et opposés et ont ainsi une somme nulle, ce qui signifie que le moment cinétique total des deux

cylindres se conserve. On va donc observer un échange de moment cinétique entre les deux, sans perte globale de moment total.

7.2. On utilise le théorème du moment cinétique pour un système en rotation autour d'un axe fixe. Pour le premier cylindre on a :

$$;j \frac{d\vec{\Omega}_1}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O^{(1)} = 4\pi\eta LR_2^2 R_1^2 \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \vec{u}_z,$$

soit l'équation scalaire :

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{4\pi\eta LR_2^2 R_1^2}{j} \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\tau}.$$

On voit ainsi que la constante  $\tau$  est homogène à un temps.

On déduit immédiatement pour le second cylindre une équation semblable, en changeant seulement le signe du second membre :

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2\tau}.$$

7.3. Il s'agit de deux équations différentielles couplées que l'on résout très rapidement en faisant leur somme et leur différence :

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + \Omega_2) = 0, \text{ soit } \Omega_1 + \Omega_2 = \text{cte}.$$

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\tau} = 0, \text{ soit } \Omega_1 - \Omega_2 = \text{cte}' \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Les conditions initiales donnant :

$$\text{cte} = \Omega_{10} + \Omega_{20} \text{ et } \text{cte}' = \Omega_{10} - \Omega_{20}.$$

on obtient finalement :

$$\Omega_1(t) = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} + \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} = \frac{\Omega_{10} + \Omega_{20}}{2} + \frac{\Omega_{10} - \Omega_{20}}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

$$\Omega_2(t) = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} - \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} = \frac{\Omega_{10} + \Omega_{20}}{2} - \frac{\Omega_{10} - \Omega_{20}}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

7.4. Les vitesses angulaires tendent vers la même limite :

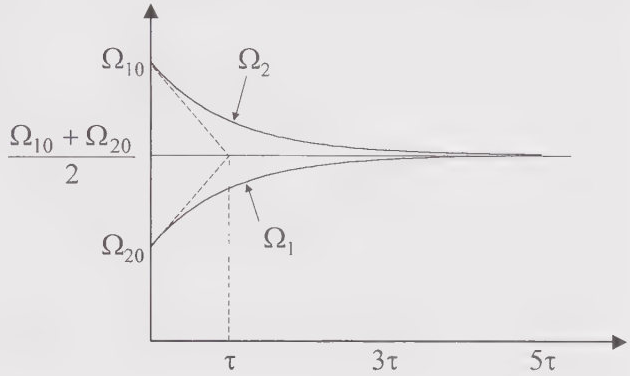
$$\Omega_\infty = \frac{\Omega_{10} + \Omega_{20}}{2}$$

et chaque cylindre présente une même variation totale de vitesse angulaire en valeur absolue, ce qui traduit la conservation du moment cinétique total des cylindres.

Les deux contraintes de viscosité finissent par s'annuler avec le temps et les transferts de mouvement d'un cylindre à l'autre cessent définitivement. En pratique, quelques  $\tau$  suffisent et le champ de vitesse dans le fluide devient alors :

$$v = \frac{\Omega_\infty R_1^2 - \Omega_\infty R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} r = \Omega_\infty r.$$

On constate que le système complet finit par tourner comme un solide parfait unique.



8. L'énergie cinétique initiale des cylindres s'écrit :

$$\mathcal{E}_{ci} = \frac{J\Omega_{10}^2}{2} + \frac{J\Omega_{20}^2}{2} = \frac{J}{2}(\Omega_{10}^2 + \Omega_{20}^2).$$

Sa valeur finale est :

$$\mathcal{E}_{cf} = \frac{J\Omega_\infty^2}{2} + \frac{J\Omega_\infty^2}{2} = J\left(\frac{\Omega_{10} + \Omega_{20}}{2}\right)^2 = \frac{J}{2}\left(\frac{\Omega_{10}^2 + \Omega_{20}^2 + 2\Omega_{10}\Omega_{20}}{2}\right)$$

et elle a donc varié de :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{cf} - \mathcal{E}_{ci} &= \frac{J}{2}\left(\frac{\Omega_{10}^2 + \Omega_{20}^2 + 2\Omega_{10}\Omega_{20}}{2} - \Omega_{10}^2 - \Omega_{20}^2\right) \\ &= \frac{J}{2}\left(\frac{2\Omega_{10}\Omega_{20} - \Omega_{10}^2 - \Omega_{20}^2}{2}\right) = -\frac{J}{4}(\Omega_{10} - \Omega_{20})^2. \end{aligned}$$

L'énergie a diminué. On constate ainsi que le transfert de mouvement d'un cylindre à l'autre, possible par l'intermédiaire du fluide, se fait avec d'inévitables pertes énergétiques. C'est le « prix » à payer quand on utilise des forces de frottement pour transmettre du mouvement. Il resterait à établir quelle fraction d'énergie est convertie en énergie cinétique de rotation du fluide et quelle fraction est convertie en énergie interne pour quantifier ce « prix ».

9. On peut considérer le fluide comme un système mécanique transférant progressivement du mouvement d'un arbre à un autre, c'est-à-dire un embrayage. L'avantage est qu'il n'y a pas de frottement entre solides et donc pas d'usure des pièces. Mais, à cause de l'énergie dissipée par les forces de viscosité, il y a inévitablement un échauffement pendant le régime transitoire (en pratique l'égalisation des vitesses angulaires est obtenue au bout de quelques  $\tau$  et non en une durée infinie) et il faut donc prévoir une évacuation de chaleur suffisante pour empêcher un échauffement trop important.

## EXERCICE 3

### Diffusion d'un tourbillon

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\eta$ , est au repos dans un volume indéfini. Une perturbation crée à l'instant initial un mouvement circulaire autour d'un axe fixe  $Oz$ . Le problème est supposé invariant par translation le long de cet axe, on ne tient pas compte de la pesanteur et on admet que le mouvement du fluide est laminaire. On écrit alors, du fait des invariances,  $\vec{v}(M) = v(r, t)\vec{u}_\theta$  en coordonnées cylindriques. La perturbation crée

le champ initial  $\vec{v}_0(M) = \frac{K}{r}\vec{u}_\theta$ , où  $K$  est une constante. La divergence de la vitesse que fait apparaître cette expression en  $r = 0$  ne peut être physiquement qu'instantanée et doit disparaître pour  $t > 0$ . On donne le laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1. Justifier l'expression du champ de vitesse adoptée. Écrire l'équation du mouvement du fluide et la projeter sur les directions des vecteurs unitaires.
2. Donner l'équation d'évolution de la fonction  $f(r, t) = rv(r, t)$ . On utilisera l'identité :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rv) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rv).$$

3. Pour résoudre l'équation obtenue (qui est une équation de diffusion), on fait le changement de variables indépendantes :

$$X = r^2 \quad \text{et} \quad Y = \frac{r^2}{\nu t}.$$

Montrer qu'on obtient ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{Y}{X} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \right).$$

4. Une solution évidente étant de la forme  $f = f(Y)$ , déterminer  $f$  en exploitant ses valeurs pour  $Y = 0$  et pour  $Y \rightarrow +\infty$ . On admettra qu'il s'agit de la solution complète.
5. En déduire  $v(r, t)$ . Représenter graphiquement  $v$  en fonction de  $r$  à différents instants.
6. Montrer qu'il existe une distance  $R(t)$  à laquelle la vitesse est maximale. Interpréter ceci en termes d'onde.
7. Quelle propriété du fluide est responsable de l'amortissement de la perturbation ?

1. L'écoulement restant laminaire, les lignes de courant sont régulières et localement parallèles. Par conséquent, le champ de vitesse garde sa topographie tourbillonnaire initiale. Ensuite, il y a bien entendu invariance par rotation autour de  $Oz$  et on écrit donc  $\vec{v} = v(r, t) \vec{u}_\theta$ .

Pour un tel champ de vecteur on a :

$$\left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = \left( \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (v(r, t) \vec{u}_\theta) = \frac{v^2}{r} \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{u}_\theta}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta - \frac{v}{r^2} \vec{u}_\theta \\ &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

L'équation du mouvement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu} + \nu \Delta \vec{v} \text{ se projette alors en :}$$

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \text{ sur } \vec{u}_r \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \text{ sur } \vec{u}_\theta.$$

2. La pression est elle aussi invariante par rotation et l'identité donnée permet d'écrire après multiplication par  $r$  :

$$r \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (rv) = vr \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rv) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right] = v \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right].$$

soit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right].$$

3. On explicite les dérivées partielles avec ces nouvelles variables :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{r^2}{vt^2} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{Y}{t} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{Y}{X} \frac{\partial}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{2r}{vt} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{vt}} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{vX}} \frac{\partial}{\partial Y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2r}{vt} \frac{\partial}{\partial Y} \right) = \frac{2}{vt} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{2r}{vt} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial Y} \right) = \frac{2}{vX} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{2r}{vt} \frac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{vX}} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial}{\partial Y} \right) \\ &= \frac{2}{vX} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{vX}} \frac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{vX}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{2}{vX} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{4Y}{vX} \frac{\partial^2}{\partial Y^2}. \end{aligned}$$

L'équation devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X} - \frac{Y}{X} \frac{\partial f}{\partial Y} &= \frac{2}{X} \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{4Y}{X} \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} - \frac{v}{r} \frac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{vX}} \frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{2}{X} \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{4Y}{X} \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} - \frac{2}{X} \frac{\partial f}{\partial Y} \\ &= \frac{4Y}{X} \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \end{aligned}$$

et se factorise en :

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{Y}{X} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \right).$$

4. Effectivement on peut obtenir une fonction de  $Y$  seul qui vérifie :

$$\frac{df}{dY} + 4 \frac{d^2 f}{dY^2} = 0 \quad \text{et s'intègre en :}$$

$$\frac{df}{dY} = A \exp\left(-\frac{Y}{4}\right) \quad \text{puis} \quad f = B - 4A \exp\left(-\frac{Y}{4}\right).$$

La valeur  $Y = 0$  correspond à  $r = 0$  quel que soit  $t > 0$ . Or, la vitesse ne doit physiquement pas diverger sur l'axe  $Oz$  après l'instant initial. Sur cet axe on a :

$$v = \frac{f(0)}{r} = \frac{B - 4A}{r}$$

et si on veut empêcher la divergence, on doit prendre  $B = 4A$ , d'où :

$$f(Y) = B \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Y}{4}\right) \right].$$

Ensuite il faut retrouver le champ de vitesse initial en prenant  $Y \rightarrow +\infty$  ( $t = 0$ ) :

$$\frac{K}{r} = \frac{f(Y \rightarrow +\infty)}{r} = \frac{B}{r}, \text{ d'où } B = K.$$

Finalement on a :

$$f(Y) = K \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Y}{4}\right) \right].$$

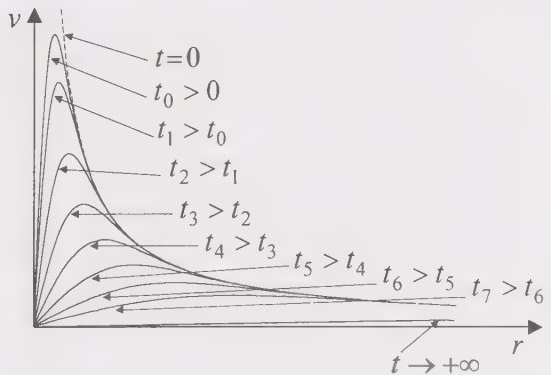
5. On passe aux variables physiques :

$$v = \frac{f}{r} = \frac{K}{r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \right].$$

On constate que quand  $r$  tend vers 0,  $v$  reste fini et a pour équivalent :

$$\begin{aligned} v(r \approx 0) &\approx \frac{K}{r} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{4vt} \right) \right] \\ &= \frac{Kr}{4vt}. \end{aligned}$$

Les courbes ci-contre représentant le champ des vitesses montrent au cours du temps un amortissement progressif du pic initial centré sur l'origine. La perturbation progresse et s'étale dans le fluide. Le mouvement



tourbillonnaire s'uniformise (à partir de  $\sim t_7$ ) avant de disparaître (pour  $t \rightarrow +\infty$ ). Il s'agit d'un phénomène de propagation avec amortissement comme on le retrouve dans beaucoup de problèmes de diffusion.

6. On calcule la dérivée partielle par rapport à  $r$  et on l'annule pour localiser un extremum du champ de vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{K}{r^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \right] + \frac{K}{2vt} \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \\ &= K \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2vt} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) - \frac{K}{r^2} \\ &= \frac{K}{r^2} \left[ \left( 1 + \frac{r^2}{2vt} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

En reprenant la notation  $Y = \frac{r^2}{vt}$  on annule cette dérivée pour :

$$\left( 1 + \frac{Y}{2} \right) \exp\left(-\frac{Y}{4}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad Y = 4 \ln\left( 1 + \frac{Y}{2} \right).$$

Cette équation admet deux racines, 0 analytique et  $Y_0 \approx 5,026$  obtenue numériquement. La première étant triviale et donnant  $v = 0$ , on retient la seconde et l'allure des courbes représentées à la question précédente montre qu'il s'agit bien d'un maximum. On obtient ainsi :

$$R = \sqrt{5,026vt} \approx 2,242\sqrt{vt}.$$

Cette valeur de  $r$  correspond au « pic » de vitesse initialement localisé à l'origine.

On constate qu'il progresse avec une vitesse  $\frac{dR}{dt} = 1,121\sqrt{\frac{v}{t}}$  de plus en plus faible en même temps que son amplitude s'atténue puisqu'elle s'écrit :

$$v(R(t), t) = \frac{K}{R(t)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Y_0}{4}\right) \right] \approx 0,715 \frac{K}{R(t)} \approx \frac{0,319K}{\sqrt{vt}}.$$

On retrouve un comportement d'onde progressive amortie, comme on l'a déjà remarqué, mais il ne s'agit pas d'une onde « conventionnelle » puisque le phénomène de propagation semble ne concerner que le maximum de vitesse et que la vitesse de déplacement dépend du temps. On peut faire l'analogie avec une ride unique qui se propagerait de manière radiale sur une surface liquide (au lieu d'une succession de rides régulièrement espacées) et avancerait de plus en plus lentement.

7. Les forces de viscosité assurent un transfert d'énergie cinétique des parties les plus rapides du fluide vers les plus lentes. Il y a donc une « circulation » irréversible d'énergie du tourbillon initial et central vers les régions plus externes du fait des contraintes tangentielles<sup>1</sup>. C'est la viscosité qui assure l'uniformisation puis la disparition du mouvement.

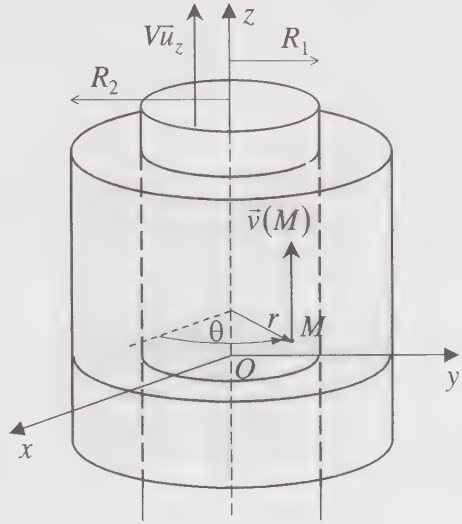
<sup>1</sup> On peut d'ailleurs noter l'analogie entre l'expression de la contrainte tangentielle et la loi de Fick ou la loi de Fourier.

## EXERCICE 4

## Résistance d'un fluide à un mouvement accéléré

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , occupe l'espace situé entre deux cylindres coaxiaux, d'axe  $z'z$  et de longueur  $L$  très grande devant leurs rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . Le cylindre extérieur est immobile et l'intérieur se déplace parallèlement à son axe à la vitesse  $V\bar{u}_z$ .

On ne tient pas compte de la pesanteur. On suppose le problème invariant par translation le long de l'axe et on admet que l'écoulement de fluide résultant du déplacement du cylindre intérieur est laminaire.



On donne le laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1. Sous quelle forme faut-il chercher les champs de vitesse et de pression dans le fluide ?
2. Écrire les équations du mouvement et de continuité.
3. On suppose dans un premier temps le mouvement du cylindre uniforme et l'écoulement stationnaire.
  - 3.1. Projeter l'équation du mouvement sur les directions de  $\bar{u}_r$  et de  $\bar{u}_z$  et déterminer le champ de vitesse dans le fluide.
  - 3.2. Représenter le profil de vitesse dans un plan contenant l'axe des cylindres.
  - 3.3. Avec les symétries et invariances du problème, la contrainte tangentielle s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \eta \frac{\partial v}{\partial r} \bar{u}_z \quad \text{avec } \eta = \mu \nu \text{ viscosité dynamique du fluide.}$$

En déduire la force de freinage  $\vec{F}$  qu'exerce le fluide sur le cylindre intérieur.

3.4. Donner l'expression du coefficient de frottement  $C_z$ , ici défini par :

$$\vec{F} = -\pi\mu R_1 L C_z V^2 \vec{u}_z,$$

en fonction du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  et du rapport sans dimension  $\rho = \frac{R_2}{R_1}$ .

Justifier le choix  $\mathcal{R} = \frac{V(R_2 - R_1)}{\nu}$ .

4. On a maintenant affaire à un mouvement uniformément accéléré du cylindre intérieur, soit  $\frac{dV}{dt} = a = \text{cte}$ , dans le sens du mouvement ( $a$  et  $V$  de même signe positif).

4.1. Du fait du résultat des questions précédentes, on serait tenté d'écrire la solution sous la forme :

$$v(r, t) = -\frac{V(t)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right).$$

Respecte-t-elle les conditions aux limites ? Pourquoi ne convient-elle pas ?

4.2. On écrit alors :

$$v(r, t) = -\frac{V(t)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + f(r).$$

Quelles sont les trois équations définissant  $f$  ?

4.3. Déterminer  $f(r)$ . On utilisera la relation  $\int \ln(u) u du = \left[2 \ln(u) - 1\right] \frac{u^2}{4} + \text{cte}$ .

4.4. Calculer la force de freinage  $\vec{F}'$  qu'exerce le fluide sur le cylindre intérieur.

4.5. La fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln(x) - 4 \ln^2(x)$  est négative pour  $x < 2,4513\dots$  et positive au-delà. Comparer  $\vec{F}'$  à la force  $\vec{F}$  obtenue en régime stationnaire en fonction de  $\rho$ . Peut-on avoir  $\vec{F}' = \vec{F}$  ?

4.6. Expliquer pourquoi le coefficient de frottement est maintenant nécessairement de la forme  $C'_z = C'_z\left(\mathcal{R}, \rho, \frac{aR_1^3}{\nu^2}\right)$ . L'expliciter.

4.7. On adopte désormais  $\rho = \rho \approx 2,718$ . Que devient  $C'_z$  ?

4.8. A quelle condition sur  $a$  peut-on assimiler  $C'_z$  à  $C_z$  ?

4.9. On prend  $R_1 = 1$  cm,  $\nu = 2.10^{-5}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup> et  $a = 0,1$  m.s<sup>-2</sup>. Dans quel domaine de valeurs de  $V$  pourra-t-on assimiler  $C'_z$  à  $C_z$  ? Sachant qu'on doit rester en régime laminaire, l'assimilation est-elle encore possible ?

1. L'écoulement étant laminaire, les lignes de courant restent parallèles au déplacement du cylindre intérieur. De plus, le problème est invariant par rotation autour de l'axe  $z'z$  et par translation le long de celui-ci. Aucune grandeur scalaire ne dépend donc de  $\theta$  ni de  $z$  et on écrit :

$$\vec{v}(M) = v(r, t)\vec{u}_z \quad \text{et} \quad P(M) = P(r, t).$$

2. L'équation de continuité donne simplement  $\text{div } \vec{v} = 0 = \frac{\partial v}{\partial z}$  et n'apporte aucune information puisqu'on sait déjà par hypothèse que  $v$  ne dépend pas de  $z$ . L'équation du mouvement s'écrit quant à elle :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v} = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}, \quad \text{soit :}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \vec{u}_z + \left( v \frac{\partial}{\partial z} \right) v \vec{u}_z = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_z = \frac{\partial v}{\partial t} \vec{u}_z.$$

La pression ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $z$  et on a donc encore :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \vec{u}_z = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_z.$$

3.1. La vitesse et la pression ne dépendant alors pas du temps, on a les deux projections :

$$\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = 0.$$

La pression est donc uniforme dans le fluide (et donc inutile à connaître). On obtient ensuite pour la vitesse :

$$r \frac{dv}{dr} = A \quad \text{puis} \quad v = A \ln(r) + B, \quad A \text{ et } B \text{ étant deux constantes.}$$

Les conditions d'adhérence aux parois imposent :

$$v(R_1) = V = A \ln(R_1) + B \quad \text{et} \quad v(R_2) = 0 = A \ln(R_2) + B.$$

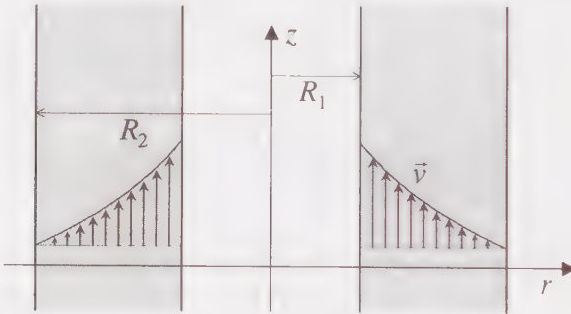
On en déduit par différence :

$$A = -\frac{V}{\ln(R_2) - \ln(R_1)} = -\frac{V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \text{puis :}$$

$$B = -A \ln(R_2) = \frac{V \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}, \quad \text{d'où l'expression de la vitesse :}$$

$$v(r) = -\frac{V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right).$$

3.2. On obtient le profil ci-dessous. La vitesse décroît monotonement du cylindre intérieur vers l'extérieur.



3.3. La contrainte exercée sur le cylindre intérieur s'écrit :

$$\vec{\sigma} = \eta \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r=R_1} \vec{u}_z = -\frac{\eta V}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{u}_z,$$

avec  $\eta = \mu \nu$  qui est la viscosité dynamique du fluide, et la force de frottement qu'il subit est donc :

$$\vec{F} = \int_{\text{cylindre}} \vec{\sigma} dS = -\frac{\eta V}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{u}_z \times 2\pi R_1 L = -\frac{2\pi\eta LV}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{u}_z.$$

3.4. On calcule le coefficient :

$$C_z = -\frac{F}{\pi\mu R_1 L V^2} = \frac{2\eta}{\mu R_1 V \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\nu}{R_1 V \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\nu(R_2 - R_1)}{R_1(R_2 - R_1)V \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$= \frac{R_2 - R_1}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{2}{\mathcal{R}} = \frac{\rho - 1}{\ln(\rho)} \frac{2}{\mathcal{R}}.$$

Le nombre de Reynolds est défini à partir d'une vitesse et d'une longueur caractéristiques de l'écoulement. En ce qui concerne la vitesse, on ne dispose que de  $V$ . Mais pour la longueur, on pourrait utiliser  $R_1$ ,  $R_2$  ou  $R_2 - R_1$ . Comme il n'y a pas de raison de privilégier un rayon plutôt qu'un autre, il semble plus équitable d'adopter le troisième choix qui les fait intervenir tous les deux. C'est de plus l'épaisseur caractéristique de l'étendue de l'écoulement.

4.1. Cette expression donne bien  $v(R_1, t) = V(t)$  et  $v(R_2, t) = 0$ . Les conditions aux limites sont respectées. Cependant, sa dépendance spatiale étant la même que celle de la solution obtenue à la question 3.1, elle vérifie encore l'équation du mouvement  $\frac{v}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = 0$  du régime stationnaire alors qu'on cherche maintenant la

solution de  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$  (Cf. la projection sur  $\vec{u}_z$  de l'équation du mouvement

établie à la question 2 en régime quelconque). Puisque  $\frac{\partial v}{\partial t}$  n'est pas nul dans la solution proposée, elle ne peut donc convenir.

4.2. On a dans ce cas :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{a}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right), \quad \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{v}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right)$$

et  $f$  vérifie donc :

$$\frac{v}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = -\frac{a}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right).$$

Comme le premier terme de l'expression de  $v$  respecte déjà les conditions aux limites sur les cylindres, il faut avoir  $f(R_1) = 0$  et  $f(R_2) = 0$  pour que la nouvelle vitesse respecte elle aussi ces conditions, soit au total trois équations.

4.3. On pose  $u = \frac{r}{R_2}$  pour se ramener à la primitive donnée :

$$\frac{v}{R_2 u} \frac{d}{du} \left( R_2 u \frac{df}{R_2 du} \right) = - \frac{a}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \ln(u), \text{ soit :}$$

$$\frac{v}{u} \frac{d}{du} \left( u \frac{df}{du} \right) = - \frac{a R_2^2}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \ln(u) \text{ et on intègre :}$$

$$u \frac{df}{du} = - \frac{a R_2^2}{v \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \int \ln(u) u du = - \frac{a R_2^2}{v \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \left\{ [2 \ln(u) - 1] \frac{u^2}{4} + K \right\}, \text{ puis :}$$

$$\begin{aligned} f &= - \frac{a R_2^2}{v \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \left\{ \frac{1}{2} \int \ln(u) u du - \frac{1}{4} \int u du + K \int \frac{du}{u} \right\} \\ &= - \frac{a R_2^2}{v \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \left\{ \frac{1}{2} \left[ [2 \ln(u) - 1] \frac{u^2}{4} + K' \right] - \frac{u^2}{8} + K \ln(u) + K'' \right\} \\ &= - \frac{a R_2^2}{v \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \left\{ [\ln(u) - 1] \frac{u^2}{4} + K \ln(u) + K''' \right\}. \end{aligned}$$

Il reste à exploiter les conditions aux limites :

$$f \left( u = \frac{R_2}{R_2} \right) = 0 = - \frac{a R_2^2}{v \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \left\{ - \frac{1}{4} + K''' \right\}, \text{ soit } K''' = \frac{1}{4}, \text{ et :}$$

$$f \left( u = \frac{R_1}{R_2} \right) = 0 = - \frac{a R_2^2}{v \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \left\{ \left[ \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) - 1 \right] \frac{R_1^2}{4 R_2^2} + K \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) + K''' \right\}.$$

On en déduit :

$$K = \frac{K''' + \left[ \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) - 1 \right] \frac{R_1^2}{4 R_2^2}}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} = \frac{1 - \left[ \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) + 1 \right] \frac{R_1^2}{R_2^2}}{4 \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} = \frac{\rho^2 - 1 - \ln(\rho)}{4 \rho^2 \ln(\rho)}.$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
 f &= -\frac{aR_2^2}{\nu \ln(\rho)} \left\{ \left[ \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) - 1 \right] \frac{r^2}{4R_2^2} + K \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + K''' \right\} \\
 &= -\frac{aR_2^2}{\nu \ln(\rho)} \left\{ \left[ \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) - 1 \right] \frac{r^2}{4R_2^2} + \frac{\rho^2 - 1 - \ln(\rho)}{4\rho^2 \ln(\rho)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + \frac{1}{4} \right\} \\
 &= -\frac{aR_2^2}{4\nu \ln(\rho)} \left\{ \left[ \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) - 1 \right] \frac{r^2}{R_2^2} + \frac{\rho^2 - 1 - \ln(\rho)}{\rho^2 \ln(\rho)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

4.4. La contrainte tangentielle exercée sur le cylindre intérieur s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}' &= \eta \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R_1} \quad \bar{u}_z = \bar{\sigma} + \eta \left( \frac{df}{dr} \right)_{r=R_1} \quad \bar{u}_z = -\frac{\eta V}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \bar{u}_z + \eta \left( \frac{df}{dr} \right)_{r=R_1} \bar{u}_z \\
 &= -\frac{\eta V}{R_1 \ln(\rho)} \bar{u}_z - \frac{\eta a R_2^2}{4\nu \ln(\rho)} \left\{ \left[ \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) - 1 \right] \frac{2R_1}{R_2^2} + \frac{R_1}{R_2^2} + \frac{\rho^2 - 1 - \ln(\rho)}{R_1 \rho^2 \ln(\rho)} \right\} \bar{u}_z \\
 &= -\frac{\eta V}{R_1 \ln(\rho)} \bar{u}_z - \frac{\eta a R_2^2}{4\nu \ln(\rho)} \left\{ \frac{2R_1}{R_2^2} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2^2} + \frac{\rho^2 - 1 - \ln(\rho)}{R_1 \rho^2 \ln(\rho)} \right\} \bar{u}_z \\
 &= -\frac{\eta V}{R_1 \ln(\rho)} \bar{u}_z - \frac{\eta a R_2^2}{4\nu R_1 \ln(\rho)} \left\{ -\frac{2}{\rho^2} \ln(\rho) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{\rho^2 - 1 - \ln(\rho)}{\rho^2 \ln(\rho)} \right\} \bar{u}_z \\
 &= -\frac{\eta V}{R_1 \ln(\rho)} \bar{u}_z - \frac{\eta a R_2^2}{4\nu R_1 \ln(\rho)} \left\{ -\frac{2}{\rho^2} \ln(\rho) + \frac{\rho^2 - 1 - 2 \ln(\rho)}{\rho^2 \ln(\rho)} \right\} \bar{u}_z.
 \end{aligned}$$

Elle contient un terme supplémentaire lié directement à l'accélération du cylindre.

La force de frottement qu'il subit est ensuite :

$$\begin{aligned}
 \bar{F}' &= \int_{\text{cylindre}} \bar{\sigma}' dS = \bar{F} - \frac{\eta a R_2^2}{4\nu R_1 \ln(\rho)} \left\{ -\frac{2}{\rho^2} \ln(\rho) + \frac{\rho^2 - 1 - 2 \ln(\rho)}{\rho^2 \ln(\rho)} \right\} \bar{u}_z \times 2\pi R_1 L \\
 &= -\frac{2\pi\eta LV}{\ln(\rho)} \bar{u}_z - \frac{\pi\eta a R_2^2 L}{2\nu \ln(\rho)} \left\{ -\frac{2}{\rho^2} \ln(\rho) + \frac{\rho^2 - 1 - 2 \ln(\rho)}{\rho^2 \ln(\rho)} \right\} \bar{u}_z \\
 &= -\frac{2\pi\eta LV}{\ln(\rho)} \bar{u}_z - \frac{\pi\eta a R_2^2 L}{2\nu \rho^2 \ln^2(\rho)} \left\{ \rho^2 - 1 - 2 \ln(\rho) - 2 \ln^2(\rho) \right\} \bar{u}_z.
 \end{aligned}$$

4.5. Pour  $\rho \leq 2,4513\dots$   $\bar{F}'$  et le terme supplémentaire proportionnel à  $a$  sont de sens opposés et la nouvelle force est donc en module inférieure à sa valeur en régime stationnaire. Le fluide freine moins le cylindre pour une même vitesse de celui-

ci. Par contre, pour  $\rho > 2,4513\dots$ , le cylindre est davantage freiné à une vitesse donnée qu'en régime stationnaire. C'est seulement pour  $\rho = 2,4513\dots$  qu'on retrouve, quelle que soit l'accélération du cylindre, la même force de freinage qu'en régime stationnaire.

4.6. Le problème dépend d'un nouveau paramètre, l'accélération  $a$  du cylindre. Le coefficient de frottement, qui est sans dimension, doit donc dépendre d'un nouveau nombre sans dimension qui contient  $a$ . L'accélération étant homogène à un rapport longueur

et la seule donnée faisant intervenir le temps dans sa dimension étant la viscosité cinématique, il faut construire une combinaison de  $a$  et de  $\nu$  pour pouvoir faire disparaître la dimension temps. Sachant que  $\nu$  est homogène à un rapport  $\frac{\text{longueur}^2}{\text{temps}}$ , la combinaison la plus simple est le rapport  $\frac{a}{\nu^2}$ . Il reste à multiplier par

le cube d'une longueur pour obtenir un paramètre sans dimension, par exemple  $R_1^3$ .

Remarquons qu'un produit de puissances de  $R_1$  et de  $R_2$  est notamment inutile car  $R_2$  intervient déjà par  $\rho$ . Par exemple, le choix de  $\frac{aR_1R_2^2}{\nu^2}$  plutôt que  $\frac{aR_1^3}{\nu^2}$  est sans

intérêt puisqu'il s'agit de  $\frac{aR_1^3\rho^2}{\nu^2}$ . Comme on sait que  $C'_z$  dépend de  $\rho$ , ce nouveau

paramètre n'apporte rien de plus que l'autre. Toutefois, une combinaison de la forme  $\frac{aR_1^2(R_2 - R_1)}{\nu^2}$  ne peut être rejetée. On peut seulement dire que la différence des

deux rayons est déjà prise en compte dans le nombre de Reynolds et qu'il n'est pas utile de la faire intervenir de nouveau. Mais il faut reconnaître qu'un certain arbitraire règne dans la définition des paramètres sans dimension et que le choix le plus simple doit rester celui qui prévaut.

On calcule le nouveau coefficient :

$$\begin{aligned} C'_z &= - \frac{F'}{\pi\mu R_1 L V^2} = C_z + \frac{1}{\pi\mu R_1 L V^2} \frac{\pi\eta a R_2^2 L}{2\nu\rho^2 \ln^2(\rho)} \left\{ \rho^2 - 1 - 2 \ln(\rho) - 2 \ln^2(\rho) \right\} \\ &= \frac{\rho - 1}{\ln(\rho)} \frac{2}{\mathcal{K}} + \frac{\nu^2 (R_2 - R_1)^2}{R_1 (R_2 - R_1)^2 V^2} \frac{a R_2^2}{2\nu^2 \rho^2 \ln^2(\rho)} \left\{ \rho^2 - 1 - 2 \ln(\rho) - 2 \ln^2(\rho) \right\} \\ &= \frac{\rho - 1}{\ln(\rho)} \frac{2}{\mathcal{K}} + \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1 \mathcal{K}^2} \frac{a R_2^2}{2\nu^2 \rho^2 \ln^2(\rho)} \left\{ \rho^2 - 1 - 2 \ln(\rho) - 2 \ln^2(\rho) \right\} \\ &= \frac{\rho - 1}{\ln(\rho)} \frac{2}{\mathcal{K}} + \frac{a R_1^3}{2\nu^2} \frac{(\rho - 1)^2}{\mathcal{K}^2 \ln^2(\rho)} \left\{ \rho^2 - 1 - 2 \ln(\rho) - 2 \ln^2(\rho) \right\}. \end{aligned}$$

4.7. On obtient dans ce cas  $\ln(\rho) = 1$  et l'expression de  $C'_z$  se simplifie :

$$C'_z = (e - 1) \frac{2}{\mathcal{K}} + \frac{aR_1^3}{2\nu^2} \frac{(e - 1)^2}{\mathcal{K}^2} \{e^2 - 5\},$$

soit numériquement :

$$C'_z \approx \frac{3,437}{\mathcal{K}} + \frac{aR_1^3}{\nu^2} \frac{7,05}{\mathcal{K}^2}.$$

4.8. Le terme dépendant de l'accélération doit être petit devant  $C_z$  et il faut donc écrire :

$$C_z = \frac{3,437}{\mathcal{K}} \gg \frac{aR_1^3}{\nu^2} \frac{7,05}{\mathcal{K}^2}, \text{ ce qui donne :}$$

$$a \ll \frac{3,437\mathcal{K}}{7,05} \frac{\nu^2}{R_1^3} = 0,487\mathcal{K} \frac{\nu^2}{R_1^3} \approx 0,5\mathcal{K} \frac{\nu^2}{R_1^3}.$$

4.9. La condition précédente s'écrit encore :

$$\mathcal{K} \gg \frac{aR_1^3}{0,5\nu^2}, \text{ soit } V \gg \frac{aR_1^3}{0,5(R_2 - R_1)} = \frac{aR_1^2}{0,5(e - 1)}$$

et on obtient numériquement :

$$V \gg \frac{0,1 \times 10^{-4}}{0,5 \times 2 \cdot 10^{-5} \times 1,718} \approx 0,6 \text{ m.s}^{-1}.$$

Si le cylindre démarre à l'instant pris pour origine des temps, on a simplement  $V = at$  et la condition s'écrit encore :

$$t \gg \frac{0,6}{0,1} = 6 \text{ s.}$$

La condition recherchée est acceptable au bout d'environ une minute. Mais il faut encore imposer à l'écoulement d'être laminaire, le modèle reposant sur cette hypothèse a priori. On a donc l'inégalité supplémentaire :

$$\mathcal{K} = \frac{V(R_2 - R_1)}{\nu} < 2000, \text{ soit numériquement :}$$

$$V < \frac{2000\nu}{R_2 - R_1} = \frac{2000\nu}{(e - 1)R_1} = 2,33 \text{ m.s}^{-1}.$$

Ceci correspond, si on prend encore la vitesse initiale nulle, à  $t < 23,3$  s.

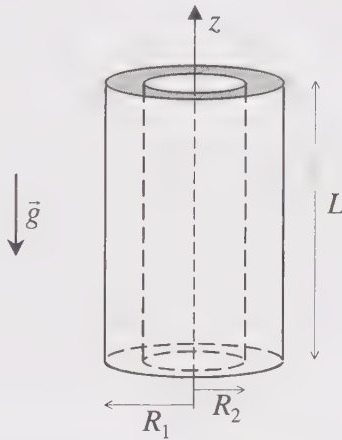
Finalement, le domaine temporel de valeurs pour lequel l'identification  $C'_z = C_z$  est non défini ou très étroit. On ne peut globalement pas utiliser un coefficient de frottement déterminé en régime stationnaire lorsqu'on a un écoulement dépendant du temps.

# ÉCOULEMENTS LAMINAIRES DANS LES CONDUITES

## EXERCICE 1

### Conduite coaxiale

Deux cylindres coaxiaux de même longueur  $L$ , d'axe  $Oz$  vertical et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  limitent un espace dans lequel s'écoule un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$ , de viscosité dynamique  $\eta$  et cinématique  $\nu$ , sous l'action d'une différence de pression  $\Delta P$  entre les extrémités, la pression étant plus élevée à la base de la conduite. L'écoulement se fait dans un premier temps vers le haut, malgré l'action de la pesanteur.



On se place en état stationnaire et on suppose le régime laminaire. Un point  $M$  du fluide est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Dans ce système de

coordonnées, le laplacien s'écrit  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

1. En exploitant les symétries du problème, montrer que les champs de vitesse et de pression sont a priori de la forme  $\vec{v}(M) = v(r) \vec{u}_z$  et  $P(M) = P(r, z)$ .

2. Montrer que  $P$  ne dépend en fait pas de  $r$  et établir les équations suivantes :

$$\frac{dP}{dz} = K - \mu g, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{K}{\eta} \quad \text{avec } K \text{ constante.}$$

3. Déterminer les champs de pression puis de vitesse dans le fluide en fonction des données.

4.1. En déduire le débit volumique  $D_V$  ascendant. On pourra utiliser le résultat :

$$\int_{R_1}^{R_2} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) r dr = \frac{R_2^2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4}.$$

On mettra ce débit sous la forme  $D_V = \frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) R_2^4 F(\rho)$  avec  $\rho = \frac{R_1}{R_2}$  et  $F$  une certaine fonction sans dimension.

4.2. Quelle condition faut-il sur  $\Delta P$  pour qu'il y ait effectivement écoulement de fluide vers le haut ? On rappelle que la fonction  $f : x \rightarrow 1 + x^2 + \frac{1 - x^2}{\ln(x)}$  est positive pour  $x > 0$ .

4.3. A quel équilibre correspond le cas  $D_V = 0$  ?

5.1. Quelle est l'expression de  $D_V$  dans le cas limite  $R_1 = 0$  ?

5.2. En déduire le débit volumique d'un fluide circulant dans un tuyau de rayon  $R_1$  dans le sens de la pesanteur, lorsque la pression est plus élevée de  $\Delta P'$  au sommet du tuyau par rapport à sa base.

6. Les deux cylindres utilisés jusqu'à la question 4 sont creux et constituent l'équivalent d'un câble coaxial, le volume situé entre les deux amenant le fluide d'une alimentation jusqu'à une machine utilisatrice située plus haut et celui situé à l'intérieur du plus petit cylindre le ramenant à l'alimentation.

6.1. Quelle équation doit vérifier  $\rho$  pour qu'il n'y ait pas de chute de pression dans le « circuit-retour » (partie interne du câble) ? On ne cherchera pas à la résoudre.

6.2. On la suppose désormais vérifiée et on adopte  $\rho = e^{-1}$ . Que vaut alors  $\Delta P$  ? L'exprimer en fonction de  $\mu$ ,  $g$  et  $L$ .

6.3. La consommation énergétique de la machine est caractérisée par la différence  $\Delta \mathcal{P}$  des puissances mécaniques du fluide entrant et du fluide sortant. La pression à l'entrée du câble est  $P_0$  et celle à la sortie  $P_1$ . Exprimer  $\Delta \mathcal{P}$  en fonction de  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $L$  et  $D_V$ .

Le fluide circule en fait en circuit fermé. Comparer  $\Delta \mathcal{P}$  à la puissance que doit fournir une pompe au niveau de l'alimentation pour le ramener de  $P_1$  à  $P_0$ . A quoi sert la différence ?

6.4. Définir un rendement de l'opération. Comment peut-on aisément l'optimiser sans jouer sur la pression ?

6.5. Le calculer numériquement avec des valeurs typiques  $P_0 - P_1 = 5$  bars,  $\mu = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $L = 5$  m.

1.1. En régime laminaire, l'écoulement se fait parallèlement à l'axe de révolution de la conduite et le champ de vitesse s'écrit donc  $\vec{v}(M) = v\vec{u}_z$ . L'invariance du problème par rotation supprime toute dépendance de cette composante  $v$  et de la pression vis-à-vis de la coordonnée cylindrique  $\theta$ . On a donc des expressions de la forme :

$$\vec{v}(M) = v(r, z)\vec{u}_z \text{ et } P(M) = P(r, z).$$

Enfin, l'équation de continuité dans un fluide incompressible :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \text{ s'écrit ici } \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

dans tout le volume de la conduite et il nous reste par conséquent  $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_z$ .

2. On écrit l'équation du mouvement en écoulement stationnaire :

$$\left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \vec{g} + \nu\Delta\vec{v},$$

les seules forces volumiques étant celles de pesanteur. Avec ici :

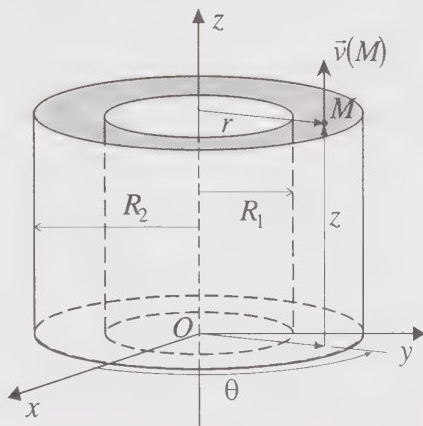
$$\left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v} = v \frac{\partial v}{\partial z} \vec{u}_z = \vec{0} \text{ et :}$$

$$\Delta\vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_z$$

on obtient les deux projections :

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \text{ sur } \vec{u}_r, \quad -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} - g + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = 0 \text{ sur } \vec{u}_z.$$

La première montre que la pression ne dépend pas de  $r$ . La seconde devient alors :



$$\frac{dP}{dz} + \mu g = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right).$$

On a, pour toutes valeurs de  $r$  et de  $z$  dans la conduite, d'une égalité entre fonctions de variables indépendantes :

$$F(z) = \frac{dP}{dz} + \mu g \quad \text{et} \quad G(r) = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right).$$

Ceci n'est possible que s'il s'agit d'une même constante  $K$ . On écrit donc séparément :

$$\frac{dP}{dz} = K - \mu g \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{K}{\eta}.$$

3. La première équation s'intègre en :

$$P = (K - \mu g)z + \text{cte}.$$

Prenons l'origine du repère à la base de la conduite. La différence de pressions entre les extrémités donne :

$$\Delta P = P(0) - P(L) = -(K - \mu g)L,$$

ce qui permet de déterminer la constante  $K$ , soit :

$$K = \mu g - \frac{\Delta P}{L}.$$

Par contre, l'autre constante reste non définie puisqu'on ne dispose pas d'autre condition sur la pression. On a au total une décroissance linéaire dans la conduite (ou un gradient de pression uniforme) :

$$P = \text{cte} - \frac{\Delta P}{L} z.$$

On passe à l'équation différentielle de la vitesse en utilisant l'expression de  $K$  :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L},$$

ce qui s'intègre une première fois en :

$$r \frac{dv}{dr} = \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \int r dr = \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{r^2}{2} + \text{cte}$$

et une seconde fois en :

$$v = \int \left[ \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{r}{2} + \frac{cte}{r} \right] dr = \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{r^2}{4} + cte \times \ln(r) + cte'.$$

Le fluide visqueux adhère aux parois de la conduite. On doit donc avoir les conditions aux limites :

$$v(R_1) = \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{R_1^2}{4} + cte \times \ln(R_1) + cte' = 0 \quad \text{et :}$$

$$v(R_2) = \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{R_2^2}{4} + cte \times \ln(R_2) + cte' = 0.$$

On en déduit par différence :

$$cte = \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{R_1^2 - R_2^2}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \text{et il vient ensuite :}$$

$$cte' = - \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{R_1^2}{4} - cte \ln(R_1) = \left( \frac{\Delta P}{\eta L} - \frac{g}{v} \right) \left[ \frac{R_1^2}{4} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R_1) \right].$$

Le champ de vitesse s'écrit finalement :

$$v = \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{r^2}{4} + \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \frac{R_1^2 - R_2^2}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(r) \\ + \left( \frac{\Delta P}{\eta L} - \frac{g}{v} \right) \left[ \frac{R_1^2}{4} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln(R_1) \right]$$

ce qui se simplifie en :

$$v = \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \left[ \frac{r^2 - R_1^2}{4} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right].$$

4.1. Le débit volumique est le flux de la vitesse à travers la section horizontale  $S$  de la conduite :

$$\begin{aligned}
 D_V &= \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z \\
 &= \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \left[ \frac{r^2 - R_1^2}{4} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right] r dr d\theta \\
 &= 2\pi \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \int_{R_1}^{R_2} \left[ \frac{r^2 - R_1^2}{4} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right] r dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \left\{ \left[ \frac{r^4}{4} - R_1^2 \frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \int_{R_1}^{R_2} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) r dr \right\}.
 \end{aligned}$$

Avec l'intégrale donnée dans l'énoncé, il vient :

$$\begin{aligned}
 D_V &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \left\{ \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} - R_1^2 \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \left( \frac{R_2^2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4} \right) \right\} \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) \left\{ \frac{R_1^4 - R_2^4}{4} + \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right\} \\
 &= \frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) (R_1^2 - R_2^2) \left\{ R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right\}.
 \end{aligned}$$

On fait le changement de variable proposé :

$$\begin{aligned}
 D_V &= \frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) R_2^4 \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) \left\{ \frac{R_1^2}{R_2^2} + 1 + \frac{R_1^2 - 1}{- \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right\} \\
 &= \frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) R_2^4 (\rho^2 - 1) \left\{ \rho^2 + 1 + \frac{1 - \rho^2}{\ln(\rho)} \right\}.
 \end{aligned}$$

La fonction  $F$  vaut  $(\rho^2 - 1) \left\{ \rho^2 + 1 + \frac{1 - \rho^2}{\ln(\rho)} \right\}$  et est bien sans dimension puisqu'elle ne dépend que d'un rapport de longueurs.

4.2. D'après l'énoncé, le terme entre accolades est positif. Par conséquent, pour avoir un débit ascendant, il faut :

$$\frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} < 0 \quad \text{car } \rho \text{ est inférieur à 1, soit :}$$

$$\Delta P > \frac{g\eta L}{v} = \mu g L.$$

4.3. Le débit est nul lorsque :

$$\Delta P = \mu g L.$$

La différence de pression compense alors exactement le poids de la colonne de fluide. C'est l'équilibre hydrostatique.

5.1. Dans ce cas  $\rho$  devient nul, comme  $\frac{1}{\ln(\rho)}$ . On obtient alors :

$$D_V = -\frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) R_2^4 = \frac{\pi}{8} \left( \frac{\Delta P}{\eta L} - \frac{g}{v} \right) R_2^4.$$

5.2. On remplace  $R_2$  par  $R_1$  dans la formule ci-dessus. Si on raisonne en terme de flux descendant, car il est plus judicieux de définir un débit dans le sens de l'écoulement, il convient de changer le signe du débit et on obtient :

$$D_V = \frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) R_1^4.$$

En prenant  $\Delta P' = -\Delta P$ , il vient finalement :

$$D_V = \frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} + \frac{\Delta P'}{\eta L} \right) R_1^4.$$

Cette fois, la pesanteur et la chute de pression sont toutes deux moteurs de l'écoulement, alors que dans le cas précédent la pesanteur s'y oppose.

6.1. Le débit volumique est le même dans les deux parties du « câble ». On a donc :

$$D_V = \frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} + \frac{\Delta P'}{\eta L} \right) R_1^4 = \frac{\pi}{8} \left( \frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L} \right) R_2^4 (\rho^2 - 1) \left\{ \rho^2 + 1 + \frac{1 - \rho^2}{\ln(\rho)} \right\}, \text{ soit :}$$

$$\left(\frac{g}{v} + \frac{\Delta P'}{\eta L}\right) \rho^4 = \left(\frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L}\right) (\rho^2 - 1) \left\{ \rho^2 + 1 + \frac{1 - \rho^2}{\ln(\rho)} \right\}.$$

Si on veut qu'il n'y ait pas de chute de pression dans le circuit de retour du fluide (soit  $\Delta P' = 0$ ), on doit respecter la condition :

$$\frac{g}{v} \rho^4 = \left(\frac{g}{v} - \frac{\Delta P}{\eta L}\right) (\rho^2 - 1) \left\{ \rho^2 + 1 + \frac{1 - \rho^2}{\ln(\rho)} \right\}.$$

d'où l'équation non linéaire :

$$\rho^4 = \left(1 - \frac{\Delta P}{g\mu L}\right) (\rho^2 - 1) \left\{ \rho^2 + 1 + \frac{1 - \rho^2}{\ln(\rho)} \right\}.$$

6.2. On prend désormais  $\Delta P'$  nul et la condition ci-dessus devient pour  $\rho = e^{-1}$  :

$$e^{-4} = \left(1 - \frac{\Delta P}{g\mu L}\right) (e^{-2} - 1) \left\{ e^{-2} + 1 + \frac{1 - e^{-2}}{-\ln(e)} \right\} = 2 \left(1 - \frac{\Delta P}{g\mu L}\right) (e^{-2} - 1) e^{-2}$$

et donc :

$$\Delta P = \left(1 - \frac{e^{-2}}{2(e^{-2} - 1)}\right) g\mu L = \frac{e^{-2} - 2}{2e^{-2} - 2} g\mu L = \frac{1 - 2e^2}{2 - 2e^2} g\mu L \approx 1,078 g\mu L.$$

6.3. La puissance perdue par le fluide à la traversée de la machine s'exprime en fonction de la différence  $P_+ - P_-$  des pressions à l'entrée et à la sortie de celle-ci. À l'entrée on a  $P_+ = P_0 - \Delta P$  et à la sortie  $P_- = P_1$  puisqu'il n'y a pas de chute de pression dans la conduite retour. La puissance perdue s'écrit donc :

$$\Delta \mathcal{P} = (P_+ - P_-) D_V = (P_0 - \Delta P - P_1) D_V = (P_0 - P_1 - 1,078 g\mu L) D_V.$$

Par ailleurs, la puissance que doit fournir une pompe est :

$$\mathcal{P} = (P_0 - P_1) D_V$$

et elle est supérieure. La différence entre les deux est la puissance qu'il faut fournir au fluide pour qu'il monte dans le conduit extérieur malgré la pesanteur et la viscosité.

6.4. Le rendement ne peut être défini que comme le rapport de la puissance que reçoit la machine et de celle que fournit la pompe, soit :

$$\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} = \frac{P_0 - P_1 - 1,078 g\mu L}{P_0 - P_1} = 1 - \frac{1,078 g\mu L}{P_0 - P_1}.$$

On peut le rendre proche de 1 en utilisant un câble le plus court possible et un fluide le moins dense possible. Il est surprenant de constater qu'il ne dépend pas de la viscosité du fluide alors qu'à priori on pouvait penser que celle-ci entraîne de la dissipation d'énergie.

6.5. On obtient dans ce cas :

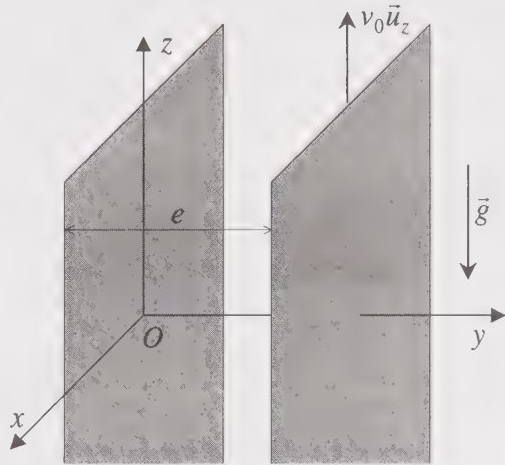
$$\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} = 1 - \frac{1,078 \times 10 \times 1000 \times 5}{5 \cdot 10^5} \approx 0,892,$$

valeur très correcte pour un rendement.

## EXERCICE 2

### Entraînement d'un fluide par une paroi

Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , occupe l'espace limité par deux plans verticaux parallèles et infinis, distants de  $e$ . Un des plans est fixe dans un référentiel galiléen et l'autre se déplace à la vitesse constante  $v_0 \vec{u}_z$  suivant la verticale ascendante malgré l'action de la pesanteur. On définit un trièdre  $Oxyz$  lié au plan fixe comme indiqué sur la figure ci-contre.



Le fluide est entraîné par le mouvement du plan mobile et on se place en régime laminaire stationnaire.

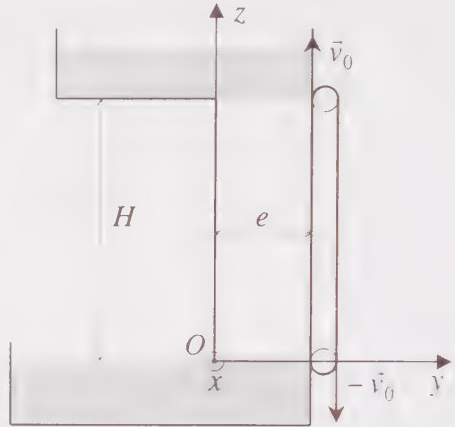
1. Comment s'écrivent a priori les champs de pression  $P(M)$  et de vitesse  $\vec{v}(M)$  dans le fluide ? On pourra utiliser l'équation de continuité.
2. Donner les deux équations différentielles, faisant intervenir une même constante  $A$ , dont sont solutions respectivement la vitesse et la pression.

Le plan mobile est en fait une partie de tapis roulant qui a pour fonction d'élever le fluide depuis un réservoir inférieur vers un réservoir supérieur situé à une hauteur  $H$  au-dessus (figure page suivante). Ces réservoirs sont très étendus et peu profonds et on peut considérer que leur volume de fluide ne varie pas et que la pression  $y$  vaut partout la pression atmosphérique  $P_0$ .

3. Résoudre les deux équations différentielles.

4. Représenter les différents profils possibles de la vitesse entre les plans. Où est-elle maximale dans chacun ?

5. Calculer le débit volumique  $D_V$  dans le sens ascendant pour une longueur unité de long de  $Ox$ . Quelle vitesse minimale doit avoir le tapis roulant pour qu'il y ait bien ascension de fluide ?



Pour la suite du problème, on prend  $v_0$  supérieur à cette valeur minimale.

6. Exprimer la résultante  $d\vec{F}$  des forces de viscosité s'exerçant sur une tranche de fluide occupant le volume de longueur unité le long de  $Ox$  et d'épaisseur  $dz$ .

7.1. Quelle puissance doit fournir par unité de longueur le long de  $Ox$  le moteur qui entraîne le tapis roulant ?

7.2. Quelle puissance minimale par unité de longueur faut-il fournir pour avoir un débit ascendant ?

8.1. On prend les valeurs suivantes (pour un liquide peu visqueux),  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $e = 1 \text{ cm}$ ,  $H = 5 \text{ m}$  et  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Calculer la puissance minimale à fournir et la vitesse du tapis roulant dans ce cas. Commentaire.

8.2. Mêmes questions avec les nouvelles valeurs (pour un liquide très visqueux)  $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , toutes les autres étant inchangées.

8.3. Avec ces dernières valeurs, quelle puissance est nécessaire pour avoir un débit de  $1 \text{ l} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  ? La comparer à la variation d'énergie potentielle du même débit de fluide. Interpréter la différence.

8.4. Comment peut-on simplement améliorer le rendement ?

9. On remplace le plan fixe par un second tapis roulant, identique au premier et se déplaçant à même vitesse.

9.1. Calculer le débit volumique par unité de longueur le long de  $Ox$ .

9.2. Quelle puissance doit fournir cette fois le moteur pour un débit volumique donné ?

9.3. Quelle est la nouvelle relation entre puissance et débit volumique ?

9.4. Refaire l'application numérique de la question 8.3. Le résultat est-il en accord avec la réponse à la question 8.4 ?

1. Le problème est invariant suivant la direction de  $Ox$  et l'écoulement est laminaire et provoqué par le mouvement d'un des plans. On écrit donc en tout point  $M$  situé entre les deux plans :

$$P(M) = P(y, z) \quad \text{et} \quad \vec{v}(M) = v(y, z) \vec{u}_z.$$

On ne peut pas éliminer la variable  $z$  car la pesanteur peut a priori influencer au moins le champ de pression. L'équation de continuité du fluide incompressible (qui représente ici la conservation du débit volumique dans l'écoulement)  $\text{div } \vec{v} = 0$

donne  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$  et montre que cette coordonnée n'intervient pas dans l'expression de la vitesse. On retient finalement  $\vec{v}(M) = v(y) \vec{u}_z$ .

2. L'équation du mouvement en régime stationnaire :

$$\left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu} + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} \quad \text{donne ici :}$$

$$\left( v \frac{\partial}{\partial z} \right) v(y) \vec{u}_z = \vec{0} = - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z \right) - g \vec{u}_z + \nu \frac{d^2 v}{dy^2} \vec{u}_z$$

et se projette en :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \\ v \frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} - g = 0. \end{cases}$$

La première équation scalaire montre que la pression ne dépend que de  $z$  et on obtient finalement :

$$v \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} + g.$$

Il s'agit de l'égalité entre une fonction de  $y$  (membre de gauche) et une fonction de  $z$  (membre de droite) pour toutes valeurs de  $y$  et  $z$ . Ce n'est possible que si elles sont égales à une même constante  $A$  et on a en fait deux équations différentielles :

$$v \frac{d^2 v}{dy^2} = A \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} + g = A.$$

3. Pour la vitesse, l'équation s'intègre en :

$$v = \frac{Ay^2}{2\nu} + By + C$$

avec les conditions aux limites  $v(0) = 0$  et  $v(e) = v_0$  qui traduisent l'adhérence du fluide visqueux aux parois. Pour la pression, l'intégration donne :

$$P = (A - g)\mu z + D$$

avec les conditions aux limites  $P(0) = P(H) = P_0$ . On en déduit immédiatement  $A = g$  (seule manière d'empêcher la pression de varier monotonement avec  $z$ ) et  $D = P_0$ . On constate ainsi que la pression est uniforme dans l'écoulement. Les conditions sur la vitesse deviennent alors :

$$C = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ge^2}{2\nu} + Be = v_0, \quad \text{soit} \quad B = \frac{v_0}{e} - \frac{ge}{2\nu}.$$

On écrit finalement :

$$v = \frac{gy^2}{2\nu} + \left( \frac{v_0}{e} - \frac{ge}{2\nu} \right) y.$$

4. Il s'agit d'un profil parabolique. La dérivée de la vitesse s'écrivant :

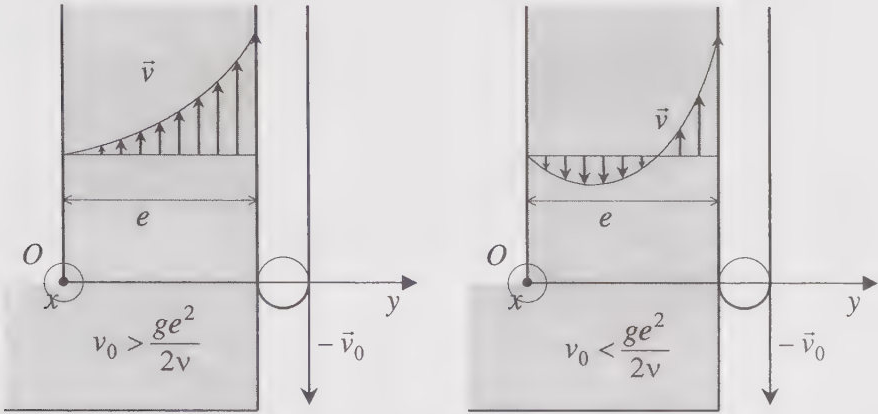
$$\frac{dv}{dy} = \frac{gy}{\nu} + \frac{v_0}{e} - \frac{ge}{2\nu} = \frac{v_0}{e} + \frac{g}{2\nu}(2y - e),$$

on doit distinguer les deux cas suivants :

- si  $v_0 > \frac{ge^2}{2\nu}$  cette dérivée est strictement positive entre 0 et  $e$  et  $v(y)$  est une fonction monotone croissante ; la vitesse est alors maximale en  $y = e$  et  $v$  vaut  $v_0$ ,

- si  $v_0 < \frac{ge^2}{2\nu}$ , la dérivée est positive seulement pour  $y > \frac{e}{2} - \frac{\nu v_0}{ge}$  ; la vitesse est nulle en  $y = 0$ , négative (c'est-à-dire dirigée vers le bas) et décroissante entre 0 et  $\frac{e}{2} - \frac{\nu v_0}{ge}$  ; elle commence à croître seulement au-delà de cette ordonnée et il est alors évident que son maximum est encore  $v_0$  en  $y = e$ .

Les deux profils possibles sont représentés à la page suivante.



5. Le débit volumique est le flux du vecteur vitesse :

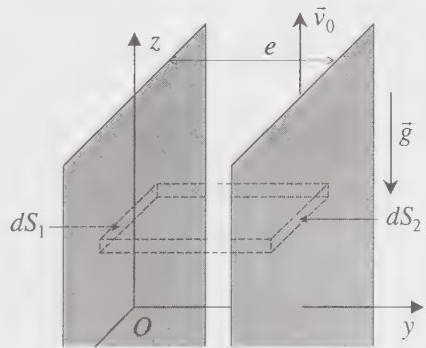
$$\begin{aligned}
 D_V &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^e \vec{v} \cdot dx dy \vec{u}_z = \int_0^e v(y) dy = \int_0^e \left( \frac{gy^2}{2\nu} + \left( \frac{v_0}{e} - \frac{ge}{2\nu} \right) y \right) dy \\
 &= \left[ \frac{gy^3}{6\nu} + \left( \frac{v_0}{e} - \frac{ge}{2\nu} \right) \frac{y^2}{2} \right]_0^e = \frac{ge^3}{6\nu} + \left( \frac{v_0}{e} - \frac{ge}{2\nu} \right) \frac{e^2}{2} = \left( \frac{v_0}{e} - \frac{ge}{6\nu} \right) \frac{e^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Il doit être positif, sinon le dispositif est inefficace. On doit par conséquent avoir :

$$v_0 > \frac{ge^2}{6\nu}.$$

6. Le volume en question est soumis à son poids et aux forces de frottement sur les parois. Les deux se compensent puisque la vitesse est stationnaire le long d'une ligne de courant et on pourrait donc répondre à la question en calculant rapidement l'opposé du poids de la couche<sup>1</sup>. Mais il est intéressant de vérifier que ce sera effectivement le résultat. La dérivation se faisant relativement à la coordonnée définie dans le sens système subissant la contrainte → système exerçant la contrainte, on a sur la paroi d'ordonnée  $y = 0$  :

$$\begin{aligned}
 d\vec{F}_1 &= -\eta \left( \frac{dv}{dy} \right)_{y=0} dS_1 \vec{u}_z \\
 &= -\eta \left( \frac{v_0}{e} - \frac{eg}{2\nu} \right) dz \vec{u}_z
 \end{aligned}$$



<sup>1</sup> La quantité de mouvement de cette tranche de fluide ne varie pas lors qu'il monte le long des plans, même si sa densité  $\mu \vec{v}$  n'est pas uniforme.

et sur celle d'ordonnée  $y = e$  :

$$d\vec{F}_2 = \eta \left( \frac{dv}{dy} \right)_{y=e} dS_2 \vec{u}_z = \eta \left( \frac{v_0}{e} + \frac{eg}{2\nu} \right) dz \vec{u}_z.$$

On n'a pas à tenir compte des forces volumiques  $\int \eta \Delta \vec{v} dV$  car elles sont intérieures et leur somme est donc nulle (leur effet est la déformation de la tranche de fluide, considérée comme système physique, puisque ses différentes parties ne montent pas avec la même vitesse).

Rigoureusement,  $d\vec{F}_1$  et  $d\vec{F}_2$  sont des forces par unité de longueur (le long de  $Ox$ ) et il faudrait par conséquent les noter  $\frac{d^2\vec{F}}{dx}$  si on voulait être rigoureux, de même que les  $dS$  sont des produits  $dz \times$  longueur unité. La résultante des deux est :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = \eta \frac{eg}{\nu} dz \vec{u}_z = \mu eg dz \vec{u}_z.$$

Il s'agit bien de l'opposé du poids de la couche.

7.1. C'est le moteur qui apporte au tapis roulant l'énergie nécessaire à son maintien à vitesse constante malgré le freinage qu'il subit de la part du fluide. Pour lutter contre la force de viscosité exercée par le fluide en  $y = e$ , le moteur fournit à l'élément de tapis de surface  $dS_2$  une puissance égale et opposée à celle de cette force :

$$d\mathcal{P} = -d\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plan}} \cdot \vec{v}_0 = d\vec{F}_{\text{plan} \rightarrow \text{fluide}} \cdot \vec{v}_0 = d\vec{F}_2 \cdot \vec{v}_0 = \eta \left( \frac{v_0}{e} + \frac{eg}{2\nu} \right) v_0 dz.$$

Il reste maintenant à intégrer sur la hauteur du tapis roulant :

$$\mathcal{P} = \int_{z=0}^H d\mathcal{P} = \int_0^H \eta \left( \frac{v_0}{e} + \frac{eg}{2\nu} \right) v_0 dz = \eta \left( \frac{v_0}{e} + \frac{eg}{2\nu} \right) v_0 H.$$

Ici aussi, il s'agit en toute rigueur d'une puissance par unité de longueur.

7.2. On a montré qu'on a bien un débit volumique ascendant si  $v_0 > \frac{ge^2}{6\nu}$ . Par conséquent la puissance minimale est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\min} &= \eta \left( \frac{v_{0\min}}{e} + \frac{eg}{2\nu} \right) v_{0\min} H = \eta \left( \frac{ge}{6\nu} + \frac{eg}{2\nu} \right) \frac{ge^2}{6\nu} H = \eta \frac{g^2 e^3}{9\nu^2} H \\ &= \frac{\mu g^2 e^3 H}{9\nu}. \end{aligned}$$

8.1. Numériquement on obtient :

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{10^3 \times 10^2 \times 10^{-6} \times 5}{9 \times 10^{-6}} = 5,56 \cdot 10^4 \text{ W.m}^{-1} \text{ et :}$$

$$v_{0\min} = \frac{10 \times 10^{-4}}{6 \times 10^{-6}} = 167 \text{ m.s}^{-1}.$$

Il s'agit de valeurs très élevées par rapport aux dimensions réduites du dispositif. Ce n'est donc pas une manière réaliste d'élever un liquide lorsqu'il a une viscosité cinématique faible.

8.2. Cette fois il vient :

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{10^3 \times 10^2 \times 10^{-6} \times 5}{9 \times 10^{-3}} = 55,6 \text{ W.m}^{-1} \text{ et :}$$

$$v_{0\min} = \frac{10 \times 10^{-4}}{6 \times 10^{-3}} = 0,167 \text{ m.s}^{-1}.$$

Ce sont des valeurs beaucoup plus raisonnables et le dispositif est donc à réserver à des fluides très visqueux.

8.3. On utilise la relation établie à la question 7.1 et l'expression de la vitesse du plan mobile en fonction du débit volumique, soit :

$$v_0 = \frac{2D_V}{e} + \frac{ge^2}{6\nu},$$

d'où la puissance :

$$\mathcal{P} = \mu\nu \left( \frac{2D_V}{e^2} + \frac{ge}{6\nu} + \frac{eg}{2\nu} \right) \left( \frac{2D_V}{e} + \frac{ge^2}{6\nu} \right) H = \mu\nu \left( \frac{2D_V}{e^2} + \frac{2ge}{3\nu} \right) \left( \frac{2D_V}{e} + \frac{ge^2}{6\nu} \right) H$$

et on obtient numériquement  $\mathcal{P} = 158,9 \text{ W.m}^{-1}$ .

Lorsqu'une masse  $m$  de fluide passe du réservoir inférieur au supérieur, son énergie potentielle augmente de  $mgH$ . Donc, pour un débit  $D_V$ , on a un gain d'énergie potentielle par unité de temps égal à  $\mu D_V gH$  et ceci donne numériquement dans notre cas  $50 \text{ W.m}^{-1}$ . La puissance à fournir par le moteur est donc nettement supérieure à celle dont a besoin le fluide pour s'élever malgré la pesanteur. Les forces de viscosité sur le tapis roulant sont motrices, puisqu'elles élèvent le fluide, mais celles sur l'autre plan sont résistantes et c'est le freinage qu'elles exercent sur l'ascension du fluide qui explique le besoin d'un supplément d'énergie pour l'ascension.

8.4. On peut améliorer le rendement du dispositif en ne forçant pas la vitesse du fluide à s'annuler en  $y = 0$ . On peut par exemple utiliser un second tapis roulant à la

place du plan fixe. Dans ce cas, la puissance que devra fournir le moteur sera plus importante mais il est possible que le gain sur le débit compense ce supplément de puissance.

9.1. On reprend l'expression de la vitesse obtenue à la question 3 avant l'exploitation des conditions aux limites, soit :

$$v = \frac{gy^2}{2\nu} + By + C, \text{ et on assure cette fois :}$$

$$v = v_0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = e.$$

Des deux relations :

$$C = v_0 \text{ et } \frac{ge^2}{2\nu} + Be + C = v_0 \text{ on déduit aisément :}$$

$$v = \frac{gy^2}{2\nu} - \frac{ge}{2\nu}y + v_0 = \frac{g}{2\nu} \left( y - \frac{e}{2} \right)^2 + v_0 - \frac{ge^2}{8\nu}.$$

Cette dernière expression montre que le champ de vitesse est symétrique par rapport au plan médian des plaques, ce qui était prévisible.

Le débit volumique a maintenant pour expression :

$$\begin{aligned} D_V &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^e \vec{v} \cdot dx dy \vec{u}_z = \int_0^e v(y) dy = \int_0^e \left( \frac{gy^2}{2\nu} - \frac{ge}{2\nu}y + v_0 \right) dy \\ &= \left[ \frac{gy^3}{6\nu} - \frac{ge}{2\nu} \frac{y^2}{2} + v_0 y \right]_0^e = \frac{ge^3}{6\nu} - \frac{ge^3}{4\nu} + v_0 e = \left( \frac{v_0}{e} - \frac{ge}{12\nu} \right) e^2. \end{aligned}$$

Sous cette forme, on constate que ce n'est pas le double de celui obtenu avec un seul plan mobile comme on aurait pu le croire a priori.

9.2. On obtient sur chaque élément infinitésimal de surface du plan  $y = 0$  :

$$d\vec{F}'_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = \eta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} dS \vec{u}_z = -\frac{\eta ge}{2\nu} dS \vec{u}_z = -\frac{\mu ge}{2} dS \vec{u}_z$$

et sur chaque élément infinitésimal de surface de l'autre plan :

$$d\vec{F}'_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = \eta \left( \frac{\partial v}{\partial (-y)} \right)_{y=e} dS \vec{u}_z = -\frac{\eta ge}{2\nu} dS \vec{u}_z = -\frac{\mu ge}{2} dS \vec{u}_z.$$

Il est naturel de trouver le même résultat pour ces deux forces étant donnée la symétrie du champ de vitesse.

La puissance élémentaire fournie par le moteur aux deux tapis roulants doit compenser l'action freinatrice du fluide et a donc pour expression :

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= -\left(d\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} + d\vec{F}'_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}}\right) \cdot \vec{v}_0 = \mu g e dS \vec{u}_z \cdot v_0 \vec{u}_z \\ &= \mu g e v_0 dS. \end{aligned}$$

On obtient ainsi pour la puissance par unité de longueur :

$$\mathcal{P} = \int_{z=0}^H d\mathcal{P} = \mu g e v_0 H.$$

9.3. On a maintenant :

$$v_0 = \frac{D_V}{e} + \frac{g e^2}{12\nu} \text{ et par conséquent :}$$

$$\mathcal{P} = \mu g e H \left( \frac{D_V}{e} + \frac{g e^2}{12\nu} \right).$$

9.4. On obtient numériquement :

$$\mathcal{P} = 10^3 \times 10 \times 10^{-2} \times 5 \times \left( \frac{10^{-3}}{10^{-2}} + \frac{10 \times 10^{-4}}{12 \times 10^{-3}} \right) = 91,7 \text{ W.m}^{-1}.$$

La valeur est nettement moins élevée pour un même débit. C'est conforme à ce que l'on attendait. La nécessité d'entraîner les deux plans justifie bien le gain en débit et permet une économie d'énergie d'environ 40 %  $\left( \frac{158,9 - 91,7}{158,9} \approx 0,42 \right)$ .

## EXERCICE 3

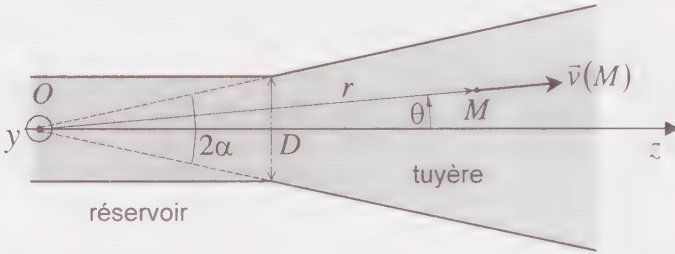
### Forces de contact sur les parois d'une tuyère

Deux plans infinis forment un dièdre d'arête  $y'y$  et d'angle  $2\alpha$  et délimitent une tuyère divergente dans laquelle s'écoule un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , alimentée par un réservoir. On cherche à déterminer la résultante des forces que la tuyère subit par unité de longueur. Au raccordement avec le réservoir, elle a une largeur  $D$ . On définit une origine  $O$  au niveau de l'arête du dièdre et on introduit l'axe  $Oz$  de la tuyère. Un point  $M$  du fluide est repéré par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . On se place en régime stationnaire laminaire, ce qui permet de supposer le problème invariant suivant  $Oy$ .

Dans ces conditions, le laplacien et la divergence s'écrivent respectivement :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \text{et} \quad \text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}.$$

On admet également que  $yOz$  est plan de symétrie de l'écoulement et on ne tient pas compte de la pesanteur. La pression hors de la tuyère (dans l'air) est notée  $P_0$ .



1. Sous quelle forme faut-il chercher  $\vec{v}(M)$  et  $P(M)$  ? Quelles sont les conditions aux limites sur le champ de vitesse ?

2. Dédire de l'équation de continuité que la vitesse peut se mettre sous la forme

$$\vec{v}(M) = v \frac{f(\theta)}{r} \vec{u}_r, \quad \text{où } f \text{ est une fonction paire sans dimension}$$

3. Projeter l'équation du mouvement sur les directions définies par les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  et donner les deux équations aux dérivées partielles que vérifie  $f$  et  $P$ .

4.1. En éliminant la pression, donner l'équation différentielle du troisième ordre dont est solution  $f$ . Montrer qu'elle s'intègre en :

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + 4f + f^2 = A, \quad \text{où } A \text{ est une constante.}$$

4.2. En déduire que  $P$  et  $f$  sont liées par :

$$\frac{P}{\mu} = \frac{2v^2}{r^2} \left( f - \frac{A}{4} \right) + \frac{P_0}{\mu}.$$

4.3. Intégrer une seconde fois l'équation vérifiée par  $f$  après multiplication par  $\frac{df}{d\theta}$ .

Quelles conditions sur  $f$  et sa dérivée première permettent de déterminer les deux constantes d'intégration ? Que peut-on dire de la résolution de la nouvelle équation ?

5. Définir un nombre de Reynolds local dans la tuyère en fonction de  $f(0)$ . Que remarque-t-on ?

6. On se limite à un écoulement de très faible nombre de Reynolds, alors que  $\alpha$  n'est pas forcément petit. En déduire que l'équation différentielle à résoudre prend la forme approchée :

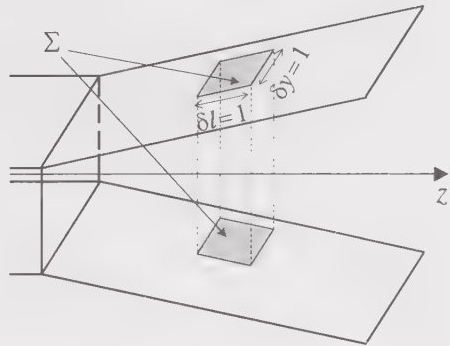
$$\frac{df}{d\theta} \approx \pm \sqrt{A(f - f(0))}.$$

7. Donner l'expression de  $f(\theta)$  en tenant compte des conditions aux limites et de parité.

8. Déterminer le débit volumique  $q$  par unité de longueur le long de  $Oy$ . Que constate-t-on ? Est-ce normal ? A partir de quelle question ce résultat était-il imposé ? Exprimer  $\vec{v}(M)$  en fonction de  $q$ ,  $\alpha$ ,  $r$  et  $\theta$ .

9. Représenter le profil de vitesse dans la tuyère pour quelques valeurs de  $r$ .

10.1. Calculer la contrainte de viscosité sur une paroi en fonction de  $\eta = \mu v$  (viscosité dynamique),  $q$ ,  $\alpha$  et  $r$ . En déduire la force de viscosité  $\vec{F}_v$  s'exerçant sur l'ensemble  $\Sigma$  des deux éléments de paroi de surface unité en regard (Cf. figure ci-contre).



10.2. Calculer la résultante  $\vec{F}_\pi$  des forces de pression s'exerçant sur la même surface.

10.3. En déduire la résultante des forces exercées sur la même surface.

10.4. Quelle est enfin la résultante  $\vec{\mathcal{F}}$  de ces forces par unité de longueur de la tuyère le long de  $Oy$  ? L'exprimer en fonction de  $q$ ,  $D$ ,  $\alpha$  et  $\eta$ . Comment est-elle orientée selon les valeurs de  $\alpha$  ? Pour quelles raisons physiques ?

11. On prend  $q = 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $D = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\mu = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (fluide très dense et très visqueux). L'approximation introduite à la question 6 est-elle vérifiée ? Calculer l'intensité de  $\vec{\mathcal{F}}$ . A-t-elle un effet sensible ?

1. Un écoulement laminaire est régulier. Il est donc naturel de chercher dans la tuyère un écoulement radial, soit  $\vec{v}(M) = v(r, \theta) \vec{u}_r$ . La vitesse s'annule sur la tuyère car le fluide visqueux adhère aux obstacles. On doit donc avoir  $\vec{v}(r, \theta = \pm\alpha) = \vec{0}$ .

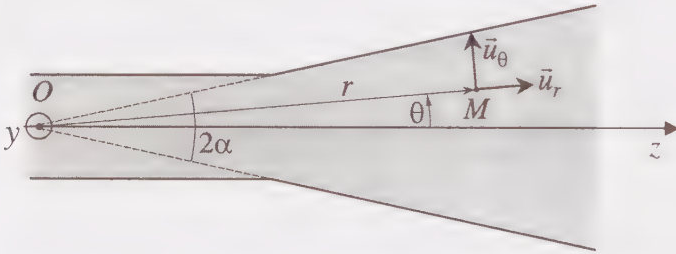
Quant à la pression, elle doit être également de la forme  $P(M) = P(r, \theta)$  du fait de l'invariance par translation le long de  $Oy$ .

2. L'équation de continuité se limite ici à :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \text{ et s'intègre en } rv = F(\theta).$$

La fonction  $F$  qui apparaît est homogène au produit d'une longueur et d'une vitesse. Elle a par conséquent la même dimension que la viscosité cinématique. C'est pourquoi il existe une fonction sans dimension  $f$  telle que  $F(\theta) = \nu f(\theta)$ . On écrit donc la

vitesse sous la forme  $\vec{v}(M) = \nu \frac{f(\theta)}{r} \vec{u}_r$ , car il est toujours plus aisé de raisonner sur une fonction sans dimension quand on doit résoudre une équation différentielle délicate (et c'est un euphémisme de qualifier ainsi l'équation du mouvement des fluides visqueux !). La parité de la fonction provient du fait qu'on doit avoir  $v(r, \theta) = v(r, -\theta)$  puisque  $yOz$  est plan de symétrie de l'écoulement.



3. L'équation du mouvement s'écrit ici (régime stationnaire et sans champ de forces extérieures) :

$$(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = - \frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}.$$

Le terme de viscosité a pour expression :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \nu \frac{f(\theta)}{r} \vec{u}_r \right] \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \nu \frac{f(\theta)}{r} \vec{u}_r \right) \\ &= \frac{\nu f(\theta)}{r} \frac{d}{dr} \left( -\frac{1}{r} \right) \vec{u}_r + \frac{\nu}{r^3} \frac{d^2}{d\theta^2} (f(\theta) \vec{u}_r) = \frac{\nu f(\theta)}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\nu}{r^3} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{df}{d\theta} \vec{u}_r + f(\theta) \vec{u}_\theta \right) \\ &= \frac{\nu f(\theta)}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\nu}{r^3} \left( \frac{d^2 f}{d\theta^2} \vec{u}_r + 2 \frac{df}{d\theta} \vec{u}_\theta - f(\theta) \vec{u}_r \right) \\ &= \frac{\nu}{r^3} \left( \frac{d^2 f}{d\theta^2} \vec{u}_r + 2 \frac{df}{d\theta} \vec{u}_\theta \right). \end{aligned}$$

Le terme non linéaire n'est pas identiquement nul (ce qui n'est pas rassurant) :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \left( v \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( v \frac{f(\theta)}{r} \vec{u}_r \right) = -vV \frac{f(\theta)}{r^2} \vec{u}_r = -v^2 \frac{f^2(\theta)}{r^3} \vec{u}_r.$$

On obtient ainsi les deux projections :

$$\begin{cases} v^2 \frac{f^2}{r^3} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{v^2}{r^3} \frac{d^2 f}{d\theta^2}, \\ 0 = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{2v^2}{r^3} \frac{df}{d\theta}. \end{cases}$$

4.1. Pour éliminer la pression, on dérive la première équation par rapport à  $\theta$  et la seconde par rapport à  $r$  après l'avoir multipliée par  $r$  :

$$\begin{cases} 2v^2 \frac{f}{r^3} \frac{df}{d\theta} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta \partial r} - \frac{v^2}{r^3} \frac{d^3 f}{d\theta^3} \\ 0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} + \frac{4v^2}{r^3} \frac{df}{d\theta} \end{cases}$$

et on en déduit en les soustrayant :

$$2v^2 \frac{f}{r^3} \frac{df}{d\theta} = -\frac{4v^2}{r^3} \frac{df}{d\theta} - \frac{v^2}{r^3} \frac{d^3 f}{d\theta^3}, \text{ soit encore :}$$

$$\frac{d^3 f}{d\theta^3} + (4 + 2f) \frac{df}{d\theta} = 0.$$

Cette équation s'intègre une première fois en :

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + 4f + f^2 = A \text{ avec } A \text{ constante.}$$

4.2. La pression dans le fluide s'obtient en reprenant les deux équations aux dérivées partielles déduites de l'équation du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{v^2}{r^3} \left( \frac{d^2 f}{d\theta^2} + f^2 \right) \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{2v^2}{r^2} \frac{df}{d\theta} \end{cases}$$

et la seconde équation s'intègre immédiatement en :

$$\frac{P}{\mu} = \frac{2v^2}{r^2} f(\theta) + g(r).$$

Quand on reporte ceci dans la première équation il vient :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{4v^2}{r^3} f + \frac{dg}{dr} = \frac{v^2}{r^3} \left( \frac{d^2 f}{d\theta^2} + f^2 \right).$$

On en déduit :

$$\frac{dg}{dr} = \frac{v^2}{r^3} \left( \frac{d^2 f}{d\theta^2} + f^2 + 4f \right) = \frac{Av^2}{r^3} \quad \text{et on obtient :}$$

$$g = -\frac{Av^2}{2r^2} + \text{cte}$$

Finalement, la pression dans le fluide est donnée par :

$$\frac{P}{\mu} = \frac{2v^2}{r^2} f(\theta) - \frac{Av^2}{2r^2} + \text{cte} = \frac{2v^2}{r^2} \left( f(\theta) - \frac{A}{4} \right) + \text{cte}.$$

A l'infini, le fluide est au repos ( $\vec{v}$  varie en  $\frac{1}{r}$ ) et on doit retrouver la pression extérieure  $P_0$ . On en déduit  $\text{cte} = \frac{P_0}{\mu}$ .

4.3. On multiplie l'équation obtenue à la fin de la question 4.1 par  $\frac{df}{d\theta}$ .

$$\frac{df}{d\theta} \frac{d^2 f}{d\theta^2} + 4 \frac{df}{d\theta} f + \frac{df}{d\theta} f^2 = A \frac{df}{d\theta}$$

et on intègre une seconde fois :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{df}{d\theta} \right)^2 + 2f^2 + \frac{f^3}{3} = Af + \text{cte}.$$

Cette équation contient deux constantes d'intégration inconnues (puisque  $A$  est encore indéterminée). Les conditions aux limites d'adhérence à la paroi s'écrivent :

$$f(\pm \alpha) = 0 \quad \text{et imposent} \quad \text{cte} = \frac{1}{2} \left( \frac{df}{d\theta} \right)^2_{\text{paroi}}$$

La parité permet d'affirmer que  $\frac{df}{d\theta}$  est nulle pour  $\theta = 0^2$ , soit :

$$2f^2(0) + \frac{f^3(0)}{3} = Af(0) + \text{cte}.$$

Ceci détermine les deux constantes si on se donne  $f$  sur l'axe de la tuyère et sa dérivée sur les parois.

Par ailleurs, l'équation n'étant pas linéaire, la solution doit dépendre fortement de ces données, ce qui complique la situation déjà embarrassante de l'impossibilité de sa résolution analytique.

5. Localement, à une cote  $z = d$ , on peut définir un nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  avec la largeur de la tuyère, égale à  $2d \tan \alpha$ , et la vitesse du fluide sur l'axe, égale à  $v \frac{f(0)}{d}$ . On écrit ainsi :

$$\mathcal{R} = \left| v \frac{f(0)}{d} \right| \times 2d \tan \alpha \times \frac{1}{v} = 2|f(0)| \tan \alpha.$$

On constate qu'il se conserve le long de la tuyère, ceci provenant du fait que  $v$  varie en  $\frac{1}{r}$ , ce qui compense l'augmentation de largeur.

6. Si  $\mathcal{R}$  est faible devant 1 sans que  $\alpha$  le soit, on a nécessairement  $|f(0)| \ll 1$ . On peut admettre qu'il en est de même pour  $f(\theta)$  puisque, devant s'annuler sur les parois, elle n'est vraisemblablement nulle part très supérieure à sa valeur sur l'axe. On suppose donc :

$$|f^3| \ll f^2 \ll |f| \ll 1,$$

ce qui permet d'écrire l'équation différentielle sous forme approchée :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{df}{d\theta} \right)^2 \approx Af + \text{cte},$$

ou encore, sachant que  $\frac{df}{d\theta}$  est nulle sur l'axe :

$$\frac{df}{d\theta} \approx \pm \sqrt{2A(f - f(0))}.$$

<sup>2</sup> Si ce n'était pas le cas, la fonction pourrait encore être paire mais ne serait pas dérivable sur l'axe et on ne pourrait pas y calculer de contrainte tangentielle, ce qui n'a bien sûr pas de sens.

7. On sépare les variables :

$$\frac{df}{\sqrt{2A(f - f(0))}} \approx \pm d\theta \quad \text{et on intègre :}$$

$$\sqrt{2A(f - f(0))} \approx \pm A\theta + K.$$

Il vient en élevant au carré :

$$f(\theta) \approx f(0) + \frac{(\pm A\theta + K)^2}{2A}.$$

Avec les conditions  $\left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0$  et  $f(\pm\alpha) = 0$  on obtient  $K = 0$  et  $A = -\frac{2f(0)}{\alpha^2}$ .

Finalement la solution est :

$$f(\theta) \approx f(0) - \frac{f(0)}{\alpha^2} \theta^2 = f(0) \left[ 1 - \frac{\theta^2}{\alpha^2} \right].$$

8. On a par définition :

$$\begin{aligned} q &= \int_{\text{tuyère}} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{y=0}^1 \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} v \frac{f(\theta)}{r} \vec{u}_r \cdot r d\theta dy \vec{u}_r = v \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\theta) d\theta \\ &= v f(0) \int_{-\alpha}^{\alpha} \left( 1 - \frac{\theta^2}{\alpha^2} \right) d\theta = v f(0) \left[ \theta - \frac{\theta^3}{3\alpha^2} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = v f(0) \left[ 2\alpha - \frac{2\alpha^3}{3\alpha^2} \right] \\ &= \frac{4\alpha v f(0)}{3}. \end{aligned}$$

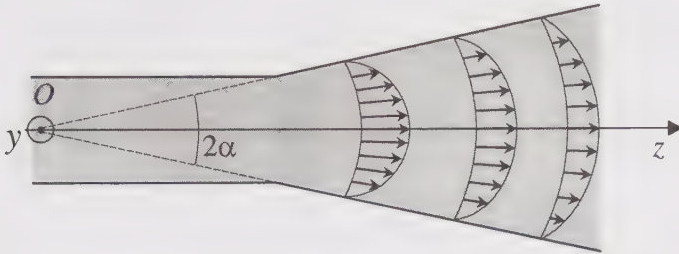
On remarque que ce débit ne dépend pas de  $r$  et se conserve ainsi le long de la tuyère. Il ne peut pas en être autrement pour un fluide incompressible. Cette conservation est déjà inscrite dans l'équation de continuité  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  et était par conséquent inévitable à partir de la question 2.

On écrit finalement :

$$\vec{v}(M) = v \frac{f(\theta)}{r} \vec{u}_r = v f(0) \left[ 1 - \frac{\theta^2}{\alpha^2} \right] \frac{\vec{u}_r}{r} = \frac{3q}{4\alpha} \left[ 1 - \frac{\theta^2}{\alpha^2} \right] \frac{\vec{u}_r}{r}.$$

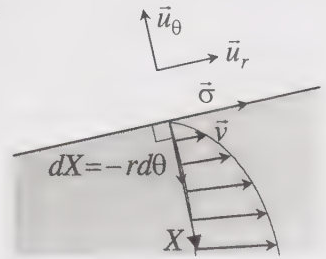
9. On obtient le profil de la page suivante dans la tuyère. La vitesse décroît sur l'axe en  $\frac{1}{r}$ , où elle est maximale, et décroît monotonement, à  $r$  donné, vers les parois.

Dans le réservoir, de section uniforme, on doit retrouver un profil parabolique en variables cartésiennes.



10.1. Sur la paroi supérieure, la contrainte tangentielle exercée par le fluide s'écrit, en utilisant la coordonnée  $X$  orientée dans le sens paroi  $\rightarrow$  fluide :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \eta \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)_{X=0} \bar{u}_r = -\frac{\eta}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha} \bar{u}_r = \frac{\eta}{r^2} \frac{3q}{4\alpha} \frac{2}{\alpha} \bar{u}_r \\ &= \frac{3\eta q}{2\alpha^2 r^2} \bar{u}_r. \end{aligned}$$



Sur l'autre paroi elle a nécessairement la même expression puisque l'écoulement est symétrique par rapport au plan  $yOz$ . La résultante des forces de viscosité étant par symétrie portée par  $\bar{u}_z$ , on en déduit sur la surface unitaire  $\Sigma$  :

$$\vec{F}_v = (2\Sigma \bar{\sigma} \cdot \bar{u}_z) \bar{u}_z = \frac{3\eta q}{\alpha^2 r^2} \cos \alpha \bar{u}_z.$$

10.2. A la question 4.2 on a obtenu :

$$\frac{P}{\mu} = \frac{2v^2}{r^2} \left( f(\theta) - \frac{A}{4} \right) + \frac{P_0}{\mu}.$$

Avec :

$$f(\theta) = \frac{3q}{4\alpha v} \left( 1 - \frac{\theta^2}{\alpha^2} \right) \text{ et } A = -\frac{2f(0)}{\alpha^2} = -\frac{3q}{2\alpha^3 v}$$

la pression s'écrit finalement :

$$P = \frac{2v^2 \mu}{r^2} \left( \frac{3q}{4\alpha v} \left( 1 - \frac{\theta^2}{\alpha^2} \right) + \frac{3q}{8\alpha^3 v} \right) + P_0 = \frac{3q\eta}{2\alpha r^2} \left( 1 + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\theta^2}{\alpha^2} \right) + P_0.$$

La force de pression exercée par le fluide sur une surface élémentaire de la paroi supérieure est alors :

$$d\vec{F} = -P(r, \theta = \alpha)dS = P(r, \theta = \alpha)dS\vec{u}_\theta = \left( \frac{3q\eta}{4\alpha^3 r^2} + P_0 \right) dS\vec{u}_\theta.$$

tandis que celle exercée par l'environnement extérieur sur le même élément est :

$$d\vec{F}' = -P_0 dS\vec{u}_\theta.$$

La résultante a pour expression :

$$d\vec{F} + d\vec{F}' = \frac{3q\eta}{4\alpha^3 r^2} dS\vec{u}_\theta$$

et, comme sur l'autre paroi elle doit avoir la même expression du fait de la symétrie de l'écoulement, on obtient par unité de surface :

$$\vec{F}_\pi = \int [2(d\vec{F} + d\vec{F}') \cdot \vec{u}_z] \vec{u}_z = -\frac{3q\eta}{2\alpha^3 r^2} \sin \alpha \vec{u}_z.$$

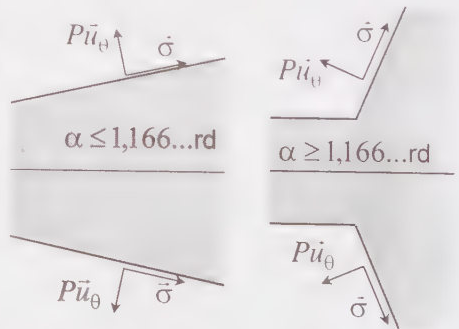
10.3. La résultante de toutes ces forces s'écrit par conséquent :

$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_\pi = \frac{3\eta q}{\alpha^2 r^2} \cos \alpha \vec{u}_z - \frac{3q\eta}{2\alpha^3 r^2} \sin \alpha \vec{u}_z = \frac{3\eta q}{\alpha^2 r^2} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{2\alpha} \right) \vec{u}_z.$$

10.4. On intègre le long de la tuyère :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{\frac{D}{2\sin \alpha}}^{+\infty} \vec{F} dr = \frac{3\eta q}{\alpha^2} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{2\alpha} \right) \vec{u}_z \int_{\frac{D}{2\sin \alpha}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{6\eta q \sin \alpha}{\alpha^2 D} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{2\alpha} \right) \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Pour  $2\alpha \geq \tan \alpha$ , soit  $\alpha \leq 1,166$  rd, cette force est orientée dans le sens de l'écoulement (la parenthèse est positive). Les forces de viscosité sur les deux parois de la tuyère (qui s'ajoutent) l'emportent sur les forces de pression (qui s'annulent quasiment).



Pour  $2\alpha \leq \tan \alpha$ , c'est-à-dire  $\alpha \geq 1,166$  rd, la force est orientée en sens inverse. Ce sont alors les forces de pression sur les deux parois qui l'emportent (car elles s'ajoutent) sur les forces de viscosité (qui tendent à s'annuler).

11. Avec les résultats de la question 8 on a :

$$f(0) = \frac{3q}{4\alpha v} = \frac{3 \times 10^{-4}}{4 \times \frac{20\pi}{180} \times 10^{-3}} = 0,215.$$

L'approximation  $|f(0)| \ll 1$  n'est pas vraiment vérifiée et notre solution doit donc être considérée comme seulement un bon ordre de grandeur.

Avec  $\alpha = 20^\circ \approx 0,349$  rd on se trouve dans le premier cas et :

$$\mathcal{F} = \frac{6\mu v q \sin \alpha}{\alpha^2 D} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{2\alpha} \right) = 0,0152 \text{ N.m}^{-1}.$$

Elle est trop faible (équivalente au poids d'une masse de 1,5 g répartie sur un mètre de longueur de tuyère) pour avoir un effet observable. Pourtant on avait choisi un fluide de grande viscosité.

On peut vérifier a posteriori que l'écoulement est bien laminaire puisqu'on obtient  $\mathcal{R} = 0,157$ .

## EXERCICE 4

### Résistance mécanique d'une conduite

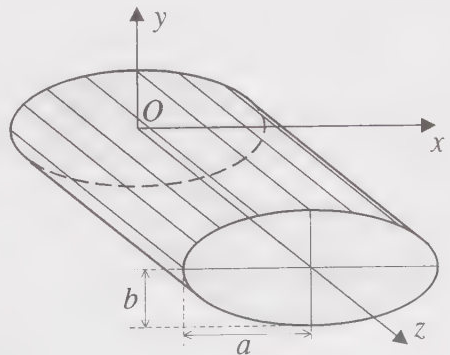
On considère une conduite de section elliptique, de demi-axes  $a$  et  $b$ , d'axe de symétrie  $Oz$ , occupée par un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité dynamique  $\eta$ , s'écoulant en régime laminaire et stationnaire. On prend  $a > b$  et on introduit les axes  $Ox$  et  $Oy$  définis par les directions des deux demi-axes. On ne tient pas compte de la pesanteur.

1. Sous quelle forme faut-il chercher les champs de vitesse et de pression ?

2. Écrire et projeter l'équation du mouvement sur les axes du trièdre. En déduire que la vitesse est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = A,$$

$A$  étant une constante.



3. Quelles sont les conditions aux limites associées à cette équation ? Quelle est l'équation des parois de la conduite en coordonnées cartésiennes ?

4. On prend la vitesse de la forme  $v = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma$ . A quelle condition sur les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  s'agit-il de la solution recherchée ?

5. En déduire l'expression de la vitesse en fonction des paramètres  $A$ ,  $a$  et  $b$ .

6. La conduite a une longueur  $L$  et on observe une chute de pression  $\Delta P$  entre son entrée et sa sortie. Exprimer la pression et la vitesse en fonction des coordonnées, de  $a$ ,  $b$ ,  $L$ ,  $\eta$ ,  $\Delta P$  et  $P_0$  pression à l'entrée.

7. On donne l'intégrale suivante, sur une section droite (elliptique)  $S$  de la conduite :

$$\int_S \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dS = \frac{\pi ab}{2}.$$

7.1. Calculer le débit volumique  $D_V$  dans la conduite.

7.2. En déduire la résistance mécanique de la conduite  $\mathcal{R} = \frac{\Delta P}{D_V}$ . L'exprimer en fonction de  $\eta$ ,  $L$ , de l'aire  $\Sigma$  et de l'excentricité  $e$  de l'ellipse.

7.3. Pour une conduite de longueur et de section données, quelle forme faut-il lui donner pour minimiser la résistance à l'écoulement ? Que retrouve-t-on dans ce cas ?

8. En définissant en un point de la surface de la conduite une coordonnée normale  $n$  dirigée vers l'écoulement, on montre que :

$$\frac{\partial v}{\partial n} = - \frac{b^2 x \frac{\partial v}{\partial x} + a^2 y \frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}.$$

8.1. Exprimer la contrainte tangentielle en fonction  $a$ ,  $b$ ,  $\Delta P$ ,  $L$ ,  $e$  et  $x$  pour un point de la paroi. Où est-elle maximale ?

8.2. Exprimer cette contrainte maximale en fonction de  $\Delta P$ ,  $L$ ,  $\Sigma$  et  $e$ . Quelle forme de la conduite permet de la minimiser sachant que  $x \rightarrow \frac{(1-x)^{1/4}}{2-x}$  est une fonction monotone décroissante entre 0 et 1 ?

9. Peut-on à la fois minimiser la résistance de la conduite et la contrainte sur sa paroi ? D'où vient ce paradoxe ?

1. L'écoulement étant laminaire, les lignes de courant restent parallèles à l'axe de la conduite. On a donc :

$$\vec{v}(M) = v(x, y, z)\vec{u}_z.$$

L'équation de continuité du fluide incompressible :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad \text{donne ici} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

et permet donc d'éliminer la dépendance en  $z$ . On adopte  $\vec{v}(M) = v(x, y)\vec{u}_z$ . Quant à la pression, elle dépend a priori des trois coordonnées spatiales et on ne peut rien écrire d'autre que  $P(M) = P(x, y, z)$ .

2. Le terme inertiel est nul :

$$\left(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$$

et l'équation du mouvement en régime stationnaire devient :

$$\vec{0} = -\frac{\overline{\text{grad}P}}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}, \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\eta}{\mu}.$$

En projetant sur les axes on obtient les trois équations :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

qui montrent notamment que la pression ne dépend que de  $z$  et on se ramène en fait à une seule équation :

$$\frac{dP}{dz} = \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).$$

On a ainsi l'égalité, quels que soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans la conduite, d'une fonction de  $z$  (à gauche) et d'une fonction de  $x$  et  $y$  (à droite). Ceci n'est possible que s'il s'agit d'une seule et même constante. On a par conséquent une équation distincte pour chaque inconnue :

$$\frac{dP}{dz} = \text{cte} \quad \text{et} \quad \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \text{cte}.$$

Il suffit de baptiser  $\eta A$  cette constante pour retrouver les conditions de l'énoncé, sans présumer de son signe.

3. Le fluide visqueux doit adhérer aux parois. Il faut par conséquent résoudre cette équation avec  $v = 0$  sur les limites de la conduite.

Pour une ellipse de demi-axes donnés, lorsque l'origine des coordonnées est au centre, l'équation cartésienne est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. On calcule le laplacien de cette fonction :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2\alpha + 2\beta$$

et on voit qu'il suffit de prendre  $2\alpha + 2\beta = A$  pour que l'équation aux dérivées partielles soit bien respectée. Ensuite, on doit vérifier les conditions aux limites. Sur les parois de la conduite il faut avoir :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0 \text{ lorsque } x \text{ et } y \text{ sont liés par l'équation de l'ellipse.}$$

C'est possible si les coefficients des deux équations quadratiques sont proportionnels, ce qui entraîne la double égalité :

$$a^2\alpha = b^2\beta = -\gamma.$$

On en déduit :

$$\alpha = -\frac{\gamma}{a^2}, \quad \beta = -\frac{\gamma}{b^2} \text{ puis } -\frac{2\gamma}{a^2} - \frac{2\gamma}{b^2} = A, \text{ soit :}$$

$$\gamma = -\frac{A}{2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = -\frac{a^2 b^2 A}{2(a^2 + b^2)} \text{ et enfin :}$$

$$\alpha = \frac{b^2 A}{2(a^2 + b^2)} \text{ et } \beta = \frac{a^2 A}{2(a^2 + b^2)}.$$

5. La vitesse s'écrit finalement :

$$v = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = -\frac{a^2 b^2 A}{2(a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

6. Si on reprend l'équation pour la pression :

$$\frac{dP}{dz} = \eta A, \text{ elle s'intègre en } P = \eta Az + K$$

et, compte tenu des conditions aux limites, on obtient :

$$K = P_0 \text{ et } \eta A = -\frac{\Delta P}{L}, \text{ soit :}$$

$$P = P_0 - \frac{\Delta P}{L} z.$$

La pression décroît linéairement dans la conduite. Ensuite, la vitesse s'écrit :

$$v = -\frac{a^2 b^2 A}{2(a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{a^2 b^2 \Delta P}{2\eta L(a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

7.1. Le débit volumique est le flux de  $\vec{v}$  à travers une section de la conduite :

$$\begin{aligned} D_V &= \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \frac{a^2 b^2 \Delta P}{2\eta L(a^2 + b^2)} \int_S \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dS \\ &= \frac{a^2 b^2 \Delta P}{2\eta L(a^2 + b^2)} \frac{\pi ab}{2} = \frac{\pi a^3 b^3 \Delta P}{4\eta L(a^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

7.2. On obtient ainsi :

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta P}{D_V} = \frac{4\eta L(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}.$$

Avec  $\Sigma = \pi ab$  et  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  on écrit :

$$\Sigma = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \text{ et } b = a \sqrt{1 - e^2} = \left(\frac{\Sigma}{\pi \sqrt{1 - e^2}}\right)^{1/2} \sqrt{1 - e^2} = \left(\frac{\Sigma \sqrt{1 - e^2}}{\pi}\right)^{1/2},$$

ce qui donne :

$$\mathcal{R} = \frac{4\eta L a^2 (2 - e^2)}{\pi a^6 (1 - e^2)^{3/2}} = \frac{4\eta L (2 - e^2)}{\pi a^4 (1 - e^2)^{3/2}} = \frac{4\eta \pi L (2 - e^2)}{\Sigma^2 (1 - e^2)^{1/2}}.$$

7.3. A  $L$  et  $\Sigma$  constants, il faut jouer sur  $e$  (compris entre 0 et 1) pour minimiser cette expression. Le numérateur et le dénominateur étant des fonctions décroissantes de  $e$ , on doit calculer la dérivée pour chercher un éventuel minimum :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e} \left[ \frac{2-e^2}{(1-e^2)^{1/2}} \right] &= \frac{-2e\sqrt{1-e^2} - (2-e^2) \frac{-e}{\sqrt{1-e^2}}}{1-e^2} = \frac{-2e(1-e^2) + e(2-e^2)}{(1-e^2)^{3/2}} \\ &= \frac{e^3}{(1-e^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Cette dérivée est positive. Par conséquent, le minimum de la fonction s'obtient pour la borne inférieure du domaine de définition de  $e$ , à savoir 0. C'est donc la section circulaire qui offre la moindre résistance à l'écoulement. On obtient alors

$$\mathcal{R} = \frac{8\eta\pi L}{\Sigma^2}$$

et on retrouve la résistance de la conduite circulaire, obtenue dans l'étude de l'écoulement de Poiseuille.

8.1. La contrainte subie par la surface de la conduite s'écrit  $\vec{\sigma} = \eta \frac{\partial v}{\partial n} \vec{u}_z$  et on a donc en valeur algébrique :

$$\begin{aligned} \sigma &= -\eta \frac{b^2 x \frac{\partial v}{\partial x} + a^2 y \frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}} = \frac{a^2 b^2 \Delta P \left[ b^2 x \left( \frac{2x}{a^2} \right) + a^2 y \left( \frac{2y}{b^2} \right) \right]}{2L(a^2 + b^2) \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}} \\ &= \frac{a^2 b^2 \Delta P \left( \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2} \right)}{L(a^2 + b^2) \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}} \end{aligned}$$

et on élimine  $y$  en utilisant l'équation de l'ellipse :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{a^2 b^2 \Delta P \left( \frac{b^2 x^2}{a^2} + a^2 - x^2 \right)}{L(a^2 + b^2) \sqrt{b^4 x^2 + a^4 b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)}} \\ &= \frac{\Delta P (b^4 x^2 + a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2)}{L(a^2 + b^2) \sqrt{b^4 x^2 + a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2}}. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\sigma = \frac{\Delta P \sqrt{b^4 x^2 + a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2}}{L(a^2 + b^2)} = \frac{ab \Delta P \sqrt{a^2 - e^2 x^2}}{L(a^2 + b^2)}$$

On voit que la contrainte varie en sens inverse de  $|x|$ . Elle est donc maximale au voisinage de  $x = 0$ , soit  $y = \pm b$ . Il s'agit de la zone de plus faible courbure de la conduite.

8.2. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{a^2 b \Delta P}{L(a^2 + b^2)} = \frac{a^3 \sqrt{1 - e^2} \Delta P}{La^2(1 + 1 - e^2)} = \frac{a \sqrt{1 - e^2} \Delta P}{L(2 - e^2)} \\ &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \Delta P}{L(2 - e^2)} \left[ \frac{\Sigma}{\pi \sqrt{1 - e^2}} \right]^{1/2} = \frac{\Delta P (1 - e^2)^{1/4} \sqrt{\Sigma}}{\sqrt{\pi} L (2 - e^2)} \end{aligned}$$

D'après le renseignement fourni par l'énoncé,  $\sigma_{\max}$  est une fonction monotone décroissante de l'excentricité. C'est donc pour le cas limite  $e = 1$  qu'elle est minimale, et tend même vers 0, ce qui correspond à une ellipse de périmètre quasi parabolique.

9. Nous avons montré précédemment que c'est la forme circulaire qui minimise, pour une section donnée, la résistance de l'écoulement. Il n'est donc pas possible de concilier les deux hypothèses. Cela peut sembler paradoxal puisque la résistance est justement due aux contraintes tangentielles sur les parois. En réalité, lorsque  $e$  tend vers 1, l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction de l'excentricité et de la section :

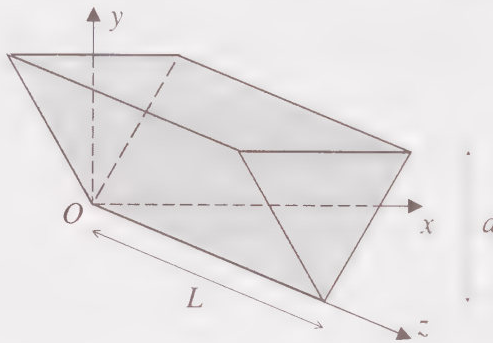
$$\begin{aligned} U &= \frac{D_V}{\Sigma} = \frac{\pi a^3 b^3 \Delta P}{4\eta L(a^2 + b^2)} \frac{1}{\pi ab} = \frac{a^2 b^2 \Delta P}{4\eta La^2(1 + 1 - e^2)} = \frac{a^2(1 - e^2) \Delta P}{4\eta L(2 - e^2)} \\ &= \frac{\Sigma \sqrt{1 - e^2} \Delta P}{4\pi \eta L(2 - e^2)} \end{aligned}$$

montre que celle-ci tend à s'annuler. Comme la vitesse sur les parois est rigoureusement nulle, le gradient transversal de vitesse, de l'ordre de  $\frac{U - 0}{a}$  ou  $\frac{U - 0}{b}$ , tend lui aussi à s'annuler. Il n'est donc pas surprenant que la contrainte le fasse également puisqu'elle est proportionnelle à ce gradient. On minimise en fait la contrainte parce que la résistance de la conduite est suffisamment grande pour imposer partout un champ de vitesse très faible, donc un gradient de vitesse sur les parois lui aussi très petit.

## EXERCICE 5

### Conduite à section triangulaire

On considère une conduite de longueur  $L$ , de section triangulaire équilatérale de hauteur  $a$ , occupée par un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . L'écoulement est stationnaire et laminaire, entretenu par une différence de pression constante  $\Delta P$  entre les extrémités de la conduite. On utilise le trièdre  $Oxyz$ ,  $O$  étant un sommet de sa face d'entrée.  $Oy$  étant une hauteur de celle-ci et  $Oz$  une arête de la conduite. On ne tiendra pas compte de la pesanteur et on notera  $P_0$  la pression à l'entrée de la conduite.



1. Préciser l'orientation du champ de vitesse de l'écoulement et de quelle variables dépendent  $v(M)$  et  $P(M)$ .
2. Montrer que le champ de vitesse vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\Delta P}{\eta L}$$

3. On considère la fonction  $f$  donnée par  $f(x, y) = (a - y)(y^2 - 3x^2)$ . Quelle valeur prend-elle sur les parois de la conduite ? Calculer son laplacien.
- 4.1. En déduire l'expression de  $\vec{v}(M)$ .
- 4.2. Où la vitesse est-elle maximale ?
- 4.3. Représenter le profil de vitesse sur l'axe  $Oy$ . Pourquoi est-il asymétrique ?
5. Représenter sur une section droite  $S$  de la conduite les courbes sur lesquelles la vitesse est uniforme, en indiquant dans quelles directions elle diminue.
- 6.1. Calculer le débit volumique  $D_V$  dans la conduite. L'exprimer en fonction de  $\Delta P$ ,  $\eta$ ,  $L$  et  $S$ .

6.2. En déduire la résistance mécanique  $\mathcal{R}$  de la conduite. La comparer avec celle d'une conduite circulaire de même section.

7.1. Calculer la contrainte tangentielle subie par la face supérieure de la conduite.

7.2. En déduire la force de frottement exercée par l'écoulement sur la conduite. Que retrouve-t-on ?

7.3. L'exprimer en fonction de  $L$ ,  $\eta$  (viscosité dynamique du fluide) et de la vitesse moyenne  $U = \frac{D_V}{S}$ . Comparer qualitativement à la formule de Stokes.

8.1. Quelle puissance  $\mathcal{P}$  faut-il fournir au fluide pour entretenir son mouvement ? L'exprimer en fonction de  $D_V$  et  $\mathcal{R}$ .

8.2. Établir une analogie électrique.

8.3. Que devient cette puissance ? En déduire par un bilan d'énergie sur un intervalle de temps infinitésimal la variation de température du fluide entre l'entrée et la sortie de la conduite si celle-ci est calorifugée. L'exprimer en fonction de  $\mathcal{P}$ ,  $D_V$  et la capacité calorifique volumique  $C_{\text{vol}}$  du fluide.

9. On considère une conduite triangulaire de longueur  $L = 25$  m et de hauteur  $a = 30$  cm, traversée par un hydrocarbure de viscosité dynamique  $\eta = 10^{-2}$  PI et de masse volumique  $\mu = 800$  kg.m<sup>-3</sup>. Calculer sa résistance mécanique et la puissance à fournir pour un débit de 100 l/s. Définir et donner la valeur numérique du nombre de Reynolds de l'écoulement. Commenter.

10.1. Même question avec une pâte pour laquelle  $\eta = 1$  PI et  $\mu = 1300$  kg.m<sup>-3</sup>.

10.2. Quelle différence de pression faut-il fournir dans ce cas ?

10.3. Calculer la variation de température de cette pâte entre l'entrée et la sortie de la conduite avec  $C_{\text{vol}} = 2.10^6$  J.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>. Commenter.

1. L'écoulement étant laminaire, le champ de vitesses est colinéaire à l'axe  $Oz$ . L'équation de continuité du fluide incompressible s'écrit alors :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

et on écrit par conséquent :

$$\vec{v}(M) = v(x, y) \vec{u}_z.$$

Par contre, la pression doit dépendre de  $z$ , notamment parce qu'elle est différente sur les faces d'entrée et de sortie de la conduite, et a priori on a  $P(M) = P(x, y, z)$ .

2. Avec ici :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = v \frac{\partial}{\partial z} v(x, y) \vec{u}_z = \vec{0},$$

l'équation du mouvement est linéaire et très simple puisqu'il n'y a ni champ de forces ni dérivée temporelle :

$$\vec{0} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}.$$

En la projetant sur les axes du trièdre, il vient :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{et} \quad 0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v.$$

La pression ne dépend ainsi que de  $z$  et la troisième équation s'écrit encore :

$$\frac{dP}{dz} = \eta \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v.$$

Il s'agit de l'égalité entre une fonction de  $z$  d'une part et une fonction de  $x$  et  $y$  d'autre part, quelles que soient les valeurs des variables (tout en restant à l'intérieur de la conduite). Les deux membres de l'équation sont donc une même constante  $A$ . On en déduit immédiatement  $P = Az + B$  et, compte tenu des valeurs aux limites :

$$P(0) = P_0 \quad \text{et} \quad P(L) = P_0 - \Delta P$$

puisque la pression est plus faible en aval car c'est elle qui entretient l'écoulement, on trouve aisément :

$$B = P_0 \quad \text{et} \quad A = -\frac{\Delta P}{L}, \quad \text{soit finalement :}$$

$$P(z) = P_0 - \frac{\Delta P}{L} z.$$

Pour la vitesse il vient alors :

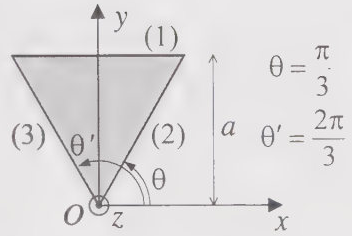
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = A = -\frac{\Delta P}{\eta L}.$$

3. Sur les différentes faces de la conduite (numérotées sur la figure ci-contre) on a :

- face 1  $f(x, a) = 0$ ,

- face 2  $f(x, x \tan \theta) = (a - x\sqrt{3})(3x^2 - 3x^2) = 0$ ,

- face 3  $f(x, x \tan \theta') = (a + x\sqrt{3})(3x^2 - 3x^2) = 0$ .



D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [(a - y)(y^2 - 3x^2)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [-6x(a - y)] + \frac{\partial}{\partial y} [-(y^2 - 3x^2) + 2y(a - y)] \\ &= -6(a - y) - 2y + 2a - 4y = -4a. \end{aligned}$$

Ce laplacien est une constante.

4.1. On constate que, comme  $f$ , la fonction  $\frac{\Delta P}{4a\eta L} f$  s'annule sur les parois de la conduite, respectant ainsi les conditions aux limites du fluide visqueux, et a pour laplacien  $-\frac{\Delta P}{\eta L}$ . Elle constitue donc une solution pour la vitesse de l'écoulement. En vertu de l'unicité des solutions des équations linéaires, c'est la solution complète. On a ainsi :

$$\vec{v}(M) = \frac{\Delta P}{4a\eta L} (a - y)(y^2 - 3x^2) \vec{u}_z.$$

4.2. Pour obtenir le maximum de son module<sup>3</sup>, il faut chercher le lieu d'annulation simultanée des deux dérivées partielles  $\frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial y}$  :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\Delta P}{4a\eta L} [-6x(a - y)],$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\Delta P}{4a\eta L} [2y(a - y) - (y^2 - 3x^2)] = \frac{\Delta P}{4a\eta L} [3x^2 - 3y^2 + 2ay].$$

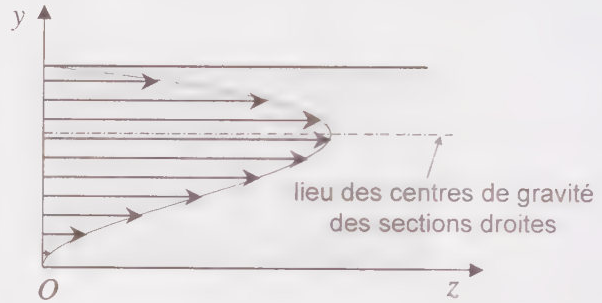
La première équation donne  $x = 0$  (l'autre solution  $y = a$  est inacceptable car sur la paroi supérieure la vitesse est nulle par hypothèse) et on déduit alors de la seconde

<sup>3</sup> qui est aussi sa valeur algébrique car la fonction  $f$  est positive dans le volume de la conduite.

$y = \frac{2a}{3}$  (l'autre solution  $y = 0$  est inacceptable car sur l'arête la vitesse est également nulle). La droite ainsi définie, parallèle à l'axe  $Oz$ , est l'ensemble des centres de gravité des triangles équilatéraux formés par les sections droites de la conduite. Elle constitue un axe de symétrie d'ordre trois de celle-ci.

4.3. Sur l'axe  $Oy$  on a  $x = 0$  et donc  $\vec{v}(M) = \frac{\Delta P}{4a\eta L} (a - y)y^2 \vec{u}_z$ . On obtient un

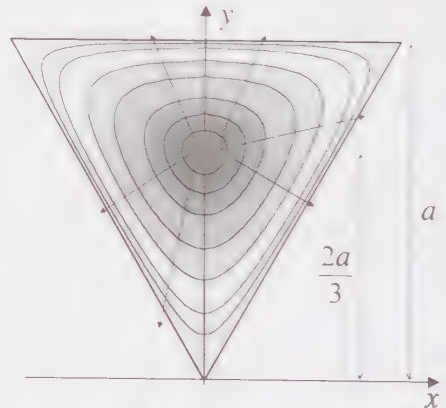
profil cubique. Le plan d'équation  $y = \frac{a}{2}$  n'étant pas de symétrie de la conduite, il n'y a aucune raison pour que ce profil de vitesse présente une symétrie par rapport à ce plan. D'ailleurs, la vitesse est maximale pour  $y = \frac{2a}{3}$  et donc on ne peut que trouver un profil « gauche ».



5. Sur une courbe de vitesse uniforme on a :

$$(a - y)(y^2 - 3x^2) = \text{cte}, \text{ soit } x = \pm \sqrt{\frac{y^2}{3} - \frac{K}{a - y}}$$

Il s'agit de courbes symétriques par rapport à l'axe  $Oy$  puisque les abscisses  $x$  et  $-x$  correspondent à une même valeur de  $y$ . On peut même préciser qu'étant donnée la symétrie du problème ces courbes doivent être invariantes par rotation de  $\frac{\pi}{3}$  par rapport à l'axe passant par le centre de gravité  $G$  du triangle équilatéral et normal à  $S$ . On retrouve cette propriété sur la figure précédente, les flèches indiquant la direction dans laquelle la vitesse décroît le plus rapidement (la décroissance la plus rapide étant le long des courbes orthogonales en chacun de leur point aux lignes de niveau de  $v$  par définition du gradient).



6.1. Pour décrire la surface du triangle équilatéral, on fait d'abord varier pour une ordonnée fixée l'abscisse  $x$  de  $-\frac{y}{\tan(\pi/3)} = -\frac{y}{\sqrt{3}}$  à  $\frac{y}{\sqrt{3}}$ , puis  $y$  de 0 à  $a$ . On obtient ainsi une intégrale double à bornes liées :

$$D_V = \int_S v \bar{u}_z \cdot dS \bar{u}_z = \frac{\Delta P}{4a\eta L} \int_{y=0}^a \int_{x=-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}} (a-y)(y^2 - 3x^2) dx dy$$

et le calcul donne :

$$\begin{aligned} D_V &= \frac{\Delta P}{4a\eta L} \int_0^a (a-y) \left[ y^2 x - x^3 \right]_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}} dy \\ &= \frac{\Delta P}{4a\eta L} \int_0^a (a-y) \left[ y^2 \frac{2y}{\sqrt{3}} - \frac{2y^3}{3\sqrt{3}} \right] dy \\ &= \frac{\Delta P}{3\sqrt{3} a\eta L} \int_0^a (a-y) y^3 dy = \frac{\Delta P}{3\sqrt{3} a\eta L} \left[ \frac{ay^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right]_0^a \\ &= \frac{\Delta P}{3\sqrt{3} a\eta L} \left[ \frac{a^5}{4} - \frac{a^5}{5} \right] = \frac{a^4 \Delta P}{60\sqrt{3} \eta L}. \end{aligned}$$

Le triangle a pour base  $\frac{a}{\cos(\pi/6)} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$  et son aire est donc :

$$S = \frac{a}{2} \times \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}.$$

On peut ainsi réécrire le débit volumique :

$$D_V = \frac{S^2 \Delta P}{20\sqrt{3} \eta L}.$$

6.2. La résistance de la conduite est :

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta P}{D_V} = \frac{20\sqrt{3} \eta L}{S^2}.$$

Celle d'une conduite circulaire est (formule de Poiseuille) :

$$\mathcal{R}' = \frac{8\pi\eta L}{S^2}, \text{ ce qui donne :}$$

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'} = \frac{20\sqrt{3}}{8\pi} = \frac{5\sqrt{3}}{2\pi} \approx 1,38.$$

Le fait que  $\mathcal{R}$  soit supérieure à  $\mathcal{R}'$  s'explique par la plus grande surface de contact avec le fluide pour la conduite triangulaire, soit :

$$3 \times \frac{2a}{\sqrt{3}} L = 2\sqrt{3}L(\sqrt{3}S)^{1/2} \approx 4,56L\sqrt{S} \text{ au lieu de :}$$

$$2\pi RL = 2\pi L\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 3,54L\sqrt{S}.$$

Le rapport de ces deux surfaces est environ égal à 1,29. Il n'est pas identique à celui des résistances mais en est proche.

7.1. La contrainte que subit la paroi supérieure est :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \eta \left( \frac{\partial v}{\partial(-y)} \right)_{y=a} \vec{u}_z = -\frac{\Delta P}{4aL} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left[ (a-y)(y^2 - 3x^2) \right] \right)_{y=a} \vec{u}_z \\ &= -\frac{\Delta P}{4aL} (3x^2 - y^2 - 2y(a-y))_{y=a} \vec{u}_z = \frac{\Delta P}{4aL} (a^2 - 3x^2) \vec{u}_z. \end{aligned}$$

7.2. La force de frottement qu'elle subit s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{x=-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \int_{z=0}^L \vec{\sigma} dx dz = \frac{\Delta P}{4aL} \int_{x=-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \int_{z=0}^L (a^2 - 3x^2) dx dz \vec{u}_z \\ &= \frac{\Delta P}{4a} \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} (a^2 - 3x^2) dx \vec{u}_z = \frac{\Delta P}{4a} [a^2 x - x^3]_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \vec{u}_z \\ &= \frac{\Delta P}{2a} \left( \frac{a^3}{\sqrt{3}} - \frac{a^3}{3\sqrt{3}} \right) \vec{u}_z = \frac{a^2 \Delta P}{3\sqrt{3}} \vec{u}_z \end{aligned}$$

et, comme celles exercées sur les deux autres parois doivent être identiques par symétrie du problème, la force totale de frottement est :

$$\vec{F}_f = 3\vec{F} = \frac{a^2 \Delta P}{\sqrt{3}} \vec{u}_z.$$

On reconnaît en  $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$  l'aire d'un triangle équilatéral de hauteur  $a$ . Donc l'expression

trouvée correspond à la résultante des forces de pression (en entrée et en sortie) que subit le fluide contenu dans la conduite. Celle-ci exerçant sur ce fluide une force égale à  $-\vec{F}_f$ , d'après le principe de l'action et de la réaction, on constate que la somme des forces que subit le fluide est nulle. Étant donné qu'aucune particule fluide n'est accélérée dans la conduite, il est normal d'obtenir un tel résultat. Les forces motrices de pression compensent exactement les forces freinatrices de viscosité et c'est pour cette raison qu'on reste en régime stationnaire.

7.3. Avec pour vitesse moyenne :

$$U = \frac{D_V}{S} = \frac{a^4 \Delta P}{60\sqrt{3}\eta L} \frac{\sqrt{3}}{a^2} = \frac{a^2 \Delta P}{60\eta L} \quad \text{on obtient} \quad \vec{F}_t = \frac{60\eta L U}{\sqrt{3}} \vec{u}_z.$$

La force de frottement est proportionnelle à la viscosité dynamique du fluide, à sa vitesse moyenne et à une des deux longueurs caractéristiques de la conduite. On retrouve les mêmes dépendances dans le cas de la sphère avec la formule de Stokes. Mais, dans ce dernier cas, une seule distance caractéristique est définie, le rayon de la sphère, alors qu'ici on aurait pu hésiter a priori entre  $L$  et  $a$ .

8.1. La puissance fournie par les forces de pression à l'entrée et à la sortie de la conduite s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int \vec{v} \cdot P d\vec{S} = \int \vec{v} \cdot P(z=0) dS \vec{u}_x + \int \vec{v} \cdot P(z=L) dS (-\vec{u}_x) \\ &= P_0 \int v dS - (P_0 - \Delta P) \int v dS = P_0 D_V - (P_0 - \Delta P) D_V = \Delta P D_V = \mathcal{R} D_V^2. \end{aligned}$$

8.2. De même que la définition  $\mathcal{R} = \frac{\Delta P}{D_V}$  est l'équivalent de la loi d'Ohm  $R = \frac{\Delta V}{I}$

reliant résistance électrique, différence de potentiel et intensité de courant, l'expression que nous venons d'établir  $\mathcal{P} = \mathcal{R} D_V^2$  est l'équivalent mécanique de la loi de Joule  $\mathcal{P} = RI^2$ . On a ainsi les correspondances :

- différence de pression  $\leftrightarrow$  différence de potentiel,
- débit volumique  $\leftrightarrow$  intensité (ou débit de charges),
- résistance mécanique  $\leftrightarrow$  résistance électrique,
- puissance mécanique  $\leftrightarrow$  puissance électrique.

8.3. L'énergie « absorbée » par une force de frottement est en fait convertie en énergie interne et augmente la température du système et éventuellement du milieu. Si les parois de la conduite sont calorifugées, il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur et toute l'énergie apportée pour maintenir l'écoulement sert à chauffer le fluide.

Pendant l'intervalle de temps  $dt$ , un volume  $D_V dt$  entre dans la conduite avec une certaine température  $T$ . Dans la même durée, il sort un même volume avec une température  $T'$ . L'énergie interne acquise par le fluide dans ce laps de temps est donc  $C_{\text{vol}} D_V dt (T' - T)$  et on écrit qu'elle s'identifie à l'énergie macroscopique reçue des forces de pression et convertie par les frottements :

$$C_{\text{vol}} D_V dt (T' - T) = \mathcal{P} dt.$$

On en déduit ainsi :

$$T' - T = \frac{\mathcal{P}}{C_{\text{vol}} D_V}.$$

9. La résistance a pour valeur :

$$\mathcal{R} = \frac{20\sqrt{3}\eta L}{S^2} = \frac{60\sqrt{3}\eta L}{a^4} = 3208 \text{ Pl.m}^{-3} \text{ (ou kg.s}^{-1}\text{.m}^{-4}\text{)}.$$

La puissance à fournir vaut alors :

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}D_V^2 = 3208 \times 0,1^2 = 32,08 \text{ W}.$$

On obtient une valeur très faible qui ne semble pas réaliste.

La longueur caractéristique pour définir le nombre de Reynolds est  $a$  plutôt que  $L$  car  $L$  n'intervient notamment pas dans l'expression de la vitesse (c'est sur une distance de l'ordre de  $a$  et non de  $L$  que la vitesse varie de manière significative). On adopte donc :

$$\mathcal{R} = \frac{Ua}{\nu} \text{ et il vaut ici :}$$

$$\mathcal{R} = \frac{\mu Ua}{\eta} = \frac{\mu D_V a}{\eta S} = \frac{\sqrt{3}\mu D_V}{\eta a} = \frac{\sqrt{3} \times 800 \times 10^{-1}}{10^{-2} \times 0,3} \approx 46000.$$

C'est une valeur trop élevée pour être compatible avec un régime laminaire. La résistance de la conduite ne peut donc pas se calculer par notre modèle. C'est pour cette raison qu'on obtient une puissance trop faible.

10.1. La résistance est multipliée par le rapport 100 des viscosités, le débit restant le même. Donc la puissance est  $\mathcal{P} = 3208 \text{ W}$ . Le nombre de Reynolds devient :

$$\mathcal{R} = \frac{\sqrt{3}\mu D_V}{\eta a} = \frac{\sqrt{3} \times 1300 \times 10^{-1}}{1 \times 0,3} \approx 750.$$

Cette fois l'écoulement est bien laminaire et notre calcul est acceptable.

10.2. Il faut fournir entre les extrémités de la conduite une différence de pression :

$$\Delta P = \mathcal{R}D_V = 3208 \times 100 \times 10^{-1} = 32080 \text{ Pa} = 0,3208 \text{ bar}.$$

10.3. Le fluide s'échauffe de :

$$T' - T = \frac{3208}{2.10^6 \times 10^{-1}} = 0,016 \text{ K}.$$

C'est entièrement négligeable. Il y a finalement peu de dissipation d'énergie par les forces de viscosité (parce que l'écoulement est lent puisqu'avec les valeurs de  $D_V$  et de  $a$  on obtient une vitesse moyenne  $U \approx 2 \text{ m.s}^{-1}$ ).

# TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS	5
--------------	---

## STATIQUE

EXERCICE 1	Stabilité de l'atmosphère	7
EXERCICE 2	Plafond d'un aérostat	12
EXERCICE 3	Modèle polytropique d'une étoile	21
EXERCICE 4	Équilibre d'un navire	31

## SYSTEMES OUVERTS – THEOREME DE BERNOULLI

EXERCICE 1	Polaire d'une aile d'avion	37
EXERCICE 2	Déviation d'une plaque par un jet	41
EXERCICE 3	Sustentation d'une plaque	49
EXERCICE 4	Étude de stabilité dynamique	54

## FLUIDES PARFAITS NON STATIONNAIRES

EXERCICE 1	Vidange d'un récipient conique	63
EXERCICE 2	Libération d'un gaz contenu dans une bouteille	73
EXERCICE 3	Entrée d'air dans un moteur thermique – courbe de couple	80
EXERCICE 4	Oscillations d'un baromètre	89
EXERCICE 5	Liquide en suspension	97

## ÉCOULEMENTS POTENTIELS

EXERCICE 1	Association de sources	103
EXERCICE 2	Source placée dans un jet	113
EXERCICE 3	Interaction de deux tourbillons	121
EXERCICE 4	Superposition d'un doublet et d'un jet – écoulement autour d'une sphère	128
EXERCICE 5	Coefficient de traînée d'une plaque rectangulaire	136
EXERCICE 6	Coefficient de traînée d'une demi-sphère	147
EXERCICE 7	Oscillations d'une bulle dans un fluide	150
EXERCICE 8	Dilution d'une bulle dans un fluide	164

<b>EXERCICE 9</b> Source tournante	172
<b>EXERCICE 10</b> Déviation d'un jet par un plan	178

### ÉCOULEMENTS LAMINAIRES STATIONNAIRES

<b>EXERCICE 1</b> Couche limite laminaire	187
<b>EXERCICE 2</b> Formule de Stokes	196
<b>EXERCICE 3</b> Jet plan laminaire	205
<b>EXERCICE 4</b> Sillage laminaire	216
<b>EXERCICE 5</b> Première correction à la formule de Stokes	225
<b>EXERCICE 6</b> Paradoxe de Stokes – perte de charge pour un cylindre	230

### ÉCOULEMENTS LAMINAIRES NON STATIONNAIRES

<b>EXERCICE 1</b> Régime transitoire d'un écoulement	241
<b>EXERCICE 2</b> Couplage par viscosité	250
<b>EXERCICE 3</b> Diffusion d'un tourbillon	258
<b>EXERCICE 4</b> Résistance d'un fluide à un mouvement accéléré	263

### ÉCOULEMENTS LAMINAIRES DANS LES CONDUITES

<b>EXERCICE 1</b> Conduite coaxiale	273
<b>EXERCICE 2</b> Entraînement d'un fluide par une paroi	281
<b>EXERCICE 3</b> Forces de contact sur les parois d'une tuyère	289
<b>EXERCICE 4</b> Résistance mécanique d'une conduite	299
<b>EXERCICE 5</b> Conduite à section triangulaire	306

Achévé d'imprimer en juillet 2002  
sur les presses de Normandie Roto Impression s.a.s.  
à Lonrai (Orne)  
N° d'imprimeur : 021598  
Dépôt légal : juillet 2002

*Imprimé en France*







R0420605 8

DATE DE RETOUR

26 AVR. 2004			
20 AVR. 2005			

*La collection taupe-niveau est conçue par des professeurs en classes préparatoires scientifiques aux Grandes Écoles. La série des livres d'exercices corrigés complète la série des manuels de cours. Comme elle, elle est conforme au nouvel esprit de l'enseignement en classes prépas. Le souci de présenter les grands classiques autant que de proposer de nombreux exercices originaux, fait de la série des ouvrages d'exercices corrigés un outil précieux pour mieux préparer les concours.*

---

Ce recueil d'exercices corrigés de mécanique des fluides contient une quarantaine d'exercices originaux consacrés aux écoulements de fluides parfaits et aux écoulements laminaires de fluides réels.

La non-linéarité des équations générales régissant les phénomènes étudiés impose, en Mécanique des fluides, d'être capable de simplifier les modèles et donc de savoir faire précéder le traitement mathématique d'un solide raisonnement physique. Cet ouvrage a justement pour ambition centrale de donner à l'étudiant les bons réflexes d'analyse physique tout en l'entraînant à l'utilisation de l'outil mathématique.

D'un niveau plus élevé que la moyenne des livres traitant de la matière, cet ouvrage est spécialement conçu pour les étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques, filières PC-PC\* et PSI-PSI\* ; il pourra aussi être utile aux étudiants de second cycle universitaire ou d'écoles d'ingénieurs.

**illustration de couverture :**

Visualisation des écoulements aérodynamiques par analogie hydraulique. Nappes « en cornet » à l'extrados d'une aile delta avec incidence. (ONERA)



9 782729 811204



08-ACZ-604  
ISBN 2-7298-1120-6