A. ES-SBAI A. GUESSOUS N. NAJID M. QUAZZANI

De l'Université Hassan II – Faculté des Sciences I – Casablanca

Problèmes Corrigés de Physique

Avec rappels de cours

MP 2 - PC 2
Préparation aux Grandes Ecoles d'Ingénieurs.

Optique
Electromagnétisme
Mécanique classique
Mécanique quantique



Diffusion Sochepress

A. ES-SBAI A. GUESSOUS N. NAJID M. OUAZZANI

De l'Université Hassan II – Faculté des Sciences I – Casablanca

Bibliothèque El Jadida

Problèmes Corrigés de Physique

Avec rappels de cours

MP2 - PC2

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

Enregistré le
N° D'inventaire 10440
53(026).ESS

Diffusion Sochepress

TABLE DES MATIERES

RAPPELS DE COURS

d'Optique 9
d'Electromagnétisme 105
de Mécanique classique 223
de Mécanique quantique 343

EXERCICES ET PROBLEMES

1ère PARTIE : OPTIQUE 27

Optique géométrique

1. Ondes électromagnétiques - Etude du prisme 28
2. Chemin optique, stigmatisme approché, miroir sphérique 33
3. Dioptre plan, dioptre sphérique 35
4. Etude d'une lentille boule avec milieux extrêmes différents 38
5. Dioptre sphérique - Système catadioptrique - Lentille demi-boule 41
6. Lentille cylindrique 46
7. Association lentille convergente, miroir concave 50
8. Système catadioptrique épais - Eléments cardinaux d'un système centré 52
9. Système catadioptrique - Aberration chromatique 55
10. Lunette astronomique 61
11. Etude d'un doublet - Association : lentille cylindrique, lentille mince, miroir plan 64
12. Image à travers un doublet - Etude des lentilles d'un doublet 70
13. Aberration chromatique 74

Optique physique

14. Expérience des trous de Young 76
15. Miroir de Lloyd : interférences avec deux radiations - Utilisation d'une source étendue 78
16. Trous de Young, déplacement des franges 83
17. Miroirs rectangulaires 85
18. Bilentilles de Billet 87
19. Coin de verre - Biprisme de Fresnel 89
20. Franges d'égale inclinaison par réflexion 92
21. Anneaux de Newton 95
22. Franges d'égale inclinaison par transmission, interférences à ondes multiples 98
23. Diffraction à l'infini 101

2ème PARTIE : ÉLECTROMAGNÉTISME 117

Electrostatique des milieux diélectriques

1. Cylindre polarisé uniformément selon son axe 118
2. Cube aimanté uniformément 120
3. Sphère diélectrique soumise à un champ électrique 122
4. Sphère diélectrique portant une densité de charges libres 126
5. Condensateur plan 128
6. Lame diélectrique (1) 132
7. Lame diélectrique (2) 135
8. Lame diélectrique (3) 137
9. Condensateur sphérique avec deux couches de diélectrique 139

10. Câble coaxial avec deux couches de diélectrique.....141
11. Diélectrique semi-infini en présence d'une charge ponctuelle.....145
12. Polarisation par orientation : Equation de Langevin.....149

Magnétostatique des milieux aimantés

13. Cylindre aimanté uniformément selon son axe.....155
14. Cube aimanté uniformément.....157
15. Substance ferromagnétique - Champ démagnétisant.....160
16. Mesure de la perméabilité relative d'un matériau ferromagnétique.....164
17. Tore avec entrefer.....166
18. Circuit magnétique - Réluctance.....171

Courants alternatifs

19. Circuit RLC (R et C en parallèle).....173
20. Circuit RC.....175
21. Circuit RLC (R et L en parallèle).....177
22. Circuit LLoC.....180
23. Circuit $R_1L_1C_1L_2C_2$ (L_2 et C_2 en parallèle).....182
24. Circuit $Z_1Z_2Z_3$ (Z_1 et Z_3 en parallèle) - Permittivité complexe d'un condensateur..184
25. Bobines couplées (1).....187
26. Pont de Wheatstone - Bobines couplées.....190
27. Bobines couplées (2).....191

Propagation des ondes électromagnétiques

28. Propagation des ondes électromagnétiques (1).....194
29. Propagation des ondes électromagnétiques (2).....199
30. Propagation d'un courant alternatif dans un conducteur. Effet de peau.....202
31. Densité d'énergie et vecteur de Poynting.....207
32. Vecteur de Poynting - Pression de radiation.....210
33. Réflexion sur un condensateur parfait.....216
34. Ligne de transmission.....219

3ème PARTIE : MECANIQUE CLASSIQUE.....247

1. Invariant scalaire et axe central d'un torseur.....248
2. Equation cartésienne de l'axe central d'un glisseur.....249
3. Glisseur et couple.....251
4. Décomposition des mouvements.....253
5. Calcul des vitesses de glissement.....257
6. Vitesses et accélérations des points d'un système matériel.....260
7. Cinématique du solide.....267
8. Détermination des matrices d'inertie pour une plaque et un cylindre.....273
9. Eléments cinétiques d'un solide : équilibrage dynamique.....275
10. Eléments cinétiques d'un système de deux solides.....278
11. Eléments cinétiques d'un système de révolution.....282
12. Equation du mouvement d'un système à un degré de liberté à partir de l'énergie mécanique.....288
13. Dynamique d'un solide de révolution - Mouvement de Lagrange.....290
14. Théorèmes généraux appliqués à un système matériel.....296
15. Mouvement d'un cerceau en contact avec un plan fixe.....303
16. Mouvement d'une plaque rectangulaire en liaison verrou avec un bâti fixe.....310

17. Mouvement d'un disque en liaison verrou autour d'un axe mobile et soumis à une force de rappel....316
18. Mouvement d'une sphère en liaison verrou autour d'un axe mobile....322
19. Mouvement d'une demi-sphère en contact ponctuel avec un plan fixe....328
20. Mouvement d'un disque en contact ponctuel avec l'intérieur d'un cerceau mobile..335

4ème PARTIE : MECANIQUE QUANTIQUE....361
1. Paquet d'onde....362
2. Paquet d'onde - Relation d'incertitude....363
3. Opérateur densité - Description par vecteur d'état et par opérateur densité - Propriétés - Populations et cohérences....366
4. Opérateur d'évolution....371
5. Etalement d'un paquet d'ondes libres....375
6. Point de vue (ou représentation) d'Heisenberg....380
7. Inégalité de Heisenberg....385
8. Particule confinée dans une boîte cubique....388
9. Puits carré de potentiel : Etats liés et non liés....391
10. Puits infini (centré en x = 0)....396
11. Marches de potentiel - Coefficients de réflexion....405
12. Potentiel en escalier : Etats liés....409
13. Etude très simplifiée du Deuton : potentiel....411
14. Etats liés d'une particule dans un puits en fonction delta....415
15. Calcul du coefficient de transmission dans le cas d'une particule dans un puits en fonction delta....419
16. Etude de la vibration de la molécule HCl....422
17. Particule dans un double puits de potentiel....426
18. Particule dans un puits de potentiel infini - Etude physique - Evolution de la fonction d'onde et de la forme du paquet d'ondes - Mesures de l'énergie....431
19. Postulats de la mécanique quantique appliqués à une particule confinée dans un puits de potentiel infini....437
20. Etats d'un système de deux particules - E.C.O.C. - Postulats de la mécanique quantique....441
21. Postulats de la mécanique quantique - Ensembles complets d'observables qui commutent : E.C.O.C....445
22. Postulats de la mécanique quantique - Mesures simultanées....450
23. Mise en évidence de la fréquence de Bohr - Observables dépendant du temps....456
24. Etude de la molécule d'ammoniac NH_3 (Système à deux niveaux) - Influence d'un champ électrique....462
25. Oscillateur harmonique chargé placé dans un champ électrique uniforme. Equation aux valeurs propres de H en représentation $\{|x>\}$....466
26. Propriétés des états $|\alpha>$ (états propres de l'opérateur d'annihilation a) - Valeurs possibles de l'énergie....470
27. Oscillateur harmonique à une dimension - Fonction d'onde associée à l'état fondamental - Mesures de l'énergie....474
28. Opérateurs a et a^+. Valeurs possibles de l'énergie....478
29. Les matrices de Pauli....484
30. Illustration des postulats sur le cas d'un spin 1/2 - Préparation de l'état le plus général - Evolution du spin 1/2 dans un champ magnétique uniforme....489

Rappel de Cours

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

Optique

Optique Géométrique :

ch I. - Principes de l'optique géométrique.
ch II. - Notions de stigmatisme - Approximation de Gauss.
ch III. - Eléments dioptriques.
ch IV. - Eléments réfléchissants.
ch V. - Systèmes centrés dans les conditions de Gauss.
ch VI. - Notions de photométrie.

Optique Physique :

ch I. - Interférences lumineuses.
ch II. - Diffraction.

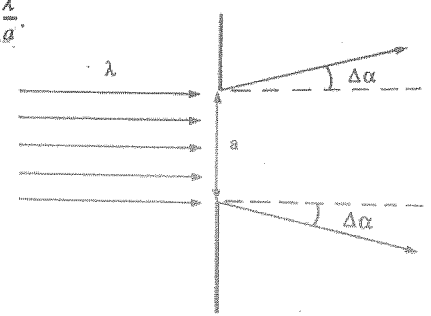
OPTIQUE GEOMETRIQUE

Chapitre I : Principes de l'optique géométrique

A – APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE

En passant à travers un diaphragme de diamètre a, la lumière de longueur d'onde λ, subit une dispersion angulaire $\Delta\alpha \approx \frac{\lambda}{a}$.

Lorsque $\Delta\alpha$ est faible, on dit qu'on est dans l'approximation de l'optique géométrique. Pour cela, il faut que la longueur d'onde, soit faible par rapport à la dimension du diaphragme, cela est presque toujours vérifié en optique, car les longueurs d'onde sont comprises entre 0,4 µm et 0,8 µm.



Moyennant cette approximation, dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite suivant des rayons lumineux perpendiculaires aux surfaces d'onde.

B – CHEMIN OPTIQUE ET PRINCIPE DE FERMAT.

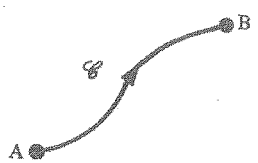
1°) Chemin optique :

On appelle chemin optique $L = (AB)$, entre deux points A et B, le long d'une courbe $\mathscr{C}$, l'intégrale curviligne :

$$L = \int_{\mathscr{C}} n\, dS$$

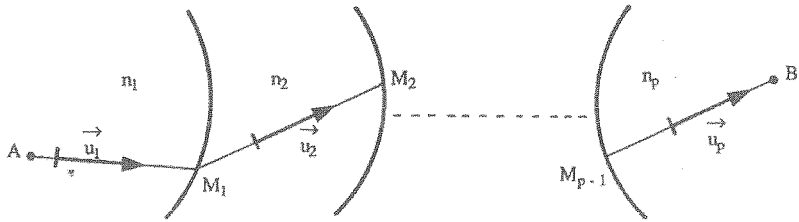
n est l'indice de réfraction du milieu considéré.

dS est l'élément de longueur de la courbe $\mathscr{C}$.



Si la lumière traverse un ensemble de milieux homogènes d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_p$ suivant les trajets : $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{p-1}B$ le chemin optique (AB) est :

$$(AB) = (AM_1) + (M_1M_2) + \ldots + (M_{p-1}B)$$



$$(AB) = n_1 \overline{AM_1} + n_2 \overline{M_1M_2} + \ldots + n_p \overline{M_{p-1}B}$$

$$(AB) = n_1 \vec{u_1} \cdot \overrightarrow{AM_1} + n_2 \vec{u_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} + \ldots + n_p \vec{u_p} \cdot \overrightarrow{M_{p-1}B}$$

$\vec{u_k}$ sont les vecteurs unitaires dirigés dans le sens de propagation de la lumière.

2°) Principe de Fermat :

"Le trajet réellement suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B fixes, correspond à un chemin optique stationnaire."

Lorsque le chemin optique est stationnaire, la différentielle totale de L est nulle, nous avons donc $dL = 0$.

3°) Conséquence du principe de Fermat :

Le principe de Fermat permet de retrouver :

* La propagation rectiligne de la lumière, dans un milieu homogène entre deux points A et B, car le chemin optique est stationnaire (minimal) lorsque le trajet AB est une droite.

* La loi du retour inverse de la lumière : $(AB) = (BA)$. Entre deux points A et B le trajet de la lumière ne depend pas du sens de parcours.

* Les lois de Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction.

C – THEOREME DE MALLUS.

1°) Surfaces d'onde :

Soit S une source ponctuelle, la surface d'onde est le lieu géométrique des points atteints au même instant par les ondes issues de S.

Lorsque la surface est sphérique, on dit que l'onde est sphérique, s'il s'agit d'une surface plane, on dit que l'onde est plane.

2°) Théorème de Mallus :

Dans un système optique, après un nombre quelconque de réfractions et de réflexions, les rayons lumineux issus d'une même source ponctuelle sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

Le théorème de Mallus, entraîne l'égalité des chemins optiques entre deux surfaces d'onde.

Chapitre II: Notions de stigmatisme – Approximation de Gauss

A – ESPACES OBJET ET IMAGE.

1°) Système optique :

Un système optique est constitué d'un ensemble de milieux d'indices différents. On distingue deux catégories de systèmes optiques :

Les systèmes dioptiques composés de milieux où la lumière ne peut subir que des réfractions.

Les systèmes catadioptiques contenant des milieux où la lumière subit un certain nombre de réfractions et une réflexion.

On appelle système optique centré, un système où tous les éléments sont centrés sur un même axe nommé : axe optique du système.

2°) Notions d'image :

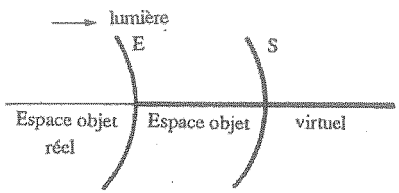
Soit A une source lumineuse envoyant des rayons sur un système optique (S). Si tous les rayons issus de A, convergent en un point A' après la traversée de (S), on dit que A' est l'image de A par rapport à (S).

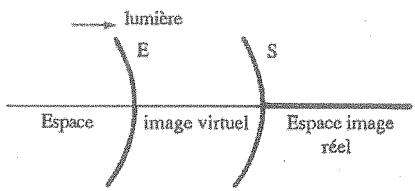
Par application du principe de retour inverse de la lumière, on dit alors que A et A' sont conjugués à travers (S).

3°) Espaces objet et image :

Un objet est réel ou virtuel et une image est réelle ou virtuelle suivant leurs positions par rapport à la face d'entrée et de sortie du système optique.

Les deux figures suivantes donnent les différents découpages :





B – STIGMATISME

1°) Stigmatisme rigoureux :

On dit qu'il y a stigmatisme rigoureux, si tout rayon passant par A converge en A' après la traversée du système optique. Le stigmatisme rigoureux se traduit par le fait que le chemin optique reliant A et A' est constant quelque soit le trajet emprunté par la lumière.

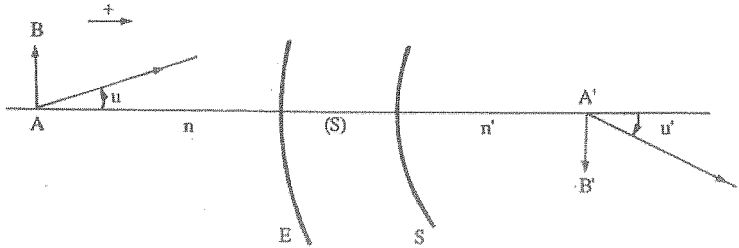
2°) Stigmatisme approché :

Pour des raisons pratiques (usinage, polissage...) le stigmatisme rigoureux est difficilement réalisable.
Nous avons stigmatisme approché pour un système optique (S), lorsque le chemin

optique relatif aux deux points conjugués A et A', est constant au 2e ordre près.

3°) Condition d'Abbe : Aplanétisme :

Soient A et A' un couple de points conjugués dans un système optique (S), on dit que A et A' sont aplanétiques s'il existe deux points B et B' tels que, l'objet AB et l'image $A'B'$ sont perpendiculaires à l'axe optique. C'est ce qu'on appelle condition d'Abbe, qui se traduit par la formule suivante : $n\overline{AB}\ sin\ u = n'\ \overline{A'B'}\ sin\ u'$



4°) Approximation de Gauss :

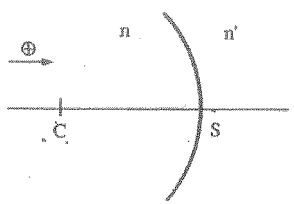
Un système centré (S) est utilisé dans l'approximation de Gauss (conditions de Gauss) si tous les rayons qui le traversent font avec l'axe optique, des angles faibles. On dit aussi que nous sommes dans les conditions de l'optique paraxiale.

Chapitre III : Eléments dioptriques

A – DIOPTRE SPHÉRIQUE

1°) Définition :

Un dioptre sphérique est l'association de deux milieux d'indices différents, séparés par une surface sphérique, de centre C et de sommet S.
CS est l'axe optique du système. n et n' sont les indices de réfraction des deux milieux.



2°) Etude du dioptre sphérique dans les conditions de Gauss :

a) Formule de conjugaison.

C'est la relation liant un point objet A et son image A' :

origine au sommet : $\dfrac{n}{\overline{SA}} - \dfrac{n'}{\overline{SA'}} = \dfrac{n-n'}{\overline{SC}}$

origine au centre : $\dfrac{n'}{\overline{CA}} - \dfrac{n}{\overline{CA'}} = \dfrac{n'-n}{\overline{CS}}$

b) Foyers objet et image.

Lorsque A' tend vers l'infini, A se trouve au foyer objet F : $\overline{SF} = \frac{n}{n-n'}\overline{SC}$

Lorsque A tend vers l'infini, A' se trouve au foyer image F' : $\overline{SF'} = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}$

c) Formule de Newton.

C'est la formule de conjugaison avec origines aux foyers : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{SF} \cdot \overline{SF'}$

d) Grandissements.

◆ Grandissement linéaire :

C'est le rapport de la taille de l'image à la taille de l'objet : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

origine au sommet : $\gamma = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$; origine au centre: $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

origines aux foyers : $\gamma = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}}$

◆ Grandissement axial :
Si on déplace l'objet suivant l'axe optique d'une quantité dp, l'image se déplace de dp'.

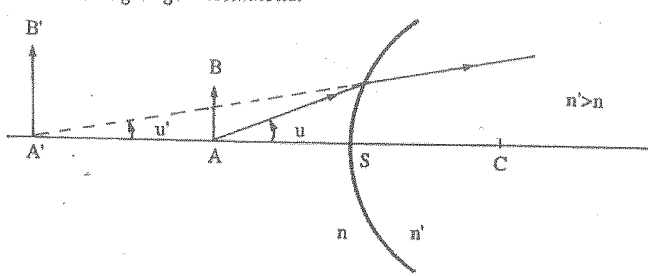
Le grandissement axial est donné par : $g = \frac{dp'}{dp} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{p'^2}{p^2}$ avec $p = \overline{SA}$; $p' = \overline{SA'}$

g est toujours positif pour un dioptre sphérique : l'objet et l'image se déplacent dans le même sens.

◆ Grandissement angulaire :

C'est le rapport entre les deux angles u' et u (voir figure suivante) : $G = \frac{u'}{u}$

e) Formule de Lagrange – Helmholtz.



La formule de L.H est donnée par : $n\overline{AB}u = n'\overline{A'B'}u'$

On peut vérifier aisément que : $gG = \gamma$

B– DIOPTRE PLAN

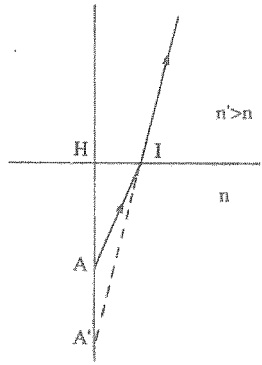
◆ Le dioptre plan est un dioptre sphérique de rayon infini.

Dans les conditions de Gauss, la formule conjugaison est :

$$\frac{n}{\overline{HA}} - \frac{n'}{\overline{HA'}} = 0$$

Dans la figure ci–contre A est réel, A' virtuel.

Si $n'>n$, il y a éloignement apparent de l'objet.
Si $n'<n$, il y a rapprochement.



◆ Le grandissement linéaire est : $\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}} = 1.$

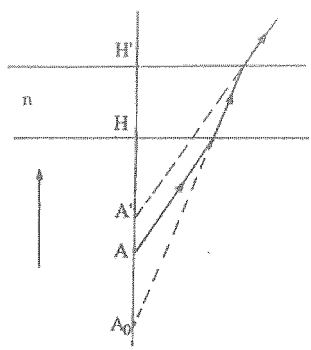
H est le sommet du dioptre plan, il joue le rôle de S dans un dioptre sphérique.

C – LAME À FACES PARALLELES.

Une lame à faces parallèles est l'association de deux dioptres plans parallèles.
Dans les conditions de Gauss, l'action d'une lame à faces parallèles sur un objet est une translation. Lorsque la lame est dans l'air, la translation a pour valeur :

$$\overline{AA'} = \overline{HH'}\left(1 - \frac{1}{n}\right) ;$$

La figure ci–contre, suppose que la lame baigne dans l'air. Les rayons incidents et émergents sont donc parallèles. Les grandissements ont pour valeur $g = 1$, $\gamma = 1$.

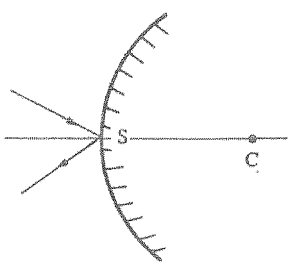


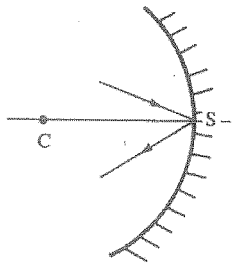
Chapitre IV : Eléments réfléchissants.

A – MIROIR SPHÉRIQUE.

1°) Définition :

Un miroir sphérique est une surface réfléchissante de forme sphérique.





Si la surface réfléchissante se trouve à l'extérieur de la sphère, le miroir est convexe. Il est concave dans le cas contraire.

2°) Etude du miroir sphérique dans les conditions de Gauss :

a) Formules de conjugaison.

◆ origine au sommet : $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$ [1]

Cette relation est appelée aussi formule de Descartes.

◆ origine au centre : $\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$

b) Foyers objet et image.

En faisant tendre A ou A' vers l'infini, à partir de [1] on obtient : $\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$

Dans un miroir sphérique, les foyers objet et image sont confondus et situés au milieu de SC.

c) Formule de Newton.

C'est la formule de conjugaison avec origine au foyer : $\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{SF^2}$

d) Grandissements.

◆ Grandissement linéaire :

C'est le rapport de la taille de l'image à la taille de l'objet : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

origine au sommet : $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$; origine au centre : $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

origine au foyer : $\gamma = -\frac{\overline{FA'}}{\overline{SF}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$

◆ Grandissement axial :

Si l'objet subit un déplacement dp suivant l'axe optique, l'image en subit dp'. Le

grandissement axial est tel que : $g = \frac{dp'}{dp} = -\frac{p'^2}{p^2}$ avec $p = \overline{SA}$; $p' = \overline{SA'}$

On remarque qu'on a : $g = -\gamma^2$.

Dans un miroir sphérique, le grandissement axial est toujours négatif, cela se traduit par le fait que l'objet et l'image se déplacent en sens contraires.

e) Relation de Lagrange – Helmholtz.

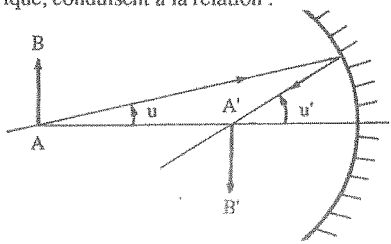
Les mêmes notations pour le dioptre sphérique, conduisent à la relation :

$$\overline{AB}.u = -\overline{A'B'}\,u'$$

On aboutit à la relation :

$$\gamma G = -1.$$

G est le grandissement angulaire.



Remarque : Toutes les formules du miroir sphérique peuvent être obtenues, à partir de celles du dioptre sphérique en remplaçant *n' par –n.*

B – MIROIR PLAN.

1°) **Définition :**

Un miroir plan est une surface réfléchissante plane. On peut aussi dire, qu'un miroir plan est un miroir sphérique de rayon infini.

2°) **Caractéristiques :**

– Stigmatisme : Le miroir plan est le seul système optique, rigoureusement stigmatique pour tous les points de l'espace. Si A est un point objet son image A' est symétrique de A par rapport au plan du miroir.

– Rotation : Lorqu'on fait tourner un miroir plan d'un angle α autour d'un axe quelconque, un rayon réfléchi issu d'un incident quelconque tourne d'un angle 2α autour du même axe et dans le même sens.

– Translation : Si on déplace un objet d'une distance d, l'image se déplace de la même quantité, mais dans le sens contraire.

– Association : L'association de deux miroirs plans faisant entre eux un angle de π/q, donne d'un point objet A , ($2q - 1$) images distinctes.

Chapitre V : Systèmes centrés dans l'approximation de Gauss

A – SYSTEMES CENTRES DIOPTIQUES.

1°) **Eléments cardinaux d'un système centré :**

– Foyers : Le foyer image F' d'un système centré, est le conjugué d'un point objet

situé à l'infini. Le foyer objet F est le point admettant pour conjugué, un point à l'infini.

– Plans principaux : Ce sont deux plans conjugués P et P' tels que leur grandissement linéaire est égal à 1. Les plans principaux sont perpendiculaires à l'axe optique et passent par les points principaux objet et image H, H'. On appelle distances focales objet et image :

$$f = \overline{HF} \quad ; \quad f' = \overline{H'F'}$$

– Plans antiprincipaux : Ce sont deux plans conjugués dont le grandissement angulaire est égal à –1. Si on note A et A' les points antiprincipaux objet et image :

$$\overline{FA} = \overline{HF} \quad ; \quad \overline{F'A'} = \overline{H'F'}$$

Les plans antiprincipaux sont perpendiculaires à l'axe optique et passent par A et A'.

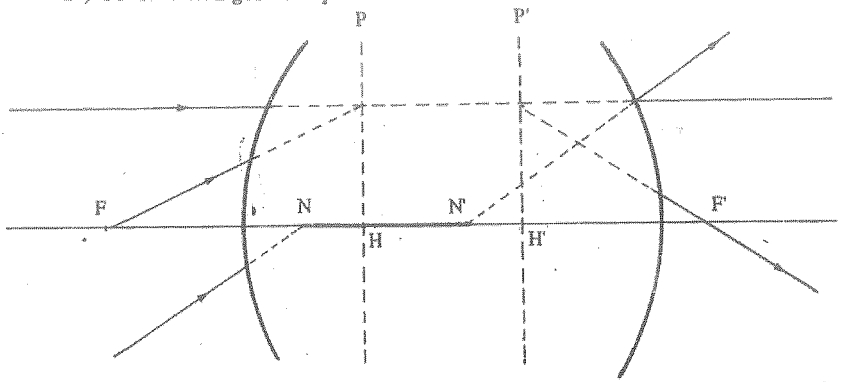
– Plans nodaux : Ce sont deux plans conjugués tels que leur grandissement angulaire est égal à 1. Les plans nodaux sont perpendiculaires à l'axe optique et passent par les points nodaux objet et image N, N'.

Nous avons : $\overline{FN} = \overline{H'F'}$; $\overline{F'N'} = \overline{HF}$; $\overline{HN} = \overline{H'N'} = \overline{HF} + \overline{H'F'}$

– Plans antinodaux : Ce sont deux plans cojugués dont le grandissement angulaire est égal à – 1. Les plans antinodaux sont perpendiculaires à l'axe optique et passent par le points antinodaux.

Les points antinodaux sont symétriques des points nodaux par rapport aux foyers correspondants.

2°) **Construction géométrique :**



A un rayon incident parallèle à l'axe optique correspond un emergent passant par F', le lieu d'intersection de ces deux rayons définit le plan principal image. D'une façon similaire on obtient le plan principal objet.

A tout rayon incident passant par N correspond un émergent qui lui est parallèle et passant par N' :

Notons bien qu'on a toujours $\overline{HN} = \overline{H'N'}$

3°) Formules de conjugaison – Grandissements :

◆ Origine aux plans principaux : $\frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} + \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} = 1$ avec $\frac{\overline{HF}}{\overline{H'F'}} = -\frac{n}{n'}$

n et n' sont les indices des milieux objet et image.

On obtient $\frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}}$

◆ Grandissement linéaire : $\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}$

Avec les mêmes définitions qu'en dioptre sphérique, on a : $\gamma = gG$

◆ Origine aux foyers : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{HF} \cdot \overline{H'F'}$ et $\gamma = -\frac{\overline{HF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{H'F'}}$

B – ASSOCIATION DE DEUX SYSTEMES CENTRES.

Les foyers et les points principaux du système équivalent à l'association de deux systèmes centrés sont donnés par :

$$\overline{F_1F} = \frac{f_1f_1'}{\Delta} \quad ; \quad \overline{F_2'F'} = -\frac{f_2f_2'}{\Delta}$$

$$\overline{H'F'} = -\frac{f_1'f_2'}{\Delta} \quad ; \quad \overline{HF} = \frac{f_1f_2}{\Delta}$$

avec $\Delta = \overline{F_1'F_2}$ qu'on appelle intervalle optique.

On peut aussi écrire : $C = C_1 + C_2 - \frac{e}{N} C_1 C_2$. Formule de Gullstrand

avec $e = \overline{H_1'H_2}$, N indice du milieu intermédiaire.

$C_1 = \frac{N}{f_1'} = -\frac{n}{f_1}$, $C_2 = \frac{n'}{f_2'} = -\frac{N}{f_2}$, C sont les vergences des systèmes 1, 2 et du système équivalent. n et n' sont les indices des milieux extrêmes.

C – SYSTEME CATADIOPTIQUE.

Un système catadioptique est une suite de surfaces dioptiques et d'un miroir de sommet S et de centre C.

Tout système catadioptique est équivalent à un miroir sphérique de sommet Σ et de centre Ω.

Sommet Σ : c'est l'image du sommet S du miroir réel à travers le système dioptrique, dans le sens de la lumière réfléchie.

Centre Ω : C'est l'image du centre C du miroir réel à travers le système dioptrique, dans le sens de la lumière réfléchie.

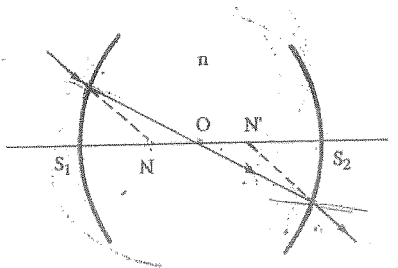
D – LENTILLES.

1°) Lentilles épaisses :

Une lentille épaisse est l'association de deux dioptres dont l'un au moins est sphérique, la distance séparant les sommets des deux dioptres est quelconque.
La lentille épaisse, se traite comme l'association de deux systèmes centrés. Nous n'étudierons que les lentilles pour lesquelles les milieux extrêmes sont identiques.
On appelle centre optique d'une lentille épaisse, le point O tel que pour tout rayon intérieur à la lentille et passant par O, correspond un incident et un émergent parallèles.

Le centre optique est repéré par les relations :

$$\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC_2}}$$



C_1, C_2 sont les centres des dioptres.

O est l'image du point nodal objet N, à travers le premier dioptre. Le point nodal image N', est le conjugué de O à travers le second dioptre.

2°) Lentilles minces :

Une lentille est considérée comme mince, si on peut négliger l'épaisseur S_1S_2 par rapport à S_1C_1, S_2C_2 et $|S_1C_1 - S_2C_2|$.

Il existe deux types de lentilles minces :
Les lentilles minces convergentes, pour lesquelles les foyers sont réels.
Les lentilles minces divergentes, pour lesquelles les foyers sont virtuels.

La formule de conjugaison, dans les deux cas, est donnée par :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{\overline{OF}}$$

Le grandissement linéaire est : $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

O étant le centre optique, qui est confondu avec H, H' et N, N'.

Chapitre VI : Notions de photométrie

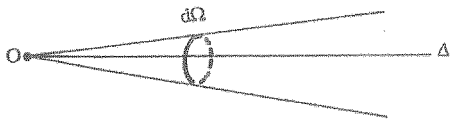
1°) FLUX LUMINEUX.

Toute source S rayonne une certaine quantité d'énergie par seconde. La puissance véhiculée par rayonnement dans un faisceau s'appelle flux lumineux.
Dans le système M.K.S.A l'unité du flux lumineux est le lumen (lm).

2°) INTENSITÉ D'UNE SOURCE.

Soit une source ponctuelle O ou un élément dS d'une source émettant un flux $d\phi$ dans une direction Δ autour d'un angle solide $d\Omega$. L'intensité de la source dans la direction Δ est donnée par :

$$I = \frac{d\phi}{d\Omega}$$



Si l'intensité ne dépend pas de la direction, on dit que l'émission est isotrope.

L'unité de I dans le système M.K.S.A est le candela (cd).

3°) LUMINANCE.

Soit un élément de source dS, la luminance dans une direction faisant l'angle θ avec la normale à dS est : $L = \frac{dI}{dS.cos\ \theta}$

$dS.cos\ \theta$ est la surface apparente de dS dans la direction considérée.
L'unité de L dans le système M.K.S.A. est le candela par mètre carré (cd/m^2).

4°) ECLAIREMENT.

L'éclairement E d'une surface dS_0 qui reçoit un flux $d\phi$ est donné par le rapport :

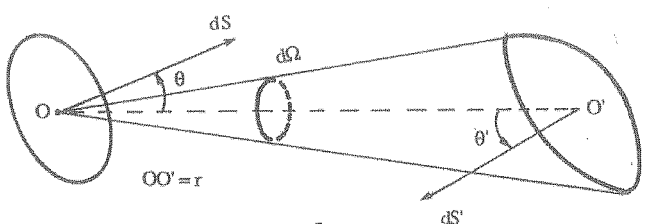
$$E = \frac{d\phi}{dS_0}$$

Dans le système M.K.S.A. l'unité de l'éclairement est le lux (lx).

5°) ETENDUES D'UN PINCEAU LUMINEUX.

Considérons un élément de surface dS émettant vers un élément de surface dS' (voir figure). L'étendue géométrique du pinceau issu de dS et s'appuyant sur dS' est :

$$d^2\mathcal{E} = \frac{dS\ cos\ \theta.\ dS'\ cos\ \theta'}{r^2}$$



L'étendue optique est : $d^2P = n^2\ d^2\mathcal{E}$

Où n est l'indice de réfraction du milieu

6°) EMITTANCE LUMINEUSE.

L'émittance M d'une source dS émettant un flux dϕ est : $M = \dfrac{d\phi}{dS}$

Dans le système m.K.S.A. l'unité de M est le lumen par mètre carré (lm/m^2).

OPTIQUE PHYSIQUE

Chapitre I. Interférences lumineuses.

A – ONDES LUMINEUSES.

1°) Définitions :

Une onde lumineuse est une vibration sinusoïdale, dont la loi de variation avec le temps est : $S = a \cos \omega t$

avec :

S : élongation qui représente le champ électrique ou le champ magnétique.
a : Amplitude.

ω : pulsation de l'onde, qui est reliée à la période par $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

L'état de vibration d'un point M situé à une distance d de la source est donné par :

$$S = a \cos (\omega t - \varphi) \text{ avec } \varphi = \frac{2\pi n d}{\lambda_0}$$

$\lambda_0 = cT$ est la longueur d'onde dans le vide.

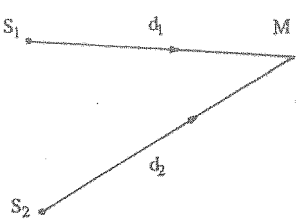
$n = \dfrac{c}{v}$ où v est la vitesse de propagation dans le milieu d'indice n.

2°) Superposition de deux vibrations lumineuses :

Soient deux vibrations lumineuses de la forme :

$$X_1 = A_1 \cos (\omega t - \varphi_1)$$

$$X_2 = A_2 \cos (\omega t - \varphi_2 - \theta)$$



On suppose que X_1 et X_2 vont se superposer en un même point M.

La vibration résultante en M est : $X = X_1 + X_2$

On montre que l'amplitude résultante est donnée par A tel que :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \phi$$

avec $\phi = \varphi_2 - \varphi_1 + \theta$ qui représente le déphasage entre les deux ondes au point M.

$\varphi_2 - \varphi_1$ est un déphasage dû à la position de M par rapport à S_1 et S_2.
θ est un déphasage dû à l'émission de la lumière par S_1 et S_2.
Suivant les modes d'émission de S_1 et S_2, on distingue deux cas :

a) Sources cohérentes.

Les deux sources S_1 et S_2 sont cohérentes lorsque le mécanisme d'émission de la lumière entre elles, n'est pas aléatoire, dans ce cas, θ est une constante, qu'on peut prendre nulle si S_1 et S_2 vibrent en phase : $\phi = \varphi_2 - \varphi_1$

b) Source incohérentes.

Lorsque S_1 et S_2 émettent d'une façon aléatoire, on dit que les deux sources sont incohérentes. Dans ce cas l'amplitude résultante est en moyenne : $A^2 = A_1^2 + A_2^2$

B – NOTIONS D'INTERFERENCES.

1°) Interférence de deux ondes :

Lorsque les deux sources sont cohérentes, l'intensité résultante (proportionnelle à A^2) est donnée par : $I = (A_2 - A_1)^2 + 4 A_1 A_2 \cos^2 \frac{\phi}{2}$

Dans le cas où les sources sont synchrones et cohérentes, on dit qu'on a interférence entre les deux ondes car l'intensité I va dépendre de ϕ, c'est-à-dire de la position du point M.

$$\phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi n (d_2 - d_1)}{\lambda_0} = \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} = 2\pi p$$

ϕ : différence de phase entre les deux sources en M.
δ : différence de marche entre les deux sources en M.

$p = \frac{\delta}{\lambda_0}$: est l'ordre d'interférence au point M.

L'intensité maximale est : $I_M = (A_1 + A_2)^2$
elle s'obtient pour $\phi = 2k\pi$, $\delta = k\lambda_0$; $p = k$; $k \in Z$

L'intensité minimale est : $I_m = (A_1 - A_2)^2$
elle s'obtient pour $\phi = (2k + 1)\pi$; $\delta = (2k + 1)\frac{\lambda_0}{2}$; $p = k + \frac{1}{2}$.

❖ On remarque que pour $A_1 = A_2 = A$: $I = 4A^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}$; $I_M = 4A^2$; $I_m = 0$.

2°) Interférences non localisées :

Elles se réalisent par division du front d'onde d'une source ponctuelle, on obtient deux sources synchrones et cohérentes qui vont interférer dans le domaine de superposition des deux ondes : ce sont des interférences non localisées.

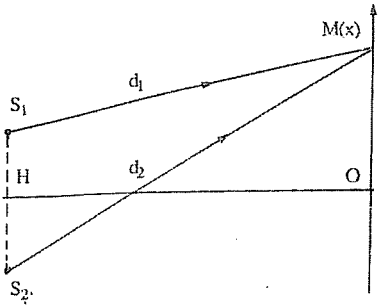
Dans la majorité des cas on se ramène à la figure ci–contre.

$S_1S_2 = a$; $HO = D$; $OM = x$

En supposant que M est loin par rapport à S_1, S_2 nous avons :

$\delta = \frac{ax}{D}$: différence de marche au point M d'abscisse x.

L'interfrange est la distance qui existe entre deux franges consécutives de même nature : $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$



* Dispositifs donnant des interférences non localisées :
Trous d'Young – Bilentilles de Billet – Biprismes de Fresnel – Miroirs de Fresnel – Miroir de Lloyd…

3°) Interférences localisées :

On obtient des interférences localisées par division d'amplitude, à partir d'un faisceau incident unique. La division peut se faire par réflexion ou transmission suivant le dispositif utilisé. Le faisceau incident, peut provenir d'une source étendue, qui donne des interférences dont le lieu de localisation est une surface.

* Dispositifs donnant des interférences localisées :
Anneaux de Newton – Lame à faces parallèles – Coin d'air – Interféromètre de Michelson…

Chapitre II : Diffraction

A – PRINCIPE D'HUYGENS – FRESNEL.

Tout élément dS entourant un point P d'une surface S, atteint par la lumière, diffracte une onde dont l'amplitude est proportionnelle à dS et de phase identique à celle de l'onde incidente en P. Les éléments dS jouent le rôle de sources secondaires qui interfèrent entre elles.

B – DIFFRACTION À L'INFINI.

1°) Définition :

Lorsque la source diffractante et le plan d'observation se trouvent à une distance infinie (très grande) par rapport à la source d'émission, on dit que nous sommes dans les conditions de diffraction à l'infini ou de Fraunhofer.

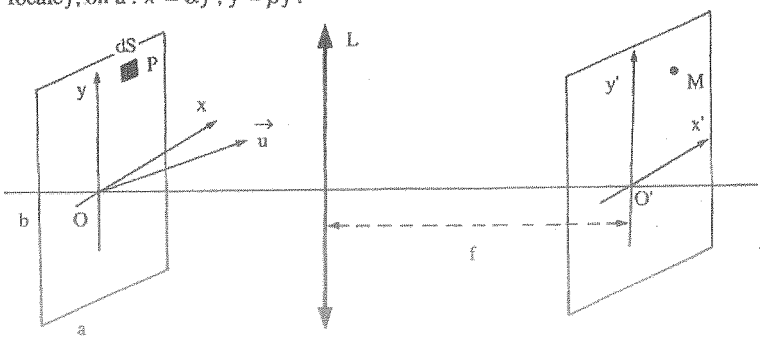
2°) Diffraction par une ouverture rectangulaire :

Pour une surface diffractante rectangulaire de côtés a, b l'intensité diffractée dans la

direction $\vec{u}$ de cosinus directeurs α, β, γ est donnée par :

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi a \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a \alpha}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi b \beta}{\lambda}}{\frac{\pi b \beta}{\lambda}} \right)^2$$

En faisant l'observation dans le plan focal d'une lentille convergente L de distance focale f, on a : $x' = \alpha f$; $y' = \beta f$.



Pour l'étude de I en fonction de x', y' voir Pb 23.

3°) **Diffraction par une fente :**

Lorsque les dimensions du rectangle sont telles que $b >> a$, on aura une fente de largeur a dont l'intensité suivant α est :

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi a \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a \alpha}{\lambda}} \right)^2$$

qui présente un maximum principal au voisinage de $\alpha = 0$, entouré de franges de diffraction, dont l'intensité diminue quand on s'éloigne du centre.

Exercices et Problèmes

Optique

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

OPTIQUE GEOMETRIQUE

1 - Ondes électromagnétiques - Etude du prisme.

On considère une onde plane monochromatique dont la longueur d'onde dans le vide est $\lambda_0 = 5890\ Å$ ($c = 3.10^8\ ms^{-1}$).

A / Cette onde se réfracte sur un dioptre plan air–verre ($n = 1{,}54$) sous une incidence $i = 58°$ (fig 1).

1°) Donner l'expression littérale du champ électrique $\vec{E}$ en notation complexe.

2°) Calculer numériquement dans le milieu air : $\|\vec{k_0}\|$, k_{x_0}, k_{y_0}, k_{z_0}, ω.

3°) Calculer numériquement dans le milieu verre : $\|\vec{k}\|$, k_x, k_y, k_z, λ, ν.

4°) Déduire des composantes de $\vec{k}$, l'angle de réfraction r.

B / Le dioptre ci–dessous constitue la face d'entrée d'un prisme d'angle A (fig.2).

5°) Ecrire les relations liants : i et r ; i' et r' ; A, r et r' ; D, i, i' et A (D déviation introduite par le prisme).

6°) En dérivant les expressions précédentes, montrer que D présente un minimum pour $i = i'$ ($= i_m$).

7°) Calculer l'angle du prisme (A) pour que $i_m = 57°$. Calculer alors D_m (déviation minimum).

8°) Montrer que $\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right) = n \sin\frac{A}{2}$

9°) On éclaire au voisinage du minimum de déviation avec le doublet du sodium (λ_0 et $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$).

Sachant que $n = a + \frac{10^{-14}}{\lambda^2}$ (S.I.), calculer ΔD_m pour $\Delta\lambda = 6Å$.

10°) Quelle sera la distance entre les images formées dans le plan focal d'une lentille placée perpendiculairement au faisceau émergent ($f' = +\ 50$ cm) ?

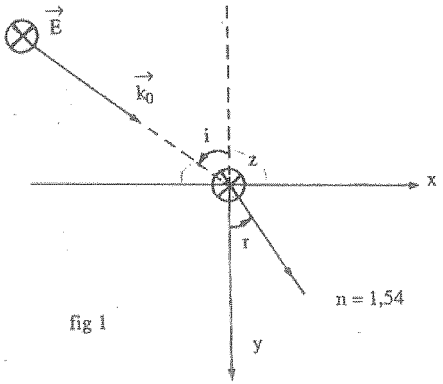


fig 1

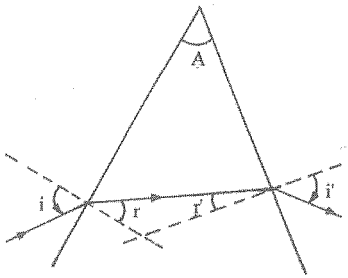


fig2

Marrakech, MP2 – PC2, Juin 1985.

A) – 1) Expression du champ électrique $\vec{E}$:

En notation complexe, l'expression du champ électrique est donnée par : $\vec{E} = \vec{E_0}\ e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

ω : pulsation de l'onde, $\vec{k}$: le vecteur d'onde dans le milieu considéré.

$\vec{r}$: position considérée à partir de 0 (fig.1), t : le temps, $\vec{E_0}$: vecteur constant.

D'après la figure 1, la seule composante non nulle de $\vec{E}$ est dirigée suivant $0z$.

2) Dans le milieu air nous avons : $\|\vec{k_0}\| = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$

D'après la figure 1 : $k_{x_0} = \|\vec{k_0}\| \sin i$; $k_{y_0} = \|\vec{k_0}\| \cos i$; $k_{z_0} = 0$

La pulsation de l'onde est donnée par : $\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda_0} c$.

A.N : $\lambda_0 = 5890$ Å ; $i = 57°$; $c = 3.10^8$ m/s.

$\|\vec{k_0}\| = 10{,}67.10^6$ m^{-1} ; $k_{x_0} = 8{,}95.10^6$ m^{-1} ; $k_{y_0} = 5{,}81.10^6$ m^{-1} ; $k_{z_0} = 0$; $\omega = 3{,}2.10^{15}$ rd/s.

3) Dans le milieu verre nous avons : $\|\vec{k}\| = n\|\vec{k_0}\| = \dfrac{2\pi n}{\lambda_0}$

Détermination des composantes k_x , k_y , k_z :

Le vecteur d'onde $\vec{k}$ se trouve dans le plan d'incidence, donc : $k_z = 0$.

D'autre part, $\| \vec{k} \|^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} \right)^2$

Or, à la traversée du dioptre la composante tangentielle du vecteur d'onde est conservée :

$$k_x = k_{x_0}.$$

Par conséquent : $k_y = \left[\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} \right)^2 - k_{x_0}^2 \right]^{1/2}$

Détermination de λ et v :

Soit T la période de l'onde considérée :

Dans l'air : $\lambda_0 = cT$

Dans le verre : $\lambda = vT$

Or $\left(n = \frac{c}{v} \right)$ D'où : $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$; $v = \frac{c}{n}$

A.N : $\lambda_0 = 5890.10^{-10}$ m ; $c = 3.10^8$ m/s ; $n = 1,54$

$\| \vec{k} \| = 16,43.10^6$ m^{-1} ; $k_x = 8,95.10^6$ m^{-1} ; $k_y = 13,78.10^6$ m^{-1} ; $k_z = 0$; $\lambda \approx 3825$ Å ; $v \approx 1,95.10^8$ m/s.

4) Détermination de l'angle de réfraction :

De la même façon qu'en 2) on peut écrire dans le milieu verre : $k_y = \| \vec{k} \| \cos r = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \cos r$

D'où $\boxed{\cos r = \frac{\lambda_0 k_y}{2\pi n}}$

A.N : $\lambda_0 = 5890.10^{-10}$ m ; $k_y = 13,78.10^6$ m^{-1} ; $n = 1,54$

$\boxed{r = 33°}$

B / – 5) Relations du prisme :

Les relations de Descartes donnent :

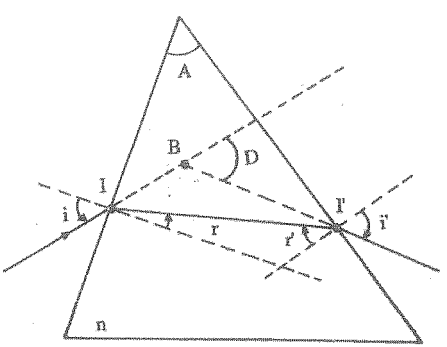
$$\sin i = n \sin r \qquad [1]$$

$$\sin i' = n \sin r' \qquad [2]$$

Dans le triangle (I I'A) on :

$$\left(\frac{\pi}{2} - r \right) + \left(\frac{\pi}{2} - r' \right) + A = \pi$$

Soit $r + r' = A$ [3]



Dans le triangle (I I' B) on a :

$$(i - r) + (i' - r') + (\pi - D) = \pi$$

Donc $$D = i + i' - A \qquad [4]$$

6) Etude de la déviation D en fonction de *i*.

Dans cette question, nous supposons que l'angle et l'indice du prisme sont constants.

En différentiant les formules précédentes, nous avons :

$$cos\ i\ di = n\ cos\ r\ dr \qquad [1]'$$

$$cos\ i'\ di' = n\ cos\ r'\ dr' \qquad [2]'$$

$$dr + dr' = 0 \qquad [3]'$$

$$dD = di + di' \qquad [4]'$$

D'après [4]' $$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

[1]' et [2]' donnent $$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{n\ cos\ r'\ cos\ i}{n\ cos\ r\ cos\ i'} \cdot \frac{dr'}{dr}$$

Or [3]' donne $$dr = -dr'$$

Soit $$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{cos\ r'\ cos\ i}{cos\ r\ cos\ i'}$$

$\frac{dD}{di} = 0$, si : $cos\ r'\ cos\ i = cos\ r\ cos\ i'$

en élevant au carré et en transformant : $(1 - sin^2\ r')(1 - sin^2\ i) = (1 - sin^2\ r)\ (1 - sin^2\ i')$

D'après [1] et [2] : $sin^2\ i' - sin^2\ i = 0$

D'où $i = \pm i'$

Le cas, $i = -i'$ est à rejeter, car il entraîne $r = -r'$, soit $A = 0$.

La solution acceptable est donc : $i = i' = i_m$.

Il s'agit d'un minimum car, d'après les résultats du cours, dD/di est négative pour $i < i_m$ puis positive pour $i > i_m$.

7) Au minimum de déviation nous avons : $i = i' = i_m$ et d'après [1] et [2], $r = r' = r_m$.

Les formules du prisme deviennent donc :

$$sin\ i_m = n\ sin\ r_m \qquad [5]$$

$$A = 2\ r_m \qquad [6]$$

$$D_m = 2i_m - A \qquad [7]$$

Détermination de A et D_m :

D'après [5] et [6] on a : $$A = 2\ Arc\ sin\left[\frac{sin\ i_m}{n}\right]$$

D_m est donnée par [7].

A.N : $i_m = 57°$; $n = 1{,}54$

$$A = 66° \quad ; \quad D_m = 48°$$

8) En tirant r_m de [6] et i_m de [7] et en les remplaçant dans [5] nous obtenons :

$$\boxed{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right) = n \sin\frac{A}{2}} \qquad [8]$$

9) Le prisme est dispersif, c'est-à-dire que pour chaque radiation il admet un indice différent, en différentiant [8], nous obtenons :

$$\cos\left(\frac{A+D_m}{2}\right) \mathrm{d}\left(\frac{A+D_m}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}\right) \mathrm{d}n$$

L'angle A du prisme est supposé constant, en utilisant [8] :

$$\cos\left(\frac{A+D_m}{2}\right) \frac{\mathrm{d}D_m}{2} = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right) \mathrm{d}n$$

$$\mathrm{d}D_m = \frac{2}{n} \operatorname{tg}\left(\frac{A+D_m}{2}\right) \mathrm{d}n$$

$$\mathrm{d}D_m = \frac{2}{n} \operatorname{tg} i_m \, \mathrm{d}n = \frac{2}{n} \operatorname{tg} i_m \left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda$$

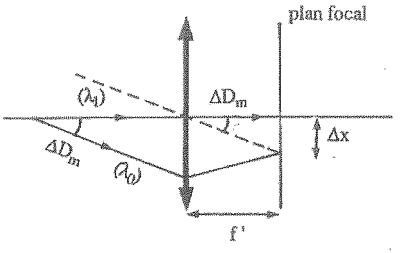
Soit $\Delta D_m = \frac{2}{n} \operatorname{tg} i_m \left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right| \Delta\lambda$

Or $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2.10^{-14}}{\lambda^3}$, par conséquent : $\boxed{\Delta D_m = \frac{4.10^{-14}}{n\lambda^3} \operatorname{tg} i_m \, \Delta\lambda}$

A.N : $n = 1{,}54$; $\lambda = \lambda_0 = 5890$ Å ; $\Delta\lambda = 6$ Å ; $i = 57°$ $\boxed{\Delta D_m = 1{,}17.10^{-4} \text{ rd}}$

Remarque : Dans l'application numérique en prenant λ_1 au lieu de λ_0 on trouve le même résultat.

10) A la sortie du prisme les deux rayons font entre eux un angle ΔD_m ; la distance Δx entre les deux images est donnée par la figure ci-contre.



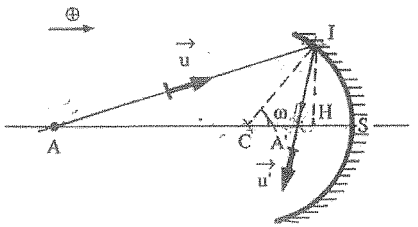
Nous avons pris le rayon de longueur d'onde λ_1 confondu avec l'axe optique de la lentille ΔD_m est très faible, nous avons donc :

$$\boxed{\Delta x = f' \Delta D_m}$$

A.N : $f' = 50$ cm ; $\Delta D_m = 1{,}17.10^{-4}$ rd

$$\boxed{\Delta x = 0{,}059 \; mm}$$

2 - Chemin optique, stigmatisme approché, miroir sphérique.



Soit un miroir sphérique concave de sommet S, de centre C, de rayon R, plongé dans l'air. Un rayon lumineux paraxial AI (A appartient à l'axe optique) se réfléchit en I sur le miroir et coupe l'axe au point A'.

Soit H la projection de I sur l'axe optique.

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ vecteurs unitaires.

On pose $\overline{CA} = p$; $\overline{CA'} = p'$, $\overline{CS} = R$; $\widehat{SCI} = \omega$ *(très petit).*

a) Calculer le chemin optique $L = [AIA']$ *en fonction de p, p', R et* ω.

b) En appliquant la condition générale de stigmatisme approché établir la relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au centre C.

Application. Décrire l'image que donne un miroir sphérique concave (rayon de courbure = 60 cm) d'un objet de 3 cm de hauteur placé perpendiculairement à l'axe optique et situé à 20 cm du sommet du miroir.
Faire une construction géométrique.

Extrait, Casablanca I, PC2, Mai 1986

a) Chemin optique :

Le chemin optique est : $L = n\,\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AI} + n\,\vec{u'}\,.\,\overrightarrow{IA'}$, or le miroir est plongé dans l'air d'indice un :

$$L = \vec{u}\,.\,\overrightarrow{AI} + \vec{u'}\,.\,\overrightarrow{IA'} = AI + IA' \qquad \text{avec } AI = \|\,\overrightarrow{AI}\,\| \; ; \; IA' = \|\,\overrightarrow{IA'}\,\|$$

Dans le triangle CIA, on a : $AI^2 = R^2 + p^2 - 2pR\cos\omega = (R-p)^2 + 4pR\sin^2\frac{\omega}{2}$

De même pour CIA' : $IA'^2 = R^2 + p'^2 - 2p'R\cos\omega = (R-p')^2 + 4p'R\sin^2\frac{\omega}{2}$

D'où
$$\boxed{L = \left[(R-p)^2 + 4pR\sin^2\frac{\omega}{2}\right]^{1/2} + \left[(R-p')^2 + 4p'R\sin^2\frac{\omega}{2}\right]^{1/2}} \qquad [1]$$

b) La condition générale de stigmatisme approché, implique que I est proche de S, c'est-à-dire que ω est faible. Dans ce cas, le chemin optique $[AIA']$ est constant au deuxième ordre près en ω.

En prenant $\sin^2\frac{\omega}{2} \approx \frac{\omega^2}{4}$, d'après [1] :

$$L \approx (R-p)\sqrt{1+\frac{pR}{(R-p)^2}\omega^2} + (R-p')\sqrt{1+\frac{p'R}{(R-p')^2}\omega^2}$$

En effectuant un développement limité au deuxième ordre :

$$L \approx (R-p)\left(1+\frac{pR}{2(R-p)^2}\omega^2\right) + (R-p')\left(1+\frac{p'R}{2(R-p')^2}\omega^2\right)$$

$$L \approx (R-p)+(R-p')+R\left[\frac{p}{R-p}+\frac{p'}{R-p'}\right]\omega^2$$

Pour que le chemin optique soit constant en quatrième ordre près en ω, il faut que :

$$\frac{p}{R-p}+\frac{p'}{R-p'}=0$$

D'où la relation de conjugaison : $\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{2}{R}}$ [2]

Remarque : La relation [2], est la formule de conjugaison d'un miroir sphérique, convexe ou concave dans les conditions de Gauss.

◆ **Application :**

D'après [2] : $\frac{1}{p'}=-\frac{2}{R}-\frac{1}{p}$

Soit $\boxed{p'=\frac{pR}{2p-R}}$

le grandissement linéaire est : $\boxed{\gamma=\frac{p'}{p}}$

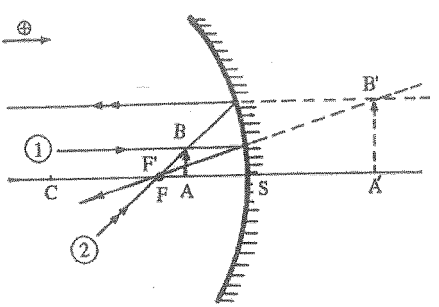
A.N : $R=\overline{CS}=60$ cm ; $p=\overline{CA}=40$ cm :

$\boxed{p'=\overline{CA'}=120\text{ cm}}$; $\boxed{\gamma=3}$

L'image est virtuelle, située à 60 cm de S, elle est droite et trois fois plus grande que l'objet.

◆ **Construction géométrique :**

D'après la relation [2] on voit que les foyers du miroir, sont confondus au milieu de CS.
Le rayon 1 parallèle à l'axe optique et passant par B converge en F':
Le rayon 2 qui passe par F et B émerge parallèlement à l'axe optique.
Le prolongement des rayons réfléchis correspondants à 1 et 2 ont pour intersection le point B' image de B ; A' s'obtient par projection orthogonale sur l'axe optique. D'où l'image $A'B'$ de AB.



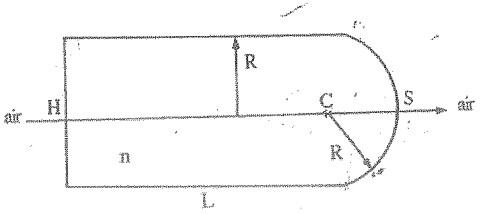
3 - Dioptre plan, Dioptre sphérique.

Tout le problème sera traité dans le cas de l'approximation de Gauss.

1°) a) Donner, sans démonstration, la formule de conjugaison du dioptre plan. Préciser la signification des notations utilisées.
b) Déduire de cette formule la position de l'image A'B' d'un objet AB lorsque cet objet est situé dans un plan parallèle au plan du dioptre.

2°) a) Donner, sans démonstration, la formule de conjugaison du dioptre sphérique. Préciser la signification des notations utilisées.
b) En déduire l'expression des distances focales image f ' et objet f de ce dioptre.

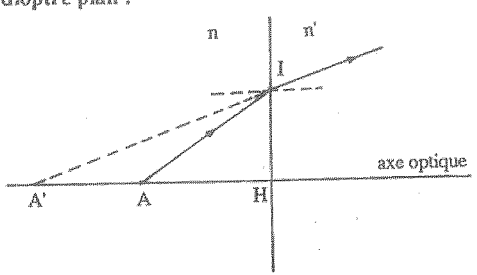
3°) Un cylindre de verre, d'indice n, de rayon R limité à l'une de ses extrémités par une face plane et à l'autre extrémité par une face hémisphérique convexe constitue un système optique. Un observateur examine, à travers ce système des objets plans, en appliquant la face plane sur le plan des objets.



a) Quelle doit être la position de l'image intermédiaire A'B' par rapport au dioptre sphérique (face de sortie) pour que ce système optique donne une image définitive A"B" à l'infini.
b) En déduire, compte tenue de la première question, la longueur L que doit avoir la partie cylindrique, pour que l'image finale A"B" d'un objet AB se forme à l'infini.
c) Construire les rayons lumineux qui forment cette image. Application numérique (pour les questions b et c seulement) : n = 1,5. /R/ = 5 cm.

Extrait, Tétouan, PC2.

1°) a) Formule de conjugaison du dioptre plan :



H : Sommet du dioptre

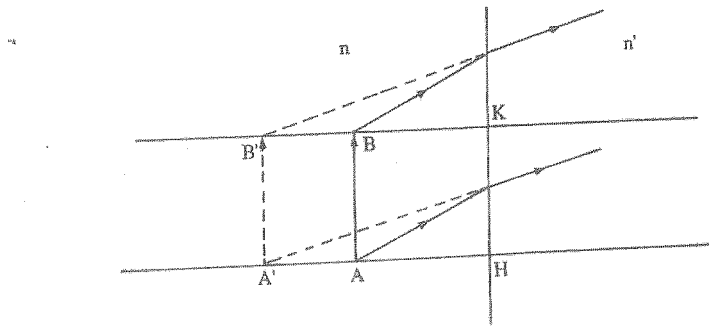
n et n' : indices des milieux objet et image

La figure est tracée avec $n < n'$.

Dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire lorsque le point d'incidence I n'est pas très loin du point H, le point objet A situé sur l'axe optique à pour image A' tel que :

$$\boxed{\frac{n}{\overline{HA}} - \frac{n'}{\overline{HA'}} = 0} \qquad [1]$$

b) En conservant le stigmatisme approché on peut utiliser [1] pour une position K, ce qui donne :



B' est l'image de B.

Donc AB a pour image $A'B'$ dont la position est d'après [1] :

$$\overline{HA'} = \frac{n'}{n}\overline{HA} \qquad [2]$$

Remarque : On constate qu'il y a éloignement apparent de A par rapport à la surface de séparation si $n < n'$ (cas des figures précédentes) et rapprochement apparent si $n > n'$.

2°) a) Formule de conjugaison du dioptre sphérique :

Soit un dioptre sphérique de sommet S, de centre C, dont le milieu objet a pour indice n et le milieu image à pour indice n'. Un objet AB perpendiculaire à l'axe optique admet une image $A'B'$ perpendiculaire à l'axe optique, tel que :

$$\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}} \qquad [3]$$

ou bien

$$\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}} \qquad [4]$$

[3] : Formule de conjugaison avec origine au sommet.

[4] : Formule de conjugaison avec origine au centre.

b) Déduction des distances focales :

La distance focale image est obtenue lorsque A est à l'infini.

[3] : $-\frac{n'}{\overline{SF'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}}$; F', foyer image

Soit

$$f' = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}$$

Lorsque l'image A' est rejetée à l'infini, l'objet se trouve au foyer objet F.

[3] : $\frac{n}{\overline{SF}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}}$

d'où $$\boxed{f = \frac{n}{n-n'}\overline{SC}} \qquad [6]$$

Remarque : Les distances focales image et objet, sont déterminées à partir des points principaux correspondants, or les points principaux d'un dioptre sphérique, sont confondus avec S, c'est pourquoi nous avions pris la formule [3] au lieu de [4].

3°) **a)** L'image $A'B'$ donnée par le dioptre plan, joue le rôle d'un objet pour le dioptre sphérique. D'après 2°) b), il faut que A' soit situé dans le plan focal objet du dioptre sphérique, pour avoir une image définitive $A''B''$ à l'infini.

On doit avoir d'après [6] : $$\boxed{\overline{SA'} = \frac{n}{n-1}\overline{SC}} \qquad [7]$$

b) Longueur du cylindre $L = |\overline{CH}|$:

L'objet AB est supposé appliqué contre le dioptre plan, c'est-à-dire $\overline{HA} = 0$, donc d'après [2], en prenant l'indice du milieu objet égal à 1 et du milieu image égal à n, nous avons :

$$\overline{HA'} = n\,\overline{HA} = 0.$$

L'image $A'B'$ est donc confondue avec AB et située contre le dioptre plan, on doit donc avoir :

$$\overline{SH} = \overline{SA'}$$

$$\overline{SC} + \overline{CH} = \overline{SA'} \quad ; \quad \overline{SA'} \text{ est donné par [7]}$$

Soit $$\overline{CH} = \frac{\overline{SC}}{n-1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{L = \frac{|R|}{n-1}}$$

A.N : $|R| = 5$ cm ; $n = 1{,}5$

$$\boxed{L = 10 \text{ cm}}$$

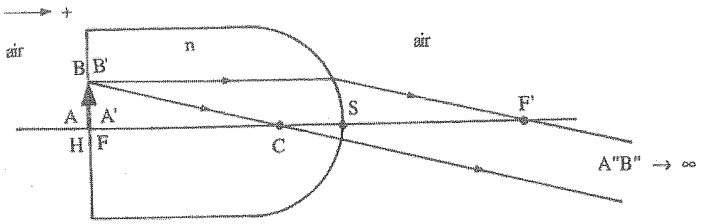
c) Construction géométrique :

Positions de F , F' : D'après [5] et [6] : $\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{1-n}$; $\overline{SF} = \frac{n}{n-1}\overline{SC}$

En prenant comme sens positif celui de propagation de la lumière, $\overline{SC} = -R$.

A.N : $R = 5$ cm ; $n = 1{,}5$

$$\overline{SF'} = 10 \text{ cm} \; ; \; \overline{SF} = -15 \text{ cm}.$$



Le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique converge en F'. Le rayon issu de B et passant par C n'est pas dévié, on voit que dans le milieu image, ces deux rayons ne concourent pas, $A"B"$ est donc rejetée à l'infini.

4 - Etude d'une lentille boule avec milieux extêmes différents.

Soit une lentille boule de centre O, de rayon R et d'indice n. Elle est baignée à gauche par l'air et à droite par un liquide d'indice n' (fig).

1°) Etudier cette lentille dans les conditions de Gauss, en déterminant la position de :

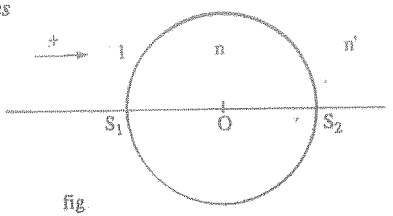
a) son centre optique,

b) ses points nodaux,

c) ses foyers, et

d) ses plans principaux.

Donner les distances focales f et f'.



fig

2°) Etudier le cas particulier où n' = 1, n = 4/3 et R = 5 cm.

3°) Un objet est à trente centimètres (30 cm) de la lentille boule baignée par l'air (n' = 1). Calculer la position de l'image donnée par cette lentille:
a) En la considérant comme l'association de deux dioptres sphériques ;
b) En utilisant les éléments cardinaux déterminés dans la questions 2°).

Extrait, Fès, Mai 1987.

1°) a) Centre optique :

Un rayon incident passant par le centre O de la boule ne subit aucune déviation, et émerge, par conséquent, parallèle à lui-même. Le centre optique est donc situé en O.

b) Points nodaux

Le rayon incident envisagé en a) ne subit ni déplacement ni déviation. Les points nodaux objet et image (N, N') sont donc confondus en O ; $N \equiv N' \equiv O$.

c) Détermination des foyers :

Pour la détermination des foyers, nous allons chercher la formule de conjugaison de la

lentille boule en la considérant comme l'association de deux dioptres sphériques de sommets S_1 , S_2.
Le centre O est commun aux deux dioptres, nous appliquerons donc, la formule de conjugaison avec origine au centre.

$$\overset{(1)}{A} \longrightarrow \overset{(n)}{A_0} \qquad : \frac{n}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA_0}} = \frac{n-1}{\overline{OS_1}} \qquad [1]$$

$$\overset{(n)}{A_0} \longrightarrow \overset{(n')}{A'} \qquad : \frac{n'}{\overline{OA_0}} - \frac{n}{\overline{OA'}} = \frac{n'-n}{\overline{OS_2}} \qquad [2]$$

En multipliant [1] par n' et en additionnant à [2] : $\frac{nn'}{\overline{OA}} - \frac{n}{\overline{OA'}} = \frac{(n-1)n'}{\overline{OS_1}} + \frac{n'-n}{\overline{OS_2}}$ [3]

avec : $\overline{OS_1} = -\overline{OS_2} = -R$

◆ Le foyer image se déduit de [3] en faisant tendre $\overline{OA}$ vers l'infini :

$$\boxed{\overline{OF'} = \frac{nR}{n(n'+1)-2n'}} \qquad [4]$$

◆ Le foyer objet se déduit de [3] en faisant tendre $\overline{OA'}$ vers l'infini :

$$\boxed{\overline{OF} = \frac{nn'R}{2n'-n(n'+1)}} \qquad [5]$$

[4] et [5] donnent les positions des foyers image et objet par rapport au point O.

d) Plans principaux :

◆ Plan principal image : $\overline{FN} = \overline{H'F'}$, or $N \equiv O$, donc :

$$\overline{FO} = \overline{H'O} + \overline{OF'} \quad , \quad \overline{OH'} = \overline{OF} + \overline{OF'}$$

Soit d'après [4] et[5] : $\boxed{\overline{OH'} = \frac{n(n'-1)R}{2n'-n(n'+1)}}$ [6]

Le plan passant par H' et perpendiculaire à l'axe optique, est le plan principal image.

◆ Plan principal objet : $\overline{F'N'} = \overline{HF}$, or $N' \equiv O$, donc :

$$\overline{F'O} = \overline{HO} + \overline{OF} \quad , \quad \overline{OH} = \overline{OF} + \overline{OF'}$$

soit $H \equiv H'$ [7]

Les plans principaux sont confondus. Leur position est donnée par [6].

Distances focales f, f'

$$\overline{HF} = \overline{F'N'} \quad \text{donc} \quad f = -\overline{OF'}$$

$$\overline{H'F'} = \overline{FN} \qquad \text{donc} \qquad f' = -\overline{OF}$$

On détermine f' et f d'après [4] et [5] :

$$\boxed{f = \frac{nR}{2n' - n(n'+1)}} \qquad [8] \quad ; \quad \boxed{f' = \frac{nn'R}{n(n'+1) - 2n'}} \qquad [9]$$

On vérifie que $f/f' = -1/n'$.

2°) **Cas particulier** : $n' = 1$; $n = 4/3$; $R = 5$ cm.

◆ Le centre optique et les points nodaux se trouvent toujours en O.

◆ Foyers : D'après [4] et [5] : $\overline{OF'} = 10$ cm ; $\overline{OF} = -10$ cm.

◆ Plans principaux : D'après [6] et [7] : $H \equiv H' \equiv O$

Les plans principaux sont confondus avec le plan passant par O et perpendiculaire à l'axe optique.

◆ Distances focales : D'après [8] et [9] : $f = -10$ cm ; $f' = 10$ cm.

Remarque : Le cas qu'on vient d'étudier est à interstice nulle ($\overline{HH'} = 0$) et dont les milieux extrêmes sont identiques. Dans un tel système, les quatre points N, N', H, H' sont confondus.

3°) **Position de l'image.**

a) Méthode algébrique :

En considérant la lentille comme l'association de deux dioptres sphériques, la formule de conjugaison est donnée par [3] en prenant $n' = 1$:

$$\frac{n}{\overline{OA}} - \frac{n}{\overline{OA'}} = \frac{n-1}{\overline{OS_1}} + \frac{1-n}{\overline{OS_2}}$$

Soit

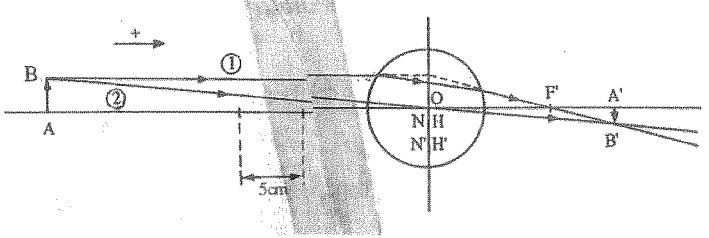
$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{2(n-1)}{nR}}$$

A.N : $\overline{OA} = -30$ cm ; $n = 4/3$; $R = 5$ cm.

$$\boxed{\overline{OA'} = 15 \text{ cm}}$$

C'est une image réelle, située à 15 cm de O.

b) Utilisation des éléments cardinaux.



L'intersection du faisceau incident parallèle à l'axe optique, et du rayon émergent correspondant, se trouve au plan principal image.
Le faisceau incident qui se dirige vers O, ne subit pas de déviation car $N \equiv N' \equiv O$.
L'intersection du faisceau 1 et 2 donne l'image de B.

L'image de AB est réelle et renversée. D'après l'échelle, on vérifie que $\overline{OA'} = 15$ cm.

5 - Dioptre sphérique - Système catadioptrique - Lentille demi-boule.

I / QUESTION DE COURS :

Soient n et n' les indices des milieux objet et image d'un dioptre sphérique de sommet S.

Un objet AB et son image A'B' sont repérés par les abscisses : $x = \overline{SA}$ et $x' = \overline{SA'}$.

1°) Quelle relation existe-t-il entre x, x', n et n' et la convergence C du dioptre sachant que : $C = \frac{1}{f'}$, f' : distance focale-image.

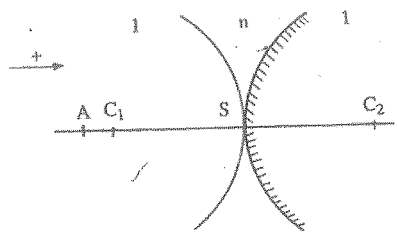
2°) On déplace A de $dx \ll$, quel déplacement dx' en résulte-t-il pour l'image A' ?

3°) Exprimer le grandissement axial $g = \frac{dx'}{dx}$ en fonction du grandissement linéaire $\gamma = \overline{A'B'} / \overline{AB}$.
Pour quelle position de l'objet A, ces deux grandissements sont-ils égaux ?
(Nota : pour tous les calculs, on se place dans les conditions de Gauss).

II) Dans le système ci-contre, la lumière traverse un dioptre sphérique de rayon $\overline{SC_1} = R_1$, se réfléchit sur un miroir convexe de rayon $\overline{SC_2} = R_2$, et traverse à nouveau le dioptre sphérique.

Soit A un point objet sur l'axe et A' son image dans le système, on pose :

$$\overline{SA} = x \text{ et } \overline{SA'} = x'$$

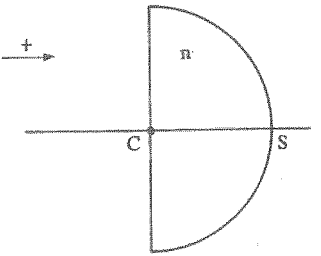


1°) Etablir une relation entre x , x', R_1, R_2 et n.

2°) En déduire que le système est équivalent à un miroir sphérique unique dont on déterminera le sommet, le rayon de courbure en fonction de R_1, R_2, n et la nature.

III / On considère une lentille demi-boule, en verre d'indice n = 3/2, de rayon R, de centre C et de sommet S.

Son épaisseur e est égale à R (fig).



1°) Déterminer le centre optique O de la lentille, en déduire les points nodaux N et N' du système.

2°) Situer les plans principaux P et P' et les foyers objet et image F, F' de la lentille.

3°) Donner une construction géométrique pour un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique (CS).

Fès, MP2, PC2, Mai 1985.

I) QUESTION DE COURS

1°) Relation de conjugaison d'un dioptre sphérique :

Dans les conditions de Gauss, la formule de conjugaison d'un dioptre sphérique de sommet S et de centre Ω est :

$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{S\Omega}} \qquad [1]$$

Lorsque l'objet A tend vers l'infini, l'image A' tend vers le foyer image F'. Le point principal image du dioptre sphérique est confondu avec S, on peut donc écrire à partir de [1] :

$$\frac{n'}{f'} = \frac{n'-n}{\overline{S\Omega}} = n'C.$$

En posant $x = \overline{SA}$, $x' = \overline{SA'}$:

$$\boxed{\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = n'C} \qquad [2]$$

2°) Lorsque l'objet se déplace, le long de l'axe optique, de dx faible, l'image subit alors un déplacement dx'. La convergence C est constante, en différentiant [2] on a :

$$-n'\frac{dx'}{x'^2} + n\frac{dx}{x^2} = 0$$

donc

$$\boxed{dx' = \frac{nx'^2}{n'x^2}\,dx} \qquad [3]$$

3°) Grandissement axial g :

D'après [3]

$$g = \frac{dx'}{dx} = \frac{nx'^2}{n'x^2} \qquad [4]$$

Grandissement linéaire γ:

Pour un dioptre sphérique, le grandissement linéaire est donné par : $\gamma = \frac{n}{n'}\cdot\frac{x'}{x}$ [5]

Relation entre le grandissement axial et linéaire :

D'après [4] et [5] nous avons : $\boxed{g = \frac{n'}{n}\gamma^2}$

Remarque : Nous constatons que, pour le dioptre sphérique, le grandissement axial est toujours positif : lorsque le plan objet se déplace le long de l'axe optique, le plan image se déplace dans le même sens (avec une discontinuité lorsque le plan objet passe au foyer objet).

Position de l'objet A lorsque $\gamma = g$.

D'après [4] et [5], $\gamma = g$ entraîne $x = x'$

Pour $x = x'$ [1] implique $\overline{SA} = \overline{SA'} = \overline{S\Omega}$

Les grandissements γ et g sont égaux lorsque l'objet A est en Ω, centre du dioptre sphérique.

Dans cette position, nous avons : $\gamma = g = \frac{n}{n'}$.

II / RELATION DE CONJUGAISON DU SYSTEME :

1°) Soit A_0 l'image de l'objet A à travers le dioptre sphérique :

$$\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{n}{\overline{SA_0}} = \frac{(1-n)}{\overline{SC_1}} \qquad [1]$$

Soit A_1 l'image de l'objet A_0 à travers le miroir sphérique :

$$\frac{1}{\overline{SA_0}} + \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{2}{\overline{SC_2}} \qquad [2]$$

Soit enfin A' l'image de l'objet A_1 à travers le dioptre sphérique, dans le sens de la lumière réfléchie : $\frac{n}{\overline{SA_1}} - \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{(n-1)}{\overline{SC_1}}$ [3]

Il faut éliminer A_0 et A_1 entre les relations [1], [2], [3].

[1] + n.[2] : $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{n}{\overline{SA_1}} = \frac{1-n}{\overline{SC_1}} + \frac{2n}{\overline{SC_2}}$

En utilisant [3] : $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2(1-n)}{\overline{SC_1}} + \frac{2n}{\overline{SC_2}}$ [4]

D'où : $\boxed{\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2(1-n)R_2 + 2nR_1}{R_1R_2}}$ [5]

2°) Miroir équivalent :

D'après [4] on remarque que le système est équivalent à un miroir sphérique de sommet S et de centre Ω tel que $\frac{2}{\overline{S\Omega}} = \frac{2(1-n)}{\overline{SC_1}} + \frac{2n}{\overline{SC_2}}$

Rayon de courbure du miroir équivalent : $\overline{S\Omega} = R$

$$R = \frac{R_1 R_2}{(1-n)R_2 + nR_1}$$

Nature du miroir équivalent :

Il s'agit de trouver le signe de R.

$1 - n < 0$; $R_1 < 0$; $R_2 < 0$ donc : $R > 0$ par conséquent le miroir sphérique équivalent est convexe.

Remarque : On laisse au lecteur le soin de montrer qu'on arrive au même résultat en utilisant le théorème entre l'équivalence d'un système catadioptrique et d'un miroir.

III) 1°) Détermination du centre optique de la lentille :

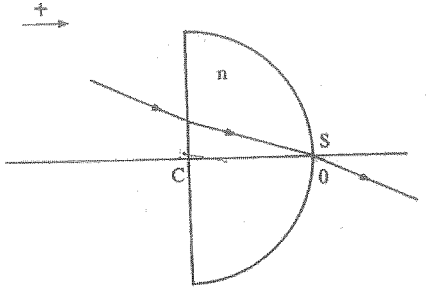
Soit O le centre optique de la lentille ; son expression est donnée par (voir rappels) :

$$\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \frac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}} \qquad [1]$$

S_1, C_1 sont respectivement le sommet et le centre du premier dioptre ; de même pour S_2, C_2 relativement au deuxième dioptre.

Dans notre cas la face d'entrée est plane : $\overline{S_1C_1}$ tend vers l'infini. Par ailleurs $S_1 \equiv C$; $S_2 \equiv C$; $\overline{S_2C_2} = \overline{SC}$

En utilisant [1] : $\frac{\overline{OC}}{\overline{OS}}$ tend vers l'infini ; par conséquent O est confondu avec S.



Tout rayon passant par O ressort parallèlement à sa direction d'incidence.

Déduction des points nodaux N, N' :

Dans les conditions de Gauss O est l'image de N à travers le premier dioptre.

La formule de conjugaison du dioptre plan donne : $\frac{1}{\overline{CN}} - \frac{n}{\overline{CO}} = 0$

Or $O \equiv S$, donc $\boxed{\overline{CN} = \frac{R}{n}}$ [2]

A.N : $n = 3/2$

$$\boxed{\overline{CN} = \frac{2R}{3}}$$

Dans les conditions de Gauss N' est l'image de O à travers le deuxième dioptre.

La formule de conjugaison du dioptre sphérique avec origine au centre donne :

$$\frac{n}{\overline{CN'}} - \frac{1}{\overline{CO}} = \frac{(n-1)}{\overline{CS}}$$

Soit $\boxed{\overline{CN'} = R}$, $N' \equiv S$ [3]

Le point nodal image est confondu avec S.

2°) Plans principaux P et P' :

Soit H le point principal objet, d'après le cours : $\overline{HN} = \overline{HF} + \overline{H'F'}$; or les milieux extrêmes sont identiques, d'où $\overline{HF} + \overline{H'F'} = 0$, donc $\overline{HN} = 0$; de même , $\overline{H'N'} = 0$.

Les points principaux sont donc confondus avec les points nodaux correspondants ; cela découle du fait que les milieux extrêmes sont identiques (Air).

Nous avons donc d'après [2] et [3] : $\overline{CH} = \overline{CN} = \frac{R}{n}$; $H' \equiv N' \equiv S$

Les plans principaux P et P', sont les plans perpendiculaires à l'axe optique et passant par les points principaux correspondants.

Foyers objet et image F, F' :

Nous allons chercher la relation de conjugaison de la lentille demi-boule.
Soit A un point objet admettant A_0 pour image à travers le dioptre plan :

$$\frac{1}{\overline{CA}} - \frac{n}{\overline{CA_0}} = 0 \qquad [4]$$

Le point A_0 admet pour image A' à travers le dioptre sphérique ; la formule de conjugaison avec origine au centre donne : $\frac{1}{\overline{CA_0}} - \frac{n}{\overline{CA'}} = \frac{1-n}{\overline{CS}}$ [5]

[4] + n.[5] entraîne : $\frac{1}{\overline{CA}} - \frac{n^2}{\overline{CA'}} = \frac{n(1-n)}{\overline{CS}}$ [6]

◆ Le foyer objet s'obtient pour $\overline{CA'}$ tendant vers l'infini : $\boxed{\overline{CF} = \frac{R}{n(1-n)}}$

◆ Le foyer image s'obtient pour $\overline{CA}$ tendant vers l'infini : $\boxed{\overline{CF'} = \frac{nR}{n-1}}$

A.N : $n = 3/2$

Donc $\overline{CF} = -\frac{4R}{3}$; $\overline{CF'} = 3\,R$

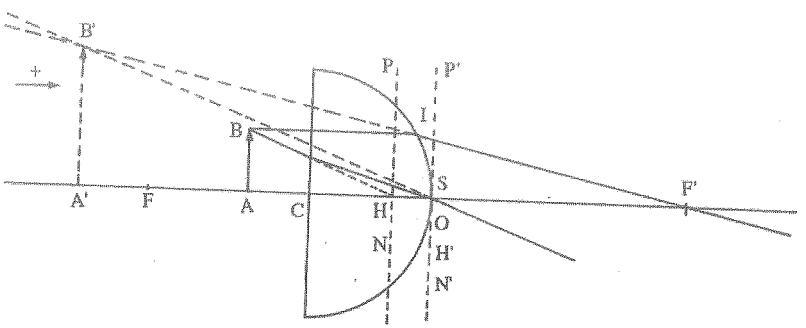
3°) Construction géométrique :

Prenons un objet AB réel situé entre C et F, avec, par exemple, $\overline{CA} = -R/2$; son image est virtuelle telle que $\overline{CA'} = -1{,}8$ R. On peut vérifier cela à partir de [6].

Pour la construction géométrique, on a considéré un faisceau incident parallèle à l'axe optique, qui converge en F', le point I est pratiquement confondu avec P', car nous sommes dans les conditions de Gauss.

Le deuxième rayon issu de B semble se diriger vers N, donc il se réfracte sur la face plane et passe par O, par conséquent il va émerger parallèlement à sa direction d'incidence.

Le troisième faisceau est issu de A et confondu avec l'axe optique. Pour tracer l'image il suffit de chercher l'intersection B' des prolongements des deux rayons issus de B, puis de tracer la droite passant par B' et perpendiculaire à l'axe optique : on obtient une image droite virtuelle.



6 - Lentille cylindrique.

Un système optique centré est constitué d'un cylindre en verre d'indice n = 1,5 limité par deux surfaces sphériques de rayons de courbure $\overline{S_1C_1} = R = -\overline{S_2C_2}$ ***où R est positif ; l'axe du cylindre est l'axe principal du système.*** S_1 ***et*** S_2 ***sont distants de e :*** $\overline{S_1S_2} = e$.

La lumière arrive du côté de S_1. ***L'étude se fait dans les conditions de Gauss.***

1) Déterminer les positions des foyers F_1, F_1', F_2, F_2' ***et des points principaux*** H_1, H_1', H_2, H_2' ***des dioptres*** (S_1, C_1) ***et*** (S_2, C_2). ***Faire un schéma et placer tous ces points ; prendre*** $e = 4R$ ***et comme unité sur l'axe une longueur égale à R. Aucune démonstration des***

formules utilisées n'est exigée.

2) Calculer la position des foyers objet F et image F' du système, ainsi que la distance focale f'. Préciser la nature des foyers. Placer les foyers F, F' et les points principaux H et H' sur le schéma précédent. La formule de Gullstrand peut être utilisée, si nécessaire, sans qu'elle soit démontrée.

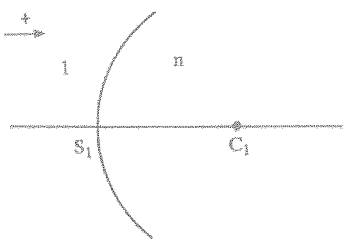
3) Sans calcul, indiquer en s'aidant d'une figure, comment peut-on déterminer directement les points antinodaux ν et ν'.
Placer ces points sur le schéma de la 1ère question. En déduire que les points nodaux sont confondus avec les sommets des dioptres.

4) Un objet lumineux AB est placé perpendiculairement à l'axe principal du système, A étant sur l'axe, à une distance x de S_1 ; $\overline{S_1A} = -x$ avec x positif. Calculer la position de l'image A' en fonction de x, n et R. On prendra e = R.

5) Quelle condition doit satisfaire e, R et n pour que le système soit afocal ?

Extrait, Agadir, PC2, Janvier 1987.

1°) Etude du dioptre (S_1, C_1) :



La formule de conjugaison pour un couple de points conjugués A_1, A_1' est donnée par :

$$\frac{1}{S_1A_1} - \frac{n}{S_1A_1'} = \frac{1-n}{S_1C_1} \qquad [1]$$

Positions des foyers :

Lorsque A_1 est à l'infini, $A_1' \equiv F_1'$, [1] donne : $\overline{S_1F_1'} = \frac{n}{n-1}\overline{S_1C_1}$ [2]

Lorsque $A_1 \equiv F$ alors A_1' est à l'infini, [1] donne : $\overline{S_1F_1} = \frac{\overline{S_1C_1}}{1-n}$

Position des points principaux :

Les points principaux sont les points pour lesquels le grandissement transversal est égal à un.
En prenant la formule de conjugaison avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{C_1H_1'}} - \frac{n}{\overline{C_1H_1}} = \frac{1-n}{\overline{C_1S_1}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{C_1H_1'}}{\overline{C_1H_1}} = 1$$

Ces deux relations donnent : $H_1 \equiv H_1' \equiv S_1$

Etude du dioptre (S_2, C_2) :

D'une façon similaire, on trouve : $\overline{S_2F_2'} = \frac{\overline{S_2C_2}}{1-n}$; $\overline{S_2F_2} = \frac{n}{n-1}\overline{S_2C_2}$ [3]

et puis $H_2 \equiv H'_2 \equiv S_2$

A.N : $n = 1{,}5$; $\overline{S_1C_1} = R$; $\overline{S_2C_2} = -R$

$\overline{S_1F_1} = -2R$; $\overline{S_1F'_1} = 3R$; $\overline{S_2F_2} = -3R$; $\overline{S_2F'_2} = 2R$

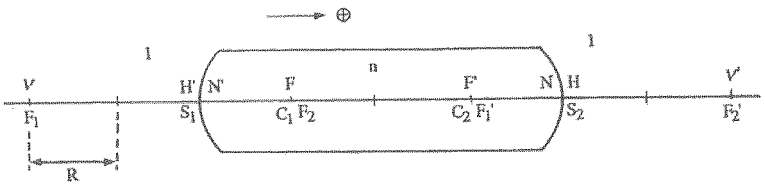


figure 1

2°) Positions des foyers F, F'

◆ F et F_2 sont conjugués à travers le premier dioptre. La formule de Newton donne :

$\overline{F_1F} \cdot \overline{F'_1F_2} = f_1f'_1$ or $\overline{F'_1F_2} = \Delta$ qui est l'intervalle optique, donc : $\overline{F_1F} = \dfrac{f_1f'_1}{\Delta}$

$$\Delta = \overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1S_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_2} = -f'_1 + e + f_2 \qquad [4]$$

Soit $$\boxed{\overline{F_1F} = \dfrac{f_1f'_1}{f_2 + e - f'_1}}$$

Noter qu'on a $\overline{S_2F_2} = f_2$ car $S_2 \equiv H_2$, de même pour $\overline{S_1F'_1} = f'_1$

◆ F'_1 et F' sont conjugués à travers le deuxième dioptre.

La formule de Newton donne : $\overline{F_2F'_1} \cdot \overline{F'_2F'} = f_2f'_2$; $\overline{F'_2F'} = -\dfrac{f_2f'_2}{\Delta}$

D'où $$\boxed{\overline{F'_2F'} = \dfrac{f_2f'_2}{f'_1 - e - f_2}}$$

A.N : $f_1 = -2R$; $f'_1 = 3\,R$; $f_2 = -3\,R$; $f'_2 = 2R$; $e = 4R$

$\boxed{\overline{F_1F} = 3R}$ [5] ; $\boxed{\overline{F'_2F'} = -3R}$ [6]

Détermination de la distance focale f'.

D'après la formule de Gullstrand : $C = C_1 + C_2 - \dfrac{\overline{H_1H_2}}{n} C_1C_2$

soit : $\frac{1}{f'} = \frac{n}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{n} \cdot \frac{n}{f_1'} \cdot \frac{1}{f_2'}$ car $\overline{H_1'H_2} = \overline{S_1S_2} = e$

D'où $\boxed{f' = \frac{f_1'f_2'}{nf_2' + f_1' - e}}$

A.N : $\boxed{f' = 3R}$ [7]

Nature des foyers :

D'après [5] : $\overline{S_1F} = R$, le foyer objet F se trouve dans l'espace objet virtuel ; F est donc virtuel.

D'après [6] : $\overline{S_2F'} = -R$, le foyer image F' se trouve dans l'espace image virtuel ; F' est donc virtuel.

[5] et [6] nous permettent de placer F et F'. (fig.1).

Point principaux H, H'

D'après [7], $\overline{H'F'} = 3R$; or les milieux extrêmes sont identiques, donc $\overline{HF} = -3R$.

Pour les positions de H, H' voir figure 1.

3) **Points antinodaux ν, ν' :**

Pour tout rayon incident, faisant un angle u avec l'axe optique, et passant par le point antinodal objet ν, correspond un rayon émergent, faisant un angle $u' = -u$ avec l'axe optique, et passant par le point antinodal image ν'.

Compte tenu de la symétrie du système étudié, on remarque qu'un rayon incident passant par F_1 (voir fig 2) traverse le cylindre parallèlement à l'axe optique, et émerge du système par F_2' or $\overline{F_1S_1} = \overline{S_2F_2'}$, donc $u' = -u$, d'où $\nu = F_1$ et $\nu' = F_2'$



figure 2

Déduction des points nodaux N, N'.

Les points nodaux N et N' sont symétriques des points antinodaux ν et ν' par rapport aux foyers correspondants.

Par conséquent : $N \equiv S_2$; $N' \equiv S_1$ (figure 1).

4°) Position de l'image A' à travers le système :

Nous allons supposer que A donne une image A_0 par rapport au premier dioptre :

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{n}{\overline{S_1A_0}} = \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}} \qquad [8]$$

Et que A_0 donne l'image A' par rapport au deuxième dioptre :

$$\frac{n}{\overline{S_2A_0}} - \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}} \qquad [9]$$

En remarquant que $\overline{S_2A_0} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A_0}$, nous pouvons éliminer $\overline{S_1A_0}$ entre [8] et [9].

D'où $$\frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n\,(\overline{S_1C_1} + \overline{S_1A}\ (n-1))}{\overline{S_2S_1}\,(\overline{S_1C_1} + \overline{S_1A}\,(n-1)) + n\,\overline{S_1A}.\overline{S_1C_1}} - \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}}$$

Avec $\overline{S_1C_1} = -\overline{S_2C_2} = R$; $\overline{S_1S_2} = R$; $\overline{S_1A} = -x$; $n = 1{,}5$

On trouve $$\boxed{\overline{S_2A'} = \frac{4R(x+R)}{5x-4R}}$$

5°) Condition pour un système afocal :

Pour que le système soit afocal, il faut qu'un rayon venant de l'infini sort à l'infini.

Un rayon incident venant de l'infini converge en F_2', pour qu'il émerge à l'infini il faut qu'il passe par F_2. On doit donc avoir $F_1' \equiv F_2$.

Soit $\Delta = 0$; ce qui donne d'après [4] ; [2] ; [3] : $$\boxed{e = \frac{2nR}{n-1}}$$

7 - Association lentille convergente, miroir concave.

Soit un système optique constitué par une lentille mince convergente L, de centre optique O et de distance focale f' et d'un miroir concave M dont le centre C est confondu avec le centre optique O de la lentille. Le rayon R du miroir est égal à f'. L'axe principal du miroir et l'axe optique de la lentille sont confondus.

1) Faire le schéma du système et construire l'image A'B' de l'objet AB perpendiculaire à l'axe, où se trouve-t-elle ; quelle est la nature de cette image ?

2) Déterminer les grandissements linéaire et angulaire du système.

3) Montrer qu'à tout rayon incident sur le système lui correspond un émergent parallèle.

Extrait, Tétouan PC2, Janvier 1984.

1°) Construction géométrique :

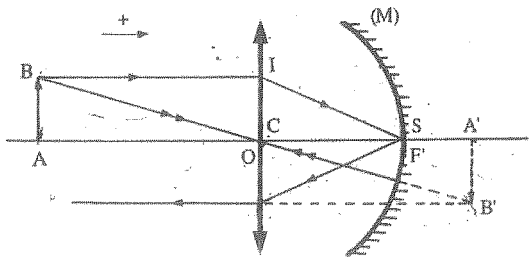
Le sommet du miroir sphérique est confondu avec F', car $R = f'$.

◆ Soit BI un rayon incident parallèle à l'axe optique, il converge en F', et se réfléchit symétriquement à IS par rapport à l'axe du système. A la fin il ressort parallèlement à l'axe

optique.

◆ Le rayon BO passe par le centre optique de la lentille, il n'est donc pas dévié, en étant confondu avec la normale au miroir, il revient donc sur lui même.

Les prolongements de ces deux rayons se coupent en B', image de B. L'image $A'B'$ est symétrique de AB par rapport à O, elle est virtuelle et renversée (figure.)



Méthode algébrique.

La lumière traverse successivement, la lentille, le miroir et de nouveau la lentille. Soient A_0 l'image de A à travers la lentille, A_1 l'image de A_0 à travers le miroir et A' l'image de A_1 à travers la lentille, dans le sens de la lumière réfléchie :

$$\frac{1}{\overline{OA_0}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad [1]$$

$$\frac{1}{\overline{OA_0}} + \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{2}{f'} \qquad [2] \text{ car } \overline{CS} = f'$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = -\frac{1}{f'} \qquad [3]$$

En combinant les relations [1] , [2], [3], on obtient : $\overline{OA} = -\overline{OA'}$, AB et $A'B'$ sont par conséquent situés à égale distance de part et d'autre de O.

2°) ◆ Grandissement linéaire :

Soient γ_1 , γ_2 , γ_3 , les grandissements associés successivement aux couples de points définis par [1], [2], [3]. Le grandissement γ du système est donné par :

$$\gamma = \gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3 = \frac{\overline{OA_0}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_0}} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Donc $\boxed{\gamma = -1}$

◆ Grandissement angulaire :

La relation de Lagrange–Helmholts donne : $G\gamma = -1$

Soit $\boxed{G = +1}$ ⇐ (L + M) ≡ (MiSP)

On peut vérifier le résultat en traçant sur la figure le rayon incident AI, auquel va correspondre un rayon émergent parallèle et semblant provenir de A'.

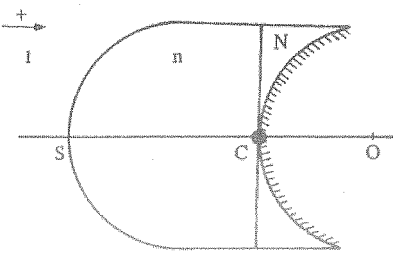
3°) A tout rayon incident faisant un angle u avec l'axe optique, correspond un rayon émergent faisant l'angle u' avec l'axe optique avec $G = u'/u$, or $G = 1$, donc $u = u'$; par conséquent les deux rayons sont parallèles.

Remarque : Le système étudié porte le nom de cataphote, son intérêt réside dans le fait qu'un rayon incident est toujours renvoyé parallèlement à lui même.

8 - Système catadioptrique épais - Eléments cardinaux d'un système centré.

EXERCICE N°1 :

On considère un système catadioptrique constitué d'une lentille plan–convexe d'indice n dont le centre C du dioptre de rayon R est au sommet du dioptre plan, accolée à un miroir sphérique convexe de rayon R'. Entre le miroir et la lentille, on a versé un liquide d'indice N (figure).



Calculer le rayon R' à donner au miroir dans les deux cas suivants :

1°) Pour que le miroir équivalent soit concave de rayon 9R.

2°) Pour que le centre du miroir équivalent soit rejeté à l'infini. Où se trouvent alors les foyers du système ?

EXERCICE N°2 :

Sur l'axe d'un système centré, on choisit une origine arbitraire O à partir de laquelle on compte les abscisses des différents points de l'axe. On constate que le point d'abscisse x_1 a pour image le point d'abscisse x_1', que le point d'abscisse x_2 est à lui–même son image, ainsi que le point d'abscisse x_3.

1°) Déterminer les abscisses des foyers du système.

A.N. : $x_1 = 2$ cm ; $x_1' = 19$ cm ; $x_2 = 7{,}6$ cm ; $x_3 = 15$ cm.

2°) Le grandissement au point x_2 est γ_2. Déterminer les distances focales f et f' et tous les éléments cardinaux du système centré.

A.N. : $\gamma_2 = 2{,}75$. On fera un croquis du système.

3°) Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le système centré soit équivalent à un dioptre unique est que les grandissements linéaires aux points x_2 et x_3 soient respectivement 1 et $\frac{n}{n'}$ (n et n' étant les indices des milieux extrêmes.)

Fès, MP2, PC2, Juin 1987.

EXERCICE N°1 :

Un système catadioptrique est équivalent à un miroir unique dont les caractéristiques sont les suivantes :

◆ Sommet du miroir équivalent : C'est le conjugué du sommet C du miroir réel à travers le système dioptrique dans le sens de la lumière réfléchie. C est son propre conjugué à travers le dioptre sphérique, le sommet du miroir équivalent est donc : $\Sigma \equiv C$

◆ Centre du miroir équivalent : C'est le conjugué du centre du miroir réel O à travers le système dioptrique dans le sens de la lumière réfléchie.

Soit Ω_0 le conjugué de O à travers le dioptre plan : $\dfrac{N}{\overline{CO}} - \dfrac{n}{\overline{C\Omega_0}} = 0$ [1]

Soit Ω le conjugué de Ω_0 à travers le dioptre sphérique. La formule de conjugaison avec origine au centre donne : $\dfrac{1}{\overline{C\Omega_0}} - \dfrac{n}{\overline{C\Omega}} = \dfrac{1-n}{\overline{CS}}$ [2]

En posant $\overline{CO} = R'$; $\overline{CS} = -R$; [1] et [2] entraînent : $\boxed{\overline{C\Omega} = \dfrac{n^2RR'}{NR + (1-n)nR'}}$

1°) Le miroir équivalent est concave de rayon $9R$.

Dans ce cas on a : $\overline{C\Omega} = -9R$

Soit $\boxed{R' = \dfrac{9NR}{8n^2 - 9n}}$ [3]

D'après le sens positif choisi R et R' sont positifs, il faut donc s'assurer que d'après [3] R' est positif. Cette condition assure le contact entre C et le sommet du miroir sphérique.

2°) Le centre du miroir équivalent est à l'infini.

$\overline{C\Omega}$ doit donc tendre vers l'infini, soit : $NR + (1-n)nR' = 0$

D'où $\boxed{R' = \dfrac{NR}{n(n-1)}}$

On voit que R' a le signe de R (positif) donc ça marche.

Nous avons un système afocal, ses foyers sont donc rejetés à l'infini.

EXERCICE N°2

1°) Abscisses des foyers :

La formules de Newton pour un couple (A, A') donne : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'$

$$(\overline{FO} + \overline{OA}) \cdot (\overline{F'O} + \overline{OA'}) = ff'$$

En appliquant cette formule aux trois expériences, on a :

$$(x_1 - \overline{OF}) \cdot (x_1' - \overline{OF'}) = ff' \qquad [1]$$

$$(x_2 - \overline{OF}) \cdot (x_2 - \overline{OF'}) = ff' \qquad [2]$$

$$(x_3 - \overline{OF}) \cdot (x_3 - \overline{OF'}) = ff' \qquad [3]$$

D'après [1] et [2] : $\overline{OF}(x_1' - x_2) + \overline{OF'}(x_1 - x_2) = x_1 x_1' - x_2^2$ [4]

D'après [2] et [3] : $\overline{OF} + \overline{OF'} = x_2 + x_3$ [5]

[4] et [5] donnent :

$$\boxed{\overline{OF} = \frac{x_1(x_2 + x_3 - x_1') - x_2 x_3}{x_1 - x_1'}}$$

$$\boxed{\overline{OF'} = \frac{x_1'(x_1 - x_2 - x_3) + x_2 x_3}{x_1 - x_1'}}$$

A.N. : $x_1 = 2$ cm ; $x_1' = 19$ cm ; $x_2 = 7{,}6$ cm ; $x_3 = 15$ cm.

On déduit $\overline{OF} = 6{,}28$ cm ; $\overline{OF'} = 16{,}32$ cm.

2°) Eléments cardinaux du système :

Le grandissement est donné par : $\gamma_2 = -\dfrac{f}{\overline{FA_2}} = -\dfrac{\overline{F'A_2'}}{f'}$

Soient $f = \gamma_2 (\overline{OF} - \overline{OA_2})$; $f' = (\overline{OF'} - \overline{OA_2'})/\gamma_2$

Donc

$$\boxed{f = \frac{\gamma_2 (x_3 - x_1')(x_1 - x_2)}{x_1 - x_1'} ; f' = \frac{(x_3 - x_1)(x_1' - x_2)}{\gamma_2 (x_1' - x_1)}}$$

Les points principaux sont tels que : $\overline{HF} = \overline{HO} + \overline{OF}$ et $\overline{H'F'} = \overline{H'O} + \overline{OF'}$

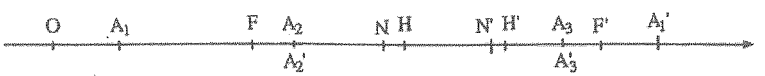
D'où $\overline{OH} = \overline{OF} - \overline{HF}$; $\overline{OH'} = \overline{OF'} - \overline{H'F'}$

Les points nodaux vérifient : $\overline{HN} = \overline{H'N'} = \overline{HF} + \overline{H'F'}$; par conséquent :

$\overline{ON} = \overline{H'F'} + \overline{OF}$; $\overline{ON'} = \overline{HF} + \overline{OF'}$

A. N : $f = -3{,}62$ cm ; $f' = 3{,}17$ cm

$\overline{OH} = 9{,}90$ cm ; $\overline{OH'} = 13{,}15$ cm ; $\overline{ON} = 9{,}45$ cm ; $\overline{ON'} = 12{,}70$ cm.



(croquis)

3°) ◆ Soit un dioptre sphérique de centre C et de sommet S, les deux points doubles sont C et S, pour lesquels les grandissements linéaires sont respectivement $\gamma_c = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{n}{n'}$ et $\gamma_s = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = 1$. γ_c correspond à x_3 alors que γ_s correspond à x_2.

◆ Il faut montrer l'inverse, c'est-à-dire que si un système optique possède deux points doubles dont les grandissements sont 1 et n/n' ; alors il est équivalent à un dioptre sphérique :

Au point A_2 d'abscisse x_2 le grandissement est $\gamma_2 = 1$, A_2 est donc confondu avec le plan principal, or $\gamma_2 G_2 = \frac{n}{n'}$ et $G_2 = \frac{\theta'}{\theta}$.

D'où $n\theta = n'\theta'$ qui est la loi de Descartes en A_2.

Au point A_3, $\gamma_3 = \frac{n}{n'}$, soit $G_3 = 1$, un rayon qui passe par A_3 n'est donc pas dévié.

Conséquence : Le système est équivalent à un dioptre sphérique de sommet A_2 et de centre A_3.

✕ 9 - Système catadioptrique - Aberration chromatique.

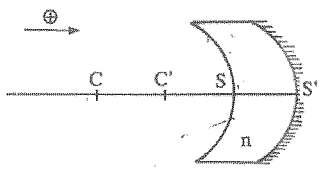
I –1°) Un dioptre sphérique concave de sommet S et de centre C est constitué d'une surface sphérique séparant deux milieux transparents le premier est l'air et le deuxième d'indice n supérieur à 1. Montrer que, dans les conditions de Gauss, la formule de conjugaison pour ce dioptre s'écrit :

[1] $\frac{n}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{n-1}{\overline{SC}}$ ***où A' est l'image d'un point objet A de l'axe.***

Donner les positions des foyers objet F et image F'. Préciser la nature de ces foyers et faire le calcul pour n = 1,5 et pour un rayon de 50 cm.

2°) On associe au dioptre précédent un autre dioptre sphérique de sommet S' et de centre C' pour faire une lentille mince de distance focale 25 cm. La lumière arrive du côté du premier dioptre (S, C). Déterminer le rayon du deuxième dioptre pour que :
a) La lentille soit convergente,
b) La lentille soit divergente.

3°) On forme un système catadioptrique à l'aide du dioptre précédent et d'un miroir sphérique de même rayon que le dioptre (figure ci–contre), de sommet S' et de centre C' :



On pose : $SS' = a = 25$ cm

Déterminer la position du point A qui est l'image de lui–même dans ce système

4°) Un système optique est formé de deux lentilles minces, taillées dans le même verre, centrées sur le même axe, séparées par la distance e et ayant pour distances focales images f_1' et f_2'.

a) Calculer la distance focale du système et la position de ses foyers et de ses plans principaux. Faire un dessin du système et dire si les foyers sont réels ou virtuels. On donne : $e = 4$ cm, $f_1' = 5$ cm et $f_2' = 3$ cm.

b) Calculer la distance e en fonction de f_1' et f_2' pour que la distance focale du système demeure indépendante de l'indice au voisinage immédiat d'une certaine couleur. Calculer et placer les éléments du système constitué par deux lentilles identiques de 5 cm de distance focale pour la couleur considérée.

Extrait, Agadir, PC2, Mai 1986.

1°) Formule de conjugaison

Un rayon issu du point objet A, rencontre le dioptre au point I avec un angle d'indice i, il se réfracte avec un angle r dans le milieu d'indice n, $r < i$ car $n > 1$.

L'image A' est l'intersection entre l'axe optique et le prolongement du rayon réfracté. Dans les triangles CIA et CIA' on a :

$$\frac{\overline{CA}}{\sin i} = \frac{\overline{IA}}{\sin \omega} \; ; \; \frac{\overline{CA'}}{\sin r} = \frac{\overline{IA'}}{\sin \omega}$$

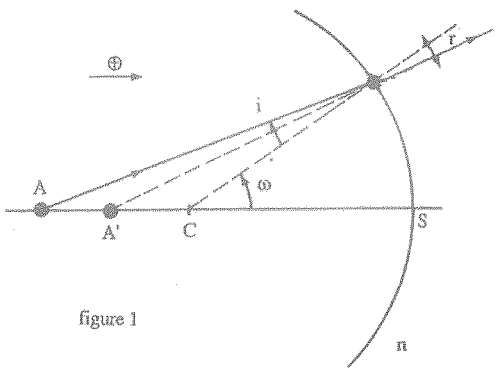


figure 1

En faisant le rapport :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} \times \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$$

Or, la loi de Descartes donne $\sin i = n \sin r$

D'où
$$I \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}} \qquad [2]$$

Cette quantité se conserve à la traversé d'un dioptre : C'est l'invariant fondamental.
Les conditions de Gauss entraînent que I est proche de S, nous avons donc d'après [2]

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$$

$$\frac{\overline{SA} - \overline{SC}}{\overline{SA}} = n \cdot \frac{\overline{SA'} - \overline{SC}}{\overline{SA'}}$$

Par conséquent :
$$\frac{n}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{n-1}{\overline{SC}}$$

Position des foyers :

◆ Le foyer objet F s'obtient lorsque A' est à l'infini : $\overline{SF} = \dfrac{\overline{SC}}{1-n}$

◆ Le foyer image F' s'obtient lorsque A est à l'infini : $\overline{SF'} = \dfrac{n}{n-1}\,\overline{SC}$

D'après le sens positif (figure 1) $\overline{SC} < 0$, or $n > 1$ par conséquent : $\overline{SF} > 0$; $\overline{SF'} < 0$

Le foyer objet se trouve dans l'espace objet virtuel, il est donc virtuel (figure 2).
Le foyer image se trouve dans l'espace image virtuel, il est donc virtuel (figure 2).
Lorsque les deux foyers sont virtuels, le dioptre sphérique est divergent.

A.N : $\overline{SC} = -50$ cm ; $n = 1{,}5$

$$\overline{SF} = 100 \text{ cm} \; ; \quad \overline{SF'} = -150 \text{ cm}$$

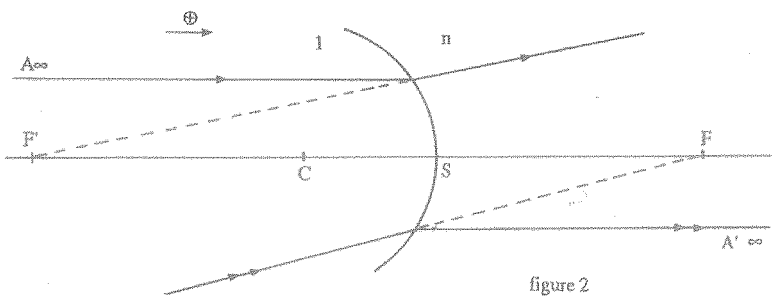


figure 2

2°) Nous cherchons la formule de conjugaison de la lentille mince, en remarquant qu'elle est l'association de deux dioptres sphériques de rayons SC et $S'C'$. L'indice du milieu intermédiaire est n.

◆ Un point objet A a pour image A_0 à travers le 1er dioptre : $\dfrac{1}{SA} - \dfrac{n}{SA_0} = \dfrac{1-n}{SC}$ [3]

◆ Le point A_0 est un objet par rapport au 2ème dioptre ; son image est A' telle que :

$$\frac{n}{S'A_0} - \frac{1}{S'A'} = \frac{n-1}{S'C'} \qquad [4]$$

La lentille est supposée mince : $S \equiv S' \equiv 0$

En ajoutant [3] et [4] : $\dfrac{1}{OA} - \dfrac{1}{OA'} = (n-1)\left(\dfrac{1}{S'C'} - \dfrac{1}{SC}\right)$

Détermination du rayon du 2ème dioptre : Lorsque A tend vers l'infini, $A' \equiv F'$

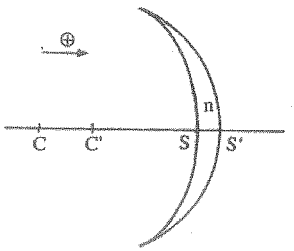
$$-\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{S'C'}} - \frac{1}{\overline{SC}}\right)$$

Soit $$\boxed{\overline{S'C'} = \frac{(n-1)\,\overline{OF'}\,.\,\overline{SC}}{(n-1)\,\overline{OF'} - \overline{SC}}}$$

a) La lentille mince est convergente. Dans ce cas sa distance focale image est positive (en supposant que le sens positif est confondu avec le sens de propagation de la lumière).

A.N : $\overline{OF'} = 25$ cm ; $\overline{SC} = -50$ cm ; $n = 1{,}5$

on trouve $\boxed{\overline{S'C'} = -10 \text{ cm}}$



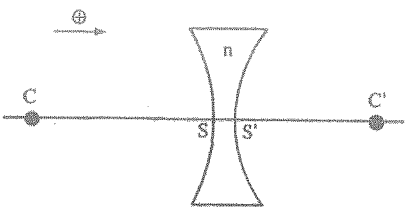
$\overline{S'C'} < 0$, d'où le schéma.

C'est un ménisque à bords minces.

b) La lentille mince est divergente. Dans ce cas sa distance focale image est négative.

A.N : $\overline{OF'} = -25$ cm ; $\overline{SC} = -50$ cm ; $n = 1{,}5$

On trouve : $\boxed{\overline{S'C'} = 16{,}67 \text{ cm}}$



$\overline{S'C'} > 0$, d'où le schéma .

C'est un ménisque à bords épais

3°) Recherche du point double :

1ere Méthode :

On se propose de chercher la relation liant le point A avec son image A' à travers le système.

Soit A_0 l'image de A à travers le dioptre sphérique : $\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{n}{\overline{SA_0}} = \frac{1-n}{\overline{SC}}$ [5]

A_0 a pour image à travers le miroir sphérique, A_1 tel que : $\frac{1}{\overline{S'A_0}} + \frac{1}{\overline{S'A_1}} = \frac{2}{\overline{S'C'}}$ [6]

Dans le sens de la lumière réfléchie, A_1 a pour image A' à travers le dioptre sphérique :

$$\frac{n}{\overline{SA_1}} - \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{n-1}{\overline{SC}} \qquad [7]$$

[5] et [7] donnent $\overline{SA_0}$ et $\overline{SA_1}$, en les reportant dans [6], car $\overline{S'A_0} = \overline{S'S} + \overline{SA_0}$;

$\overline{S'A_1} = \overline{S'S} + \overline{SA_1}$, nous avons la relation entre A et A' :

$$\frac{\overline{SC}+(n-1)\overline{SA}}{n\overline{SA}.\overline{SC}+\overline{S'S}\left[\overline{SC}+(n-1)\overline{SA}\right]}+\frac{\overline{SC}+(n-1)\overline{SA'}}{n\overline{SA'}.\overline{SC}+\overline{S'S}\left[\overline{SC}+(n-1)\overline{SA'}\right]}=\frac{2}{\overline{S'C'}}$$

Lorsque A est image de lui même , $A \equiv A'$.

En remplaçant dans l'expression précédente , avec : $\overline{SC}=\overline{S'C'}=-R \quad ; \quad \overline{S'S}=-a$

Nous avons : $$\boxed{\overline{SA}=\frac{R(a-R)}{(a-R)(n-1)+nR}}$$

2ème Méthode :

Le système étudié est catadioptrique, il est donc équivalent à un miroir sphérique de sommet Σ et de centre Ω, A et A' sont donc reliés par la relation : $\frac{1}{\overline{\Sigma A}}+\frac{1}{\overline{\Sigma A'}}=\frac{2}{\overline{\Sigma\Omega}}$

Lorsque $A \equiv A'$, cela entraîne $A \equiv \Omega$

Il suffit donc de chercher le centre du miroir équivalent. Ω est l'image du centre du miroir réel à travers le dioptre suivant le sens de la lumière réfléchie : $\frac{n}{\overline{SC'}}-\frac{1}{\overline{S\Omega}}=\frac{n-1}{\overline{SC}}$

avec $\overline{SC}=-R \quad ; \overline{SC'}=\overline{SS'}+\overline{S'C'}=a-R \quad ; \quad \overline{S\Omega}=\overline{SA}$

nous avons : $$\boxed{\overline{SA}=\frac{R(a-R)}{(a-R)(n-1)+nR}}$$

Ce qui est en accord avec la 1ère méthode.

A.N : $a=25\text{cm} \quad ; \quad R=50\text{cm} \quad ; \quad n=1{,}5$

On trouve : $$\boxed{\overline{SA}=-20\text{ cm}}$$

Le point A se trouve entre S et C'

4°) a) Calcul de la distance focale :

La formule de Gullstrand appliquée aux deux lentilles donne : $\frac{1}{f'}=\frac{1}{f_1'}+\frac{1}{f_2'}-\frac{e}{f_1'f_2'}$

Soit $$\boxed{f'=\frac{f_1'f_2'}{f_1'+f_2'-e}} \qquad [8]$$

◆ **Position des foyers :**

* Soient F' le foyer image du système, F_1' celui de la première lentille, F' est l'image de F_1' à travers la deuxième lentille ; la formule de Newton donne : $\overline{F_2F_1'}.\overline{F_2'F'}=-f_2'^2$

or $$\overline{F_1'F_2}=\Delta=\overline{F_1'O_1}+\overline{O_1O_2}+\overline{O_2F_2}=-f_1'+e-f_2'$$

D'où $$\boxed{\overline{F_2'F'} = \frac{-f_2'^2}{f_1' - e + f_2}} \qquad [9]$$

* Soient F le foyer objet du système , F_2 celui de la deuxième lentille. F_2 est l'image de F à travers la première lentille. La formule de Newton donne : $\overline{F_1F} \cdot \overline{F_1'F_2} = -f_1^2$

D'où $$\boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1'^2}{f_1' - e + f_2'}} \qquad [10]$$

◆ **Plans principaux :**

Le plan principal image est repéré par H' tel que : $\overline{H'F'} = \overline{H'F_2'} + \overline{F_2'F'}$, or d'après [8] :

$$f' = \overline{H'F'}$$

D'où $$\boxed{\overline{F_2'H'} = \overline{F_2'F'} - \overline{H'F'}} \qquad [11]$$

Le plan principal objet est repéré par H tel que : $\overline{HF} = \overline{HF_1} + \overline{F_1F}$, avec $\overline{HF} = -\overline{H'F'}$, car les milieux extrêmes sont identiques.

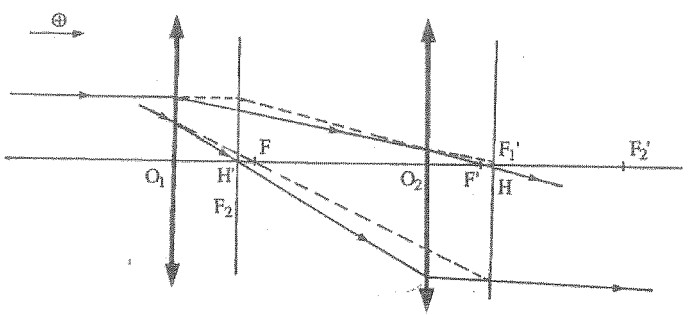
Par conséquent : $$\boxed{\overline{F_1H} = \overline{H'F'} + \overline{F_1F}} \qquad [12]$$

A.N $f_1' = 5$ cm ; $f_2' = 3$ cm ; $e = 4$ cm

Les relations [8], [9], [10], [11], [12] donnent : $f' = \overline{H'F'} = 3{,}75$ cm ; $\overline{F_2'F'} = -2{,}25$ cm

$\overline{F_1F} = 6{,}25$ cm ; $\overline{F_2'H'} = -6$ cm ; $\overline{F_1H} = 10$ cm.

Construction géométrique



Pour positionner F et H on peut le faire à partir de O_1, on vérifie que : $\overline{O_1F} = 1{,}25$ cm ; $\overline{O_1H} = 5$ cm.

Pour l'explication du tracé voir problème n° 11 ; I.
Le foyer objet est virtuel, car il se trouve dans l'espace objet virtuel.
Le foyer image est réel, puisqu'il se trouve dans l'espace image réel.

b) Les deux lentilles sont taillées dans le même verre, nous avons donc :

$$\frac{1}{f_1'} = (n-1)K_1 \; ; \quad \frac{1}{f_2'} = (n-1)K_2 \qquad \text{avec } K_1 \text{ et } K_2$$

des constantes dépendants des rayons de courbure des lentilles. Pour que la distance focale ne dépende pas de l'indice, on doit avoir $df' = 0$, soit $d\left(\frac{1}{f'}\right) = 0$

$$d\left(\frac{1}{f'}\right) = d\left(\frac{1}{f_1'}\right) + d\left(\frac{1}{f_2'}\right) - e\, d\left(\frac{1}{f_1' f_2'}\right) = -\frac{df_1'}{f_1'^2} - \frac{df_2'}{f_2'^2} + e\left(\frac{df_1'}{f_1'^2 f_2'} + \frac{df_2'}{f_2'^2 f_1'}\right)$$

avec $$-\frac{df_1'}{f_1'^2} = K_1\, dn = \frac{dn}{(n-1)f_1'} \; ; \qquad -\frac{df_2'}{f_2'^2} = K_2\, n = \frac{dn}{(n-1)f_2'}$$

Par conséquent : $$d\left(\frac{1}{f'}\right) = \frac{1}{(n-1)\, f_1' f_2'} \left[f_1' + f_2' - 2e \right] dn = 0$$

D'où $$\boxed{e = \frac{f_1' + f_2'}{2}} \qquad [13]$$

C'est la condition d'association de deux lentilles minces pour éviter le problème de dépendance de la distance focale en fonction de l'indice. Ce problème est connu par le nom d'aberration chromatique.

Application :

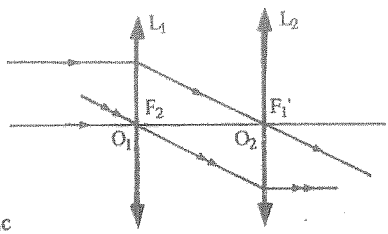
$f_1' = f_2' = 5$ cm et d'après [13] $e = 5$ cm.

D'après la figure on constate que :

$F' \equiv F_1' \equiv O_2$; $F \equiv F_2 \equiv O_1$; $H' \equiv F_2 \equiv O_1$

$H \equiv F_1' \equiv O_2$.

Les milieux extrêmes sont identiques, donc les plans nodaux, sont confondus avec les plans principaux correspondants.



10 - Lunette astronomique.

On considère une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f_1' = 50$ cm

1°) Construire l'image A'B' d'un objet AB = 1 mm placé à 10 cm de cette lentille, déterminer la position de A'B'.

2°) Calculer le grandissement γ de la lentille. (On rappelle que AB est perpendiculaire à l'axe du système).

3°) On veut réaliser une lunette astronomique, pour cela on utilise la lentille précédente

L_1 comme objectif et une autre lentille L_2 convergente de distance focale $f_2' = 2$ cm comme oculaire. Donner schématiquement la position de L_2 par rapport à L_1 lorsque la lunette est réglée à l'infini.

4°) Dessiner la marche d'un faisceau lumineux issu d'une étoile supposée à l'infini.

5°) Quel est le grandissement angulaire de la lunette (rapport de l'angle sous lequel l'image d'un objet est vue à travers la lunette à l'angle sous lequel l'objet est vu à l'œil nu) ?

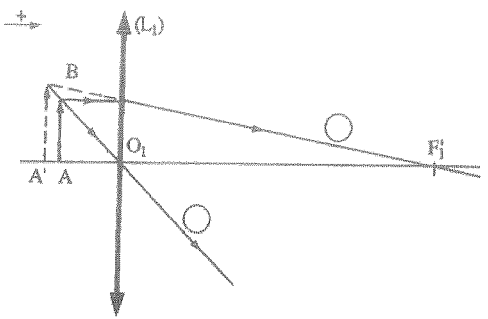
6°) La lunette obtenue à partir de L_1 et L_2 donne une image renversée par rapport à l'objet, on désire redresser cette image. Pour cela une troisième lentille convergente L_3 de distance focale $f_3' = 2$ cm est introduite entre L_1 et L_2. Celle-ci donne de l'image fournie par L_1 une image réelle renversée par rapport à la première image ; L_2 est déplacée pour donner l'image définitive à l'infini. Dessiner la marche d'un faisceau lumineux provenant d'un point situé à l'infini.

Extrait, Tétouan, MP2, PC2, Janvier 1988.

1°) Construction géométrique de l'image :

Pour trouver l'image du point B, on considère le rayon parallèle à l'axe optique et passant par B ; il converge en F_1'.

Le rayon passant par O_1 et B n'est pas dévié. L'intersection des prolongements des rayons 1 et 2 donne l'image B'. L'image de A se trouve sur l'axe optique tel que $A'B'$ est parallèle à AB.



◆ **Détermination de la position de $A'B'$.**

La formule de conjugaison d'une lentille mince donne :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1F_1'}} \qquad \text{avec } \overline{O_1F_1'} = f_1'$$

D'où

$$\boxed{\overline{O_1A'} = \frac{f_1' \cdot \overline{O_1A}}{f_1' + \overline{O_1A}}}$$

A.N : $\overline{O_1A} = -10$ cm ; $f_1' = 50$ cm

$$\boxed{\overline{O_1A'} = -12{,}5 \text{ cm}}$$

2°) Calcul du grandissement γ:

$$\gamma = \overline{A'B'} / \overline{AB} = \overline{O_1A'} / \overline{O_1A}$$

A.N : $\overline{O_1A'} = -12{,}5$ cm ; $\overline{O_1A} = -10$ cm

On trouve $\boxed{\gamma = 1{,}25}$

La taille de l'image est donc : $A'B' = \gamma . AB = 1{,}25 \times 1 = 1{,}25$ mm.

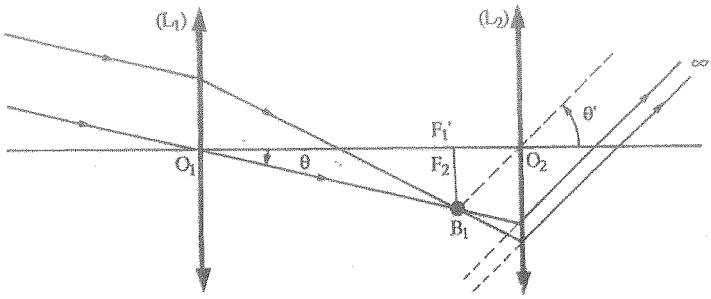
Conclusion :

Nous avons une image $A'B'$ qui est virtuelle, droite($\gamma > 0$) et plus grande que l'objet ($\gamma > 1$). Cette lentille est utilisée alors, comme une loupe.

3°) Lorsque la lunette est réglée à l'infini, un rayon incident qui vient de l'infini, sort à l'infini. Pour réaliser cela, il faut que le foyer image de L_1 soit confondu avec le foyer objet de L_2 (voir figure suivante). Le système L_1, L_2 est alors afocal.

4°) Construction géométrique.

L'étoile est supposée à l'infini, son image à travers L_1 se forme au foyer image de L_1. La lunette est afocale, l'image définitive se forme donc à l'infini.



5°) Grandissement angulaire :

Il est donné par $g = \dfrac{\theta'}{\theta}$

Dans les triangle $O_1F_1'B_1$ et $O_2F_2B_1$, on a : $\overline{F_1'B_1} = \theta . \overline{O_1F_1'}$; $\overline{F_1'B_1} = \theta' . \overline{O_2F_2}$; car θ et θ' sont petits,

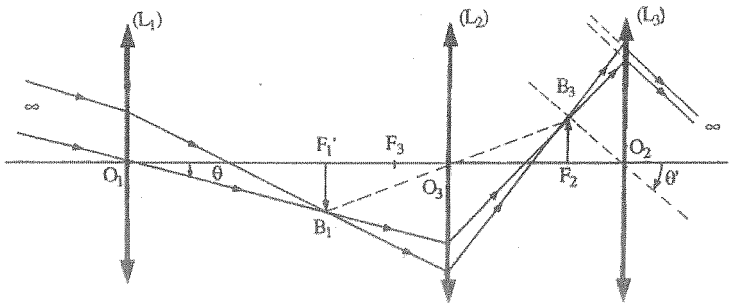
soit $g = \dfrac{\theta'}{\theta} = \dfrac{\overline{O_1F_1'}}{\overline{O_2F_2}}$; $\boxed{g = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$

A.N : $f_1' = 50$ cm ; $f_2' = 2$ cm

Donc $\boxed{g = -25}$

6°) Le faisceau incident issu de l'infini donne une image réelle $F_1'B_1$ à travers L_1, cette image se trouve au plan focal image de L_1. Pour que L_3 donne de $F_1'B_1$ un image réelle renversée, il faut que $F_1'B_1$ soit situé avant F_3, foyer objet de L_3. Lorsque l'image finale est à l'infini, l'image à travers L_3 doit être située dans le plan focal objet de L_2.

En conclusion le foyer image F_1' de L_1 et le foyer objet F_2 de L_2 doivent être conjugués par rapport à L_3



Remarque : L'introduction de L_3, nous permet donc d'avoir un grandissement angulaire positif. Vérifier le.

11 - Etude d'un doublet - Association : lentille cylindrique, lentille mince, miroir plan.

I / Un oculaire est constitué par l'association de deux lentilles convergente L_1 et L_2 supposées minces, de même axe principal, de distances focales images respectives $f_1' = 3$ cm et $f_2' = 1$ cm, distantes de $e = 2$ cm,

1) Quelle est la notation symbolique de ce doublet ?

2) Déterminer la position du foyer image F' de cet oculaire par rapport au point O_2 : centre optique de L_2.

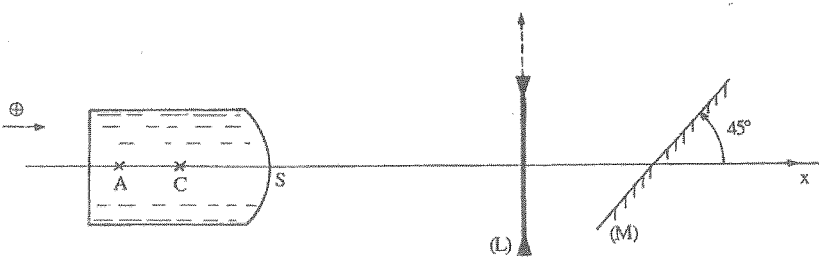
3) Déterminer la position du foyer objet F par rapport au point O_1 : centre optique de L_1.

4) Calculer la distance focale image de cet oculaire en utilisant la formule de Gullstrand.

5) Déduire des résultats précédents la position des plans principaux par rapport à O_1 et O_2.

6) Vérifier ces résultats par une construction géométrique à l'échelle.

II / On réalise le montage suivant :



Une cuve dont une des faces est une calotte sphérique de centre C de sommet S, et de rayon de courbure R = 10 cm contient de l'eau d'indice n = 4/3.
Une source lumineuse ponctuelle A est située dans l'eau, sur l'axe principal CS, à 50 cm de S. La cuve est placée dans l'air d'indice n' = 1.
Une lentille mince divergente L de centre optique O, de convergence C = –2,5 dioptries est disposée à 1,20 m de S sur le même axe principal.
Un miroir plan M incliné à 45° sur cet axe, coupe celui–ci à 50 cm en arrière de L.

1) Quelles sont les distances focales objet et image du dioptre sphérique de sommet S ?

2) A quelle distance de S se trouve l'image de A donnée par le dioptre sphérique ?

3) Où se formera l'image définitive de A fournie par l'ensemble du système constitué par la cuve, la lentille et le miroir ? (Donner ses coordonnées dans le repère Ox, Oy : Ox suivant l'axe principal, Oy suivant L dirigé vers le haut).
Quelle est la nature de cette image ?

4) La lentille L est équiconcave (Les deux faces sphériques ont le même rayon de courbure ρ) taillée dans un verre d'indice n_1 = 1,6. Calculer le rayon de courbure ρ.

Extrait, Casa I, MP2, Mai 84.

I / 1) Symbole du doublet :

Le symbole du doublet est définit par les trois nombres algébriques p, q, r tels que :

$\frac{f_1'}{p} = \frac{e}{q} = \frac{f_2'}{r}$, par conséquent , le symbole est (3, 2, 1).

2) Détermination du foyer image F' du doublet :

Soit F_1' le foyer image de L_1 . Dans le doublet, F' est le conjugué F_1' à travers L_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2'}}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'}} + \frac{1}{\overline{O_2F_2'}}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{-e + f_1'} + \frac{1}{f_2'}$$

Soit $$\boxed{\overline{O_2F'} = \frac{(f_1' - e) f_2'}{f_1' + f_2' - e}}$$

A.N : $f_1' = 3$ cm ; $f_2' = 1$ cm ; $e = 2$ cm

D'où : $$\boxed{\overline{O_2F'} = 0{,}5 \text{ cm}}$$ [1]

3) Détermination du foyer objet F du doublet :

Soit F_2 le foyer objet de L_2 . Dans le doublet, F_2 est le conjugué de F à travers L_1 :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{\overline{O_1F_1'}}$$

Or $$\overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = e - \overline{O_2F_2'} = e - f_2'.$$

D'où $$\boxed{\overline{O_1F} = \frac{(e - f_2') f_1'}{f_1' + f_2' - e}}$$

AN : $f_1' = 3$ cm ; $f_2' = 1$ cm ; $e = 2$ cm .

Soit $$\boxed{\overline{O_1F} = 1{,}5 \text{ cm}}$$ [2]

4) Calcul de la distance focale image f' :

La formule de Gullstrand pour le doublet est : $$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' f_2'}$$

Soit $$\boxed{f' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - e}}$$

A.N : $f_1' = 3$ cm ; $f_2' = 1$ cm ; $e = 2$ cm.

$$\boxed{f' = 1{,}5 \text{ cm}}$$ [3]

5) ◆ Position du plan principal image H' :

$$\overline{H'F'} = \overline{H'O_2} + \overline{O_2F'}$$

Soit $$\overline{O_2H'} = \overline{O_2F'} - \overline{H'F'}$$

Or $\overline{H'F'} = f'$ et $\overline{O_2F'}$ est donnée par [1]

A.N : $\overline{O_2F'} = 0,5$ cm ; $\overline{H'F'} = 1,5$ cm

$$\boxed{\overline{O_2H'} = -1 \text{ cm}}$$

◆ **Position du plan principal objet H :**

$\overline{HF} = \overline{HO_1} + \overline{O_1F} = -\overline{H'F'}$ puisque les milieux extrêmes sont identiques.

Par conséquent : $\boxed{\overline{O_1H} = \overline{O_1F} + \overline{H'F'}}$

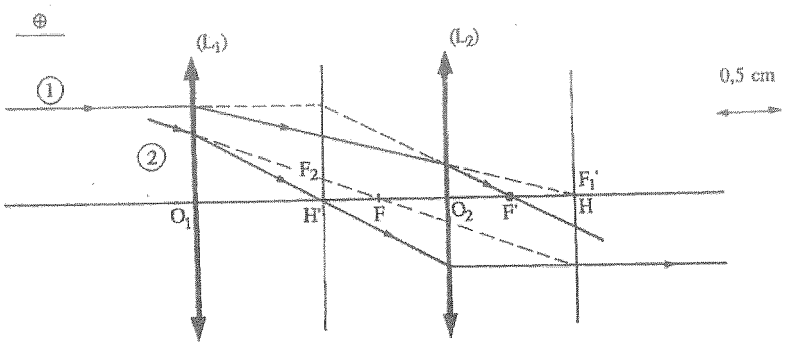
$\overline{O_1F}$ est donnée par [2]

A.N : $\overline{O_1F} = 1{,}5$ cm ; $\overline{H'F'} = 1{,}5$ cm

$$\boxed{\overline{O_1H} = 3 \text{ cm}}$$

6) Construction géométrique :

Dans la figure suivante nous avons placé les points F, F' d'après [2] et [1]. Géométriquement, nous pouvons déduire les positions de H' et H :
Pour le rayon incident 1, parallèle à l'axe optique, à travers L_1, il se dirige vers F_1', or en rencontrant L_2, il convergera en F'. L'intersection entre le faisceau incident et le faisceau émergent passant par F', définit le plan principal image, d'où H'.
Pour le plan principal objet, on procède de la même manière.



Remarque : Nous constatons que F est virtuel, parce qu'il se trouve dans l'espace objet virtuel, alors que F' est réel.

II / 1) Calcul des distances focales :

La formule de conjugaison d'un dioptre sphérique avec origine au sommet est donnée par :

$$\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n - n'}{\overline{SC}} \qquad [1]$$

◆ Lorsque A' se trouve à l'infini A est dans le plan focal objet, donné par F:

$$\frac{n}{\overline{SF}} - 0 = \frac{n - n'}{\overline{SC}}$$

D'où $$\boxed{\overline{SF} = \frac{n}{n - n'}\,\overline{SC}}$$

◆ Lorsque A se trouve à l'infini A' est dans le plan focal image donné par F' :

$$0 - \frac{n'}{\overline{SF'}} = \frac{n - n'}{\overline{SC}}$$

Soit $$\boxed{\overline{SF'} = \frac{n'}{n' - n}\,\overline{SC}}$$

A.N : $n = 4/3$; $n' = 1$; $\overline{SC} = -10$ cm

On trouve : $\boxed{\overline{SF} = -40 \text{ cm}}$; $\boxed{\overline{SF'} = 30 \text{ cm}}$

2) Détermination de l'image de A.

Soit A' l'image de A à travers le dioptre sphérique.

D'après [1] : $$\boxed{\frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{n'}\left[\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n - n'}{\overline{SC}}\right]}$$

A.N : $n = 4/3$; $n' = 1$; $\overline{SC} = -10$ cm ; $\overline{SA} = -50$ cm.

$$\boxed{\overline{SA'} = 150 \text{ cm}}$$

3) Image de A à travers le système :

◆ Soit A'' l'image de A' à travers la lentille L : $\dfrac{1}{\overline{OA''}} - \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{f'} = C$

$$\overline{OA''} = \frac{\overline{OA'}}{1 + \overline{OA'}.C}$$

Soit $$\boxed{\overline{OA''} = \frac{\overline{OS} + \overline{SA'}}{1 + (\overline{OS} + \overline{SA'}).C}}$$

A.N : $\overline{OS} = -1,2$ m ; $\overline{SA'} = 1,5$ m ; $C = -2,5\,\delta$

$$\boxed{\overline{OA''} = 1,2 \text{ m}}$$

◆ Soit B l'image de A'' à travers le miroir. B est donc le symétrique de A'' par rapport à (M).

◆ **Construction géométrique**

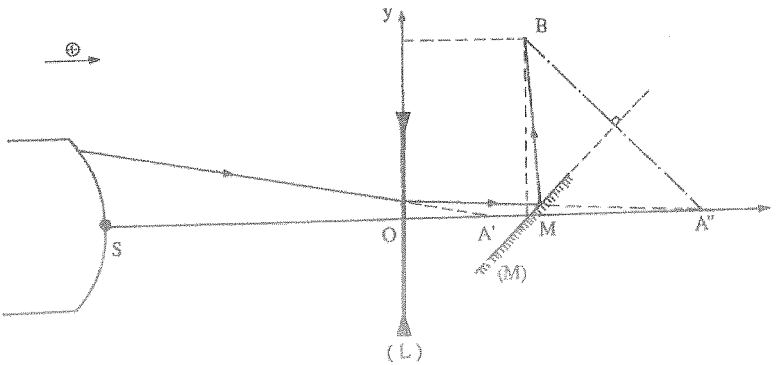
A'' joue le rôle d'objet virtuel pour (M), son image est située en B telle que $MA'' = MB$.
MA'' et MB sont perpendiculaires, car le miroir est incliné de 45° par rapport à l'axe optique.

◆ **Coordonnées de B**

$$x_B = \overline{OM} = 0{,}5 \text{ m}$$

$$y_B = \overline{MB} = \overline{MA''} = \overline{MO} + \overline{OA''} = -0{,}5 + 1{,}2 = 0{,}7 \text{ m}.$$

Donc B a pour coordonnées (50, 70) en cm.

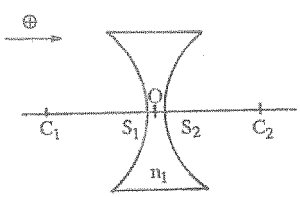


◆ **Nature de l'image définitive B.**

A'' est un objet virtuel pour (M) ; son image est donc réelle, par conséquent B est réelle.

4) Rayon de courbure ρ de la lentille :

La lentille est schématisée par la figure ci-contre. S_1 et S_2 sont confondus en O car la lentille est mince.



La formule de conjugaison appliquée successivement pour le 1er dioptre et le second donne :

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{n_1}{\overline{S_1A_0}} = \frac{1 - n_1}{\overline{S_1C_1}} \qquad \text{car } A \xrightarrow{S_1C_1} A_0$$

$$\frac{n_1}{\overline{S_2A_0}} - \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n_1 - 1}{\overline{S_2C_2}} \qquad \text{car } A_0 \xrightarrow{S_2C_2} A'$$

En ajoutant les deux relations ; avec $S_1 \equiv S_2 \equiv 0$: $\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1 - n_1}{\overline{S_1C_1}} + \frac{n_1 - 1}{\overline{S_2C_2}}$ [2]

Si A tend vers l'infini, $\overline{OA'} = f' = \frac{1}{C}$

Avec le sens positif choisi : $\overline{S_1C_1} = -\rho$; $\overline{S_2C_2} = \rho$

la relation [2] donne : $\boxed{\rho = \frac{2(1-n_1)}{C}}$

A.N : $n_1 = 1{,}6$; $C = -2{,}5\ \delta$

On trouve $\boxed{\rho = 0{,}48\ \text{m}}$

12 - Image à travers un doublet - Etude des lentilles d'un doublet.

I / Une lentille mince convergente, placée dans l'air, donne d'un objet réel ponctuel A pris sur l'axe optique de la lentille une image réelle A' située à 20 cm de la lentille et recueillie sur un écran.
A égale distance de la lentille convergente et de l'écran on place une lentille mince divergente dont l'axe optique coïncide avec celui de la lentille convergente. Quelle est la distance focale image de cette lentille divergente sachant qu'il faut reculer l'écran de 20 cm pour recueillir l'image réelle A'' de l'objet A ?

II / Soient 2 lentilles minces L_1 et L_2. Chacune de ces lentilles minces L_i ($i = 1, 2$) est caractérisée par son centre optique O_i son foyer objet F_i, son foyer image F_i', sa distance focale image f_i'.
On considère un doublet constitué par l'association des 2 lentilles L_1 et L_2 placées dans l'air, distantes de $e = \overline{O_1O_2}$ et ayant leur axe optique qui coïncide. La lumière atteint la lentille L_1 en premier, ce doublet est caractérisé par son foyer objet F son foyer image F' et sa distance focale image φ'. On pose $\Delta = \overline{F_1'F_2}$. L'indice de l'air sera pris égal à 1.

1) Etablir les formules exprimant $\overline{F_2'F'}$, $\overline{F_1F}$ et φ' en fonction de f_1', f_2' et Δ .

2) Ce doublet est tel que deux expériences distinctes donnent les résultats suivants :
1ère expérience : Un objet A_1B_1 réel placé dans un plan de front A_1 sur l'axe O_1O_2 à 40 cm en avant de la lentille L_1 a une image $A_1'B_1'$ réelle située à 12 cm après la lentille L_2. Le grandissement linéaire est $\gamma_1 = -1{,}2$.

2ème expérience : Un objet A_2B_2 réel placé dans un plan de front A_2 sur l'axe O_1O_2 à 60 cm en avant de la lentille L_1 donne une image $A_2'B_2'$ de grandissement linéaire $\gamma_2 = -0{,}5$.

a) On pose $x = \overline{O_1F}$ et $y = \overline{O_2F'}$. En utilisant les formules de Newton appliquées au doublet, calculer la valeur de x, φ' et y.

b) Grâce aux formules établies à la question 1) et aux valeurs de x, y et φ' obtenues à la question précédente calculer la valeur de e, f_1' et f_2'.

c) Quel est le symbole de ce doublet ? Donner la nature (réelle ou virtuelle) des foyers F et F' du doublet.

Extrait, Casablanca I, PC 2, Janvier 85.

I / Soient O_1 le centre optique de la lentille convergente L_1, O_2 celui de la lentille divergente L_2.
Le sens positif correspond au sens de propagation de la lumière.

A' image réelle par rapport à L_1 : $\overline{O_1A'} = 20$ cm.

On place L_2 à égale distance de L_1 et A' : $\overline{O_2A'} = 10$ cm.

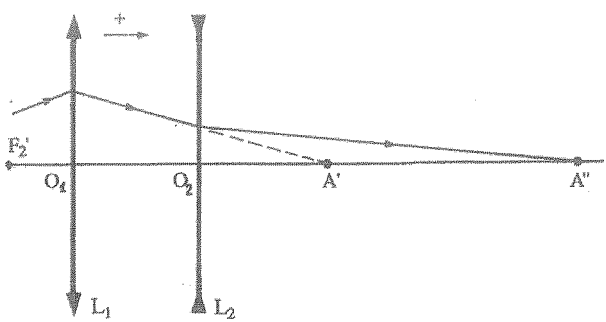
A' joue le rôle d'objet virtuel par rapport à L_2. A'' est l'image réelle à travers L_2 telle que :

$$\overline{O_2A''} = \overline{O_2A'} + \overline{A'A''} = 10 + 20 = 30 \text{ cm}.$$

La relation de conjugaison relative à L_2 donne : $\dfrac{1}{\overline{O_2F_2'}} = \dfrac{1}{\overline{O_2A''}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A'}}$

D'ou l'expression de la distance focale image de L_2 : $\boxed{\overline{O_2F_2'} = \dfrac{\overline{O_2A'} \cdot \overline{O_2A''}}{\overline{O_2A'} - \overline{O_2A''}}}$

A.N : $\boxed{\overline{O_2F_2'} = -15 \text{ cm}}$



II / 1°) Expressions de $\overline{F_2'F'}$, $\overline{F_1F}$ et φ' :

Dans un doublet F_1' et F' sont conjugués par rapport à L_2 : la formule de Newton donne :

$$\overline{F_2F_1'} \cdot \overline{F_2'F'} = -f_2'^2$$

Soit $\boxed{\overline{F_2'F'} = \dfrac{f_2'^2}{\Delta}}$ [1]

Dans un doublet F et F_2 sont conjugués par rapport à L_1 : $\overline{F_1F} \cdot \overline{F_1'F_2} = -f_1'^2$

d'où $$\boxed{\overline{F_1F} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}} \qquad [2]$$

Pour la détermination de φ', on applique la formule de Gullstrand : $\frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1'f_2'}$

$$\varphi' = \frac{f_1'f_2'}{f_1' + f_2' - e}$$

or $$\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f_1' - f_2' + e$$

donc $$\boxed{\varphi' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}} \qquad [3]$$

2°) a) Pour un couple $(AB, A'B')$ les formules de Newton appliquées au doublet sont :

$$\begin{cases} \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\varphi'^2 \\ \gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\varphi'}{\overline{FA}} \end{cases}$$

Nous appliquons les formules précédentes, aux deux expériences :

1ère expérience : $\overline{FA_1} \cdot \overline{F'A_1'} = -\varphi'^2$; $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1'B_1'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\varphi'}{\overline{FA_1}}$

En prenant comme sens positif celui de propagation de la lumière :

$$\overline{FA_1} = \overline{FO_1} + \overline{O_1A_1} = -x - 40 .$$

$$\overline{F'A_1'} = \overline{F'O_2} + \overline{O_2A_1'} = -y + 12 .$$

L'unité est le centimètre.

$$\frac{\varphi'}{-x-40} = -1{,}2$$

On en déduit : $(x + 40)(12 - y) = \varphi'^2$ [4]

$1{,}2\,(x + 40) = \varphi'$ [5]

2ème expérience : $\gamma_2 = \dfrac{\varphi'}{\overline{FA_2}}$; $\overline{FA_2} = \overline{FO_1} + \overline{O_1A_2} = -x - 60$

or $\gamma_2 = -0{,}5$, donc $\varphi' = 0{,}5\,(x + 60)$ [6]

Détermination de x, φ' et y

[5] , [6] : $1{,}2(x + 40) = 0{,}5(x + 60)$

Soit $\boxed{x = -\frac{180}{7} \text{ cm}}$ [7]

En reportant la valeur de x dans [6] : $\boxed{\varphi' = \frac{120}{7} \text{ cm}}$ [8]

D'après [4] on a donc $\boxed{y = -\frac{60}{7} \text{ cm}}$ [9]

b) Détermination de e, f_1', f_2' :

D'après [1] : $\overline{F_2'F'} = \overline{F_2'O_2} + \overline{O_2F'} = -f_2' + y = \frac{f_2'^2}{e - f_1' - f_2'}$

en utilisant [9] : $60\,(f_1' + f_2' - e) = 7 f_2'\,(e - f_1')$ [10]

D'après [2] : $\overline{F_1F} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1F} = f_1' + x = \frac{-f_1'^2}{e - f_1' - f_2'}$

en utilisant [7] : $180(f_1' + f_2' - e) = 7 f_1'\,(f_2' - e)$ [11]

D'après [3] : $\varphi' = -\frac{f_1' f_2'}{e - f_1' - f_2'}$

en utilisant [8] : $120\,(f_1' + f_2' - e) = 7 f_1' f_2'$ [12]

Pour la détermination de e, f_1', f_2', il faut résoudre le système [10], [11], [12].

[10] / [12] entraîne $f_1' = \frac{2e}{3}$ [13]

[11] / [12] entraîne $f_2' = -2e$ [14]

en reportant [13] et [14] dans [12] on a e, puis en réutilisant [13] et [14], on détermine f_1', f_2'.

D'où : $\boxed{e = 30 \text{ cm} \; ; \; f_1' = 20 \text{ cm} \; ; \; f_2' = -60 \text{ cm}}$

D'après les signes de f_1' et f_2', on voit que la première lentille est convergente, alors que la deuxième est divergente.

c) Symbole du doublet

Le symbole d'un doublet est l'ensemble de trois nombres algébriques (p, q, r) tels que :

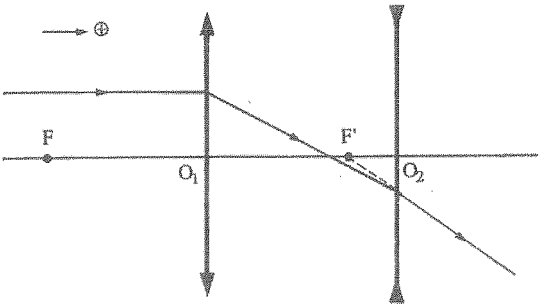
$$\frac{f_1'}{p} = \frac{e}{q} = \frac{f_2'}{r}$$

On en déduit que le symbole est : $\boxed{(2,\ 3,\ -6)}$

Nature des foyers F , F'

* $\overline{O_1F} = -\frac{180}{7}$ cm : le foyer objet appartient à l'espace objet réel, donc F est réel.

* $\overline{O_2F'} = -\frac{60}{7}$ cm : le foyer image appartient à l'espace image virtuel , donc F' est virtuel.



13 – Aberration chromatique.

I – On considère un doublet formé de deux lentilles minces (d'indice n_1 et n_2) de convergence C_1 et C_2, séparées d'une distance d. L'indice des milieux extrêmes et du milieu situé entre les deux lentilles est pris égal à 1. Ce doublet sert comme oculaire pour observer les objets lumineux de couleur blanche. Les indices n_1 et n_2 étant fonction de la longueur d'onde λ, les caractéristiques du doublet en dépendent aussi. Soit Δn_i $(i = 1, 2)$ la variation de n_i dans le domaine visible. On pose $\beta_i = \frac{n_i - 1}{\Delta n_i}$ et on assimile Δn_i à une variation infinitésimale (n_i est la valeur de l'indice pour une longueur d'onde moyenne, β_i est appelé le pouvoir dispersif du verre).

a) Etablir, à partir de la formule exprimant la convergence d'une lentille mince, la relation : $\Delta C_i = C_i \beta_i^{-1}$ $(i = 1, 2)$.

b) Grâce à la formule de Gullstrand, montrer que la convergence C du doublet ne dépend pas de la longueur d'onde λ à condition que les quantités β_1, β_2, C_1, C_2 et d soient liées par la relation suivante : $d = \frac{C_1\beta_2 + C_2\beta_1}{C_1C_2(\beta_1 + \beta_2)}$; les doublets de Huygens (3, 2, 1) et de Ramsden (3, 2, 3) avec des lentilles faites d'un même verre satisfont-ils cette relation ?

Extrait, Casablanca I, MP2, Juin 1984.

a) La convergence d'une lentille mince d'indice n_i et de rayons de courbure R_{1i} et R_{2i} est donnée par :

$$C_i = (n_i - 1)\left(\frac{1}{R_{1i}} - \frac{1}{R_{2i}}\right) \qquad [1]$$

Les rayons de courbure sont indépendants de la longueur d'onde.

En considérant Δ comme une variation infinitésimale, nous avons d'après [1] :

$$\Delta C_i = \Delta n_i \left(\frac{1}{R_{1i}} - \frac{1}{R_{2i}} \right)$$

En réutilisant [1] : $\Delta C_i = \Delta n_i \dfrac{C_i}{n_i - 1}$

Soit $\boxed{\Delta C_i = \dfrac{C_i}{\beta_i}}$ [2]

Remarque : Dans la notation R_{1i} et R_{2i}, R_{11} *et* R_{21} sont les rayons de courbure de la première lentille alors que R_{12}, R_{22} sont ceux de la deuxième lentille. Ces rayons de courbure sont comptés algébriquement et leurs signes définissent la nature de la lentille.
La formule [1] suppose que la lumière traverse le dioptre de rayon R_{1i} puis celui de rayon R_{2i}.

b) L'indice du milieu situé entre les deux lentilles minces est égal à un. La formule de Gullstrand s'écrit donc sous la forme : $C = C_1 + C_2 - dC_1C_2$ [3]

En supposant toujours Δ comme une variation infinitésimale, on a d'après [3] :

$$\Delta C = \Delta C_1 + \Delta C_2 - dC_1\Delta C_2 - dC_2\Delta C_1 \quad [4]$$

A une faible variation de la longueur d'onde correspond une faible variation de l'indice, à cause de la dispersion. Pour que la convergence du doublet ne dépende pas de la longueur d'onde λ, il faut donc que $\Delta C = 0$.

D'après [4] et [2] : $\dfrac{C_1}{\beta_1} + \dfrac{C_2}{\beta_2} - d\dfrac{C_1C_2}{\beta_2} - d\dfrac{C_2C_1}{\beta_1} = 0$

Soit $\boxed{d = \dfrac{C_1\beta_2 + C_2\beta_1}{C_1C_2(\beta_1 + \beta_2)}}$ [5]

Application : Pour des lentilles faites d'un verre d'indice n : $\beta_1 = \beta_2 = \dfrac{n-1}{\Delta n}$

[5] devient : $d = \dfrac{C_1 + C_2}{2C_1C_2}$

Or $C_1 = \dfrac{1}{f_1'}$; $C_2 = \dfrac{1}{f_2'}$. D'où $d = \dfrac{f_1' + f_2'}{2}$ [6]

◆ **Doublet de Huygens** : (3,2,1)

Il existe un réel a tel que : $f_1' = 3a$; d = $2a$; $f_2' = a$; on vérifie que :

$$\frac{f_1' + f_2'}{2} = \frac{3a + a}{2} = 2a = d$$

Ce doublet vérifie donc la relation [6].

◆ **Doublet de Ramsden** : (3,2,3)

Il existe un réel b tel que : $f_1' = 3b$; d = $2b$; $f_2' = 3b$; on remarque que :

$\dfrac{f_1' + f_2'}{2} = \dfrac{3b + 3b}{2} = 3b \neq d$, car $d = 2b$. Le doublet de Ramsden ne vérifie pas [6].

◆ **Conclusion :**

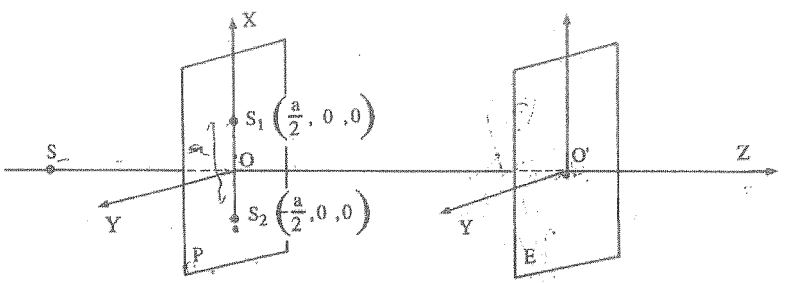
Lorsque la convergence d'une lentille varie en fonction de la longueur d'onde, on dit qu'il y a aberration chromatique longitudinale. Cette aberration se traduit par le fait qu'on a autant de positions du plan focal image que de radiations.
La formule [5] montre qu'on peut associer convenablement deux lentilles pour éviter le problème d'aberration.
Enfin, on a montré que le doublet de Huygens (3,2,1) est en accord avec [6] alors que celui de Ramsden (3,2,3) ne l'est pas.

OPTIQUE PHYSIQUE

14 – Expérience des trous de Young.

On considère le montage classique des trous d'Young placé dans le vide et représenté par la figure ci–dessous. Un plan P muni de deux ouvertures circulaires S_1 et S_2 de faibles dimensions, identiques, distantes d'une longueur a est éclairé par un faisceau lumineux émis par une source ponctuelle S. Les deux ouvertures ont respectivement les coordonnées suivantes: $S_1(\frac{a}{2}, 0, 0)$; $S_2(-\frac{a}{2}, 0, 0)$ dans le système de coordonnées (O, X, Y, Z).

Un écran d'observation E est disposé parallèlement à P à une distance OO' : OO' = D >> a. La source S émet une lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide.



1°/ Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir un phénomène d'interférence sur l'écran E.

2°/ Soit M un point de l'écran E. On pose $S_1M = r_1$, $S_2M = r_2$. Donner l'expression de la différence de phase en M des ondes émises par (S_1) et (S_2) en fonction de r_1, r_2 et λ_0.

3°/a) Calculer l'expression de l'intensité lumineuse I au point M de l'écran E en fonction de a, X, D et λ_0.

b) Donner la forme des franges sur cet écran.

c) Représenter graphiquement l'intensité I en fonction de X.

d) Calculer λ_0 si l'interfrange i = 0,20 mm ; D = 1 m ; a = 3 mm.

Extrait, Tétouan, PC2.

1°) Pour avoir un phénomène d'interférence sur l'écran E, il faut que les deux sources S_1, S_2 soient cohérentes et synchrones. Ces conditions sont réalisées car les deux sources sont issues de la même source S.

2°) Calcul de la différence de phase.

L'expression de la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent en M est :

$$\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

or $(SS_2) = (SS_1)$ et puisque l'expérience a lieu dans le vide d'indice égal à un :

$$(S_2M) = S_2M \quad ; \quad (S_1M) = S_1M$$

Par conséquent : $\delta = r_2 - r_1$

Le déphasage entre les deux rayons est $\varphi = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda_0}$

D'où $\boxed{\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(r_2 - r_1)}$

3°) a) Expression de l'intensité $I(X)$ au point M.

Les deux sources ont la même amplitude, on peut donc écrire :

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = I_0 \cos^2 \frac{\pi\delta}{\lambda_0} ;$$

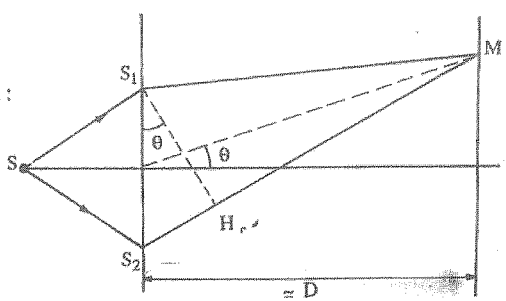
avec I_0 = cste.

La différence de marche en M est :

$$\delta = r_2 - r_1 \approx S_2H$$

$$\delta \approx a\theta \approx \frac{aX}{D} \quad \text{car } D >> a$$

D'où $\boxed{I(X) = I_0 \cos^2 \dfrac{\pi a X}{\lambda_0 D}}$



b) Forme des franges.

On obtient des franges d'interférence rectilignes et parallèles à OY.

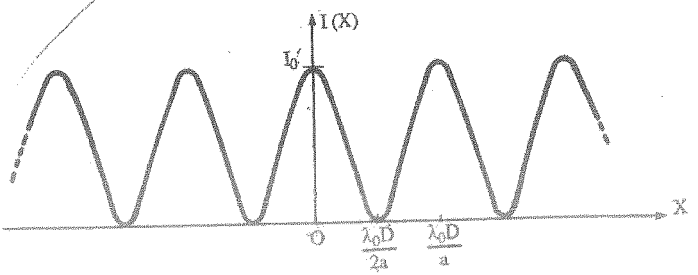
c) Représentation graphique.

$$I(X) = I_0 \cos^2 \frac{\pi a X}{\lambda_0 D}$$

La fonction est paire, de période $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$ qui est l'interfrange.

$I(X) = 0$ si $\frac{\pi a X}{\lambda_0 D} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $X_k = (2k+1)\frac{\lambda_0 D}{2a}$ $k \in \mathbb{Z}$

$I(X) = I_0$ si $\frac{\pi a X}{\lambda_0 D} = k\pi$; $X_k = k\frac{\lambda_0 D}{a}$ $k \in \mathbb{Z}$



On remarque que la frange centrale est brillante. De part et d'autre de la frange centrale, on observe des franges alternativement sombres et brillantes.

d) Calcul de λ_0 :

L'interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$ constitue une périodicité spatiale pour la figure d'interférence, c'est la distance qui existe entre deux franges successives de même intensité (même nature).

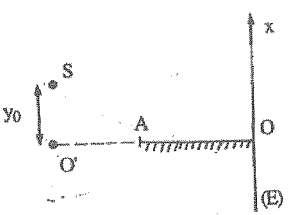
$$\boxed{\lambda_0 = \frac{i a}{D}}$$

A.N. : $i = 0{,}2$ mm ; $a = 3$ mm ; $D = 1$ m.

$$\boxed{\lambda_0 = 0{,}6\ \mu m}$$

15 – Miroir de Lloyd : interférences avec deux radiations - utilisation d'une source étendue.

On éclaire un miroir de Lloyd AO par une source S ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}5\ \mu m$. La source S est située à une hauteur $y_0 = 1$ mm du plan du miroir. On observe des franges d'interférences sur un écran E perpendiculaire au plan du miroir.



On donne : SA = 10 cm et SO = 30 cm.

1°) a) Représenter graphiquement le champ d'interférences.

b) Représenter les deux rayons lumineux qui interfèrent en un point M du champ d'interférences.
Pourquoi observe-t-on des franges d'interférences sur l'écran ?

2°) a) Calculer la largeur du champ d'interférences et l'interfrange.
Combien de franges brillantes observe-t-on sur l'écran ?

b) Donner l'expression de l'intensité I(x) en fonction de l'interfrange en un point M de l'écran situé à une distance x de O.

3°) La source S émet maintenant une radiation rouge de longueur d'onde $\lambda_1 = 0,7$ µm et une radiation verte de longueur d'onde $\lambda_2 = 0,5$ µm.

a) Décrire le phénomène observé sur l'écran.

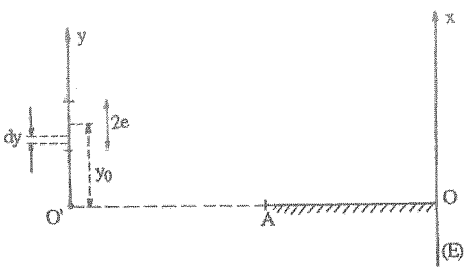
b) Déterminer les positions x_k pour lesquelles on observe un phénomène de brouillage. Calculer les positions du premier et du dernier brouillage.

4°) On remplace la source ponctuelle S par une source monochromatique étendue de longueur d'onde $\lambda = 0,5$ µm et de largeur 2e. Le centre de cette source est à la hauteur y_0 de O' (voir figure).

a) Quelle est l'intensité donnée par une largeur dy de la source (située à une distance y de O') en un point M de l'écran ?

b) Calculer l'intensité lumineuse I sur l'écran donnée par toute la source.
Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$I = I_0\, e\, [1 - V \cos (2\pi \frac{x}{i_0})].$$



Que représentent i_0 et V ?

c) Représenter graphiquement V en fonction de x et interpréter brièvement (sans faire de calcul) le résultat obtenu.

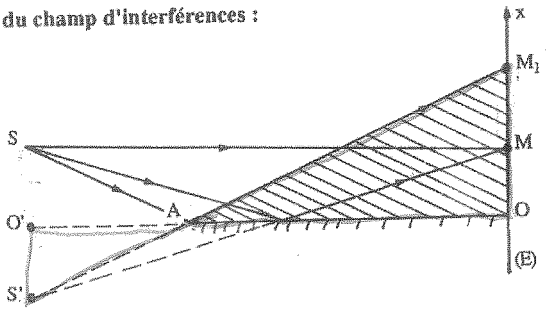
Préciser numériquement les positions x_k des minimums de netteté pour une source de largeur 2e = 0,1 mm.

N.B. Les questions 3°) et 4°) sont indépendantes.

Meknès, PC2, Mai 1987.

1°) Représentation graphique du champ d'interférences :

a) S a pour image S' qui lui est symétrique par rapport au miroir ; d'où la représentation :



La zone d'interférence est délimitée par le rayon réfléchit sur A, et le rayon réfléchit sur O..

b) Les deux rayons lumineux qui interfèrent en M sont constitués par le rayon qui arrive directement sur M et celui qui y parvient après réflexion sur le miroir : c'est le rayon qui semble provenir de S'.
Nous avons réalisé un dispositif permettant la superposition de deux faisceaux : l'un provenant de S, l'autre de S', puisque S et S' sont cohérentes et synchrones, on observe donc des franges d'interférence dans le domaine de superposition (zone hachurée).

2°) a) Largeur du champ d'interférence :

Elle est donnée par la distance $OM_1 = L$.
Les deux triangles AOM_1 et $AO'S'$ sont semblables :

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{O'S'}}{\overline{AO'}} \quad \text{soit} \quad L = \overline{AO} \times \frac{\overline{O'S'}}{\overline{AO'}}$$

y_0 est très faible par rapport à SA et SO, on peut donc écrire :

$$SA \approx O'A = l ; \quad SO \approx O'O = D , \quad \text{d'où} \quad \boxed{L = (D - l)\ \frac{y_0}{l}}$$

A.N. : $y_0 = 1$ mm ; $D = 30$ cm ; $l = 10$ cm

$$\boxed{L = 2 \text{ mm}}$$

◆ **Calcul de l'interfrange.**

Compte tenu du fait que $2y_0 << D$, la différence de marche géométrique en M est $2y_0x/D$; or la réflexion sur le miroir introduit un déphasage de π donc une différence de marche supplémentaire $\lambda/2$, d'où :

$$\delta = \frac{2y_0x}{D} + \frac{\lambda}{2} \qquad [1]$$

Lorsque δ varie de λ, alors x varie d'une interfrange, ce qui donne : $\Delta\delta = \frac{2y_0\Delta x}{D}$, soit :

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{2y_0}} \qquad [2]$$

A.N. : $\lambda = 0{,}5$ µm ; $D = 30$ cm ; $y_0 = 1$ mm.

$$\boxed{i = 7{,}5.10^{-2}\ \text{mm}}$$

◆ **Nombre de franges brillantes observées.**

Le rapport $\frac{L}{i} = 26{,}7$. Or pour $x = 0$, d'après [1] $\delta = \frac{\lambda}{2}$, cela correspond à une frange sombre.

Le nombre de franges brillantes observées sur l'écran est donc : $\boxed{n = 27}$

b) Expression de l'intensité $I(x)$.

D'après les résultats du cours, nous avons : $I(x) = I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$; I_0 est une constante.

En utilisant [1] et [2], on a : $\boxed{I(x) = I_0\left(1 - \cos 2\pi\frac{x}{i}\right)}$ [3]

On remarque que pour $x = 0$, $I(0) = 0$, donc la frange centrale est sombre.

3°) a) Les deux radiations λ_1 et λ_2 produisent sur l'écran (E) deux systèmes de franges rectilignes d'interfranges i_1 et i_2. Les deux radiations sont incohérentes, elles n'interfèrent pas, les intensités qu'elles produisent sur l'écran s'additionnent.

L'intensité en M est alors : $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$

D'après [3] : $I(x) = I_0\left[2 - \cos\frac{2\pi x}{i_1} - \cos\frac{2\pi x}{i_2}\right]$

Sur l'écran, en un point donné, lorsqu'une frange brillante (resp. sombre) d'une radiation coïncide avec une frange brillante (resp. sombre) de l'autre, on aura coïncidence entre les deux systèmes de franges.

Aux positions de l'écran pour lesquelles une frange brillante d'une radiation coïncide avec une frange sombre de l'autre, on aura un brouillage, c'est l'anticoïncidence entre les deux systèmes de franges.

Rappelons que pour une frange brillante, l'ordre d'interférence est entier, alors que pour une frange sombre, l'ordre d'interférence est demi-entier.

b) Positions des brouillages.

Soient $p_1(x)$ et $p_2(x)$, les ordres d'interférence pour λ_1 et λ_2 :

$$p_1(x) = \frac{2y_0x}{\lambda_1 D} + \frac{1}{2} \quad ; \quad p_2(x) = \frac{2y_0x}{\lambda_2 D} + \frac{1}{2}$$

Pour les positions de brouillage, si $p_1(x)$ est entier, alors que $p_2(x)$ est demi-entier et inversement. On doit donc avoir $p_2(x) - p_1(x)$ égale à un demi-entier :

$$p_2(x) - p_1(x) = k + \frac{1}{2} \quad k \in \mathbb{N}$$

Soit $\boxed{x_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\cdot\frac{D}{2y_0}}$

La position de x_k doit toujours appartenir au champ d'interférence.

A.N. : $\lambda_1 = 0{,}7\ \mu m$; $\lambda_2 = 0{,}5\ \mu m$; $D = 30\ cm$; $y_0 = 1\ mm$.

$$\boxed{x_k = 0{,}26\left(k + \frac{1}{2}\right)\ (mm)} \qquad k \in IN$$

Premier brouillage : $k = 0$; $x_0 = 0{,}13$ mm.

Dernier brouillage : Il correspond à la valeur maximale de k, telle que $x_k \leq L$. On trouve $k = 7$, soit $x_7 = 1{,}95$ mm.

4°) Soit un élément de la source d'épaisseur dy situé à la distance y de O', celui-ci en donne une image symétrique par rapport au miroir.

a) En un point M de l'écran, d'abscisse x, l'intensité émise par un élément dy de la source, situé à une distance y de O' est : $dI = K\left(1 - cos\frac{2\pi x}{i}\right)dy$ avec $i = \frac{\lambda D}{2y}$;

K : constante.

Soit $$\boxed{dI = K\left(1 - cos\frac{4\pi xy}{\lambda D}\right)dy} \qquad [4]$$

b) L'intensité totale s'obtient en remarquant que les sources élémentaires de la fente de largeur $2e$ sont incohérentes, par conséquent on les ajoute :

$$I(x) = \int_{y_0 - e}^{y_0 + e} K\left(1 - cos\ 4\pi\frac{xy}{\lambda D}\right)dy$$

$$I(x) = 2eK - \frac{K\lambda D}{4\pi x}\left[sin\frac{4\pi x}{\lambda D}(y_0 + e) - sin\frac{4\pi x}{\lambda D}(y_0 - e)\right]$$

$$I(x) = 2eK - \frac{K\lambda D}{2\pi x} \cdot sin\frac{4\pi xe}{\lambda D} \cdot cos\frac{4\pi xy_0}{\lambda D}$$

en posant : $i_0 = \frac{\lambda D}{2y_0}$ et $I_0 = 2K$:

$$I(x) = I_0 e\left[1 - \frac{sin\,(2\pi xe/y_0 i_0)}{(2\pi xe/y_0 i_0)}\ cos\,2\pi\frac{x}{i_0}\right]$$

On peut donc écrire $I(x)$ sous la forme :

$$I(x) = I_0 e\left[1 - V\,cos\frac{2\pi x}{i_0}\right] \quad \text{avec} \quad V = \frac{sin\,(2\pi xe/y_0 i_0)}{(2\pi xe/y_0 i_0)}$$

$i_0 = \frac{\lambda D}{2y_0}$ représente l'interfrange obtenue par une source ponctuelle placée à une distance y_0 de O'. V représente le facteur de visibilité des franges.

c) Représentation graphique de V en fonction de x.

$$V(x) = \frac{sin\,(2\pi xe/y_0 i_0)}{(2\pi xe/y_0 i_0)}$$

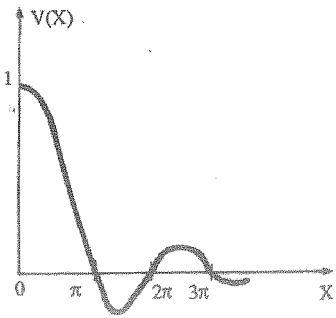
C'est la représentation graphique de $\sin X/X$ avec $X = \frac{2\pi x e}{y_0 i_0}$

◆$V(X) = 1$ si $X = 0$

◆$V(X) = 0$ si $X = k\pi$ $k \in IN^*$

◆$V(X)$ a des extrema secondaires pour $X = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $k \in IN$, ce dernier résultat s'obtient graphiquement.

Les franges sont nettes lorsque $V \approx 1$ $(X \leq \frac{\pi}{2})$. On obtient des franges brouillées pour des facteurs de visibilité nuls. D'après la courbe, on voit qu'on a une périodicité de la visibilité, mais avec une diminution du contraste.



Positions des minimums de netteté :

$$V = 0, \text{ si } \frac{2\pi x_k e}{y_0 i_0} = k\pi \quad k \in IN^*$$

soit $\boxed{x_k = \frac{\lambda D}{4e} k}$ car $i_0 = \frac{\lambda D}{2y_0}$

A.N. : $\lambda = 0{,}5$ µm ; $D = 30$ cm ; $2e = 0{,}1$ mm avec $x_k \leq L$ $\boxed{x_k = 0{,}75\,k \text{ (mm)}}$.

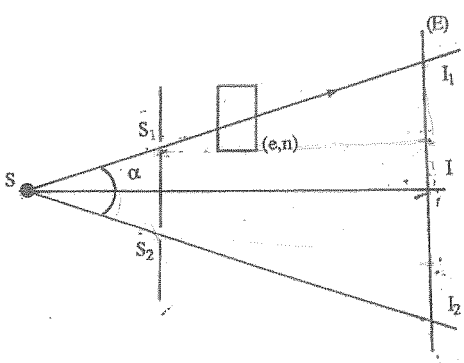
16 — Trous de Young, déplacement des franges.

Par un dispositif approprié, on obtient d'une source S deux images réelles S_1 et S_2, distantes l'une de l'autre de $a = 4$ mm.

L'observation des franges se fait sur un écran (E) à $D = 40$ cm de S_1S_2.

1°) Calculer l'interfrange pour une lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}6$ µm.

2°) S_1S_2 est vu de S sous un angle α de 0,002 radian, cet angle limite aussi le champ d'interférence. Combien de franges brillantes compte-t-on sur l'écran ?



3°) Devant S_1, on place une mince lame de verre d'indice $n = 1,5$ et il se produit dans (E) une translation du système de franges d'amplitude 5 interfranges. Quelle est l'épaisseur e de la lame ?

El Jadida, PC2, Juin 1987.

1°) Le dispositif utilisé est similaire à celui des fentes de Young. L'espacement entre les deux sources est très faible par rapport à l'écran d'observation ($D>>a$). L'interfrange est donc:

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

A.N. : $\lambda = 0,6\ \mu m$; $D = 40\ cm$; $a = 4\ mm$

On déduit : $\boxed{i = 0,06\ mm}$

2°) Pour calculer le nombre de franges visibles sur l'écran, il faut déterminer au préalable la largeur du champ d'interférence. Puisque α limite le champ d'interférence, nous avons :

$$L = I_1I_2 = I_1H_1 + H_1H_2 + H_2I_2.$$

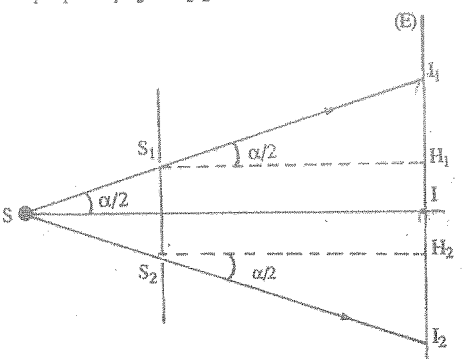
α étant petit, donc :

$$I_1H_1 = \frac{\alpha}{2}S_1H_1 = \frac{\alpha}{2}D.$$

$I_1H_1 = H_2I_2$ par raison de symétrie.

$$H_1H_2 = a$$

Soit $\boxed{L = \alpha D + a}$



Le nombre d'interfranges observables sur l'écran est : $n = \frac{L}{i}$

A.N : $\alpha = 0,002$ rd ; $D = 40$ cm ; $a = 4$ mm.

On trouve $L = 4,8$ mm ; $n = 80$

Au point I la différence de marche est nulle, on a donc une frange centrale brillante. On observe par conséquent 40 frangès de part et d'autre de la frange centrale. Au total, l'écran contient 81 franges brillantes.

3°) L'épaisseur traversée par la lumière dans la lame est à peu près égale à e, car les rayons qui la traversent, ont une faible inclinaison. Soit M un point du champ d'interférence tel que :

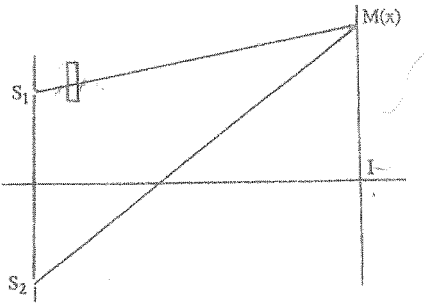
$$\overline{IM} = x.$$

En l'absence de la lame, la durée du trajet dans une épaisseur e d'air est : $t_1 = \frac{e}{c}$

Dans l'épaisseur e du verre la durée est :

$$t_2 = \frac{e}{v} = \frac{ne}{c}$$

v : vitesse de propagation dans le verre.



La lame de verre introduit un allongement du trajet optique dans l'air, égal à :

$$c(t_2 - t_1) = (n-1)e.$$

La différence de marche avant l'introduction de la lame est : $\delta = \frac{ax}{D}$

L'introduction de la lame correspond à une modification de δ et de x tels que :

$$\Delta\delta = (n-1)e \; ; \quad \Delta x = 5\,i.$$

or $\Delta\delta = \frac{a\Delta x}{D}$. D'où $\boxed{e = \frac{5ai}{(n-1)D}}$

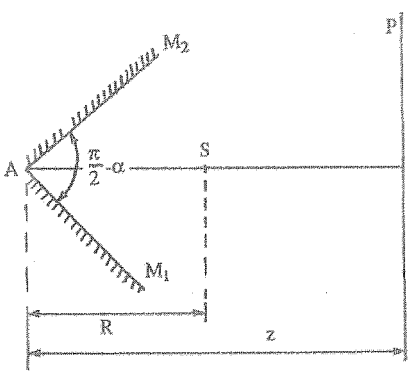
A.N. : $i = 0{,}06$ mm ; $a = 4$ mm ; $n = 1{,}5$; $D = 40$ cm.

On trouve : $\boxed{e = 0{,}006 \text{ mm}}$

Remarque : Les interférences permettent la mesure de faibles épaisseurs en les substituant simplement au recensement d'un certain nombre de franges qui défilent sur l'écran.

17 – Miroirs rectangulaires.

On considère, dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1, deux miroirs plans M_1 et M_2 formant un dièdre d'arête A et d'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (avec α petit). Une source lumineuse S, ponctuelle, monochromatique (de longueur d'onde λ), est placée dans le plan bissecteur du dièdre formé par les miroirs, à une distance R de l'arête (voir figure). On étudie les interférences entre les 2 ondes réfléchies deux fois, la première par M_1 puis M_2, la seconde par M_2 puis M_1. Le plan d'observation P est un écran perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre, parallèle à son arête A et situé à la distance z de A ($z > R$).



1°) Déterminer, à l'aide d'une construction géométrique soignée la région dans laquelle on peut observer des phénomènes d'interférences. En déduire la distance entre les 2 sources cohérentes qui produisent les interférences.

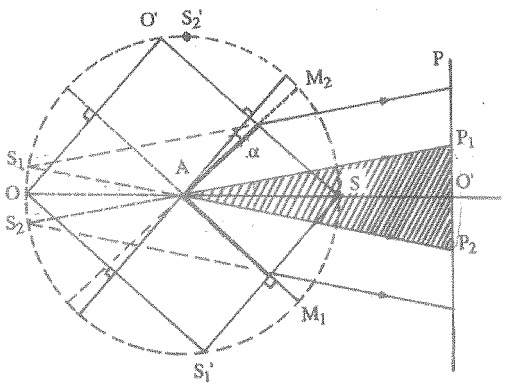
2°) Calculer l'interfrange, la largeur du champ d'interférences et le nombre de franges brillantes observées sachant que :

$\lambda = 0{,}6\ \mu m$; $R = 10\ cm$; $z = 70\ cm$ et $\alpha = 2.10^{-3}$ *radian.*

3°) La source S n'est pas en réalité parfaitement monochromatique. Sachant qu'à partir d'une distance $R_0 = 20\ cm$ *on n'observe plus de phénomènes d'interférences ; donner un ordre de grandeur du temps de cohérence de la source S.*

Extrait, Casablanca 1, MP2, Janvier 1986.

1°) Zone d'interférence :



◆ **Réflexion** M_1, M_2.

L'image de S à travers M_1 est S_1', qui est symétrique de S par rapport à AM_1. Dans le cas où M_2 est perpendiculaire à M_1, il donnerait de S_1' une image située en O. O et S sont symétriques par rapport à A. Lorsqu'on fait tourner M_2 de α, son image tourne de 2α, donc :

$$\widehat{S_1AO} = 2\alpha.$$

◆ **Réflexion** M_1, M_2.

Le même raisonnement donne : $\widehat{OAS_2} = 2\alpha$

Nous avons donc $\widehat{S_1AS_2} = 4\alpha$

Le champ d'interférences est donné par la région commune ou deux faisceaux (voir figure).

Distance S_1S_2.

En supposant α petit : $\boxed{S_1S_2 = 4\ \alpha\ R}$

2°) ◆ **Interfrange :**

Les deux sources secondaires S_1 et S_2 vont interférer sur le plan (P), on y observe des franges rectilignes, parallèles à l'arête A. L'interfrange est : $i = \dfrac{\lambda.OO'}{S_1S_2}$

$$\boxed{i = \frac{\lambda(z + R)}{4\,\alpha\,R}}$$

◆ **Largeur du champ d'interférences :**

La largeur du champ d'interférences est : $L = P_1P_2$, soit : $\boxed{L = 4\ \alpha\ z}$

◆ **Nombre de franges brillantes :** Soit $N = L / i$ le nombre d'interfranges

A.N : $\lambda = 0{,}6\ \mu m$; $z = 70\ cm$; $R = 10\ cm$; $\alpha = 2.10^{-3}$ rd.

$\boxed{i = 0{,}6\ mm}$; $\boxed{L = 5{,}5\ mm}$; $N = 9{,}2$; on observe donc $n = 9$ franges brillantes, car la frange centrale est brillante.

3°) **Temps de cohérence.**

Soit a la distance entre S_1 et S_2 telle que $R = R_0$: $a = 4\alpha R_0$

Le temps de cohérence τ_c est relié à a par : $c\tau_c = a$ où c est la vitesse de la lumière :

$$\boxed{\tau_c = \frac{4\alpha R_0}{c}}$$

A.N : $\alpha = 2.10^{-3}$ rd ; $R_0 = 20\ cm$; $c = 3.10^8\ m/s$

$$\boxed{\tau_c = 5{,}3.10^{-12} s.}$$

Remarque : On voit que $S_1S_2 = 4\alpha R_0$ est la valeur maximale de l'espacement entre les deux images pour continuer à observer des interférences.

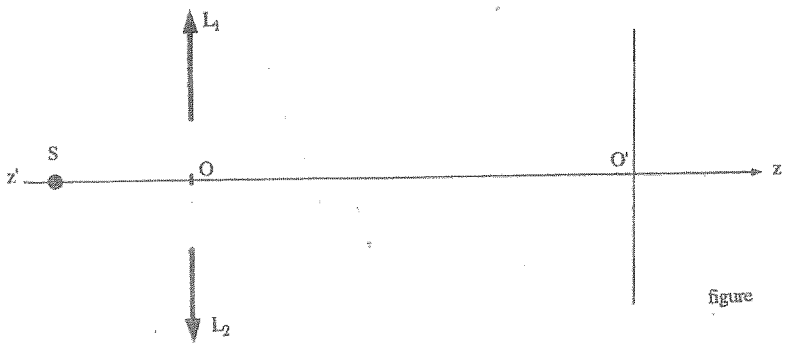
◦ 18 – Bilentilles de Billet.

Bilentilles de Billet :
Deux demi-lentilles L_1 et L_2 obtenues à partir d'une lentille mince convergente de distance focale $\overline{OF'} = f'$, sont écartées d'une faible distance e. A l'aide de ce système, on obtient deux sources secondaires cohérentes S_1 et S_2 à partir d'une source primaire S ponctuelle de lumière monochromatique de longueur d'onde λ.

Donner en fonction des paramètres correspondants, la distance b des sources S_1 et S_2, l'expression de l'interfrange i, et décrire le champ d'interférences.

Le plan d'observation est perpendiculaire en O' à l'axe z'z, soit O le centre du système

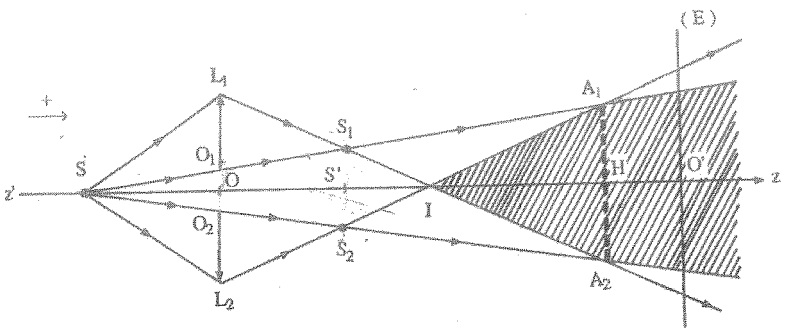
formé par les deux demi–lentilles. On pose : SO = d, OO' = l (figure)



figure

Extrait question de cours, Fès, PC2, Juin 1988.

Etude du système d'interférence :



S_1 et S_2 sont les images approximatives données par les deux demi–lentilles L_1 et L_2. S_1, S_2 sont symétriques par rapport à $z'z$.
Les deux sources secondaires sont cohérentes et synchrones, car elles sont issues de la même source S ; sur un écran (E) perpendiculaire à $z'z$, elles vont produire des franges d'interférences non localisées.
La zone hachurée, correspond au lieu de superposition des deux faisceaux relatifs à L_1 et L_2. C'est la zone d'interférence.
Pour observer les franges d'interférence, l'écran (E) ne doit pas être placé avant I.

Calcul de $S_1S_2 = b$

Les triangles SO_1O_2 et SS_1S_2 sont semblables :

$$\frac{\overline{S_1S_2}}{\overline{SS'}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{SO}} \quad , \quad \overline{S_1S_2} = \overline{SS'} \cdot \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{SO}}$$

or S' est l'image de S à travers les bilentilles :

$$\frac{1}{\overline{OS'}} - \frac{1}{\overline{OS}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \; ; \; \overline{OF'} = f' \; ; \; \overline{OS} = -d \; : \overline{OS'} = \frac{f'.d}{d-f'}$$

D'où $$\overline{S_1S_2} = \left(\overline{SO} + \overline{OS'}\right) . \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{SO}} \quad ; \quad \overline{O_1O_2} = e$$

Par conséquent : $$\boxed{S_1S_2 = b = \frac{e\,d}{d-f'}}$$

Expression de l'interfrange i :

Le système est équivalent, au point de vue calcul, à celui des fentes d'Young placées à une distance $S'O'$ de l'écran.

L'interfrange est par conséquent donnée par : $i = \dfrac{\lambda\, S'O'}{S_1S_2}$

avec $$S_1S_2 = b \; ; \; S'O' = S'O + OO' = l - \frac{f'\,d}{d-f'}$$

Soit $$\boxed{i = \frac{\lambda}{b}\left(l - \frac{f'\,d}{d-f'}\right)}$$

Description du champ d'interférence :

Le champ d'interférence est symétrique par rapport à z'z, il admet une frange centrale (O') qui a pour différence de marche $\delta_0 = 0$, elle est donc brillante. De part et d'autre de la frange centrale, on observe des franges alternativement sombres et brillantes. La distance séparant deux franges successives de même nature est égale à i.

Remarque : Sur la figure le point H correspond à un changement de pente dans le champ d'interférence. Pour calculer la largeur du champ d'interférence, on doit savoir si (E) est entre I et H ou au-delà de H.

19 – Coin de verre - Biprisme de Fresnel.

On considère, plongés dans l'air dont on prendra l'indice égale à 1, les objets suivants :
– Une source ponctuelle (S) monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide.
– Une lentille mince convergente (L) de centre optique O, de distance focale image f'.
– 2 petits prismes (P_1) et (P_2) identiques, en verre d'indice n inconnu accolés par leur base et d'angle au sommet θ très petit, inconnu, (P_1) et (P_2) constituent un biprisme (P).

– Un écran (E) plan.
On se propose de déterminer l'angle θ et la valeur de l'indice $n(\lambda_0)$ du biprisme grâce aux deux expériences suivantes :

1°) 1ère expérience : la source (S) est placée au foyer principal objet de la lentille de sorte que le biprisme soit éclairé sous incidence normale. (voir figure 1)

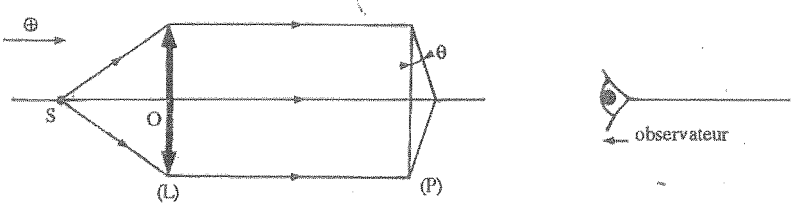


figure 1

Décrire brièvement le phénomène d'interférences des "coins de verre" vu par un observateur situé derrière le biprisme : lieu de localisation et forme des franges ?
Exprimer d'interfrange i_1 en fonction de λ_0, $n(\lambda_0)$ et θ.

2°) 2ème expérience (Voir figure : 2)

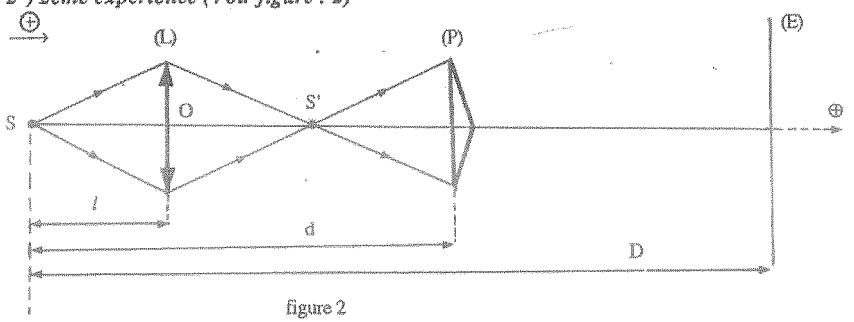


figure 2

Par rapport à la source (S) placée sur l'axe de la lentille et prise comme origine des abscisses, les positions respectives de la lentille (L), du biprisme (P) et de l'écran (E) sont : l, d, D. Le montage admet pour axe de symétrie, l'axe optique de la lentille.

a) La lentille (L) donne de la source (S) une image (S') située entre la lentille et le biprisme. Déterminer la position de (S') par rapport à (S) en fonction de l et f '.

b) Chacun des prismes (P_1) et (P_2) donne de (S') une image (S'_1) et (S'_2) cohérentes entre elles. En supposant que (S'_1), (S'_2) et (S') soient à égale distance de (S), calculer la distance $S'_1S'_2$ en fonction de d, l, f ', $n(\lambda_0)$, et θ.

c) Des franges d'interférence sont recueillies sur l'écran (E). Donner une brève description du phénomène observé sur l'écran. Exprimer l'interfrange i_2 en fonction de D, λ_0, d, f ', $n(\lambda_0)$, θ et l.

3°) Quelle est la valeur de l'angle θ(exprimée en radian) et de l'indice $n(\lambda_0)$ du biprisme sachant que :
$\lambda_0 = 6\,000$ Å ; $l = 2f'$; $d = 8f'$; $D = 16f'$; $i_1 = 1$ mm ; $i_2 = 9$ mm.

4°) En réalité la radiation de longueur d'onde λ_0 n'est pas rigoureusement monochromatique ; elle a une durée de cohérence $\Delta t = 10^{-12}$ seconde.
En reportant dans l'expression de $S'_1S'_2$ (Question 2°-b) les valeurs de θ, $n(\lambda_0)$, d, et l calculées ou données à la question précédente, calculer la valeur limite de f' afin de

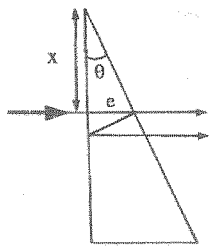
pouvoir obtenir des interférences dans la deuxième expérience. La vitesse de propagation de la lumière dans l'air sera prise égale à 3.10^8 m/s.

Extrait, Casablanca I, MP2, Mai 1985.

1°) Nous avons le phénomène d'interférences produits par un coin de verre. Les franges sont localisées sur le biprisme, elles sont rectilignes et parallèles à l'arête du biprisme.

La différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent est $\delta = 2ne$ avec $e = x\theta$, d'où $\delta = 2n\theta x$

Lorsque, la différence de marche varie de λ_0, alors x varie d'une interfrange.



Soit $\boxed{i_1 = \dfrac{\lambda_0}{2n(\lambda_0)\theta}}$ [1]

2°) a) Position de S' :

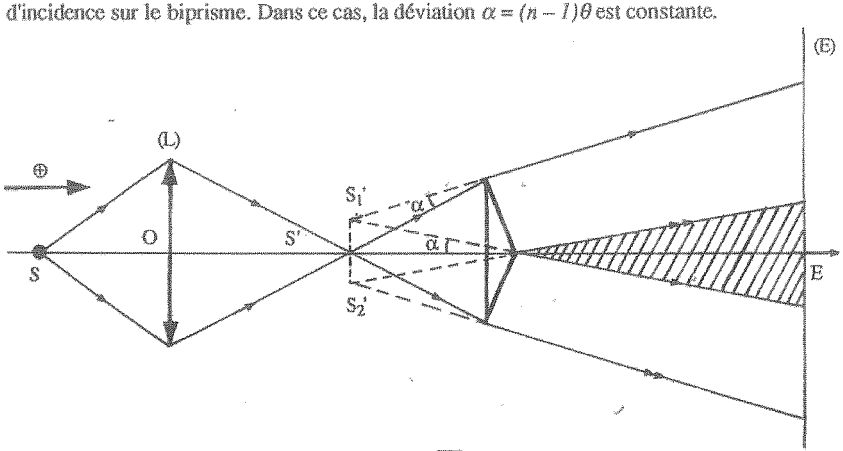
S' est le conjugué de S à travers L : $\dfrac{1}{\overline{OS'}} - \dfrac{1}{\overline{OS}} = \dfrac{1}{f'}$, $\overline{OS} = -l$, donc

$$\overline{OS'} = \frac{lf'}{l - f'}. \qquad \overline{SS'} = \overline{SO} + \overline{OS'}$$

D'où $\boxed{\overline{SS'} = \dfrac{p}{l - f'}}$

b) Détermination de $S_1'S_2'$:

On suppose que S' est assez éloignée de (P) pour pouvoir supposer petits les angles d'incidence sur le biprisme. Dans ce cas, la déviation $\alpha = (n-1)\theta$ est constante.



On a donc $S_1'S_2' = 2\alpha[d - \overline{SS'}]$

Soit $$\boxed{S_1'S_2' = 2(n-1)\theta\left[d - \frac{l^2}{l-f'}\right]} \qquad [2]$$

c) S_1', S_2' jouent le rôle de deux sources secondaires qui vont interférer sur l'écran E, la zone d'interférence est hachurée sur la figure. Le dispositif se réduit à celui des trous d'Young distants de $S_1'S_2'$ et se trouvant à $S'E$ de l'écran. On observe des franges rectilignes perpendiculaires au plan de la figure. L'interfrange est $i_2 = \dfrac{\lambda_0 S'E}{S_1'S_2'}$

$$S'E = D - SS' = D - \frac{l^2}{l-f'}$$

D'où $$\boxed{i_2 = \frac{\lambda_0\left[(D-d)(l-f') + l^2\right]}{2(n-1)\theta\left[d(l-f') - l^2\right]}} \qquad [3]$$

3°) Calcul de θ, n :

A.N : $\lambda_0 = 6\,000$ Å ; $l = 2f'$; $d = 8f'$; $D = 16f'$; $i_1 = 1$ mm ; $i_2 = 9$ mm.

D'après [1] on a $n\theta = 3.10^{-4}$

D'après [3] on a $(n-1)\theta = 10^{-4}$

D'où $\boxed{\theta = 2.10^{-4}\ \text{rd}}$

Par conséquent : $\boxed{n = \frac{3}{2}}$

4°) Valeur limite de f'

$c\Delta t$ représente la longueur de cohérence. Pour qu'il y ait interférence, il faut que :

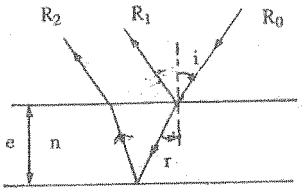
$$S_1'S_2' < c\Delta t \qquad [4]$$

A.N $n = 1{,}5$; $\theta = 2.10^{-4}$; $d = 8f'$; $l = 2f'$; $c = 3.10^8$ m/s ; $\Delta t = 10^{-12}$ s

On aura d'après [2] et [4] : $\boxed{f' < \frac{3}{8}\text{m}}$

20 – Franges d'égale inclinaison par réflexion.

Une source étendue monochromatique S_0 émettant à la longueur d'onde λ éclaire une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n. Un rayon incident R_0 donne après réflexions et réfractions deux rayons émergents R_1 et R_2, qui vont interférer. On suppose que l'angle d'incidence est assez petit.



1) Pourquoi peut-on utiliser une source étendue ?

2) a) En quel point se coupent les rayons R_1 et R_2 ?

b) Où se trouve donc localisé le phénomène d'interférence ?

3) On place une lentille convergente de distance focale f parallèlement à la lame, et on observe le phénomène d'interférence dans son plan focal image.

a) Donner l'expression de la différence de marche entre R_1 et R_2.

b) Décrire le phénomène observé sur l'écran E.

c) Quel est l'ordre d'interférence au centre, et à une distance d du centre ? Comment varie l'ordre d'interférence quand on s'éloigne du centre de la figure d'interférence ?

d) Comment choisir l'épaisseur e de la lame pour que la figure d'interférence admette un centre brillant ? Calculer dans ce cas le rayon angulaire du $K^{ème}$ anneau brillant.

e) De combien doit-on faire varier l'épaisseur de la couche pour substituer une frange sombre à une frange brillante.

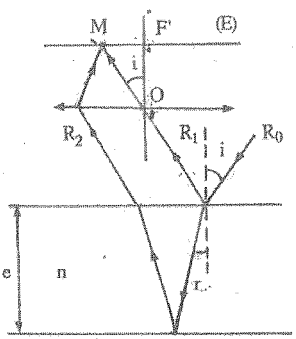
4) Application : couche anti-reflet :
Expliquer brièvement le principe de réalisation d'une couche anti-reflet d'indice n sur une lentille d'indice N, placée dans l'air : choix de l'épaisseur pour réaliser la condition d'anti-reflet à une longueur d'onde λ.

Extrait, El Jadida, PC2, Mai 1988.

1°) Les rayons R_1 et R_2 qui vont interférer proviennent du même rayon incident R_0 ; cela nous permet donc d'utiliser une source étendue.

2°) **a)** Les rayons R_1 et R_2 sont parallèles, par conséquent ils se coupent à l'infini.

b) Le phénomène d'interférence est donc dit, localisé à l'infini.



3°) **a)** La différence de marche entre R_1 et R_2 est donnée par : $\delta = 2ne\cos r + \frac{\lambda}{2}$

Le terme $\frac{\lambda}{2}$ provient de la réflexion air–verre.

r est petit, donc : $\delta = 2ne\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{\lambda}{2}$

avec $i = nr$

Soit $$\boxed{\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} - \frac{ei^2}{n}} \qquad [1]$$

b) L'écran E placé dans le plan focal image de la lentille, est le lieu de localisation du

phénomène d'interférence. On y observe des anneaux alternativement sombres et brillants. Ce sont des anneaux d'égale inclinaison.

c) ◆ **Ordre d'interférence au centre :**

D'après [1] : $$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda} + \frac{1}{2} - \frac{ei^2}{n\lambda} \qquad [2]$$

Au centre $i = 0$, soit $$\boxed{p_c = \frac{2ne}{\lambda} + \frac{1}{2}}$$

◆ **Ordre d'interférence à d du centre.** Nous avons $d = if$ car $OF' = f$, $F'M = d$ en remplaçant dans [2], il vient : $$\boxed{p = p_c - \frac{e\,d^2}{n\,\lambda\,f^2}} \qquad [3]$$

Lorsqu'on s'éloigne du centre, d augmente ; par conséquent, d'après [3], l'ordre d'interférence diminue.

d) ◆ Pour que la figure d'interférence admette un centre brillant, il faut que p_c soit entier :

$$\frac{2ne}{\lambda} + \frac{1}{2} = K' \in \mathbb{N}^*$$

Soit $$\boxed{e = \frac{\lambda}{2n}\left(K' - \frac{1}{2}\right)} \qquad [4]$$

◆ Rayon du K^{eme} anneau brillant . p diminue à partir du centre. L'ordre d'interférence du K^{eme} anneau brillant est donc : $p = p_c - K = K' - K$.

D'après [2] : $$K' - K = K' - \frac{ei^2}{n\lambda}$$

Soit $$\boxed{i = \sqrt{\frac{n\,\lambda K}{e}}}$$

e est donnée par [4].

e) Lorsque l'ordre d'interférence passe d'un entier à un demi-entier, alors nous avons substituer une frange sombre à une frange brillante. On doit avoir : $\Delta p = \frac{1}{2}$, d'après [2].

$$\Delta p = \frac{2n}{\lambda}\Delta e - \frac{i^2}{n\lambda}\Delta e = \frac{1}{2}$$

Soit $$\boxed{\Delta e = \frac{n\lambda}{2(2n^2 - i^2)}}$$

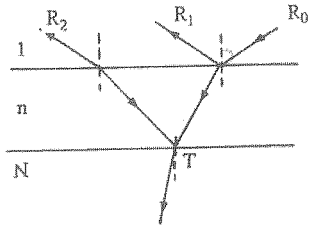
4°) Couche anti-reflet :

La réalisation d'une couche anti-reflet suppose que l'énergie transmise par T est maximale. Il faut donc que R_1 et R_2 interfèrent destructivement. (voir figure suivante).

En supposant $1 < n < N$, les deux réflexions seront de même nature, on a donc en incidence normale :

$$\delta = 2ne = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad ; \quad e = (2k+1)\frac{\lambda}{4n}$$

L'épaisseur minimale est donnée par : $e_0 = \frac{\lambda}{4n}$



Remarque : Il faut aussi réaliser la condition d'égalité des amplitudes correspondant à R_1 et R_2.

Fresnel a montré qu'en incidence normale, cette condition est donnée par :

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{N-n}{N+n} \quad \text{soit } n = \sqrt{N}.$$

21 - Anneaux de Newton.

Une lentille de verre mince et plan-convexe de grand rayon R est posée sur un plan de verre horizontal (Fig.). Ce montage est éclairé en incidence normale, en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}546$ µm, pour observer par réflexion les anneaux de Newton.

1°) a – La différence de marche δ étant : $\delta = 2e + \lambda/2$, montrer que : $e = \frac{x^2}{2R} + e_0$

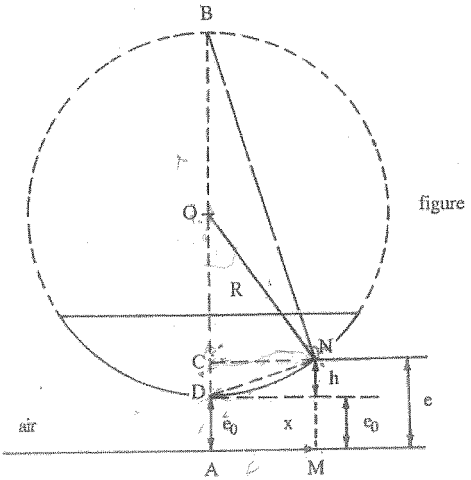
avec ($x = AM = CN$, $e_0 = AD$ et $\frac{x^2}{2R} = h = CD$).

x est le rayon d'un anneau donné, le point C est la projection orthogonale du point N sur le diamètre DB. On note que lorsque la lentille est en contact avec le plan de verre $e_0 = 0$.

b) Pour $e_0 = 0$, déterminer la nature du centre et le rayon de l'anneau d'ordre 9/2, lorsque $R = 20$ m.

c) Calculer le nombre n d'anneaux sombres que l'on verra disparaître au centre au cours d'un déplacement du plan par rapport à la lentille entre les positions limites $e_0 = 0$ et $e_1 = 1$ mm.

2°) On suppose que la lentille est maintenue à une distance $e_0 \neq 0$ du plan de verre. Les rayons du premier et du dixième anneau sombre sont respectivement $x_1 = 2$ mm et $x_{10} = 12$ mm. Calculer le rayon de courbure R de la face convexe de la lentille.



figure

Extrait, Casablanca 1, MP2, PC2, Juin 1988.

1°) a) Montrons que $\frac{x^2}{2R} = h$

Dans le triangle ONC, nous avons :

$$ON^2 = OC^2 + CN^2$$

$$R^2 = (OD - CD)^2 + AM^2$$

$$R^2 = (R - h)^2 + x^2$$

$$R^2 = R^2 + h^2 - 2Rh + x^2$$

$$h^2 - 2Rh + x^2 = 0$$

Soit $$-2Rh\left(1 - \frac{h}{2R}\right) + x^2 = 0$$

or $h << R$, donc $$-2Rh + x^2 = 0$$

par conséquent : $h = x^2/2R$

On voit aisément sur la figure que $e - e_0 = h$

D'où $$e = \frac{x^2}{2R} + e_0.$$

b) Pour $e_0 = 0$, nous avons $$e = \frac{x^2}{2R}$$

Soit $\delta = \frac{x^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$, au centre $x = 0$, donc $\delta_c = \frac{\lambda}{2}$ d'où l'ordre d'interférence $p_c = \frac{1}{2}$.

La figure d'interférence est à centre noir.

L'ordre d'interférence en un point quelconque est : $p = \frac{x^2}{\lambda R} + \frac{1}{2}$

Soit : $$x = \sqrt{\left(p - \frac{1}{2}\right)\lambda R}$$

x est le rayon de l'anneau d'ordre p.

A.N : $p = \frac{9}{2}$; $\lambda = 0{,}546\ \mu m$; $R = 20$ m.

On trouve $\boxed{x = 6{,}6\ mm}$

c) Pour $e_0 \neq 0$, l'ordre d'interférence au centre est : $p_c = \frac{2e_0}{\lambda} + \frac{1}{2}$

Lorsqu'on passe de $e_0 = 0$ à $e_1 = 1$ mm l'ordre d'interférence varie de Δp_c tel que :

$$\Delta p_c = \frac{2\Delta e_0}{\lambda}$$

A.N : $\Delta e_0 = 1$ mm ; $\lambda = 0{,}546\ \mu m$

$$\boxed{\Delta p_c = 3663}$$

On verra donc disparaître $n = 3663$ anneaux sombres.

2) Pour $e_0 \neq 0$ l'ordre d'interférence en un point quelconque est donné par :

$$p = \frac{x^2}{\lambda R} + p_c \qquad [1]$$

Lorsque l'anneau est sombre : $p = K + \frac{1}{2}$ $K \in IN$.

Le premier anneau sombre a pour ordre $p_1 = K_1 + \frac{1}{2}$; or d'après [1] on voit que p augmente à partir du centre. Par conséquent le deuxième anneau sombre a pour ordre $p_2 = p_1 + 1 = K_1 + 1 + \frac{1}{2}$. Le même raisonnement nous permet d'écrire : $p_{10} = K_1 + 9 + \frac{1}{2}$.

D'où $$p_{10} - p_1 = 9$$

D'après [1] $$\left(\frac{x_{10}^2}{\lambda R} + p_c\right) - \left(\frac{x_1^2}{\lambda R} + p_c\right) = 9$$

Soit $$\boxed{R = \frac{x_{10}^2 - x_1^2}{9\lambda}}$$

A.N : $x_1 = 2$ mm ; $x_{10} = 12$ mm ; $\lambda = 0{,}546\ \mu m$

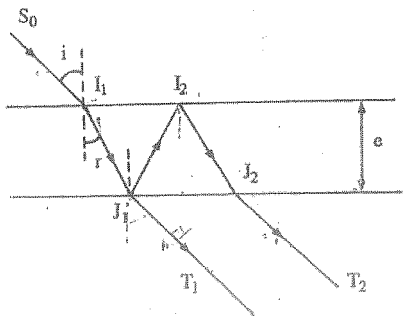
$$\boxed{R = 28{,}5\ m}$$

22 – Franges d'égale inclinaison par transmission, interférences à ondes multiples.

On considère une lame d'air à faces parallèles, d'épaisseur e, comprise entre deux lames de verre légèrement prismatiques et d'épaisseur négligeables. On éclaire la lame par une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ.

PREMIERE PARTIE :

Un rayon incident donne naissance aux rayons transmis J_1T_1 et J_2T_2 représentés sur la figure ci–contre :



1°) Où et comment peut–on observer le phénomène d'interférence produit par les couples de rayons tels que J_1T_1 et J_2T_2 ?

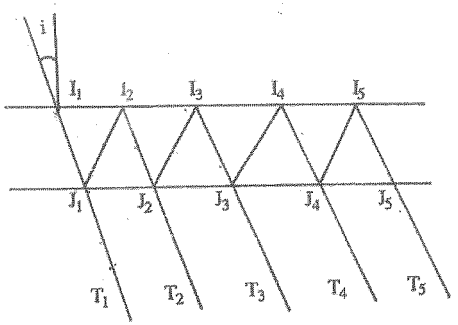
2°) Calculer la différence de marche entre ces deux rayons ? Quelle est la nature des franges obtenues ?

3°) Calculer les angles i supposés petits correspondants :
– Aux directions dans lesquelles on observe une frange brillante.
– Aux directions dans lesquelles on observe une frange sombre.

4°) Calculer le contraste des franges en fonction de R ; R étant le pouvoir de réflexion de chacune des surfaces internes de séparation verre–air ou air–verre.

DEUXIEME PARTIE :

En réalité le rayon incident SI_1 donne naissance à une infinité de rayons transmis J_1T_1, J_2T_2, J_3T_3 ... comme le montre la figure suivante :



1°) Montrer que l'approximation de la première partie est valable si R est faible.

2°) Calculer l'amplitude de la vibration transmise résultante dans la direction i.

3°) Montrer que l'intensité I (dans la direction i) est donnée par :

$$I = \frac{I_M}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

φ : désignant la différence de phase entre deux rayons transmis consécutifs dans la

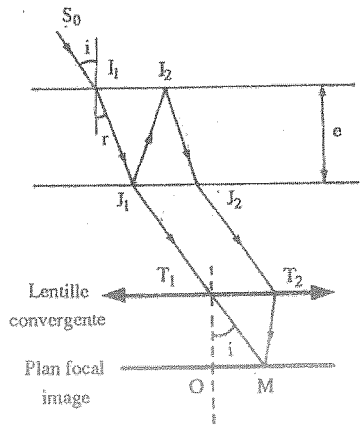
direction i.
I_M : étant l'intensité maximale.

4°) Calculer la demi-largeur $\Delta\varphi$ d'un anneau brillant. Discuter la finesse des anneaux en fonction de R.

Casablanca II, PC2, Mai 1987.

PREMIERE PARTIE :

1°) Les deux rayons transmis sont parallèles, ils vont donner lieu à un phénomène d'interférence localisé à l'infini. Pour ramener le lieu de localisation à une distance finie, on interpose une lentille convergente sur le trajet des deux rayons transmis. Ainsi, ils vont interférer au plan focal image de la lentille comme l'indique la figure ci-contre :



M : point ou interfèrent les deux rayons

2°) La différence de marche entre les deux rayons est :

$$\delta = 2ne\cos r$$

Aux points J_1 et I_2 les deux réflexions sont de même nature, il n'y a donc pas de déphasage supplémentaire. i et r sont petits, on peut donc écrire :

$$\delta = 2ne\left(1 - \frac{r^2}{2}\right), \quad \text{avec } i = nr$$

D'où

$$\boxed{\delta = 2ne - \frac{ei^2}{n}} \qquad [1]$$

◆ **Nature des franges :**

Pour une inclinaison donnée (i = cte) la différence de marche est constante. Par symétrie on remarque que le lieu du point M pour i = cte est un anneau centré sur O. Nous obtenons donc, des franges qu'on nomme : anneaux d'égale inclinaison.

3°) Direction des franges brillantes :

Cela s'obtient pour $\delta = k\lambda$ avec $k \in N$

d'après [1]

$$2ne - \frac{ei^2}{n} = k\lambda$$

Soit

$$\boxed{i_k = \sqrt{2n^2 - \frac{n\lambda k}{e}}}$$

Direction des franges sombres :

Nous avons des franges sombres pour $\delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$; $k \in \mathbb{N}$

Soit $$\boxed{i_k = \sqrt{2n^2 - (2k + 1)\frac{\lambda n}{2e}}}$$

4°) Le facteur de contraste des franges est donné par : $C = \frac{I_M - I_m}{I_M}$, avec I_M l'intensité maximale et I_m l'intensité minimale, transmises par la lame.
Pour cela, on a besoin de calculer l'intensité I transmise par le système.
Soit a l'amplitude du rayon S_0. Appelons t et r les cœfficients de transmission et de réflexion en amplitudes.

Le rayon J_1T_1 a pour amplitude $s_1 = at^2 = aT$

Le rayon J_2T_2 a pour amplitude $s_2 = atrrte^{-j\varphi} = aTRe^{-j\varphi}$

avec $T = t^2$; $R = r^2$. T et R sont les pouvoirs de transmission et de réflexion, φ est le déphasage entre les deux rayons J_1T_1 , J_2T_2.

L'amplitude résultante est $s = s_1 + s_2$, qui correspond à l'intensité $I = |s|^2$

Après le calcul et en remarquant que $e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\cos\varphi$

on trouve $I = a^2T^2(1 + R^2 + 2R\cos\varphi)$

On a donc $I_M = a^2T^2(1 + R^2 + 2R)$; $I_m = a^2T^2(1 + R^2 - 2R)$

On déduit : $$\boxed{C = \frac{4R}{(1 + R)^2}}$$

DEUXIEME PARTIE :

1°) Dans la première partie, nous avons négligé les rayons transmis : T_3, T_4 ... cela est légitime si R est faible, en effet les amplitudes correspondant aux différents rayons sont : aT ; aTR ; aTR^2 ; ...
On voit donc que si R est faible, on peut se restreindre aux deux premiers rayons T_1 , T_2.

2°) Amplitude résultante :

Rayons	T_1	T_2	T_3	T_4	...	T_n
Amplitudes	at^2	at^2r^2	at^2r^4	at^2r^6	...	$at^2r^{2(n-1)}$
Déphasages	0	φ	2φ	3φ	...	$(n-1)\varphi$

Les amplitudes complexes sont : $s_1 = aT$; $s_2 = aTRe^{-j\varphi}$; $s_3 = aTR^2e^{-2j\varphi}$; ... ; $s_n = aTR^{(n-1)}e^{-j(n-1)\varphi}$

L'amplitude constante est : $s = aT(1 + Re^{-j\varphi} + R^2e^{-2j\varphi} + ... + R^{n-1}e^{-j(n-1)\varphi})$

Lorsqu'on fait tendre n vers l'infini : $$\boxed{s = \frac{aT}{1 - Re^{-j\varphi}}}$$ avec $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$

3°) **Intensité résultante :** $I = |s|^2 = \dfrac{a^2T^2}{(1 - Re^{-j\varphi})(1 - Re^{j\varphi})}$

$$I = \frac{a^2T^2}{1 + R^2 - R(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})} = \frac{a^2T^2}{1 - 2R\cos\varphi + R^2}$$

En prenant $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$:

$$\boxed{I = \frac{I_M}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}} \qquad [2]$$

ou $I_M = \dfrac{a^2T^2}{(1-R)^2}$, qui s'obtient pour $\varphi = 2k\pi$

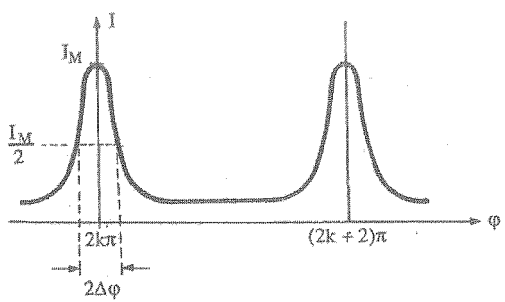
4°) Au voisinage d'un maximum, nous avons $\varphi = 2k\pi \pm \Delta\varphi$ avec $\Delta\varphi$ faible. La demi-largeur $\Delta\varphi$ est définie pour $I = I_M/2$, en remplaçant dans [2], on obtient :

$$\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{(1-R)^2}{4R}$$

Soit $\boxed{\Delta\varphi = \dfrac{1-R}{\sqrt{R}}}$

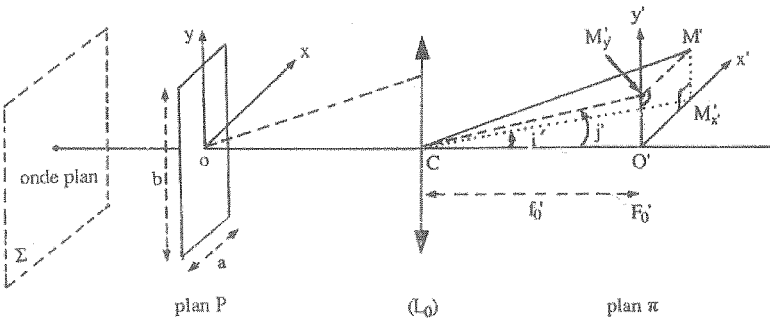
Le cœfficient de finesse est donné par : $F = \dfrac{2\pi}{2\Delta\varphi}$, soit $F = \dfrac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$. Les anneaux sont fins si $\Delta\varphi << \pi$, donc si F est "grand". Or $0 < R < 1$, par conséquent nous avons une grande finesse des anneaux si R s'approche de l'unité.

Remarque : Le cœfficient de finesse mesure la proportion entre la largeur d'un anneau brillant et la distance entre deux anneaux brillants successifs ; cette comparaison est faite en termes de phase. Les anneaux sont d'autant plus fins que $\Delta\varphi$ est faible par rapport à π. La figure donne l'intensité transmise en fonction du déphasage.



23 – Diffraction à l'infini.

Une pupille rectangulaire est éclairée par une onde plane monochromatique ($\lambda = 0{,}5\ \mu m$).



L'observation est faite dans le plan π (repère x'O'y') confondu avec le plan focal image d'une lentille de projection L_0 ($f_0' = 13$ cm).

L'éclairement en un point M' de π s'écrit :

$$I(i', j') = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin i'}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin i'}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin j'}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin j'}{\lambda}} \right)^2$$

1°) Exprimer le rapport I/I_0 en fonction des variables x' et y' au voisinage de O' (angles i' et j' petits)

2°) Exprimer le rapport I/I_0 pour les points de l'axe des x'.
Donner graphiquement l'allure de ce rapport. Préciser la position des minima (zones noires).

3°) Calculer les dimensions du rectangle dans lequel s'inscrit la tache centrale de diffraction ($a = 0{,}5$mm ; $b = 2$ mm ; $f_0' = 13$ cm)

Extrait, Marrakech, MP2, PC2, Mai 1985.

1°) Expression de I/I_0 :

Lorsque i' et j' sont petits, nous avons : $\sin i' \approx i'$; $\sin j' \approx j'$

Or dans π on a : $x' = i'f_0'$; $y' = j'f_0'$.

En remplaçant dans l'expression de $I(i', j')$:

$$I/I_0 = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a x'}{\lambda f_0'}\right)}{\left(\frac{\pi a x'}{\lambda f_0'}\right)} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b y'}{\lambda f_0'}\right)}{\left(\frac{\pi b y'}{\lambda f_0'}\right)} \right)^2 \qquad [1]$$

2°) Rapport I/I_0 pour $M' \in O'x'$:

Si $M' \in O'x'$, alors $y' = 0$, par conséquent le deuxième terme de [1] est égal à l'unité.

D'où $$I/I_0 = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a x'}{\lambda f_0'}\right)}{\left(\frac{\pi a x'}{\lambda f_0'}\right)} \right)^2$$

◆ **Allure de I/I_0 :**

I/I_0 est positif, il est donc minimal pour $\frac{\pi a x'}{\lambda f_0'} = k\pi \quad k \in Z^*$

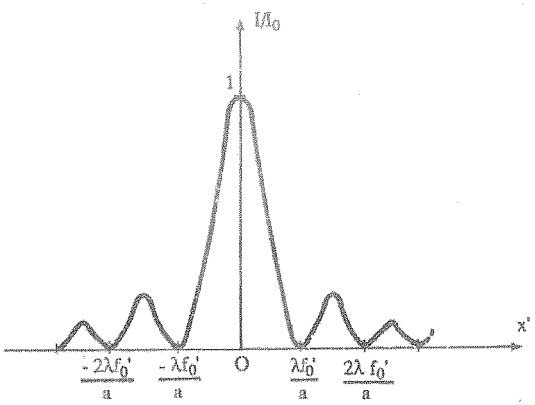
Soit : $x'_k = k \cdot \frac{\lambda f_0'}{a}$

Pour $k = 0$, $I/I_0 = 1$

L'allure est donnée par la courbe ci-contre :

La courbe admet un maximum principal centré sur O', celui-ci est deux fois plus large que les maximums secondaires.

Le maximum principal a pour dimension $\frac{2\lambda f_0'}{a}$.



3°) Si on prend un point de $O'y'$ nous aurons la même chose qu'en 2°) en changeant a en b et x' en y' :

Sur l'écran π la tache centrale est un rectangle de dimension $\frac{2\lambda f_0'}{a}$ suivant $O'x'$ et $\frac{2\lambda f_0'}{b}$ suivant $O'y'$.

$$\Delta X' = \frac{2\lambda f_0'}{a} \quad ; \quad \Delta Y' = \frac{2\lambda f_0'}{b}$$

A.N : $\lambda = 0{,}5\ \mu m$; $a = 0{,}5$ mm , $b = 2$ mm ; $f_0' = 13$ cm ;

$$\Delta X' = 0{,}26 \text{ mm} \quad ; \quad \Delta Y' = 0{,}065 \text{ mm}$$

Rappel de Cours

Electromagnétisme

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfez en toute confiance

ch I. - Electrostatique des milieux diélectriques.
ch II. - Magnétostatique des milieux aimantés.
ch III. - Courants alternatifs (en régime lentement variable).
ch IV. - Propagation des ondes électromagnétiques.

I - ELECTROSTATIQUE DES MILIEUX DIÉLECTRIQUES

◆ Un milieu diélectrique est un isolant électrique. Ce milieu peut être :

- **Non polaire** : Sous l'action d'un champ $\vec{E}$, chaque molécule se comporte comme un dipôle car les barycentres des charges positives et négatives de la molécule ne coïncident plus comme c'est le cas en l'absence de champ.

- **Polaire** : Même en l'absence de champ, chaque molécule se comporte comme un dipôle et l'action d'un champ $\vec{E}$ est essentiellement d'orienter ce dipôle.

D'un point de vue macroscopique, chaque élément de volume $d\tau$ du milieu diélectrique est porteur d'un moment électrique dipolaire $\vec{dp}$ donné par :

$$\boxed{\vec{dp} = \vec{P}\, d\tau} \qquad \left(\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)$$

où $\vec{P}$ est le **vecteur polarisation** (moment dipolaire par unité de volume).

Cette polarisation conduit à l'apparition de densités de charges, appelées **charges de polarisation** ou **charges liées**. Ces charges sont bien réelles. Pour calculer le champ et le potentiel électrique à l'extérieur ainsi qu'à l'intérieur du diélectrique, on peut supprimer le diélectrique et placer au même endroit (dans le vide donc) les densités de charges liées suivantes :

- En volume : $\boxed{\rho_{lié} = -\operatorname{div} \vec{P}}$

- En surface : $\boxed{\sigma_{lié} = \vec{P} \cdot \vec{n}}$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au diélectrique dirigé vers l'extérieur.

◆ On définit le vecteur **excitation** (ou déplacement ou induction) **électrique** $\vec{D}$ par : $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

On a : $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho_{lié} + \rho_{libre}}{\varepsilon_0}$ et $\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{libre}}$

Si S est une surface fermée enfermant un volume V, la dernière relation permet d'écrire, en utilisant le théorème de la divergence :

$$\boxed{\iint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \rho_{libre}\, d\tau = Q_{libre}}$$

C'est le théorème de Gauss généralisé, qui est plus intéressant à utiliser avec $\vec{D}$ qu'avec $\vec{E}$ car les seules charges qui interviennent alors sont les charges libres.

◆ Au passage entre deux milieux différents 1 et 2, les conditions suivantes de continuité sont respectées :

- Si E_T est la composante tangentielle de $\vec{E}$: $\boxed{E_{T_2} = E_{T_1}}$

- Si D_N est la composante normale de $\vec{D}$ sur l'axe dirigé de 1 vers 2 :

$$\boxed{D_{N_2} - D_{N_1} = \sigma_{libre}}$$

◆ Dans les milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes (L.H.I.), dits encore parfaits ou de classe A, on a :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}}$$

où ε et $\boxed{\chi = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}}$ sont respectivement la **permittivité** et la **susceptibilité** électrique du milieu. Notons que dans un tel milieu, la densité volumique de charges liées $\rho_{lié}$ est nulle si et seulement si la densité volumique de charges libres ρ_{libre} est nulle. On a en effet : $\rho_{lié} = \left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\rho_{libre} = -\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\chi\,\rho_{libre}$.

◆ L'énergie potentielle contenue dans un volume V de diélectrique où règnent les champs $\vec{E}$ et $\vec{D}$ est : $\boxed{W = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}.\vec{D}\,d\tau}$

ce qui correspond à une **densité volumique d'énergie** : $\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{E}.\vec{D}}$

Si le milieu est L.H.I., $w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

La force agissant sur un volume V de diélectrique est :

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{dF} = \iiint_V (\vec{P}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}\,d\tau$$

Si le milieu est L.H.I., $\vec{F} = \iiint_V \chi\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right)d\tau$.

◆ Nous avons parlé jusqu'à présent du champ électrique moyen total régnant dans le diélectrique ; on l'appelle **champ macroscopique**. Ce champ est différent du

champ dit **champ local** $\vec{E}_{loc}$, qui est le champ agissant en moyenne sur une molécule. En général, on a : $\boxed{\vec{E}_{loc} = \vec{E} + b\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}}$

où b est une constante qui dépend du diélectrique en question. (Par exemple, $b = \frac{1}{3}$ pour un diélectrique isotrope).

◆ On définit la **polarisabilité** α par (N est le nombre de molécules par unité de volume) : $\boxed{\vec{P} = N\alpha\vec{E}_{loc}}$

Plusieurs contributions sont à noter :

◆ **Polarisation électronique ou ionique** : $\alpha_e = \frac{3M}{\mathcal{N}\rho}\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}$

C'est l'équation de Clausius-Mossotti, où $\mathcal{N}$ est le nombre d'Avogadro, M et ρ sont respectivement la masse molaire et volumique. Cette contribution ne dépend pas de la température.

et/ou

◆ **Polarisation par orientation** : Elle dépend de la température (équation de Langevin). Dans le cas des champs faibles et/ou des températures élevées ($pE/kT << 1$, où $p = P/N$ est le moment dipolaire moléculaire), on a : $\alpha_{or} = \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT}$

II - MAGNETOSTATIQUE DES MILIEUX AIMANTÉS

◆ Un milieu magnétique est caractérisé par son moment magnétique par unité de volume, ou **aimantation** $\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}\tau}}$, où $\mathrm{d}\vec{m}$ est le moment magnétique élémentaire porté par l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$. Cette aimantation a son origine microscopique dans les boucles de courant atomique. On distingue les milieux :

- **diamagnétiques**, où les moments élémentaires sont induits par le champ magnétique appliqué. L'aimantation est en sens inverse du champ.

- **paramagnétiques**, où les moments élémentaires existent en l'absence de champ appliqué mais sont orientés au hasard, ce qui donne une aimantation nulle, tout comme pour les diamagnétiques. Mais ici, l'effet d'un champ est surtout de provoquer l'alignement des moments selon la direction du champ ; cette aimantation par **orientation** est contrariée par l'agitation thermique.

- **ferromagnétiques**, où l'aimantation, qui est importante dans ces milieux, subsiste même quand on supprime le champ l'ayant créée.

◆ D'un point de vue macroscopique, une aimantation $\vec{M}$ produit un champ magnétique qui peut se calculer, en un point situé aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur du milieu, en remplaçant ce dernier par les distributions de **courants** dits **d'aimantation** suivantes :

- Densité surfacique : $\boxed{\vec{k_a} = \vec{M} \wedge \vec{n}}$

- Densité volumique : $\boxed{\vec{j_a} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{M}}$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur.

◆ On définit le vecteur **excitation** (ou induction) **magnétique** $\vec{H}$ par :

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$$

On a $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 (\vec{j_{cond}} + \vec{j_a})$ et $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} = \vec{j_{cond}}}$

où $\vec{j_{cond}}$ est le vecteur densité de courants de conduction. Si Γ est un contour fermé définissant une surface S, la dernière relation permet d'écrire, en utilisant le théorème de Stokes :

$$\int_\Gamma \vec{H}.\vec{dl} = \iint_S \vec{j_a}.\vec{dS} = I_{cond}$$

C'est le théorème d'Ampère généralisé, qui est donc plus intéressant à utiliser avec $\vec{H}$ qu'avec le champ magnétique $\vec{B}$ puisque les seuls courants qui interviennent sont les courants de conduction.

◆ Au passage entre deux milieux différents 1 et 2, les conditions suivantes de continuité sont respectées :

- Si B_N est la composante normale de $\vec{B}$: $\boxed{B_{N_2} = B_{N_1}}$

- Si H_T est la composante normale de $\vec{H}$: $\boxed{\vec{H}_{T_2} - \vec{H}_{T_1} = \vec{k} \wedge \vec{n}}$,

où $\vec{k}$ est la densité de courants libres à la surface et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de 1 vers 2.

◆ Dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes (L.H.I.), on a :

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{M} = \chi \vec{H}}$$

où μ et $\boxed{\chi = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}}$ sont respectivement la **perméabilité** et la **susceptibilité** magnétique du milieu. χ est négatif pour les dimagnétiques et positif pour les paramagnétiques ; dans les deux cas, $\chi << 1$.

Dans les ferromagnétiques, les relations entre $\vec{B}$, $\vec{M}$ et $\vec{H}$ ne sont généralement plus linéaires ; cependant, on peut définir une perméabilité et une susceptibilité dépendant de H. Les valeurs de χ pour un ferromagnétique sont généralement très élevées : $\chi = 1000$.

Dans un milieu L.H.I., notons que les courants d'aimantation sont nuls si et seulement si les courants de conduction le sont. On a en effet :

$$\vec{j_a} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{j_{cond}}.$$

◆ L'énergie potentielle magnétique contenue dans un volume V où règnent les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ est : $\boxed{W = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{B}.\vec{H}\, d\tau}$

Ce qui correspond à une densité volumique d'énergie magnétique : $\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{B}.\vec{H}}$

Si le milieu est L.H.I., $w = \frac{1}{2\mu} B^2$.

La force agissant sur un volume V de milieu magnétique est :

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{dF} = \iiint (\vec{M}.\overrightarrow{\text{grad}})\, \vec{B}\, d\tau.$$

Si le milieu est L.H.I., $\vec{F} = \iiint_V \chi \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) d\tau$

◆ Au niveau microscopique, on ne différencie le champ local et le champ extérieur que dans le cas des ferro-magnétiques. Pour les dia et para-magnétiques, le champ local, le champ macroscopique et le champ extérieur sont pratiquement confondus.

Le diamagnétisme est un effet indépendant de la température, alors que le paramagnétisme en dépend. Un milieu ferromagnétique est caractérisé par une température T_C dite de Curie. Pour $T < T_C$, il s'établit un ordre magnétique grâce à l'interaction entre moments ; pour $T > T_C$, l'agitation thermique détruit cet ordre et le milieu se comporte comme un paramagnétique.

◆ **Circuits magnétiques** : Ce sont des circuits où "circule" le flux magnétique. C'est possible grâce aux matériaux ferro-magnétiques qui **canalisent** les lignes de champ. Dans un tel circuit, on a l'équivalent de la loi d'Ohm d'électrocinétique :

$$\int \vec{H}.\vec{dl} = R.\phi$$

où $\int \vec{H}.\vec{dl}$ est la **force magnétomotrice**, ϕ le flux magnétique et R la **réluctance** donnée par $R = \int \frac{dl}{\mu S}$, où dl est le déplacement élémentaire le long du circuit, S la section droite du circuit, et μ la perméabilité magnétique du milieu.

III - COURANTS ALTERNATIFS (en régime lentement variable)

Lorsque les champs électromagnétiques dépendent du temps, il faut avant tout tenir compte du phénomène de **l'induction électromagnétique** : si le flux magnétique ϕ à travers un circuit varie avec le temps, il apparaît une force électromotrice et un courant induits dans ce circuit.

Le deuxième phénomène dont il faudrait tenir compte est le phénomène de **propagation** : les effets d'une charge où d'un courant électriques en un point donné ne sont pas instantanés ; il y a propagation des champs à partir de la source. Cependant, **en régime lentement variable, on néglige la propagation.**

◆ Courant alternatif sinusoïdal :

On applique aux bornes d'un circuit comportant des résistances, des bobines (éventuellement couplées par une inductance mutuelle) et des condensateurs, une tension alternative sinusoïdale de la forme :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

U_0 est **l'amplitude** du signal ; φ sa **phase à l'origine** ; ω est la **pulsation** du signal ; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, où T (resp.f) est la **période** (resp. la **fréquence**) du signal.

◆ Intensité et tension efficaces

La puissance moyenne dissipée dans une résistance R parcourue par un courant sinusoïdal d'amplitude I_0 est : $P = \frac{RI_0^2}{2} = RI^2_{eff}$

I_{eff} est l'intensité efficace : $\boxed{I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$

On définit de même la tension efficace : $\boxed{U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}}$

◆ Lois d'Ohm en courant alternatif. Impédance. Déphasage

Toutes les lois d'Ohm s'appliquent aux variables **instantanées.**

Impédance Z d'une portion de circuit : $\boxed{Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}}$

Elle généralise la notion de résistance.

Déphasage φ : Si $i(t) = I_0 \cos\omega t$ et $u(t) = U_0$ à $\cos(\omega t + \varphi)$, on dit que φ est le **déphasage** entre la tension et le courant. Par exemple, la tension est en avance sur le courant pour $\varphi > 0$.

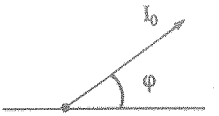
Exemples :

Résistance :	$u(t) = Ri(t)$;	$Z = R$;	$\varphi = 0$
Bobine :	$u(t) = L\frac{di}{dt}$;	$Z = L\omega$;	$\varphi = +\frac{\pi}{2}$
Condensateur :	$u(t) = \frac{1}{c}\int i\,dt$;	$Z = \frac{1}{c\omega}$;	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Dans l'étude des circuits, on peut utiliser pour les calculs, à part la méthode algébrique, la méthode vectorielle de Fresnel ou la méthode symbolique des nombres complexes.

Méthode de Fresnel :

On associe à toute grandeur sinusoïdale $I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ un vecteur tournant, de norme I_0. Pour ω fixé, il suffit de représenter les vecteurs à $t = 0$. L'angle que fait alors ce vecteur avec l'axe des origines est φ.



Méthode des nombres complexes :

C'est essentiellement celle-ci qu'on utilise en régime sinusoïdal. On associe à toute fonction $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ un nombre complexe $\underline{I} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ ($j^2 = -1$). A tout instant, $i(t) = Re(\underline{I})$.

On définit l'impédance complexe : $\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{I}}}$

L'impédance réelle est : $\boxed{Z = |\underline{Z}| = \frac{U_0}{I_0}}$

Le déphasage que présente la tension sur le courant est : $\boxed{\varphi = arg\ \underline{Z}}$

Exemples :

Résistance :	$\underline{Z} = R$;	d'où	$Z = R$	et $\varphi = 0$)
Bobine :	$\underline{Z} = jL\omega$;	d'où	$Z = L\omega$	et $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

Condensateur : $\overline{Z} = \frac{1}{jc\omega}$; d'où $Z = \frac{1}{c\omega}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

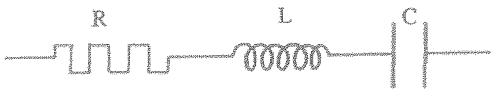
Eléments en série : Les impédances complexes s'ajoutent :

$$\overline{Z} = \sum_i \overline{Z}_i$$

Eléments en parallèles : Les admittances complexes $\left(\frac{1}{\overline{Z}}\right)$ s'ajoutent :

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \sum_i \frac{1}{\overline{Z}_i}$$

Exemple du circuit RLC série :



L'impédance Z : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2}$

Le déphasage φ de u sur i : $\varphi = \arctan\frac{L\omega - \frac{1}{c\omega}}{R}$

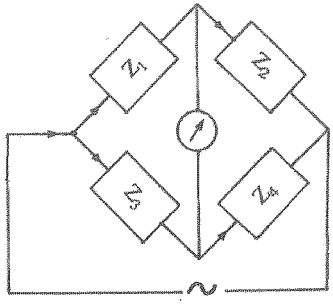
Fréquence de résonance f_0 : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

A la fréquence de résonance, Z est minimum et $Z = R$. Le courant passe par un maximum. Le déphasage est alors nul.

Pont de Wheatstone :

Le pont est équilibré pour :

$$\overline{Z_1}\,\overline{Z_3} = \overline{Z_2}\,\overline{Z_4}$$



Puissance :

Soit une portion de circuit parcourue par un courant $i(t) = I_0 \cos\omega t$ et alimenté par

une tension $u(t) = U_0 \cos(wt + \Phi)$

La puissance complexe est : $\boxed{\overline{P} = \frac{\overline{u}\,\overline{I}^*}{2}}$ (* : complexe conjugué)

La puissance moyenne réelle est : $\boxed{P = Re(\overline{P}) = \frac{U_0 I_0}{2} \cos\varphi = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos\varphi}$

Une bobine ou un condensateur ne consomment pas d'énergie en moyenne : si R est la résistance totale du circuit, la puissance peut encore s'écrire : $\boxed{P = R I^2_{eff}}$

IV - PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Les équations de Maxwell qui contiennent tout l'électromagnétisme, relient entre eux les champs électriques $\vec{E}$ et magnétiques $\vec{B}$, les excitations électriques $\vec{D}$ et magnétiques $\vec{H}$, la densité volumique de charges libres ρ_l et la densité de courants libres (de conduction) $\vec{j_l}$. Ces (quatre) équations sont :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1)\ \text{div}\,\vec{D} = \rho_l & (3)\ \text{div}\,\vec{B} = 0 \\ (2)\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (4)\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = \vec{j_l} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}}$$

(1) traduit le théorème de Gauss généralisé ; (2) traduit les phénomènes d'induction ; (3) traduit la conservation du flux magnétique ; (4) traduit le théorème d'Ampère généralisé.

◆ Les équations de Maxwell conduisent aux équations de propagation des champs $\vec{E}$ ou $\vec{B}$, qui s'écrivent, en l'absence de sources ($\rho_l = 0$ et $j_l = 0$) et dans un milieu L.H.I. :

$$\boxed{\Delta \vec{X} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0} \qquad (\vec{X} = \vec{E} \text{ ou } \vec{B})$$

La vitesse de propagation c de la phase dans le milieu est : $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}}$

◆ Plaçons-nous dans le vide. Une famille importante de solutions de l'équation de propagation est composée des **ondes planes**, de direction $\vec{e_z}$ par exemple, qui sont

des ondes dont les vecteurs champs associés ne dépendent, outre du temps, que d'une seule variable spatiale, z dans l'exemple.

De telles ondes sont **transverses**, c'est-à-dire que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont respectivement orthogonaux à la direction de propagation. De plus, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux entre eux. On a la relation : $\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{e_Z} \wedge \vec{E}}$

c'est-à-dire que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e_Z})$ est direct.

◆ Les ondes planes **monochromatiques** sont caractérisées par une pulsation ω, un vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{u} = \frac{\omega}{c}\,\vec{u}$ où λ est la longueur d'onde, c la vitesse de propagation et $\vec{u}$ la direction de propagation.

On utilise souvent dans ce cas la notation complexe. Pour une grandeur $\vec{X} = \vec{X_0}\, e^{j(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$, on a : $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = -j\omega\vec{X}$ $\qquad \overrightarrow{rot\,X} = j\,\vec{k} \wedge \vec{X}$

$\mathrm{div}\vec{X} = j\,\vec{k}.\vec{X}$ $\qquad \vec{\Delta X} = -k^2\vec{X}$

◆ Au passage entre deux milieux différents 1 et 2, les conditions de continuité à la surface sont les mêmes que dans les cas des phénomènes indépendants du temps :

$$\boxed{\begin{aligned} &E_{T_2} - E_{T_1} = 0 \\ &D_{N_2} - D_{N_1} = \sigma_l \\ &B_{N_2} - B_{N_1} = 0 \\ &\vec{H}_{N_2} - \vec{H}_{N_1} = \vec{k_l} \wedge \vec{n} \end{aligned}}$$

où σ_l est la densité superficielle de charges libres portée par la surface de séparation, $\vec{k_l}$ la densité de courants libres à la surface et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de 1 vers 2.

◆ On définit le **vecteur de Poynting** $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ qui est le vecteur densité de courant d'énergie. La conservation de l'énergie s'écrit, si $w = \frac{1}{2}\,\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$ est la densité d'énergie : $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{P} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0}$

ou encore, si S est une surface fermée limitant un volume V :

$$\boxed{\iint_S \vec{P}.\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V w\,\mathrm{d}\tau}$$

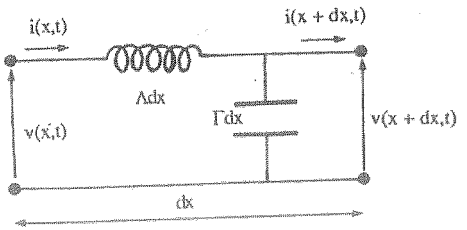
c'est-à-dire que le flux sortant de $\vec{P}$ à travers toute surface fermée est égal à la diminution par unité de temps de l'énergie contenue dans le volume limité par S.

APPLICATIONS :

◆ Lignes de transmission :

Ce sont 2 conducteurs allongés dans une direction donnée, Ox par exemple, le cas le plus usuel étant celui de la ligne coaxiale, où les deux conducteurs sont deux cylindres de même axe séparés par un diélectrique. On montre que chaque élément de longueur dx de la ligne est équivalent au réseau suivant (On suppose la ligne sans pertes, c'est-à-dire que les conducteurs sont supposés parfaits, ainsi que le diélectrique les séparant) :

La bobine a une inductance égale à $A\,dx$, où A est l'inductance par unité de longueur de la ligne ; le condensateur a une capacité égale à $\Gamma\,dx$ où Γ est la capacité par unité de longueur de la ligne. Les lois de Kirchhoff conduisent à :



$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - A\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - A\Gamma\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

Ce sont des équations de **propagation**, à la vitesse $c = \dfrac{1}{\sqrt{A\Gamma}}$

Dans le cas usuel, le régime est sinuoïdal ($\overline{v} = \overline{V}\,e^{j\omega t}$ et $\overline{i} = \overline{I}\,e^{j\omega t}$).

On définit l'impédance caractéristique Z_c de la ligne : $\boxed{Z_c = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}} = \sqrt{\dfrac{A}{\Gamma}}}$

Pour une ligne coaxiale de rayon R_1 et R_2 : $Z_c = \dfrac{\sqrt{A\Gamma}}{2\pi\varepsilon}\,Ln\,R_1/R_2$

◆ **Guides d'ondes** : c'est un matériau métallique creux, allongé dans une direction donnée, Oz par exemple. La propagation d'une onde électromagnétique dans cette enceinte, selon la direction du guide, est possible par suite des réflexions sur les parois. Différents types d'ondes peuvent se propager :

- Les **ondes transverses électriques**, où le champ électrique est orthogonal à la direction de propagation.

- Les **ondes transverses magnétiques**, où c'est le champ magnétique qui est transverse.

- Les **ondes transverses électriques et magnétiques**, où les champs électriques et magnétiques sont transverses tous les deux. Pour toutes ces ondes, les conditions aux limites imposent que (les conducteurs sont supposés parfaits) :

  - Composante tangentielle $E_T = 0$

  - Composante normale $H_N = 0$

Exercices et Problèmes

Electromagnétisme

I - ELECTROSTATIQUE DES MILIEUX DIELECTRIQUES

1 – Cylindre polarisé uniformément selon son axe.

Un barreau diélectrique a la forme d'un cylindre de longueur L dont la section circulaire a pour rayon R. Il est polarisé uniformément, parallèlement à son axe.

1) Montrer que le dispositif est équivalent à deux disques distants de L chargés uniformément avec des densités que l'on calculera.

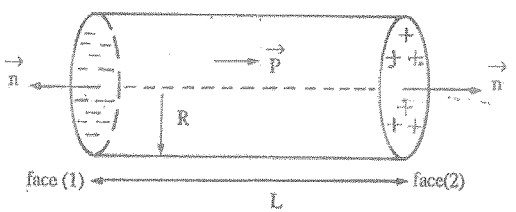
2) Déterminer le champ électrique résultant en un point de l'axe du barreau.

Extrait, Fès, MP2, Janvier 86.

1°) Le diélectrique polarisé uniformément est équivalent à une distribution de charges :

– volumique, de densité :

$$\boxed{\rho_{lié} = -\,div\,\vec{P} = 0}$$



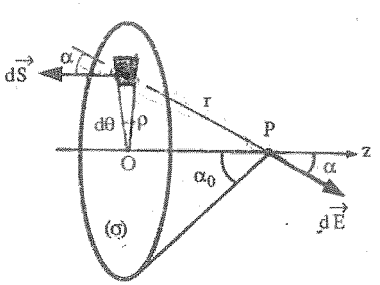
– Surfacique, de densité :

$\sigma_{lié} = \vec{P} \cdot \vec{n}$, où $\vec{n}$ est la normale sortante. Ainsi, pour toute la surface latérale, $\sigma_{lié} = 0$.

Pour la face 1(voir figure), on a: $\boxed{\sigma_{lié}\,(1) = -P}$ et pour la face 2, on a: $\boxed{\sigma_{lié}\,(2) = +P}$

Le dispositif est donc équivalent à 2 disques de rayons R, distants de L, chargés avec une densité uniforme superficielle valant $\sigma(1) = -P$ pour l'un et $\sigma(2) = +P$ pour l'autre.

2°) Calculons d'abord le champ électrique créé par un disque chargé uniformément avec une densité superficielle σ en un point P de son axe. Par raison de symétrie, le champ est porté par l'axe du disque : $\vec{E} = E\,\vec{e_Z}$ (voir figure). Chaque surface élémentaire dS contribue au champ par :



$$\vec{dE} \cdot \vec{e_Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sigma\,dS}{r^2}\,\cos\alpha = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega$$

d'où : $E = \int \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\,\Omega$

où dΩ (resp. Ω) est l'angle solide sous lequel on voit à partir de P la surface dS (resp. le disque entier).

On a $\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$. En effet :

$$\Omega = \iint_{\text{disque}} \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \iint_{\text{disque}} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{r^2}\cos\alpha = \int_{\text{disque}} \frac{2\pi\rho\, d\rho\cos\alpha}{r^2}$$

Or $tg\,\alpha = \frac{\rho}{z}$ $(OP = z)$, donc $\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{d\rho}{z}$. Comme $\cos\alpha = \frac{z}{r}$, il vient :

$$\Omega = \int_0^{\alpha_0} 2\pi \sin\alpha\, d\alpha = 2\pi(1 - \cos\alpha).$$

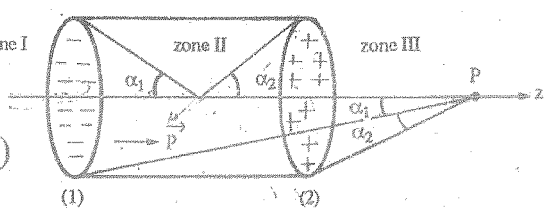
Appliquons ce résultat à ce problème; il faut ajouter les 2 champs créés par les disques 1 et 2 :

◆ Dans la zone I, on a :

$$E_I = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left(-2\pi(1 - \cos\alpha_2) + 2\pi(1 - \cos\alpha_1)\right)$$

$$= \frac{P}{2\varepsilon_0}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right) \text{ zone I}$$

$$\vec{E_I} = -\frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)$$



◆ Zone II :

$$E_{II} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left(-2\pi(1 - \cos\alpha_2) - 2\pi(1 - \cos\alpha_1)\right)$$

$$= -\frac{P}{2\varepsilon_0}(2 - \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

$$\vec{E_{II}} = -\frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}(2 - \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

◆ Zone III :

$$E_{III} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\pi(1 - \cos\alpha_2) - 2\pi(1 - \cos\alpha_1)\right)$$

$$= \frac{P}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

$$\vec{P_{III}} = \frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant, en remarquant que :

$$|\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2| = \begin{cases} \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 & \text{dans la zone III} \\ \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 & \text{dans la zone I} \end{cases}$$

A l'intérieur	$\vec{E} = -\dfrac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}(2 - \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$
A l'extérieur	$\vec{P} = \dfrac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}\lvert\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\rvert$

Pour un point sur l'axe on constate donc que le champ $\vec{E}$ créé par la polarisation $\vec{P}$ est de même sens que $\vec{P}$ à l'extérieur du barreau mais de sens contraire à l'intérieur.

2 – Cube aimanté uniformément.

Dans un champ électrique uniforme, de module E_0, on place un cube diélectrique de centre M et de côté a. Le diélectrique est linéaire, homogène et isotrope. Sa susceptibilité diélectrique est χ Les arêtes du cube sont parallèles ou perpendiculaires au vecteur polarisation $\vec{P}$ qu'on suppose uniforme.

1°) Calculer le champ créé en M par les charges de polarisation en fonction de ε_0 et P. ε_0 étant la permittivité du vide.

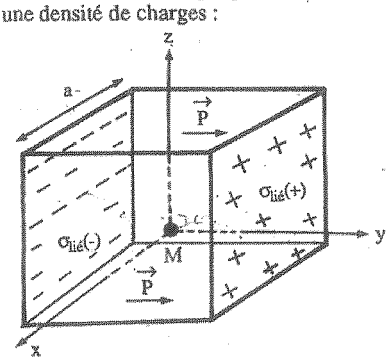
On donne $\Omega = \frac{2}{3}\pi$ l'angle solide sous lequel du centre M on voit l'une des faces du cube.

2°) Déterminer le champ total $\vec{E}_{tot}$ dans le diélectrique, le vecteur excitation $\vec{D}$ et le vecteur polarisation $\vec{P}$ en fonction de ε_0, χ et $\vec{E}_0$.

3°) En déduire le moment électrique du cube polarisé, ainsi que le potentiel électrique à l'intérieur du diélectrique.

(Extrait, Fès, PC2, Janvier 87)

1°) Le cube diélectrique polarisé uniformément (suivant My par exemple) est équivalent à une densité de charges :



– Volumique, de densité :

$$\rho_{lié} = -div\,\vec{P} = 0\ (\vec{P}\ \text{uniforme})$$

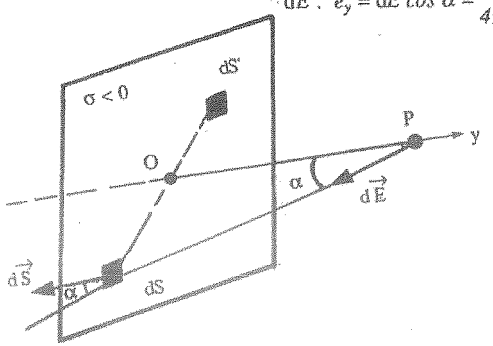
– surfacique, de densité :

$\sigma_{lié} = \vec{P}.\vec{n}$, où $\vec{n}$ est la normale extérieure dirigée vers l'extérieur.

Ainsi , la face située en $y = -\frac{a}{2}$ porte la densité de charges liées $\sigma_{lié}(-) = -P$, alors qu'à la face $y = +\frac{a}{2}$ correspond la densité $\sigma_{lié}(+) = +P$. Les autres faces ne sont pas chargées ; le champ dû à la polarisation est donc le champ que créent dans le vide les deux distributions $\sigma_{lié}(-)$ et $\sigma_{lié}(+)$.

Or le champ créé par une plaque rectangulaire en un point de son axe est, par symétrie, sur cet axe (considérer les deux éléments dS et dS' symétriques par rapport à O ; voir figure). La contribution au champ E de dS est :

$$\vec{dE} \cdot \vec{e_y} = dE \cos\alpha = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dS \cos\alpha}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$



et le champ total est :

$$E = \int dE \cos\alpha = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \Omega$$

où $d\Omega$ (resp.Ω) est l'angle solide sous lequel de P on voit dS (resp. la plaque entière).

Cas $P = M$: si le point P vient sur le centre M du cube, $\Omega = \frac{2\pi}{3}$. (En effet, du centre M on voit les 6 faces, qui sont toutes équivalentes géométriquement, sous un angle solide de 4π et donc chaque face sous un angle solide $\Omega = \frac{1}{6} \cdot 4\pi = \frac{2\pi}{3}$) .

En M, il y a deux contributions : $\vec{E} = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi}{3} \vec{e_y} + \frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi}{3} (-\vec{e_y})$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{P}{3\varepsilon_0} \vec{e_y} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

2°) Dans le diélectrique, le champ total $\vec{E_{tot}}$ est la somme du champ extérieur $\vec{E_0}$ et du champ $\vec{E}$ dû à la polarisation.

$$\vec{E_{tot}} = \vec{E_0} + \vec{E}$$

Au centre M, on a : $\vec{E_{tot}}(M) = \vec{E_0} - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

Le vecteur excitation est : $\vec{D}(M) = \varepsilon \vec{E_{tot}}(M)$

La polarisation est : $\vec{P}(M) = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E_{tot}}(M) = \varepsilon_0 \chi\ \vec{E_{tot}}$

Nous avons supposé la polarisation uniforme dans le diélectrique, ce qui entraîne, pour rester cohérent, qu'on suppose que le champ $\vec{E}$ dû à la polarisation est sensiblement uniforme dans le diélectrique et vaut donc sa valeur au centre M : $\vec{E} = \dfrac{-\vec{P}}{3\varepsilon_0}$. On a :

$$\varepsilon = \varepsilon_0\,(1 + \chi)$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E_0} - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\,\vec{P}.$$

Soit, avec $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$:

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1 + \chi/3}\,\vec{E_0}}$$

et

$$\boxed{\vec{E_{tot}} = \frac{1}{1 + \chi/3}\,\vec{E_0}}$$

et

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \frac{1 + \chi}{1 + \chi/3}\,\vec{E_0}}$$

3°) Le moment électrique dipolaire $\vec{p}$ du cube est donné par : $\vec{p} = \vec{P} \cdot a^3$

Soit

$$\boxed{\vec{p} = a^3 \varepsilon_0 \frac{\chi}{1 + \chi/3}\,\vec{E_0}}$$

Le champ $\vec{E_{tot}}$ à l'intérieur du cube étant considéré comme constant, on a immédiatement le potentiel à l'intérieur :

$$\boxed{V = -\,\vec{E_{tot}} \cdot \vec{r} = -\frac{1}{1 + \chi/3}\,\vec{E_0} \cdot \vec{r}}$$

3 – Sphère diélectrique soumise à un champ électrique.

Considérons une sphère diélectrique, caractérisée par la constante diélectrique relative ε_r, placée dans le vide ou règne un champ uniforme $\vec{E_0}$. On admettra que la sphère ainsi polarisée est équivalente à un dipôle électrique dont le moment $\vec{M}$ est de même direction que $\vec{E_0}$.

A l'intérieur de la sphère le champ électrique résultant $\vec{E_i}$ est parallèle à $\vec{E_0}$.

1°) Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ à l'extérieur de la sphère.

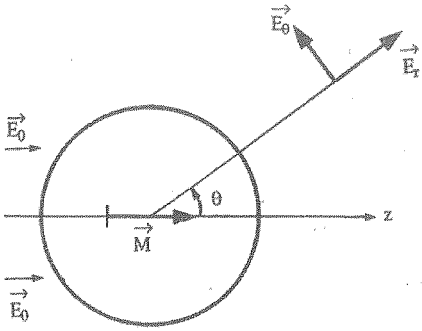
2°) Exprimer $\vec{E_i}$ et $\vec{M}$ en fonction de $\vec{E}$.

3°) Montrer que le champ dépolarisant $\vec{E_p}$ est égal à $-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$ ($\vec{P}$ étant le vecteur de polarisation).

Extrait, Fès, MP2, PC2, Janvier 85.

En général, on traite le problème de la sphère uniformément polarisée sous l'action d'un champ extérieur $\vec{E_0}$ en calculant le champ intérieur en fonction de la polarisation (soit par le calcul direct du potentiel, soit par intégration de l'équation de Laplace, soit encore par la méthode des couches de glissement).

On en déduit la polarisation en fonction de $\vec{E_0}$, puis les champs intérieurs et extérieurs en fonction de $\vec{E_0}$. Ici, on aborde le problème autrement : on suppose que le champ intérieur est uniforme et parallèle à $\vec{E_0}$, et que pour l'extérieur, la sphère se comporte comme un dipôle dont le moment est de même direction que $\vec{E_0}$. Il suffit alors d'écrire les conditions de continuité pour pouvoir tout calculer.



1°) A l'extérieur de la sphère celle-ci se comporte comme un dipôle de moment $\vec{M}$, le champ en un point P ($\vec{OP} = \vec{r}$) vaut donc :

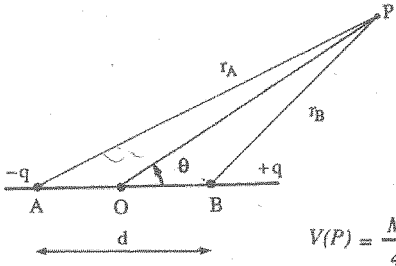
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\vec{M}.\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5}$$

dont les coordonnées polaires sont :

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3M\cos\theta - M\cos\theta) = \dfrac{2M\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ \dfrac{0 + M\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{M\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{cases}$$

En effet, deux charges $+q$ et $-q$ séparées par une distance d créent au point P ($OP >> d$) le

potentiel :



$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 r_A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_A - r_B}{r_A . r_B}$$

Or $r_A - r_B \approx d \cos\theta$

$r_A . r_B \approx r^2$

On définit le moment $\vec{M} = q\,\vec{AB} = q\,\vec{d}$, d'où :

$$V(P) = \frac{M \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{M}\,\vec{r}}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3} \qquad (\vec{r} = \vec{OP}).$$

On en déduit le champ $\vec{E}$:

– soit vectoriellement :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{M} . \vec{r}}{r^3} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} \overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{M} . \vec{r}) + \vec{M} . \vec{r}\ \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3}\right) \right)$$

Or $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{M} . \vec{r}) = \vec{M}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$, d'où

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\vec{M} . \vec{r})\,\vec{r} - r^2 \vec{M}}{r^5}$$

– Soit à partir des coordonnées :

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{M \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\dfrac{1}{r^2}\right) = \dfrac{2M \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = -\dfrac{M}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} (\cos\theta) = \dfrac{M \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{cases}$$

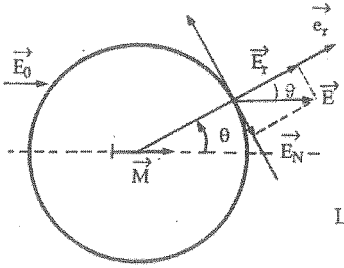
On retrouve bien les mêmes résultats.

Le champ total à l'extérieur est donc : $\boxed{\vec{E}_{ext} = \vec{E} + \vec{E}_0}$

2°) A la surface de la sphère ($r = R$), écrivons les conditions de continuité (avec des notations évidentes) :

$$\begin{cases} E_{int,T} = E_{ext,T} \\ \varepsilon\, E_{int,N} = \varepsilon_0\, E_{ext,T} \end{cases}$$

Soit :



$$\begin{cases} -E_{int}\sin\theta = -E_0\sin\theta + \dfrac{M\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \\ \varepsilon E_{int}\cos\theta = \varepsilon_0 E_0\cos\theta + \dfrac{2\varepsilon_0 M\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \end{cases}$$

La première équation donne : $\dfrac{M}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = E_0 - E_{int}$,

ce qui, avec la seconde équation, donne : $E_{int} = \dfrac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0$.

On en déduit

$$\boxed{\vec{E}_{int} = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\vec{E}_0}$$

$$\boxed{\vec{M} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\vec{E}_0}$$

3°) A l'intérieur, on peut écrire $\vec{E_{int}}$ sous la forme :

$$\vec{E_{int}} = \vec{E_0} + \vec{E_p}$$

où $\vec{E_p}$ est le champ dû aux charges de polarisation (charges liées).

On a : $$\vec{E_p} = \vec{E_{int}} - \vec{E_0} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\vec{E_0},$$

soit, en fonction de $\vec{M}$: $$\vec{E_p} = -\frac{\vec{M}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Or la polarisation $\vec{P}$, qui est le moment par unité de volume, est donnée par :

$$\vec{P} = \frac{\vec{M}}{4/3\ \pi R^3},$$

D'où

$$\boxed{\vec{E_p} = -\frac{\vec{M}}{3\varepsilon_0}}$$

C'est un champ dirigé au sens inverse de $\vec{M}$, et par suite, de $\vec{E_0}$. Il s'oppose donc à la polarisation et est appelé pour cette raison champ dépolarisant.

4 – Sphère diélectrique portant une densité de charges libres.

Une sphère diélectrique (classe A, ε_r) de rayon R contient une densité uniforme de charges libres $\rho_L > 0$:

1°) Déterminer les distributions de charges liées (préciser leurs signes).

2°) Montrer que le potentiel au centre vaut :

$$\frac{2\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r} \quad \frac{\rho_L R^2}{3\varepsilon_0}$$

Extrait, Tétouan, PC2, Janvier 86.

1°) Le diélectrique étant de classe *A* (c.à.d L.H.I.), les vecteurs champ électrique $\vec{E}$, excitation électrique $\vec{D}$ et polarisation $\vec{P}$ sont reliés par :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \text{et} \qquad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E}.$$

Nous allons, par le théorème de Gauss, déterminer $\vec{D}$ et $\vec{E}$, puis $\vec{P}$. On en déduira la distribution de charges liées.

Le théorème de Gauss, appliqué à $\vec{D}$ pour ne tenir compte que des charges libres, donne (*S* est la surface de Gauss : sphère de rayon r ; le vecteur $\vec{D}$ est par symétrie radial et de module fonction de *r* seulement) :

$$\iint_S \vec{D}\,.\,\vec{dS} = \iint_S D\ dS = D(r) \iint_S dS = 4\pi r^2 D(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L & \text{si } r \le R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_L & \text{si } r \ge R \end{cases}$$

On en déduit, pour la région qui nous intéresse ($r \le R$).

$$\vec{E(r)} = \frac{\vec{D(r)}}{\varepsilon} = \frac{\vec{r}\,\rho_L}{3\varepsilon} \qquad \text{pour } r \le R.$$

La polarisation $\vec{P}$ est alors : $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E} = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon}\,\rho_L\,\vec{r}$

Cette polarisation provoque l'apparition de charges liées :

– en surface, avec une densité $\sigma_{lié} = P(\vec{R})\,.\,\vec{n} = P(\vec{R})\,.\,\vec{e_r} = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon}\,\rho_L R.$

– en volume, avec une densité $\rho_{lié} = -\,div\,\vec{P}$.

Le calcul de div $\vec{P}$ est immédiat, et $\rho_{lié} = \dfrac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon}\,\rho_L$.

Les densités de charges liées sont donc :

$$\boxed{\sigma_{lié} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon} R\, \rho_L \quad ; \quad \rho_{lié} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\, \rho_L}$$

Remarque : Dans un milieu L.H.I., il est connu que les densités de charges volumiques libres ρ_L et liées $\rho_{lié}$ sont reliées :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \text{div}\, \vec{D} = \varepsilon\, \text{div}\, \vec{E}$$

Or $\quad \text{div}\, \vec{D} = \rho_L \quad \text{et} \quad \text{div}\, \vec{E} = \dfrac{\rho_L + \rho_{lié}}{\varepsilon_0}$.

D'où $\quad \rho_{lié} = (\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\, \rho_L$.

Le résultat que nous avons trouvé dans ce problème est en effet général. Ainsi, on a pu déterminer $\sigma_{lié}$ sans passer par le calcul explicite de $\vec{D}$ et $\vec{E}$. On peut d'ailleurs calculer aussi $\sigma_{lié}$: on sait que la charge totale liée est nulle. Comme par raison de symétrie, la densité $\sigma_{lié}$ ne dépend ni de θ ni de φ, elle est constante. Par ailleurs, $\sigma_{lié}$ est aussi constant ; d'où :

$$\rho_{lié}\, \frac{4}{3}\pi R^3 + \sigma_{lié}\, 4\pi R^2 = 0$$

soit $\quad \sigma_{lié} = -\dfrac{\rho R}{3} = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon} R\rho$

On retrouve bien les mêmes résultats, sans avoir à calculer $\vec{D}$ et $\vec{E}$.

2°) **Potentiel au centre** : il y a plusieurs façons de faire ce calcul. On peut déterminer en tout point le champ électrique $\vec{E}$ par le théorème de Gauss (soit à partir des densités ρ_L et $\rho_{lié}$ (voir question 1°/), soit plus simplement à partir de $\vec{D}$ et des seules charges libres) et en déduire le potentiel V en tout point. Cependant, comme on cherche uniquement le potentiel au centre O, il est plus rapide de faire les calculs directement : un élément de volume $d\tau$ situé à une distance r de O contribue au potentiel par :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\rho_{lié} + \rho_L)}{r} d\tau.$$

alors qu'un élément de surface dS contribue par : $\quad dV = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\sigma_{lié}}{R}\, dS$.

Le potentiel au centre est donc :

$$V(0) = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon} \int_{sphère} \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon} \rho_L \int_{surface\ sphère} dS$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon} \int_{sphère} \frac{4\pi r^2\, dr}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon} \rho_L\, 4\pi R^2.$$

Le calcul donne :

$$\boxed{V(0) = \frac{\rho_L R^2}{3\varepsilon_0} \frac{2\varepsilon + \varepsilon_0}{2\varepsilon} = \frac{\rho_L R^2}{3\varepsilon_0} \frac{2\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r}}$$

Remarque : Cette méthode serait évidemment lourde pour le calcul du potentiel en un point quelconque de la sphère. Il vaudrait mieux alors faire le calcul à partir du champ $\vec{E}$.

5 – Condensateur plan.

1°) Etudier la continuité des composantes normales de l'induction électrique $\vec{D}$ et des composantes tangentielles du champ électrique $\vec{E}$ à la traversée de la surface de séparation de deux milieux. La surface porte une densité surfacique de charges libres σ_{libre}. Que deviennent ces relations si $\sigma_{libre} = 0$?

2°) Deux lames conductrices identiques parallèles et de grandes dimensions, sont distantes de a. Les faces en regard portent des charges libres de densités $+\sigma_{libre}$ et $-\sigma_{libre}$. L'ensemble des lames est isolé.

a) L'espace compris entre les lames est rempli d'un diélectrique homogène et isotrope de constante diélectrique ε (figure 1). Donner les expressions de $\vec{D}$ dans les régions I et II. En déduire celles de $\vec{E}$. Exprimer le potentiel V entre A et B en fonction de σ_{libre}, a et ε.

b) On remplit l'espace compris entre les lames de deux diélectriques homogènes et isotropes de constantes diélectriques ε_1 et ε_2 (figure 2).

Donner les expressions de $\vec{D}$ et de $\vec{E}$ dans chaque région. Calculer la densité de charges résultante à la surface qui sépare les deux diélectriques et montrer qu'elle peut être positive ou négative suivant les valeurs de ε_1 et ε_2. Donner l'expression de la d.d.p V en fonction de σ_{libre}, a, b, ε_1 et ε_2.

c) On remplit l'espace compris entre les lames par une série de couches diélectriques homogènes et isotropes (figure 3). Chaque couche, d'épaisseur dx, est repérée par sa position x par rapport à la lame supérieure et sa constante diélectrique est $\varepsilon(x) = cx + d$.
On pose $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $\varepsilon(a) = \varepsilon$.

Montrer que D(x) est indépendant de x et donner sa valeur. Exprimer E(x) et représenter ses variations en fonction de x pour $x \in [0, a]$.

Calculer la d.d.p V en fonction de σ_{libre}, a, ε_0 et ε. En déduire que si $\varepsilon_0 = \varepsilon$ le potentiel est celui donné par la question a).
On donne $Ln(1 + u) = u - u^2/2 + \ldots$ si $u << 1$.

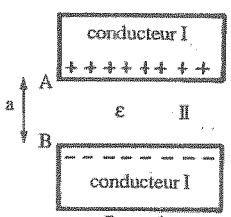


figure 1

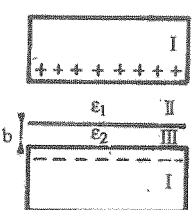


figure 2

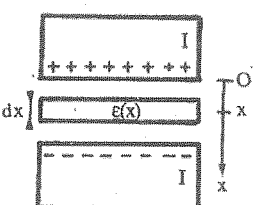


figure 3

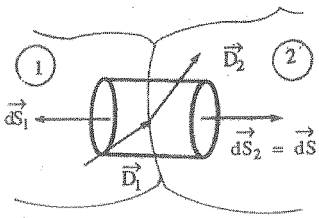
Extrait, Agadir, Mai 87.

1°) Passage d'un milieu 1 vers un milieu 2 :

Démontrons les deux relations : $\begin{cases} D_{N2} - D_{N1} = \sigma_{libre} \\ E_{T2} - E_{T1} = 0 \end{cases}$

◆ **Composante normale de $\vec{D}$:**

Soit un cylindre plat de section dS et de hauteur dh << d$S^{1/2}$ situé à la surface de séparation (voir figure), surface qui porte une densité superficielle de charges libres σ_{libre}.



Le flux sortant du cylindre se réduit à :

$\vec{D}_1 . \vec{dS}_1 + \vec{D}_2 . \vec{dS}_2 = (-\vec{D}_1 + \vec{D}_2).\vec{dS}$,

puisque le flux sortant à travers la surface latérale est négligeable (on peut faire dh aussi petit qu'on veut).

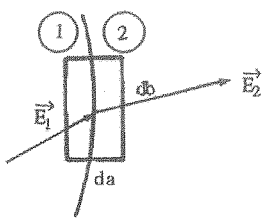
Par ailleurs, le théorème de Gauss appliqué à $\vec{D}$ indique que ce flux vaut $d\Phi = \sigma_{libre}\, dS$, d'où : $(-D_{N1} + D_{N2})\, dS = \sigma_{libre}\, dS$

Soit $\boxed{D_{N2} - D_{N1} = \sigma_{libre}}$

où D_N est la composante normale sur l'axe dirigé du milieu 1 vers milieu 2.

◆ **Composante tangentielle de $\vec{E}$**

Toujours sur cette surface de séparation, soit maintenant le rectangle infinitésimal de côtés da et db, respectivement $\perp$ et // à la surface S, avec da << db.



Soit E_T la composante tangentielle de $\vec{E}$, la circulation de $\vec{E}$ le long de ce chemin est :

$(E_{T2} - E_{T1})\, db$,

puisque la contribution des côtés da est négligeable (da aussi petit qu'on veut).

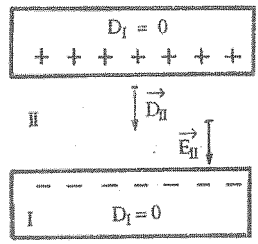
Par ailleurs le théorème de Stokes indique que cette circulation de $\vec{E}$ n'est autre que le flux de $\overrightarrow{rot}\vec{E}$ à travers la surface du rectangle dadb.

Ainsi, en négligeant les quantités où intervient da, il vient : $\boxed{E_{T2} - E_{T1} = 0}$

– Souvent, on a à étudier le cas $\sigma_{libre} = 0$. Alors : $\begin{cases} D_{N2} = D_{N1} \\ E_{T2} = E_{T1} \end{cases}$.

Dans toute la suite, $\vec{u}$ est le vecteur unitaire normal aux plaques dirigé de A vers B (du + vers −).

2°) a – Le vecteur $\vec{D}$ est normal aux plaques, dirigé de A vers B (voir figure). Le théorème de Gauss montre que D est uniforme et vaut $D_{II} = \sigma_{libre}$ entre les deux plaques (région II). Par ailleurs, $D_I = 0$ (intérieur d'un conducteur en équilibre).



$$\boxed{\vec{D_I} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{D_{II}} = \sigma_{libre}\,\vec{u}}$$

On en déduit le champ électrique (le diélectrique étant L.H.I. de permittivité ε) :

$$\boxed{\vec{E_I} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{E_{II}} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon}\vec{u}}$$

ainsi que le potentiel V : $\quad V = \int_-^+ dV = \int_+^- \vec{E}.\vec{dl} \longrightarrow \boxed{V = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon}\,a}$

b – On a deux couches de diélectrique. Le vecteur $\vec{D}$ est toujours normal aux plaques. Le théorème de Gauss donne :

$$\boxed{\vec{D_{II}} = \vec{D_{III}} = \sigma_{libre}\,\vec{u} \qquad (\text{et } \vec{D_I} = \vec{0})}$$

d'où

$$\boxed{\vec{E_I} = \vec{0} \; ; \quad \vec{E_{II}} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_1}\vec{u} \; ; \quad \vec{E_{III}} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_2}\vec{u}}$$

◆ **Densité de charges liées :**

On l'obtient à partir de la polarisation $\vec{P}$. Dans chaque région, on a $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E}$, d'où :

$$\vec{P_{II}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\,\sigma_{libre}\,\vec{u} \; ; \quad \vec{P_{III}} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\,\sigma_{libre}\,\vec{u}\,.$$

– Densité volumique $\rho_{lié}$: la polarisation étant uniforme dans chaque région : $\boxed{\rho_{lié} = 0}$

– Densité superficielle $\sigma_{lié}$: on peut considérer que la polarisation du milieu II est à l'origine de l'apparition de charges liées à la surface de séparation II/III, avec une densité :

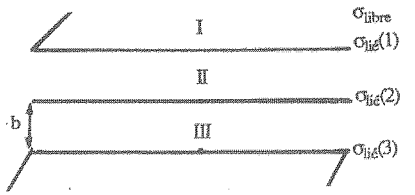
$$\sigma_{lié}(\text{II/III}) = \vec{P_{II}} \,.\, \vec{u}\,.$$

De même, avec des notations évidentes, $\sigma_{lié}(\text{III/II}) = \vec{P_{III}} \,.\, (-\vec{u})$. D'où une densité totale de charges liées sur cette surface :

$$\sigma_{lié} = (\vec{P_{II}} - \vec{P_{III}}) \,.\, \vec{u} = P_{II} - P_{III} = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\sigma_{libre}$$

$$\sigma_{lié} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\varepsilon_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\ \sigma_{libre} = \left(\frac{1}{\varepsilon_{r_2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r_1}}\right)\sigma_{libre}$$

où les ε_r sont les permittivités relatives. Ainsi, le signe de $\sigma_{lié}$ est celui de $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$.



Remarque : Sur les surfaces II/I et III/I apparaît des densités de charges liées données par :

$$\sigma_{lié}(III/I) = \vec{P}_{II} \cdot (-\vec{u}) = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\ \sigma_{libre} \quad ; \quad \sigma_{lié}(III/I) = \vec{P}_{III} \cdot (\vec{u}) = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon 1}\ \sigma_{libre}$$

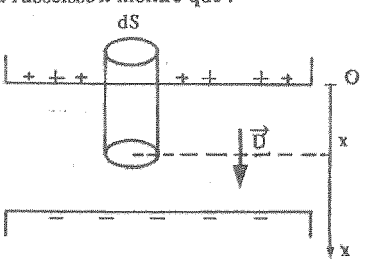
Evidemment, la somme de toutes ces charges liées est nulle, comme il est facile de le vérifier.

◆ *d.d.p.V* : Elle est donnée par la circulation de $\vec{E}$.

$$V = \int_-^+ dV = \int_+^- \vec{E} \cdot \vec{dl} = E_{II}(a-b) + E_{III} \cdot b$$

$$V = \sigma_{lié} \cdot \left(\frac{a-b}{\varepsilon_1} + \frac{b}{\varepsilon_0}\right)$$

c) La géométrie du problème montre que $\vec{D}$ est normal aux plaques. Le théorème de Gauss appliqué à un cylindre d'axe normal aux plaques, avec une base dans le conducteur et l'autre à l'abscisse x montre que :



$D(x)\,dS = \sigma_{libre} \cdot dS$, d'où

$$\vec{D(x)} = \vec{D} = \sigma_{libre}\,\vec{u}$$

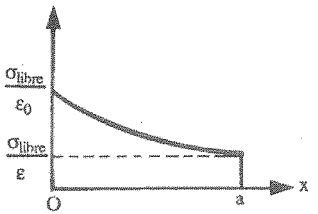
et $\vec{E(x)} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon(x)}$.

Or $\varepsilon(x) = cx + b = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{a} \cdot x + \varepsilon_0$

D'où

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma_{libre}}{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{a} \cdot x + \varepsilon_0} \vec{u} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq a$$

Les variations de $E(x)$ sont portées sur la figure ci-contre.



◆ ***d.d.p.V*:**

On a

$$V = \int_{-}^{+} dV = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot \vec{dx} = \int_{0}^{a} \vec{E} \cdot \vec{dx} = \int_{0}^{a} E(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{a} \frac{\sigma_{libre}}{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{a} \cdot x + \varepsilon_0} dx \quad \Rightarrow$$

$$V = \sigma_{libre} \frac{a}{\varepsilon - \varepsilon_0} Ln\, \varepsilon/\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{libre} \cdot a}{\varepsilon - \varepsilon_0} Ln\, (1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0})$$

Retrouvons le cas de la question a) en faisant tendre ε_0 vers ε. Pour cela, développons le terme $Ln\, (1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}) \approx \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$

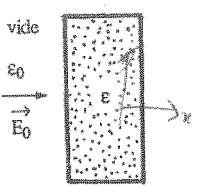
$$V \approx \sigma_{libre} \frac{a}{\varepsilon - \varepsilon_0} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{libre}\, a}{\varepsilon_0} .$$

On retrouve bien le résultat de a).

6 – Lame diélectrique (1).

Une lame diélectrique isotrope de permittivité ε est placée dans le vide et soumise à un champ électrique $\vec{E_0}$, ***normal à ses faces.***
On suppose :
a) Que l'épaisseur du diélectrique est petite par rapport à ses autres dimensions.

b) Que le champ $\vec{E}$ ***à l'intérieur du diélectrique est parallèle à*** $\vec{E_0}$.



c) Que la polarisation $\vec{P}$ est uniforme à l'intérieur du diélectrique.

1°) En écrivant les conditions de passage à travers les faces du diélectrique, calculer $\vec{E}$ en fonction de $\vec{E}_0$ et de $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

2°) En déduire l'expression de $\vec{P}$ dans le diélectrique ainsi que la densité de charges fictives de polarisation à la surface du diélectrique.

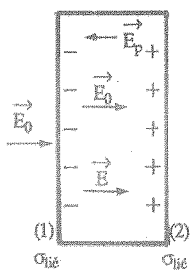
3°) Montrer que le champ $\vec{E}$ est la somme du champ $\vec{E}_0$ et d'un champ $\vec{E}_p$ dû aux charges de polarisation, que l'on calculera.

Extrait, Casa I, Mai 87.

1°) A la surface de séparation, il y a continuité de la composante normale du vecteur excitation électrique $\vec{D}$, noté D_N, puisque la lame n'est pas chargée ($\sigma_{libre} = 0$) :

$D_{N_0} = D_N$, (l'indice 0 est pour le vide).

Comme les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{E}_0$ se réduisent à leurs composantes normales, il en est de même pour les vecteurs $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ et $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$. La relation précédente permet d'écrire :



$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon E \quad \text{puis} \quad \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \varepsilon \vec{E}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{E}_0 = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}}$$

2°) Par définition, si $\vec{P}$ est la polarisation du diélectrique :

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, où $\vec{E}$ est le champ total dans le diélectrique (champ macroscopique). Par ailleurs $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, d'où

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E}_0}$$

3°) Le champ total $\vec{E}$ est la somme du champ $\vec{E}_0$ dû à l'extérieur et d'un champ $\vec{E}_p$ dû aux charges de polarisation.

$$\vec{E} = \vec{E_0} + \vec{E_p} = \vec{E_0}/\varepsilon_r \quad \Rightarrow \quad \vec{E_p} = \vec{E_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - 1\right) = \vec{E_0}\ \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}$$

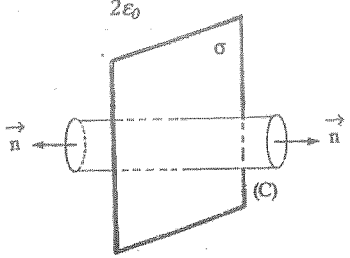
$$\boxed{\vec{E_p} = -\vec{P}/\varepsilon_0}\ .$$

Remarque : Nous pouvons calculer directement ce champ. La lame polarisée est équivalente à une distribution de charges avec une densité volumique $\rho_{lié} = -div\ \vec{P} = 0$, ($\vec{P}$ est uniforme), et une densité superficielle $\sigma = \vec{P}.\vec{n}$ où $\vec{n}$ est la normale au diélectrique sortante. On a :

face (1) : $$\sigma_1 = -P = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} E_0$$

face (2) : $$\sigma_2 = +P = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} E_0\ .$$

Nous pouvons assimiler ces 2 distributions à 2 plans chargés uniformément avec des densités superficielles σ_1 et σ_2. Le champ créé par un tel plan est normal à ce plan, de norme $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$. En effet :



Calcul du champ $\vec{E}$ créé par un plan chargé avec une densité uniforme σ, par le théorème de Gauss :

$$\iint_{(C)} \vec{E}.\vec{dS} = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

A l'extérieur du diélectrique, le champ dû aux charges de polarisation est donc nul.

A l'intérieur, il est de sens opposé à $\vec{E_0}$ et a pour module :

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} E_0,$$

$$\boxed{\vec{E_p} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\vec{E_0} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}}$$

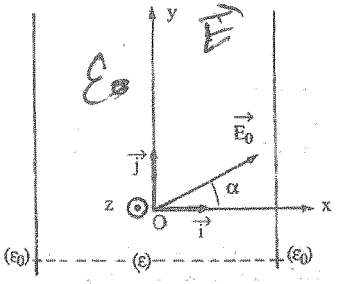
On retrouve le même résultat.

7 – Lame diélectrique (2).

Dans l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E_0}$ *tel que :*

$$\vec{E_0} = E_0 \cos\alpha\ \vec{i} + E_0 \sin\alpha\ \vec{j},$$

on introduit une lame diélectrique d'épaisseur 2a, de permittivité relative ε_r *et de susceptibilité diélectrique* χ.



Les faces de la lame considérées comme des plans infinis (L'un placé en $x = a$ *et l'autre en* $x = -a$*) sont parallèles au plan yOz (voir figure).*

– On supposera que les champs sont uniformes à l'intérieur.

– On rappelle que le champ électrique créé par un plan infini chargé en un point de l'espace a pour module $\left|\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right|$.

1°) Déterminer la répartition des charges fictives de polarisation (on admettra que la polarisation $\vec{P}$ *est uniforme dans la matière).*

2°) Calculer pour $-a < x < +a$, $x < -a$ *et* $x > a$:

a) Le champ dépolarisant $\vec{E_d}$ *dû aux charges de polarisation.*

b) Le champ total $\vec{E_{total}}$ *et le vecteur excitation électrique* $\vec{D}$.

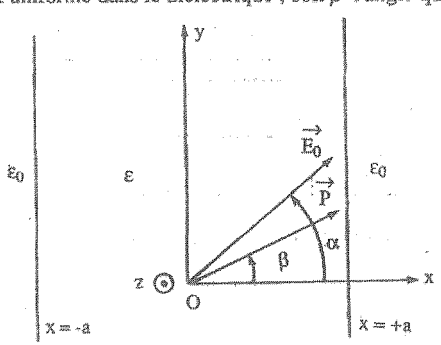
c) Le vecteur polarisation $\vec{P}$ *en fonction de* ε_0, ε_r, χ, α *et* E_0.

En déduire les expressions de $\vec{E_{total}}$ *et* $\vec{D}$ *en fonction de* E_0 *et des constantes.*

Extrait, Meknès, MP2 – PC2, Janvier 88.

1°) On suppose que la polarisation $\vec{P}$ est uniforme dans le diélectrique ; soit β l'angle que fait $\vec{P}$ avec la direction $\vec{i}$ (figure).

$$\vec{P} = P\cos\beta\ \vec{i} + P\sin\beta\ \vec{j}.$$



◆ **Densité de charges en volume :**

$$\rho_{lié} = -div\,\vec{P} = 0$$

◆ **Densité de charges en surface :**

$$\rho_{lié} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$, où $\vec{n}$ est la normale sortante.

– à la surface $x = -a$: $\vec{n} = -\vec{i}$ et $\sigma_{lié}(-a) = -P \cos\beta$

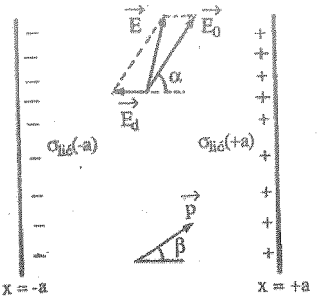
– à la surface $x = +a$: $\vec{n} = \vec{i}$ et $\sigma_{lié}(+a) = P \cos\beta$

P et β dépendent de E_0 et α d'une façon que nous allons déterminer.

2°) a) Ici, Le champ $\vec{E}_d$ dû aux charges de polarisation est le champ créé par 2 plans parallèles uniformément chargé . Chacun crée un champ normal aux plans et de module : $\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$ (Application immédiate du théorème de Gauss appliqué à un cylindre d'axe normal au plan). D'où :

$x < -a$ et $x > a$: $\vec{E}_d = \left(\frac{\sigma_{lié}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{lié}}{2\varepsilon_0}\right)\vec{i} = 0$

$-a < x < a$ $\vec{E}_i = \left(\frac{\sigma_{lié}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{lié}}{2\varepsilon_0}\right)(-\vec{i}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i} = -\frac{P\cos\beta}{\varepsilon_0}\vec{i}$



Le champ s'oppose à $\vec{E}_0$, ou du moins à la composante $\vec{E}_0 \cdot \vec{i}$, qui provoque la polarisation du diélectrique. On l'appelle **champ dépolarisant.**

b) A l'intérieur du diélectrique, le champ total $\vec{E}_{tot}$ est :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_d = \left(E_0 \cos\alpha - \frac{P}{\varepsilon_0}\cos\beta\right)\vec{i} + E_0 \sin\alpha\,\vec{j}$$

et

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}_{tot}$$

A l'extérieur : $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0$ et $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$

c) Par définition de la susceptibilité χ , on a :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_{tot} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P \cos\beta = \varepsilon_0 \chi \left(E_0 \cos\alpha - \dfrac{P \cos\beta}{\varepsilon_0}\right) \\ P \sin\beta = \varepsilon_0 \chi E_0 \sin\alpha. \end{cases}$$

D'où les composantes du vecteur $\vec{P}$:

$$\begin{cases} P \cos\beta = \varepsilon_0 E_0 \cos\alpha \dfrac{\chi}{1+\chi} \\ P \sin\beta = \chi \varepsilon_0 E_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$\varepsilon_r = 1 + \chi$

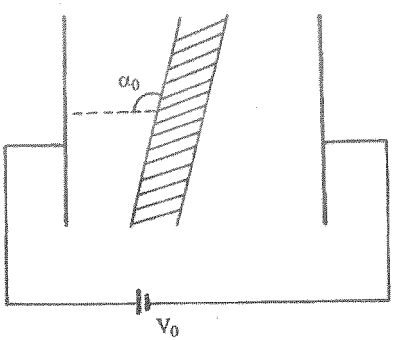
Ainsi:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi E_0 \left(\frac{\cos\alpha}{1+\chi}\vec{i} + \sin\alpha \vec{j}\right)$$

$$\vec{E} = E_0 \left(\frac{\cos\alpha}{1+\chi}\vec{i} + \sin\alpha \vec{j}\right)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E} = \varepsilon_0 E_0 (\cos\alpha \vec{i} + (1+\chi) \sin\alpha \vec{j})$$

8 - Lame diélectrique (3).



Une lame à faces parallèles d'un diélectrique d'épaisseur e et de permittivité ε est placée entre les armatures d'un condensateur plan. Le condensateur est chargé sous une tension constante V_0. Les armatures sont distantes l'une de l'autre de d (d>e). Les faces de la lame font un angle α_0 avec la normale aux armatures (figure).

1°) Donner l'expression du champ $\vec{E}$ à l'intérieur du diélectrique et dans la région vide entre la lame et les armatures en fonction de V_0, d, e et α_0.

2°) Calculer le rapport $\frac{C}{C_0}$, C étant la capacité du condensateur en présence de la lame et C_0 la capacité sans cette lame.

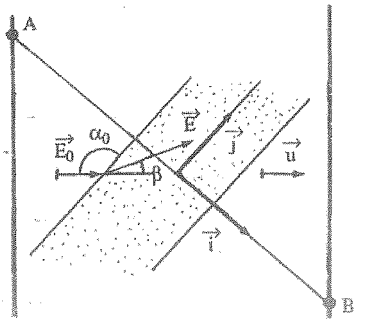
Extrait, Fès, PC2, 1985.

Remarque préliminaire : On suppose que les dimensions des plaques sont grandes devant l'épaisseur pour pouvoir négliger les effets de bord . Cela sous-entend que α_0 est loin

de 0 ou π, et les résultats qui suivent ne sont donc pas valables pour α_0 voisin de 0 ou π.

1°) Signalons une erreur courante qui consiste à considérer que le vecteur excitation $\vec{D}$ est normal aux armatures, puis d 'appliquer le théorème de Gauss pour en tirer $D = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0}$.

En effet, la lame étant penchée, il y a réfraction des lignes de champ de $\vec{D}$, ce que nous allons préciser.



Dans le vide, si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire normal aux plaques, et si σ_{libre} est la densité superficielle de charges libres portées par l'armature positive, le théorème de Coulomb donne :
($\vec{E_0}$ est le champ dans le vide) : $\vec{E_0} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0}\vec{u}$,
ce qui s'écrit aussi :

$$\vec{E_0} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0}(\sin\alpha_0\,\vec{i} + \cos\alpha_0\,\vec{j}).$$

Dans le diélectrique règne un champ $\vec{E}$ que nous écrivons, en toute généralité :

$$\vec{E} = E(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}).$$

Or, à la surface de séparation vide / diélectrique, on a :

– Continuité de la composante normale de $\vec{D}$: $\varepsilon_0 E_0 \sin\alpha_0 = \varepsilon E \cos\alpha$

– Continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$: $E_0 \cos\alpha_0 = E \sin\alpha$.

Par ailleurs, la d.d.p. V_0 est donnée par la circulation du champ électrique d'une plaque à l'autre. Choisissons le chemin AB pour calculer cette circulation où la droite AB est normale aux plaques (voir figure). La distance $AB = \frac{d}{\sin\alpha_0}$ se compose d'une longueur e dans le diélectrique et d'une longueur $(\frac{d}{\sin\alpha_0} - e)$ dans le vide . On a :

$$V_0 = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = (E_0\sin\alpha_0)(\frac{d}{\sin\alpha_0} - e) + (E\cos\beta)\,e$$

D'où

$$E_0 = \frac{V_0}{d - e\sin\alpha_0(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})} = \frac{V_0\sin\alpha_0}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}d - e\sin\alpha_0(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1)}$$

$$E\sin\beta = \frac{V_0\cos\alpha_0}{d - e\sin\alpha_0(1 - \varepsilon_0/\varepsilon)}.$$

D'où

$$\vec{E_0} = \frac{V_0}{d - e\,sin\alpha_0\,(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})}\,\vec{u} = \frac{V_0}{d - e\,sin\alpha_0\,(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})}\,(sin\alpha_0\,\vec{i} + cos\alpha_0\,\vec{j})$$

$$\vec{E} = \frac{V_0}{d - e\,sin\alpha_0\,(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}sin\alpha_0\,\vec{i} + cos\alpha_0\,\vec{j}\right)$$

2°) En l'absence de diélectrique $(e = 0)$, on a :

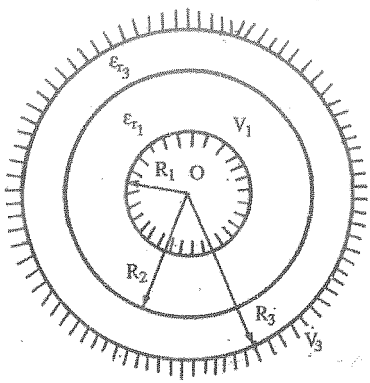
$$E_0 = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0/S}{\varepsilon_0} = \frac{V_0}{d} \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{Q_0}{V_0} = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

En présence de diélectrique : $E_0 = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0} = \frac{Q/S}{\varepsilon_0} = \frac{V_0}{d - e\,sin\,\alpha_0\,(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})}$

On en déduit que : $C = \frac{Q}{V_0} = \frac{C_0}{1 - \frac{e}{d}sin\,\alpha_0\,(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})}$

9 – Condensateur sphérique avec deux couches de diélectrique.

Un condensateur sphérique de charge Q est constitué de deux armatures sphériques de rayons R_1 et R_3 et qui sont portées respectivement aux potentiels V_1 et V_3. L'espace entre les armatures est rempli par deux diélectriques différents de permittivités relatives ε_{r1} et ε_{r3}.
(voir figure).



1°) Montrer que la capacité d'un tel condensateur est donnée par :

$$C = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r3}R_3} + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r3}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)}$$

(On rappelle que $C = \frac{Q}{V_1 - V_3}$ *)*

2°) Donner en fonction de C, le champ électrique $\vec{E}$ et le déplacement électrique $\vec{D}$ en un point M qui se trouve à la distance r du point O : $R_1 < r < R_3$

Extrait, Tétouan, MP2 – PC2, Janvier 88.

1°) Nous calculons d'abord l'excitation électrique $\vec{D}$ par le théorème de Gauss, d'où le champ électrique $\vec{E}$, dont la circulation nous donnera la différence de potentiel $V_1 - V_3$ en fonction de la charge Q. On en déduira la capacité C du condensateur.

L'armature interne porte, par exemple, la charge $+Q$ et l'armature externe porte donc la charge $-Q$. La symétrie du problème indique que $\vec{E}$ est radial et que son module ne dépend que de r, la distance au centre. Il en est de même pour $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

Le théorème de Gauss, appliqué à $\vec{D}$ pour ne tenir compte que des charges libres, donne pour la zone qui nous intéresse (S est la surface de Gauss, ici la sphère de rayon r).

$$\iint_S \vec{D}.\vec{dS} \quad \iint_S D(r)\ dS = D(r) \iint_S dS = 4\pi r^2 D(r) = Q \qquad \text{pour } r_1 < r < r_3$$

d'où $$\vec{D(r)} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e_r} \qquad \text{où } \vec{e_r} \text{ est le vecteur radial unitaire.}$$

D'où $$\vec{E(r)} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\vec{e_r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} r^2}\vec{e_r} & \text{pour } R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_3 r^2}\vec{e_r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_{r_3} r^2}\vec{e_r} & \text{pour } R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

Remarque : La composante tangentielle E_T est continue puisque $E_T = 0$ partout.
La composante normale E_N se confond avec E et on vérifie que $\varepsilon_1 E_{N_1} = \varepsilon_2 E_{N_2}$, puisqu'il n'y a pas de charges libres sur la sphère de séparation de rayon R_2.

La différence de potentiel $V_1 - V_3$ est donnée par la circulation de $\vec{E}$:

$$V_1 - V_3 = \int_3^1 dV = \int_1^3 \vec{E}.\vec{dl} = \int_1^3 E\,dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r_1}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r_3}}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\right]$$

d'où la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_3} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r_1} R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r_3} R_3} + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r_3}} - \frac{1}{\varepsilon_{r_2}}\right)}$$

2°) On peut re–écrire les vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{E}$ en fonction de C :

$$\vec{D} = \frac{C\,(V_1 - V_3)}{4\pi r^2}\,\vec{e_r} \qquad \text{pour } R_1 < r < R_3$$

$$\vec{E(r)} = \begin{cases} \dfrac{C(V_1 - V_3)}{4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r_1}\,r^2}\,\vec{e_r} & \text{pour } R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{C(V_1 - V_3)}{4\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_{r_3}\,r^2}\,\vec{e_r} & \text{pour } R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

Remarque : Connaissant $\vec{E}$, on peut calculer les polarisations $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ dans ces 2 diélectriques, et en déduire les densités de charges liées. Il est alors instructif de remplacer les 2 diélectriques par ces distributions de charges, et de vérifier que les champs électriques correspondants, ajoutés au champ dû aux charges libres, sont bien ceux que nous avons trouvés plus haut.

10 – Câble coaxial avec deux couches de diélectrique.

Un câble coaxial de section droite circulaire est constitué comme suit :

Le conducteur intérieur a pour rayon a. Il est entouré d'une première couche diélectrique de permittivité ε_1 et de rayon extérieur b.

Une autre couche diélectrique entoure la première, sa permittivité est ε_2 et son rayon exterieur est c.

Un blindage métallique cylindrique entoure l'ensemble, son rayon intérieur est c, on applique une différence de potentiel constante V entre le conducteur intérieur et le blindage qui est relié à la terre.

1°) Calculer le déplacement $\vec{D}$, le champ $\vec{E}$ et la polarisation $\vec{P}$ en chaque point dans les diélectriques.

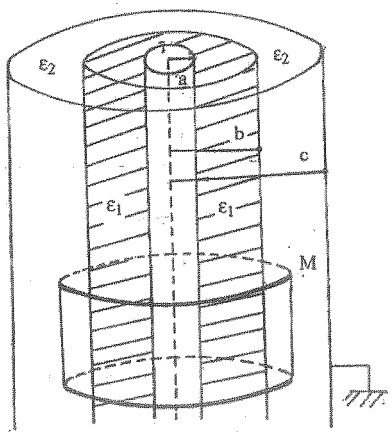
2°) Calculer la capacité C du câble par unité de longueur.

3°) Evaluer les densités des charges libres et de polarisation partout où elles existent.

4°) Calculer la densité d'énergie enmagasinée dans le diélectrique.

Extrait, Fès, PC2, Juin 88.

1°) Soit Q la charge par unité de longueur portée par le conducteur interne. Le blindage extérieur porte donc la charge $-Q$ sur sa face interne, et une charge nulle sur sa face externe puisqu'il est relié à la terre.



Par symétrie, les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{D}$ sont radiaux, avec un module qui ne dépend que de r. Appliquons le théorème de Gauss à $\vec{D}$ pour ne tenir compte que des charges libres, en considérant une surface de Gauss qui est le cylindre (C) de hauteur h, de même axe que le câble, passant par le point M où on veut calculer le champ.

Le flux sortant ϕ de $\vec{D}$ à travers (C) est :

$$\phi = \iint_{(C)} \vec{D}.\vec{dS} = 2\pi r h D = Qh \qquad \text{si } a < r < c \ (=0 \ \text{sinon})$$

d'où $$D(r) = \frac{Q}{2\pi r} \qquad \text{pour } a < r < c$$

et $$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi \varepsilon_1 r} & \text{pour } a < r < b \\ \dfrac{Q}{2\pi \varepsilon_2 r} & \text{pour } b < r < c. \end{cases}$$

Pour déterminer Q en fonction des données du problème, écrivons que la circulation de $\vec{E}$ d'un conducteur à l'autre doit donner la différence de potentiel V (en supposant $Q > 0$) :

$$V = \int_{ext}^{int} dV = \int_{int}^{ext} \vec{E}.\vec{dl} = \int_a^c E(r)\,dr$$

$$V = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 r} dr + \int_b^c \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 r} dr = \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1} Ln\frac{a}{b} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln\frac{c}{b}\right]$$

D'où $$Q = \frac{2\pi V}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln\frac{c}{b}}$$

et

$$D(r) = \frac{V}{r} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln \frac{c}{b}} \qquad \text{pour } a < r < c .$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{V}{\varepsilon_1 r} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln \frac{c}{b}} & \text{pour } a < r < b \\ \dfrac{V}{\varepsilon_2 r} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln \frac{c}{b}} & \text{pour } b < r < c \end{cases}$$

La polarisation est donnée par : $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$.

Ici, la polarisation sera radiale, avec un module P_1 dans le diélectrique 1 et P_2 dans le diélectrique 2 :

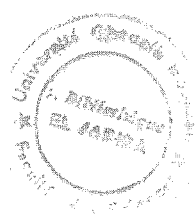
$$P_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln \frac{c}{b}} \qquad \text{pour } a < r < b$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2} \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln \frac{c}{b}} \qquad \text{pour } a < r < c$$

2°) Capacité C par unité de longueur : $C = \frac{Q}{V}$.

D'après ce qui précède, on a :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln \frac{c}{b}}$$



Remarque : Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$, on retrouve le résultat classique : $C_0 = \frac{2\pi \varepsilon_0}{Ln\, c/a}$.

3°) **Densité de charge libres :** Notons $\sigma_{libre}(a)$ la densité portée par le conducteur interne et $\sigma_{libre}(b)$ celle portée par la face interne du conducteur externe.

Une hauteur h du conducteur interne porte la charge $Qh = \sigma_{libre}(a) \cdot 2\pi a\, h$, d'où :

$$\sigma_{libre}(a) = \frac{Q}{2\pi a} = \frac{V}{a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln \frac{c}{b}}$$

De même

$$\sigma_{libre}(b) = -\frac{V}{b} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} Ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln \frac{c}{b}}$$

Densité de charges liées :

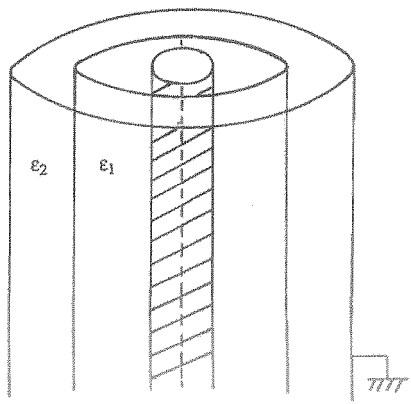
– En volume, on a $\rho_{lié}(1) = -\,div\,\vec{P_1}$ pour le diélectrique 1 et $\rho_{lié}(2) = -\,div\,\vec{P_2}$ pour le diélectrique 2.

Or $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ sont, en coordonnées cylindriques, de la forme $\frac{A}{r}\vec{e_r}$.

Comme $div\left(\frac{A}{r}\vec{e_r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{A}{r}\right) + \frac{d}{dr}\left(\frac{A}{r}\right) = 0$,

on en déduit : $\boxed{\rho_{lié} = 0}$

– En surface, on a 3 densités correspondant aux 3 interfaces :



◆ Conducteur interne/diélectrique 1 :

$$\sigma_{lié}(a) = P_1(a)\,\vec{e_r}.(-\vec{e_r}) = -P_1(a)$$

◆ Diélectrique 1/diélectrique 2 :

$$\sigma_{lié}(b) = P_1(b)\,\vec{e_r}.\vec{e_r} + P_2(b)\,\vec{e_r}.(-\vec{e_r}) = P_1(b) - P_2(b)$$

◆ Diélectrique 2/conducteur externe :

$$\sigma_{lié}(c) = P_2(c)\,\vec{e_r}.\vec{e_r} = P_2(c).$$

Les densités surfaciques de charges liées sont donc :

$$\sigma_{lié}(1) = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\cdot\frac{V}{a}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}Ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}Ln\frac{c}{b}}$$

$$\sigma_{lié}(2) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\cdot\frac{V}{b}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}Ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}Ln\frac{c}{b}}$$

$$\sigma_{lié}(3) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\cdot\frac{V}{c}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}Ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}Ln\frac{c}{b}}$$

Remarque : Vérifions que pour une hauteur h, la charge totale libre $Q_{libre}(h)$ est nulle.

$$Q_{libre}(h) = \sigma_{libre}(a).2\pi a h + \sigma_{libre}(b)\,2\pi b h = 0$$

Par ailleurs, vérifions que pour une hauteur h, la charge totale liée $Q_{liée}(h)$ est nulle, (il n'y a pas ici de charges liées en volume) :

$$Q_{liée}(h) = \sigma_{lié}(a)\,2\pi a h + \sigma_{lié}(b)\,2\pi b h + \sigma_{lié}(c)\,2\pi c h = 0$$

4°) La densité d'énergie est donnée par $w = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$.

Ici, on a une densité w_1 (resp. w_3) pour le diélectrique 1 (resp. 2) :

$$w_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 E_1^2 = \frac{V^2}{2\varepsilon_1 r^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon_1} Ln\,\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln\,\frac{c}{b}\right]^2}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 E_2^2 = \frac{V^2}{2\varepsilon_2 r^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon_1} Ln\,\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2} Ln\,\frac{c}{b}\right]^2}$$

Par une simple intégration, on pourrait donc calculer l'énergie par unité de longueur enmagasinée dans les diélectriques.

11 – Diélectrique semi-infini en présence d'une charge ponctuelle.

Une charge ponctuelle q est placée dans le vide en un point A à la distance q d'un plan (S) séparant le vide d'un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope de permittivité relative ε_r.
Soit A' le symétrique de A par rapport à (S), r et r' les distances AM et A'M (voir figure).

1°) Montrer que si l'on prend les expressions du potentiel :

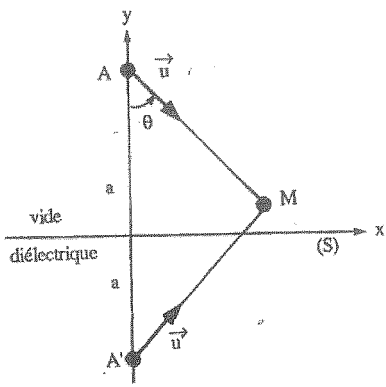
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}\right) \text{ pour M dans le vide.}$$

et $$V(M) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q''}{r}$$ *pour M dans le diélectrique,*

on peut satisfaire à toutes les conditions imposées au potentiel et aux champs en donnant à q' et q'' des valeurs convenables que l'on déterminera en fonction de q et ε_r.

2°) Déterminer le vecteur polarisation $\vec{P}$, la densité des charges surfaciques de polarisation. Montrer, par le calcul, que la densité des charges volumiques de polarisation est nulle.

3°) Donner l'allure des lignes de champ dans les deux milieux.



Extrait, Fès, PC2, Janvier 88.

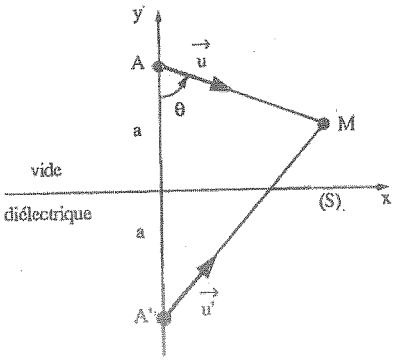
1°) Les conditions de continuité à la surface de séparation S sont :

a – Continuité du potentiel.

b – Continuité de la composante tangentielle E_T du champ électrique : $E_T = E_{T'}$ (le signe prime concerne le diélectrique).

c – Continuité de la composante normale D_N de l'excitation électrique car il n'y a pas de charges libres sur S : $D_N = D_{N'}$, ou $\varepsilon_0 E_N = \varepsilon E_{N'}$.

Notons d'abord que quel que soit le point M, on peut choisir le repère de façon que M appartienne au plan xy. On fera donc l'étude dans ce plan, sans perdre en généralité.



Précisons les différentes coordonnées :

$M(x, y)$; $A(0, a)$; $A'(0, -a)$.

$r = AM = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$

$r' = A'M = \sqrt{x^2 + (y + a)^2}$

Un point M est sur la surface S si $y = 0$, c'est-à-dire si $r = r'$.

Expression du champ :

Les expressions proposées pour le potentiel sont celles qu'on obtient lorsqu'on a des charges q, q' ou q'' en A ou A'. On en déduit immédiatement les champs correspondants :

$$\overrightarrow{E(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}\vec{u} + \frac{q'}{r'^2}\vec{u'}\right) \quad \text{pour } M \text{ dans le vide}$$

$$= \begin{cases} E_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{r^3}x + \dfrac{q'}{r'^3}x\right) \\ E_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{r^3}(y-a) + \dfrac{q'}{r'^3}(y+a)\right) \end{cases}$$

et $$\overrightarrow{E(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}\vec{u} \quad \text{pour } M \text{ dans le diélectrique}$$

$$= \begin{cases} E_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q''}{r^3}x \\ E_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q''}{r^3}(y-a) \end{cases}$$

a – Continuité du potentiel :

Si M appartient à S ($r = r'$), les deux expressions du potentiel doivent donner le même résultat : $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''}{r} \quad \Rightarrow \quad q + q' = q''$$

b – Composante tangentielle E_T :

Dans ce problème, $E_T = E_x$ et la relation générale $E_T = E_{T'}$, donne ici (pour $y = 0$ ou $r = r'$) :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qx}{r^3} + \frac{q'x}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''}{r^3}x$$

Cette relation est automatiquement vérifiée, étant donné que la continuité du potentiel a déjà imposé que : $q + q' = q''$.

c – Composante normale E_N :

Ici, $E_N = E_x$, et la relation générale $\varepsilon_0 E_N = \varepsilon E_{N'}$ donne, pour $y = 0$ ou $r = r'$:

$$\frac{\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{qa}{r^3} + \frac{q'a}{r^3}\right) = \frac{\varepsilon}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''a}{r^3},$$

soit $\varepsilon_0 (q - q') = \varepsilon q''$

Cette relation, avec $q + q' = q''$, conduit à :

$$\boxed{q' = \frac{1 - \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} q \quad ; \quad q'' = \frac{2}{1 + \varepsilon_r} q}$$

Ainsi, pour M dans le vide, rien ne change si on supprime le diélectrique, à condition de placer (la charge q étant toujours en A) une charge $q' = \frac{1 - \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} q$ en A'. Pour M dans le diélectrique, rien ne change si on supprime tout et on place la seule charge $q'' = \frac{2}{1 + \varepsilon_r} q$ dans le vide en A', ou encore si on remplit tout l'espace de diélectrique et si on y place en A' une charge $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} q''$. On dit que le point A' est **l'image** de A et la charge q' **la charge image** de q.

2°) Sous l'action du champ créé par la charge q, le diélectrique acquiert une polarisation $\vec{P}$ donnée par : $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$

où $\vec{E}$ est le champ dans le diélectrique. Donc :

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''}{r^2}\vec{u} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\frac{q}{2\pi r^2}\vec{u}}$$

On en déduit les densités de charges de polarisation (charges liées) :

– En surface : $\sigma_{li} = \vec{P}(x, y = 0) \cdot \vec{n} = \vec{P}(x, 0) \cdot \vec{e_y} = P_y(x, 0)$.

Or $$\vec{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{q}{2\pi r^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{q}{2\pi r^3} x \\ \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{q}{2\pi r^3} (y - a) \end{bmatrix}$$

D'où $$\boxed{\sigma_{lié} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{q\,a}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}}$$

– En volume : $\rho_{lié} = - div \vec{P}$.

Pour le calcul de $div \vec{P}$, il faut bien faire attention de faire intervenir explicitement la variable z. Quand on a pris $z = 0$, cela entraînait que le repère changeait avec M, ce qui n'était pas gênant. Mais pour le calcul de $div \vec{P}$, il est préférable d'utiliser un repère fixe, ce qui oblige à faire intervenir la variable z.

$$div \vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial y} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-a}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) \right]$$

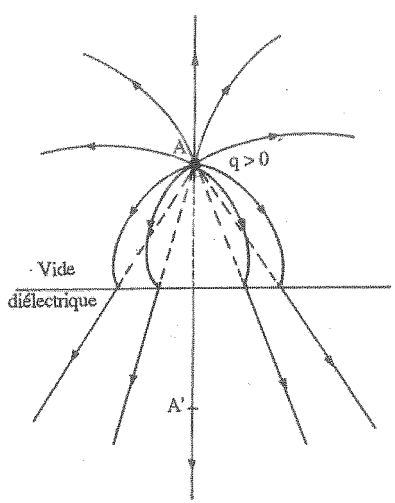
$$= \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{q}{2\pi} \left[\frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} + \frac{r^3 - 3(y-a)^2 r}{r^6} + \frac{r^3 - 3z^2 r}{r^6} \right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{q}{2\pi} \left[\frac{3r^3 - 3r \cdot r^2}{r^6} \right] = 0$$

Donc $$\boxed{\rho_{lié} = 0}$$

3°) Allure des lignes de champs :

Dans le diélectrique, on a vu que tout se passe comme si le champ était créé par une charge q'' en A. Les lignes de champ dans le diélectrique sont donc des demi-droites issues de A. Dans le vide, le champ est la somme des deux contributions dûes à q et q' placés en A et A' et l'allure générale des lignes de champ est représentée sur la figure ci-contre.



12 – Polarisation par orientation : Equation de Langevin.

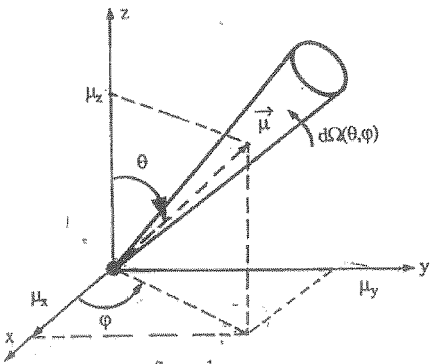


figure 1

On considère un milieu diélectrique de volume V, contenant N molécules polaires par unité de volume, en équilibre à la température T.
Chaque molécule possède un moment dipolaire permanent $\vec{\mu}$ dont les composantes dans un système d'axes orthonormés Oxyz sont μ_x, μ_y, μ_z.
On suppose que les interactions entre moments dipolaires sont négligeables.

I – En l'absence de champ électrique appliqué au milieu diélectrique, il n'y a pas d'orientation préférentielle des moments dipolaires.

1°) Effectuant les calculs en coordonnées sphériques, exprimer le nombre $dN(\theta, \varphi)$ de molécules dont le moment dipolaire est contenu dans l'angle solide élementaire $d\Omega(\theta, \varphi) = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ et dont la projection sur Oz de ce moment dipolaire est $\mu_z = \mu\cos\theta$ (fig.1).

2°) Calculer les valeurs moyennes $\overline{\mu_x}$, $\overline{\mu_y}$, $\overline{\mu_z}$, des composantes du moment dipolaire. En déduire la polarisation du milieu diélectrique en l'absence de champ électrique appliqué.

II – On applique un champ électrique de module E selon l'axe Oz.

1°) Donner l'expression de l'énergie potentielle W de chaque molécule polaire plongée dans le champ.
Sous l'action du champ électrique, chaque dipôle tend à s'orienter de façon à réduire son énergie potentielle mais cette orientation est contrariée par l'agitation thermique. En remarquant que les interactions entre dipôles sont négligeables, on peut admettre que le nombre $d'N(\theta, \varphi)$ de moments dipolaires situés dans l'angle solide $d\Omega(\theta, \varphi)$ est donné par une distribution de Boltzmann :

$$d'N\ (\theta, \varphi) = C\ exp\ \left(-\frac{W}{kT} \right) .\ d\Omega(\theta, \varphi)$$

où C est un facteur proportionnel au volume considéré.

2°) a) Calculer la valeur moyenne $\overline{\mu_z}$ de la composante selon Oz. On fera le changement de variable cos θ et on posera pour alléger l'écriture $a = \frac{\mu E}{kT}$.

b) Aux températures et champs électriques usuels, $a = \frac{\mu E}{kT}$ est petit par

rapport à l'unité. Déterminer la valeur moyenne de μ en tenant compte de cette remarque.

c) Tracer la fonction $L(a) = \dfrac{\overline{\mu_z}}{\mu}$ *pour différentes valeurs de la variable a comprises entre 0 et 20. Quelle est la pente de la tangente à l'origine de L(a) ?*

d) Montrer que les valeurs moyennes $\overline{\mu_x}$ *et* $\overline{\mu_y}$ *sont nulles et déduire des résultats précédents l'expression de la polarisation d'orientation* P_{or} *ainsi que la polarisabilité* α_{or} *du milieu diélectrique. (Faire apparaître la fonction L(a) dans les résultats).*

Données numériques :

Table des valeurs numériques de la fonction coth (y)

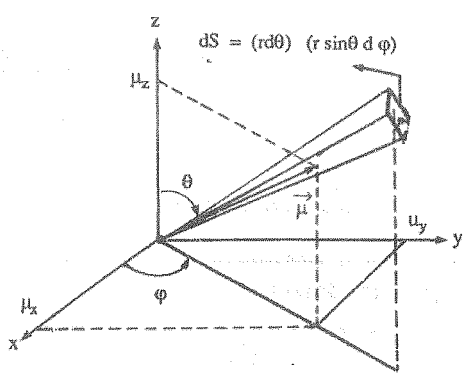
y	*0*	*0,20*	*0,40*	*0,60*	*0,80*	*1*	*1,2*	*1,5*	*2*	*2,5*	*3*	*4 et plus*
coth (y)	*∞*	*5,66*	*2,631*	*1,862*	*1,506*	*1,313*	*1,199*	*1,104*	*1,037*	*1,013*	*1,005*	*1*

Casa I, MP2 – PC2, Juin 87.

Toutes les molécules portent le même moment dipolaire μ ; seule change l'orientation.

I – Champ extérieur nul :

1°) Soit N le nombre total de molécules par unité de volume et soit dN le nombre de molécules par unité de volume dont les directions des moments sont contenues dans l'angle solide $d\Omega$ autour d'une direction quelconque. Toutes les orientations étant équiprobables, les N moments pointent à l'intérieur d'un angle solide total $\Omega_0 = 4\pi$ et on a :



$$\frac{dN}{N} = \frac{d\Omega}{\Omega_0} = \frac{d\Omega}{4\pi}$$

A partir d'un moment $\vec{\mu}$ donné, dessinons un angle solide $d\Omega$ par variation infinitésimale de θ et de φ, les coordonnées sphériques (figure ci–contre). On a :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{(r\,d\theta)(r\,\sin\theta\,d\varphi)}{r^2}$$

d'où $$\boxed{dN = \frac{N}{4\pi} \sin\theta \; d\theta \, d\varphi}$$

la projection de $\vec{\mu}$ sur Oz étant $\mu_z = \mu \cos\theta$.

2°) **Valeurs moyennes :**

$$\overline{\mu_z} = \sum_i \frac{(\mu_z)_i}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_i \mu \cos\theta_i \ ,$$

où la somme porte sur les N moments d'un volume unité. Passons à une somme continue en groupant les dN' moments par unité de volume dont les directions des moments sont contenues entre les angles θ et $\theta + d\theta$:

$$\overline{\mu_z} = \frac{1}{N} \int \mu \cos\theta \; dN'$$

Or $$dN' = \int_{\varphi=0}^{2\pi} dN = \frac{N}{2} \sin\theta \; d\theta$$

D'où $$\overline{\mu_z} = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\mu}{2} \cdot \sin\theta \cos\theta \; d\theta = -\frac{\mu}{8} [\cos 2\theta]_0^{\pi}$$

et $$\boxed{\overline{\mu_z} = 0}$$

De même $$\mu_x = \mu \sin\theta \cos\varphi$$

$$\overline{\mu_x} = \frac{1}{N} \sum_i \mu_{xi} = \frac{\mu}{N} \sum_i \sin\theta_i \cos\varphi_i$$

μ_x dépendant de θ et de φ, on regroupe les moments caractérisés par des valeurs de θ comprises entre θ et $\theta + d\theta$ et des valeurs de φ comprises entre φ et $\varphi + d\varphi$, c'est-à-dire caractérisés par l'angle solide $d\Omega(\theta, \varphi)$. Or, par unité de volume, il y a dN moments de ce type, d'où :

$$\overline{\mu_x} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2\theta \cos\varphi \; d\theta \, d\varphi \ .$$

A cause du terme $\cos\varphi$, on trouve $\boxed{\overline{\mu_x} = 0}$

De même, $\overline{\mu_y} = \mu \sin\theta \sin\varphi$, et à cause du terme $\sin\varphi$, on a : $\boxed{\overline{\mu_y} = 0}$

Chaque composante est donc nulle en moyenne, ce qu'on aurait pu affirmer sans calcul puisqu'en l'absence de champ, les moments pointent dans toutes les directions et donc se compensent.

La polarisation, qui est le moment dipolaire (ou moment dipolaire moyen) par unité de volume peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{P} = N \quad \overline{\vec{\mu}} \quad = \vec{0}}$$

II – Effet d'un champ électrique.

1°) Un moment dipolaire $\vec{\mu}$ plongé dans un champ électrostatique $\vec{E}$ possède une énergie potentielle W :

$$\boxed{W = - \quad \vec{\mu} \, . \, \vec{E}}$$

Ainsi, l'énergie est maximale si le moment et le champ sont anti–parallèles, et elle est minimale s'ils sont parallèles.

2°) Sous l'action du champ, le moment a tendance à pivoter pour s'aligner avec le champ, de façon à minimiser l'énergie potentielle. Cet effet est en partie empêché par l'agitation thermique. Il en résulte que le nombre d'N de molécules dont les directions des moments sont contenues dans l'angle solide $d\Omega(\theta, \varphi)$ dépend maintenant de la température. Son expression, selon la loi de distribution de Boltzmann est :

$$d'N = C \, exp \, (- \frac{W}{kT}) \, d\Omega$$

Le terme $exp \, (- \frac{W}{kT})$ indique que les états d'énergie minimale sont les plus probables. La constante C se détermine en écrivant la relation évidente :

$$\int d'N = N$$

D'où

$$C = \frac{N}{\int exp \, (- \frac{W}{kT}) \, d\Omega}$$

a) Valeur moyenne $\overline{\mu_z}$:

$$\overline{\mu_z} = \frac{1}{N} \int \mu cos \, \theta \, d'N \quad = \quad \mu \, \frac{\int_0^{\pi} cos \, \theta \, sin \, \theta \, exp \, (- \frac{W}{kT}) \, d\theta}{\int_0^{\pi} exp(- \frac{W}{kT}) \, sin \, \theta \, d\theta.}$$

Or $W = - \vec{\mu} \, . \, \vec{E} = - \mu E \, cos \, \theta$ puisque $\vec{E}$ est appliqué selon Oz. Par ailleurs, posons $a = \mu E / kT$ et faisons le changement de variable $x = cos \, \theta$; il vient :

$$\overline{\mu_z} = \mu \frac{\int_{-1}^{+1} x\, e^{ax}\, dx}{\int_{-1}^{+1} e^{ax}\, dx}$$

◆ $$\int_{-1}^{+1} e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\left[e^{ax} \right]_{-1}^{+1} = \frac{2\, sh\, a}{a}$$

◆ $$\int_{-1}^{+1} x\, e^{ax}\, dx = \left[\frac{x}{a} e^{ax} \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{1}{a} e^{ax}\, dx$$

$$= \frac{2\, ch\, a}{a} - \frac{2\, sh\, a}{a^2}$$

d'où $$\overline{\mu_z} = \mu \left(coth\, a - \frac{1}{a} \right)$$

soit $$\boxed{\overline{\mu_z} = \mu \left[c\acute{o}th \frac{\mu E}{kT} - \frac{kT}{\mu E} \right]}$$

Remarque : En vérité, le champ qui intervient dans la formule précédente doit être le champ qui s'applique effectivement sur un dipôle donné : c'est ce qu'on appelle le champ local $\overrightarrow{E_{loc}}$, qui peut être très différent du champ appliqué.

b) Dans les conditions usuelles, on a : $a << 1$.

La formule de Mac Laurin $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$ donne immédiatement les développements limités suivants :

$$sha \approx a + \frac{a^3}{3!} \qquad \text{et} \qquad ch\, a \approx 1 + \frac{a^2}{2!}$$

d'où $$coth\, a \approx \frac{1 + a^2/2}{a(1 + a^2/6)} \approx \frac{1}{a}\left(1 + \frac{a^2}{2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{6}\right) \approx \frac{1}{a}\left(1 + \frac{a^2}{3}\right).$$

et $$coth\, a - \frac{1}{a} \approx \frac{a}{3}$$

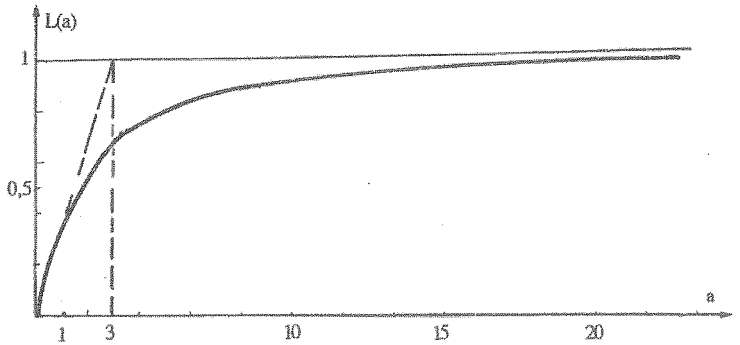
d'où $$\boxed{\overline{\mu}_z \approx \mu \frac{a}{3} = \frac{\mu^2 E}{3kT} \qquad \text{pour } a = \frac{\mu E}{kT} << 1}$$

c) On appelle fonction de Langevin, et on note $L(a)$, la fonction :

$$L(a) = \frac{\overline{\mu_z}}{\mu} = coth\, a - \frac{1}{a}$$

D'après ce qui précède, $L(a) \approx \frac{a}{3}$ au voisinage de l'origine, donc la pente à l'origine vaut $\frac{1}{3}$.

Il est immédiat de constater que $L(a)$ est une fonction croissante de 0 vers 1. Son l'allure est représentée sur la figure suivante :



La limite $L(a) \rightarrow 1$ correspond à $\overline{\mu_z} \rightarrow \mu$, c'est-à-dire que le moment est aligné avec le champ. On parle alors de **saturation**.

d) **Valeurs moyenne $\overline{\mu_x}$:**

$$\overline{\mu_x} = \frac{1}{N} \int \mu \sin\theta \cos\varphi \, d'N$$

La présence du terme $\cos\varphi$ implique que $\overline{\mu_x} = 0$, puisque $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$,

de même pour $\overline{\mu_y}$: $\boxed{\overline{\mu_x} = \overline{\mu_y} = 0}$

La polarisation d'orientation est donc dirigée selon Oz :

$$\boxed{\vec{P}_{or} = N \, \overrightarrow{\overline{\mu}} = N \, \overline{\mu_z} \, \vec{e}_z = N \, \mu \, L(a) \, . \, \vec{e}_z}$$

Lors de la saturation (basse température et/ou champ élevé), on a $P_{or} = N \mu$: Tous les moments sont alignés avec le champ. De façon générale, la relation entre P_{or} et E n'est pas linéaire (milieu non linéaire) ; cependant, dans le cas usuel, $a<<1$ et $P_{or} = \frac{N\mu^2}{3kT} E$, ce qui permet de définir la polarisabilité par orientation α_{or} du milieu :

$$\boxed{\alpha_{or} = \frac{N \mu^2}{3kT}}$$

C'est une fonction de la température.

II – MAGNÉTOSTATIQUE DES MILIEUX AIMANTÉS

13 - Cylindre aimanté uniformément selon son axe.

Un aimant permanant en forme de cylindre de révolution, de hauteur h et de rayon R, est aimanté uniformément et parallélement à son axe.

1°) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur excitation magnétique $\vec{M}$ créés en un point P de l'axe du cylindre en fonction de l'intensité d'aimantation $\vec{M}$ et des demi-angles au sommet P s'appuyant sur les bases du cylindre.

2°) Etudier les cas limites où $h \ll R$ (disque) et $h \gg R$ (barreau) en se limitant aux champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ créés au centre du cylindre.

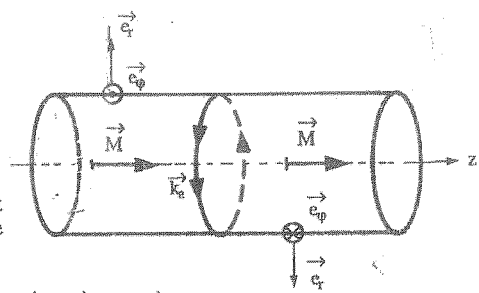
Extrait, casa, MP2, Janvier 88.

1°) Pour calculer le champ magnétique $\vec{B}$, on remplace l'aimant cylindrique par les distributions de courants d'aimantation suivantes :

– en volume : $\vec{j_a} = \overrightarrow{rot\, M} = \vec{0}$

($\vec{M}$ uniforme)

– en surface : $\vec{k_a} = \vec{M} \wedge \vec{n}$



On a donc une nappe de courant surfacique puisque (en utilisant la base cylindrique) :

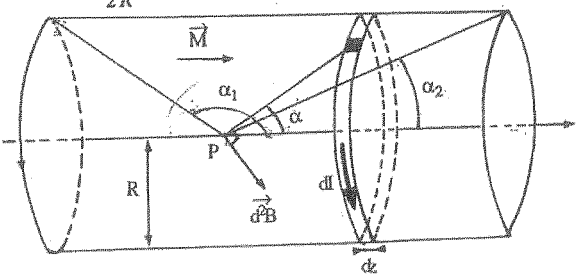
$$\vec{k_a} = M\,\vec{e_z} \wedge \vec{e_r} = M\,\vec{e_\varphi}$$

Calculons le champ magnétique $\vec{B}$ produit (dans le vide) par cette nappe de courant. Considérons pour cela une bande de courant de largeur dz (voir figure suivante) ; le courant qui y circule est $dI = k_a\,dz$. (Imaginer une bande de largeur dz et d'épaisseur e parcourue par une densité **volumique** $\vec{j} = j\,\vec{e_\varphi}$. Le courant correspondant est $dI = j\,dz\,e$. Si $e \to 0$ et $j \to \infty$ de telle sorte que le produit $j\,e$ reste fini, on obtient la définition d'un courant superficiel de densité $k = j\,e$ et le courant s'écrit $dI = k\,dz$). On peut assimiler la bande dz à une spire ; le champ $d\vec{B}$ produit par la bande en un point P est le résultat classique suivant :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0\, dI}{2R}\, sin^3\,\alpha\,.\,\overrightarrow{e_z}\,.$$

Retrouvons ce résultat.
Un élément dl de la bande dz produit en P le champ :

$$d^2\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0\, dI}{4\pi}\,\frac{\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{r}}{r^3} \qquad (\overrightarrow{dl}\perp\overrightarrow{r})$$



Le champ total $d\overrightarrow{B}$ produit par la bande est, par symétrie, portée par l'axe Pz et on a :

$$dB = \int d^2B\, cos\,(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{\mu_0\, dI}{4\pi}\,\frac{sin\,\alpha}{r^2}\int dl = \frac{\mu_0\, dI}{4\pi}\,\frac{sin\,\alpha}{r^2}\,.\,2\pi R = \frac{\mu_0\, dI}{2R}\,sin^3\alpha.$$

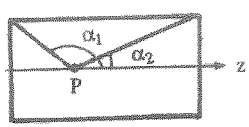
On déduit le champ total créé par la nappe de courant au point P :

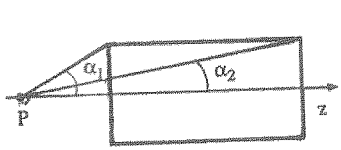
$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0\, k}{2R}\, dz\, sin^3\alpha.$$

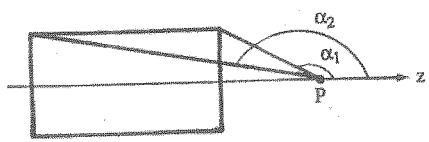
Or $cotan\,\alpha = \frac{z}{R}$, donc $-\frac{d\alpha}{sin^2\,\alpha} = \frac{dz}{R}$; comme $k = M$, il vient :

$$B = \frac{\mu_0\, M}{2R}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\frac{d\alpha\, R}{sin^2\alpha}\,sin^3\alpha = \frac{\mu_0 M}{2}\,[\,cos\,\alpha\,]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 M}{2}\,(cos\,\alpha_2 - cos\,\alpha_1)$$

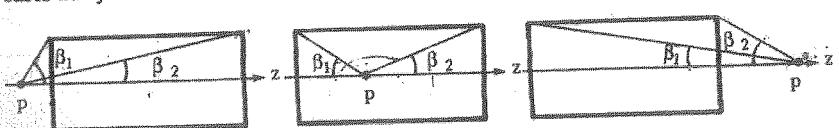
donc $$\boxed{\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\frac{cos\,\alpha_2 - cos\,\alpha_1}{2}\right)\overrightarrow{M}}$$







Faisons maintenant intervenir les demi-angles β_1 et β_2 au sommet P s'appuyant sur les bases du cylindre. Il faut alors distinguer 2 régions, l'intérieur et l'extérieur :



$$\vec{B}_{int} = \mu_0 \left(\frac{\cos \beta_2 + \cos \beta_1}{2} \right) \vec{M}$$

$$\vec{B}_{ext} = \mu_0 \frac{|\cos \beta_2 - \cos \beta_1|}{2} \vec{M}$$

Le vecteur excitation est donné par :

$$\vec{H}_{int} = \frac{\vec{B}_{int}}{\mu_0} - \vec{M} = -\left(1 - \frac{\cos \beta_2 + \cos \beta_1}{2} \right) \vec{M}$$

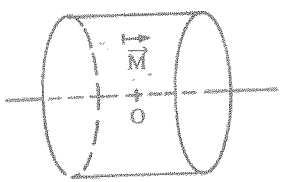
$$\vec{H}_{ext} = \frac{\vec{B}_{ext}}{\mu_0} = \frac{|\cos \beta_2 - \cos \beta_1|}{2} \vec{M}$$

Quel que soit le point P sur l'axe, les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{M}$ ont même sens alors que les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{M}$ sont de même sens si le point P est à l'extérieur mais sont de sens opposé si le point P est à l'intérieur.

2°) **Cas limites** : Pour le centre O du cylindre, on a :

◆ Disque : $h << R$

On a $\beta_1 = \beta_2 \approx \frac{\pi}{2}$ et : $\vec{B} \approx \vec{0}$ et $\vec{H} \approx -\vec{M}$



◆ Barreau : $h >> R$

On a $\beta_1 = \beta_2 \approx 0$ et :

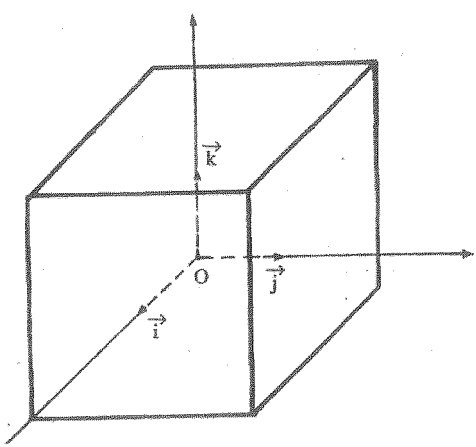
$\vec{B} \approx \mu_0 \vec{M}$ et $\vec{H} = \vec{0}$



14 – Cube aimanté uniformément.

Un aimant ayant la forme d'un cube possède une aimantation uniforme $\vec{M} = M \vec{k}$ ***(M constante positive)***

1°) Montrer que cet aimant est équivalent à un cube dont les quatre faces parallèles à $\vec{k}$ ***sont parcourues par un courant surfacique de densité*** i_s ***que l'on déterminera.***



$$\vec{B}_{int} = \mu_0 \left(\frac{\cos \beta_2 + \cos \beta_1}{2} \right) \vec{M}$$

$$\vec{B}_{ext} = \mu_0 \frac{|\cos \beta_2 - \cos \beta_1|}{2} \vec{M}$$

Le vecteur excitation est donné par :

$$\vec{H}_{int} = \frac{\vec{B}_{int}}{\mu_0} - \vec{M} = -\left(1 - \frac{\cos \beta_2 + \cos \beta_1}{2} \right) \vec{M}$$

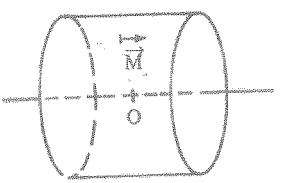
$$\vec{H}_{ext} = \frac{\vec{B}_{ext}}{\mu_0} = \frac{|\cos \beta_2 - \cos \beta_1|}{2} \vec{M}$$

Quel que soit le point P sur l'axe, les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{M}$ ont même sens alors que les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{M}$ sont de même sens si le point P est à l'extérieur mais sont de sens opposé si le point P est à l'intérieur.

2°) Cas **limites** : Pour le centre O du cylindre, on a :

◆ Disque : $h << R$

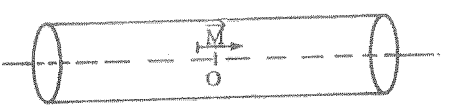
On a $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ et : $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{H} = -\vec{M}$



◆ Barreau : $h >> R$

On a $\beta_1 = \beta_2 = 0$ et :

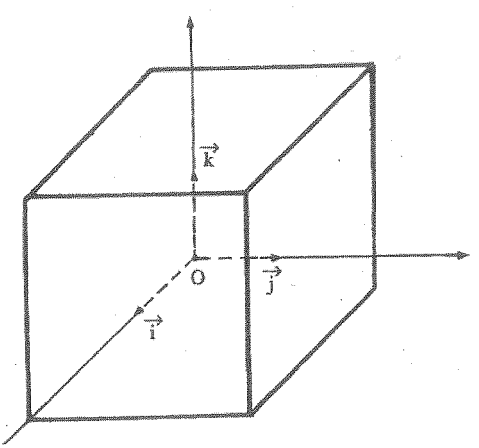
$\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$ et $\vec{H} = \vec{0}$



14 - Cube aimanté uniformément.

Un aimant ayant la forme d'un cube possède une aimantation uniforme $\vec{M} = M \vec{k}$ ***(M constante positive)***

1°) Montrer que cet aimant est équivalent à un cube dont les quatre faces parallèles à $\vec{k}$ ***sont parcourues par un courant surfacique de densité*** i_s ***que l'on déterminera.***



2°) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ au centre O du cube.

On donne $\Omega = \frac{2}{3}\pi$ l'angle solide sous lequel du centre O on voit l'une des faces du cube.

Extrait, Fès, PC 2, 1986.

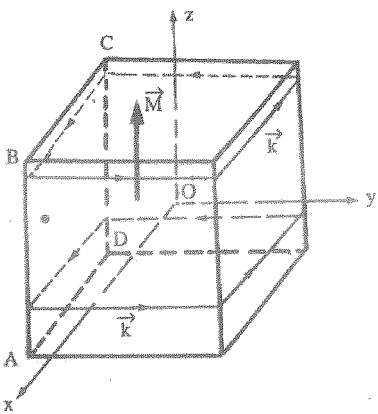
1°) Le cube aimanté est équivalent aux courants (dits d'aimantation) suivants :

– volumiques, de densité $\vec{j_a} = \overrightarrow{rot\ M} = \vec{0}$ ($\vec{M}$ uniforme).

– surfaciques, de densité $\vec{k_a} = \vec{M} \wedge \vec{n}$, où $\vec{n}$ est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur.

Ainsi, sur les faces parallèles à $\vec{M}$ circule un courant surfacique de densité

$k_a = |\vec{M} \wedge \vec{n}| = M$ (voir figure ci-contre dans le cas où M est selon Oz).



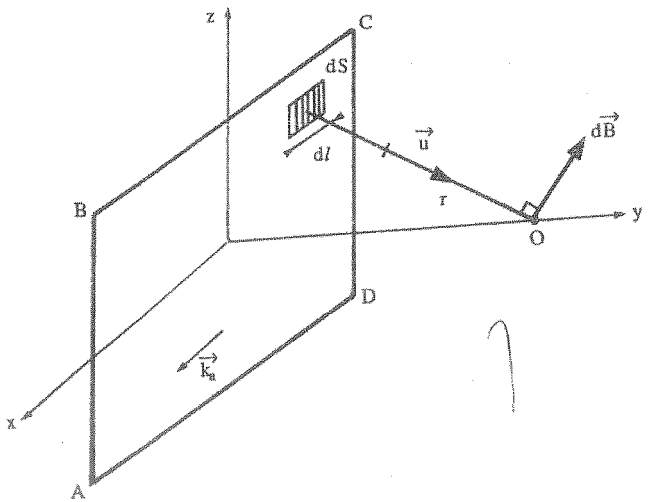
2°) Calculons le champ magnétique $\vec{P_1}$ créé par une face, $ABCD$ par exemple, au centre O du cube. Sur cette face, on a $\vec{k_a} = \vec{M} \wedge (-\vec{e_y}) = M\,\vec{e_z} \wedge (-\vec{e_y}) = M\,\vec{e_x}$

L'élément dS de la face (voir figure) crée en O le champ $\vec{dB_1}$:

$$\vec{dB_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{k_a} \wedge \vec{u}}{r^2}\, dS.$$

En effet, donnons à la plaque une épaisseur e et considérons la densité de courant $\vec{j}$ parallèle à $\vec{k_a}$. On sait que le volume $d\tau = e.\,dS$ crée en O le champ :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}}{r^2}\, d\tau.$$



Faisons $e \to 0$ et $j \to \infty$ de façon que le produit je reste fini. On obtient un courant superficiel de densité $\vec{k} = \vec{j}.e$, d'où le résultat.

Comme $d\vec{B_1} \perp \vec{k_a}$, $d\vec{B_1}$ est sur le plan de la feuille et $(\vec{k_a}, \vec{u}, d\vec{B_1})$ est un trièdre direct. Par raison de symétrie, $\vec{B_1}$ est porté par Oz. (En effet, l'élément dS' symétrique de dS par rapport au centre de la plaque crée en O un champ $d\vec{B_1'}$ dans le plan de figure symétrique de $d\vec{B_1}$ par rapport à Oz). Soit dB_z la composante de $d\vec{B_1}$ sur Oz. On a $(k_a = M)$ $\vec{e_x}$):

$$B_1 = \int dB_z = \int d\vec{B_1} \cdot \vec{e_z} = \int \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{dS}{r^2} (\vec{e_x} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e_z}$$

Or $$(\vec{e_x} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e_z} = (\vec{e_z} \wedge \vec{e_x}) \cdot \vec{u} = \vec{e_y} \cdot \vec{u} = (-\vec{e_y}) \cdot (-\vec{u}).$$

d'où $$\frac{dS}{r^2} (\vec{e_x} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e_x} = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

avec $\vec{dS} = dS(-\vec{e_y})$ dirigé vers l'extérieur par rapport à O et $\vec{r} = r(-\vec{u})$ dirigé de O vers dS. Ainsi, $\frac{\vec{dS} \cdot \vec{r}}{r^3} = d\Omega$ est l'angle solide sous lequel on voit dS à partir de O. Donc :

$$B_1 = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int d\Omega = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \Omega$$

Ω étant l'angle solide sous lequel de O on voit la place entière. Or $\Omega = \frac{2\pi}{3}$; en effet, du point O on voit les 6 faces du cube, qui sont équivalentes géométriquement, sous un angle solide de 4π et donc chaque face est vue sous un angle solide $\Omega = \frac{1}{6} 4\pi = \frac{2\pi}{3}$. D'où :

$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 \vec{M}}{6}$$

Les 3 autres faces contribuent évidemment de la même manière (faire à chaque fois une rotation de $\pi/2$ autour de Oz). D'où le champ magnétique dû à ce cube aimanté :

$$\boxed{\vec{B} = 4 \cdot \frac{\mu_0 \vec{M}}{6} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}}$$

15 – Substance ferromagnétique - Champ démagnétisant.

Dans une excitation magnétique faible, la susceptibilité magnétique d'une substance ferromagnétique que l'on suppose isotrope est une fonction linéaire de l'intensité de l'excitation H.
On posera : $\chi = \chi_0 + A H$: A et χ_0 sont des constantes indépendantes du champ H.
Cette relation est valable à condition que l'intensité de l'excitation magnétique H soit inférieure à 200 $A.m^{-1}$.
Les mesures d'intensité d'aimantation de cette substance ont fourni les résultats suivants :
$M = 17.000\ A.m^{-1}$ pour $H = 50\ A.m^{-1}$
$M = 67.200\ A.m^{-1}$ pour $H = 100\ A.m^{-1}$

1°) Indiquer un dispositif expérimental qui permette d'effectuer la mesure de M en fonction de H.

2°) Un cylindre plat C est constitué de cette substance. Son rayon est égal à 2 cm. Sa longueur 2l est égale à 2 cm.
On le dispose à l'intérieur d'un solénoïde, les faces étant normales à l'axe du solénoïde. On admet que le solénoïde est suffisamment long pour supposer que l'excitation magnétique créée en un point intérieur est uniforme. Le nombre de spires par centimètre est égal à 10, elles sont parcourues par un courant d'intensité I = 2 A.

On appellera $\vec{H_0}$ l'excitation magnétique créée par le solénoïde en l'absence du cylindre C, et l'on supposera que le cylindre ne perturbe pas l'excitation $\vec{H_0}$ à l'extérieur de C.

a) En admettant que l'intensité d'aimantation $\vec{M}$ du cylindre C est

uniforme, déterminer en fonction de $\vec{M}$ l'excitation démagnétisante $\vec{H}_d$ au centre du cylindre C. On précisera l'origine de l'excitation démagnétisante.

b) En supposant que le champ démagnétisant est uniforme et égal à sa valeur calculée au centre du cylindre C, calculer l'intensité de l'excitation $\vec{H}$ à l'intérieur du cylindre C. En déduire l'intensité d'aimantation $\vec{M}$.

c) Calculer la susceptibilité magnétique, la perméabilité magnétique de la substance ferromagnétique ainsi que la valeur du champ magnétique $\vec{B}$ dans le cylindre.

– Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ M.K.S.A.

– Donnée numérique $\sqrt{5} = 2{,}236$

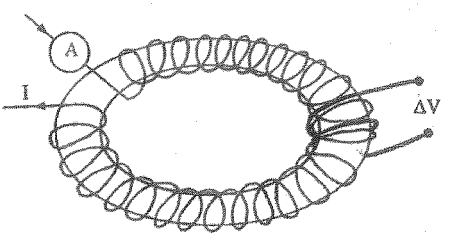
Représenter clairement, pour un sens de circulation du courant dans le solénoïde, les vecteurs :

$$\vec{H}_0 \ , \ \vec{H}_{\text{démagnétisant}} \ , \ \vec{H}_{\text{dans le cylindre C.}}$$

Extrait, Casa, MP2, Mai 87.

1°) Un dispositif classique de mesure est l'anneau de Rowland. On prend un échantillon torique de faible section sur lequel on enroule N spires (voir figure suivante). Par symétrie, les lignes de champ de $\vec{B}$, $\vec{M}$, $\vec{H}$ sont des cercles concentriques au tore et B, H, M ont chacun une valeur constante sur un cercle donné. De plus, la section étant faible, les champs sont pratiquement uniformes à l'intérieur. Si R est le rayon moyen, le théorème d'Ampère donne : $H = \dfrac{NI}{2\pi R}$. C'est en fait le champ qui existerait en l'absence d'échantillon : il n'y a pas de champ démagnétisant avec cette géométrie et ainsi, une simple lecture sur un ampèremètre donne H.

Un enroulement secondaire constitué de N' spires est placé sur le premier. Il apparait à ses extrémités une f.e.m. induite chaque fois qu'on fait varier I dans le primaire. Un voltmètre mesure donc :



$$\Delta v = -e = \frac{d\phi}{dt} = N'S\,\frac{dB}{dt}$$

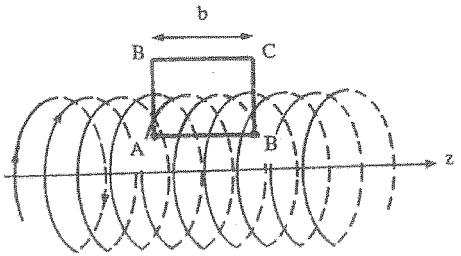
On a donc accès à $\dfrac{dB}{dt}$. Par une intégration graphique, on remonte à B puis à $M = \dfrac{B}{\mu_0} - H$

2°) On suppose que le solénoïde est suffisamment long pour que l'excitation magnétique $\vec{H}_0$ puisse être considérée comme uniforme à l'intérieur. Sa valeur est un résultat classique : $H_0 = nI$, où n est le nombre de spires par unité de longueur. En effet :

$\vec{H_0}$ est porté Oz. Il est nul à l'extérieur. Sa circulation sur le rectangle $ABCD$:

$\int \vec{H_0}\,\vec{dl} = H_0 . b$ est égale d'après le théorème d'Ampère à NI, où N est le nombre de spires sur la longueur b. D'où :

$H_0 = \frac{N}{b} I = n I$, où $n = \frac{N}{b}$ est le nombre de spires par unité de volume.



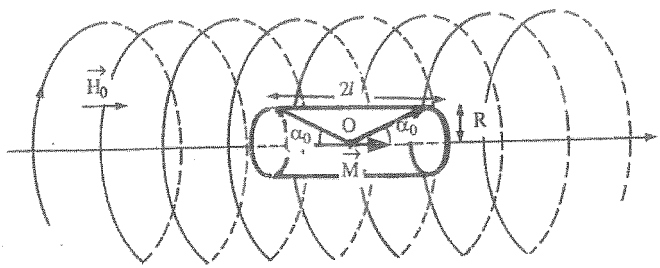
a) Dans ce champ uniforme $\vec{H_0}$, on place le cylindre ferromagnétique qui s'aimante alors uniformément. Pour calculer le champ magnétique dû à l'aimantation $\vec{M}$, on remplace la substance par les courants d'aimantation suivants :

– En volume densité, $\vec{j_a} = \overrightarrow{rot\ M} = \vec{0}$ ($\vec{M}$ uniforme)

– En surface densité, $\vec{k_a} = \vec{M} \wedge \vec{n}$

En utilisant la base cylindrique $\vec{k_a} = M\,\vec{e_z} \wedge \vec{e_r} = M\,\vec{e_\varphi}$. On a donc une nappe de courant sur la surface latérale. Le champ produit par cette nappe a été calculé en détail dans l'exercice 13.

Au centre O, le champ magnétique $\vec{B_a}$ dû à l'aimantation est : $\vec{B_a} = \mu_0\,\vec{M}\,\cos\alpha_0$.



Le champ total en O est $\vec{B} = \vec{B_0} + \vec{B_a}$ où $\vec{B_0}$ est le champ extérieur (dû ici au solénoïde).

L'excitation magnétique est : $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B_0}}{\mu_0} + \frac{\vec{B_a}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H_0} + \vec{H_d}$,

où $\vec{H_0} = \frac{B_0}{\mu_0}$ est l'excitation dûe à l'extérieur, et $\vec{H_d}$ est l'excitation dûe à l'aimantation.

En O, on a : $\boxed{\vec{H}_d = -\ (1 - \cos\alpha_0)\ \vec{M}}$

Ainsi, $\vec{H}_d$ est de sens opposé à $\vec{H}_0$ et $\vec{M}$. On l'appelle **champ démagnétisant.** (Noter par contre que $\vec{B}_a$ est de même sens que $\vec{B}_0$ et $\vec{M}$). Ce champ démagnétisant est donc créé par l'aimantation, c--à--d par les moments magnétiques portés par les molécules du milieu.

Ici, on a : $\cos\alpha_0 = \dfrac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\boxed{\vec{H}_d = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\ \vec{M}}$

b) Si $\vec{H}_d$ est uniforme, pour tout point à l'intérieur de C, on a :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_d = \vec{H}_0 - (1 - \cos\alpha_0)\ \vec{M}\ , \qquad (\vec{H}_0 = nI\ \vec{e}_z).$$

Or $\vec{M} = \chi(H)\ \vec{H} = (\chi_0 + A\,H)\ \vec{H}$

d'où $(1 - \cos\alpha_0)\,A\,H^2 + [1 + (1 - \cos\alpha_0)\,\chi_0\,]H - H_0 = 0$

Les deux constantes χ_0 et A vérifient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 17.000 = (\chi_0 + 50\,A)\,50 \\ 67.000 = (\chi_0 + 100\,A)\,100 \end{cases}$$

d'où $\chi_0 = 12$ et $A = 6{,}6\ mA^{-1}$

Comme $1 - \cos\alpha_0 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $H_0 = nI = 2000\ A/m$, l'équation du 2e degré en H s'écrit numériquement : $3{,}65\ H^2 + 7{,}63\ H - 2000 = 0$

$\vec{H}$ étant nécessairement de même sens que $\vec{H}_0$ (puique $\vec{H}_d$ ne peut pas l'emporter sur $\vec{H}_0$), on rejette la solution de H négative et il reste :

$$\boxed{H = 22{,}4\ A/m}$$

On en déduit l'aimantation correspondante.

$$M = (\chi_0 + A\,H)\,H = (12 + 6{,}6 \times 22{,}4)\,22{,}4\ ,$$

soit $\boxed{M = 3580\ A/m}$

c) La susceptibilité magnétique de cette substance, dans les conditions de l'expérience, est :

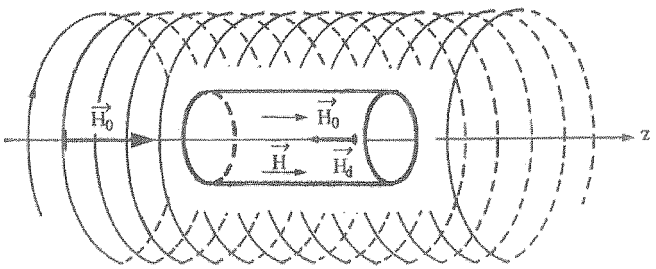
$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{3580}{22{,}4} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\chi \approx 160}$$

La perméabilité magnétique correspondante est : $\mu = \mu_0\,(1 + \chi)$ soit $\boxed{\mu = 161\ \mu_0}$

Le champ magnétique à l'intérieur vaut : $B = \mu H = \mu_0 (1 + \chi) H = 161 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 22{,}4$

soit : $\boxed{B \approx 4{,}6\ 10^{-3}\ T}$

Les sens des différents vecteurs du problème sont indiqués sur la figure suivante :



16 – Mesure de la perméabilité relative d'un matériau ferromagnétique.

Soit un noyau de fer torique de longueur moyenne L et ayant un bobinage de N spires.

1ère expérience : fig.1

Lorsqu'on envoie dans la bobine un courant I_0, on mesure dans le fer un champ magnétique B.

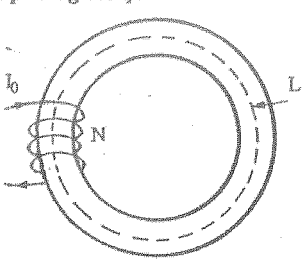


figure 1

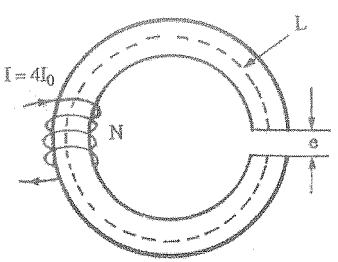


figure 2

2ème expérience : fig.2

On introduit dans le tore un entrefer de faible dimension e = 0,3% L.

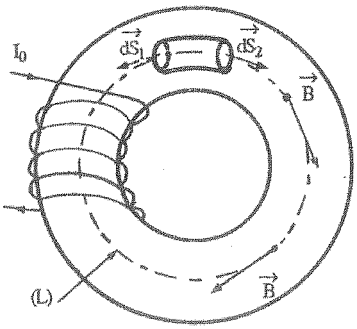
On constate que pour avoir le même champ magnétique B dans le fer que celui obtenu lors de la 1ère expérience, il faut un courant dans la bobine $I = 4I_0$.

Calculer la valeur de la perméabilité relative μ_r du matériau utilisé supposé linéaire.

NB : On négligera l'épanouissement du flux au niveau de l'entrefer ainsi que le flux de fuite.

Extrait, Tétouan, PC2, Janvier 85.

En négligeant le flux de fuite, on peut considérer que les lignes de champ sont des cercles de même axe que le tore. On dit que le noyau de fer **canalise** les lignes de champ.



◆ **1ere expérience :**

Le champ magnétique $\vec{B}$ étant à flux conservatif, son module reste constant le long d'une ligne de force. En effet, considérons le tube de force cylindrique T dont les deux bases dS sont normales aux lignes de champ (voir figure ci–dessus).

Le flux sortant de $\vec{B}$ à travers T est :

$$\phi = \vec{B_1} \cdot \vec{dS_1} + \vec{B_2} \cdot \vec{dS_2} = (-B_1 + B_2)\, dS.$$

Or, cette surface étant fermée, le flux sortant est nul, d'où $B_1 = B_2$ et donc B est constant sur un cercle. Il en sera de même pour le champ excitation magnétique H si le milieu est caractérisé, comme on le suppose ici, par une perméabilité μ telle que $H = \frac{B}{\mu}$.

Appelons (L) la circonférence moyenne du tore dont la longueur est notée L ; la circulation de $\vec{H}$ sur (L) est alors :

$$\int_{(L)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{(L)} H\, dl = H \int_{(L)} dl = HL.$$

Or le théorème d'Ampère donne $\int_{(L)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = N I_0$, d'où $H = \frac{N I_0}{L}$

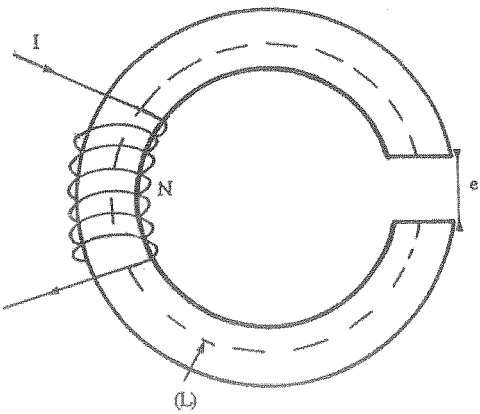
Le champ magnétique moyen B vaut donc : $\boxed{B = \frac{\mu N I_0}{L}}$

Remarque : Le champ magnétique B varie bien sûr à l'intérieur du noyau : sur la périphérie interne, il est plus important, puisque le périmètre correspondant est $L' = L - \Delta L$ et le champ est $B' = \frac{\mu N I_0}{L - \Delta L} > B$.

De même, à l'extérieur, $B'' = \frac{\mu N I_0}{L + \Delta L} < B$.

Dans le cas fréquent où $\Delta L << L$, le champ reste pratiquement uniforme partout à l'intérieur.

◆ 2ème expérience :



On suppose que la présence de l'entrefer ne modifie pas l'allure des lignes de champ. En particulier, un tube de force donné garde la même section dans le fer et dans le vide, ce qui assure que B est constant le long d'un cercle. Par contre l'excitation H présente une discontinuité à la surface fer/vide : en effet, la relation générale $B = \mu H$ indique que dans le vide, l'excitation vaut $H_0 = \frac{B}{\mu_0}$ alors que dans le fer, elle vaut $H_f = \frac{B}{\mu}$.

La circulation de $\vec{H}$ sur (L) est :

$$\int_{(L)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{(L)} H \, dl = H_0 \, e + H_f \, (L - e)$$

$$= B \left(\frac{e}{\mu_0} + \frac{L - e}{\mu} \right) = B \left(\frac{L}{\mu} + e \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \right)$$

Or le théorème d'Ampère donne : $\int_{(L)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = N I = 4 N I_0$

d'où

$$\boxed{B = \frac{4 \mu N I_0}{L + e \left(\frac{\mu}{\mu_0 - 1} \right)}}$$

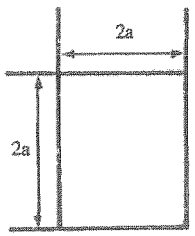
Comme cette valeur de B doit être la même que celle de la première expérience, on égale les deux expressions et on trouve : $\boxed{\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{3L}{e}}$

A.N : $\frac{e}{L} = 0{,}3\%$ $\qquad$ $\mu_r = 1001$

17 – Tore avec entrefer.

Un anneau de révolution en fer doux (voir figure) de rayon moyen R, de section carrée de côtés 2a, est interrompu par un entrefer à faces méridiennes, d'angle dièdre $\alpha = \pi/50$ rd. Il porte un enroulement de N spires

identiques régulièrement distribuées parcourues par le courant I.



section droite
de l'anneau

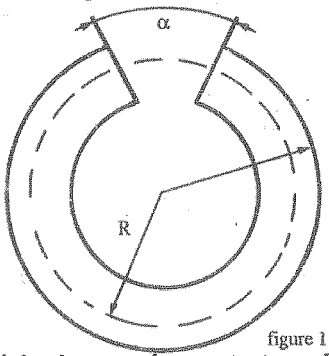


figure 1

1°) La perméabilité du fer étant tout d'abord supposée constante, calculer, en négligeant les fuites par rapport à l'entrefer, le champ d'induction B à la distance x de l'axe de l'anneau et dont on simplifiera convenablement l'expression.

Application numérique : R = 15 cm, 2a = 5 cm, $\mu = 3000\ \mu_0$, N = 200.

2°) En déduire l'inductance propre de l'enroulement (rappel : $\phi_{total} = LI$).

3°) Les propriétés du fer utilisé étant en réalité traduites par les valeurs numériques du tableau suivant, déterminer le courant I pour que sur le rayon moyen de l'anneau, l'induction soit B = 1,5T.

B(T)	1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,7
H(A/m)	265	400	830	1 560	4 800	10 700

Quelle est alors l'induction pour x = R + a et x = R − a ?

Evaluer le flux à travers la section droite de l'anneau, et en déduire le quotient par le courant du flux total dans l'enroulement.

Extrait, Casa I, PC 2, Mai 87.

1°) Cette première question se traite comme dans l'exercice précédent (le revoir pour plus de détails). Puisqu'on néglige le flux de fuite, on peut dire que les lignes de champ sont des cercles de même axe que le tore.

Le champ magnétique $\vec{B}$, étant flux conservatif, reste constant le long d'un cercle. Cela entraîne, si H_f et H_0 sont les valeurs de l'excitation magnétique respectivement dans le fer et dans le vide, que : $\mu H_f = \mu_0 H_0$

Calculons la circulation de $\vec{H}$ sur la circonférence Γ située à la distance x de l'axe. Γ se décompose en un chemin de longueur $x \cdot \frac{\pi}{50}$ dans le vide et $x\,(2\pi - \frac{\pi}{50})$ dans le fer. Alors :

$$\int_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{(D)} H\,dl = H_0 \times \frac{\pi}{50} + H_f \times \frac{99\pi}{50}$$

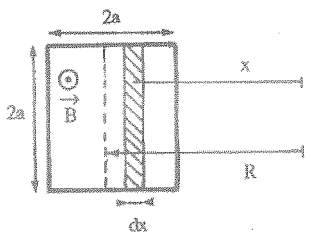
$$= \frac{x\pi}{50}(H_0 + 99\,H_f) = \frac{x\pi B}{50}\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{99}{\mu}\right)$$

Par ailleurs, $\int_{(D)} H\,dl = NI$, d'où

$$\boxed{B = \frac{50\,\mu_0 N I}{\pi x\,(1 + \frac{99\,\mu_0}{\mu})}}$$

A.N. : $B = \frac{50\,4\pi\,10^{-7}\,200}{\pi(1 + \frac{99}{3000})} \cdot \frac{I}{x}$

$$\boxed{B \approx 4.10^{-3}\,\frac{I}{x}\ T \quad \text{avec } I \text{ en Ampère et } x \text{ en mètre}}$$



2°) Considérons une section (carrée) de l'anneau (voir figure). Le flux à travers la bande de surface $dS = 2a\,dx$ est :

$$d\varphi = B(x) \cdot 2a\,dx.$$

Le flux à travers toute la section carrée est :

$$\varphi = \int d\varphi = \int_{R-a}^{R+a} B(x)\,2a\,dx = 2a \cdot \frac{50\,\mu_0 N I}{\pi(1 + \frac{99\,\mu_0}{\mu})} \int_{R-a}^{R+a} \frac{dx}{x}.$$

$$\varphi = 2a \cdot \frac{50\,\mu_0 N}{\pi(1 + 99\,\frac{\mu_0}{\mu})} \cdot Ln\,\frac{R+a}{R-a} \cdot I$$

d'où l'inductance propre L de l'enroulement :

$$\boxed{L = \frac{\phi}{I} = \frac{N\varphi}{I} = 2\,a\,N \cdot \frac{50\,\mu_0 N}{\pi(1 + 99\,\frac{\mu_0}{\mu})} \cdot Ln\,\frac{R+a}{R-a}}$$

A.N. $L = 200 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 4\,10^{-3} \cdot Ln\,\frac{17,5}{12,5} = 13,5\ mH$

3°) En réalité, la relation entre les champs B et M n'est pas linéaire dans le fer, on ne peut

plus définir de perméabilité magnétique μ (tout au plus, on définit le rapport $\frac{B}{H} = \mu(H)$ qu'on continue à appeler permittivité μ mais c'est maintenant une fonction de H).

Comme dans le 1°), le théorème d'Ampère donne : $N I = \frac{x\pi}{50} (H_v + 99 H_f)$.

On a $H_0 = \frac{B}{\mu_0}$ mais on ne peut plus écrire $H_f = \frac{B}{\mu}$. Par contre, on sait que pour $x = R$, $B = 1{,}5\ T$. Or d'après le tableau, une valeur de $B = 1{,}5\ T$ correspond à une valeur $H_f = 1560\ A/m$. On obtient ainsi la valeur numérique de I :

$$I = \frac{R\pi}{50N}\left(\frac{B}{\mu_0} + 99 H_f\right) = \frac{15.10^{-2}\pi}{50 \times 200}\left(\frac{1{,}5}{4\pi 10^{-7}} + 99 \times 1560\right)$$

$$\boxed{I \approx 63{,}6\ A}$$

Pour cette valeur de I, cherchons la valeur du champ B pour x quelconque. On fera ensuite $x = R - a$ puis $x = R + a$.

Nous avons une première relation :

$$N I = \frac{x\pi}{50}\left(\frac{B}{\mu_0} + 99\ H_f\right),$$

B et H_f étant deux inconnues. Or nous avons une deuxième relation entre B et H_f, donnée par le tableau de l'énoncé. Nous avons donc deux relations à deux inconnues, le problème est résolu. Mais comme la deuxième relation ne se présente pas sous forme d'équation mais de tableau, nous ferons une résolution graphique : le tableau donnera une courbe C_1 représentant B en fonction de H_f. D'autre part, la relation :

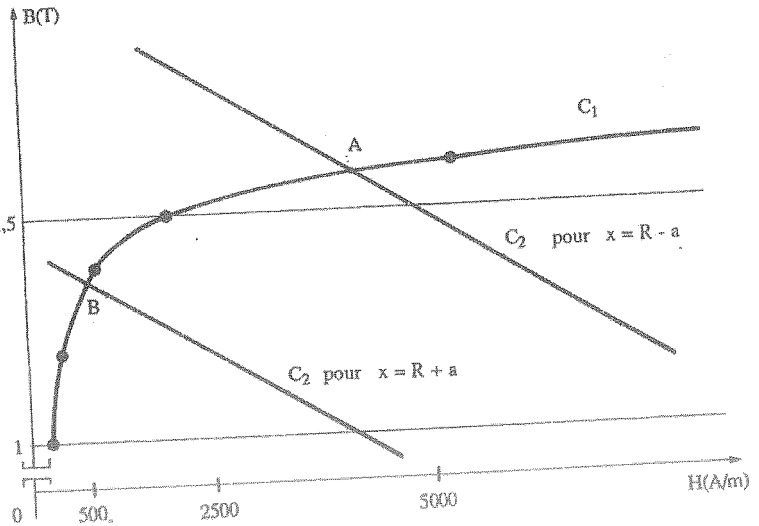
$$N I = \frac{x\pi}{50}\left(\frac{B}{\mu_0} + 99\ H_f\right)$$

ou

$$B = \frac{50\mu_0 N I}{x\pi} - 99\,\mu_0 H_f \qquad (I)$$

donnera une deuxième courbe C_2 représentant B en fonction de H_f (C_2 est une droite, dont la pente ne dépend d'ailleurs pas de x). Le point d'intersection entre C_1 et C_2 représente la solution.

La figure suivante représente la courbe C_1 , ainsi que les deux droites correspondant à C_2 dans les 2 cas : $x = R - a$ et $x = R + a$.



Numériquement, l'équation (I) donne :

– Pour $x = R - a$ $\quad B = 2{,}04 - 1{,}24\ 10^{-4}\ H_f$ $\quad$ (B en Tesla ; H_f en A/m)

– Pour $x = R + a$ $\quad B = 1{,}45 - 1{,}24\ 10^{-4}\ H_f$.

Graphiquement, on trouve que pour $x = R - a$, le point d'intersection est le point $\vec{A}$ de coordonnées (*1,58 T ; 3700 A/m*), alors que pour $x = R + a$, le point d'intersection est le point B de coordonnées (*1,36 T ; 700 A/m*). Ces valeurs sont évidemment entachées de l'erreur graphique.

Nous avons ainsi trouvé que pour un courant de *63,6 A*, on a les résultats suivants :

x	$B(T)$	$M(A/m)$
$R - a$	*1,36*	*700*
R	*1,5*	*1560*
$R + a$	*1,58*	*3700*

On constate que la variation relative de B est beaucoup plus faible que celle de H.

◆ Pour déterminer le flux à travers une section droite de l'anneau, il nous faut connaître l'expression de B en fonction de x. Cette expression n'étant pas disponible (nécessité de déterminer graphiquement B pour toute valeur de x), nous allons donner une valeur approchée de ce flux φ. Dans l'expression :

$$\varphi = \int_{x=R-a}^{R+a} B(x)\, 2a\, dx\ ,$$

nous remplaçons $B(x)$ par sa valeur moyenne $\overline{B}$. Prenons :

$$\overline{B} = \frac{B(R-a) + B(R) + B(R+a)}{3} = \frac{1,36 + 1,5 + 1,58}{3} = 1,48\ T.$$

D'où $\boxed{\varphi \approx \overline{B}\ 4\ a^2}$ A.N. : $\boxed{\phi \approx 3,7\ 10^{-3}\ Wb}$

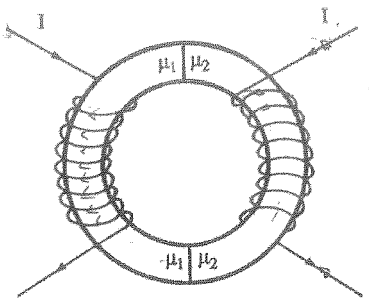
On en déduit une valeur approchée de l'inductance (pour $I = 63,6\ A$) :

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{N\varphi}{I}.$$

A.N : $\boxed{L = 1,16.10^{-2}\ H}$

18 – Circuit magnétique – Réluctance.

Deux enroulements (N_1, N_2) réguliers parcourus par un courant d'intensité I sont disposés autour d'un matériau en forme de tore (voir figure). Ce matériau est constitué de deux blocs, l'un caractérisé par la perméabilité μ_1, l'autre par μ_2.



1°) Calculer la réluctance du circuit

2°) Donner l'excitation magnétique $\vec{H}$ ainsi que l'aimantation $\vec{M}$ dans chaque zone.

Extrait, Fès, PC2 – MP2, Janvier 1985.

On suppose le flux de fuite négligeable. Toutes les lignes de champ sont dans le tore.

1°) Par définition, la réluctance R est donnée par :

$$R = \int \frac{dl}{\mu S},$$

où S est la section droite du tore, μ la permitivité et dl le déplacement élémentaire le long du circuit. Soit l la circonférence moyenne du tore ; on a :

$$R = \int_{(1)} \frac{dl}{\mu S} + \int_{(2)} \frac{dl}{\mu S} = \frac{1}{\mu_1 S} \int_{(1)} dl + \frac{1}{\mu_2 S} \int_{(2)} dl$$

$$\boxed{R = \frac{l/2}{\mu_1 S} + \frac{l/2}{\mu_2 S}}$$

La réluctance R est de la forme $R = R_1 + R_2$, avec $R_i = \frac{l/2}{\mu_i S}$ la réluctance du "demi-tore": les deux "demi-tores" étant en série, les réluctances s'ajoutent.

2°) Soit $\vec{H_1}$ et $\vec{H_2}$ les excitations magnétiques dans les zones 1 et 2, et soit $\vec{B}$ le champ magnétique à l'intérieur du tore. (On néglige les variations des champs lorsque la distance au centre change. Voir exercices précédents pour plus de détails).

On a : $$\int \vec{H} \cdot \vec{dl} = R\,\phi,$$

ϕ étant le flux de $\vec{B}$ à travers toute section du tore ($\phi = BS$). Par ailleurs, en notant que le courant ne circule pas dans le même sens dans les deux enroulements, le théorème d'Ampère donne pour la force magnétomotrice :

$$\int \vec{H} \cdot \vec{dl} = (N_1 - N_2)\, I$$

d'où $$B = \frac{(N_1 - N_2)\, I}{R\, S}$$

soit, en utilisant 1°) : $$B = \frac{2\,(N_1 - N_2)\, I}{l \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)}$$

Bien évidemment, on obtient le même résultat si au lieu d'écrire que $\int \vec{H} \cdot \vec{dl} = R\phi$, on écrit $$\int \vec{H} \cdot \vec{dl} = \frac{l}{2}(H_1 + H_2) = \frac{l}{2} B \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right).$$

De l'expression de B, on tire l'excitation magnétique :

$$\boxed{H_1 = \frac{B}{\mu_1} = \frac{2(N_1 - N_2)I}{l \cdot \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2}}}$$

$$\boxed{H_2 = \frac{B}{\mu_2} = \frac{2(N_1 - N_2)I}{l \cdot \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1}}}$$

On en déduit immédiatement l'aimantation dans chaque région, puisque $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$ (Par symétrie, tous les vecteurs sont orthoradiaux) :

$$M_1 = \frac{2(N_1 - N_2)I}{l} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_0}$$

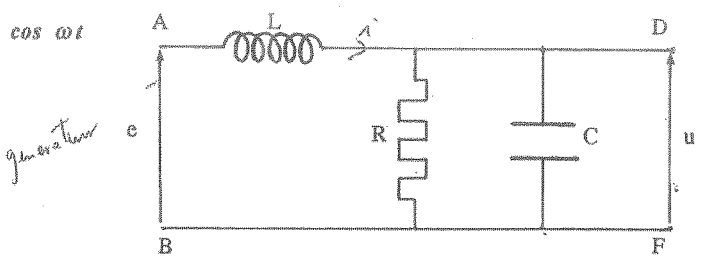
$$M_2 = \frac{2(N_1 - N_2)I}{l} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_0}$$

III – COURANTS ALTERNATIFS

19 – Circuit RLC (R et C en parallèle).

On applique à l'entrée (bornes de A et B) du circuit R.L.C. suivant une tension alternative :

$e = E_m \cos \omega t$



On obtient, en régime forcé, à la sortie (bornes D et F) une tension :

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

φ désigne la phase du signal de sortie par rapport au signal d'entrée .

1°) Etablir l'expression de l'amplitude complexe U du signal de sortie en fonction de E_m, R, L, C et ω.

2°) Quelle est la valeur numérique f_0 de la fréquence qui donne $\varphi = -\frac{\pi}{2}$?

Evaluer dans ce cas U_m et écrire u sous la forme : $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

A.N. : $L = 0{,}1$ H ; $C = 100\ \mu F$.

Extrait, Tétouan, PC2, Janvier 85.

1°) Calculons d'abord l'impédance (complexe) $\overline{Z_{DF}}$ entre les points D et F.

On a : $$\frac{1}{\overline{Z_{DF}}} = \frac{1}{R} + jC\omega$$

soit $$\overline{Z_{DF}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Le courant total $\overline{i}$ circulant entre A et B est tel que : $\overline{e} = (jL\omega + \overline{Z_{DF}})\,\overline{i}$

soit $$\overline{i} = \frac{\overline{e}}{jL\omega + Z_{DF}}$$

La tension $\overline{u_{DF}}$ entre D et F est alors donnée par :

$$\overline{u_{DF}} = \overline{Z_{DF}}\,\overline{i} = \frac{\overline{e}}{1 + jL\omega/\overline{Z_{DF}}} = \frac{\overline{e}}{1 - LC\omega^2 + jL\omega/R}$$

ou encore $$\overline{u_{DF}} = \overline{e} \cdot \frac{1 - LC\omega^2 - jL\omega/R}{(1 - L\omega^2)^2 + (L\omega/R)^2}$$

Comme $\overline{e} = E_m e^{j\omega t}$, l'amplitude complexe $\overline{U_{DF}}$ s'écrit :

$$\boxed{\overline{U_{DF}} = U_m e^{j\varphi} = E_m \cdot \frac{1 - LC\omega^2 - jL\omega/R}{(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega/R)^2}}$$

où le déphasage φ de u par rapport à e est tel que : $\tan\varphi = -\dfrac{L\omega/R}{1 - LC\omega^2}$.

2°) On aura un déphasage $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ pour la valeur ω_0 de ω telle que :

$1 - LC\omega^2 = 0$, soit : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$,

et la fréquence correspondante est : $$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

A.N. : $L = 0{,}1$ H ; $C = 100\ \mu F$ $$\boxed{f_0 = 50{,}4 \text{ Hz}}$$

◆ Pour $\omega = \omega_0$, on a $\overline{U_{DF}} = -j\dfrac{R}{L\omega_0}E_m$ et :

$$U_m = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 \quad ; \quad u = \frac{R}{L\omega_0}\cos(\omega_0 t - \pi/2) = RC\omega_0 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

20 – Circuit RC.

On branche en série sur le secteur à 120 volts (efficace), 50 Hz, une résistance de 2000 Ohms et un condensateur de 1 microfarad.

1°) Quelle est l'impédance de ce circuit ?
Calculer son module et son argument, et donner une représentation vectorielle de Fresnel.

2°) Quel est le déphasage entre la tension et le courant ?

3°) Quelle est la valeur efficace du courant ?

4°) Quelle est la puissance dissipée dans le circuit ?

5°) Quelle sera l'indication d'un voltmètre alternatif branché aux bornes de la résistance ? Du condensateur ?

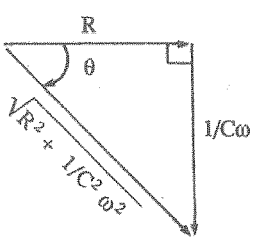
6°) On relie les plaques horizontales d'un tube à rayons cathodiques aux bornes de la résistance et les plaques verticales aux bornes du condensateur. Faire un schéma de ce que vous vous attendez à voir sur l'écran.

Extrait, Tetouna, PC 2, Janvier 86.

1°) L'impédance (complexe) du circuit est : $\overline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = R - j\frac{1}{C\omega}$

Son module est : $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$

Son argument θ est tel que : $\tan\theta = -\frac{1}{RC\omega}$



A.N. $R = 2000\Omega$; $C = 1\ \mu F$; $f = 50\ Hz$:

$Z = 3760\ \Omega$ et $\theta = -57{,}8°$

La représentation de Fresnel est donnée ci–contre.

2°) Le déphasage cherché vaut θ. En effet, soit $\overline{i} = I_0 e^{j\omega t}$ le courant dans le circuit et $\overline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ la tension à ses bornes. φ est donc le déphasage entre la tension et le courant.

On a $\overline{\frac{u}{i}} = \overline{Z}$, donc $arg\ \overline{\frac{u}{i}} = arg\,(\overline{Z})$.

Or $arg\ \overline{\frac{u}{i}} = \varphi$ et $arg\,(\overline{Z}) = \theta$, d'où :

$$\boxed{\varphi = \theta = arctan\,(-\frac{1}{RC\omega})}.$$

$\boxed{\varphi = -57{,}8°}$ La tension est en retard sur le courant.

3°) La valeur efficace I_{eff} du courant est :

$$\boxed{I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}}$$

A.N. : $U_{eff} = 120$ V ; $Z = 3760\ \Omega$. $\boxed{I_{eff} = 31{,}9\ \text{mA}}$

4°) La puissance P dissipée dans le circuit est : $\boxed{P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot cos\ \varphi}$

On peut aussi dire que seule la résistance R dissipe de l'énergie et donc : $\boxed{P = R\ I_{eff}^2}$

On en déduit d'ailleurs que $cos\ \varphi = R/Z$, ce qui est évidemment vrai (voir par exemple sur la figure précédente).

A.N. : $\boxed{P = 2{,}04\ \text{W}}$

5°) Un voltmètre alternatif mesure une tension efficace. Branché aux bornes de R, il indiquera la tension U_r :

$\boxed{U_r = R\ I_{eff}}$ A.N. : $U_r = 63{,}8$V.

Branché aux bornes de C, il indiquera la tension U_C.

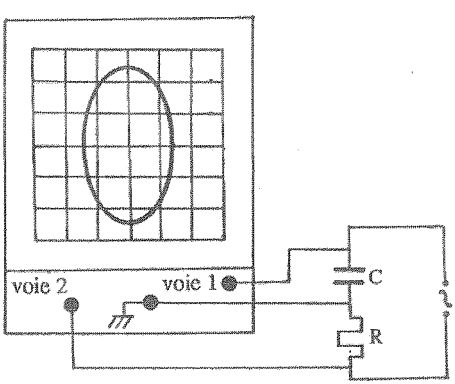
$$\boxed{U_C = \frac{1}{C\omega} I_{eff}}$$ A.N. : $U_C = 101{,}6$ V.

On vérifie bien que : $120^2 = 63{,}8^2 + 101{,}6^2$.

6°) Si on relie les plaques horizontales de l'oscilloscope aux bornes de R et les plaques verticales aux bornes de C, on obtiendra sur l'écran la courbe $u_R = f(u_C)$; c'est une ellipse. En effet :

Si $i = I_0\ cos\ \omega t$

alors $u_R = RI_0\ cos\ \omega t$



et $$u_C = \frac{I_0}{C\omega} \sin \omega t$$

En vérité, il faut tenir compte des amplifications des signaux et on observera alors $u'_R = k_1 u_R$ en fonction de $u'_R = k_2 u_C$. k_1 et k_2 étant les gains des amplificateurs . On a :

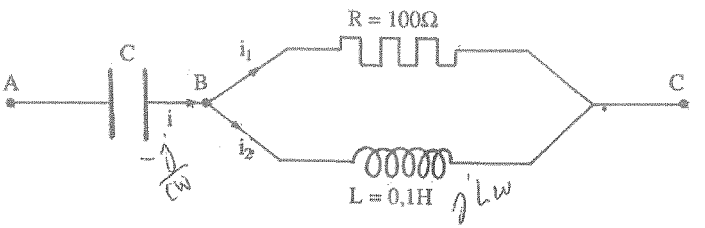
$$\frac{u_R'^2}{(k_1 R I_0)^2} + \frac{u_C'^2}{(k_2 I_0/C\omega)^2} = 1 .$$

C'est une ellipse, d'axes Ox et Oy. En jouant sur les valeurs k_1 et k_2, on peut obtenir un cercle.

Remarque : La masse de l'oscilloscope étant reliée à la terre, le montage précédent n'est évidemment possible que si le générateur est à masse flottante : aucune de ces deux bornes n'est reliée à la terre.

21 – Circuit RLC (R et L en parallèle).

On considère le montage ci–dessous, la self et la capacité sont supposées idéales. Le montage est alimenté entre les bornes A et C par une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace U = 138 v et de pulsation ω = 400 rd/s.



1°) Donner l'expression de la capacité C_0 pour laquelle le réseau entre A et C est équivalent à une résistance pure.
Dans la suite du problème, la valeur de la capacité sera C_0 .

2°) Calculer les intensités efficaces I, I_1 ,I_2 dans les trois branches.

3°) Calculer les déphasages de i_1 et i_2 par rapport à i.

4°) Calculer la puissance dissipée dans le réseau AC. Faire la comparaison avec la puissance dissipée dans la résistance R.

Donner une interprétation.

5°) Que se passe–t–il lorsque la self ou la capacité ne sont pas considérées comme idéales ?

Extrait, Tétouan, PC2 – MP2, Janvier 88.

1°) Calculons l'impédance $\overline{Z}$ entre A et C. Entre B et C, l'impédance $\overline{Z_{BC}}$ est telle que

$$\frac{1}{\overline{Z_{BC}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$$

soit $$\overline{Z_{BC}} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

L'impédance totale $\overline{Z}$ est alors : $\overline{Z} = \overline{Z_{AB}} + \overline{Z_{BC}} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$

$$\overline{Z} = \frac{-j}{C\omega} + \frac{RL^2\omega^2 + jR^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} + j\left(\frac{R^2L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} - \frac{1}{C\omega}\right)$$

La partie du circuit entre A et B sera équivalente à une résistance pure si la partie imaginaire de $\overline{Z}$ est nulle, c–à–d si la capacité du condensateur a une valeur C_0 donnée par :

$$\boxed{C_0 = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{R^2 L\omega^2}}$$

A.N. : $R = 100\ \Omega$; $L = 0{,}1$ H ; $\omega = 400$ rd/s $\qquad C_0 = 72{,}5\ \mu F$.

2°) Pour $C = C_0$, l'impédance totale vaut :

$$Z = \overline{Z} = \frac{R L^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} \qquad \boxed{\text{A.N. : } Z = 13{,}8\ \Omega}$$

L'intensité totale (efficace) I vaut, si la tension (efficace) entre A et B est U :

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}} \qquad \text{A.N. : } I = \frac{138}{13{,}8} = 10\ \text{A}$$

Par ailleurs, la tension entre B et C peut s'écrire : $\overline{u_{BC}} = \overline{Z_2}\ \overline{i} = R\ \overline{i_1} = jL\omega\ \overline{i_2}$

d'où $$\boxed{I_1 = \frac{Z_2}{R} I \ ; \quad I_2 = \frac{Z_2}{L\omega} I}$$

avec $$Z_2 = |\overline{Z_2}| = \frac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

A.N. : $Z_2 = 37{,}1\ \Omega$; $\qquad I_1 = 3{,}71$ A ; $\qquad I_2 = 9{,}28$ A.

3°) Nous avons vu que : $\overline{i_1} = \frac{\overline{Z_2}}{R}\ \overline{i} = \frac{L^2\omega^2 + jRL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\ \overline{i}$

Le déphasage φ_1 entre i_1 et i est donc tel que :

$$\boxed{tan\ \varphi_1 = \frac{R}{L\omega}} \qquad \text{A.N. : } \varphi_1 = 68{,}2°$$

i_1 est en avance sur i.

De même, on a : $$\overline{i_2} = \frac{\overline{Z_2}}{jL\omega}\,\overline{i} = \frac{R^2 - jRL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Le déphasage φ_2 entre i_2 et i est donc tel que :

$$\boxed{tan\ \varphi_2 = -L\omega/R} \qquad \text{A.N. : } \varphi_2 = -21{,}8°$$

i_2 est en retard sur i.

4°) La puissance dissipée dans le réseau AC (qui se comporte comme une résistance pure) est : $P_{AC} = U\ I\ cos\ \varphi$, avec $\varphi = 0$ ici

A.N. $P_{AC} = 138 \times 10 = 1380\ W$.

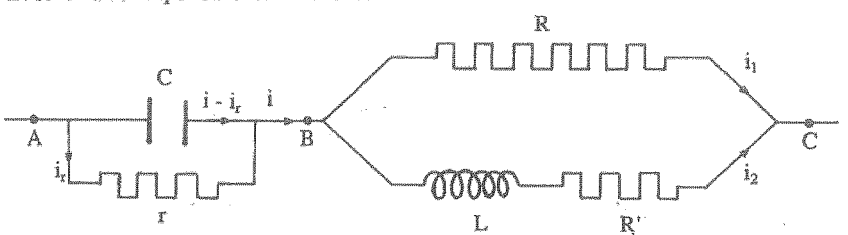
La puissance dissipée dans le résistance R est :

$$P_R = R\ I_1^2 \qquad \text{A.N. : } P_R = 1377\ W\ .$$

Aux erreurs d'arrondi près, on constate que $P_{AC} = P_R$. C'est normal puisque le condensateur et la self ne consomment pas d'énergie en moyenne. Ce résultat ($P_{AC} = P_R$) reste évidemment vrai même si le réseau n'est pas équivalent à une résistance pure ($C \neq C_0$) .

5°) Si la self ou le condensateur ne sont plus idéaux, il faut remplacer dans ce qui précède la self idéale L par une self idéale L en série avec une résistance R' et il faut remplacer le condensateur idéal C par un condensateur C en parallèle avec une résistance de fuite r.

Le schéma correspondant est le suivant :



La puissance consommée entre A et C est maintenant :

$$P = U\ I\ cos\ \varphi = r\ I_r^2 + R I_1^2 + R'\ I_2^2.$$

Les calculs sont un peu plus lourds que dans le cas idéal. Par exemple, voyons quelle est la valeur de C pour laquelle le réseau AC se comporte comme une résistance pure. En gardant les mêmes notations, on a :

$$\frac{1}{\overline{Z_{AB}}} = \frac{1}{r} + jC\omega = \frac{1 + jrC\omega}{r} \longrightarrow \overline{Z_{AB}} = \frac{r}{1 + jrC\omega}$$

$$\frac{1}{\overline{Z_{BC}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R' + jL\omega} \longrightarrow \overline{Z_{BC}} = \frac{RR' + jRL\omega}{R + R' + jL\omega}$$

$$\overline{Z} = \overline{Z_{AB}} + \overline{Z_{BC}} = \frac{r - jr^2 C\omega}{1 + r^2 C^2 \omega^2}$$

$$+ \frac{RR'(R + R') + RL^2\omega^2 + j\left[(R + R')RL\omega - RR'L\omega\right]}{(R + R')^2 + (L\omega)^2}$$

$$= \frac{r}{1 + r^2C^2\omega^2} + \frac{RR'(R + R') + RL^2\omega^2}{(R + R')^2 + (L\omega)^2}$$

$$+ j\left(\frac{(R + R')RL\omega - RR'L\omega}{(R + R')^2 + (L\omega)^2} - \frac{r^2C\omega}{1 + r^2C^2\omega^2}\right)$$

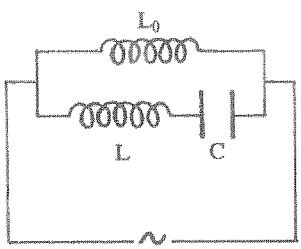
Ainsi, la valeur C_0 cherchée est telle que :

$$\frac{(R + R')RL\omega - RR'L\omega}{(R + R')^2 + (L\omega)^2} = \frac{r^2C_0\omega}{1 + r^2C_0^2\omega^2}$$

Il suffit alors de résoudre (en prenant les valeurs numériques !) cette équation du 2° degré.

22 – Circuit LLoC.

Le circuit de la figure est alimenté par un générateur de tension alternative de pulsation ω variable, de valeur efficace U constante.



1°) Calculer l'impédance Z du circuit.

2°) Etudier les variations de Z avec ω et tracer la courbe Z (ω).

3°) En déduire la courbe I(ω), I étant la valeur efficace de l'intensité.

Extrait, El jadida , PC 2, 1987.

1°) L'impédance complexe $\overline{Z}$ du circuit est telle que :

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{jL_0\omega} + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jL_0\omega} + \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1 - LC\omega^2 - L_0C\omega^2}{jL_0\omega(1 - LC\omega^2)}$$

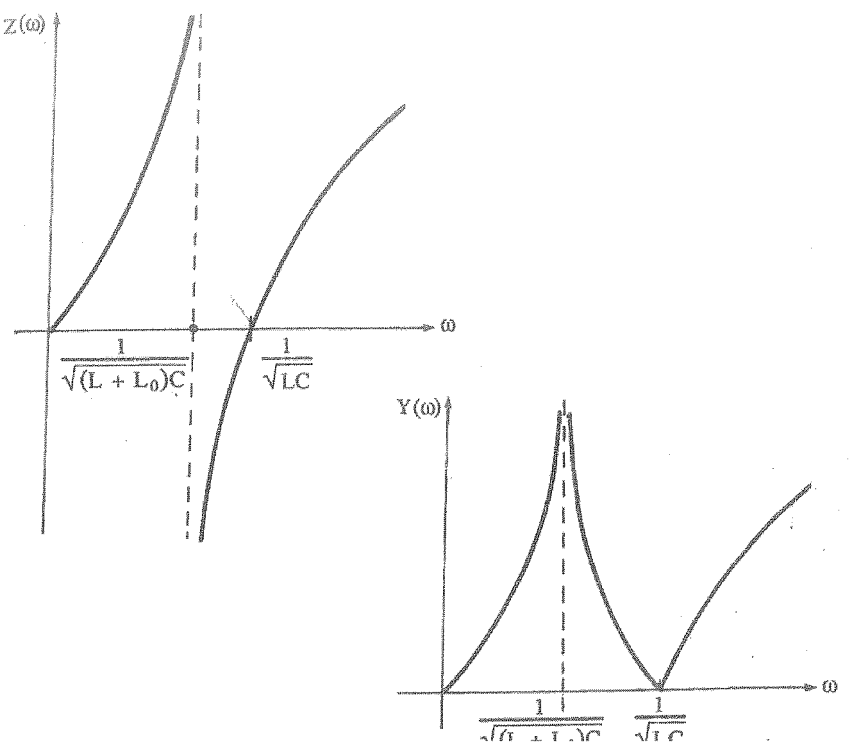
d'où l'impédance (réelle) du circuit : $\boxed{Z = |\overline{Z}| = \dfrac{L_0\,\omega\,|1 - LC\omega^2|}{|1 - (L + L_0)\,C\omega^2|}}$

2°) On étudiera et on tracera d'abord l'allure de $Y(\omega) = \dfrac{L_0\,\omega(1 - LC\omega^2)}{1 - (L + L_0)C\omega^2}$ puis on en déduira la courbe $Z(\omega)$.

Il n'est pas nécessaire de faire l'étude complète de $Z(\omega)$ pour dégager l'essentiel de son comportement. Il est clair qu'il y a 4 régions intéressantes :

- $Y(\omega = 0) = 0$
- $Y\left(\omega \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(L + L_0)C}}\right) \longrightarrow \pm\infty$
- $Y\left(\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 0$
- $Y(\omega \longrightarrow +\infty) = +\infty$.

D'où l'allure de $Y(\omega)$, puis celle de $Z(\omega)$:

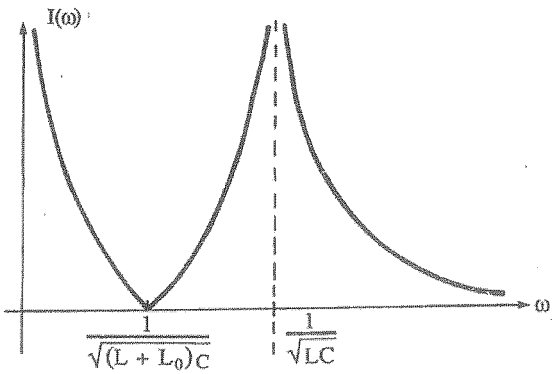


3°) L'intensité I est donnée par :

$$I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)}$$

Si la tension U est constante, $I(\omega)$ est l'inverse de $Z(\omega)$: voir figure.

Remarque : Un courant infini n'a évidemment aucune réalité : nous avons en effet négligé toutes les résistances du circuit.



23 – Circuit R_1 L_1 C_1 L_2 C_2 (L_2 et C_2 en parallèle).

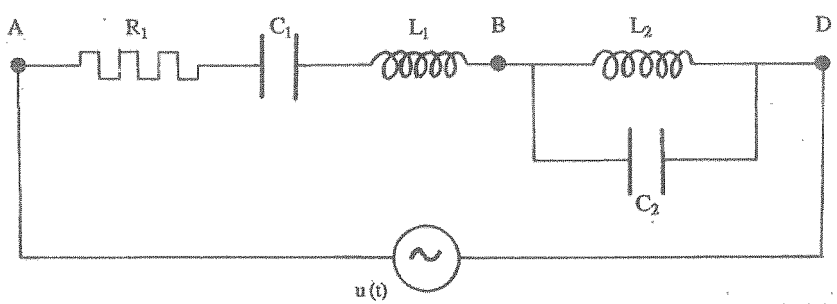
Soit le circuit de la figure ci-dessous alimenté par une tension sinuoïdale $u(t)$ de pulsation ω. On utilisera la méthode symbolique, en négligeant la mutuelle induction, pour calculer :

1°) L'impédance totale $\overline{Z}$ du circuit entre les points A et D. En déduire le déphasage φ du courant principal $\overline{i}$ par rapport à $\overline{u}$.

2°) a) Former l'équation qui fournit les pulsations à la résonance en posant $\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ *et* $\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$.

b) Trouver ses solutions ω' et ω'' dans le cas $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ en posant $\beta = 1 + \frac{C_1}{2C_2}$.

c) Déterminer le rapport $\frac{C_1}{C_2}$ pour que ω' soit le $p^{ième}$ harmonique de ω'', p entier positif .



Extrait, Rabat, MP2, Mai 84.

1°) L'impédance $\overline{Z_{AB}}$ entre A et B est : $\overline{Z_{AB}} = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega$

L'impédance $\overline{Z_{BD}}$ entre B et D est : $\overline{Z_{BC}} = \left(\frac{1}{jL_2\omega} + jC_2\omega\right)^{-1}$

L'impédance totale $\overline{Z}$ entre A et D est :

$$\overline{Z} = \overline{Z_{AB}} + \overline{Z_{BD}} = R + j\frac{L_1C_1\omega^2 - 1}{C_1\omega} + j\frac{L_2\omega}{1 - L_2C_2\omega^2}$$

$$\boxed{\overline{Z} = R + j\left(\frac{L_2\omega}{1 - L_2C_2\omega^2} - \frac{1 - L_1C_1\omega^2}{C_1\omega}\right)}$$

Comme $\overline{u} = \overline{Z}\,\overline{i}$, le déphasage φ du courant sur la tension est :

$$\boxed{\varphi = -arg\,\overline{Z} = -arctan\left(\frac{1}{R}\left(\frac{L_2\omega}{1 - L_2C_2\omega^2} - \frac{1 - L_1C_1\omega^2}{C_1\omega}\right)\right)}$$

2°) a) A la résonance, le circuit se comporte comme une résistance pure et alors :

$$\frac{L_2\omega}{1 - L_2C_2\omega^2} = \frac{1 - L_1C_1\omega^2}{C_1\omega}$$

Posons $\omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1}$ et $\omega_2^2 = \frac{1}{L_2C_2}$

On a alors $L_2C_1\omega^2 = (1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2})(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2})$

ou $$\boxed{\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{L_1C_2}) + \omega_1^2\,\omega_2^2 = 0}$$

b) Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, on a $L_1C_1 = L_2C_2$. L'équation précédente peut s'écrire :

$$\omega^4 - \omega^2(2\omega_0^2 + \frac{1}{L_1C_2}) + \omega_0^4 = 0$$

$$\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2(1 + \frac{C_1}{2C_2}) + \omega_0^4 = 0$$

Posons $\beta = 1 + \frac{C_1}{2C_2}$, il vient : $\omega^4 - 2\beta\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0$.

Cette équation admet toujours 2 solutions, ω'^2 et ω''^2 :

$$\omega'^2 = \omega_0^2\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\right);\ \omega''^2 = \omega_0^2\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}\right)$$

d'où les deux solutions

$$\boxed{\omega' = \omega_0 \sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}} \qquad \omega'' = \omega_0 \sqrt{\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}}}$$

c) On veut que ω' soit le p^{ième} harmonique de ω'', c–à–d :

$$\omega' = p\omega'' \Rightarrow \omega'^2 = p^2 \omega''^2 \quad \Rightarrow \quad \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} = p^2 \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}\right)$$

ou encore $$(1 + p^2)\sqrt{\beta^2 - 1} = \beta (p^2 - 1) \Rightarrow \beta^2 - 1 = \beta^2 \left(\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}\right)^2$$

d'où $$\beta^2 = \frac{(p^2 + 1)^2}{(p^2 + 1)^2 - (p^2 - 1)^2} = \frac{(p^2 + 1)^2}{4p^2}$$

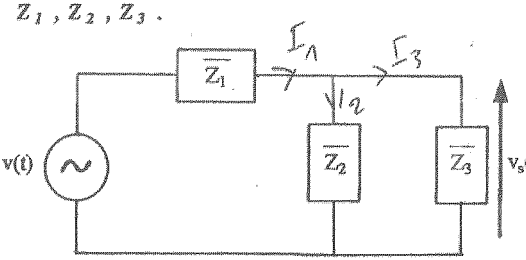
Comme β est positif, il vient : $$\beta = \frac{p^2 + 1}{2p}$$

soit $\left(\beta = 1 + \frac{C_1}{2C_2}\right)$: $$\boxed{\frac{C_1}{C_2} = \frac{(p - 1)^2}{p}}$$

En particulier, ω' ne peut être égale à $\omega''(p = 1)$ que si $C_1 = 0$ c–à–d si on court–circuite C_1.

24 – Circuit Z_1 Z_2 Z_3 (Z_2 et Z_3 en parallèle) – Permittivité complexe d'un condensateur.

N.B. Les questions A, B et C peuvent être traitées indépendamment, on aura intérêt à effectuer les calculs en gardant les impédances en notation $\overline{Z_1}$, $\overline{Z_2}$, $\overline{Z_3}$.



On constitue un montage à l'aide de trois impédances $\overline{Z_1}$, $\overline{Z_2}$ ***et*** $\overline{Z_3}$ ***branchées comme indiqué sur le schéma. Ce montage est alimenté par une source de tension sinusoïdale***
$v(t) = V_0 \cos \omega t$

A / 1°) Déterminer en fonction de $v(t)$, $\overline{Z_1}$, $\overline{Z_2}$ ***et*** $\overline{Z_3}$ ***le courant*** $i_3(t)$ ***qui***

circule dans l'impédance $\overline{Z_3}$. Comment peut-on constituer $\overline{Z_1}$ et $\overline{Z_2}$ pour que le courant i_3 soit indépendant de $\overline{Z_3}$?

2°) Quels sont alors l'amplitude de i_3 (t) et sa phase φ.

On posera φ_1 et φ_2 respectivement les phases de $\overline{Z_1}$ et $\overline{Z_2}$.

B / L'impédance $\overline{Z_1}$ est une bobine de self inductance L et de résistance négligeable, $\overline{Z_2}$ est un condensateur de capacité C et $\overline{Z_3}$ une résistance R_3. On fixe la pulsation ω de la source de telle sorte que $2LC\omega^2 = 1$. Montrer que dans ces conditions, l'amplitude du courant i_1 dans la bobine est indépendante de R_3.

C / Le condensateur C est maintenant rempli d'une matière diélectrique de permittivité complexe $\bar{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon\, e^{-j\varphi}$
On rappele que dans ce cas la capacité du condensateur est $C' = \bar{\varepsilon}\, C$

1°) Exprimer le courant i_2 qui circule dans le condensateur en fonction des données.

2°) Quelle est la puissance complexe dans le condensateur ?

3°) Quelle est la puissance moyenne absorbée en présence du diélectrique avec pertes ? Comparer cette puissance avec celle qui est absorbée par un diélectrique sans pertes pour lequel la permittivité ε est réelle.

Meknès, PC2, Juin 87.

A / 1°) L'impédance équivalente $\overline{Z_{23}}$ entre $\overline{Z_2}$ et $\overline{Z_3}$ est telle que :

$$\frac{1}{\overline{Z_{23}}} = \frac{1}{\overline{Z_2}} + \frac{1}{\overline{Z_3}} \qquad \text{soit,} \quad \overline{Z_{23}} = \frac{\overline{Z_2}\ \overline{Z_3}}{\overline{Z_2} + \overline{Z_3}}.$$

Le courant total $\overline{i_1}$ dans le circuit est : $\overline{i_1} = \dfrac{\overline{v}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_{23}}}$

Le courant $\overline{i_3}$ dans $\overline{Z_3}$ est : $\overline{i_3} = \dfrac{\overline{Z_{23}}\ \overline{i_1}}{\overline{Z_3}}$

En remplaçant, on trouve $\boxed{\overline{i_3} = \dfrac{\overline{Z_2}\ \overline{v}}{\overline{Z_1}\ \overline{Z_2} + \overline{Z_2}\ \overline{Z_3} + \overline{Z_3}\ \overline{Z_1}}}$

Le courant $\overline{i_3}$ sera indépendant de $\overline{Z_3}$ si $\boxed{\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = 0}$

2°) Si $\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = 0$, alors $\overline{i_3} = \dfrac{\overline{v}}{\overline{Z_1}}$

d'où $\boxed{I_3 = |\overline{i_3}| = \dfrac{V_0}{|\overline{Z_1}|}}$

et la phase φ de i_3 : $\boxed{\varphi = arg\ \overline{v} - arg\ \overline{Z_1} = -\varphi_1}$

B / Gardons les mêmes notations qu'en A /, on a :

$$\overline{i_1} = \frac{\overline{v}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_{23}}}$$

avec $\overline{Z_1} = jL\omega$ et $\overline{Z_{23}} = \dfrac{\dfrac{R_3}{jC\omega}}{R_3 + \dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R_3}{1 + jR_3 C\omega}$.

d'où $\overline{i} = \dfrac{\overline{v}}{jL\omega + \dfrac{R_3}{1 + jR_3C\omega}} = \dfrac{\overline{v}(1 + jR_3C\omega)}{R_3(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$

On en tire l'amplitude $I_1 = |\overline{i_1}|$:

$$I_1 = \frac{V_0\sqrt{1 + R_3^2 C^2\omega^2}}{\sqrt{R_3^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}}$$

On a $LC\omega^2 = 1/2$ et donc $L\omega = \dfrac{1}{2C\omega}$, d'où :

$$\sqrt{R_3^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2} = \sqrt{R_3^2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4C^2\omega^2}} = \frac{1}{2C\omega}\sqrt{1 + R_3^2 C^2\omega^2}$$

Il reste : $\boxed{I_1 = 2C\omega V_0}$

L'amplitude I_1 est effectivement indépendante de R_3. D'ailleurs, on aurait pu prendre comme condition plus générale $1 = \alpha LC\omega^2$, α étant un nombre positif quelconque. On aurait alors trouvé $I_1 = \alpha C\omega V_0$.

C / 1°) On avait trouvé $\overline{i_3} = \dfrac{\overline{Z_2}\ \overline{v}}{\overline{Z_1}\ \overline{Z_2} + \overline{Z_2}\ \overline{Z_3} + \overline{Z_3}\ \overline{Z_1}}$. On peut permuter 2 et 3 (mais pas 1 et 3 ou 2 et 3!), il vient immédiatement :

$$\overline{i_2} = \frac{\overline{Z_3}\ \overline{v}}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}$$

2°) On se place dans le cas où $\overline{Z_2} = 1/jC'\omega$. Par définition, la puissance complexe $\overline{P}$ dans le condensateur est ($\overline{v_s}$ étant la tension aux bornes du condensateur) :

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\,\overline{v_s}\,\overline{i_2^*} \quad , \quad \text{où } \overline{i_2^*} \text{ est le conjugué de } \overline{i_2} \ .$$

Or $\overline{v_s} = \overline{Z_2}\ \overline{i_2}$ d'où $\overline{P} = \frac{1}{2}\,\overline{Z_2}\ \overline{i_2}\,\overline{i_2^*}$

$$\overline{P} = \frac{1}{2jC'\omega} \cdot \frac{V_0^2 \cdot Z_3^2}{|\ Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1\ |^2}$$

3°) La puissance moyenne est donnée par la partie réelle de $\overline{P}$.

◆ En présence du diélectrique avec pertes ($C' = (\varepsilon' - j\varepsilon'')\,C$), on a une puissance moyenne :

$$P' = Re(\overline{P}) = \frac{V_0^2 \cdot Z_3^2}{|\ \overline{Z_1}\ \overline{Z_2} + \overline{Z_2}\ \overline{Z_3} + \overline{Z_3}\ \overline{Z_1}\ |} \cdot \frac{1}{2\omega C} \cdot Re\left(\frac{-j}{\varepsilon' - j\varepsilon''}\right)$$

soit

$$P' = \frac{V_0^2 \cdot Z_3^2}{|\ \overline{Z_1}\ \overline{Z_2} + \overline{Z_2}\ \overline{Z_3} + \overline{Z_3}\ \overline{Z_1}\ |} \times \frac{\varepsilon''}{2\omega(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2)C}$$

◆ En présence du diélectrique sans pertes, la permittivité est réelle, $\varepsilon'' = 0$ et la puissance moyenne est nulle.

Il est bien connu qu'un condensateur idéal (sans pertes) ne consomme pas d'énergie, alors qu'un condensateur avec pertes (présence d'une résistance de fuite) en consomme.

25 – Bobines couplées (1).

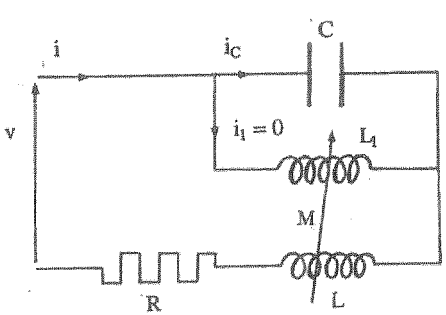
Soit le circuit électrique suivant, fonctionnant en régime propre sous une tension alternative :

$$v = 100 \cos \omega t.$$

On donne :

$C = 10^{-2}\ \mu F$; $R = 20\ k\Omega$

$L = 1\ H$; $M = 0{,}25\ H$



1°) En appliquant les lois de Kirchhoff, montrer qu'en imposant au circuit le condition $i_1 = 0$, on fixe la fréquence propre du circuit. Evaluer cette fréquence.

2°) Déterminer, dans ces conditions ($i_1 = 0$), l'expression du courant i dans le circuit et de la tension v_C aux bornes du condensateur.

3°) Toujours dans les mêmes conditions, donner une représentation vectorielle des tensions.

Extrait, Tétouan, PC2, Janvier 84.

1°) Appliquons les lois de Kirchhoff (les courants sont indiqués sur la figure de l'énoncé) :

◆ Maille (C, L, R) : $$-\overline{v} + \frac{\overline{i_C}}{jC\omega} + jL\omega\,\overline{i} + (-jM\omega\,\overline{i_1}) + R\,\overline{i} = 0 \qquad (1)$$

◆ Maille (C, L_1) : $$\frac{1}{jC\omega}\,\overline{i_C} - jL\omega\,\overline{i_1} - (-jM\omega\,\overline{i}) = 0 \qquad (2)$$

(Avec ces notations, la mutuelle inductance M est positive).

Si $\overline{i_1} = 0$, alors $\overline{i_C} = \overline{i}$ et l'équation (2) donne :

$$\overline{i}\left(\frac{1}{jC\omega} + jM\omega\right) = j\,\overline{i}\,(M\omega - \frac{1}{C\omega}) = 0$$

On voit que la pulsation prend alors la valeur ω_0 telle que : $MC\omega_0^2 = 1$

La fréquence f_0 correspondante est : $$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{MC}}}$$

A.N. $C = 10^{-8}\ F$; $M = 0{,}25\ M$. $f_0 = 3185$ Hz.

2°) Si $\overline{i_1} = 0$, l'équation (1) donne $(\overline{i_C} = \overline{i})$:

$$\overline{i}\,(R + jL\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0}) = \overline{v}$$

d'où $$\overline{i} = \frac{\overline{v}}{R + j(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0})}$$

Si $\overline{v} = V_0\,e^{j\omega t}$, l'expression de l'intensité $I = |\,\overline{i}\,|$ est :

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)^2}}$$

Or $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = \frac{LC\omega_0^2 - 1}{C\omega_0} = \frac{L - M}{\sqrt{MC}}$, d'où

$$\boxed{I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{(L-M)^2}{MC}}}}$$

A.N. : $V_0 = 100$ V ; $R = 20\ 10^3\ \Omega$; L = 1 H; $M = 0{,}25$ H ; $C = 10^{-2}\ \mu F$. $I = 4$ mA .

La tension aux bornes du condensateur est : $\overline{V_C} = \frac{\overline{i}}{jC\omega_0}$;

$$\boxed{V_C = \frac{I}{C\omega_0} = I\sqrt{\frac{M}{C}}}$$

A.N. : $V_1 = 20$ V .

3°) On a $\overline{i} = \frac{\overline{v}}{R + j\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)} = \overline{v} \cdot \frac{R - j\frac{L-M}{\sqrt{MC}}}{R^2 + (L-M)^2/MC}$.

Si $\overline{v} = V_0 e^{j\omega t}$, on a $\overline{i} = I e^{j(\omega t + \varphi)}$, avec $tg\ \varphi = -\frac{L-M}{R\sqrt{MC}}$.

A.N. : $tg\ \varphi = -0{,}75$; $\varphi = -36{,}9°$

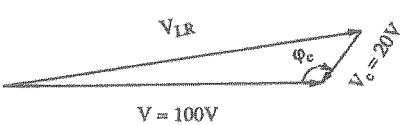
◆ De $\overline{v_C} = \frac{\overline{i}}{jC\omega_0}$, on tire :

$\varphi_C = arg\ \overline{v_C} = \varphi - \pi/2 = -126{,}9°$

On a donc $v = 100\cos\omega t$ et $v_C = 20\cos(\omega t - \varphi_C)$

Notons $\overline{v_{LR}}$ la tension aux bornes de (L, R).

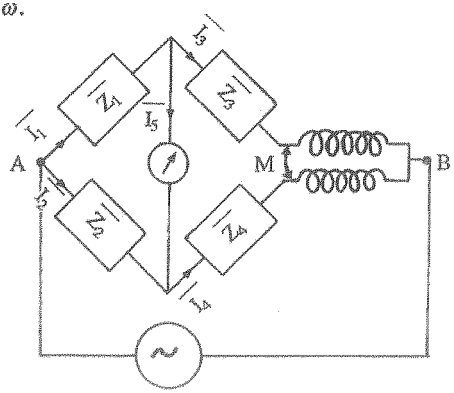
◆ On a $\overline{v} = \overline{v_C} + \overline{v_{LR}}$; la représentation vectorielle associée est représentée ci-contre.



26 – Pont de Wheatstone – Bobines couplées.

Le pont de "Wheatstone" de la figure est alimenté entre A et B par une tension sinusoïdale de pulsation ω.

1°) Etablir la condition d'équilibre du pont ($I_5 = 0$) en tenant compte du couplage magnétique caractérisé par le coefficient d'inductance mutuelle M.



2°) On suppose que les impédances $\overline{Z_1}$ et $\overline{Z_2}$ sont constituées respectivement par une résistance R_1 et une capacité C_2. La branche CB est constituée par une bobine d'inductance L_3 et une résistance R_3 en série.

Entre D et B on a une bobine d'inductance L_4 et de résistance R_4 qui sont en série avec une capacité C_4 choisie telle que $L_4 C_4 \omega^2 = 1$.

Le couplage magnétique est toujours assuré, calculer L_3 et M à l'équilibre du pont.

Extrait, Fès, PC2, Janvier 88.

1°) Lorsque le pont est équilibré, on a $V_C = V_D$ et alors :

$$\begin{cases} \overline{i_1}\ \overline{Z_1} = i_2\ \overline{Z_2} \\ \overline{i_3}\ \overline{Z_3} + j M\omega\ \overline{i_4} = \overline{i_4}\ \overline{Z_4} + j M\omega\ \overline{i_3} \end{cases}$$

Or $\overline{i_1} = \overline{i_3}$ et $\overline{i_2} = \overline{i_4}$

La condition d'équilibre du pont peut alors s'écrire :

$$\boxed{\frac{\overline{Z_3} - j M \omega}{\overline{Z_1}} = \frac{\overline{Z_4} - j M \omega}{\overline{Z_2}}}$$

2°) On a ici : $\overline{Z_1} = R_1$; $\overline{Z_2} = \dfrac{1}{jC_2\omega}$;

Avec les notations de la question 1°) :

$$\overline{Z_3} = R_3 + jL_3\,\omega \qquad \overline{Z_4} = R_4 + jL_4\,\omega + \frac{1}{jC_4\omega}\,.$$

Or $$\overline{Z_4} = R_4 + j\left(\frac{L_4 C_4\,\omega^2 - 1}{C_4\,\omega}\right) = R_4 \qquad \text{puisque } L_4 C_4\,\omega^2 = 1.$$

La condition d'équilibre de pont s'écrit ici: $$\frac{R_3 + jL_3\,\omega - jM\omega}{R_1} = \frac{R_4 - jM\omega}{\frac{1}{jC_2\omega}}\,.$$

$$R_3 + j\omega(L_3 - M) = R_1 C_2 M\omega^2 + j R_1 R_4 C_2 \omega\,.$$

d'où $$R_3 = R_1\,C_2\,M\,\omega^2 \qquad \text{et} \qquad L_3 - M = R_1\,R_4\,C_2\,.$$

$$\boxed{M = \frac{R_3}{R_1 C_2\,\omega^2}\;;\quad L_3 = M + R_1 R_4 C_2}$$

27 – Bobines couplées (2).

Le circuit représenté sur la figure ci-dessous comprend un générateur de f.e.m sinusoïdale e(t) = E cosωt et de résistance interne R, un récepteur d'impédance R', deux bobines identiques de self L couplées par une inductance mutuelle M et un condensateur de capacité C.

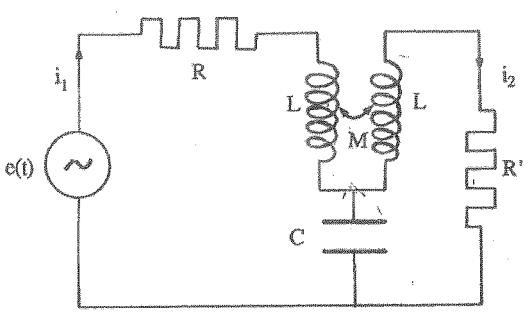
1°) On pose $\overline{Z} = R + jS$ *et* $\overline{Z'} = R' + jS$ *avec* $S = L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}$.

Exprimer les amplitudes complexes de i_1 *et* i_2 *en fonction de Z, Z', M, C et E.*

En déduire les intensités efficaces de i_1 *et* i_2 *ainsi que leur déphasage dans le cas où S = 0.*

2°) Quelles relations doivent vérifier les éléments du circuit pour que i_2 *soit nul ? Conclure.*

3°) On se place dans le cas où M et S sont nuls.



Quelle valeur faut-il donner à L et C pour obtenir le maximum de puissance dans R'

Extrait, Fès, PC2, 1986.

1°) Appliquons les lois de Kirchhoff :

– Maille *(R, L, C, e)* :

$$-\overline{e} + R\,\overline{i_1} + jL\omega\,\overline{i_1} + (-jM\omega\,\overline{i_2}) + \frac{1}{jC\omega}(\overline{i_1} - \overline{i_2}) = 0$$

Avec cette écriture, vu les sens de i_1 et i_2, M est positive .

– Maille *(L, R', C)* : $jL\omega\overline{i_2} + (-jM\omega\,\overline{i_1}) + R'i_2 - \frac{1}{jC\omega}(\overline{i_1} - \overline{i_2}) = 0.$

On a donc le sytème suivant :

$$\begin{cases} \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\overline{i_1} - j\left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\overline{i_2} = \overline{e} \\ -j\left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\overline{i_1} + \left[R' + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\overline{i_2} = 0 \end{cases}$$

Posons $S = L\omega - \frac{1}{C\omega}$; $\overline{Z} = R + jS$ et $\overline{Z'} = R' + jS$. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \overline{Z}\,\overline{i_1} - j\left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\overline{i_2} = \overline{e} \\ \overline{i_2} = \dfrac{j\left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{\overline{Z'}}\,\overline{i_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{i_1}\left(\overline{Z} + \dfrac{\left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{Z'}\right) = \overline{e} \\ \overline{i_2} = \dfrac{j\left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{\overline{Z'}}\,\overline{i_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{i_1} = \dfrac{\overline{e}\,\overline{Z'}}{\overline{Z}\overline{Z'} + \left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \overline{i_2} = \dfrac{j\left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\overline{e}}{\overline{Z}\overline{Z'} + \left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \end{cases}$$

Puisque $\overline{e} = E\,e^{j\omega t}$, les amplitudes complexes $\overline{I_1}$ et $\overline{I_2}$ sont :

$$\boxed{\overline{I_1} = \frac{Z'E}{ZZ' + \left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad ; \quad \overline{I_2} = \frac{j(M\omega - \frac{1}{C\omega})\,E}{ZZ' + \left(M\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Dans le cas où $S = 0$ $(LC\omega^2 = 1)$, on a : $\quad M\omega - \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{M - L}{\sqrt{LC}}$

Les amplitudes réelles I_1 et I_2 sont :

$$\boxed{I_1 = \frac{R'E}{RR' + \frac{(M-L)^2}{LC}} \quad ; \quad I_2 = \frac{\frac{|M-L|}{\sqrt{LC}}\,E}{RR' + \frac{(M-L)^2}{LC}}}$$

Le déphasage φ_1 (resp .φ_2) de I_1 (resp . I_2) sur la tension est :

$$\boxed{\varphi_1 = arg\ \overline{I_1} = 0 \ ; \ \varphi_2 = arg\ \overline{I_2} = \pi/2}$$

2°) Pour avoir $i_2 = 0$, il faut que : $\boxed{M = L}$

La seule façon d'avoir un courant nul dans R' est d'avoir un couplage entre les deux bobines, indépendamment des valeurs de R'et C .

3°) Cas où $M = S = 0$. L'amplitude I_2 est alors :

$$I_2 = \frac{\sqrt{L/C}\ E}{RR' + L/C} = \frac{\sqrt{x}\ E}{RR' + x} \quad , \qquad \text{avec } x = L/C$$

Pour E, R et R' fixés, la puissance $P = R' I_2^{\,2}$ sera extremum pour $\dfrac{dI_2}{dx} = 0$

On a $$\frac{dI_2}{dx} = E\,\frac{\frac{RR' + x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(RR' + L/C)^2} = E\,\frac{(RR' - x)}{2\sqrt{x}\ (RR' + L/C)^2}$$

On a $\dfrac{dI_2}{dx} > 0$ pour $x < RR'$ et $\dfrac{dI_2}{dx} < 0$ pour $x > RR'$.

Le courant I_2, et par suite la puissance dissipée dans R', passe donc par un maximum pour

$$\boxed{\frac{L}{C} = RR'}$$

IV - PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

28 – Propagation des ondes électromagnétiques (1).

1°) Rappeler les équations de Maxwell reliant les vecteurs du champ électromagnétique $\vec{D}$ *et* $\vec{H}$ *aux constantes caractéristiques d'un milieu conducteur :* ρ_l, $\vec{j_l}$, ε *et* μ.

Donner pour chacune d'elles la signification physique.

2°) Donner le nom des grandeurs physiques représentées par les lettres $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$ *et* $\vec{D}$ *et le nom des unités correspondantes.*

3°) Quelle est la signification physique de la relation $\vec{j_l} = \sigma \vec{E}$.

4°) Donner le nom des grandeurs physiques représentées par $\vec{j_l}$ *et* σ *et le nom des unités correspondantes.*

5°) Les équations de propagation en $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ *dans le vide* ($\rho_l = 0$, $\vec{j_l} = 0$) *admettent comme solutions dans le cas de la propagation d'une onde plane monochromatique :*

$$\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{j(\vec{k}\,.\,\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B_0}\, e^{j(\vec{k}\,.\,\vec{r} - \omega t)}$$

$\vec{E_0}$ *et* $\vec{B_0}$ *sont deux vecteurs constants.*

a) Donner le nom et la signification physique de la grandeur représentée par $\vec{k}$.

b) Montrer que pour tout vecteur $\vec{X}$ *de la forme* $\vec{X} = \vec{X_0}\, e^{j(\vec{k}\,.\,\vec{r} - \omega t)}$

on a

$$\vec{\nabla}\,\vec{X} = j\,\vec{k}\,\vec{X} \qquad (I)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{X} = j\,\vec{k} \wedge \vec{X} \qquad (II)$$

$\vec{r} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\vec{k} \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\vec{X_0} \begin{vmatrix} X_{0x} \\ X_{0y} \\ X_{0z} \end{vmatrix}$ $\vec{X_0}$ *est un vecteur constant.*

6°) En utilisant les équations de Maxwell et les relations (I) et (II)

appliquées aux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, montrer que :

a) $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux .

b) $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.

c) $\| \vec{E} \|$ est proportionnel à c $\| \vec{B} \|$.

Extrait, Tétouan, PC2, Janvier 85.

1°) Les quatre équations de Maxwell, faisant intervenir les vecteurs champs électriques et magnétiques $\vec{E}$ et $\vec{B}$, ainsi que les vecteurs excitations électriques et magnétiques $\vec{D}$ et $\vec{H}$, sont :

$$div\ \vec{D} = \rho_{libre} \quad , \text{où } \rho_{libre} \text{ est la densité volumique de charges libres.} \tag{1}$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$div\ \vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\overrightarrow{rot\ H} = \vec{j}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \tag{4}$$

où $\vec{j}_{libre}$ est la densité de courants libres (courants de conduction).

Ces équations sont tout à fait générales. Pour un milieu *L.H.I.* caractérisé par les constantes ε et μ, respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique, on a en outre les relations particulières suivantes :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

On peut alors présenter les équations de Maxwell dans un milieu *L.H.I.* sous la forme suivante pour ne faire apparaître que $\vec{D}$ et $\vec{H}$:

$$div\ \vec{D} = \rho_{libre} \tag{1'}$$

$$rot\ \vec{D} = -\varepsilon\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{2'}$$

$$div\ \vec{H} = 0 \tag{3'}$$

$$rot\ \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{4'}$$

◆ **Signification physique :**

La signification physique de ces 4 équations apparaît mieux quand on les exprime sous forme intégrale. Soit *V* un volume quelconque limité par une surface (fermée) *S*. Les

équations (1') et (3') donnent, en utilisant le théorème de la divergence (Green–Ostrogradski) (on suppose donc les composantes des champs continues et dérivables dans la région considérée) :

$$\iint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \rho_{libre}\, d\tau = Q_{libre} \qquad (1'')$$

où Q_{libre} est donc la charge libre contenue dans le volume V.

$$\iint_S \vec{H} \cdot \vec{dS} = 0 \qquad (2'')$$

La relation (1") est la généralisation du théorème de Gauss : Le flux sortant de l'excitation électrique $\vec{D}$ à travers toute surface fermée S est égale à la charge libre contenue dans le volume limité par S.

La relation (2") montre que le flux sortant de l'excitation magnétique $\vec{H}$ à travers toute surface fermée est nul. Rappelons que ce résultat n'est valable que dans les milieux *L.H.I.*

Sinon, c'est le champ magétique $\vec{B}$ qui jouit de cette propriété.

Pour les deux autres équations de Maxwell, considérons un contour fermé C limitant une surface S. Les équations (2') (ou plutôt (2) qui est plus générale) et (4') donnent alors, en utilisant le théorème de Stokes :

$$\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (3'')$$

où ϕ est donc le flux sortant de $\vec{B}$ à travers S. On a permuté $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\iint$: la relation précédente est valable pour un circuit **immobile**.

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = I_c + I_d\,, \qquad (4'')$$

où I_c et I_d sont respectivement les courants de conduction et de déplacement.

La relation (2") traduit les phénomènes d'induction électromagnétique : la f.e.m induite est donnée, au signe près, par la dérivée du flux par rapport au temps.

La relation (4") est la généralisation du théorème d'Ampère : la circulation de l'excitation $\vec{H}$ sur un contour fermé est donnée par la somme des courants de conduction et de déplacement enlacés par le circuit.

2°) Rappelons les appellations des 4 vecteurs $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ et $\vec{H}$:

– $\vec{E}$: champ électrique . Unité : Volt / mètre

– $\vec{D}$: Excitation (ou induction ou déplacement) électrique. Unité : C/m² (penser à $div\ \vec{D} = \rho$)

– $\vec{B}$: champ magnétique . Unité : Tesla

– $\vec{H}$: Excitation (ou induction) magnétique. Unité : Ampère / mètre (penser à $rot\ \vec{H} = \vec{j}$).

Remarque : Certains auteurs, de plus en plus rares, inversent les appellations de $\vec{B}$ et $\vec{H}$.

3°) La relation $\vec{j}_{libre} = \sigma \vec{E}$ relie le vecteur densité du courants libres $\vec{j}_{libre}$ en un point au champ électrique en ce point; c'est **la loi d'Ohm locale**. La constante de proportionnalité σ est caractéristique du milieu considéré, c'est la **conductivité électrique**, qui varie, entre autres, avec la température.

Signification physique : La densité de courant $\vec{j}_{libre}$ est, par définition, proportionnelle à la vitesse $\vec{v}$ des électrons de conduction. Donc $\vec{v}$ est proportionnel à $\vec{E}$. Cela est possible car bien que le champ $\vec{E}$ accélère constamment les électrons de conduction, la vitesse $\vec{v}$ de ces derniers n'augmente pas indéfiniment, car chaque électron subit lors de son déplacement toutes sortes de collisions qui lui font reperdre l'énergie acquise lors de l'accélération (cette énergie est dissipée dans le matériau : c'est l'effet Joule). La loi d'Ohm traduit en fait l'équilibre dynamique qui en résulte.

4°) Rappelons les appellations et les unités :

– $\vec{j}_{libre}$: Densité de courant libre (ou de conduction). Unité : Ampère /(mètre)²

– σ : Conductivité électrique . Unité : $1/(Ohm \times mètre) = \Omega^{-1}\ m^{-1}$.

5°) Les quantités complexes sont notées de la même façon que les quantités réelles, aucune ambiguité n'étant crainte. Par exemple, le champ électrique $\vec{E}$ d'une onde plane monochromatique sera noté :

$$\vec{E} = \vec{E_0}\ exp\left[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right].$$

a – Le vecteur $\vec{k}$ est appelé vecteur d'onde. Sa direction et son sens sont ceux de la propagation de l'onde. Les plans d'onde (ensemble des points dans le même état vibratoire à un instant donné) sont les plans orthogonaux à $\vec{k}$.

b – Soit $\vec{X} = \vec{X_0}\ \ exp\left[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right]$ un vecteur dont l'amplitude $\vec{X_0}$ est un vecteur constant de coordonnées (X_{0x}, X_{0y}, X_{0z}) , avec $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$.

– Formons $div\ \vec{X} = \vec{\nabla} . \vec{X} = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z}$.

On a $$\frac{\partial X_x}{\partial x} = X_{0x}\, jkx\, exp\left[j(\vec{k} . \vec{r} - \omega t) \right]$$

De même pour $\dfrac{\partial X_y}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial X_z}{\partial z}$, d'où :

$$\vec{\nabla} . \vec{X} = j\, exp\left[j(\vec{k} . \vec{r} - \omega t) \right] . [kx\, X_{0x} + k_y\, X_{0y} + k_z X_{0z}]$$

$$\boxed{\vec{\nabla} . \vec{X} = j\, \vec{k} . \vec{X}} \qquad (I)$$

– Formons $rot\vec{X} = \vec{\nabla} \wedge \vec{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z} \\ \frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x} \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} \end{bmatrix}$

La première composante vaut : $(X_{0z}\, jk_y - X_{0y}\, jk_z)\, exp\left[j(\vec{k} . \vec{r} - \omega t) \right]$.

De même pour les deux autres composantes. D'où

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{X} = j\, \vec{k} \wedge \vec{X}_0\, exp\left[j(\vec{k} . \vec{r} - \omega t) \right].$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{X} = j\, \vec{k} \wedge \vec{X}} \qquad (II)$$

6°) Dans le vide, les équations de Maxwell donnent, en remarquant que $\dfrac{\partial \vec{X}}{\partial t} = -j\omega \vec{X}$:

$$j\vec{k} . \vec{D} = 0 \qquad \text{ou} \qquad j\vec{k} . \vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$j\vec{k} \wedge \vec{D} = \varepsilon_0 \mu_0 j\omega \vec{H} \qquad \text{ou} \qquad \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \qquad (6)$$

$$j\vec{k} . \vec{B} = 0 \qquad (7)$$

$$j\vec{k} \wedge \vec{H} = -j\omega \vec{D} \qquad \text{ou} \qquad \vec{B} \wedge \vec{k} = \varepsilon_0 \mu_0 \omega \vec{E} \qquad (8)$$

a – Les relations (5) et (7) indiquent que $\vec{E} \perp \vec{k}$ et $\vec{B} \perp \vec{k}$: les champs électriques et magnétiques sont orthogonaux à la direction de la propagation; on dit que les champs sont **transversaux**.

b – La relation (6) ou (8) montre que $\vec{E} \perp \vec{B}$. Compte tenu de 6a) on voit que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct.

c – $\vec{E}$ étant orthogonal à $\vec{k}$, la relation (6) donne : $\boxed{E = \frac{\omega}{k} B = cB}$

où $c = \frac{\omega}{k}$ est la vitesse de propagation de l'onde dans le vide.

29 – Propagation des ondes électromagnétiques (2).

Une onde électromagnétique sinusoïdale (dépendant du temps par le facteur $exp(j\omega t)$ se propage dans un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope de permittivité électrique ε et de perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$.

1°) Ecrire les 4 équations de Maxwell que vérifient à chaque instant t, le champ électrique $\vec{E}$ et l'excitation magnétique $\vec{H}$ en un point M quelconque.

2°) En déduire l'équation de la conservation de l'électricité.

3°) Etablir les équations de propagation du champ électrique $\vec{E}$ et de l'excitation magnétique $\vec{H}$.

4°) En posant $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ et en définissant M par ses coordonnées x, y, z dans un repère cartésien (O, x, y, z), montrer que les solutions des équations de propagation peuvent s'écrire :

$$\vec{E} = \vec{E_0} \; exp\; j(\omega t - \vec{k} . \vec{r}\;)$$

$$\vec{H} = \vec{H_0} \; exp\; j(\omega\, t - \vec{k} . \vec{r}\;)$$

5°) Déterminer la position respective de $\vec{B}$ et $\vec{H}$ et donner l'expression de l'impédance d'onde.

Extrait, Casa I, MP2, Janvier 88.

1°) Les 4 équations de Maxwell, valables en tout milieu, sont (voir excercice précédent) :

$$div\, \vec{D} = \rho_{libre} \qquad div\, \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\, \vec{H} = \vec{j}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dans un milieu L.H.I. où $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\vec{H}$ et $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, on a, pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$:

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon} \qquad div\ \vec{H} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\ \vec{H} = \vec{j}_{libre} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Aucune confusion n'étant possible, l'indice "libre" sera omis dans toute la suite.

2°) On peut exprimer la conservation de l'électricité en disant que le flux sortant de la densité de courant $\vec{j}$ à travers une surface fermée S doit représenter la charge perdue par unité de temps par le volume V contenu dans S :

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho\, d\tau = \iiint_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Or $$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iiint_V div\ \vec{j}\ d\tau \qquad \text{(théorème de la divergence)}$$

d'où $$\boxed{div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Cette équation est évidemment contenue dans les équations de Maxwell. En effet, prenons la divergence de $\overrightarrow{rot}\ \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$:

$$div\ \overrightarrow{rot}\ \vec{H} = div\ \vec{j} + div\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = div\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} div\ \vec{D}$$

Or $div\ rot \to 0$ et $div\ \vec{D} = \rho$, on retrouve donc que : $div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

3°) Formons $\overrightarrow{rot\ rot\ E}$:

$$\overrightarrow{rot\ rot\ E} = rot\left(-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{rot}\ \vec{H} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Par ailleurs, on connait l'identité $\overrightarrow{rot\ rot} = \overrightarrow{grad\ div} - \vec{\Delta}$. Comme ici $div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, il

vient :

$$\overrightarrow{\Delta E} - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \overrightarrow{grad}\,\rho + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{\Delta E} - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{si } \rho = j = 0$$

On aboutit à la même équation pour $\overrightarrow{H}$ si on forme $\overrightarrow{rot\ rot\ H}$.

4°) Vérifions que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\ exp\left[j(\omega t - \overrightarrow{k} . \overrightarrow{r}) \right]$ est bien une solution de l'équation de propagation $\overrightarrow{\Delta E} - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$.

Pour la composante selon x, on a : $(\overrightarrow{\Delta E})_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z}$

On a $$\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_{0x}(-j k_x)\ exp\left[j(\omega t - \overrightarrow{k} . \overrightarrow{r}) \right]$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = E_{0x}(-k x^2)\ exp\left[j(\omega t - \overrightarrow{k} . \overrightarrow{r}) \right] = -k x^2 E_x$$

De même pour $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$; il vient : $(\overrightarrow{\Delta E})_x = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E_x = -k^2 E_x$.

De même pour $(\overrightarrow{\Delta E})_y$ et $(\overrightarrow{\Delta E})_z$, il vient : $\overrightarrow{\Delta E} = -k^2 \overrightarrow{E}$

Par ailleurs $$\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = j\omega \overrightarrow{E} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \overrightarrow{E} .$$

Donc $$\overrightarrow{\Delta E} - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = (-k^2 + \omega^2 \varepsilon\mu_0) \overrightarrow{E}$$

Ainsi, le champ $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\ exp\left[j(\omega t - \overrightarrow{k} . \overrightarrow{r}) \right]$ est une solution de l'équation de propagation à condition de poser $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0$.

Il en est de même pour le champ $\overrightarrow{H}$.

5°) En tout point, le vecteur $\overrightarrow{E}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{H}$ et chacun d'eux est perpendiculaire à $\overrightarrow{k}$, c-à-d à la direction de propagation ; d'ailleurs le trièdre $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{k})$ est

direct (voir exercice précédent).

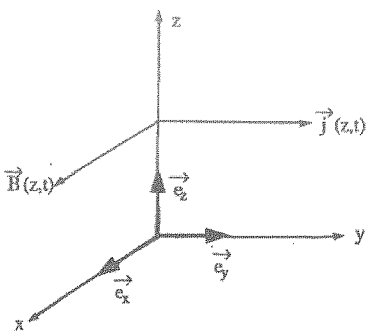
L'impédance d'onde Z est par définition :

$$Z = \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{H}\|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}$$

(voir exercice précédent)

30 – Propagation d'un courant alternatif dans un conducteur. Effet de peau.

On se propose d'étudier la propagation d'un courant alternatif dans un conducteur homogène.



Ce conducteur occupe le demi–espace z>0 d'un repère orthonormé oxyz.

Le courant de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ *est caractérisé par un vecteur densité de courant :*

$$\vec{i}(z, t) = i(z) \cos\omega t \, \vec{e}_y$$

On considère que le milieu conducteur est caractérisé par les grandeurs $(\gamma, \varepsilon_0, \mu_0)$ *qui sont respectivement sa conductibilité, sa permittivité et sa perméabilité , ces 2 dernières grandeurs étant égales à celles du vide.*

Les vecteurs champ électrique $\vec{E}$ *et champ magnétique* $\vec{B}$ *ne dépendent, comme le vecteur densité de courant* $\vec{i}$*, que de la profondeur z dans le conducteur et du temps.*

On suppose vérifiées les 2 hypothèses suivantes :

a) La loi d'Ohm est valable aux fréquences considérées.

b) Le terme "courant de déplacement de Maxwell" $\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ *est négligeable par rapport à la densité de courant de conduction* $\vec{i}$.

On utilisera avantageusement la représentation complexe en remarquant

que cosωt n'est autre que la partie réelle de $e^{-j\omega t}$.

1°) A l'aide des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm, établir l'équation différentielle satisfaite par i(z).

2°) Montrer que le vecteur densité de courant peut s'écrire:

$$\vec{i} = i_0 \; e^{-z/\delta} \; cos(\frac{z}{\delta} - \omega t) \; \vec{e}_y$$

Exprimer δ, profondeur de pénétration ou épaisseur de peau, en fonction de ω, μ_0 et γ.

A.N. : cas du cuivre : $\gamma = 6\,10^7\ \omega^{-1}\ m^{-1}$.

Calculer δ pour la fréquence industrielle f = 50 Hz et pour un courant HF : $f = 3.10^{10}$ Hz.

3°) Montrer que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'écrivent :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \; e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_E\right)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \; e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_B\right)$$



On précisera les modules E_0 et B_0 en fonction de i_0, γ, δ et ω ainsi que les déphasages φ_E et φ_B par rapport au courant.

RAPPEL : $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}$ SI $\quad \mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ SI

Extrait, Rabat, MP2, Mai 84.

1°) Ecrivons les équations de Maxwell dans le cas le plus général (la densité de courant sera notée $\vec{i}$ et non $\vec{j}$ dans ce problème).

$$div\,\vec{D} = \rho_{libre} \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{H} = \vec{i}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dans le cas d'un conducteur caractérisé par sa conductivité électrique γ, sa permittivité ε_0 et sa perméabilité μ_0, on a de plus les relations suivantes :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{H} = \mu_0 \vec{B} \qquad \vec{i}_{libre} = \gamma \vec{E}$$

La dernière relation (loi d'Ohm) est supposée vérifiée pour les fréquences utilisées dans le problème. Par ailleurs, on néglige les courants de déplacement devant les courants de

conduction (courants libres) : $\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} << i_{libre}$.

En omettant l'indice "libre", on peut alors écrire les équations de Maxwell vérifiées dans le conducteur :

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{rot\ E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\ \vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{rot\ B} = \mu_0 \vec{i}$$

Formons $\overrightarrow{rot\ rot\ E}$: $\overrightarrow{rot\ rot\ E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{rot\ B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{i}$

Or on sait que $\overrightarrow{rot\ rot} = \overrightarrow{grad\ div} - \vec{\Delta}$

Par ailleurs, on sait que $div\ \overrightarrow{rot} \to 0$, donc $div\ \overrightarrow{rot\ B} = \mu_0\ div\ \vec{i} = 0$. On en déduit, puisque $\vec{i} = \gamma \vec{E}$, que $div\ \vec{E} = 0$ et donc que : $\rho = 0$

Ceci reste d'ailleurs vrai en régime sinusoïdal même si on ne néglige pas devant $\vec{i}$ le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Un conducteur en régime sinusoïdal ne peut avoir de charges excédentaires qu'en surface.

De ce qui précède on tire $\vec{\Delta E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{i}$

soit $\boxed{\vec{\Delta i} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{i}}{\partial t}}$

Or dans ce problème, $\vec{i} = \vec{i}(z, t) = i(z)\ e^{-j\omega t}\ \vec{e}_y$ ne dépend ni de x ni de y,

donc $\vec{\Delta i} = \frac{\partial^2 \vec{i}}{\partial z^2}$. Par ailleurs, $\frac{\partial \vec{i}}{\partial t} = -j\omega \vec{i}$, d'où :

$$\frac{\partial^2 \vec{i}}{\partial z^2} + j\,\gamma \mu_0\, \omega\, \vec{i} = 0$$

d'où $\boxed{\frac{d^2 i(z)}{dz^2} + j\,\gamma\,\mu_0\,\omega\,i(z) = 0}$

2°) L'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente étant :

$$X^2 + j\gamma\mu_0\omega = \left(X - \sqrt{-j\,\gamma\,\mu_0\,\omega}\right)\left(X + \sqrt{-j\,\gamma\,\mu_0\,\omega}\right) = 0,$$

on en déduit la solution générale :

$$i(z) = A'\,exp\left(-\sqrt{-j\,\gamma\,\mu_0\,\omega}\;\;z\right) + B'\,exp\left(\sqrt{-j\,\gamma\,\mu_0\,\omega}\;\;z\right).$$

où A' et B' sont deux constantes complexes. Comme $\sqrt{-j} = (1-j)\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :

$$i(z) = A'\,exp\left[-(1-j)\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\,\omega}{2}}\;\;z\right] + B'\,exp\left[(1-j)\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}\;\;z\right]$$

Quand $z \to \infty$, la densité de courant ne peut augmenter indéfiniment : on doit avoir $B' = 0$.

Par ailleurs, posons $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu_0\omega}}$, il vient :

$$i(z) = A'\,e^{-z/\delta}\,.\,e^{jz/\delta}$$

d'où $$\vec{i(z,t)} = A'\,e^{-z/\delta}\;\;e^{j(z/\delta - \omega t)}\;\vec{e_y}$$

soit, en repassant aux valeurs réelles et en notant i_0 la densité de courant à $t = 0$ et $z = 0$:

$$\boxed{\vec{i(z,t)} = i_0\,e^{-z/\delta}\,.\,cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\vec{e_y}}$$

avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu_0\omega}}}$: profondeur de pénétration ou épaisseur de peau.

Le terme $e^{-z/\delta}$ indique que le courant s'atténue rapidement au fur et à mesure qu'on pénétre dans le conducteur : c'est l'effet de peau, caractérisé par la profondeur de pénétration δ. Typiquement, pour $z > \delta$, la densité de courant i devient négligeable devant i_0 : le courant ne pénétre plus. δ dépend de la fréquence du courant ainsi que de la conductivité γ. Pour un conducteur parfait, $\delta = 0$: le courant est strictement superficiel.

A.N. Pour $f = 50\ Hz$, $$\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi 10^{-7} \times 6\ 10^3 \times 2\pi 50}} = 9{,}2\ \ mm$$

Pour $f = 3\ 10^{10}\ Hz$, $$\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi 10^{-7} \times 6\ 10^7 \times 2\pi \times 3\ 10^{10}}} = 0{,}38\ \ \mu$$

3°) Le champ $\vec{E}$ s'obtient à partir de la loi d'Ohm :

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{i} = \frac{i_0}{\gamma}\;e^{-z/\delta}\;cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\vec{e_y}$$

Le champ $\vec{E}$ se met donc sous la forme : $\vec{E} = \vec{E_0}\;e^{-z/\delta}\,cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \varphi_E\right)$

avec $\boxed{\vec{E}_0 = \frac{i_0}{\delta}\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \varphi_E = 0}$

Le champ $\vec{B}$ s'obtient en notant que vu la dépendance en $e^{-j\omega t}$ du problème, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega\vec{B}$

et en utilisant la relation de Maxwell : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega B_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega B_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega B_z \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -E_0 e^{-z/\delta} e^{j(z/\delta - \omega t)}\left(\frac{-1+j}{\delta}\right) = -j\omega B_x \\ 0 = -j\omega B_y \\ 0 = -j\omega B_z \end{cases}$$

Comme $1 + j = \sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$, il vient :

$$\begin{cases} B_x = \frac{\sqrt{2}\,E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} e^{j(z/\delta - \omega t + \pi/4)} \\ B_y = 0 \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Soit, en notations réelles

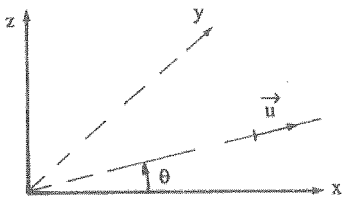
$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \pi/4\right)\vec{e}_x$$

Le champ $\vec{B}$ se met donc sous la forme :

$$\vec{B} = \vec{B}_0\, e^{-z/\delta} \cos\left(z/\delta - \omega t + \varphi_B\right)$$

avec $\boxed{\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{2}}{\delta^2\omega} i_0 \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \varphi_B = \pi/4}$

31 – Densité d'énergie et vecteur de Poynting.



Une onde plane monochromatique, polarisée rectilignement suivant la direction oz, se propage dans le vide (ε_0, μ_0). La direction de propagation $\vec{u} \in$ xoy et fait un angle θ avec l'axe ox.

1°) Donner la vitesse de propagation de cette onde.

2°) Exprimer les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de son module k et de l'angle θ. Donner l'expression complexe du champ électrique $\vec{E}$ et en déduire celle du champ magnétique $\vec{H}$.

3°) Déterminer en fonction de ε_0 et μ_0 l'impédance caractéristique Z_c définie par le rapport :

$$Z_c = \frac{\| \vec{E} \|}{\| \vec{H} \|} \quad ohm.$$

A.N. $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi\, 10^9}$ *SI et* $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ *SI*

4°) Donner les expressions réelles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

On fera tous les calculs qui suivent avec les expressions réelles.

5°) Calculer la densité d'énergie $\frac{dW}{\partial \tau}$, et sa valeur moyenne au cours du temps : $< \frac{\partial W}{\partial \tau} >$.

6°) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{P}(M, t)$, son module et la valeur moyenne du module par rapport au temps $< P >$.

Quelle relation existe entre $< \frac{\partial W}{\partial \tau} >$ et $< P >$?

Extrait, Meknès, PC2, Juin 86.

1°) Cette onde plane se propage dans le vide à une vitesse c donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3\ 10^8\ m s^{-1}$$

2°) Le vecteur d'onde est donné par :

$$\vec{k} = k\vec{u} = k\cos\theta\ \vec{e_x} + k\sin\theta\ \vec{e_y} = \begin{cases} k\cos\theta \\ k\sin\theta \\ 0 \end{cases}$$

Si ω est la pulsation de l'onde ($\omega = kc$), le champ électrique en un point M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) est donné, en notation complexe, par :

$$\vec{E} = \vec{E_0}\ e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

L'onde étant polarisée rectilignement selon oz, le vecteur $\vec{E_0}$ est constant, et :

$$\vec{E} = E_0\ e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}\ \vec{e_z}$$

Par ailleurs, $\omega = kc$ et $\vec{k}.\vec{r} = k(x\cos\theta + y\sin\theta)$. Il vient :

$$\vec{E} = E_0\ e^{j\,k\,(c\,t - x\cos\theta - y\sin\theta)}\ \vec{e_z}$$

De la relation de Maxwell : $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on tire dans notre cas (voir exercice 28) :

$$j\,\vec{k} \wedge \vec{E} = j\,\omega\,\vec{B} = j\,\mu_0\,\omega\,\vec{H}$$

d'où

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega}\,(\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{k}{\mu_0\,\omega}\,\vec{u} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c\,\mu_0}\,\vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$= \frac{1}{c\mu_0}\ e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}.(\sin\theta\ \vec{e_x} - \cos\theta\ \vec{e_y})$$

Ainsi,

$$\vec{H} = \frac{E_0}{c\mu_0}\ e^{j\,k(c\,t - x\cos\theta - y\sin\theta)}.(\sin\theta\ \vec{e_x} - \cos\theta\ \vec{e_y})$$

3°) L'impédance d'onde ou impédance caractéristique est :

$$Z_c = \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{H}\|} = c\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

A.N.

$$Z_c = 120\ \pi = 377\ \Omega$$

4°) Les expressions réelles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont, d'après ce qui précède :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\,\vec{e_x}$$

$$= E_0 \cos\left[k(ct - x\cos\theta - y\sin\theta)\right]\vec{e_x}$$

et
$$\vec{H} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E_0}}{Z_c}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

$$= \frac{E_0}{Z_c}\cos\left[k(ct - x\cos\theta - y\sin\theta)\right]\left[\sin\theta\,\vec{e_x} - \cos\theta\,\vec{e_y}\right]$$

5°) La densité d'énergie dans le vide est donnée par :

$$w = \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$$

$$\boxed{w = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

Sa valeur moyenne temporelle est : $< w > = \varepsilon_0 E_0^2 < \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) >$

Comme
$$< \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) > = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\,dt = \frac{1}{2}$$

il vient :
$$\boxed{< w > = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2}$$

6°) En un point M, à l'instant t, le vecteur de Poynting vaut :

$$\vec{P}(M,t) = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{1}{Z_c}\,\vec{E} \wedge \vec{u} \wedge \vec{E}$$

Or $\vec{E} \wedge \vec{u} \wedge \vec{E} = \vec{u}\,E^2 - \vec{E}(\vec{E}.\vec{u}) = E^2\,\vec{u}$, puisque $\vec{E}.\vec{u} = 0$. Donc :

$$\boxed{\vec{P}(M,t) = \frac{E^2}{Z_c}\,\vec{u}}$$

On a
$$\|\vec{P}\| = \frac{E^2}{Z_c} = \frac{1}{Z_c}E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

$$\boxed{< \|\vec{P}\| > = \frac{E_0^2}{2Z_c} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2}$$

On constate que :
$$\boxed{< \|\vec{P}\| > = c < w >}$$

La signification de cette équation apparaît clairement dans le problème suivant (32).

Remarque : On peut calculer directement $< \|\vec{P}\| >$ en utilisant la notation complexe. En

effet, on a :

$$< \vec{P} > = \frac{1}{2} Re(\vec{E} \wedge \vec{H^*}) = \frac{1}{2} Re \left[E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \frac{E_0}{Z_c} e^{-j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \vec{u} \right]$$

d'où $$< \| \vec{P} \| > = \frac{E_0^2}{2Z_c}$$

32 – Vecteur de Poynting – Pression de radiation.

1°) Ecrire les quatre équations de Maxwell des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en l'absence de sources extérieures. Les discuter dans le cas où les champs sont fonctions du temps et d'une seule variable spatiale, x par exemple, et montrer que ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{Ox}$) forment un trièdre direct. Exprimer la valeur de B en fonction de E sachant que E = f(t – x/c) est solution des équations d'onde. En déduire les dimensions de $\vec{B}$.

2°) Donner, sans démonstration, l'expression de la densité d'énergie u d'un champ électromagnétique quelconque. Définir le flux d'énergie à l'aide d'un vecteur densité du courant d'énergie $\vec{S}$. Ecrire l'équation différentielle exprimant la conservation de l'énergie. En déduire à l'aide des équations de Maxwell l'expression du vecteur de Poynting $\vec{S}$.

3°) Calculer $\| \vec{S} \|$ et u pour l'onde électromagnétique de la question n°1. Justifier la proportionnalité entre ces deux grandeurs.
Soit $E(x, t) = E_0(x)\, e^{i(\omega t - kx)}$ le champ électromagnétique de cette onde, calculer la valeur moyenne de $\| \vec{S} \|$ pour une période. On considère un angle solide infinitésimal dΩ autour de $\vec{Ox}$ et on suppose que l'énergie ne s'accumule ni se perd dans le vide. Le flux de $\vec{S}$ est-il conservatif ? Exprimer E(x) en fonction de x, distance du point où l'on calcule à la source.

4°) Calculer la densité d'impulsion de l'onde et la pression par unité du temps (force par unité de surface) qu'elle exerce sur un milieu qui l'absorbe complétement.

A.N.: un cm² de la terre reçoit en moyenne deux calories par minute sous forme de rayonnement. En déduire la valeur de E_0 à la surface de la terre et à la source (soleil). Calculer la pression du rayonnement solaire aux deux endroits.

Données : Rayon du soleil : 7 10^8 m

distance terrre soleil : 15 10^{10} m

1 calorie = 4,18 joule ; $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} . 10^{-9}$; c = 3 10^8 m/s

On donne : $\vec{V} .(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} . (\vec{V} \wedge \vec{A}) - \vec{A} . (\vec{V} \wedge \vec{B})$

Extrait, Rabat, PC2.

1°) Les équations de Maxwell s'écrivent dans le vide, et en l'absence de sources ($\rho = j = 0$) :

$$div\ \vec{E} = 0 \qquad (1) \qquad\qquad div\ \vec{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{rot}\, E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2) \qquad\qquad rot\ \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

Quand les champs ne dépendent, outre du temps, que d'une seule variable spatiale, on dit qu'on a une onde plane. Soit x, par exemple, cette variable. L'équation (1) donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x = 0$$

Donc E_x ne peut dépendre que du temps. L'équation (3) montre qu'il en est de même pour B_x. Par ailleurs, la relation (2) donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

Vu la non-dépendance en y et z, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial t} = \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \qquad (5)$$

De même, la relation (4) donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = -c^2 \dfrac{\partial B_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial t} = -c^2 \dfrac{\partial B_y}{\partial x} \end{cases} \qquad (c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1) \qquad (6)$$

On déduit de ce qui précède que E_x et B_x sont constants. Comme on ne s'intéresse ici qu'aux champs dépendant du temps, on prendra :

$$\boxed{E_x = 0 \quad ; \quad B_x = 0}$$

On a donc $\vec{E} \perp \vec{e_x}$ et $\vec{B} \perp \vec{e_x}$, on dit que ces deux champs sont **transverses**.

Par ailleurs, en prenant les dérivées secondes $\partial^2 / \partial x \, \partial t$, il vient facilement :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) X = 0$$

ou X représente E_y ou E_z ou B_y ou B_z.

Remarque : Evidemment, en partant des équations de Maxwell et en utilisant l'outil vectoriel, il est connu qu'on arrive à l'équation de propagation générale :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{X} = 0$$

Ce genre de calcul a déjà été fait dans un excercice précédent et il était plus instructif de retrouver l'équation de propagation en traitant les équations de Maxwell d'une façon plus "directe".

L'équation de propagation montre qu'on peut remplacer l'opérateur :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{par} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{par} \quad \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} .$$

En fait, on sait que cette équation de propagation admet une solution générale de la forme $f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$, la fonction f correspondant à une onde progressive selon ox et la fonction g correspondant à une onde se propagent dans le sens opposé. On voit bien alors que la relation $\dfrac{\partial}{\partial x} = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t}$ est vérifiée pour l'onde progressive f alors, que $\dfrac{\partial}{\partial x} = + \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t}$ est vérifiée pour l'onde régressive g.

On ne considèrera dans la suite que le cas de l'onde progressive. Il vient alors, d'après (5) :

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial t} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial t} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases}$$

En remarquant que $(E_x = 0)$: $\vec{e_x} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ -E_z \\ E_y \end{vmatrix}$, on voit que le système précédent donne :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c}\,\vec{e_x} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B} - \frac{1}{c}\,\vec{e_x} \wedge \vec{E}\right) = 0$$

Comme on ne s'intéresse qu'aux champs variables, il vient : $\vec{B} = \dfrac{1}{c}\,\vec{e_x} \wedge \vec{E}$

Ainsi $\vec{B} \perp \vec{E}$. On sait déjà que $\vec{B} \perp \vec{e_x}$. Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e_x})$ est donc direct.

Remarque : De même, on verrait facilement que le système (6) conduit à :

$$\vec{E} = c\,\vec{B} \wedge \vec{e_x}$$

2°) La densité d'énergie u est donnée par : $u = \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{B^2}{\mu_0}$

Or $B = E/c$ et $c^2\,\mu_0\,\varepsilon_0 = 1$, d'où $\boxed{u = \varepsilon_0 E^2 = \dfrac{B^2}{\mu_0}}$

◆ **Vecteur de Poynting :**

Intéressons-nous maintenant à la quantité d'énergie traversant une surface dS par unité de temps. Faisons l'analogie avec le courant électrique : on sait que le flux de la densité de courant (d'électricité) à travers une surface dS donne la quantité d'électricité traversant cette surface par unité de temps. Définissons alors de même une densité de courant d'énergie par un vecteur $\vec{S}$ dont le flux à travers une surface donne l'énergie traversant par unité de temps cette surface. La conservation de l'énergie implique alors que le flux sortant de $\vec{S}$ à travers une surface fermée Σ doit représenter l'énergie perdue par unité de temps par le volume V limité par Σ :

$$\iint_{\Sigma} \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V} u\,\mathrm{d}t$$

En utilisant le théorème de la divergence, il vient : $\boxed{div\ \vec{S} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0}$

Si on reprend l'analogie notée plus haut, cette équation, qui traduit la conservation de l'énergie, correspond à $div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ qui traduit, elle, la conservation de l'électricité.

Remarque : Nous avons exprimé la conservation de l'énergie dans le **vide**. Sinon, il faudrait tenir compte du terme $\vec{E} \cdot \vec{j}$ qui représente la puissance perdue par effet Joule.

◆ **Expression de $\vec{S}$:**

On a $$-div\ \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$ et les équations (2) et (4), il vient :

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$$

Or $$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

d'où $$-\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{E})$$

soit $$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}}$$

3°) Dans le cas de l'onde de la question 1°), on a :

$$\| \vec{S} \| = \frac{\| \vec{E} \| \| \vec{B} \|}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0}$$

$$u = \varepsilon_0 E^2$$

On constate que : $$\boxed{\| \vec{S} \| = u\, c}$$

Reprenons encore l'analogie ; la relation précédente s'écrirait : $\| \vec{j} \| = \rho v$, qui signifie que l'électricité (charge électrique) se propage à la vitesse v. De même, la relation $\| \vec{S} \| = u\, c$ signifie que l'énergie se propage à la vitesse c.

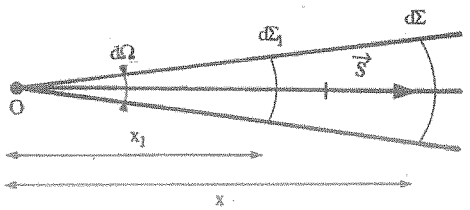
◆ Prenons un champ $E(x, t) = E_0(x)\ e^{i(\omega t - kx)}$. Pour calculer la valeur moyenne (temporelle) de $\| \vec{S} \|$, il est préférable de passer en notations réelles car le champ E intervient **au carré** .

$$\langle \| \vec{S} \| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_0^2(x)}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - kx)\ dt = \frac{E_0^2(x)}{2c\mu_0}$$

$$\boxed{< \| \vec{S} \| > = \frac{E_0^2(x)}{2c\mu_0}}$$

◆ Puisque l'énergie ne se perd ni ne se crée, on a $\frac{\partial}{\partial t} < u > = 0$ (l'énergie contenue dans un volume donné est constante en moyenne) et $div < \vec{S} > = 0$: Le vecteur $< \vec{S} >$ est à flux conservatif.

Soit O un point source d'où on voit deux surfaces $d\Sigma_1$ et $d\Sigma$ situées respectivement à x_1 et x de O sous un même angle solide $d\Omega$. Puisque $< \vec{S} >$ est à flux conservatif, on a



$$< \vec{S_1} > . \vec{d\Sigma_1} = < \vec{S} > . \vec{d\Sigma} = cte$$

$$< S_1 > d\Sigma_1 = < S > d\Sigma = cte$$

Or $$d\Omega = \frac{d\Sigma_1}{x_1^2} = \frac{d\Sigma}{x^2}$$

d'où $$< S_1 > x^2 \, d\Omega = < S > x^2 \, d\Omega$$

On constate donc que $< \| \vec{S} \| >$ varie en $\frac{1}{x^2}$. On en déduit que $E_0(x)$ varie en $\frac{1}{x}$:

$$\boxed{E_0(x) = \frac{A}{x}, \text{ où } A \text{ est une constante}}$$

Remarque : L'onde issue de O est évidemment sphérique, mais si on place les surfaces $d\Sigma_1$ suffisamment éloignées de O, l'onde dans ces zones pourra être considérée comme plane.

4°) On associe à l'onde électromagnétique un flux d'impulsion donné par : $\frac{< S >}{c} = u$

et une densité d'impulsion donnée par : $\frac{1}{c} \cdot \frac{< S >}{c} = \frac{< S >}{c^2}$

La pression, ou plutôt la valeur moyenne de la pression est donnée par : $\boxed{< P > = \frac{2 < S >}{c}}$

Application numérique :

– A la surface de la terre, on a une énergie par unité de surface et par unité de temps qui vaut : $< S_T > = \frac{2 \times 4{,}18}{60} . 10^4 = 1{,}4 \ kJ \ m^{-2} s^{-1} = 1{,}4 \ kW \ m^{-2}$

– A la surface de la terre, $E_0(x)$ vaut E_0^T : $E_0^T = \sqrt{\frac{2}{c\mu_0} < S_T >} \approx 1027 \ Vm^{-1}$

– A la surface du soleil, $E_0(x)$ vaut E_0^S qui vérifie (R est le rayon du soleil et D la distance soleil – terre) : $E_0^S R = E_0^T D$

d'où $E_0^S = E_0^T \frac{D}{R} \approx 2{,}3\ 10^5\ V\ m^{-1}$

– La pression de radiation au niveau de la terre vaut :

$$< P_T > = 2 \frac{< S_T >}{c} = 0{,}93\ 10^{-5}\ N.m^{-2}$$

– Au niveau du soleil, elle vaut :

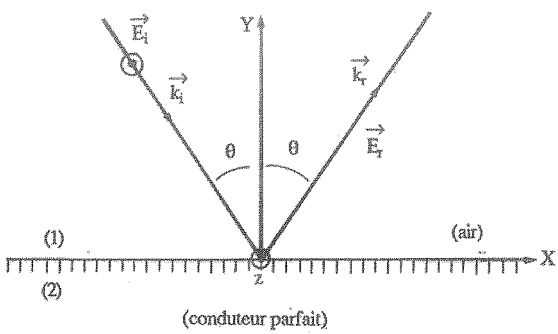
$$< P_S > = 2 \frac{< S_S >}{c} = < P_T > \left(\frac{D}{R}\right)^2 = 0{,}43\ N.m^{-2}$$

Même au niveau du soleil, la pression de radiation reste bien faible.

33 – Réflexion sur un conducteur parfait.

On considère une onde électromagnétique plane incidente de pulsation ω d'amplitude E_{oi} dont la direction de propagation fait un angle θ avec la normale à la surface plane d'un milieu parfaitement conducteur. Cette onde ainsi polarisée rectilignement suivant la direction Oz donne naissance à une onde réfléchie dans l'air faisant le même angle θ avec la normale (voir figure).

On se propose de déterminer l'état électromagnétique en un point quelconque de l'air (milieu (1)).



1°) a) En utilisant les conditions de passage à la surface de séparation entre les deux milieux, montrer que $\vec{E}_i = -\vec{E}_r$

b) Préciser sur le schéma les directions des champs.

2°) a) Exprimer les vecteurs d'onde incident $\vec{k}_i$ *et réfléchi* $\vec{k}_r$ *en fonction de* ω_1, *c (vitesse de propagation dans l'air) et l'angle* θ.

b) Donner en notation complexe les expressions des champs électriques incident $\vec{E}_i$ *et réfléchi* $\vec{E}_r$.

En déduire celles des inductions magnétiques $\vec{B}_i$ *et* $\vec{B}_r$ *correspondantes.*

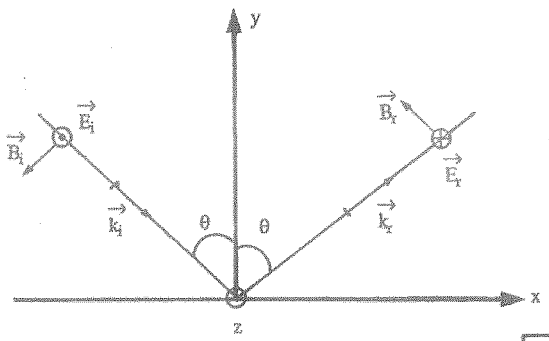
3°) a) Déterminer le champ résultant en un point M du milieu (1).

b) Déduire l'induction magnétique $\vec{B}$ associée.

c) Préciser la nature de l'onde résultante et déterminer sa vitesse de phase en fonction de c et θ.

Extrait, Meknes, MP2 - PC2, Janvier 88.

1°) a) A la surface de séparation entre deux milieux, la composante tangentielle E_T du champ électrique est continue. Ici, on a d'un côté le conducteur parfait, où le champ $\vec{E}_{cond}$ est nul ; de l'autre côté il y a l'air, avec deux contributions : celle de l'onde incidente $\vec{E}_i$ et celle de l'onde réfléchie $\vec{E}_r$; on a donc : $\vec{E}_{i,T} + \vec{E}_{r,T} = \vec{0}$



Or dans ce problème la composante normale $E_{iN} = \vec{0}$ et donc $\vec{E}_i = \vec{E}_{i,T}$.

La composante normale de l'onde réfléchie est alors nulle aussi. En effet :

$D_{cond,N} - D_{air,N} = \sigma_{libre} = 0$

$\Rightarrow D_{air,N} = 0$

$\Rightarrow E_{i,N} + E_{r,N} = 0 \Rightarrow E_{r,N} = 0.$

La relation $\vec{E}_{i,T} + \vec{E}_{i,T} = \vec{0}$ permet alors d'écrire : $\boxed{\vec{E}_r = -\vec{E}_i}$

b – Le champ $\vec{E}_r$ est donc dirigé suivant $(-\vec{e}_z)$ (voir figure)

2°) La propagation se fait dans l'air à une vitesse notée c. Si ω est la pulsation de l'onde plane, les vecteurs d'onde incidents et réfléchis ont pour module $k = \frac{\omega}{c}$. Comme l'onde réfléchie se propage suivant une direction faisant le même angle θ avec la normale que le fait la direction de l'onde incidente (voir figure), il vient :

$$\vec{k}_i = \frac{\omega}{c}(\sin\theta\ \vec{e}_x - \cos\theta\ \vec{e}_y)$$

$$\vec{k}_r = \frac{\omega}{c}(\sin\theta\ \vec{e}_x + \cos\theta\ \vec{e}_y)$$

b – En notation complexe, les champs en un point $M(x, y, z)$ sont :

$$\vec{E_i} = \vec{E_{oi}}\, e^{j(\omega t - \vec{k_i}.\vec{r})} = E_0 \exp\left[j(\omega t - \frac{\omega}{c}(x \sin\theta - y\cos\theta))\right] \vec{e_z}$$

$$\vec{E_r} = \vec{E_{or}}\, e^{j(\omega t - \vec{k_r}.\vec{r})} = -E_0 \exp\left[j(\omega t - \frac{\omega}{c}(x \sin\theta + j\cos\theta))\right] \vec{e_z}$$

Pour déterminer les champs magnétiques correspondants, on utilise la relation de Maxwell–Faraday : $\overrightarrow{rot}\,\vec{E_i} = -\dfrac{\partial \vec{B_i}}{\partial t}$ (pour l'onde incidente) qui s'écrit ici, puisque l'onde est plane monochromatique :

$$-j\,\vec{k_i} \wedge \vec{E_i} = -j\,\omega\,\vec{B_i}$$

Avec $\vec{E_i} = E_i\,\vec{e_z}$, cela donne :

$$\begin{cases} B_{ix} = -\dfrac{\cos\theta}{c} E_i = -\dfrac{E_0 \cos\theta}{c} \exp\left[j(\omega t - \dfrac{\omega}{c}(x \sin\theta - j\cos\theta))\right] \\ B_{iy} = -\dfrac{\sin\theta}{c} E_i = -\dfrac{E_0 \sin\theta}{c} \exp\left[j(\omega t - \dfrac{\omega}{c}(x \sin\theta - y\cos\theta))\right] \\ B_{iz} = 0 \end{cases}$$

On peut évidemment, si on préfère, calculer directement $\overrightarrow{rot}\,\vec{E_i}$ plutôt que de la remplacer par le résultat général $-j\,\vec{k_i} \wedge \vec{E_i}$.

De même, on obtient pour le champ magnétique réfléchi $\vec{B_r}$:

$$\begin{cases} B_{rx} = -\dfrac{E_0 \cos\theta}{c} \exp\left[j(\omega t - \dfrac{\omega}{c}(x \sin\theta - j\cos\theta))\right] \\ B_{ry} = +\dfrac{E_0 \sin\theta}{c} \exp\left[j(\omega t - \dfrac{\omega}{c}(x \sin\theta - y\cos\theta))\right] \\ B_{rz} = 0 \end{cases}$$

On peut voir les représentations de $\vec{B_i}$ et $\vec{B_r}$ sur la figure ci–dessus, à un instant où le champ à $\vec{E_i}$ est suivant $\vec{e_z}$.

3°) a) Dans l'air, le champ électrique $\vec{E}$ résultant au point $M(x, y, z)$ est :

$$\vec{E} = \vec{E_i} + \vec{E_r} = E_0\, e^{j\omega t}\left[\exp[-j\frac{\omega}{c}(x\sin\theta - y\cos\theta)] - \exp[-j\frac{\omega}{c}(x\sin\theta + y\cos\theta)]\right]\vec{e_z}$$

$$= E_0 \exp[j(\omega t - \frac{\omega}{c} x \sin\theta)] \times 2j \sin(\frac{\omega}{c} y \cos\theta)\, \vec{e_z}$$

Si on repasse aux valeurs réelles, on a :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin\left(\frac{\omega}{c} y \cos\theta\right) \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \sin\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Le champ magnétique $\vec{B}$ associé est, de la même façon :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = -\dfrac{2E_0 \cos\theta}{c} \cos\left(\dfrac{\omega}{c} y \cos\theta\right) \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c} x \sin\theta\right) \\ B_y = -\dfrac{2E_0 \sin\theta}{c} \sin\left(\dfrac{\omega}{c} y \cos\theta\right) \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c} x \sin\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

c) On constate que les amplitudes des champs associés ne sont pas constantes, elles dépendent de y : l'onde résultante n'est pas une onde plane (malgré la présence du terme $e^{j\omega t}$!).

De l'expression de $\vec{E}$, on tire la phase $\varphi(x, t)$:

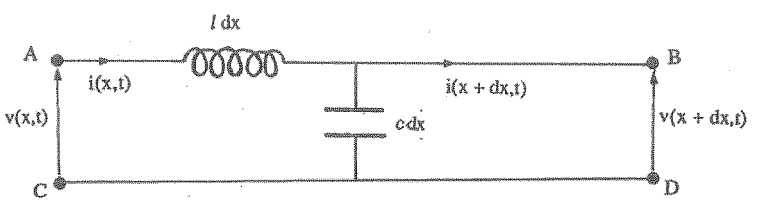
$$\varphi(x,t) = \omega t - \frac{\omega}{c} x \sin\theta + \frac{\pi}{2}$$

Par définition, la vitesse de propagation de la phase, ou vitesse de phase, est :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sin\theta}$$

34 - Ligne de transmission.

Chaque cellule élémentaire d'une ligne de transmission peut être représentée par le schéma ci-dessous :



Cette cellule élémentaire est caractérisée par :

l : self par unité de longueur H/m.

c : capacité par unité de longueur F/m.

tension d'entrée : $V_A - V_C = v(x, t)$.

tension de sortie : $V_B - V_D = v(x + dx, t)$.

longueur de la cellule : $dx = CD = AB$.

1°) En utilisant les lois de Kirchhoff, montrer que la tension $v(x)$ et le courant $i(x)$ vérifient les équations différentielles :

A) $$-\frac{\partial v}{\partial x} = l\frac{\partial i}{\partial t} \quad ; \quad B) \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = c\frac{\partial v}{\partial t}$$

2°) a - A partir de A et B, montrer que la tension $v(x,t)$ vérifie l'équation différentielle:

C) $$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

b - Montrer que $i(x,t)$ vérifie la même équation que $v(x,t)$ (on utilisera l'égalité) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

3°) Que représente l'équation C ?

4°) On s'intéresse au cas d'un régime sinusoïdal.
Résoudre l'équation différentielle C, et montrer que $v(x,t)$ et $i(x,t)$ correspondent, dans le cas général, à la combinaison linéaire de deux ondes.
Que représentent chacune de ces 2 ondes ?

5°) Monrer que de façon générale, toute expression de la forme :
$v(x, t) = f(x + \gamma t) + g(x - \gamma t)$ est solution de l'équation C.

Extrait, Meknes, PC2, Juin 86.

1°) On traite la ligne comme une suite de quadipôles élémentaires. On a :

$$v_A - v_C = (v_A - v_B) + (v_B - v_C)$$

Or $$v_A - v_C = v(x, t) \; ; \; v_A - v_B = l\,dx\,\frac{\partial}{\partial t} i(x, t) \quad et \quad v_B - v_C = v(x + dx, t).$$

donc $$v(x, t) = l\,dx\,\frac{\partial}{\partial t} i(x, t) + v(x + dx, t)$$

Mais $$v(x + dx, t) - v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, t)\,dx$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur. Il vient donc :

(A) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} v(x,t) = - l \frac{\partial}{\partial t} i(x,t)}$$

Par ailleurs, puisque le condensateur de capacité $c\,dx$ est parcouru par un courant $i(x, t) - i(x + dx, t) = - \frac{\partial}{\partial x} i(x, t)\,dx$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x + dx, t) = \frac{1}{c\,dx} (i(x, t) - i(x + dx, t)) = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} i(x, t)$$

Mais $$\frac{\partial}{\partial t} v(x + dx, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x} v(x, t)\,dx,$$

d'où, puisqu'on se limite aux termes de 1er ordre :

(B) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} i(x, t)}$$

2°) a – En utilisant (A) et (B), et en intervertissant $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v = - l \frac{\partial^2 i}{\partial x\, \partial t} = + lc \frac{\partial^2}{\partial t^2} v .$$

d'où *(C)* $$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) \text{ , avec } \gamma^2 = \frac{1}{lc}}$$

b – Exactement de la même façon, on obtient :

(C') $$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} i(x, t) = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} i(x, t)}$$

3°) On reconnait en *(C)* et *(C')* une équation de propagation, à la vitesse $\gamma = \frac{1}{\sqrt{lc}}$. Ainsi, en appliquant les lois de Kirchhoff à la ligne considérée comme une suite de quadripôles, on aboutit à des équations différentielles vérifiées par v et i qui sont des équations de **propagation**

4°) Dans le cas d'un régime sinusoïdal, il est pratique de travailler avec les grandeurs complexes :

$$\overline{i}(x, t) = \overline{I}(x)\, e^{j\omega t} \; ; \quad \overline{v}(x, t) = \overline{V}(x)\, e^{j\omega t}$$

Commençons par *(C)* par exemple :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \overline{v}(x, t) = - \omega^2 \overline{V}(x)\, e^{j\omega t} \; ; \; \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{v}(x, t) = \frac{d^2}{dx^2} \overline{V}(x) . e^{j\omega t}$$

d'où $$\frac{d^2}{dx^2}\,\overline{V}(x) + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\,\overline{V}(x) = 0$$

dont la solution générale est, en posant $k = \dfrac{\omega}{\gamma}$:

$$\overline{V}(x) = A\,e^{-jkx} + B\,e^{+jkx}$$

où A et B sont des constantes. On a donc :

$$\overline{V}(x, t) = A\,e^{j(\omega t - kx)} + B\,e^{j(\omega t + kx)}$$

le premier terme représente une onde se propageant dans la direction Ox, alors que le second terme représente une onde se propageant dans la direction opposée.

On a évidemment le même résultat pour le courant :

$$\overline{i}(x, t) = A'\,e^{j(\omega t - kx)} + B'\,e^{j(\omega t + kx)}$$

où A' et B' sont deux constantes.

5°) De façon générale (même si le phénomène n'est pas sinusoïdal), il est bien connu que l'équation (C) admet une solution générale de la forme $v(x, t) = f(x + \gamma t) + g(x - \gamma t)$, la fonction f (resp. g) décrivant une onde se propageant suivant $(-Ox)$ (resp. Ox) à la vitesse γ. Vérifions qu'une telle expression est bien solution de C.

Soit f' et g' les dérivées respectives de f et g :

$$f' : u \longrightarrow \frac{d}{du} f(u) \; ; \qquad g' : u \longrightarrow \frac{d}{du} g(u) .$$

On a : $$\frac{\partial}{\partial t} f(x + \gamma t) = \frac{\partial}{\partial t}(x + \gamma t) \times f'(x + \gamma t) = \gamma\, f'(x + \gamma t).$$

De même : $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x + \gamma t) = \gamma^2 f''(x + \gamma t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x - \gamma t) = (-\gamma)^2 g''(x - \gamma t) .$$

De même façon : $$\frac{\partial}{\partial x} f(x + \gamma t) = 1 \times f'(x + \gamma t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x + \gamma t) = f''(x + \gamma t) .$$

On en déduit : $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(f(x + \gamma t) + g(x - \gamma t)\Big) - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(f(x + \gamma t) + g(x - \gamma t)\Big) = 0.$$

Ainsi, toute fonction de la forme $v(x, t) = f(x + \gamma t) + g(x - \gamma t)$ est solution de l'équation de propagation (C).

Rappel de Cours

Mécanique Classique

ch I. - Torseurs.
ch II. - Géométrie des masses.
ch III. - Cinématique des solides indéformables.
ch IV. - Cinétique.
ch V. - Liaisons entre solides.
ch VI. - Dynamique.
ch VII. - Puissance réelle.

Chapitre I : TORSEURS

1 / VECTEURS GLISSANTS.

Soit $\mathscr{E}_3$ un espace affine de dimension 3 (espace des points) et $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel associé (espace des vecteurs "libres").

1.1. Définition et notations.

Définition 1 : On appelle vecteur lié $\mathcal{V}$ tout élément de $\mathscr{E}_3 \times \mathbb{R}^3$ c'est-à-dire tout couple $(A, \vec{V})$ formé d'un point A de $\mathscr{E}_3$ appelé origine ou point d'application de $\mathcal{V}$ et d'un vecteur libre $\vec{V}$ appelé grandeur vectorielle de $\mathcal{V}$. On écrira souvent $\mathcal{V} = \vec{V}(A)$

Si $\vec{V} \neq \vec{0}$ la droite issue de A et ayant $\vec{V}$ comme vecteur directeur est appelée support du vecteur lié $\vec{V}(A)$.

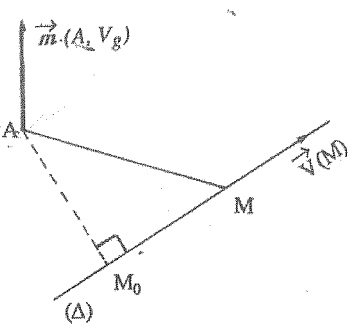
Définition 2 : La relation "deux vecteurs liés ont même grandeur vectorielle et même support" est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées "vecteurs glissants".

Un représentant d'un vecteur glissant V_g de support Δ est un vecteur lié $\vec{V}(M)$ avec $M \in \Delta$ et $\vec{V}(M) // \Delta$ on notera $V_g = (\Delta; \vec{V}(M))$.

1.2. Moment en un point d'un vecteur glissant.

Soit V_g un vecteur glissant de support Δ ; de représentant $\vec{V}(M)$, $M \in \Delta$. Soit A un point de $\mathscr{E}_3$.

Définition 3 : On appelle moment en A de V_g et on note $\vec{m}(A; V_g)$ le vecteur $\vec{m}(A; V_g) = \vec{AM} \wedge \vec{V}$



Remarque: Cette définition est indépendante du point M choisi sur Δ.

Propriétés :

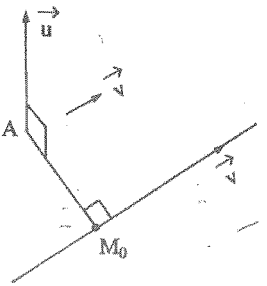
1) Pour tout couple de points A et B de $\mathscr{E}_3$ on a :

$$\vec{m}(B, V_g) = \vec{m}(A, V_g) + \vec{V} \wedge \vec{BA}$$

2) Si $\vec{V} \neq \vec{0}$ et $A \in \Delta \Leftrightarrow \vec{m}(A, V_g) = \vec{0}$

3) – $\vec{V} \cdot \vec{m}(A; V_g) = 0$ (propriété du produit mixte).

Théorème 1 : Soit A un point de $\mathscr{E}_3$, $\vec{U}$ et $\vec{V}$ $(\vec{V} \neq \vec{0})$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{U}.\vec{V} = 0$ alors il existe un vecteur glissant et un seul de représentants équipollents à $\vec{V}$ et tel que $\vec{m}(A, V_g) = \vec{U}$.



En effet : On cherche un point M_0 tel que :

(1) $\overrightarrow{AM_0} . \vec{V} = 0$

(2) $\overrightarrow{AM_0} \wedge \vec{V} = \vec{U}$

Si on multiplie vectoriellement (2) par $\vec{V}$

on obtient : $\|V\|^2 \overrightarrow{AM_0} - (\vec{V} . \overrightarrow{AM_0}) \vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{U}$

D'où la condition nécessaire : $\overrightarrow{AM_0} = \dfrac{\vec{V} \wedge \vec{U}}{\|V\|^2}$ qui est aussi (on peut le vérifier) condition suffisante.

1.3. Moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe orienté.

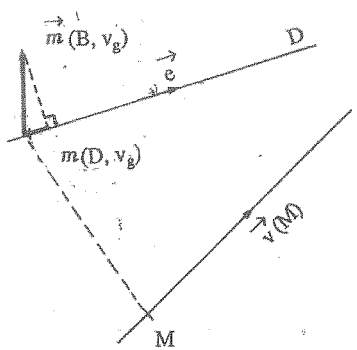
Soit D un axe orienté de vecteur unitaire $\vec{e}$.

Définition 4 : On appelle moment par rapport à D de vecteur glissant V_g et on note $m(D; V_g)$ le scalaire

$$m(D; V_g) = \vec{e} . \vec{m}(B; V_g)$$

où B est un point quelconque de D.

Remarque : Cette définition est indépendante du point B choisi sur D.



Propriétés :

1) $m(D; V_g) = (\vec{e}, \overrightarrow{BM}, \vec{V}(M))$ produit mixte.

2) $m(D; V_g) = 0 \Leftrightarrow \Delta$ et D sont parallèles.

2 / TORSEURS.

2.1. Définitions.

Définition 5 : Un torseur $\mathcal{T}$ est un champ de bi–vecteurs sur $\mathscr{E}_3$ c'est–à–dire une application de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$M \in \mathcal{E}_3 \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{T}(A) = [\vec{R}(M, \mathcal{T}) ; \vec{U}(M, \mathcal{T})]$$

Avec pour tout couple de points M et N de $\mathcal{E}_3$.

$$\vec{R}(M, \mathcal{T}) = \vec{R}(N; \mathcal{T}) = \vec{R} \qquad \text{"vecteur libre"}$$

$$\vec{U}(M; \mathcal{T}) = \vec{U}(N; \mathcal{T}) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{NM} \qquad \text{"vecteur lié"}$$

$\vec{R}$ et $\vec{U}(M; \mathcal{T})$ sont les éléments de réduction du torseur $\mathcal{T}$ au point M. $\vec{R}$ est appelé résultante générale et $\vec{U}(M; \mathcal{T})$ moment résultant du torseur $\mathcal{T}$ au point M.

2.2. Invariants d'un torseur $\mathcal{T}$:

Il s'agit d'invariants par rapport aux points de $\mathcal{E}_3$.

1) $\vec{R}(M, \mathcal{T}) = \vec{R}(N; \mathcal{T}) = \vec{R}$

2) $\vec{R} \cdot \vec{U}(M; \mathcal{T}) = \vec{R} \cdot \vec{U}(N, \mathcal{T})$ (Invariant scalaire)

2.3. Construction de torseurs :

a) Ensemble fini de vecteurs glissants.

Soit F un ensemble de n vecteurs glissants V_{gi} $(i = 1, 2..., n)$

Définition 6 : On appelle torseur $\mathcal{T}_F$ défini par le système F des n vecteurs glissants V_{gi} le torseur de résultante générale : $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i$ et de moment résultant en tout point M de $\mathcal{E}_3$. :

$$\vec{U}(M; \mathcal{T}_F) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}(M; V_{gi}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{MM_i} \times \vec{V}_i$$

b) Torseur défini par l'ensemble d'un champ de vecteurs et d'une mesure :

Soit $\mathcal{D}$ un sous– ensemble de $\mathcal{E}_3$ vérifiant certaines hypothèses non précisées ici et $M \to \vec{V}(M)$ un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{D}$ et continu par morceaux.

Définition 7 : On appelle mesure sur $\mathcal{D}$ une application μ de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ (= ensemble des parties de $\mathcal{D}$) dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes suivants :

1) $\forall d \subset \mathcal{D}, \mu(d) \geq 0$;

2) $\mu(\phi) = 0$;

3) Si $d \cap d' = \phi \Rightarrow \mu(d \cup d') = \mu(d) + \mu(d')$.

Théorème 2 : L'application $A \to [\vec{R},\ \vec{U}(A)]$ de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ avec

$$\vec{R} = \int_{\mathscr{D}} \vec{V}(M)\, d\mu \qquad \text{et} \qquad \vec{U}(A) = \int_{\mathscr{D}} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)\, d\mu .$$

est un torseur sur $\mathscr{E}_3$ appelé torseur associé au champ vectoriel $\vec{V}(M)$.

Remarque : En général μ est la masse. On se limitera alors aux quatre types usuels de répartition de masse suivants :

1) $\mathscr{D}$ est un volume de $\mathscr{E}_3$; on suppose qu'il existe une masse spécifique volumique $M \to \rho(M) \geq 0$ alors $d\mu = dm = \rho(M)\, dv$; dv étant l'élément de volume.

2) $\mathscr{D}$ est une surface régulière (S) ; on suppose qu'il existe une masse spécifique surfacique $M \to \rho(M) \geq 0$ alors $d\mu = dm = \rho(M)\, dS$; dS étant l'élément d'aire.

3) $\mathscr{D}$ est un arc de courbe régulier (C) ; on suppose qu'il existe une masse spécifique linéique $M \to \rho(M) \geq 0$ alors $d\mu = dm = \rho(M)\, dl$; dl étant l'élement d'arc.

4) $\mathscr{D}$ est constitué d'un nombre fini de points isolés $M_1, M_2, \ldots, M_n$ portant respectivement des masses positives $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Dans ce dernier cas l'expression $\int_{\mathscr{D}} \vec{V}(M)\, d\mu$ doit être interprétée comme représentant la qualité $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}(M_i)$.

2.4. Classes de torseurs particuliers.

a) Glisseurs.

Définition 8 : Un torseur est un glisseur s'il peut être représentée par un vecteur glissant.

Théorème 3: $\mathcal{T}$ est un glisseur $\Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{E}_3 / \vec{R}.\ \vec{U}(A;\mathcal{T}) = \vec{0}$ (avec $\vec{R} \neq \vec{0}$)

Théorème 4: $\mathcal{T}$ est un glisseur $\Leftrightarrow \exists A \in \mathscr{E}_3$ tel que $\vec{U}(A;\mathcal{T}) = \vec{0}$.

b) Couples.

Définition 9 : Un torseur est un couple si et seulement si $\vec{R} = \vec{0}$ (résultante nulle).

Propriété : Le champ des moments d'un couple est constant.

$\forall (A, B) \in \mathscr{E}_3 \times \mathscr{E}_3 \qquad \vec{U}(A;\mathcal{T}) = \vec{U}(B;\mathcal{T})$.

2.5. Axe central d'un torseur.

Définition 10 : On appelle axe central d'un torseur $\mathcal{T}$ le lieu des points M de $\mathscr{E}_3$ tels que l'on ait : $\vec{R} \wedge \vec{U}(M;\mathcal{T}) = \vec{0}$

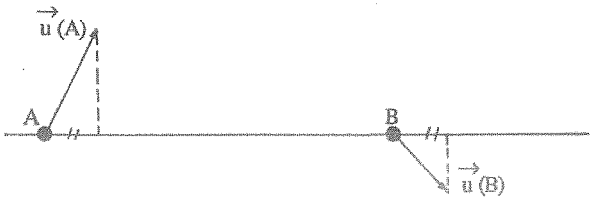
3) Champs de moments & champs équiprojectifs.

Définition 11 : Un champ de vecteurs $M \to \vec{U}(M)$ défini sur $\mathscr{D}$ est un champ de moments (ou torseur) s'il existe un vecteur $\vec{R}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall (A ; B) \in \mathscr{E}_3 \times \mathscr{E}_3 \qquad \vec{U}(B) = \vec{U}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AB}$$

Définition 12 : Un champ de vecteurs $M \to \vec{U}(M)$ défini sur $\mathscr{D}$ est équiprojectif si l'on a :

$$\forall (A ; B) \in \mathscr{E}_3 \times \mathscr{E}_3 \qquad \vec{U}(B) \cdot \vec{AB} = \vec{U}(A) \cdot \vec{AB}$$



Théorème 5 : Tout champ de moment est équiprojectif et inversement.

Chapitre II : GEOMETRIE DES MASSES

1 / CENTRE D'INERTIE.

Soit Σ un sous ensemble de $\mathscr{E}_3$ sur lequel on définit une mesure : la masse ; et soit O un point quelconque de $\mathscr{E}_3$.

1.1. Définition du centre d'inertie :

Définition 1 : On appelle centre d'inertie de Σ le point G de $\mathscr{E}_3$ défini par :

$$m(\Sigma) = \vec{OG} = \int_{\Sigma} \vec{OM} \, dm$$

Cette définition est indépendante du point O choisi dans $\mathscr{E}_3$..

1.2. Propriétés du centre d'inertie.

Propriété 1 : $\displaystyle\int_{\Sigma} \vec{GM} \, dm = \vec{0}$

Théorème 1 : Tout torseur associé à un champ de vecteurs $\vec{V}$ constant défini sur une partie matérialisée Σ de $\mathscr{E}_3$ de masse m peut être représenté par un vecteur glissant de résultante $\vec{R} = m(\Sigma)\,\vec{V}$ et dont le support passe par G.

On a en effet $$\vec{R} = \int_{\Sigma} \vec{V}\, dm = \vec{V} \int_{\Sigma} dm = m(\Sigma)\,\vec{V}.$$

$$\vec{U}(G) = \int_{\Sigma} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}\, dm = \left[\int_{\Sigma} \overrightarrow{GM}\, dm \right] \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

2 / TENSEUR D'INERTIE.

2.1. Définition :

Soit $B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et Σ un système matérialisé de masse m.

Définition 2 : On appelle tenseur d'inertie du système Σ au point O relativement à la base B l'opérateur $J(O;\Sigma)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\vec{U} \longrightarrow J(O;S)\,\vec{U} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{U} \wedge \overrightarrow{OM})\, dm$$

où $M(x, y, z)$ est un point quelconque de Σ.

2.2. Propriétés :

a) $J(O,\Sigma)$ est linéaire.

b) $J(O,\Sigma)$ est symétrique, c-à-d : $\forall (\vec{U}, \vec{V}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \vec{V}\, J(O,\Sigma)\, \vec{U} = \vec{U}\, J(O,\Sigma)\, \vec{V}$.

2.3. Forme quadratique :

Définition 3 : On appelle forme quadratique associée au tenseur d'inertie $J(O,\Sigma)$ l'application $Q(O,\Sigma)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\vec{U} \longrightarrow Q(O,\Sigma)\,\vec{U} = \vec{U}\,.\,J(O;\Sigma)\,\vec{U}$$

Théorème 2 : Pour tout $\vec{U}$ de $\mathbb{R}^3$ on a : $Q(O,\Sigma)\,\vec{U} \geq 0$.

En effet, on a $$Q(O,\Sigma)\,\vec{U} = \int_{\Sigma} \| \vec{U} \wedge \overrightarrow{OM} \|^2\, dm$$

car $\vec{U} \,.\, \left[\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{U} \wedge \overrightarrow{OM}) \right] = (\vec{U}\,;\, \overrightarrow{OM};\, \vec{U} \wedge \overrightarrow{OM}) = (\vec{U} \wedge \overrightarrow{OM}\,;\, \vec{U};\, \overrightarrow{OM})$

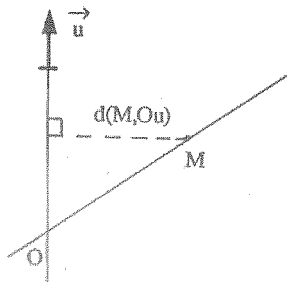
$$\vec{U} \cdot \left[\vec{OM} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{OM})\right] = \|\vec{U} \wedge \vec{OM}\|^2$$

Théorème 3 : Pour tout $\vec{U}$ de $\mathbb{R}^3$, on a : $Q(O, \Sigma)\ \vec{U} = \|\vec{U}\|^2 . I(Ou; \Sigma)$

où $I(Ou, \Sigma)$ est le moment d'inertie de Σ par rapport à la droite (Ou) passant par O et parallèle à $\vec{U}$.

On a par définition : $I(Ou, \Sigma) = \int_\Sigma d^2(M, Ou)\, dm = \int_\Sigma \|\vec{n} \wedge \vec{OM}\|^2\, dm$

où $d(M, ou)$ est la distance du point M à la droite ou et $\vec{n} = \dfrac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}$



Cette formule permet, connaissant $I(O,\Sigma)$, de déterminer le moment d'inertie de Σ par rapport à toute droite passant par O.

4. Expression de la matrice de $J(O, \Sigma)$ dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ la matrice de $J(O; \Sigma)$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A = \int_\Sigma (y^2 + z^2)\, dm & -F = -\int_\Sigma xy\, dm & -E = -\int_\Sigma zx\, dm \\ -F & B = \int_\Sigma (z^2 + x^2) dm & -D = -\int yz\, dm \\ -E & -D & C = \int_\Sigma (x^2 + y^2\, dm) \end{bmatrix}$$

Remarque : $A = I(Ox, \Sigma)$, $B = I(Oy, \Sigma)$ et $C = I(Oz, \Sigma)$ sont les moments d'inertie de Σ par rapport aux axes Ox, Oy, Oz; D, E, F constituent les produits d'inertie.

Ces éléments peuvent, dans le cas général, dépendre du temps. Ce sont des **quantités constantes lorsque Σ est un solide S dont le repère lié est** $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2.5. Axes principaux d'inertie.

L'opérateur $J(O,\Sigma)$ étant symétrique est donc diagonalisable. Il existe alors une base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ de $\mathbb{R}^3$, orthonormée directe, formée de vecteurs propres.

Définition 4 : Le trièdre $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est dit trièdre principal d'inertie en O et les axes OX, OY, OZ sont les axes principaux d'inertie.

Dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ la matrice de J(O, E) est :

$$\begin{bmatrix} I_1 = I(OX;\Sigma) & 0 & 0 \\ 0 & I_2 = I(OY;\Sigma) & 0 \\ 0 & 0 & I_3 = I(OZ;\Sigma) \end{bmatrix}$$

Définition 5 : Si $I_1 = I_2 = I_3$, $J(O; E)$ est dit sphérique ;

Si $I_1 = I_2$, $J(O; E)$ est dit de révolution /OZ.

2.6. Théorème de Koenig. Théorème d'Huygens.

a) Théorème de Koenig.

Si G est le centre d'inertie de (Σ) on a : $\boxed{J(O;\Sigma) = J(G;\Sigma) + J(O; G\{m(\Sigma)\})}$

Avec $J(O; G\{m(\Sigma)\})\ \vec{U} = m(\Sigma)\left[\vec{OG} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{OG})\right]$

En effet : $J(O,\Sigma)\ \vec{U} = \int_\Sigma [\vec{OG} + \vec{GM}] \wedge \vec{U} \wedge [\vec{OG} + \vec{GM}]\, dm$

$$= \int_\Sigma (\vec{GM} \wedge \vec{U} \wedge \vec{GM})\, dm + \int_\Sigma (\vec{OG} \wedge \vec{U} \wedge \vec{OG})\, dm$$

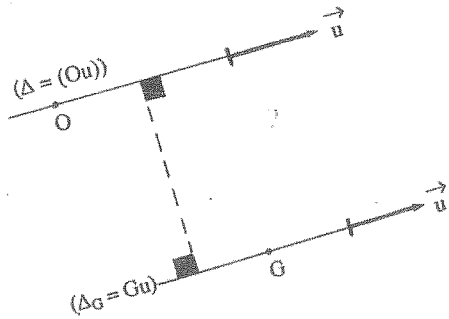
car $\int_\Sigma \vec{OG} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{GM})\, dm = \vec{OG} \wedge \left(\vec{U} \wedge \int_\Sigma \vec{GM}\, dm\right) = \vec{0}$

Pour déterminer le tenseur d'inertie de Σ en un point quelconque il suffit de connaître $m(\Sigma)$ et $J(G;\Sigma)$.

b) Théorème d'huygens :

Les notations étant celles de la figure on a :

$$\boxed{I(Ou;\ \Sigma) = I(Gu;\ \Sigma) + m\ \delta^2}$$



2.7. Détermination pratique des axes principaux d'inertie pour un solide S.

a) Si un solide S admet un plan P de symétrie matérielle, P est plan principal d'inertie de S en chacun de ses points et tout axe qui lui est perpendiculaire est principal d'inertie.

b) Si un solide S admet un axe Δ de symétrie matérielle, Δ est un axe principal d'inertie de S en chacun de ses points et tout plan qui lui est perpendiculaire est un plan principal d'inertie.

Définition 6 : On dit que le plan $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ est un plan propre d'inertie lorsque c'est un plan principal d'inertie pour lequel le moment d'inertie par rapport à $(O, \vec{X})$ est égal au moment d'inertie par rapport à $(O, \vec{Y})$ (egal à λ).

Propriété : Soit $\vec{U}$ un vecteur unitaire du plan propre d'inertie $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ on a alors $I(Ou;\ S) = \lambda$

En effet $I(Ou;S) = \vec{U} \cdot J(O,S)\ \vec{U}$ avec $\vec{U} = \alpha\vec{X} + \beta\vec{Y}$ $(\alpha^2 + \beta^2 = 1)$

$$I(Ou,S) = (\alpha\vec{X} + \beta\vec{Y}) \cdot \left[J(O,S)(\alpha\vec{X} + \beta\vec{Y}) \right]$$

Soit en utilisant la linéarité de l'opérateur d'inertie et les propriétés de produit scalaire.

$$I(Ou;S) = \alpha^2(\vec{X} \cdot J(O,S)\ \vec{X}) + \beta^2(\vec{Y} \cdot J(O;S)\ \vec{Y}) + \alpha\beta\left[\vec{X} \cdot J(O;S)\ \vec{Y} + \vec{Y} \cdot J(O;S)\ \vec{X}\right]$$

Or $J(O,S)\ \vec{X} = \lambda\vec{X}$; $J(O;S)\ \vec{Y} = \lambda\vec{Y}$ et $\vec{X} \cdot \vec{Y} = 0$

Donc $I(Ou; S) = \lambda(\alpha^2 + \beta^2) = \lambda$

c) Si S est un solide de révolution d'axe Δ ; Δ est un axe principal d'inertie en chacun de ses points et tout plan qui lui est perpendiculaire est **un plan propre d'inertie.**

Chapitre III : CINEMATIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES.

1 / RAPPEL SUR LA CINÉMATIQUE D'UN SYSTEME MATÉRIEL.

1.1. Mouvement d'un système matériel.

Soient $\mathscr{E}_3$ un espace affine de dimension 3 (espaces des points) et $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel associé (espace des vecteurs). Soient $R_0 = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère de $\mathscr{E}_3$, Σ_0 un sous-ensemble de $\mathscr{E}_3$ sur lequel est définie une mesure positive m appelée masse et $I = [t_0, t_1]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1 : Un mouvement d'un système matériel (Σ) par rapport au repère R_0 est une application f de $(\Sigma_0 \times I) \longrightarrow \mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{OM} = f(M_0, t)$ telle que :

1) $f(M_0, t) = \overrightarrow{OM_0}$

2) $f \in C^2 (\Sigma_0 \times I)$ (ou C^2 par morceaux).

3) pour tout t fixé de I l'application $f_t : \Sigma_0 \to f_t(\Sigma_0) = \Sigma_t \subset \mathbb{R}^3$ qui a M_0 fait correspondre $\overrightarrow{OM}$ est bijective.

M est la position à l'instant t de la particule de Σ qui était en M_0 à l'instant t_0.

Par définition on pose $\forall\ e_0 \subset \Sigma_0$ et $\forall\ t \in \mathbb{R}$ $m(e_t) = m(e_0)$ avec $e_t = f_t(e_0)$ (conservation de la masse).

1.2. Vitesse et accélération d'un point M de Σ par rapport à $R=(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Définition 2 : On appelle vitesse de M par rapport à R le vecteur :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big/ R$$

Définition 3: On appelle accélération de M par rapport à R le vecteur :

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \frac{d\,\vec{V}(M/R)}{dt} \Big/ R$$

2 / CHANGEMENT DE REPERES.

2.1. Position du problème :

Soient $R = (O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ un repère fixe dit absolu et $R_1 = (O_2, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère mobile par rapport à R dit relatif, et soit M un point de Σ en mouvement par rapport à R.

On donne le mouvement de R_1 par rapport à R par $\vec{V}(O_2, R)$ et $\vec{\Omega}(R_1 / R)$ et le mouvement de M par rapport à R_1 par $\vec{V}(M/R_1)$ et on cherche le mouvement de M par rapport à R.

Lemme 1 : Soit $\vec{U}$ un vecteur mobile $\boxed{\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right/_R = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right/_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}}$

2.2. Composition des rotations instantanées :

Soient trois repères R_1, R_2 et R_3 . On a $\boxed{\vec{\Omega}(R_3/R_1) = \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1)}$

et plus généralement pour n repères R_1 : $\vec{\Omega}(R_n/R_1) = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\Omega}(R_{i+1}/R_i)$

2.3. Composition des vitesses et des accélérations :

a) On a $\boxed{\underset{\text{absolue}}{\vec{V}(M/R)} = \underset{\text{relative}}{\vec{V}(M/R_1)} + \underset{\text{d'entraînement}}{\vec{V}(M \in R_1/R)}}$

avec $\boxed{\vec{V}(M \in R_1/R) = \vec{V}(O_2/R) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_2M}}$

b) Pour les accélérations : On sait que :

$$\boxed{\underset{\text{absolue}}{\vec{\Gamma}(M/R)} = \underset{\text{relative}}{\vec{\Gamma}(M/R_1)} + \underset{\text{d'entraînement}}{\vec{\Gamma}(M \in R_1/R)} + \underset{\text{de Coriolis}}{\vec{\Gamma}_c(M)}}$$

Avec

$$\vec{\Gamma}(M \in R_1/R) = \vec{\Gamma}(O_2/R) + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right/_R \wedge \vec{O_2M} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_2M})$$

et $\boxed{\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}(M/R_1)}$

Remarque : On peut vérifier aisément que l'accélération d'entraînement n'est pas toujours égale à la dérivée par rapport au temps de la vitesse d'entraînement.

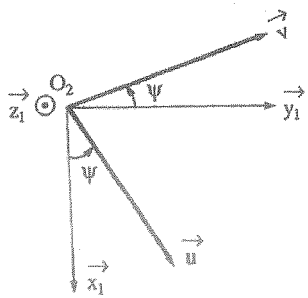
2.4. Détermination du mouvement de R_1 /R :

Le passage du repère $R = (O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ au repère $R_1 = (O_2, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en mouvement quelconque par rapport à R se fait en deux étapes :

a) On passe de $R = (O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ à $R' = (O_2, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ par l'intermédiaire d'un mouvement de translation **qui est entièrement défini par la donnée des trois coordonnées de O_2 dans R** $[\vec{\Omega}(R'/R) = \vec{0}]$.

b) On déduit $R_1 = (O_2, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de $R' = (O_2, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ en utilisant la définition d'un mouvement de rotation autour d'un point fixe (ici O_2). **Ce dernier étant entièrement déterminé par la donnée des trois angles d'Euler ψ, θ et φ où :**

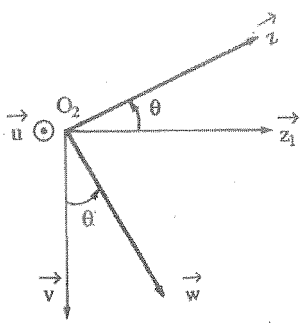
b–1) **ψ est l'angle de précession** qui permet de passer de $R'=(O_2,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ à $R_2=(O_2,\vec{u},\vec{v},\vec{z_1})$ par une rotation autour de l'axe fixe $\vec{z_1}$



$$\psi = (\vec{x_1}, \vec{u}) = (\vec{y_1}, \vec{v})$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R') = \dot{\psi}\,\vec{z_1}}$$

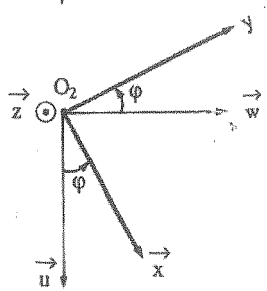
b–2) **θ est l'angle de nutation** qui permet de définir $R_3 = (O_2, \vec{u}, \vec{\omega}, \vec{z})$ à partir de $R_2 = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_1})$ et ce par l'intermédiaire d'une rotation autour de l'axe $\vec{u}$.



$$\theta = (\vec{v}, \vec{\omega}) = (\vec{z_1}, \vec{z}).$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \dot{\theta}\,\vec{u}}$$

b–3) **φ est la rotation propre** ; elle permet, à partir de R_3 d'arriver à $R_1 = (O_2, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et ce par une rotation autour de l'axe $\vec{z}$.



$$\varphi = (\vec{u}, \vec{x}) = (\vec{\omega}, \vec{y})$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R_3) = \dot{\varphi}\,\vec{z}}$$

Remarque : Le vecteur rotation instantanée de R_1 par rapport à R est alors :

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{\Omega}(R_1/R_3) + \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R') + \vec{\Omega}(R'/R)$$

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{z}_1$$

Soit en projettant suivant $(\vec{u}, \vec{\omega}, \vec{z})$

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{\omega} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}}$$

3 / CHAMP DES VITESSES ET DES ACCÉLÉRATIONS D'UN SOLIDE INDÉFORMABLE.

3.1. Définition d'un solide :

C'est tout ensemble S de points matériels qui se déplacent au cours du temps en vérifiant les deux propriétés suivantes :

a) Indéformabilité $\Leftrightarrow \forall A \in S\ ;\ \forall B \in S \quad \|AB\|^2 = cte \quad \forall t$

b) Impénétrabilité $\Leftrightarrow \forall S_1 \subset S\ ;\ \forall S_2 \subset S$ telles que $S_1 \cup S_2 = S$ on a $S_1 \cap S_2 = \phi$ $\forall t$.

Remarque : Soit R_s le repère lié à S c'est-à-dire le repère qui effectue le même mouvement que S ou encore le repère par rapport auquel tous les points du solide ont une vitesse nulle. Suivre S dans son mouvement par rapport à un repère R_0 est donc équivalent à l'étude du mouvement de R_s par rapport à R_0. Ceci nécessite la donnée de six paramètres (cf III 2 – 4).

◆ Les trois coordonnées (x, y, z) d'un point lié à S dans R_0 (ce point est généralement confondu avec G).

◆ Les trois angles d'EULER ψ, θ, φ.

3.2. Champ des vitesses :

Théorème : Le champ des vitesses d'un solide indéformable est équiprojectif.

En effet, si A et B sont deux points liés à S, de $\|AB\|^2 = cte$ on déduit.

$$\left[\vec{V}(A/R_0) - \vec{V}(B/R_0)\right] \cdot \vec{AB} = 0$$

Conséquence : Il existe alors un vecteur noté $\vec{\Omega}(S, R_0)$ tel que pour tout couple de A et B de S on a : $\boxed{\vec{V}(A/R_0) = \vec{V}(B/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{BA}}$

$\vec{\Omega}(S/R_0)$ est dit vecteur rotation instantanée de S par rapport à R_0.

Définition 4 : Le champ des vitesses d'un solide est le champ des moments d'un torseur qu'on appelle torseur cinématique ($\mathcal{V}(S/R_0)$). Ses éléments de réduction en un

point A de S sont donnés par :

- **La résultante générale** = $\vec{\Omega}(S/R_0)$.
- **Le moment en** $A = \vec{V}\ (A/R_0)$ **(vitesse de** A/R_0**)** .

On note $$\mathcal{U}(S/R_0) = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A/R_0) \end{cases}$$

Définition 5 : On appelle axe instantané de rotation et de glissement l'axe central du torseur $\mathcal{U}(S/R_0)$.

3.3. Champ des accélérations :

Lemme 2 : Si $\vec{U} = \vec{AB}$ est un vecteur lié à S

On a $$\frac{d\vec{U}}{dt}\Big/_R = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{U}$$

Ceci resulte immédiatement des écritures.

$$\frac{d\vec{AB}}{dt}\Big/_R = \vec{V}(B/R_0) - \vec{V}(A/R_0)$$

et $$\vec{V}(B/R_0) - \vec{V}(A/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{AB}.$$

Théorème : Si A et B sont deux points de solide S on a :

$$\vec{\Gamma}(A/R_0) = \vec{\Gamma}(B/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt}\Big/_{R_0} \wedge \vec{BA} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{BA}\right]$$

Il suffit de dériver R_0 la relation liant $\vec{V}(A/R_0)$ et $\vec{V}(B/R_0)$ et de remarquer que l'on a

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{BA}\right]\Big/_{R_0} = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \frac{d\vec{BA}}{dt}\Big/_{R_0} + \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt}\Big/_{R_0} \wedge \vec{BA}$$

puis d'utiliser le lemme 2 pour calculer $\frac{d\vec{BA}}{dt}\Big/_{R_0}$.

Chapitre IV : CINETIQUE

1 / SYSTEMES MATERIELS.

Soit un système matériel (Σ) en mouvement par rapport à un repère $R_1 = (O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$. On se propose d'étudier :

- Le torseur cinétique $\mathscr{C}(\Sigma / R_1)$ ou torseur des quantités de mouvement.
- Le torseur dynamique $\mathscr{A}(\Sigma / R_1)$ ou torseur des quantités d'accélération.
- L'énergie cinétique $E_c(\Sigma / R_1)$.

1.1. Torseur cinétique $\mathscr{C}(\Sigma / R_1)$

C'est un torseur dont les éléments de réduction en un point A de $\mathscr{E}_3$ sont donnés par :

a) **La résultante cinétique :** $\vec{Rc} = \int_{\Sigma} \vec{V}(M/R_1)\, dm.$

On démontre que $\boxed{\vec{Rc} = m(\Sigma)\, \vec{V}(G/R_1)}$

où G est le centre d'inertie de Σ.

b) **Le moment cinétique en A :**

$$\boxed{\vec{\sigma}(A; \Sigma / R_1) = \int_{\Sigma} \vec{AM} \wedge \vec{V}(M/R_1)\, dm}$$

Théorème 1 : Pour tout couple de points A et B de $\mathscr{E}_3$,

On a $$\boxed{\vec{\sigma}(A; \Sigma / R_1) = \vec{\sigma}(B; \Sigma / R_1) + m(\Sigma)\ \vec{AB} \wedge \vec{V}(G/R_1)}$$

Dans le cas particulier où $B = G$ on obtient **le théorème de Koenig relatif au moment cinétique :**

$$\boxed{\vec{\sigma}(A; \Sigma / R_1) = \vec{\sigma}(G; \Sigma / R_1) + m(\Sigma)\ \vec{AG} \wedge \vec{V}(G/R_1)}$$

1.2. Torseur dynamique $\mathscr{A}(\Sigma / R_1)$

Les éléments de réduction de ce torseur en un point A de $\mathscr{E}_3$ sont définis par :

a) **La résultante dynamique :** $\vec{Rd} = \int_{\Sigma} \vec{\Gamma}(M/R_1)\, dm$

On démontre que $\boxed{\vec{R}d = m(\Sigma) . \vec{\Gamma}(G/R_1)}$

b) Le moment dynamique : $\boxed{\vec{\delta}(A; \Sigma / R_1) = \int_{\Sigma} \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M)\, dm}$

Théorème 2 : Pour tout couple de points A et B de $\mathscr{E}_3$ on a :

$$\boxed{\vec{\delta}(A; \Sigma / R_1) = \vec{\delta}(B; \Sigma / R_1) + m(\Sigma)\, \vec{AB} \wedge \vec{\Gamma}(G/R_1)}$$

et si $B = G$ on obtient le **théorème de Koenig** pour les moments dynamiques.

1.3. Relation entre moments cinétique et dynamique :

Théorème 3 : On a pour tout point A de $\mathscr{E}_3$.

$$\boxed{\vec{\delta}(A; \Sigma / R_1) = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(A; \Sigma / R_1))_{/R_1} + m(\Sigma)\, \vec{V}(A/R_1) \wedge \vec{V}(G/R_1)}$$

En effet : $\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(A; \Sigma / R_1))_{/R_1} = \int_{\Sigma} \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R_1)\, dm$

$$+ \int_{\Sigma} (\vec{V}(M/R_1) - \vec{V}(A/R_1)) \wedge \vec{V}(M/R_1)\, dm$$

Soit $\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(A; \Sigma / R_1))_{/R_1} = \vec{\delta}(A; \Sigma / R_1) - m(\Sigma)\, \vec{V}(A/R_1) \wedge \vec{V}(G/R_1)$.

Remarque importante : Si A est fixe dans R_1 ($\vec{V}(A/R_1) = \vec{0}$) ou si $A = G$

On a $\boxed{\vec{\delta}(A; \Sigma / R_1) = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(A; \Sigma / R_1))_{/R_1}}$

1.4. Energie cinétique $E_c(\Sigma/R_1)$:

C'est par définition le scalaire défini par :

$$\boxed{E_c(\Sigma / R_1) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\vec{V}(M/R_1))^2\, dm}$$

Théorème 4 : Soit R_G le repère déduit de R_1 par translation et centré en G. On a :

$$\boxed{2E_c(\Sigma / R_1) = 2E_c(\Sigma / R_G) + m(\Sigma)\, (\vec{V}(G/R_1))^2}$$

Avec $$E_c(\Sigma / R_G) = \int_{\Sigma} \left(\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} / R_G \right)^2 dm.$$

En effet : de $\overrightarrow{V}(M/R_1) = \overrightarrow{V}(G/R_1) + \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} / R_G$

On déduit :

$$2Ec(\Sigma/R_1) = m(\Sigma)(\overrightarrow{V}(G/R_1))^2 + \int_{\Sigma} \left[\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} / R_G \right]^2 dm + 2 \int_{\Sigma} \overrightarrow{V}(G/R_1) . \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} / R_G \, dm.$$

Le dernier terme est nul, comme étant égal à $2 \overrightarrow{V}(G/R_1) . \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \overrightarrow{GM} \, dm.$

2 / SOLIDES INDEFORMABLES.

Si le système matériel est un solide (S) on a pour tout couple de points A et B liés à (S) :

$$\overrightarrow{V}(A/R_1) = \overrightarrow{V}(B/R_1) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_1) \wedge \overrightarrow{BA}.$$

Il en résulte les propositions suivants :

Théorèeme 5 : si O est un point lié au solide (S)

On a $$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(O; S/R_1) = J(O; S) \overrightarrow{\Omega}(S/R_1) + m(S) \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V}(O/R_1)}$$

En effet, on a :

$$\overrightarrow{\sigma}(O; S/R_1) = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1) \, dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(O/R_1) \, dm + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \left[[\overrightarrow{\Omega}(S/R_1) \wedge \overrightarrow{OM}] \right] dm$$

Remarque : Si $O = G$ ou si O lié à (S) est fixe dans R_1 alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(O; S/R_1) = J(O; S) \overrightarrow{\Omega}(S/R_1)}$$

Théorème 6 : On a pour un solide S de centre d'inertie G et de masse m en mouvement par rapport à un repère R_1 :

$$\boxed{2E_c(S/R_1) = m(S) (\overrightarrow{V}(G/R_1))^2 + \overrightarrow{\Omega}(S/R_1) . \left[J(G; S) \overrightarrow{\Omega}(S/R_1) \right]}$$

s'il existe en plus un point O lié à S et fixe dans R_1 alors :

$$\boxed{2E_c(S/R_1) = \vec{\Omega}(S/R_1) \cdot \left[J(O;S)\ \vec{\Omega}(S/R_1) \right]}$$

Chapitre V : LIAISON ENTRE SOLIDES

1 / DEFINITIONS :

Soient deux solides indéformables S_1 et S_2. La description du mouvement de S_2 par rapport à S_1 requiert la connaissance de six paramètres :

$$q_i : t \longrightarrow q_i(t)$$

Définition 1 :

On dira qu'il existe une liaison entre les deux solides S_1 et S_2 si le mouvement de S_2 par rapport à S_1 peut être décrit par un nombre de paramètres inférieur à 6.

S'il existe une liaison entre S_1 et S_2, on suppose que s'exercent entre ces deux solides des actions dites de liaison représentables par l'ensemble de deux torseurs $\mathcal{L}_{12}$ et $\mathcal{L}_{21}$ appelés respectivement torseur des actions de liaisons exercées par S_1 sur S_2 et par S_2 sur S_1 et vérifiant :

$$\mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{21} = 0$$

On posera $$\mathcal{L}_{12} = \begin{cases} \vec{R}_{12} \\ \vec{m}_{12}(A) \end{cases} \qquad \forall A \in \mathcal{E}_3$$

2 / TYPES USUELS DE LIAISONS ENTRE DEUX SOLIDES.

2.1. Liaison rotoïde :

a) Définition 2 :

Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite rotoïde si et seulement si les mouvements mutuels qu'elle permet à ces deux solides sont des mouvements de rotation autour d'un axe lié à S_1 et à S_2.

b) Relation cinématique de liaison :

Soit A_2 lié à S_2 un point de l'axe de rotation Δ et soit α l'angle de rotation. Les relations cinématiques de liaison s'écrivent :

$$\boxed{\vec{V}(A_2 \in S_2/S_1) = \vec{0}} \qquad \boxed{\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \dot{\alpha}\ \vec{z}} \qquad (\vec{z} \text{ vecteur unitaire de } \Delta)$$

c) Axiome des actions de liaison :

La liaison entre S_1 et S_2 est parfaite si et seulement si $\boxed{\overrightarrow{m_{12}}(A_2) \cdot \overrightarrow{z} = 0}$

2.2. Liaison prismatique (ou à glissières).

a) Définition 3 : Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite prismatique si et seulement si les mouvements mutuels qu'elle permet à ces deux solides sont des mouvements de translation rectiligne laissant en coïncidence globale un axe O_2z lié à S_2 avec un axe lié à S_2.

b) Relations cinématiques de liaison :

Elles sont données par : $\boxed{\overrightarrow{V}(O_2 \in S_2 / S_1) = \dot{\lambda}\overrightarrow{z}}$ $\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_2 / S_1) = \overrightarrow{0}}$

(λ fonction arbitraire de t)

c) Axiome des actions de liaison :

La liaison prismatique est parfaite si et seulement si $\boxed{\overrightarrow{R_{12}} \cdot \overrightarrow{z} = 0}$

2.3. Liaison cylindrique (ou à verrou)

a) Définition 4 : Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite cylindrique (ou à verrou) si et seulement si les mouvements mutuels qu'elle permet à ces deux solides sont des mouvements laissant en coïncidence globale un axe O_2z lié à S_2 avec un axe lié à S_1.

b) Relations cinématiques de liaison :

$\boxed{\overrightarrow{V}(O_2 \in S_2 / S_1) = \dot{\lambda}\overrightarrow{z}}$ $\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_2 / S_1) = \dot{\alpha}\overrightarrow{z}}$

c) Axiome des actions de liaison :

Une liaison à verrou est parfaite si et seulement si

$\boxed{\overrightarrow{R_{12}} \cdot \overrightarrow{z} = 0}$ et $\boxed{\overrightarrow{m_{12}}(O_2) \cdot \overrightarrow{z} = 0}$

2.4. Liaison sphérique :

a) Définition 5 : Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite sphérique si et seulement si les mouvements mutuels qu'elle permet à ces deux solides sont des mouvements pour lesquelles un point O_2 lié à S_2 reste en coïncidence avec un point O_1 lié à S_1.

b) Relation cinématique de liaison : $\boxed{\overrightarrow{V}(O_2 \in S_2 / S_1) = \overrightarrow{0}.}$

c) Axiome des actions de liaison : $\boxed{\overrightarrow{m_{12}}(O_2) = \overrightarrow{0}}$

2.5. Contact ponctuel :

a) Définition 6 : On dit que deux solides S_1 et S_2 sont en contact ponctuel si les mouvements de ces deux solides sont tels que leurs surfaces restent, à tout instant, tangentes entre elles, en un point I.

3 / VITESSE DE GLISSEMENT.

Définition 7 : On appelle vitesse de glissement de S_2 sur S_1 et on note $\vec{V}_g\,(S_2/S_1)$ le vecteur :

$$\boxed{\vec{V}_g\,(S_2/S_1) = \vec{V}\,(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I/S_1) - \vec{V}\,(I/S_2)}$$

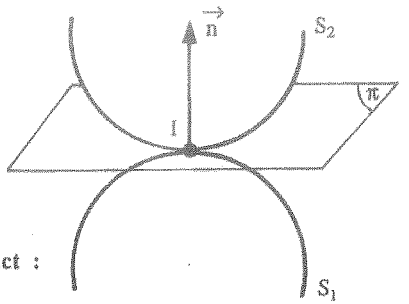
Définition 8 : On dit que le contact entre S_1 et S_2 est sans glissement sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ si et seulement si on a :

$$\forall t \in [t_1, t_2] \qquad \vec{V}_g\,(S_2/S_1) = \vec{0}$$

c) Relation cinématique exprimant le contact :

π : plan tangent commun en I ;

$\vec{n}$: normale à π au point I



On a alors $\boxed{\vec{V}_g\,(S_2/S_1)\,.\,\vec{n} = 0}$

car $\vec{V}(I, S_1)$ et $\vec{V}(I/S_2)$ sont dans π.

d) Axiomes des actions de contact :

A1) $\boxed{\vec{m}_{12}\,(I) = \vec{0}}$ Contact ponctuel

A2) Si on note $\vec{R}_{12} = \vec{T}_{12} + N_{12}\,\vec{n}$ avec $\vec{T}_{12}\,.\,\vec{n} = 0$ l'axiome s'écrit $\boxed{N_{12} \geq 0}$

A_3) Axiome dit "de Coulomb" :

1– Si $\forall t \in [t_1, t_2]$ $\vec{V}_g\,(S_2/S_1) = \vec{0}$, $\exists\, f \geq 0$ (coefficient de frottement) tel que :

$$\boxed{\|\vec{T}_{12}\| \leq f N_{12}}$$

2– Si $\forall t \in [t_1, t_2]$ $\vec{V}_g\,(S_2/S_1) \neq \vec{0}$ on a :

$$\boxed{\|\vec{T}_{12}\| = fN_{12} \text{ et } \vec{T}_{12} = -\,a\,\vec{V}_g\,(S_2/S_1) \text{ avec } a \geq 0}$$

Chapitre VI : DYNAMIQUE

I / DEFINITIONS

Définition 1 : La dynamique a pour objet de relier les mouvements de corps matériels aux caractéristiques de la matière et de son environnement et aboutit ainsi, entre autre, à une certaine compréhension des mouvements de la matière et à certaines possibilités de prédiction de ces mouvements lorsque les dites caractéristiques sont connues.

Définition 2 : Une action mécanique extérieure est une action exercée par un corps matériel S' sur un autre S disjoint de S' et qui a des effets sur la forme et le mouvement de S.

La représentation des actions se fait à l'aide des forces. Celles-ci pouvant être concentrées (force de contact) ou réparties à densité (le poids).

Axiome : Soit $\overline{S}$ le milieu extérieur à S. Le système des efforts extérieurs exercés sur S par $\overline{S}$ est représentable par un torseur noté :

$$\mathcal{T}(\overline{S} \longrightarrow S) = \{\text{torseur des effets de contact}\} + \{\text{torseur des efforts à distance}\}$$

2 / PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE : THEOREMES GENERAUX :

Enoncé : Il existe au moins un repère appelé galiléen ou absolu R_g et une chronologie absolue tel que $\forall S$ le torseur dynamique soit égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à S.

$$\mathcal{A}(S/R_g)_A = \mathcal{T}(\overline{S} \longrightarrow S)_A \quad \forall A \in \mathcal{E}_3$$

Conséquence : En exprimant que les deux torseurs ont même résultante et même moment en tout point, on obtient les théorèmes appelés traditionnellement **"Théorèmes généraux de la mécanique"**.

Théorème 1 : Théorème de la résultante dynamique.

La somme des forces extérieures exercées sur S est égale au produit de la masse totale de (S) par l'accélération galiléenne de son centre de gravité.

$$\Sigma \overrightarrow{Fext} = m(S) \cdot \overrightarrow{\Gamma}(G/R_g)$$

Théorème 2 : Théorème du moment dynamique.

Le moment dynamique est égal à la somme des moments des actions extérieures et ce en tout point $A \in \mathcal{E}_3$.

$$\overrightarrow{\delta}(A; S/R_g) = \overrightarrow{m_A}(\mathcal{T}(\overline{S} \longrightarrow S))$$

Chapitre VII : PUISSANCE REELLE

1 / PUISSANCE REELLE D'UN CHAMP DE FORCES.

Soit un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère R et soit $\mathcal{F}$ un champ de forces défini sur Σ de densité $\vec{\phi}(M)$. c'est-à-dire que la force élémentaire qui s'exerce sur tout M de Σ est donnée par $\vec{df} = \vec{\phi}(M)\, dm$.

1.1 : Définition 1 : On appelle puissance du champ $\mathcal{F}$ dans le mouvement de Σ par rapport à R et l'on note $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \Sigma/R)$ la quantité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}, \Sigma/R) = \int_{\Sigma} \vec{\phi}(M) \cdot \vec{V}(M/R)\, dm$$

Σ et $\vec{\phi}$ étant fixés, $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \Sigma/R)$ est une fonction du temps.

Cas particuliers :

1) Si Σ est un point M de masse m $\mathcal{P}(\mathcal{F}, M/R) = m\vec{\phi}(M) \cdot \vec{V}(M/R)$

2) Si $\vec{\phi}(M) = \vec{\Gamma}(M)$, $\mathcal{P}(\vec{\Gamma}; \Sigma/R) = \frac{d}{dt} Ec(\Sigma/R)$.

1.2. Cas d'un solide indéformable :

Soit $\mathcal{T}$ le torseur associé au champ de force de densité $\vec{\phi}(M)$; ses éléments de réduction en tout point $A \in \mathcal{E}_3$ sont :

◆ $\vec{R} = \int_S \vec{\phi}(M)\, dm$ ◆ $\vec{m}(A; \mathcal{T}) = \int_S \vec{AM} \wedge \vec{\phi}(M)\, dm$

Théorème 1 : Si O est un point lié à un solide S.

On a $$\mathcal{P}(\mathcal{F}, S/R) = \vec{V}(O/R) \cdot \vec{R} + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{m}(O; \mathcal{T})$$

En effet, ón a

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}, S/R) = \int_S \vec{\phi}(M) \cdot \vec{V}(O/R)\, dm + \int_S \vec{\phi}(M) \cdot \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{OM}\right] dm$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}, S/R) = \vec{V}(O/R). \int_S \vec{\phi}(M)\, dm + \vec{\Omega}(S/R) . \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\phi}(M)\, dm$$

d'où le résultat.

1.3. Puissance des inter–efforts :

Soient S_1 et S_2 deux solides en mouvement par rapport à R et soit le système matériel $\Sigma = (S_1 + S_2)$. On appelle $\mathcal{T}_{12}$ et $\mathcal{T}_{21}$ les torseurs des actions de S_1 sur S_2 et de S_2 sur S_1 ($\mathcal{T}_{12} + \mathcal{T}_{21} = 0$).

Théorème 2 : La puissance des inter–efforts entre S_1 et S_2 qu'on note $\mathcal{P}(S_1 \Leftrightarrow S_2)$ est

$$\boxed{\mathcal{P}(S_1 \Leftrightarrow S_2) = \mathcal{T}_{12} . \mathcal{V}(S_2 / S_1)}$$

où $\mathcal{V}(S_2 / S_1)$ est le torseur cinématique de S_2 en mouvement par rapport à S_1.

Cette puissance est indépendante du repère.

2 / THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE.

Soit Σ un système matériel en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g on a :

$$\boxed{\frac{dEc\,(\Sigma/R_g)}{dt} = \mathcal{P}ext + \mathcal{P}int}$$

où $\mathcal{P}ext$ est la puissance des efforts extérieurs qui s'exercent sur Σ et $\mathcal{P}int$ celle des efforts intérieurs.

Cas particuliers :

1) Si $\Sigma = S_1 \cup S_2$ S_1 et S_2 deux solides $\mathcal{P}int = \mathcal{P}(S_1 \Leftrightarrow S_2)$ = puissance des inter–efforts.

2) Si Σ est un solide $\mathcal{P}int = 0$ et $\mathcal{P}ext = \mathcal{T}(\overline{S} \longrightarrow S)_A . \mathcal{V}(S/R_g)_A \ \forall A \in S$

Exercices et Problèmes

Mécanique Classique

1 - Invariant scalaire et axe central d'un torseur.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on considère les deux torseurs :

- *$\mathcal{T}_1$ dont le vecteur $\vec{R}_1$ et le moment $\vec{\mathcal{M}}_1(O)$ par rapport à O ont pour composantes dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:*

$\vec{R}_1$: $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$; $\vec{\mathcal{M}}_1(O)$: $(-h \sin\alpha, h \cos\alpha, 0)$.

- *$\mathcal{T}_2$ dont le vecteur $\vec{R}_2$ et le moment $\vec{\mathcal{M}}_2(O)$ par rapport à O ont pour composantes dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:*

$\vec{R}_2$: $(\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)$; $\vec{\mathcal{M}}_2(O)$: $(-h \sin\alpha, -h \cos\alpha, 0)$.

1°) Quelle est la nature des torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$?

2°) Calculer l'invariant scalaire du torseur $\mathcal{T}_3$ tel que :

$$\mathcal{T}_3 = \lambda_1 \mathcal{T}_1 + \lambda_2 \mathcal{T}_2 \; ; \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} .$$

3°) Quel est l'axe central du torseur $\mathcal{T}_3$?

4°) Former l'équation cartésienne de la surface engendrée par l'axe central de $\mathcal{T}_3$ lorsque λ_1 et λ_2 varient. Quelle est son équation en coordonnées cylindriques ?

Exercice proposé.

1°) $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont des **glisseurs** car leurs vecteurs ne sont pas nuls ($\forall \alpha$) et leurs **invariants scalaires sont nuls**. En effet :

$$\vec{R}_1 . \vec{\mathcal{M}}_1(O) = -h \sin\alpha \cos\alpha + h \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

$$\vec{R}_2 . \vec{\mathcal{M}}_2(O) = -h \sin\alpha \cos\alpha + h \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

2°) Le torseur $\mathcal{T}_3 = \lambda_1 \mathcal{T}_1 + \lambda_2 \mathcal{T}_2$ a pour résultante le vecteur $\vec{R}_3 = \lambda_1 \vec{R}_1 + \lambda_2 \vec{R}_2$ et pour moment en O le vecteur : $\vec{\mathcal{M}}_3(O) = \lambda_1 \vec{\mathcal{M}}_1(O) + \lambda_2 \vec{\mathcal{M}}_2(O)$

Soit encore :

$$\vec{R}_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \cos\alpha \, \vec{x} + (\lambda_1 - \lambda_2) \cos\alpha \, \vec{y}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_3(O) = -h (\lambda_1 + \lambda_2) \sin\alpha \, \vec{x} + h (\lambda_1 - \lambda_2) \cos\alpha \, \vec{y}$$

donc l'invariant scalaire de $\mathcal{T}_3$ est égal à :

$$\boxed{I = \vec{R}_3 . \vec{\mathcal{M}}_3(0) = -4\,\lambda_1\lambda_2\, h \sin\alpha \cos\alpha}$$

3°) Pour déterminer l'axe central du torseur $\mathcal{T}_3$, on cherche l'ensemble des points $P(X,Y,Z)$ pour lesquels $\vec{\mathcal{M}}_3(P) = \vec{\mathcal{M}}_3(0) + \vec{R}_3 \wedge \vec{OP} = k\vec{R}_3$; $k \in IR$.

On trouve :

$$-h(\lambda_1 + \lambda_2)\sin\alpha + Z(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\alpha = k(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\alpha$$

$$h(\lambda_1 - \lambda_2)\cos\alpha + Z(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\alpha = k(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\alpha$$

$$Y(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\alpha - X(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\alpha = 0$$

Ainsi **l'axe central de $\mathcal{T}_3$** est la droite Δ parallèle à $\vec{R}_3$ et passant par le point $(0, 0, Z)$ avec :

$$Z = \frac{h(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2\cos^2\alpha - (\lambda_1 - \lambda_2)^2\sin^2\alpha}$$

4°) Si $P(X, Y, Z)$ est un point de Δ, on a :

$$X = \mu(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\alpha \qquad Y = \mu(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\alpha \qquad \text{et Z écrit ci-dessus.}$$

En éliminant $(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $(\lambda_1 - \lambda_2)$, on obtient : $\boxed{Z = \dfrac{hXY}{\sin\alpha\cos\alpha\,(X^2 - Y^2)}}$

qui est l'équation cartésienne de la surface engendrée par Δ quand λ_1 et λ_2 varient.

En posant $X = r\cos\theta$ et $Y = r\sin\theta$, on obtient l'équation en coordonnées cylindriques (r, θ, Z) : $\boxed{Z = \dfrac{h}{\sin(2\alpha)} \cdot tg(2\theta)}$

2 - Equation cartésienne de l'axe central d'un glisseur.

Dans le plan xOy, un torseur est constitué par les trois vecteurs glisseurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

Vecteur	*Module*	*Angle % Ox*	*Origine*
$\vec{V}_1$	*12*	*45°*	$A_1(2, 0)$
$\vec{V}_2$	*18*	*150°*	$A_2(1, 2)$
$\vec{V}_3$	*9*	*15°*	$A_3(1, 1)$

1°) Représenter ces trois glisseurs dans le plan indiqué.

2°) Donner les éléments de réduction du torseur $\mathcal{T}$ associé à ces trois glisseurs (au point O).

3°) Quelle est la valeur de la distance $\overrightarrow{Oz}$ de l'axe central du torseur $\mathcal{T}$? (Le repère (O, x, y, z) est orthonormé.

Extrait, Tétouan, PC2, Juin 84

1°) Représentation des glisseurs.

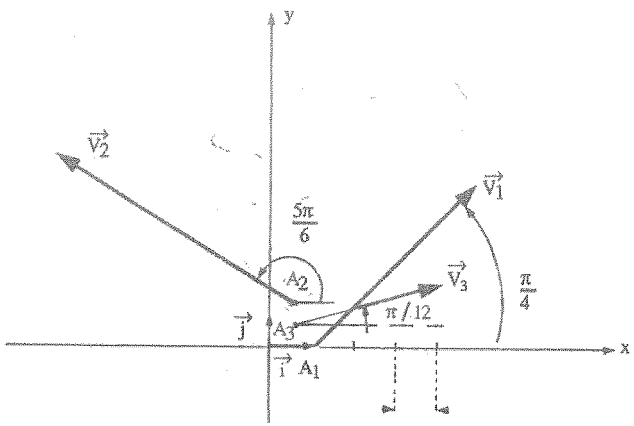
On a par hypothèse :

$$\overrightarrow{V_1} = \left[12\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\overrightarrow{i} + \left[12\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\overrightarrow{j} = 6\sqrt{2}\,(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$$

$$\overrightarrow{V_2} = \left[18\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]\overrightarrow{i} + \left[18\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]\overrightarrow{j} = 9\,(-\sqrt{3}\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$$

$$\overrightarrow{V_3} = \left[9\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\overrightarrow{i} + \left[9\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\overrightarrow{j} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{3})\,\overrightarrow{i} - (1-\sqrt{3})\,\overrightarrow{j}\right]$$

Dans le plan xOy, on obtient le représentation suivante :



1 cm = 2 unités

2°) Soit $\mathcal{T}$ le torseur associé aux trois vecteurs liés $(A_1 ; \overrightarrow{V_1})$; $(A_2 ; \overrightarrow{V_2})$ et $(A_3 ; \overrightarrow{V_3})$. Les éléments de réduction de $\mathcal{T}$ au point O sont :

a) La résultante $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$

C'est un vecteur libre du plan xOy de composants dans la torse $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$R_x = \frac{33}{4}\,.\sqrt{2} - 9\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{6}.$$

$$R_y = 9 + \frac{15}{4}\sqrt{2} + \frac{9}{4}\sqrt{6}.$$

b) Le moment en O: $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{V_1} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{V_2} + \overrightarrow{OA_3} \wedge \vec{V_3}$

Avec $\overrightarrow{OA_1} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{OA_2} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA_3} = \vec{i} + \vec{j}$.

$\vec{\mathcal{M}}_O$ est un vecteur lié (appliqué en O) perpendiculaire au plan xOy (à partir des règles du produit vectoriel). Il est donné par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \left[9 + 18\sqrt{3} - \frac{15\sqrt{2}}{2} \right] \vec{k}$$

3°) L'invariant scalaire du torseur considéré est : $I = \vec{R} . \vec{\mathcal{M}}_O$

(C'est comme on le sait une quantité indépendante du point O).

On a $I = 0$; le torseur $\mathcal{T}$ est donc un glisseur car $\vec{R}$ est non nulle. Il existe par conséquent un point P du plan xOy en lequel le moment résultant est nul. Si en plus on considère la propriété qui dit que sur l'axe central d'un torseur le module du moment est minimum, on en déduit que ce dernier est l'ensemble des points $P(x, y)$ tel que $\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{0}$.

Soit encore $\overrightarrow{PA_1} \wedge \vec{V_1} + \overrightarrow{PA_2} \wedge \vec{V_2} + \overrightarrow{PA_3} \wedge \vec{V_3} = \vec{0}$

On obtient alors la droite d'équation :

$$y = \left[\frac{5\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + 12}{3(\sqrt{2} + \sqrt{6} - 4\sqrt{3})} \right] x - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{6 + 12\sqrt{3} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6} - 4\sqrt{3}} \right]$$

C'est, comme on peut le vérifier aisément, une droite parallèle à la résultante $\vec{R}$. Elle est dans le plan xOy et sa distance à l'axe $\vec{Oz}$, qui lui est perpendiculaire, est nulle.

3 - Glisseur et couple.

Le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est orthonormé et orienté dans le sens habituel ; a, b, c sont des paramètres réels ; on donne les trois vecteurs liés suivants :

$\vec{R_1} = a\vec{x} + b\vec{y}$ ***d'origine A(1, 0, 0).***

$\vec{R_2} = \vec{y}$ ***d'origine B (1, 1, 0).***

$\vec{R_3} = c\vec{x}$ ***d'origine C (0, 0, 1).***

et on leur associe respectivement les glisseurs G_1, G_2 et G_3.

1°) Montrer que $G_1 + G_2$ est un glisseur ou le torseur nul. Dans le cas où $G_1 + G_2$ est un glisseur, préciser son axe.

2°) On note $\mathcal{T} = [\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}]$ le torseur $\mathcal{T} = G_1 + G_2 + G_3$.

a) Déterminer $\vec{\mathcal{M}}(P)$ où P est un point de coordonnées (x, y, z).

b) Préciser le cas où $\mathcal{T}$ est un couple non réduit au torseur nul ; illustrer ce cas par un schéma.

c) Lorsque $\mathcal{T}$ n'est ni un couple, ni le torseur nul, écrire deux équations définissant son axe central.

Exercice proposé

1°) Le torseur $G_1 + G_2$ a pour résultante :

$$\vec{R_1} + \vec{R_2} = a\,\vec{x} + (b+1)\,\vec{y}$$

et pour moment en A, le vecteur :

$$\vec{AA} \wedge \vec{R_1} + \vec{AB} \wedge \vec{R_2} = \vec{0}$$

On est donc en mesure de conclure que :

- si $(a, b) = (0, -1)$; $G_1 + G_2$ est le torseur nul
- si $(a, b) \neq (0, -1)$; $G_1 + G_2$ est un glisseur

car il existe un point (A) où le moment est nul. Dans ce cas, l'axe du glisseur est la droite D parallèle au vecteur non nul $\vec{R_1} + \vec{R_2}$ et qui passe par A. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{cases} (b+1)(x-1) + ay = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \forall a \neq 0 \quad \forall b \neq -1$$

2°) Soit le torseur $\mathcal{T} = G_1 + G_2 + G_3$ celui-ci a pour résultante le vecteur libre :

$$\vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} + \vec{R_3} = (a+c)\,\vec{x} + (b+1)\,\vec{y}$$

et pour moment en $P(x, y, z)$ le vecteur lié :

$$\vec{\mathcal{M}}(P) = \vec{PA} \wedge \vec{R_1} + \vec{PB} \wedge \vec{R_2} + \vec{PC} \wedge \vec{R_3}$$

ou encore : $\boxed{\vec{\mathcal{M}}(P) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AP}}$

formule de distribution des moments pour un torseur.

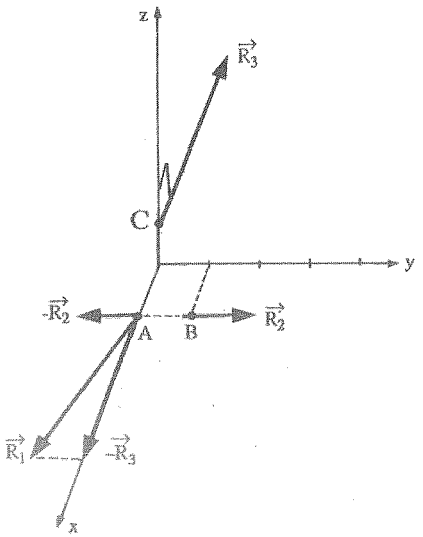
On trouve : $\vec{\mathcal{M}}(P) = [(b-1)z]\,\vec{x} + [c - z(a+c)]\,\vec{y} + [(a+c)y - (x-1)(b+1)]\,\vec{z}$

b) $\mathcal{T}$ est un couple pour $\vec{R} = \vec{0}$, c'est-à-dire lorsque $c = -a$ et $b = -1$, avec $\vec{\mathcal{M}}(P) \neq \vec{0}$, soit $c \neq 0$.

On est donc en mesure d'affirmer que si :

◆ $c = -a = 0$ et $b = -1$ $\mathcal{T}$ est le torseur nul.

◆ $c = -a \neq 0$ et $b = -1$ $\mathcal{T}$ est un couple de moment $c\vec{y}$.



Le schéma met en évidence la décomposition classique, en éliminant $(A, -\vec{R_2})$ et $(B, \vec{R_2})$ il reste $(A, -\vec{R_3})$ et $(C, \vec{R_3})$ soit deux glisseurs opposés non alignés.

c) Cas général. L'axe central est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ où $\vec{\mathcal{M}}(M) // \vec{R}$. On traduit ceci soit par $\vec{\mathcal{M}}(M) \wedge \vec{R} = \vec{0}$ soit par $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{\mathcal{M}}(M) = \lambda \vec{R}$. On obtient dans tous les cas les deux équations :

$$\begin{cases} (a + c)y - (b + 1)x + (b + 1) = 0 \\ z = \dfrac{c(a + c)}{(a + c)^2 + (b + 1)^2} \end{cases}$$

4 - Décomposition des mouvements.

On considère dans ce problème les trois repères suivants :

◆ *le repère absolu* $E = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$;

◆ *le repère relatif* $U = (G, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ *défini de telle sorte que* $\vec{u_3} = \vec{e_3}$; $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{u_1}$ *où* a *est une constante donnée et* $\vec{u_1}$ *un vecteur du plan* $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$;

◆ *le repère* $W = (G, \vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ *tel que* $\vec{w_2} = \vec{u_2}$. *Ce dernier est lié à un solide (S) de centre d'inertie G. Le mouvement de (S) par rapport au repère E est défini par les deux angles :*

◆ $(\vec{e_1}, \vec{u_1}) = \theta(t)$ *mesuré autour de* $\vec{e_3}$.

◆$(\vec{u_3}, \vec{w_3}) = \varphi(t)$ *mesuré autour de* $\vec{u_2}$.

1°) Dessiner sans ambiguïté la position des trois repères.

2°) On bloque le mouvement régi par l'angle θ. Calculer alors le vecteur rotation $\vec{\Omega_r}$ *et la vitesse de G dans E. On interdit maintenant le mouvement régi par l'angle φ.*

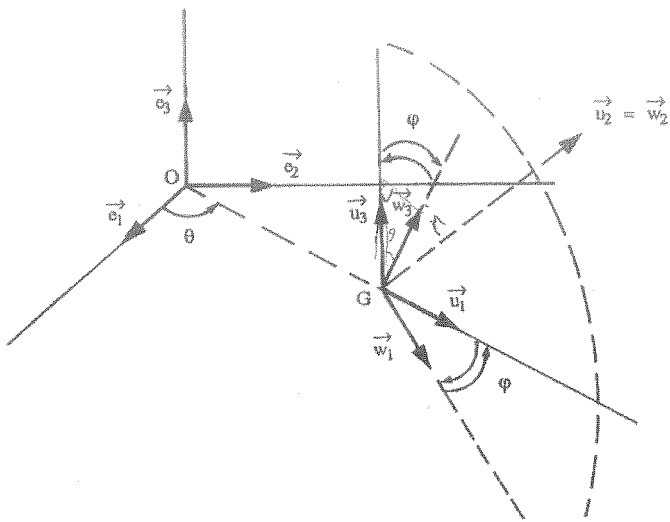
Calculer $\vec{\Omega_e}$ *et la vitesse de G dans E.*

En déduire les torseurs cinématiques pour le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement.

3°) On considère un point M de (S) tel que $\overrightarrow{GM} = r\vec{w_3}$. *Après avoir calculer les vitesses relative et d'entraînement de M, exprimer les accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis de la même particule M.*

Extrait, Fès, PC2.

1°) Représentation des repères E, U et W.



$E = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ repère absolu ;

$U = (G, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ repère relatif ;

$W = (G, \vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ repère lié à S.

Remarque 1 : Le mouvement de S (donc de W) par rapport à E se décompose de la façon suivante :

a) de E on passe à $E' = (G, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ avec $\|\overrightarrow{OG}\| = a$. Le mouvement de E' par rapport à E

est un mouvement de translation circulaire et $\vec{\Omega}(E'/E) = \vec{0}$.

b) de E' on passe à U par l'intermédiaire d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe $(G, \vec{e_3})$ et $\vec{\Omega}(U/E') = \dot{\theta}\,\vec{e_3} = \dot{\theta}\,\vec{u_3}$

c) de U on passe à W par l'intermédiaire d'une rotation directe autour de l'axe commun aux deux repères $(G, \vec{u_2} = \vec{w_2})$. On a alors $\vec{\Omega}(W/U) = \dot{\varphi}\,\vec{u_2}$.

Il en résulte que le nombre de degré de liberté du solide (S) dans son mouvement par rapport à E est égal à deux et que le vecteur rotation de ce dernier par rapport au repère E est donné par : $\vec{\Omega}(S/E) = \vec{\Omega}(W/E) = \vec{\Omega}(W/U) + \vec{\Omega}(U/E') + \vec{\Omega}(E'/E)$

Soit encore $\boxed{\vec{\Omega}(S/E) = \dot{\varphi}\,\vec{u_2} + \dot{\theta}\,\vec{u_3}}$

2°) a) On suppose que θ est une constante ($\dot{\theta} = 0$).

Cette condition est celle qui permet de définir le mouvement relatif (mouvement de S par rapport à U lorsque ce dernier est supposé fixe dans E). A partir de la remarque 1, on déduit directement : $\boxed{\vec{\Omega}(S/E) = \vec{\Omega}(S/U) = \vec{\Omega}(W/U) = \vec{\Omega}_r = \dot{\varphi}\,\vec{u_2}}$

D'autre part on a : $\boxed{\vec{V}(G/E) = \vec{V}(G/U) = a\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_1}}{\mathrm{d}t}\Big/_U = \vec{0}}$

b) On suppose que φ est une constante ($\dot{\varphi} = 0$)

On est alors en présence des hypothèses définissant le mouvement d'entraînement (c'est-à-dire mouvement de S par rapport à E avec S fixe dans U).

On obtient dans ce cas : $\boxed{\vec{\Omega}(S/E) = \vec{\Omega}(U/E) = \vec{\Omega}_e = \dot{\theta}\,\vec{u_3}}$

et : $\boxed{\vec{V}(G/E) = a\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{u_1}}{\mathrm{d}t}\Big/_E = a\,\dot{\theta}\,\vec{u_2}}$

c) On en déduit que les torseurs cinématiques pour le mouvement relatif $[\mathscr{C}_r]$ et le mouvement d'entraînement $[\mathscr{C}_e]$ ont respectivement pour éléments de réduction au point G :

$$[\mathscr{C}_r] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_r = \dot{\varphi}\,\vec{u_2} \\ \vec{V}(G/U) = \vec{0} \end{array} \right.{}_G \qquad \text{et} \qquad [\mathscr{C}_e] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_e = \dot{\theta}\,\vec{u_3} \\ \vec{V}(G/E) = a\,\dot{\theta}\,\vec{u_2} \end{array} \right.{}_G$$

Remarque 2 : Les torseurs définis plus haut sont des glisseurs pour toutes les valeurs non nulles de $\dot{\varphi}$ et de $\dot{\theta}$.

3°) Soit M un point du solide S tel que $\overrightarrow{GM} = r\overrightarrow{w_3}$, on a successivement :

a) Le vecteur **vitesse relative** $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V}(M/U) = \dfrac{d\overrightarrow{GM}}{dt} / U$

$$\overrightarrow{V_r} = r \frac{d\overrightarrow{w_3}}{dt} / U = r\,\overrightarrow{\Omega}(W/U) \wedge \overrightarrow{w_3} = r\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{w_1}$$

b) Le vecteur **vitesse d'entraînement** $\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V}\ (M \in U/E)$

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} / E \qquad \text{(Avec } M \text{ fixe dans } U\text{)}$$

$$\overrightarrow{V_e} = a\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_2} + r \frac{d\overrightarrow{w_3}}{dt} / E \qquad \text{(Avec } \dot{\varphi} = 0\text{)}$$

$\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ étant la condition qui traduit que M est fixe dans U.

or $$\frac{d\overrightarrow{w_3}}{dt} / E = \overrightarrow{\Omega}(W/E) \wedge \overrightarrow{w_3} = (\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_3} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{w_3} = \dot{\theta} \sin\varphi\,\overrightarrow{w_2} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{w_1}$$

donc $$\boxed{\overrightarrow{V_e} = (a + r \sin\varphi)\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{w_2}}$$

c) Le vecteur **accélération relative** :

$$\overrightarrow{\Gamma_r} = \overrightarrow{\Gamma}(M/U) = \frac{d\overrightarrow{V}(M/U)}{dt} / U$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_r} = r\,\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{w_1} - r\,\dot{\varphi}^2\,\overrightarrow{w_3}}$$

d) Le vecteur **accélération de Coriolis.**

$$\overrightarrow{\Gamma_c} = 2\,\overrightarrow{\Omega}(U/E) \wedge \overrightarrow{V_r} = 2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_3} \wedge r\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{w_1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_c} = 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} \cos\varphi\,\overrightarrow{w_2}}$$

e) Le vecteur **accélération d'entraînement.**

$$\overrightarrow{\Gamma_e} = \overrightarrow{\Gamma}(G/E) + \frac{d\overrightarrow{\Omega}(U/E)}{dt} \wedge \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{\Omega}(U/E) \wedge (\overrightarrow{\Omega}(U/E) \wedge \overrightarrow{GM})$$

On trouve suivant la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$:

$$\boxed{\vec{\Gamma}_e = (a + r \sin \varphi)\left[\ddot{\theta}\,\vec{u}_2 - \dot{\theta}^2\,\vec{u}_1\right]}$$

Remarque : On peut vérifier aisément que cette expression est différente de la dérivée de la vitesse d'entraînement par rapport au repère absolu. On trouve en effet :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_e = \frac{d\vec{V}_e}{dt} / E + \frac{1}{2}\vec{\Gamma}_c}$$

L'égalité dans le cas général n'est vérifiée que lorsque $\vec{\Gamma}_c$ est nulle, c'est-à-dire lorsque le repère relatif est en mouvement de translation par rapport au relatif.

5 - Calcul des vitesses de glissement.

La manivelle O_1O_3 est en mouvement par rapport à un bâti et lui est liée par un axe rotoïde passant par $O_1(O_1, \vec{e}_3)$ figure 1. Le pignon (1) est en rotation autour de l'axe $(O_1, \vec{e}_3)$. Sa rotation est indépendante de celle de la manivelle.

La manivelle entraîne dans son mouvement les deux pignons (2) et (3) libres de tourner autour de leurs axes respectifs $(O_2, \vec{e}_3)$, $(O_3, \vec{e}_3)$. Ces pignons sont en contact aux points I et J et on désigne par w_1, w_2, w_3, les modules des vecteurs rotations instantanés des pignons par rapport à un repère lié au bâti $(O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3)$ désigne le trièdre direct lié à la manivelle et est repéré à chaque instant par l'angle $\theta(t)$.

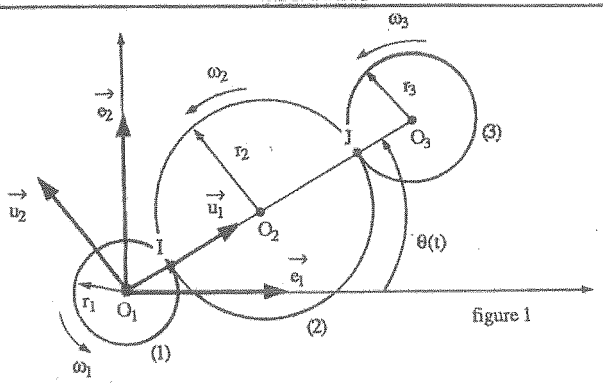
Toutes les grandeurs vectorielles seront exprimées sur la base mobile $(\vec{U}_i)$.

1°) Exprimer le torseur cinématique de la manivelle en O_1, O_2 et O_3 en fonction de r_1, r_2, r_3 et $\Omega = \dot{\theta}(t)$.

2°) Calculer les vitesses au point I pour les particules appartenant au pignon (1) : $\vec{V}(I_1)$ et au pignon (2) : $\vec{V}(I_2)$ par rapport au repère $(O_1/\vec{e}_i)$.

3°) Même question au point J : $\vec{V}(J_2)$ et $\vec{V}(J_3)$.

4°) En déduire les vitesses de glissement de (2) par rapport à (1) et de (3) par rapport à (2).



El Jadida, PC2, 1987

1°) Soit $R_0 = (O_1, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ le repère fixe et soit P un point quelconque de la manivelle (O_1O_3). Le torseur cinématique en P de cette dernière en mouvement par rapport à R_0 est :

$$\mathcal{C}P : (O_1O_3)\%R_0) = \begin{cases} \vec{R} = \vec{\Omega}((O_1O_3)/R_0) \\ \vec{\mathcal{M}}_P = \vec{V}(P \in (O_1O_3)/R_0) \end{cases}$$

Lorsqu'on change de point P, la résultante reste inchangée ; c'est le vecteur rotation.

$$\vec{\Omega}((O_1O_3)/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{e_3}$$

ce qui n'est pas vrai pour le vecteur moment qui lui est un vecteur lié. On a successivement:

- pour $P \equiv O_1$: $\vec{V}(O_1/R_0) = \vec{0}$
- pour $P \equiv O_2$: $\vec{V}(O_2/R_0) = \dfrac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} / R_0 = (r_1 + r_2)\,\dot{\theta}\,\vec{u_2}$
- pour $P \equiv O_3$: $\vec{V}(O_3/R_0) = \dfrac{d\overrightarrow{O_1O_3}}{dt} / R_0 = (r_1 + 2r_2 + r_3)\,\dot{\theta}\,\vec{u_2}$

2°) Les vecteurs rotations instantanés des pignons *(1)*, *(2)* et *(3)* sont, à partir de l'énoncé, respectivement donnés par :

$$\vec{\Omega}((1)/R_0) = w_1\,\vec{e_3}$$
$$\vec{\Omega}((2)/R_0) = w_2\,\vec{e_3}$$
$$\vec{\Omega}((3)/R_0) = w_3\,\vec{e_3}$$

La formule de distribution des vitesses pour les particules d'un même solide nous permet

alors d'écrire au point *I*

◆ **En considérant le pignon *(1)* :**

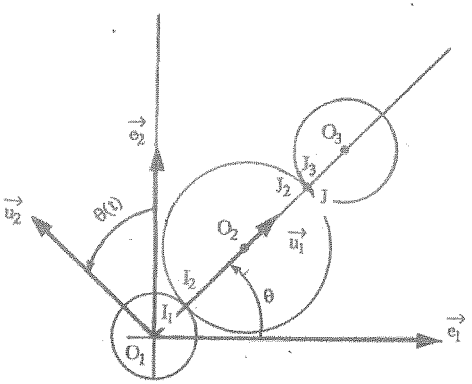
$$\vec{V}(I_1) = \vec{V}(O_1) + \vec{\Omega}(1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 I_1}$$

$$\boxed{\vec{V}(I_1) = w_1 \vec{e_3} \wedge r_1 \vec{u_1} = w_1 r_1 \vec{u_2}}$$

◆ **En considérant le pignon *(2)* :**

$$\left(\vec{V}(I_2) = \vec{V}(O_2) + \vec{\Omega}(2/R_0) \wedge \overrightarrow{O_2 I_2} = (r_1 + r_2)\, \dot{\theta}\, \vec{u_2} + w_2 \vec{e_3} \wedge -r_2 \vec{u_1} \right.$$

$$\boxed{\vec{V}(I_2) = \left[(r_1 + r_2)\, \dot{\theta} - r_2 w_2 \right] \vec{u_2}}$$



3°) En procédant de la même manière, on obtient au point *J*

◆ **En considérant le pignon *(2)* :**

$$\vec{V}(J_2) = \vec{V}(O_2) + \vec{\Omega}(2/R_0) \wedge \overrightarrow{O_2 J_2} = (r_1 + r_2)\, \dot{\theta}\, \vec{u_2} + w_2 \vec{e_3} \wedge r_2 \vec{u_1}$$

$$\boxed{\vec{V}(J_2) = \left[(r_1 + r_2)\, \dot{\theta} + w_2 r_2 \right] \vec{u_2}}$$

◆ **En considérant le pignon *(3)* :**

$$\vec{V}(J_3) = \vec{V}(O_3) + \vec{\Omega}(3/R_0) \wedge \overrightarrow{O_3 J_3} = (r_1 + 2r_2 + r_3)\, \dot{\theta}\, \vec{u_2} + w_3 \vec{e_3} \wedge -r_3 \vec{u_1}$$

$$\boxed{\vec{V}(J_3) = \left[(r_1 + 2r_2 + r_3)\, \dot{\theta} - w_3 r_3 \right] \vec{u_2}}$$

4°) On rappelle que la vitesse de glissement d'un solide S_2 par rapport à un solide S_1 est

donnée par : $\vec{V}_g(S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R_0) - \vec{V}(I \in S_1/R_0)$

et ce pour tout repère R_0 ; ce vecteur étant contenu dans le plan tangent commun aux deux solides S_1 et S_2 au point I.

Pour notre cas particulier, on obtient directement :

$$\boxed{\vec{V}_g((2)/(1)) = \vec{V}(I_2) - \vec{V}(I_1) = \left[(r_1 + r_2)\,\dot{\theta} - r_2 w_2 - r_1 w_1\right]\vec{u}_2}$$

de même que : $$\boxed{\vec{V}_g((3)/(2)) = \vec{V}(J_3) - \vec{V}(J_2) = \left[(r_2 + r_3)\,\dot{\theta} - r_3 w_3 - r_2 w_2\right]\vec{u}_2}$$

Remarque : Pour respecter les notations de l'énoncé, il suffit de remplacer $\dot{\theta}$ par Ω.

6 - Vitesses et accélérations des points d'un système matériel.

On considère deux barres OA et AB identiques, articulées en A, (chacune étant rectiligne, homogène, de masse m et de longueur 2l) formant un système (OA + AB).

Soit R_0 le repère absolu représenté par $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z})$, et R le repère relatif représenté par $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, déduit de R_0 par la précession ψ autour de $(O, \vec{z})$, ψ fonction de t.

Les deux barres restent constamment situées dans $(O, \vec{z}, \vec{x})$ de manière que l'extrémité O de OA soit fixée à l'origine O de R, et que l'extrémité B de AB reste sur $(O, \vec{x})$.

On pose $(\vec{z}, \overrightarrow{OA}) = \theta$, fonction de t.

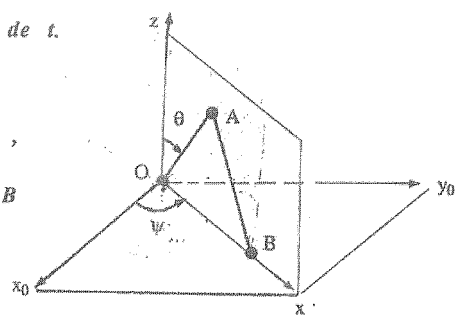
On lie à la barre OA le repère

$R_1 = (O, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{y})$, $\vec{i_1} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{2l}$,

$\vec{j_1} = \vec{y} \wedge \vec{i_1}$ *et à la barre AB*

le repère $R_2 = (B, \vec{i_2}, \vec{j_2}, \vec{y})$,

$\vec{i_2} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2l}$, $\vec{j_2} = \vec{y} \wedge \vec{i_2}$



1°) Exprimer $(\vec{z}, \vec{i_2})$ et exprimer dans R les vecteurs $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{i_2}, \vec{j_2}$. Donner les coordonnées relatives de G_1, G_2, G, centres d'inertie respectifs de OA, de AB et du système (OA + AB).

Donner $\vec{\Omega}(\overrightarrow{OA}/R_0)$ et $\vec{\Omega}(\overrightarrow{AB}/R_0)$.

2°) On veut étudier les vitesses des points "intéressants".

a) Si M est un point mobile dans $(O, \vec{z}, \vec{x})$, montrer sans calculs que $\vec{V}_e(M)$ et $\vec{V}_r(M)$ sont orthogonales.

b) En déduire que le torseur cinématique $\mathcal{V}_a = [\vec{\Omega}_a, \vec{V}_a]$ de la barre A dans son mouvement absolu, est la somme des 2 torseurs "d'entraînement" et "relatif" : $\mathcal{V}_e = [\vec{\Omega}_e, \vec{V}_e]$ et $\mathcal{V}_r = [\vec{\Omega}_r, \vec{V}_r]$.

Expliciter tous les éléments de $\mathcal{V}_e$ et $\mathcal{V}_r$ respectivement dans R et R_1, appliquer les résultats à G_1 et à A.

c) Même question que la précédente, pour le torseur $\mathcal{V}_a' = [\vec{\Omega}', \vec{V}_a]$ de la barre AB, somme de $\mathcal{V}_e' = [\vec{\Omega}_e', \vec{V}_e]$ et $\mathcal{V}_r' = [\vec{\Omega}_r', \vec{V}_r]$, où l'on calculera $\vec{V}_e(B)$, $\vec{V}_r(B)$; on explicitera les éléments de $\mathcal{V}_a'$ dans R et de $\mathcal{V}_r'$ dans R_2.

Appliquer les résultats à G_2 et A.

Les vitesses obtenues pour A sont-elles les mêmes en b) et c) ? Pourquoi ? Vérifier la réponse.

d). Calculer $\vec{V}_e(G)$, $\vec{V}_r(G)$ et les exprimer dans R.

e) Calculer $\vec{\Gamma}_a(A)$ de 2 manières (en partant du champ des accélérations pour OA, puis du champ des accélérations pour AB).

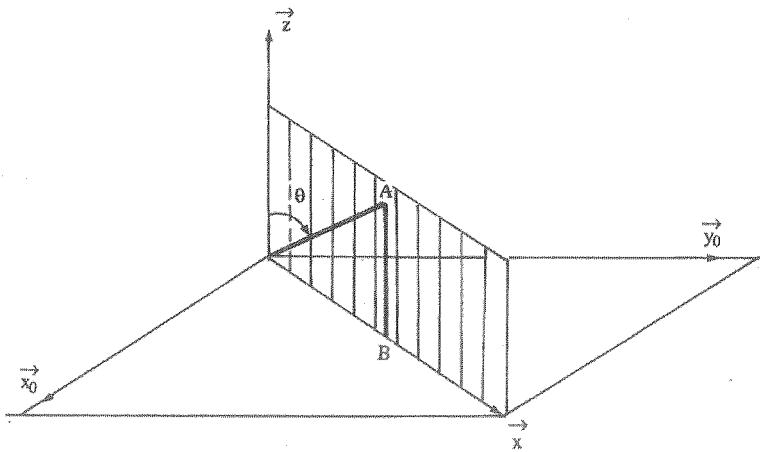
Vérifier l'égalité des deux résultats en projetant dans R.

Exercice proposé

Soit $R_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z})$ un repère fixe supposé absolu et $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère relatif. Ce dernier est tel que $(\vec{x_0}, \vec{x}) = (\vec{y_0}, \vec{y}) = \psi$ mesuré autour de $\vec{z}$.

On en déduit que $\boxed{\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z}}$

1°) Le système Σ : ensemble des deux tiges OA et AB homogènes, identiques et articulées en A est en mouvement par rapport à R et R_0. Il est tel que O reste fixe, B reste sur $(O, \vec{x})$ et les deux tiges demeurent au cours du temps dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$.



Le triangle OAB est donc **un triangle isocèle** et la connaissance de $\theta = (\vec{z}, \vec{OA})$ est nécessaire et suffisante pour déterminer la position de Σ dans R.

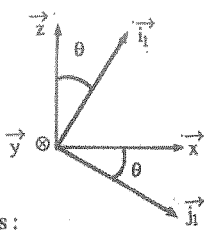
En effet, si on appelle :

◆ $R_1 = (O, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{y})$ le repère lié à la tige OA, avec $\vec{i_1} = \dfrac{\vec{OA}}{2l}$ et $\vec{j_1} = \vec{y} \wedge \vec{i_1}$ on a :

$(\vec{z}, \vec{i_1}) = (\vec{x}, \vec{j_1}) = \theta$ mesuré autour de $\vec{y}$ ou encore :

$$\boxed{\vec{i_1} = \cos\theta\, \vec{z} + \sin\theta\, \vec{x}}$$

$$\boxed{\vec{j_1} = \cos\theta\, \vec{x} - \sin\theta\, \vec{z}}$$

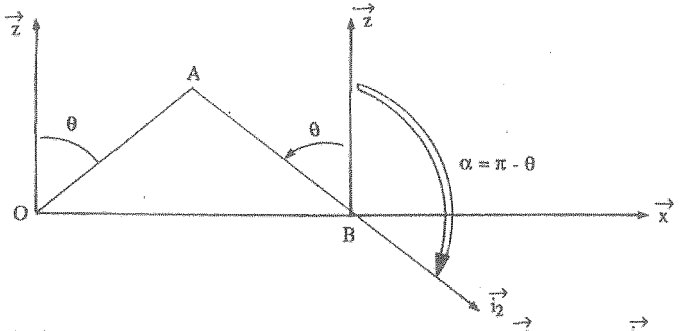


Le vecteur rotation instantanée de OA par rapport à R est alors :

$$\boxed{\vec{\Omega}(OA/R) = \dot{\theta}\, \vec{y}}$$

◆ $R_2 = (B, \vec{i_2}, \vec{j_2}, \vec{y})$ le repère lié à la tige AB, avec $\vec{i_2} = \dfrac{\vec{AB}}{2l}$ et $\vec{j_2} = \vec{y} \wedge \vec{i_2}$,

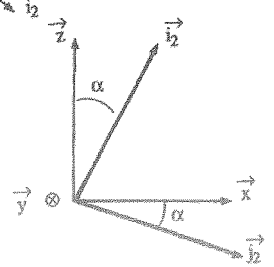
on a alors : $(\vec{z}, \vec{i_2}) = (\vec{x}, \vec{j_2}) = \alpha$ mesuré autour de $\vec{y}$ avec à partir des propriétés d'un triangle isocèle : $\boxed{\alpha = \pi - \theta}$ (voir figure).



On en déduit :

$$\vec{i_2} = cos\ \alpha\ \vec{z} + sin\ \alpha\ \vec{x} = -cos\ \theta\ \vec{z} + sin\ \theta\ \vec{x}$$

$$\vec{j_2} = cos\ \alpha\ \vec{x} - sin\ \alpha\ \vec{z} = -cos\ \theta\ \vec{x} - sin\ \theta\ \vec{z}$$



Le vecteur rotation instantanée de la tige AB par rapport au repère relatif R est par conséquent égal à :

$$\vec{\Omega}(AB/R) = \dot{\alpha}\ \vec{y} = (\dot{\pi - \theta})\ \vec{y} = -\dot{\theta}\ \vec{y}$$

Pour les coordonnées relatives des centres d'inertie ; G_1 est au milieu de $\overrightarrow{OA}$ et G_2 est au milieu de $\overrightarrow{AB}$ et ce car les deux tiges sont homogènes, on a donc :

$$\overrightarrow{OG_1} = l\ sin\ \theta\ \vec{x} + l\ cos\ \theta\ \vec{z}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2} = 3\ l\ sin\ \theta\ \vec{x} + l\ cos\ \theta\ \vec{z}$$

La position du centre d'inertie du système Σ est, à partir de la formule du barycentre, donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2}}{2} = 2\ l\ sin\ \theta\ \vec{x} + 2\ l\ cos\ \theta\ \vec{z}$$

car OA et AB ont la même masse.

Concernant les vecteurs rotations instantanées de OA et AB par rapport à R_0 on a respectivement :

$$\vec{\Omega}(OA/R_0) = \vec{\Omega}(OA/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\theta}\ \vec{y} + \dot{\psi}\ \vec{z}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(AB/R_0) = \vec{\Omega}(AB/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) = -\dot{\theta}\,\vec{y} + \dot{\psi}\,\vec{z}}$$

Remarque : Le nombre du degré de liberté du système Σ est égal à 1 lorsqu'on considère son mouvement dans R et à 2 lorsque ce mouvement est étudié par rapport à R_0. La notion de nombre de degré de liberté est donc une notion relative.

2°) **a)** On suppose que M a un mouvement relatif dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$ ceci implique la vitesse relative de M reste dans ce plan (et ce car la vitesse d'une particule M dans un repère est portée par la tangente à la trajectoire de M dans ce repère). D'autre part, M ayant un mouvement d'entraînement par rotation pure d'axe $(O, \vec{z})$, on a : $\vec{V}_e(M).\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

Les vitesses relatives et d'entraînement sont donc orthogonales.

b) Si M est un élément de OA.

On a $[\mathcal{V}_a] = [\mathcal{V}_r] + [\mathcal{V}_e]$ avec :

$[\mathcal{V}_a] = [\vec{\Omega}_a = \dot{\theta}\,\vec{y} + \dot{\psi}\,\vec{z}\ ;\ \vec{V}_a(M)]$ torseur cinématique absolu

$[\mathcal{V}_r] = [\vec{\Omega}_r = \dot{\theta}\,\vec{y}\ ;\ \vec{V}_r(M)]$ torseur cinématique relatif

$[\mathcal{V}_e] = [\vec{\Omega}_e = \dot{\psi}\,\vec{z}\ ;\ \vec{V}_e(M)]$ torseur cinématique "d'entraînement"

Les deux repères R_0 et R ayant la même origine, on a :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{OM} = \dot{\psi}\,\vec{z} \wedge \overrightarrow{OM}\ \vec{i}_1$$

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = \overline{OM}\ \dot{\psi} \sin\theta\ \vec{y}}$$

de même : $\vec{V}_r(M) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}/R = \overline{OM} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{i}_1}{\mathrm{d}t}/R = \overline{OM} \cdot \left[\dfrac{\mathrm{d}\vec{i}_1}{\mathrm{d}t}/R_1 + \vec{\Omega}R_1/R \wedge \vec{i}\right]$

$$\boxed{\vec{V}_r(M) = \overline{OM}\ \dot{\theta}\ \vec{j}_1}$$

Application :

Pour $M \equiv G_1$: $(\overrightarrow{OG_1} = l\,\vec{i}_1)$; $\vec{V}_e(G_1) = l\,\dot{\psi} \sin\theta\,\vec{y}$; $\vec{V}_r(G_1) = l\,\dot{\theta}\,\vec{j}_1$

Pour $M \equiv A$: $(\overrightarrow{OA} = 2\,l\,\vec{i}_1)$; $\vec{V}_e(A) = 2\,l\,\dot{\psi} \sin\theta\,\vec{y}$; $\vec{V}_r(A) = 2\,l\,\dot{\theta}\,\vec{j}_1$

c) Si M est un élément de AB :

On procède de la même manière que b) avec :

$$\vec{\Omega}_e' = \vec{\Omega}_e = \dot{\psi}\,\vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_r' = -\vec{\Omega}_r = -\dot{\theta}\,\vec{y}$$

Pour le calcul de $\vec{V}_e(M)$ et $\vec{V}_r(M)$ il est plus "commode" de "partir de B". En effet, on a :

$$\vec{V}_e(B) = \vec{\Omega}_e' \wedge \vec{OB} = \dot{\psi}\,\vec{z} \wedge (2\,l\,\vec{i_1} + 2\,l\,\vec{i_2})$$

$$\vec{V}_e(B) = 2\,l\,\dot{\psi}\left[(\vec{z} \wedge \vec{i_1}) + (\vec{z} \wedge \vec{i_2})\right] = 2\,l\,\dot{\psi}(\sin\theta + \sin\alpha)\,\vec{y}$$

$$\vec{V}_e(B) = 4\,l\,\dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{y}$$

le point coïncidant et le repère relatif constituant à tout instant "un solide", on peut écrire pour tout $M \in AB$: $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(M \in R/R_0) = \vec{V}(B \in R/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{BM}$

Soit $\vec{V}(M \in R/R_0) = 4\,l\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{y} + \dot{\psi}\,\vec{z} \wedge \vec{BM}\,\vec{i_2}$

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = (4\,l\,\dot{\psi}\sin\theta + \vec{BM}\,\dot{\psi}\sin\theta)\,\vec{y}}$$

de même à partir de : $\vec{V}_r(B) = \frac{d}{dt}(4\,l\sin\theta\,\vec{x})/R = 4\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x}$

On peut avoir pour tout M de AB :

$$\vec{V}_r(M) = \vec{V}_r(B) + \vec{\Omega}(R_2/R) \wedge \vec{BM} = 4\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x} + (-\dot{\theta}\,\vec{y}) \wedge \vec{BM}\,\vec{i_2}$$

Soit $$\boxed{\vec{V}_r(M) = 4\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x} - \vec{BM}\,\dot{\theta}\,\vec{j_2}}$$

Il en résulte que pour :

◆ $M \equiv G_2$; $\vec{BG_2} = -l\,\vec{i_2}$ d'où :

$$\boxed{\vec{V}_e(G_2) = 3\,l\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{y}} \qquad \boxed{\vec{V}_r(G_2) = 4\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x} + l\,\dot{\theta}\,\vec{j_2}}$$

◆ $M \equiv A$; $\vec{BA} = -2\,l\,\vec{i_2}$ d'où :

$$\boxed{\vec{V}_e(A) = 2\,l\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{y}} \qquad \boxed{\vec{V}_r(A) = 4\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x} + 2\,l\,\dot{\theta}\,\vec{j_2}}$$

Pour le point A, commun à OA et AB, on doit trouver les mêmes vitesses relative et d'entraînement. $\vec{V}_e(A)$ a la même expression au b) et au c). Pour $\vec{V}_r(A)$ au b) et au c), il faut comparer $2\,l\,\dot{\theta}\,\vec{j_1}$ et $(4\,l\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{x} + 2\,l\,\dot{\theta}\,\vec{j_2})$. En utilisant la première question, on trouve dans les deux cas : $$\boxed{\vec{V}_r(A) = 2\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x} - 2\,l\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z}}$$

d) Puisque $\vec{OG} = \frac{1}{2}(\vec{OG_1} + \vec{OG_2})$ on a :

$$\vec{V}_e(G) = \frac{1}{2}\left[\vec{V}_e(G_1) + \vec{V}_e(G_2)\right]$$

Soit $$\boxed{\vec{V}_e(G) = 2\,l\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{y}}$$

de même $$\vec{V}_r(G) = \frac{1}{2}\left(l\,\dot{\theta}\,\vec{j_1} + 4\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x} + l\,\dot{\theta}\,\vec{j_2}\right)$$

Avec $\vec{j_1} + \vec{j_2} = -2\sin\theta\,\vec{z}$

donc $$\boxed{\vec{V}_r(G) = 2\,l\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x} - l\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z}}$$

e) Pour A considéré sur OA, on a :

$$\vec{V}_a(A) = \vec{V}_a(O) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{OA} \qquad \text{avec } \vec{V}_a(O) = \vec{0}$$

D'où $$\vec{\Gamma}_a(A) = \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R_0)}{dt}/R_0 \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}_a(A)$$

Soit $\vec{\Gamma}_a(A) = \overset{\circ}{(\dot{\psi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{y})}/R_0 \wedge (2\,l\,\vec{i_1}) + (\dot{\psi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{y}) \wedge \left[(\dot{\psi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{y}) \wedge 2\,l\,\vec{i_1}\right]$

compte tenu de $$\overset{\circ}{(\dot{\psi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{y})}_{/R_0} = \ddot{\psi}\,\vec{z} + \ddot{\theta}\,\vec{y} - \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\vec{x}$$

on trouve :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_a(A) = [-2\,l\,\dot{\psi}^2\sin\theta]\,\vec{x} + [2\,l\,\ddot{\psi}\sin\theta + 4\,l\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta]\,\vec{y} - 2\,l\,\dot{\theta}^2\,\vec{i_1} + 2\,l\,\ddot{\theta}\,\vec{j_1}}$$

de même pour A considéré sur AB on a :

$$\vec{\Gamma}_a(A) = \vec{\Gamma}_a(B) + \frac{d\vec{\Omega}(R_2/R_0)}{dt}/R_0 \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge (\vec{V}_a(A) - \vec{V}_a(B))$$

ou encore :

$$\vec{\Gamma}_a(A) = \vec{\Gamma}_a(B) + \frac{d\vec{\Omega}(R_2/R_0)}{dt}/R_0 \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{BA})$$

avec $$\vec{\Gamma}_a(B) = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_e(B) + \vec{V}_r(B)\right]/R_0$$

$$\vec{\Gamma}_a(B) = 4\,l\,(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta - \dot{\psi}^2\sin\theta)\,\vec{x} + 4\,l\,(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta)\,\vec{y}$$

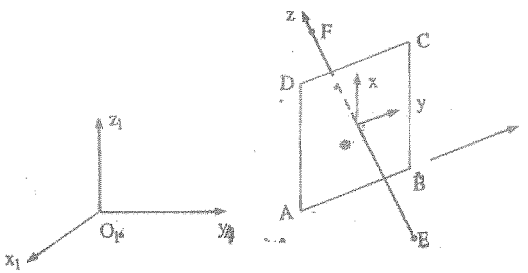
On trouve :

$$\vec{\Gamma}_a(A) = [-4\,l\,\dot{\theta}^2 \sin\theta + 4\,l\,\ddot{\theta}\cos\theta - 2\,l\sin\theta\,\dot{\psi}^2]\,\vec{x} + [4\,l\cos\theta\,\dot{\psi}\,\dot{\theta} + 2\,l\sin\theta\,\ddot{\psi}]\,\vec{y} + 2\,l\,\dot{\theta}^2\,\vec{i}_2 + 2\,l\,\ddot{\theta}\,\vec{j}_2$$

En ramenant tout dans R, les deux résultats de $\vec{\Gamma}_a(A)$ sont bien les mêmes et égales à :

$$\vec{\Gamma}_a(A) = \begin{matrix} \\ (\vec{x},\,\vec{y},\,\vec{z}) \end{matrix} \begin{bmatrix} -2\,l\sin\theta\,(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + 2\,l\,\ddot{\theta}\cos\theta \\ 2\,l\,\ddot{\psi}\sin\theta + 4\,l\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta \\ -2\,l\,\dot{\theta}^2\cos\theta - 2\,l\,\ddot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix}$$

7 - Cinématique du solide.



Un solide S est formé d'une plaque plane rectangulaire ABCD, de centre O ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $AB = DC = L$, $CB = DA = l$) et d'une barre rectiligne EF (longueur 2h) de milieu O, liée rigidement à la plaque de telle sorte que EF soit perpendiculaire au plan ABCD.

Un repère $R(O, x, y, z)$ orthonormé direct est lié au solide de façon que $O\vec{z}$ soit porté par $\overrightarrow{EF}$ et soit de même sens ; en outre $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont respectivement parallèles à $O\vec{x}$ et $O\vec{y}$ et de même sens.

Le solide est en contact en E avec le plan $O_1x_1y_1$ d'un repère orthonormé direct $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$; S est situé dans la région $O_1z_1 \geq 0$.

La position de S dans R_1 est définie par les coordonnées (X, Y, Z) de O dans R_1 et par les angles d'Euler ψ, θ, φ associés aux repères orthonormés suivants :

$$R_1'(O, x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{\psi} R_2(O, u, v, z_1) \xrightarrow{\theta} R_3(O, u, w, z) \xrightarrow{\varphi} R(O, x, y, z)$$

1°) Trouver la condition géométrique de contact

2°) Calculer $\vec{\Omega}(S/R_1)$ par ses composantes dans R_2 et dans R_3.

3°) Calculer $\dfrac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt} / R_1$ par ses composantes dans R_3.

4°) Calculer $\vec{V}(O/R_1)$, vitesse de O par rapport à R_1, puis calculer $\vec{V}(E/R_1)$ à l'aide de la formule fondamentale de la cinématique du solide (E est un point de S) (on projettera dans R_2).
Donner les conditions de non glissement de S par rapport au plan $O_1x_1y_1$ en E. On considère le point géométrique I occupé par E à l'instant t, comparer $\vec{V}(I/R_1)$ et $\vec{V}(E/R_1)$.

5°) On suppose E fixe dans R_1.

a) Ecrire $\vec{V}(O/R_1)$ en fonction de $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ et θ. (On projettera dans R_3).

Calculer $\vec{\Gamma}(O/R_1)$ en fonction de ψ, θ et de leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps. (On projettera dans R_3).

b) On considère un point matériel G qui se déplace le long de O, tel que $\overrightarrow{OG} = a(t).\vec{x}$, On appelle le mouvement de R par rapport à R_1, mouvement d'entraînement ; le mouvement de G par rapport à R, mouvement relatif.
Calculer la vitesse d'entraînement, la vitesse relative, l'accélération relative et l'accélération de Coriolis de G (repère de projection R_3).

c) Déterminer l'expression de $\frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}/_{R_1} \wedge (a\vec{x})$ et calculer l'accélération d'entraînement de G (repère de projection R_3).

Fès, MP2, 1988

1°) La condition géométrique de contact est traduite par la relation : $\overrightarrow{O_1E} \cdot \vec{Z_1} = 0$ (1)

(*E* appartient au plan $(O_1\ x_1\ y_1)$)

or $$\overrightarrow{O_1E} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OE}$$

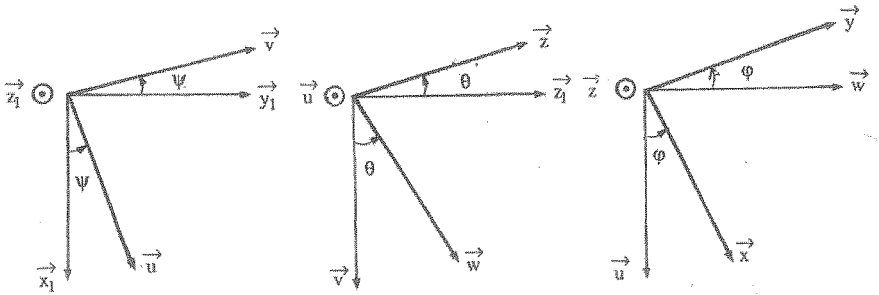
où *O* est le centre de la plaque *ABCD* de coordonnées *(X, Y, Z)* dans R_1 (c'est-à-dire : $\overrightarrow{O_1O} = X\vec{x_1} + Y\vec{y_1} + Z\vec{z_1}$) et $\overrightarrow{OE} = -h\vec{z}$.

En remplaçant dans (1), on obtient la condition : $\boxed{Z = h \cos\theta}$ (2)

C'est une équation de liaison holonome qui permet d'affirmer que le nombre de degré de liberté de *S* (= nombre de paramètres de position indépendant entre eux) est égal à 5.

2°) **Le vecteur rotation** instantanée de *S* en mouvement dans R_1 est :

$$\vec{\Omega}(S/R_1) = \vec{\Omega}(R/R_1) = \vec{\Omega}(R/R_3) + \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1') + \vec{\Omega}(R_1'/R_1)$$



$\vec{\Omega}(R_2/R_1') = \dot{\psi}\,\vec{z_1}$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \dot{\theta}\,\vec{u}$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(R/R_3) = \dot{\varphi}\,\vec{z}$

A noter que $\vec{\Omega}(R_1'/R_1) = \vec{0}$ car R_1' est en mouvement de translation par rapport à R_1 ; on a donc :

$$\vec{\Omega}(S/R_1) = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\vec{z_1} + \dot{\varphi}\,\vec{z} \qquad (3)$$

et puisque

$$\vec{z_1} = \cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{w}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_1) = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z}} \qquad (4)$$

C'est l'expression du vecteur $\vec{\Omega}(S/R_1)$ dans la base de R_3.

D'autre part :

$$\vec{z} = \cos\theta\,\vec{z_1} - \sin\theta\,\vec{v}$$

En remplaçant dans (3), on obtient l'expression du vecteur rotation dans la base de R_2.

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_1) = \dot{\theta}\,\vec{u} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{v} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{z_1}} \qquad (5)$$

3°) A partir de la formule de dérivation composée, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}/R_1 = \frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}/F + \vec{\Omega}(F/R_1) \wedge \vec{\Omega}(S/R_1)$$

où F est l'un quelconque des trois repères R_2, R_3 ou R (dans le cas où $F = R$ le produit vectoriel $\vec{\Omega}(F/R_1) \wedge \vec{\Omega}(S/R_1)$ est nul).

Pour répondre à la question posée, on prend $F = R_3$ et on considère l'expression (4) de $\vec{\Omega}(S/R_1)$. On a alors :

$$\frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}/R_1 = (\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{u} + (\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta})\vec{w}$$
$$+ (\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\vec{z} \qquad (6)$$

4°) La vitesse du point O par rapport à R_1 est :

$$\boxed{\vec{V}(O/R_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}/R_1 = \dot{X}\vec{x_1} + \dot{Y}\vec{y_1} - h\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z_1}} \qquad (7)$$

D'autre part la formule de distribution des vitesses pour les points d'un même solide donne :

$$\boxed{\vec{V}(E/R_1) = \vec{V}(O/R_1) + \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \overrightarrow{OE}} \qquad (8)$$

$$\vec{V}(E/R_1) = \dot{X}\vec{x_1} + \dot{Y}\vec{y_1} - h\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z_1} + \left[(\dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}) \wedge -h\vec{z}\right]$$

$$\vec{V}(E/R_1) = \dot{X}\vec{x_1} + \dot{Y}\vec{y_1} - h\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z_1} + h\dot{\theta}\vec{w} - h\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u}$$

Soit encore en projetant dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z_1})$

$$\vec{x_1} = \cos\psi\,\vec{u} - \sin\psi\,\vec{v}$$
$$\vec{y_1} = \sin\psi\,\vec{u} + \cos\psi\,\vec{v}$$
$$\vec{w} = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{z_1}$$

et

$$\boxed{\vec{V}(E/R_1) = \begin{vmatrix} \dot{X}\cos\psi + \dot{Y}\sin\psi - h\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{Y}\cos\psi - \dot{X}\sin\psi + h\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z_1})}} \qquad (9)$$

Cette vitesse n'a pas de composante suivant $\vec{z_1}$ car on a pris en considération le fait que E reste sur le plan $(O_1\,x_1\,y_1)$ par l'intermédiaire de la relation $Z = h\cos\theta$.

Les conditions de **"non glissement"** de S par rapport au plan P sont données par :

$$\dot{X}\cos\psi + \dot{Y}\sin\psi - h\dot{\psi}\sin\theta = 0$$
$$\dot{Y}\cos\psi - \dot{X}\sin\psi + h\dot{\theta}\cos\theta = 0$$

et ce car : $\vec{Vg}(S/P) = \vec{V}(E \in S/R_1) - \vec{V}(E \in P/R_1)$

et comme $P = (O_1, x_1, y_1)$ est fixe dans R_1, on a : $\vec{V}(E \in P/R_1) = \vec{0}$ d'où le résultat.

D'autre part S reste en contact avec P par l'intermédiaire du **"même point matériel"** E. Il en résulte que la trajectoire de E est confondue avec la trajectoire du "point coïncidant" ou géométrique, ces deux points ont par conséquent la même vitesse.

5°) **On suppose que E reste fixe dans R_1** ; ceci se traduit par : $\vec{V}(E/R_1) = \vec{0}$; soit en utilisant (8)

a) $$\vec{V}(O/R_1) = \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \overrightarrow{EO}$$

$$\vec{V}(O/R_1) = \left[\dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z}\right] \wedge h\,\vec{z}$$

$$\boxed{\vec{V}(O/R_1) = h\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u} - h\,\dot{\theta}\,\vec{w}} \qquad (10)$$

Dans ce cas l'accélération du point O par rapport à R_1 est :

$$\vec{\Gamma}(O/R_1) = \frac{d\vec{V}(O/R_1)}{dt}/R_1 = \frac{d\vec{V}(O/R_1)}{dt}/R_3 + \vec{\Omega}(R_3/R_1) \wedge \vec{V}(O/R_1)$$

$$\vec{\Gamma}(O/R_1) = h(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta)\,\vec{u} - h\,\ddot{\theta}\,\vec{w} + (\dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{z}) \wedge (h\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u} - h\,\dot{\theta}\,\vec{w})$$

Soit en définitive :

$$\vec{\Gamma}(O/R_1) = h\left[(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\,\dot{\theta}\,\dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{u} + (\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta - \ddot{\theta})\,\vec{w} - (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta)\,\vec{z}\right] \quad (11)$$

b) On traite, dans cette partie, un problème de décomposition du mouvement pour un point matériel en supposant que R_1 est le repère absolu et R le repère relatif. La particule considérée est le point G dont la position par rapport à R_1 est :

$$\overrightarrow{O_1G} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OG} \qquad \text{avec } \overrightarrow{OG} = a(t)\,\vec{x} = a(t)(\cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{w})$$

La vitesse absolue est donc :

$$\vec{V}(G/R_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1G}}{dt}/R_1 = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}/R_1 + \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/R_1$$

avec $$\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/R_1 = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/R + \vec{\Omega}(R/R_1) \wedge \overrightarrow{OG}$$

et ce à partir de la formule de dérivation composée. Il en résulte que :

$$\vec{V}(G/R_1) = \vec{V}(G/R) + \vec{V}(O/R_1) + \vec{\Omega}(R/R_1) \wedge \overrightarrow{OG}$$

La vitesse d'entraînement est par conséquent égale à :

$$\vec{V}_e(G) = \vec{V}(O/R_1) + \vec{\Omega}(R/R_1) \wedge \overrightarrow{OG}$$

Soit en utilisant (4) et (10) : $$\vec{V}_e(G) = (h\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u} - h\,\dot{\theta}\,\vec{w}) + [(\dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z}) \wedge a(t)(\cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{w})]$$

$$\vec{V}_e(G) = \begin{vmatrix} h\dot{\psi}\sin\theta - a\sin\varphi(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) \\ -h\dot{\theta} + a\cos\varphi(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) \\ a\dot{\theta}\sin\varphi - a\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} \quad (12)$$

Pour la vitesse relative de G on a directement :

$$\vec{V}_r(G) = \vec{V}(G/R) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/R = \dot{a}\vec{x} \quad (13)$$

En dérivant (13) dans le repère R, on obtient **l'accélération relative de G** :

$$\vec{\Gamma}_r(G) = \frac{d\vec{V}_r}{dt}/R = \ddot{a}\vec{x}$$

L'accélération de Coriolis de G est quant à elle obtenue à partir de la relation :

$$\vec{\Gamma}_C(G) = 2\vec{\Omega}(R/R_1)\wedge\vec{V}_r = 2(\dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\vec{z})\wedge\dot{a}\vec{x}$$

Soit :

$$\vec{\Gamma}_C(G) = 2\dot{a}[-\sin\varphi(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\vec{u} + \cos\varphi(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\vec{w} + (\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi)\vec{z}\,] \quad (14)$$

c) En utilisant (6), on a suivant la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$:

$$\frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}/R_1 \wedge (a\vec{x}) = \begin{vmatrix} \ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta \\ \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta} \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit l'équation (15) suivante :

$$\frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}/R_1 \wedge (a\vec{x}) = \begin{vmatrix} -a\sin\varphi(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) \\ a\cos\varphi(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) \\ a\sin\varphi(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta) - a\cos\varphi(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}) \end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

On sait que l'accélération d'entraînement est donnée par l'expression :

$$\vec{\Gamma}_e(G) = \vec{\Gamma}(O/R_1) + \frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}/R_1 \wedge \overrightarrow{OG} + \vec{\Omega}(S/R_1)\wedge\left(\vec{\Omega}(S/R_1)\wedge\overrightarrow{OG}\right) \quad (16)$$

On peut vérifier aisément que celle-ci n'est pas égale à la dérivée de la vitesse d'entraînement. En injectant (11) et (15) dans (16) et en développant le double produit vectoriel, on obtient :

$$\vec{\Gamma}_{e}(G)_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} = \begin{bmatrix} h\ddot{\psi}\sin\theta+2h\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta-a\sin\varphi(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)-a\dot{\psi}^2\sin^2\theta\cos\varphi-a\cos\varphi(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2 \\ a\cos\varphi\,(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta)-a\sin\varphi(\dot{\theta}^2+(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2)+h\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta-h\ddot{\theta} \\ -h(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+a\sin\varphi(\ddot{\theta}+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta)+a\cos\varphi(2\dot{\varphi}\dot{\theta}-\ddot{\psi}\sin\theta) \end{bmatrix}$$

8 - Détermination des matrices d'inertie pour une plaque et un cylindre.

On considère une plaque (P) rectangulaire pesante et homogène et un cylindre (C) lui aussi pesant et homogène.

On note pour la plaque :
m : sa masse ; e : son épaisseur ; 2L : sa longueur ; 2l : sa largeur et on désigne par G_1 son centre d'inertie.

On note pour le cylindre :
M : sa masse ; R : son rayon ; 2L : sa hauteur et on désigne par G_2 son centre d'inertie.

Déterminer les opérateurs centraux d'inertie de la plaque et du cylindre.

Extrait, Fès, MP2-PC2,

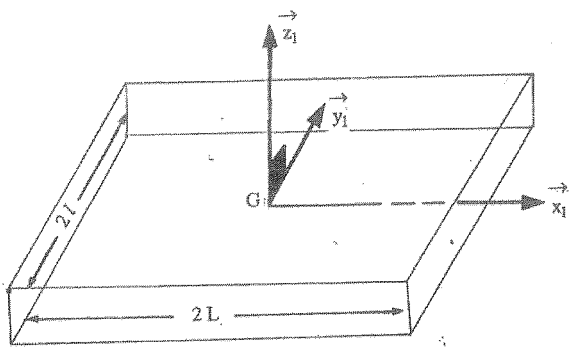
On rappelle que la matrice centrale d'inertie d'un solide S est celle dont les éléments sont déterminés par rapport à un repère d'origine G (centre d'inertie de S).

1°) Pour le cas de la plaque P, on considère le repère $R_1 = (G_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ défini par :

$\vec{x_1}$ = vecteur unitaire de la direction de la longueur de P.

$\vec{y_1}$ = vecteur unitaire de la direction de la largeur de P.

$\vec{z_1}$ = vecteur unitaire perpendiculaire au plan de P.



Dans ce cas, un point M de coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans R_1 est un point de P si et seulement si $-L \le x_1 \le +L$; $-l \le y_1 \le +l$; $-\frac{e}{2} \le z_1 \le \frac{e}{2}$.

D'autre part les axes $(G_1, \vec{x_1})$; $(G_1, \vec{y_1})$ et $(G_1, \vec{z_1})$ sont des axes de symétrie matérielle,

donc principaux d'inertie. La matrice centrale d'inertie est alors :

$$J(G_1, P) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})}$$

Avec $A_1 = \iiint_{M \in P} (y_1^2 + z_1^2)\, dm$; $B_1 = \iiint_{M \in P} (x_1^2 + z_1^2)\, dm$ et $C_1 = \iiint_{M \in P} (x_1^2 + y_1^2)\, dm$

où $dm = \rho\, dx_1\, dy_1\, dz_1$ (en coordonnées cartésiennes).

et $\rho = \dfrac{\text{masse}}{\text{volume}} = \dfrac{m}{(2L)(2l)(e)}$ est la densité volumique de masse

On a alors :

$$A_1 = \frac{m}{4Lle}\left[\int_{-L}^{+L}\int_{-l}^{+l}\int_{-e/2}^{+e/2} y_1^2\, dx_1\, dy_1\, dz_1 + \int_{-L}^{+L}\int_{-l}^{+l}\int_{-e/2}^{+e/2} z_1^2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\right]$$

Soit :

$$A_1 = \frac{m}{4Lle}\left[[x_1]_{-L}^{+L}\left[\frac{y_1^3}{3}\right]_{-l}^{+l}[z_1]_{-e/2}^{+e/2} + [x_1]_{-L}^{+L}[y_1]_{-l}^{+l}\left[\frac{z_1^3}{3}\right]_{-e/2}^{+e/2}\right]$$

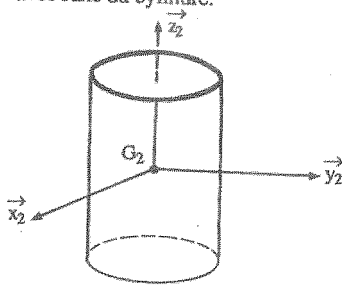
donc $$A_1 = \frac{m}{3}\left(l^2 + \frac{e^2}{4}\right)$$

En procédant de la même manière, on trouve :

$$B_1 = \frac{m}{3}\left(L^2 + \frac{e^2}{4}\right) \qquad C_1 = m\left(\frac{L^2}{3} + \frac{l^2}{3}\right)$$

On peut remarquer au passage que pour une plaque d'épaisseur négligeable ($e = 0$), on a : $C_1 = A_1 + B_1$ ce qui est conforme avec les résultats théoriques pour un solide plan.

2°) Pour le cylindre $\mathscr{C}$, on considère le repère $R_2 = (G_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ avec $(G_2, \vec{z_2})$ confondu avec l'axe du cylindre.



Dans ce cas, un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) est un point de $\mathscr{C}$ si et seulement si :

$$0 \le r \le R \; ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

et $$-L \le z < +L$$

D'autre part, l'axe $(G_2, \vec{z_2})$ est un axe de révolution. C'est donc un axe principal d'inertie et tout plan qui lui est perpendiculaire est un plan propre d'inertie. La matrice centrale d'inertie est par conséquent de la forme :

$$J(G_2, C) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})}$$

Avec $$A_2 = \iiint_{M \in C} (y_2^2 + z_2^2)\, dm = \iiint_{M \in C} (x_2^2 + z_2^2)\, dm$$

$$C_2 = \iiint_{M \in C} (x_2^2 + y_2^2)\, dm = 2\left[A_2 - \iiint_{M \in C} z_2^2\, dm\right]$$

où x_2, y_2 et z_2 sont les coordonnées cartésiennes de $M \in C$ dans R_2.

($x_2 = r \cos\theta$; $y_2 = r \sin\theta$; $z_2 = z_2$) et $dm = \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz_2$ (en cylindriques).

$$\rho = \frac{M}{2L\pi R^2}$$ (densité volumique de masse)

On a alors : $$C_2 = \frac{M}{2L\pi R^2}\left[\int_0^R r^3\, dr\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_{-L}^{+L} dz_2\right]$$

Soit $$C_2 = \frac{M}{2L\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot 2L = \frac{MR^2}{2}$$

D'autre part $$\iiint z^2 \left(\frac{M}{2L\pi R^2}\right) r\, dr\, d\theta\, dz_2 = \frac{ML^2}{3}$$

ce qui donne $$A_2 = \frac{M}{2}\left[\frac{R^2}{2} + \frac{2L^2}{3}\right] = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{3}$$

9 - Eléments cinétiques d'un solide : équilibrage dynamique.

Le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ étant donné, on considère une barre AB, homogène, de masse m, de longueur 2a, de milieu O, située dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et telle que $(\vec{x}, \overrightarrow{OA}) = \alpha$, angle aigu et constant.

1°) Déterminer la matrice d'inertie J(O, AB) dans R de la barre. (On pourra poser $\overrightarrow{OM} = \rho$, M étant la partie élémentaire de la barre).

2°) On met la barre en rotation uniforme autour de $(O, \vec{y})$ à la vitesse angulaire ω (constante).

a) Calculer le moment cinétique en O de la barre $\vec{\sigma_0}$ et son énergie cinétique T.

b) On veut équilibrer dynamiquement le mouvement, c'est-à-dire ajouter un dispositif tel que le moment cinétique total en O de la barre et du dispositif soit colinéaire à $\vec{y}$.

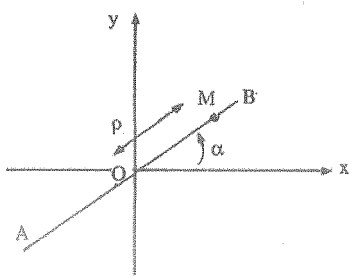
Pour cela, on lie à la barre AB une barre CD homogène de même densité que la barre AB de longueur (à priori inconnue) 2l, de manière que CD et AB soient orthogonales en leur milieu commun O et situées dans $(O, \vec{x}, \vec{y})$. A l'aide du 1°), déterminer la matrice d'inertie en O de l'ensemble (AB + CD) puis trouver l de manière que l'équilibrage dynamique soit réalisé.

Exercice proposé

Soit $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct donné et soit M un point de la tige AB. On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos\alpha \, \vec{x} + \rho \sin\alpha \, \vec{y}$$

avec $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ un angle constant et $-a \leq \rho \leq a$.



1°) La matrice d'inertie J_0 de AB dans R est alors :

$$J(O, AB) = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Avec

$$\left.\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{-a}^{a} (\rho^2 \sin^2\alpha)\, \lambda \, d\rho \\ I_{xy} = I_{yx} &= \int_{-a}^{a} \rho^2 \sin\alpha \cos\alpha \, \lambda \, d\rho \end{aligned}\right| \quad \lambda = \frac{m}{2a} \text{ est la densité linéique de masse}$$

$$I_{yy} = \int_{-a}^{a} (\rho^2 \cos^2\alpha)\, \lambda \, d\rho \qquad \text{et} \qquad I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

En gardant $\frac{ma^2}{3}$ en facteur :

$$J(O, AB) = \frac{ma^2}{3} \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

2°) a) Le point O étant un point fixe du solide AB, on a alors le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}(O, AB/R) = J(O, AB)\, \vec{\Omega}(AB/R)$$

Avec $\vec{\Omega}(AB/R) = \omega \, \vec{y}$ (ω constante)

Soit encore $$\vec{\sigma}(O, AB/R) = \frac{ma^2}{3}\begin{bmatrix} \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O, AB/R) = \frac{ma^2}{3}\,\omega\cos\alpha\,(-\sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha\,\vec{y})} \qquad (1)$$

Remarques :

◆ A partir de l'expression de $\vec{\sigma}(O, AB/R)$, on peut vérifier que ce dernier est orthogonal à AB (il fait l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$ avec $\vec{x}$).

◆ D'autre part, l'expression de l'énergie cinétique est immédiate, elle est donnée par :

$T = \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}(AB/R)\,.\,\vec{\sigma}(O, AB/R)$ (car O est fixe), on obtient : $T = \frac{ma^2}{6}\cos^2\alpha\,\omega^2$.

b) Lorsqu'on considère la barre CD, on doit dans le premièrement remplacer les bornes des intégrales par $-l$ et $+l$ et l'angle α par $\alpha + \frac{\pi}{2}$. La densité $\lambda = \frac{m}{2a}$ restant inchangée par hypothèse. Il vient alors sans nouveaux calculs.

$$\boxed{J(O, CD) = \frac{ml^3}{3a}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$$

Comme en plus CD est lié à AB on a :

$$\vec{\Omega}(CD/R) = \omega\,\vec{y}$$

et $$\vec{\sigma}(O, CD/R) = J(O, CD)\,(\omega\,\vec{y})$$ car O est aussi un point fixe de CD.

Soit $$\boxed{\vec{\sigma}(O, CD/R) = \frac{ml^3}{3a}\,\omega\sin\alpha\,(\cos\alpha\,\vec{x} + \sin\alpha\,\vec{y})} \qquad (2)$$

On en déduit que le moment cinétique de l'ensemble $(AB + CD)$ est donné par : (et ce en considérant (1) et (2))

$$\boxed{\vec{\sigma}(O, (AB + CD)/R) = \frac{m\omega}{3a}\left[(l^3 - a^3)\sin\alpha\cos\alpha\;\vec{x} + (a^3\cos^2\alpha + l^3\sin^2\alpha)\;\vec{y}\right]}$$

L'équilibrage dynamique consistant dans ce cas à faire de telle sorte que :

$\vec{\sigma}(O, (AB+CD)/R)$ soit colinéaire à $\vec{y}$, on en déduit que pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, on doit avoir $l = a$.

10 - Eléments cinétiques d'un système de deux solides.

On étudie, par rapport au repère $(O/\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ le mouvement d'un ensemble mécanique constitué de deux solides homogènes : une tige (T) de masse m, de longueur 2l et de diamètre d et un disque (D), de masse M, de rayon R, de centre C et d'épaisseur e, qui peut glisser le long de la tige et tourner autour de celle-ci.

La tige (de centre B) reste parallèle au plan $(O/\vec{e_1}, \vec{e_2})$, son extrémité A restant fixe sur $\vec{e_3}$: $\overrightarrow{OA} = R\vec{e_3}$.

Le disque dont l'axe est confondu avec celui de la tige est toujours en contact avec le plan $(O/\vec{e_1}, \vec{e_2})$ en I : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AC} = \lambda(t)\ \vec{u_1}$

L'angle $\psi(t) = (\vec{e_1}, \vec{u_1})$ détermine la rotation de la tige autour de $\vec{e_3}$ et $\theta(t) = (\vec{e_3}, \vec{w_3})$ la rotation du disque autour de la tige.

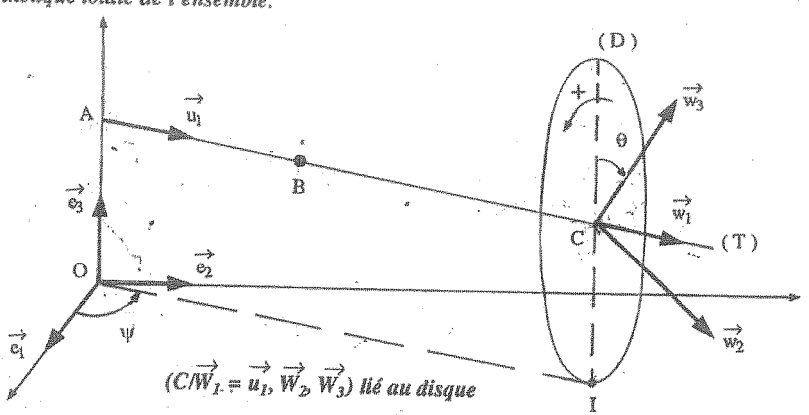
1°) Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique de la tige au point B, et ceux du disque au point C.

2°) Exprimer la matrice d'inertie :

- *de la tige dans le repère $(B/\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$*
- *du disque dans le repère $(C/\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$*

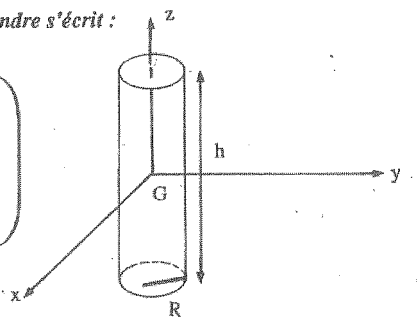
3°) Pour la suite, on néglige l'épaisseur du disque et le diamètre de la tige (e = d = 0), déterminer :
a- le torseur cinétique de la tige en B
b - le torseur cinétique du disque en C
c- le torseur cinétique de l'ensemble en C.

4°) Déterminer l'énergie cinétique de la tige et celle du disque. En déduire l'énergie cinétique totale de l'ensemble.



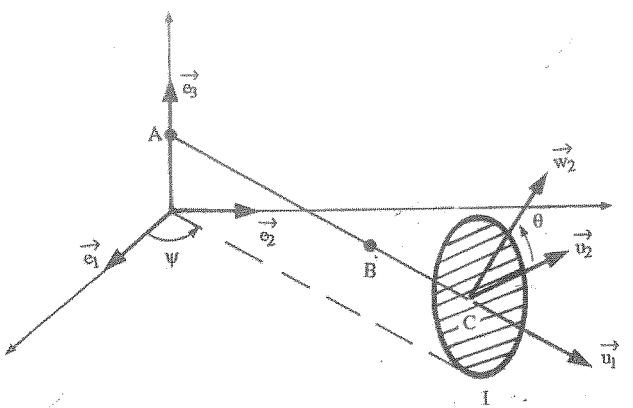
On rappelle que la matrice d'inertie d'un cylindre s'écrit :

$$J(G) = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}$$



El Jadida, PC2, Juin 1987

Soit $R_0 = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ le repère fixe. Pour tous les mouvements cinématiquement possibles du système S par rapport à R_0, **le nombre de degré de liberté est égal à 3.**
Il faut en effet connaître l'évolution du paramètre ψ au cours du temps pour avoir le mouvement de la tige par rapport à R_0 et celle des paramètres λ et θ pour positionner le disque par rapport à la tige.



1°) Soient : $\mathcal{U}(T) = \begin{cases} \vec{\Omega}(T/R_0) \\ [B] \quad \vec{\gamma}(B/R_0) \end{cases}$ le torseur cinématique de la tige donné par ses éléments de réduction en B.

et $\mathcal{U}(D) = \begin{cases} \vec{\Omega}(D/R_0) \\ [C] \quad \vec{V}(C/R_0) \end{cases}$ le torseur cinématique du disque donné par ses éléments de réduction en C.

On appelle $R_1 = (A, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} = \vec{e_3})$ le repère lié à la tige et $R_2 = (C, \vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ celui lié au

disque, on a alors :

- $$\boxed{\vec{\Omega}(T/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{e_3} = \dot{\psi}\,\vec{u_3}}$$

- $$\boxed{\vec{V}(B/R_0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OB})/R_0 = \frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}/R_0}$$

car le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est constant.

$$\boxed{\vec{V}(B/R_0) = l\,\dot{\psi}\,\vec{u_2}}$$

- $$\vec{\Omega}(D/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_2/R_0)$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{u_1} + \dot{\psi}\,\vec{u_3}}$$

- $$\vec{V}(C/R_0) = \frac{d\,\overrightarrow{OC}}{dt}/R_0 = \frac{d}{dt}(\lambda\,\vec{u_1})/R_0$$

$$\boxed{\vec{V}(C/R_0) = \dot{\lambda}\,\vec{u_1} + \lambda\,\dot{\psi}\,\vec{u_2}}$$

2°) Détermination des matrices d'inertie.

A partir du texte, la tige T peut être assimilée à un cylindre de masse m, de hauteur $2l$, de rayon $\frac{d}{2}$ et d'axe parallèle à $\vec{u_1}$. Sa matrice centrale d'inertie dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est alors donnée par :

$$\boxed{J(B,T) = \begin{pmatrix} \frac{md^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{d^2}{16} + \frac{l^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{d^2}{16} + \frac{l^2}{3}\right) \end{pmatrix}_{(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})}}$$

et ce en appliquant le rappel cité dans l'énoncé.

De la même manière, le disque D est en réalité un cylindre (épaisseur non négligeable) de masse M, de rayon R, de hauteur e et d'axe constamment porté par $\vec{w_1}$. Sa matrice centrale d'inertie dans la base $(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ est :

$$J(C,D) = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{e^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{e^2}{3}\right) \end{pmatrix}_{(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})}$$

Remarque : Le solide (D) étant de révolution autour de l'axe $(C, \vec{w_1})$ il en résulte que le plan $(C, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ est **un plan propre** d'inertie et $J(C, D)$ reste **inchangée** lorsqu'on l'exprime dans la base $(\vec{w_1} = \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$.

3°) La condition $e = d = 0$ entraîne des simplifications au niveau des matrices d'inertie $J(B, T)$ et $J(C, D)$ et on obtient successivement :

a) le torseur cinétique de la tige en B donné par :

a.1) **sa résultante cinétique** : $\vec{R_{CT}} = m\ \vec{V}(B/R_0)$

$$\boxed{\vec{R_{CT}} = m\, l\, \dot{\psi}\, \vec{u_2}}$$

a.2) **le moment cinétique en B**, $\vec{\sigma}(B, T/R_0) = J(B, T)\ \vec{\Omega}(T/R_0)$

$$\boxed{\vec{\sigma}(B, T/R_0) = \frac{ml^2}{3}\, \dot{\psi}\, \vec{u_3}}$$

b) le torseur cinétique du disque en C, donné par :

b.1) **sa résultante cinétique** : $\vec{R_{CD}} = M\ \vec{V}(C/R_0)$

$$\boxed{\vec{R_{CD}} = M\, \dot{\lambda}\, \vec{u_1} + M\, \lambda\, \dot{\psi}\, \vec{u_2}}$$

b.2) **le moment cinétique en C** : $\vec{\sigma}(C, D/R_0) = J(C, D)\ \vec{\Omega}(D/R_0)$

$$\boxed{\vec{\sigma}(C, D/R_0) = \frac{MR^2}{2}\, \dot{\theta}\, \vec{u_1} + \frac{MR^2}{4}\, \dot{\psi}\, \vec{u_3}}$$

c) le torseur cinétique de l'ensemble $((D) + (T))$ en C, donné par

c.1) **sa résultante** : $\vec{R_{CE}} = \vec{R_{CT}} + \vec{R_{CD}}$

$$\boxed{\vec{R_{CE}} = M\, \dot{\lambda}\, \vec{u_1} + (ml + M\, \lambda)\, \dot{\psi}\, \vec{u_2}}$$

c.2) **le moment cinétique en C** : $\vec{\sigma}(C, (T + D)/R_0) = \vec{\sigma}(C, T/R_0) + \vec{\sigma}(C, D/R_0)$

Avec $\vec{\sigma}(C, T/R_0) = \vec{\sigma}(B, T/R_0) + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{R}_{CT}$

On trouve $\vec{\sigma}(C, T/R_0) = \left(\frac{4ml^2}{3} - m\,l\,\lambda\right) \dot{\psi}\, \vec{u}_3$

ce qui donne :

$$\boxed{\vec{\sigma}(C, (T+D)/R_0) = \frac{MR^2}{2}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_1 + \left(\frac{MR^2}{4} + \frac{4ml^2}{3} - ml\lambda\right)\dot{\psi}\,\vec{u}_3}$$

4°) Les doubles de l'énergie cinétique de la tige (T) et du disque (D) sont respectivement donnés par :

$$2E_C(T/R_0) = m\,(\vec{V}(B/R_0))^2 + \vec{\Omega}(T/R_0)\,.\,J(B,T)\,\vec{\Omega}(T/R_0)$$

$$2E_C(D/R_0) = M\,(\vec{V}(C/R_0))^2 + \vec{\Omega}(D/R_0)\,.\,J(C,D)\,\vec{\Omega}(D/R_0)$$

on trouve : $2E_C(T/R_0) = \frac{4ml^2}{3}\,\dot{\psi}^2$

$$2E_C(D/R_0) = M\,\dot{\lambda}^2 + M\,\lambda^2\,\dot{\psi}^2 + \frac{MR^2}{2}\,\dot{\theta}^2 + \frac{MR^2}{4}\,\dot{\psi}^2$$

L'énergie cinétique de l'ensemble $(D) + (T)$ est alors :

$$\boxed{E_C((T+D)/R_0) = E_C(T/R_0) + E_C(D/R_0)}$$

$$\boxed{E_C((T+D)/R_0) = M\,\dot{\lambda}^2 + \left(M\,\lambda^2 + \frac{MR^2}{4} + \frac{4ml^2}{3}\right)\dot{\psi}^2 + \frac{MR^2}{2}\,\dot{\theta}^2}$$

Remarque : On peut calculer l'énergie cinétique de la tige en utilisant la formule :

$$2E_C(T/R_0) = \vec{\Omega}(T/R_0)\,.\,J(A,T)\,\vec{\Omega}(T/R_0)$$

car A est un point fixe de la tige T. Ceci nécessite alors la détermination de la matrice d'inertie de la tige T au point A, matrice qu'on obtient facilement en appliquant le théorème de Koenig relatif à l'opérateur d'inertie :

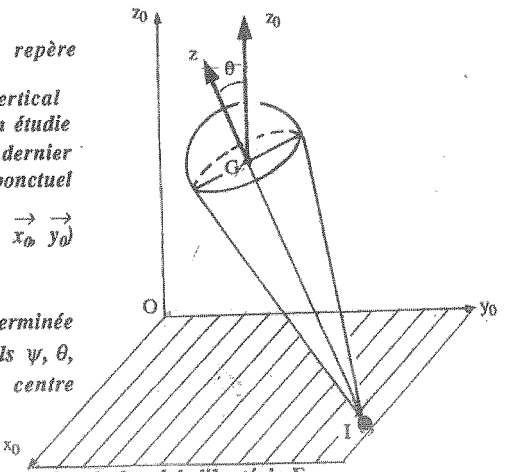
$$J(A,T) = J(B,T) + J(A, B\,\{m\})$$

11 - Eléments cinétiques d'un solide de révolution.

Soit un système Σ solidaire constitué d'un cône de révolution plein homogène de hauteur h, de sommet I et d'une demi-sphère pleine et homogène fixée à la base de ce cône de centre G et de rayon R. On choisit la masse du système Σ de telle manière que le centre d'inertie de l'ensemble Σ soit en G.

Soit $R_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère orthonormé direct avec $\vec{z_0}$ vertical ascendant par rapport auquel on étudie le mouvement du solide Σ. Ce dernier étant astreint à rester en contact ponctuel avec le plan matérialisé $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ par le sommet I du cône.

La position de Σ dans R_0 est déterminée par les angles d'Euler habituels ψ, θ, φ et par les coordonnées du centre d'inertie G qu'on note x_G, y_G, z_G.



1°) Déterminer, en le justifiant, le nombre de degré de liberté de Σ.

2°) Calculer, en projection dans la base liée à R_0, les composantes de $\vec{V}(I \in \Sigma/R_0)$.

3°) D'après les résultats du cours, démontrer que le rapport de la masse du cône à celle de la demi-sphère est égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4°) Déterminer dans une base adéquate la matrice centrale d'inertie de Σ.

5°) Donner $2T(\Sigma/R_0)$ (énergie cinétique).

Extrait, Casablanca, PC2, Janvier 1987.

1°) Les deux parties qui constituent le système considéré n'ont pas de mouvement propre l'une par rapport à l'autre ; Σ est donc un solide et le nombre de paramètres nécessaires pour définir sa position dans une configuration libre est, comme on le sait, égal à six (les trois angles d'Euler + les trois coordonnées d'un point lié à Σ (souvent pris confondu avec le centre d'inertie).

Dans la configuration de l'énoncé, Σ est lié, il est astreint, au cours de son mouvement, à rester en contact ponctuel avec le plan $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ par le sommet I du cône. Ceci se traduit par la relation :

$$\overrightarrow{OI} \cdot \vec{z_0} = 0$$

ou encore

$$(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI}) \cdot \vec{z_0} = 0$$

avec $\overrightarrow{OG} = x_G \vec{x_0} + y_G \vec{y_0} + z_G \vec{z_0}$ et $\overrightarrow{GI} = -h \vec{z}$

On obtient $\boxed{z_G = h \vec{z} \cdot \vec{z_0} = h \cos\theta}$

C'est une **équation de liaison** qui réduit le nombre de paramètres de position indépendants entre eux, c'est-à-dire **le nombre de degré de liberté à 5.**

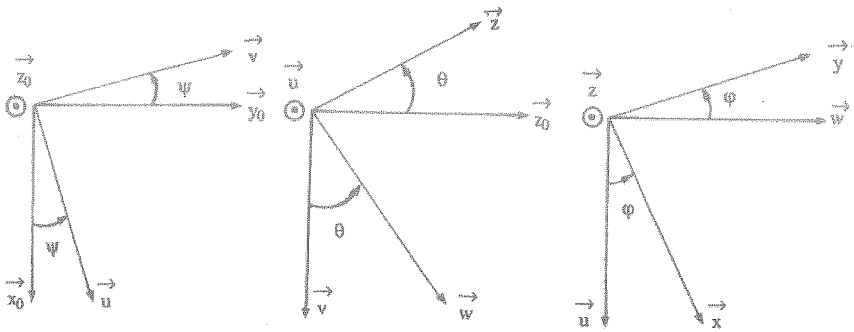
2°) Nous avons à partir de la formule fondamentale de la distribution des vitesses pour les points d'un même solide.

$$\boxed{\vec{V}(I \in \Sigma/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(\Sigma/R_0) \wedge \overrightarrow{GI}}$$

Avec :

$$\vec{V}(G/R_0) = \dot{x}_G \vec{x_0} + \dot{y}_G \vec{y_0} - h\dot{\theta}\sin\theta \vec{z_0}$$

$$\vec{\Omega}(\Sigma/R_0) = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{z_0} + \dot{\varphi}\vec{z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GI} = -h\vec{z}$$



En utilisant les différentes bases intermédiaires, on obtient :

$$\vec{\Omega}(\Sigma/R_0) \wedge \overrightarrow{GI} = -h\dot{\psi}\sin\theta \vec{u} + h\dot{\theta}\vec{w}$$

Soit en projetant dans $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$:

$$\vec{\Omega}(\Sigma/R_0) \wedge \overrightarrow{GI} = \begin{vmatrix} -h(\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\cos\theta\sin\psi) \\ h(\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi) \\ h\dot{\theta}\sin\theta \end{vmatrix}_{(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})}$$

ce qui donne en définitive

$$\boxed{\vec{V}(I \in \Sigma/R_0) = \left[\dot{x}_G - h(\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\cos\theta\sin\psi)\right]\vec{x_0} + \left[\dot{y}_G + h(\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi)\right]\vec{y_0}}$$

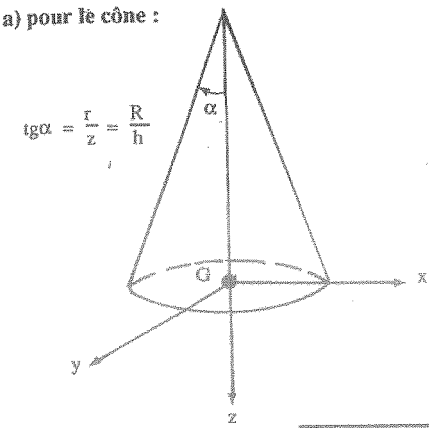
3°) On suppose que le cône et la demi-sphère ont pour masse respective m_1 et m_2 et on

cherche à déterminer le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ (indépendamment de R et de h) dans le cas où le centre d'inertie de Σ est confondu avec G, centre de la base commune du cône et de la demi-sphère, c'est-à-dire lorsque :

$$\boxed{m_1 \overrightarrow{GG_1} + m_2 \overrightarrow{GG_2} = \vec{0}} \qquad (1)$$

où G_1 est le centre d'inertie du cône et G_2 celui de la demi-sphère.
La recherche de ce rapport consiste donc à déterminer m_1, m_2, G_1 et G_2 dans le cas général et à leur imposer de vérifier la relation (1). On a alors :

a) pour le cône :



$$m_1 = \rho \iiint dv .$$

Avec en coordonnées cylindriques :

$dv = r\, dr\, d\theta\, dz$

où $0 \le \theta \le 2\pi$ et $0 \le r \le z\, tg\, \alpha$

pour tout z compris entre $-h$ et 0.

Soit $m_1 = 2\pi\rho \int_{-h}^{0} \left[\int_{0}^{z\, tg\alpha} r\, dr \right] dz$

$$m_1 = 2\pi\rho \int_{-h}^{0} z^2\, tg^2\alpha\, dz = \frac{2}{3}\pi\rho\, tg^2\alpha\, \frac{h^3}{3 \times 2}$$

On a donc $$\boxed{m_1 = +\rho\, \frac{\pi R^2 h}{3}} \qquad (2)$$

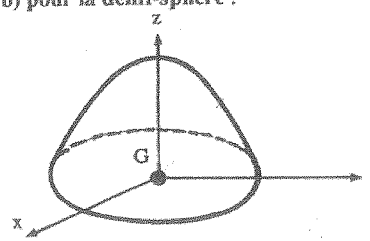
d'autre part puisque (G, z) est un axe de révolution du cône, on a dans (G, x, y, z) :

$$x_{G_1} = y_{G_1} = 0 \quad \text{et} \quad z_{G_1} = \frac{1}{m_1} \iiint z\, dm_1 .$$

en procédant de la même manière que pour le calcul de m_1, on trouve :

$$\boxed{z_{G_1} = -\frac{h}{4} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{GG_1} = -\frac{h}{4}\vec{z}} \qquad (3)$$

b) pour la demi-sphère :



$$m_2 = \rho \iiint dv$$

Avec en coordonnées sphériques :

$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

où $0 \le r \le R$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ et $0 \le \varphi \le 2\pi$

on a donc $$m_2 = 2\pi\rho\left[\int_0^R r^2\,dr\right]\left[\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta\right]$$

Soit $$\boxed{m_2 = \frac{2\,\pi\,\rho\,R^3}{3}} \qquad (4)$$

(G, z) étant un axe de révolution pour la demi-sphère, on a : $x_{G2} = y_{G2} = 0$ et $z_{G2} = \frac{1}{m_2}\iiint z\,dm_2$ et ce dans le repère *(G, x, y, z)*.

On trouve $$\boxed{z_{G2} = \frac{3R}{8} \text{ ou encore } \overrightarrow{GG_2} = \frac{3R}{8}\,\vec{z}} \qquad (5)$$

Le rapport des masses est : $$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{h}{2R}} \qquad (6)$$

(à partir de (2) et (4))

ou : $$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{3R}{2h}} \qquad (7)$$

(à partir de (1) lorsqu'on y injecte (3) et (5))

L'égalité de (6) et (7) impose $h = R\sqrt{3}$, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

4°) Soient *J(G, C)* la matrice d'inertie du cône et *J(G, S)* celle de la demi-sphère. Lorsque celles-ci sont exprimées relativement à la même base, on a :

$$\boxed{J(G, \Sigma) = J(G, C) + J(G, S)}$$

Comme ***(G, z) est un axe de révolution aussi bien pour C que pour S***, on a donc relativement à l'une des deux bases $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ou $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.

$$J(G, C) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\substack{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \\ (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}}$$

et $$J(G, S) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{\substack{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \\ (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}}$$

Avec $C_1 = \iiint_{M \in C} (x_1^2 + y_1^2)\, dm_1$; $A_1 = \iiint_{M \in C} (x_1^2 + z_1^2)\, dm_1 = \iiint_{M \in C} (y_1^2 + z_1^2)\, dm_1$

et $C_2 = \iiint_{M \in S} (x_2^2 + y_2^2)\, dm_2$; $A_2 = \iiint_{M \in S} (x_2^2 + z_2^2)\, dm_2 = \iiint_{M \in S} (y_2^2 + z_2^2)\, dm_2$

En procédant de la même manière que dans (3.a), on trouve :

$$\boxed{C_1 = \frac{3\, m_1 R^2}{10}}$$

$$\boxed{\iiint_{M \in C} z_1^2\, dm_1 = \frac{3\, m_1 h^2}{5}}$$

Soit encore (à partir de la relation $2A_1 = C_1 + 2 \iiint_{M \in C} z_1^2\, dm$) :

$$\boxed{A_1 = \frac{3\, m_1}{5}\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)}$$

D'autre part, en utilisant les coordonnées sphériques (cf. (3.b)), on trouve :

$$I_2 = \iiint_{M \in S} (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)\, dm_2 = \frac{3\, m_2 R^2}{5}$$

$$J = \iiint_{M \in S} z_2^2\, dm_2 = \frac{m_2 R^2}{5}$$

Il en résulte :

$$C_2 = I - J = \frac{2\, m_2 R^2}{5}$$

$$A_2 = \frac{C_2}{2} + I = \frac{2\, m_2 R^2}{5}$$

On a en définitive :

$$\boxed{J(G, \Sigma) = \begin{bmatrix} \frac{3m_1}{5}\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right) + \frac{2m_2R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3m_1}{5}\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right) + \frac{2m_2R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3m_1R^2}{10} + \frac{2m_2R^2}{5} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ ou } (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}}$$

5°) Calcul de l'énergie cinétique :

En utilisant le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique :

$$2T(\Sigma/R_0) = \vec{\Omega}(\Sigma/R_0) \,.\, J(G, \Sigma)\, \vec{\Omega}(\Sigma/R_0) + (m_1 + m_2)\, \vec{V}(G/R_0)^2.$$

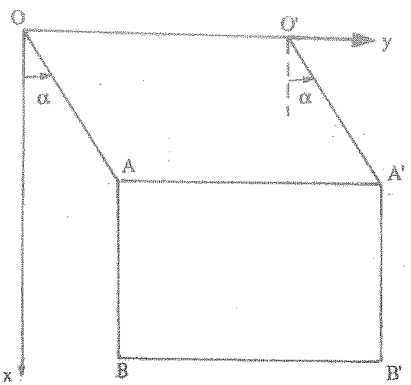
On obtient dans notre cas particulier :

$$2T(\Sigma/R_0) = \left[\frac{3m_1}{5}\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right) + \frac{2m_2R^2}{5}\right]\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\varphi\right] + \left[\frac{3m_1R^2}{10} + \frac{2m_2R^2}{5}\right].\left[(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\right] + (m_1 + m_2)\left[\dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + h^2\,\dot{\theta}^2 \sin^2\theta\right]$$

12 - Equation du mouvement d'un système à un degré de liberté à partir de l'énergie mécanique.

Le système matériel de la figure ci-contre est situé dans un plan vertical oxy et comprend:
- Deux tiges homogènes identiques OA et O'A' articulées en O et O' de masse m telles que OA = O'A' = l.
- Une plaque rectangulaire ABA'B', articulée en A et A' de masse M, d'épaisseur négligeable, telle que AB = A'B' = 2a ; AA' = BB' = 2b.

Les liaisons en O, O', A et A' sont parfaites et le paramètre du système est l'angle α.



Déterminer :

1°) L'énergie cinétique du système.

2°) L'énergie potentielle du système en prenant comme origine des potentiels l'axe Oy.

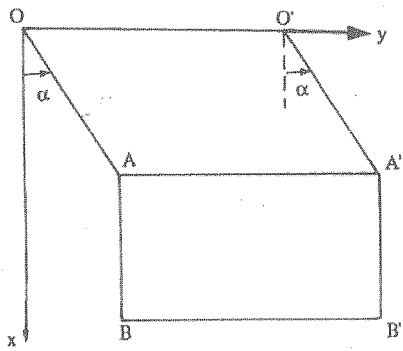
3°) L'énergie totale du système.

4°) L'équation différentielle des petits mouvements (α petit).

5°) La période des petites oscillations.

Agadir, Juin 1987.

Soit $R = (O, x, y, z)$ un repère fixe supposé galiléen (l'axe Ox définissant la verticale descendante) et soit S le système matériel constitué des deux tiges ($T_1 = OA$; $T_2 = O'A'$) et de la plaque rectangulaire ($P = ABA'B'$).



1°) On a par définition :

$$\boxed{E_c(S/R) = E_c(T_1/R) + E_c(T_2/R) + E_c(P/R)}$$

T_1 et T_2 sont deux tiges identiques qui restent dans le plan vertical xOy et tournent respectivement autour des axes fixes Oz et $O'z'$, il en résulte que :

$$E_c(T_1/R) = \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}(T_1/R)\,.\,J(O, T_1)\,\vec{\Omega}(T_1/R)$$

$$E_c(T_2/R) = \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}(T_2/R)\,.\,J(O', T_2)\,\vec{\Omega}(T_2/R)$$

Avec $\vec{\Omega}(T_1/R) = \vec{\Omega}(T_2/R) = \dot{\alpha}\,\vec{z}$, la matrice d'inertie de chacune des tiges étant :

$$J(O, T_1) = J(O', T_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}$$

Avec $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{l} = \dfrac{\overrightarrow{O'A'}}{l}$ et $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$.

On obtient alors : $E_c(T_1/R) + E_c(T_2/R) = \dfrac{ml^2}{3}\,\dot{\alpha}^2$.

Pour ce qui concerne la plaque P **celle-ci est animée d'un mouvement de translation car $OO' = AA'$ et $OA = O'A'$.** On a alors :

$$E_c(P/R) = \frac{1}{2}\,M\left[\vec{V}(G/R)\right]^2$$

Avec $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = (l\cos\alpha + a)\,\vec{x} + (l\sin\alpha + b)\,\vec{y}$

Donc $\vec{V}(G/R) = -l\,\dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{x} + l\,\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{y}$

et $$E_c(P/R) = \frac{1}{2} M l^2 \dot{\alpha}^2$$

On obtient en définitive : $$\boxed{E_c(S/R) = \left[\frac{1}{3} m + \frac{1}{2} M\right] l^2 \dot{\alpha}^2}$$

2°) En plus des forces de liaison dont la puissance est nulle (liaisons parfaites), le système S est soumis aux forces de pesanteur qui dérivent toujours d'un potentiel, leur puissance totale est : $$\mathcal{P} = mg \vec{x} . (\vec{V}(G_1/R) + \vec{V}(G_2/R)) + Mg \vec{x} . \vec{V}(G/R)$$

Soit encore : $$\mathcal{P} = -\frac{dE_P}{dt} = -(m + M) g l \dot{\alpha} \sin \alpha$$

ce qui donne $$\boxed{E_P = -(m + M) g l \cos \alpha}$$

Remarque : On a pris en considération dans ce calcul le fait que E_P est nulle pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

3°) L'énergie totale du système est :

$$\boxed{E = \left[\frac{1}{3} m + \frac{1}{2} M\right] l^2 \dot{\alpha}^2 - (m + M) g l \cos \alpha}$$

C'est une quantité constante car on est en présence d'un système conservatif. Comme en plus le nombre de degré de liberté du système S dans son mouvement par rapport à R est égal à 1 (le paramètre α), on peut avoir l'équation différentielle du mouvement à partir de $\frac{dE}{dt} = 0$. On a en effet : $$\left(\frac{2m + 3M}{3}\right) l^2 \ddot{\alpha} + (m + M) g l \sin \alpha = 0$$

4°) Lorsqu'il s'agit de petits mouvements, on peut confondre $\sin \alpha$ avec α et l'équation différentielle précédente devient :

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \left[\frac{3(m + M)}{2m + 3M}\right] \left[\frac{g}{l}\right] \alpha = 0}$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme : $\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$ avec $\omega^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{3(m + M)}{2m + 3M}$

5°) La période des petites oscillations est par définition :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l(2m + 3M)}{3g(m + M)}}$$

13 - Dynamique d'un solide de révolution : Mouvement de Lagrange.

On considère un solide (S) de révolution autour d'un axe $(O, \vec{k})$, homogène, pesant, de masse m.

Soit G son centre de masse et $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé lié à (S). On désigne par A = B et C les valeurs propres de l'opérateur d'inertie de (S) relatif à O correspondant aux vecteurs propres $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (ce sont les éléments du tenseur principal d'inertie). Le point O étant fixe, le solide (S) est mobile autour de O et peut tourner autour de l'axe $(O,\vec{k})$.

Soit $(O,\vec{i_0},\vec{j_0},\vec{k_0})$ un repère orthonormé fixe tel que l'axe $(O,\vec{k_0})$ soit dirigé suivant la verticale ascendante et que :

$$\vec{u} = \frac{\vec{k_0} \wedge \vec{k}}{|\vec{k_0} \wedge \vec{k}|} \quad , \quad \vec{n} = \vec{k_0} \wedge \vec{u} \quad , \quad \vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{u}$$

$$\psi = (\vec{i_0}, \vec{u}) \quad , \quad \theta = (\vec{k_0}, \vec{k}) \quad , \quad \varphi = (\vec{u}, \vec{i})$$

où ψ, θ, φ sont les angles d'Euler habituels.

1°) Calculer le vecteur de rotation instantané $\vec{\Omega}$ du mouvement de (S). On l'exprimera dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$.

2°) Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}$ relatif à O de (S). On l'exprimera aussi dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$; pour cela, montrer sans faire de calcul que le tenseur principal d'inertie est le même dans les bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$.

3°) En déduire de la question précédente l'expression de $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ (par rapport au repère fixe $(O,\vec{i_0},\vec{j_0},\vec{k_0})$) mais exprimé dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$.

4°) Le solide (S) étant soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{k_0}$ et à la réaction $\vec{L}$ du point O. Calculer le moment $\vec{M_0}$ par rapport à O des forces agissant sur (S). On posera $a = |\overrightarrow{OG}|$.

5°) Appliquer le théorème du moment cinétique au point O en projection sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{k}$.

6°) Calculer la vitesse et l'accélération de G. Donner leur expression dans la base $(\vec{u},\vec{n},\vec{k_0})$.

7°) Appliquer le théorème de la résultante cinétique en projection sur $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\vec{k_0}$, on posera $\vec{L} = X\vec{u} + Y\vec{n} + Z\vec{k_0}$.

8°) On suppose que le mouvement en θ est stationnaire. Déduire des équations obtenues en 5°) que $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$ demeurent aussi constants au cours du temps, moyennant une relation que l'on déterminera, liant les valeurs initiales $\theta_0 \neq n\pi$, $\dot{\psi}_0$, $\dot{\varphi}_0$.

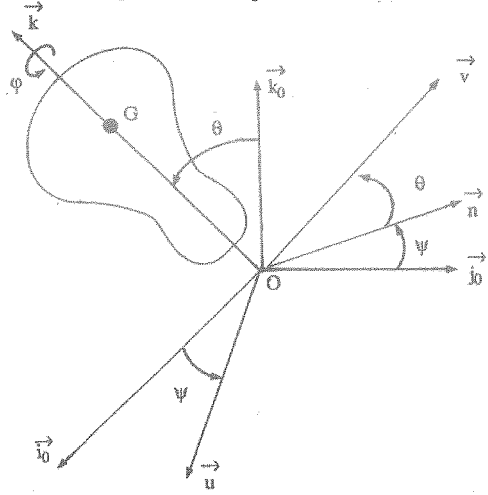
En déduire les valeurs de ψ, φ, X, Y, Z à l'instant t en supposant qu'à l'instant $t = 0$, on a : $\psi = \varphi = 0$.

Nota : Les questions 6°) et 7°) peuvent être traitées indépendamment des questions précédentes.

Casablanca, PC2, Janvier 1987.

On s'intéresse dans ce problème à ce qu'on appelle **mouvement de Lagrange**, c'est-à-dire **le mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe de son axe.**
Comme la nature de S n'est pas précisée (sphère, demi-sphère, cylindre, cône, etc...), la résolution proposée à un caractère général et peut de ce fait constituer un complément de cours.

S est en liaison sphérique en O par rapport à un bâti B lié au repère $R_0 = (O, \vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0})$, il en résulte que le nombre de degré de liberté de S dans son mouvement par rapport à R_0 est égal à 3 (les paramètres de position de S se réduisant aux angles d'Euler habituels ψ, θ, φ).



$R_0 = (O, \vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0})$ repère fixe tel que $(O, \vec{k_0})$ soit dirigé suivant la verticale ascendante,

et $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, lié à S.

$$\vec{u} = \frac{\vec{k_0} \wedge \vec{k}}{|\vec{k_0} \wedge \vec{k}|} \quad ; \quad \vec{n} = \vec{k_0} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{u}$$

$$\psi = (\vec{i_0}, \vec{u}), \quad \theta = (\vec{k_0}, \vec{k}), \quad \varphi = (\vec{u}, \vec{i})$$

1°) Le mouvement de S par rapport à R_0 peut donc se décomposer de la façon suivante :

$$R_0=(O,\vec{i_0},\vec{j_0},\vec{k_0}) \xrightarrow{\psi} R_1=(O,\vec{u},\vec{n},\vec{k_0}) \xrightarrow{\theta} R_2=(O,\vec{u},\vec{v},\vec{k}) \xrightarrow{\varphi} R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$$

On en déduit que $$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{k_0} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{k}$$

Soit encore dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{v} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{k}}$$

2°) Par hypothèse, la matrice d'inertie de S au point O exprimée dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est

donnée par :

$$J(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

Avec $A = \vec{i} \cdot J(O,S)\,\vec{i} = \vec{j} \cdot J(O,S)\,\vec{j}$

Soit $\vec{r} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j}$ un vecteur unitaire du plan $(\vec{i}, \vec{j})$ $[\alpha^2 + \beta^2 = 1]$.

On a $\vec{r}\, J(O,S)\,\vec{r} = (\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j}) \cdot J(O,S)\,(\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j})$

Or l'opérateur d'inertie est linéaire ; il en résulte que :

$$\vec{r} \cdot J(O,S)\,\vec{r} = \alpha^2\,\vec{i} \cdot J(O,S)\,\vec{i} + \beta^2\,\vec{j} \cdot J(O,S)\,\vec{j} = (\alpha^2 + \beta^2)\,A = A$$

et ce car $\vec{i} \cdot J(O,S)\,\vec{j} = \vec{j} \cdot J(O,S)\,\vec{i} = 0$.

Ce raisonnement est valable pour tout vecteur $\vec{r}$ unitaire du plan $(\vec{i}, \vec{j})$ et c'est en particulier le cas pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le plan perpendiculaire à l'axe de révolution est dit plan propre d'inertie et la matrice $J(O,S)$ reste inchangée quand on passe de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.

D'autre part le moment cinétique en O de S est : $\vec{\sigma}(O, S/R_0) = J(O,S)\,\vec{\Omega}(S/R_0)$

car O est un point lié à S fixe dans R_0, on obtient :

$$\boxed{\vec{\sigma}(O, S/R_0) = A\,\dot{\theta}\,\vec{u} + A\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{v} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{k}}$$

3°) En appliquant la formule de dérivation d'un même vecteur par rapport à deux repères différents, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}(O, S/R_0)]_{/R_0} = \frac{d}{dt}[\vec{\sigma}(O, S/R_0)]_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k})} + \vec{\Omega}((\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})/R_0) \wedge \vec{\sigma}(O, S/R_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(O, S/R_0)}{\mathrm{d}t}\Big/_{R_0} = \underset{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})}{\begin{bmatrix} A\,\ddot{\theta} \\ A\,(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta) \\ C(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\theta) \end{bmatrix}}$$

$$+ \underset{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})}{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}} \wedge \underset{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})}{\begin{bmatrix} A\,\dot{\theta} \\ A\,\dot{\psi}\sin\theta \\ C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \end{bmatrix}}$$

Soit encore

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(O, S/R_0)}{\mathrm{d}t}\Big/_{R_0} = \underset{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})}{\begin{bmatrix} A\,\ddot{\theta} + C\,\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\sin\theta + (C-A)\,\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ A\,\ddot{\psi}\sin\theta - C\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta\,(2A-C) \\ C(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\theta) \end{bmatrix}}$$

4°) **On suppose que la liaison sphérique en O est parfaite** ; ceci se traduit, comme on le sait, par le fait que le moment $\vec{\mathcal{M}}(O, \mathcal{L})$ par rapport à O des forces de liaison est nul. Le solide étant soumis en plus à son poids $\vec{P} = -mg\,\vec{k_0}$ on a le moment $\vec{\mathcal{M}}_0$ par rapport à O des forces agissant sur (S) qui est égal à :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{\mathcal{M}}(O, \mathcal{L}) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = a\,\vec{k} \wedge -mg\vec{k_0}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_0 = m\,a\,g\sin\theta\,\vec{u}}$$

5°) **Le théorème du moment cinétique** appliqué au point O nous permet d'écrire :

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \vec{\mathcal{M}}_0$$

or O étant **un point fixe** dans R_0, on a :

$$\vec{\delta}(O, S/R_0) = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(O, S/R_0)}{\mathrm{d}t}\Big/_{R_0}$$

on obtient alors, en projetant sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{k}$ les trois équations :

$$\boxed{A\,\ddot{\theta} + C\,\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\sin\theta + (C-A)\,\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta = m\,g\,a\sin\theta} \quad (1)$$

$$\boxed{A\,\ddot{\psi}\sin\theta - C\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta\,(2A-C) = 0} \quad (2)$$

$$\boxed{C(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\theta) = 0} \quad (3)$$

6°) S étant de révolution, son centre d'inertie G est sur l'axe donc : $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{k}$.

$$\vec{V}(G/R_0) = a\frac{d\vec{k}}{dt}/_{R_0} = a\,\vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{k} = a\,(\dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\vec{k_0}) \wedge \vec{k}$$

Soit

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = a\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u} - a\,\dot{\theta}\,\vec{v}}$$

Dans la base $(\vec{u}, \vec{n}, \vec{k_0})$, on obtient :

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = a\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u} - a\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{n} - a\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{k_0}}$$

Le vecteur accélération de G est d'autre part donné par :

$$\vec{\gamma}(G/R_0) = \frac{d}{dt}\,[\vec{V}(G/R_0)]/R_0$$

$$\vec{\gamma}(G/R_0) = a\,(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta)\,\vec{u} + a\,\dot{\psi}^2\sin\theta\,\vec{n} - a\,(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\,\vec{n}$$
$$+ a\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u} - a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\,\vec{k_0}.$$

Soit encore :

$$\boxed{\vec{\gamma}(G/R_0) = \begin{matrix}\\(\vec{u},\,\vec{n},\,\vec{k_0})\end{matrix}\begin{bmatrix} a(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta) \\ a(\dot{\psi}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ -a\,(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{bmatrix}}$$

7°) **Le théorème de la résultante dynamique** s'écrit :

$$m\,\vec{\gamma}(G/R_0) = -m\,g\,\vec{k_0} + \vec{L}$$

où $\vec{L} = X\vec{u} + Y\vec{n} + Z\vec{k_0}$ est la résultante du torseur des actions de liaison en O.

En projetant sur $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\vec{k_0}$, on obtient :

$$\boxed{m\,a\,(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta) = X} \qquad (4)$$

$$\boxed{m\,a\,(\dot{\psi}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta) = Y} \qquad (5)$$

$$\boxed{-m\,a\,(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = Z - mg} \qquad (6)$$

8°) On suppose que le **mouvement en θ est stationnaire**, (c'est-à-dire que le paramètre θ reste constant au cours du temps) dans ce cas, l'équation (2) nous permet d'affirmer que $\dot{\psi}$ reste aussi constant (égal à $\dot{\psi}_0$) de même que $\dot{\varphi}$ (égal à $\dot{\varphi}_0$) et ce à partir de l'équation (3).

$\dot{\psi}_0$ et $\dot{\varphi}_0$ sont donc des constantes qui doivent vérifier pour toute valeur de $\theta = \theta_0 \neq n\pi$ la relation déduite de l'équation (1).

$$C\,\dot{\varphi}_0\,\dot{\psi}_0\sin\theta_0 + (C - A)\,\dot{\psi}_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = m\,g\,a\sin\theta_0$$

qu'on appelle encore **relation de stationnarité.**

On a donc $\psi = \dot{\psi}_0\,t + \psi_0$ et $\varphi = \dot{\varphi}_0\,t + \varphi_0$

Si en plus on a, à $t = 0$: $\psi = \varphi = 0$, on en déduit que $\psi = \dot{\psi}_0\,t$ et $\varphi = \dot{\varphi}_0\,t$.

D'autre part les équations (4), (5) et (6) nous donnent dans ce cas les composantes X, Y et Z de la réaction ; en effet on a directement :

$$X = 0$$
$$Y = m\,a\,\dot{\psi}_0^2\sin\theta_0$$
$$Z = m\,g$$

14 - Théorèmes généraux appliqués à un système matériel.

Soit $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ un repère galiléen, (Oz_0) étant la verticale descendante, $\vec{g} = g\vec{z_0}$ l'accélération de la pesanteur.

Une tige (T) rectiligne, de section et de masse négligeables, tourne dans le plan (O, x_0, y_0) autour de l'axe (Oz_0) (O étant un point commun à R_0 et à (T)) avec une vitesse angulaire constante ω. On note $R_T(O, x_1, y_1, z_0)$ le repère orthonormé direct lié à la tige, l'axe (Ox_1) étant porté par (T) et on pose $(\vec{x_0}, \vec{x_1}) = \omega t$.

Un disque (D) (plein, homogène, masse M, centre G, rayon R) glisse et tourne par rapport à (T) de façon que G reste sur (T) et que le mouvement de rotation de (D) autour de G soit le plus général. Soit $R_S(G, x, y, z)$ le repère orthonormé direct lié au disque, (Gz) étant l'axe de révolution du disque. On repère la position du disque (D) dans le repère R_T par : $\overrightarrow{OG} = \rho\,.\,\vec{x_1}$ et par les trois angles d'Euler habituels :

$$R_T \xrightarrow{\psi} R_1(G, u, v_1, z_0) \xrightarrow{\theta} R_2(G, u, v, z) \xrightarrow{\varphi} R_S$$

I - 1°) Quel est le nombre de degré de liberté de (D) par rapport à R_0 ?

2°) Déterminer la vitesse de G en mouvement par rapport à R_0.

3°) Donner le vecteur rotation $\vec{\Omega}(D/R_T)$

4°) Déterminer par leurs composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ liée à R_2 :

$\vec{\Omega}(D/R_0)$ et $J(G, D)$.

5°) Déterminer $\vec{\sigma}(G, D/R_0)$ par ses projections sur la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.

6°) Déterminer $\overrightarrow{\delta}$ $(G, D/R_0)$. Donner ses projections sur les axes $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{z_0}$.

7°) Déterminer l'énergie cinétique $2T(D/R_0)$.

II - On admet que la liaison en O est parfaite et que les actions de liaison de la tige sur le disque sont représentables par un torseur $[\mathcal{T}_1]$ tel que

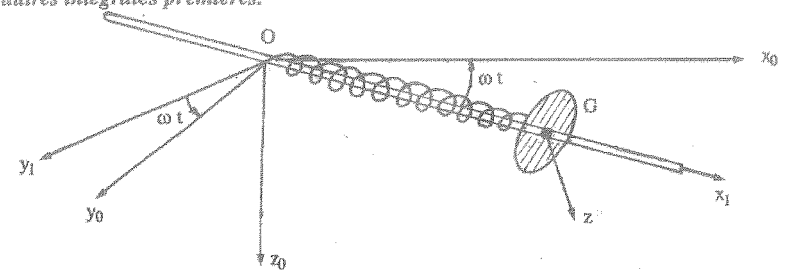
- *la résultante générale $\overrightarrow{R_1}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{x_1}$*
- *le moment en G est nul.*

En plus des actions de pesanteur et de liaison, le disque est soumis aux actions d'un système élastique (ressort de masse négligeable tendu entre les points O et G) représenté par un torseur $[\mathcal{T}_2]$ tel que :

- *la résultante générale $\overrightarrow{R_2} = -K\,M\,\overrightarrow{OG}$ $(K > w^2)$*
- *le moment en G est nul*

a) A partir du théorème de l'énergie cinétique appliqué au système $\Sigma(T + D)$, déduire une intégrale première du mouvement.

b) A l'aide des théorèmes généraux appliqués au disque seul, déterminer $\rho(t)$ et deux autres intégrales premières.



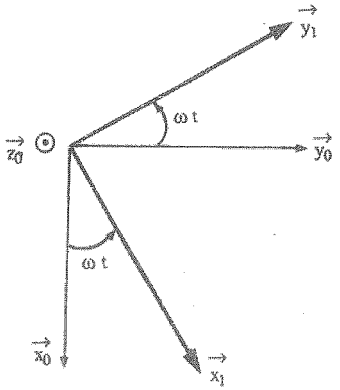
Casablanca, MP2, PC2, Juin 1987

1ère partie : cinématique et cinétique

1°) Pour étudier le mouvement du disque *(D)* par rapport à R_0, il suffit de le faire par rapport à R_T et ce, car le mouvement de la tige par rapport à R_0 est connu (ω donnée) ; on en déduit que les nombres de degré de liberté de *(D)* par rapport à R_0 et à R_T sont identiques tous les deux égaux à quatre. Il s'agit d'une façon plus explicite des paramètres :

- ρ qui permet de positionner G sur la tige,
- ψ, θ, φ angles d'Euler habituels qui permettent, dans le cas d'une rotation quelconque autour de G, de passer du repère R_T au repère R_S.

2°) On a $\overrightarrow{OG} = \rho\,\overrightarrow{x_1}$ donc :



$$\vec{V}(G/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/R_0 = \dot{\rho}\,\vec{x_1} + \rho\,\frac{d\vec{x_1}}{dt}/R_0$$

or $\dfrac{d\vec{x_1}}{dt}/R_0 = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x_1}$

avec $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \omega\,\vec{z_0}$

Soit $\dfrac{d\vec{x_1}}{dt}/R_0 = \omega\,\vec{z_0} \wedge \vec{x_1} = \omega\,\vec{y_1}$

et $\dfrac{d\vec{y_1}}{dt} = \omega\,\vec{z_0} \wedge \vec{y_1} = -\omega\,\vec{x_1}$

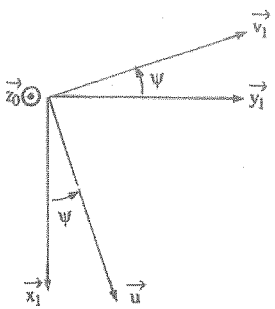
$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = \dot{\rho}\,\vec{x_1} + \rho\,\omega\,\vec{y_1}}$$

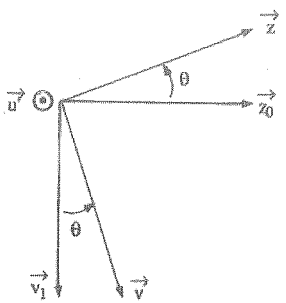
3°) Le vecteur rotation instantanée du disque D par rapport à la tige T est :

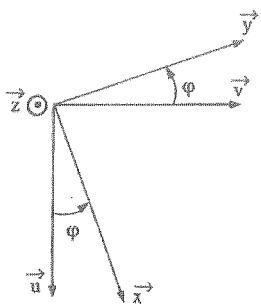
$$\vec{\Omega}(D/T) = \vec{\Omega}(R_3/R_T) = \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_T)$$

Avec :

$\vec{\Omega}(R_1/R_T) = \dot{\psi}\,\vec{z_0}$ $\quad$ $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta}\,\vec{u}$ $\quad$ $\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \dot{\varphi}\,\vec{z}$







On en déduit que :

$$\boxed{\vec{\Omega}(D/R_T) = \dot{\psi}\,\vec{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z}}$$

4°) On sait que $\vec{\Omega}(D/R_0) = \vec{\Omega}(D/R_T) + \vec{\Omega}(R_T/R_0)$ et à partir de ce qui a été établi, on obtient :

$$\vec{\Omega}(D/R_0) = (\dot{\psi} + \omega)\,\vec{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z}$$

et comme $\vec{z}_0 = \sin\theta\ \vec{v} + \cos\theta\ \vec{z}$

On a : $\boxed{\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\theta}\ \vec{u} + (\dot{\psi} + \omega)\sin\theta\ \vec{v} + [\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta]\ \vec{z}}$

D'autre part, la matrice d'inertie du disque D en G est donnée par :

$$J(G, D) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

et ce relativement à l'une des deux bases $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ou $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ car le solide considéré est de révolution d'axe $O\vec{z}$.

Si on considère la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ (chose qui permet d'exploiter directement les résultats de la dernière question), on a :

$$A = \iint_{M \in D} (y^2 + z^2)\, dm = \iint_{M \in D} (x^2 + z^2)\, dm$$

$$C = \iint_{M \in D} (x^2 + y^2)\, dm$$

et ceci pour tout M de D de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.

or $M \in D$ implique que $z = 0$ et $x^2 + y^2 = r^2$ avec $0 \le r \le R$.

Donc si on considère les coordonnées polaires, on obtient :

$$C = \iint_{M \in D} r^2\, dm \qquad \text{avec } dm = \sigma\, dS = \sigma\, 2\pi r\, dr$$

(σ : densité surfacique de masse).

$$C = 2\pi\sigma \int_0^R r^3\, dr = \pi\sigma \frac{R^4}{2}$$

et puisque $m = \sigma \pi R^2$, on obtient :

$$\boxed{C = \frac{m R^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{A = \frac{C}{2} = \frac{m R^2}{4}}$$

5°) Le moment cinétique en G du disque D dans son mouvement par rapport à R_0 est donné par la relation :

$$\vec{\sigma}(G, D/R_0) = J(G, D)\, \vec{\Omega}(D/R_0)$$

Soit encore :

$$\boxed{\vec{\sigma}(G, D/R_0) = A\,\dot{\theta}\,\vec{u} + A\,(\dot{\psi} + \omega)\sin\theta\,\vec{v} + C(\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta)\,\vec{z}}$$

6°) **Le moment dynamique en G** a pour expression :

$$\vec{\delta}(G, D/R_0) = \frac{d}{dt}\,[\vec{\sigma}(G, D/R_0)]/R_0$$

En utilisant la formule de dérivation composée, on peut écrire :

$$\vec{\delta}(G, D/R_0) = \frac{d}{dt}\,[\vec{\sigma}(G, D/R_0)]/R_2 + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}(G, D/R_0)$$

R_2 est le repère dont la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est celle dans laquelle a été explicité le moment cinétique, on obtient alors :

$$\vec{\delta}(G, D/R_0) = A\,\ddot{\theta}\,\vec{u} + A\,\frac{d}{dt}\,[(\dot{\psi} + \omega)\sin\theta]\,\vec{v} + C\,\frac{d}{dt}\,[\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta]\,\vec{z}$$
$$+ [(\dot{\theta}\,\vec{u} + (\dot{\psi} + \omega)\,\vec{z_0}) \wedge (A\,\dot{\theta}\,\vec{u} + A(\dot{\psi} + \omega)\sin\theta\,\vec{v} + C(\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta)\,\vec{z})]$$

a) **Projection sur $\vec{u}$:**

$$\vec{\delta}(G, D/R_0).\,\vec{u} = A\ddot{\theta} - A(\dot{\psi} + \omega)^2 \sin\theta\cos\theta + C[(\dot{\psi} + \omega)\cos\theta + \dot{\varphi}]\,(\dot{\psi} + \omega)\sin\theta \qquad (1)$$

b) **Projection sur $\vec{z_0}$:**

$$\vec{\delta}(G, D/R_0).\,\vec{z_0} = A\,[\ddot{\psi}\sin^2\theta + (\dot{\psi} + \omega)\dot{\theta}\sin 2\theta] +$$
$$C[(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta)\cos\theta - (\dot{\psi} + \omega)\dot{\theta}\sin 2\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta] \qquad (2)$$

c) **Projection sur $\vec{z}$:**

$$\boxed{\vec{\delta}(G, D/R_0).\,\vec{z} = C\,\frac{d}{dt}\,[\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta]} \qquad (3)$$

7°) **L'énergie cinétique** du disque D dans son mouvement par rapport à R_0 est donnée par la relation :

$$T(D/R_0) = \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}(D/R_0)\,.\,J(G, D)\,\vec{\Omega}(D/R_0) + \frac{1}{2}\,M\,\vec{V}(G/R_0)^2$$

Soit encore :

$$\boxed{2T(D/R_0) = A\,\dot{\theta}^2 + A(\dot{\psi} + \omega)^2 \sin^2\theta + C(\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta)^2 + M(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\omega^2)}$$

2ème partie : Etude dynamique

Le disque D est soumis aux actions mécaniques suivantes :

◆ **La pesanteur** représentée par le torseur :

$$[\mathcal{P}] = \begin{cases} \vec{R} = \vec{p} = m\,g\,\vec{z_0} \\ \vec{\mathcal{M}}_G(\mathcal{P}) = \vec{0} \end{cases}_{[G]}$$

◆ **La liaison tige-disque** représentée par le torseur :

$$[\mathcal{T}_l] = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R_l} = Y\,\vec{y_l} + Z\,\vec{z_0} \\ \vec{\mathcal{M}}_G(\mathcal{T}_l) = \vec{0} \end{cases}_{[G]} \quad \text{(par hypothèse)}$$

Y et Z étant des inconnues de liaison.

◆ **L'effet du système élastique** représenté par le torseur :

$$[\mathcal{T}] = \begin{cases} \vec{R} = -K\,M\,\overrightarrow{OG} = -k\,M\,\rho\,\vec{x_l} \\ \vec{\mathcal{M}}_G(\mathcal{T}) = \vec{0} \end{cases}_{[G]}$$

a) **Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système** Σ s'écrit sous la forme :

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}ext + \mathcal{P}int$$

où $\mathcal{P}ext$ est la puissance développée par les actions du milieu extérieur sur Σ et $\mathcal{P}int$ celle des actions intérieures à Σ.

Dans le cas présent, les actions de l'extérieur se réduisent à l'effet de la pesanteur alors que l'action de liaison et celle du système élastique sont des forces d'inter-efforts, on obtient par conséquent :

$$\mathcal{P}ext = [\mathcal{P}]_{[G]} \cdot [\mathcal{C}(D/R_0)]_{[G]}$$

et

$$\mathcal{P}int = \left\{ [\mathcal{T}]_{[G]} + [\mathcal{T}_1]_{[G]} \right\} \cdot [\mathcal{C}(D/R_T)]_{[G]}$$

où $[\mathcal{C}(D/R_0)]$ est le torseur cinématique du disque D dans son mouvement par rapport à R_0 et $[\mathcal{C}(D/R_T)]$ le torseur cinématique du disque D par rapport au repère lié à la tige (R_T).

On a alors :

$$\mathcal{P}ext = m\,g\,\vec{z_0} \cdot \vec{V}(G/R_0)$$

$$\mathcal{P}int = (-K\,M\,\rho\,\vec{x_l} + Y\,\vec{y_l} + Z\,\vec{z_0}) \cdot \vec{V}(G/R_T)$$

Avec $\vec{V}(G/R_T) = \dot{\rho}\,\vec{x_l}$

Soit

$$\mathcal{P}int = -K\,M\,\rho\,\dot{\rho} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{K\,M\,\rho^2}{2}\right]$$

On retrouve ainsi l'énergie potentielle d'un ressort de type compression-dilatation qui est :

$$E_P = K\,M\,\frac{\rho^2}{2} + \text{constante}$$

On est donc en mesure d'écrire l'intégrale première de l'énergie cinétique $T + E_P = \text{cte}$, celle-ci est donnée par :

$$A[\dot{\theta}^2 + (\dot{\psi} + \omega)^2 \sin^2\theta] + C[\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta]^2 + M(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) + KM\,\frac{\rho^2}{2} = \text{constante} \quad (4)$$

b) Si on considère que le système étudié est réduit au disque seul toutes les actions citées plus haut sont extérieures et on a par conséquent :

◆ **Le théorème de la résultante dynamique**

$$M\,\vec{\gamma}(G/R_0) = -K\,M\,\rho\,\vec{x_1} + Y\vec{y_1} + (mg + Z)\vec{z_0}$$

qui donne par projection sur les axes Ox_1, Oy_1 et Oz_0 les trois équations suivantes :

$$M(\ddot{\rho} - \omega^2\rho) = -K\,M\,\rho \quad (5)$$

$$2\,M\,\dot{\rho}\,\omega = Y \quad (6)$$

$$0 = m\,g + Z \quad (7)$$

L'équation (5) permet, moyennant la donnée de conditions initiales, de déterminer l'évolution du paramètre ρ au cours du temps. En effet, l'équation (5') suivante :

$$\ddot{\rho} + (K - \omega^2)\,\rho = 0 \qquad \text{avec } K > \omega^2$$

admet pour solution la fonction :

$$\rho(t) = C_1\cos(\Omega t) + C_2\sin(\Omega t)$$

Avec $\Omega^2 = K - \omega^2$ et C_1 et C_2 des constantes.

Si on suppose en plus que pour $t = 0$, on a : $\rho = \rho_0$ et $\dot{\rho} = \dot{\rho}_0$

On en déduit la valeur des constantes : $C_1 = \rho_0$ et $C_2 = \dfrac{\dot{\rho}_0}{\sqrt{K - \omega^2}}$

En définitive : l'évolution de G sur l'axe Ox_1 est telle que :

$$\rho = \rho_0\cos\sqrt{K - \omega^2}\,t + \frac{\dot{\rho}_0}{\sqrt{K - \omega^2}}\sin\sqrt{K - \omega^2}\,t$$

Les équations (6) et (7) permettent quant à elles de déterminer les inconnues de liaison Y et Z.

◆ **Le théorème du moment dynamique** $\vec{\delta}(G, D/R_0) = \vec{0}$ qui permet d'affirmer que les équations (1), (2) et (3) sont toutes égales à zéro.

L'équation (2) = 0 permet de dégager l'intégrale première :

$$\vec{\sigma}(G, D/R_0)\,.\,\vec{z_0} = C_3$$

ou encore $$\boxed{A(\dot{\psi} + \omega)\sin^2\theta + C\cos\theta\,(\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta) = C_3} \qquad (8)$$

en effet : $$\vec{\delta}(G, D/R_0) \cdot \vec{z_0} = \frac{d\vec{\sigma}(G, D/R_0)}{dt}_{/R_0} \cdot \vec{z_0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G, D/R_0)\,\vec{z_0}\right] = 0$$

$$\boxed{\text{car } \vec{z_0} \text{ est fixe dans } R_0}$$

de même que l'équation (3) = 0 permet de dégager l'intégrale première :

$$\vec{\sigma}(G, D/R_0) \cdot \vec{z} = C_4$$

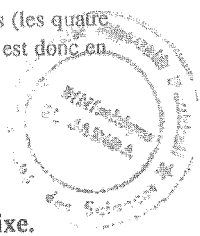
ou encore : $$\boxed{C\,(\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega)\cos\theta) = C_4} \qquad (9)$$

et ce car : $$\vec{\delta}(G, D/R_0) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G, D/R_0)\,\vec{z}\right] - \vec{\sigma}(G, D/R_0) \cdot \frac{d\vec{z}}{dt}_{/R_0} = 0$$

et puisque le solide considéré est de révolution d'axe Gz, on a $\vec{\sigma}(G, D/R_0) \cdot \frac{d\vec{z}}{dt}_{/R_0} = 0$

d'où le résultat.

On a en définitive 6 équations (dont 3 intégrales premières) pour 6 inconnues (les quatre paramètres de position ρ, ψ, θ, φ et les deux inconnues de liaison Y et Z , on est donc en mesure de résoudre le problème.



15 - Mouvement d'un cerceau en contact avec un plan fixe.

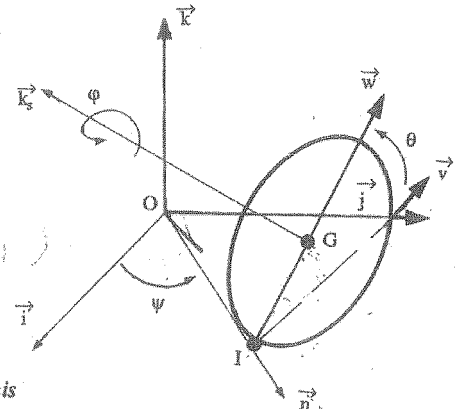
Tous les repères envisagés sont orthonormés directs. Soit S un cerceau homogène, de section négligeable, de masse m, de centre G, et de rayon a. On se propose d'étudier le mouvement de S par rapport au repère fixe galiléen $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ***, l'axe*** $(O, \vec{k})$ ***définissant la verticale ascendante.***

On appelle $R_S(G, \vec{i_S}, \vec{j_S}, \vec{k_S})$ ***le repère lié à S, A et C sont ses moments principaux d'inertie en G (C : moment d'inertie par rapport à*** $(G, \vec{k_S})$ ***axe de révolution de S).***

On suppose dans tout le problème que S reste en contact avec le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *au point I.*

S est repéré par les trois angles d'Euler habituels ψ, θ *et* φ *et* (x, y, z) *coordonnées de G dans R.*

La réaction du plan sur le cerceau en I est un glisseur dont le support passe par I et de vecteur $\vec{R} = R\,\vec{k}$ *(pas de frottement).*



Par un système non précisé, S est soumis à un glisseur dont le support passe par G et de vecteur $\vec{F} = -K\,\overrightarrow{OG}$ $(K>0)$.

1°) ETUDE CINEMATIQUE

a) Déterminer $\vec{\Omega}(S/R)$, *l'exprimer dans la base* $(\vec{n}, \vec{w}, \vec{k_S})$.

b) Montrer que la côte du point G est $z = a \sin\theta$.

c) Exprimer $\vec{V}(I \in S/R)$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2°) ETUDE CINETIQUE

a) Déterminer l'opérateur d'inertie du système en G dans la base $(\vec{n}, \vec{w}, \vec{k_S})$.

b) Exprimer dans cette même base $\vec{\sigma}(G, S/R)$.

3°) ETUDE DYNAMIQUE

On désire faire une étude dynamique du système pour trouver les équations du mouvement du solide.

a) En appliquant le théorème de la résultante dynamique dans R, donner brièvement la nature de la trajectoire de la projection de G sur le plan horizontal.

b) Ecrire le théorème du moment cinétique en G. Trouver deux intégrales premières du mouvement en projetant sur $\vec{k}$ ***et*** $\vec{k_S}$. ***(On prendra*** λ ***et*** μ ***comme constantes).***

c) Pour déterminer une troisième intégrale première de mouvement, on fera appel au théorème de l'énergie cinétique.

c.1) Indiquer les forces qui travaillent (avec justification).

c.2) Déterminer l'énergie mécanique du système par rapport à R.

c.3) En déduire une troisième intégrale première de mouvement et montrer qu'elle se ramène à une équation de type $\dot{\theta}^2 = f(\theta, t)$.

Meknès, Janvier 1987

1°) La position du solide S par rapport au repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est déterminée à partir:

◆ des coordonnées (x, y, z) de G.

◆ des angles d'Euler habituels (ψ, θ, φ).

La précession ψ permet de suivre le vecteur $\overrightarrow{OI}$ dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la nutation θ donne l'inclinaison du plan $(G, \vec{n}, \vec{w})$ contenant S par rapport au plan horizontal, l'angle φ étant la rotation propre du cerceau autour de l'axe de révolution $(G, \vec{k_S})$. Il en résulte que :

a) le vecteur rotation instantanée est donc :

$$\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\varphi}\,\vec{k_S}$$

Soit encore suivant la base $(\vec{n}, \vec{w}, \vec{k_S})$

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{k_S}}$$

b) D'autre part, le contact en I est obligatoirement traduit par une condition sur les paramètres de position $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$, celle-ci est déduite de l'écriture : $\overrightarrow{OI} \cdot \vec{k} = 0$ $(\mathcal{L})$

or

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} - a\,\vec{w}$$

$$\overrightarrow{OI} \cdot \vec{k} = z - a\,\vec{w} \cdot \vec{k} = z - a\sin\theta.$$

La condition de contact $(\mathcal{L})$ s'écrit donc : $\boxed{z = a\sin\theta}$

C'est une condition qui permet de réduire le nombre de paramètres de position indépendants entre eux (nombre de degré de liberté) à 5.

c) Le vecteur **vitesse de glissement** du cerceau S par rapport au plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$, supposé matérialisé, est donné par :

$$\boxed{\vec{V}_g(S/P) = \vec{V}(I \in S/R)}$$ car R est lié à P.

En appliquant la formule de distribution des vitesses pour les points d'un même solide, on obtient :

$$\vec{V}(I \in S/R) = \vec{V}(G \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{GI}$$

Notons au passage que le centre d'inertie d'un solide est toujours lié à ce dernier même s'il ne lui appartient pas matériellement (cas du cerceau).

D'autre part, le b) permet d'avoir : $\vec{V}(G \in S/R) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + a\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{k}$

donc :

$$\vec{V}(I \in S/R) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + a\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{k} + [\dot{\theta}\vec{n} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{k_S}] \wedge -a\,\vec{w}$$

On a en définitive suivant la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{V}(I \in S/R) = \begin{cases} \dot{x} + a\cos\psi\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) - a\,\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{y} + a\sin\psi\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) + a\,\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Remarque : $\vec{V}(I \in S/R)$ n'a pas de composante suivant la normale au plan tangent commun en I à S et à P (qui est confondu dans ce cas avec le plan P'). Ceci constitue une vérification de l'une des propriétés fondamentales de la vitesse de glissement.

2°) ETUDE CINETIQUE

a) A partir de l'énoncé, on a :

$$J(G, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

et ce relativement à l'une des deux bases $(\vec{i_S}, \vec{j_S}, \vec{k_S})$ ou $(\vec{n}, \vec{w}, \vec{k_S})$.

Cette forme de la matrice se déduit automatiquement du fait que le solide considéré est de révolution autour de l'axe $\vec{k_S}$ avec C : moment d'inertie par rapport à $(G, \vec{k_S})$ et A : moment d'inertie par rapport à tout axe perpendiculaire à $\vec{k_S}$ pris au point G (cf cours).

Un calcul plus explicite donne pour le cerceau :

$$C = ma^2 \quad \text{et} \quad A = \frac{ma^2}{2}$$

b) Dans la base $(\vec{n}, \vec{w}, \vec{k_S})$, on a :

$$\vec{\sigma}(G, S/R) = J(G, S)\,\vec{\Omega}(S/R) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\vec{\sigma}(G, S) = \frac{ma^2}{2}\left[\dot{\theta}\vec{n} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + 2\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{k_S}\right]$$

3°) ETUDE DYNAMIQUE

Le torseur des forces extérieures en G est, par hypothèse, donné par :

$$\mathcal{G}=\begin{cases}\overrightarrow{R_E}=\overrightarrow{P}+\overrightarrow{R}+\overrightarrow{F}=-Kx\,\overrightarrow{i}-Ky\,\overrightarrow{j}+(R-mg-Ka\sin\theta)\,\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G}=\overrightarrow{GG'}\wedge\overrightarrow{P}+\overrightarrow{GG'}\wedge\overrightarrow{F}+\overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{R}=-a\overrightarrow{w}\wedge R\overrightarrow{k}=-aR\cos\theta\,\overrightarrow{n}\end{cases}$$

Le torseur dynamique en G est, quant à lui, égal à :

$$\mathcal{A}=\begin{cases}\overrightarrow{R_d}=m\,\overrightarrow{\Gamma}(G/R)=m\,\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}(G/R)}{\mathrm{d}t}/R=m\ddot{x}\,\overrightarrow{i}+m\ddot{y}\,\overrightarrow{j}+ma(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)\,\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{\delta}(G,S/R)=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(G,S/R)}{\mathrm{d}t}/R\end{cases}$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire dans ce problème de calculer $\overrightarrow{\delta}(G, S/R)$ pour des raisons qui vont apparaître dans les questions 3.b) et 3.c). Il suffit d'utiliser, lorsqu'on a absolument besoin de déterminer $\overrightarrow{\delta}(G, S/R)$ la formule de dérivation composée qui permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(G,S/R)}{\mathrm{d}t}/R=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(G,S/R)}{\mathrm{d}t}/R_2+\overrightarrow{\Omega}(R_2/R)\wedge\overrightarrow{\sigma}(G,S/R)$$

où R_2 est le repère intermédiaire $(G, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{k_S})$.

a) En appliquant **le théorème de la résultante dynamique** dans R ($\overrightarrow{R_E}=\overrightarrow{R_d}$), on obtient les trois équations scalaires suivantes :

suivant $\overrightarrow{i}$ / $\qquad m\ddot{x}=-Kx \qquad (1)$

suivant $\overrightarrow{j}$ / $\qquad m\ddot{y}=-Ky \qquad (2)$

suivant $\overrightarrow{k}$ / $\qquad ma(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)=R-mg-Ka\sin\theta \qquad (3)$

Soit H la projection orthogonale du point G sur le plan $P(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a alors :

$$\overrightarrow{OH}=x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}$$

A partir des équations (1) et (2), on a : $x=C_1\sin(\omega t+\alpha)$ et $y=C_2\sin(\omega t+\beta)$ avec $\omega^2=\dfrac{K}{m}$ et C_1, C_2, α et β des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. Par exemple, si ces dernières sont telles que $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$, ,

on a : $$\left(\frac{x}{C_1}\right)^2+\left(\frac{y}{C_2}\right)^2=1$$

La trajectoire de H est donc une ellipse.

Remarque : Pour toutes les valeurs de C_1, C_2, α et β le mouvement de H vérifie la loi des aires de centre O car $\overrightarrow{OH}$ est parallèle à $\overrightarrow{\gamma}(H)$.

b) **Le théorème du moment cinétique en G** est traduit par la relation vectorielle :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G, S/R)}{dt}/_R = \overrightarrow{\mathcal{M}_G}$$

Le moment résultant étant porté par $\overrightarrow{n}$; sa projection est donc nulle sur tout axe perpendiculaire à ce dernier ; c'est en particulier le cas des projections suivant $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{k_S}$. On en déduit que :

b.1) $$\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G, S/R)}{dt}/_R \cdot \overrightarrow{k} = 0$$

ou encore $$\frac{d[\overrightarrow{\sigma}(G, S/R) \cdot \overrightarrow{k}]}{dt} - \overrightarrow{\sigma}(G, S/R) \cdot \frac{d\overrightarrow{k}}{dt}/_R = 0$$

On a en plus $\frac{d\overrightarrow{k}}{dt}/_R = 0$ d'où l'intégrale première du mouvement :

$$\overrightarrow{\sigma}(G, S/R) \cdot \overrightarrow{k} = \lambda$$

ou encore $$\boxed{\frac{ma^2}{2}[\dot{\psi}\sin^2\theta + 2\cos\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)] = \lambda} \qquad (4)$$

b.2) $$\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G, S/R)}{dt}/_R \cdot \overrightarrow{k_S} = 0$$

ou encore $$\frac{d[\overrightarrow{\sigma}(G, S/R) \cdot \overrightarrow{k_S}]}{dt} - \overrightarrow{\sigma}(G, S/R) \cdot \frac{d\overrightarrow{k_S}}{dt}/_R = 0$$

Le solide S **étant de révolution d'axe** $(G, \overrightarrow{k_S})$, on peut vérifier aisément que :

$$\overrightarrow{\sigma}(G, S/R) \cdot \frac{d\overrightarrow{k_S}}{dt}/_R = 0.$$

Il existe alors une deuxième intégrale première de mouvement donnée par :

$$\overrightarrow{\sigma}(G, S/R) \cdot \overrightarrow{k_S} = \mu$$

ou encore : $$\boxed{ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = \mu} \qquad (5)$$

c) c.1) Seule **la réaction** $\overrightarrow{R}$ ***ne travaille pas*** (le contact en I ayant lieu sans frottement).

Pour les autres forces, on a successivement :

◆ **Pour le poids** $\vec{P}$

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = -mg\,\vec{k}\,.\,\vec{V}(G/R)$$

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = -mga\,\dot{\theta}\cos\theta = -\frac{d}{dt}\,(mga\sin\theta)$$

◆ **Pour la force** $\vec{F} = -K\,\overrightarrow{OG}$

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = -K\,\overrightarrow{OG}\,.\,\vec{V}(G/R) = -K\,\overrightarrow{OG}\,.\,\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\Big/R$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = -\frac{K}{2}\,\frac{d}{dt}\,(\overrightarrow{OG})^2$$

On en déduit que les forces $\vec{P}$ et $\vec{F}$ dérivent respectivement des potentiels :

$Ep_1 = mga\ \sin\theta$ et $Ep_2 = \frac{K}{2}(x^2 + y^2 + a^2\ \sin^2\theta)$.

c.2) On sait que l'énergie mécanique d'un système est égale à $E = Ec + Ep$

où Ec est l'énergie cinétique et Ep l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique de S en mouvement par rapport à R est :

$$Ec(S/R) = \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}(S/R).J(G,S)\,\vec{\Omega}(S/R) + \frac{1}{2}\,m\,\vec{V}(G)^2$$

Soit :

$$\boxed{Ec(S/R) = \frac{1}{2}\left[\frac{ma^2}{2}\,(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2\right] + \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\,\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right]}$$

L'énergie potentielle est dans ce cas égale à :

$$Ep = Ep_1 + Ep_2 = mga\sin\theta + \frac{K}{2}\,(x^2 + y^2 + a^2\sin^2\theta)$$

c.3) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R})$$

Soit (en utilisant les résultats de (3.c.1)) :

$$\frac{dEc}{dt} = -\frac{dEp_1}{dt} - \frac{dEp_2}{dt} = -\frac{dEp}{dt}$$

On a ainsi la troisième intégrale première du mouvement suivante : $Ec + Ep = \beta$ (β constante) ou encore :

$$\frac{ma^2}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2+\frac{\dot{\psi}^2\sin^2\theta}{2}+(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\right]+\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+mga\sin\theta+\frac{K}{2}(x^2+y^2+a^2\sin^2\theta)=\beta \qquad (6)$$

Remarque importante :

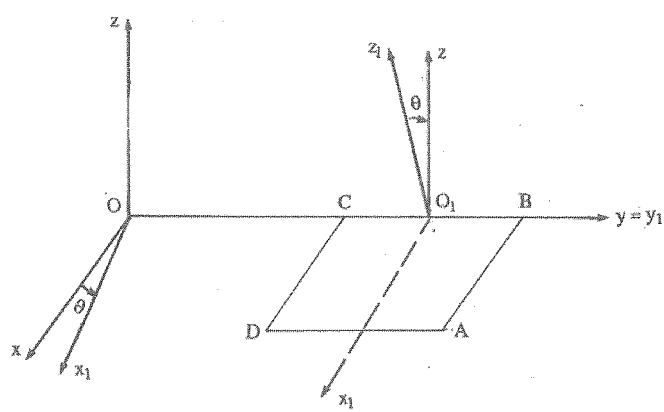
On vient donc de dégager un système différentiel de 6 équations (dont trois intégrales premières) pour un problème à 6 inconnues : les cinq paramètres de position x, y, ψ, φ, θ et l'inconnue de liaison R. L'existence des intégrales premières (4), (5) et (6) permet de ramener ce système différentiel à une seule équation du type : $\dot{\theta}^2 = f(\theta, t)$.
Il suffit pour ce faire de remplacer dans (6) :

- x, y, $\dot{x}$ et $\dot{y}$ par leur expression en fonction du temps.
- $\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$ par sa valeur réduite de (5)
- $\dot{\psi}$ par son expression obtenue à partir de (4) après avoir remplacé dans cette équation ($\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$) par sa valeur.

16 - Mouvement d'une plaque rectangulaire en liaison verrou avec un bâti fixe.

L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct $R(O, x, y, z)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, lié à la terre et supposé galiléen ; la direction de Oz est verticale ascendante.

Une plaque rectangulaire homogène ABCD, de masse m, de dimensions $AB = 2a$, $BC = 2b$, est mobile de manière que le côté CB glisse sans frottement le long de Oy, la plaque pouvant tourner également sans frottement autour de Oy (voir figure ci-dessous).



O_1 étant le milieu de CB, on définit un trièdre orthonormé direct $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ de base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ lié à la plaque tel que $\vec{j_1}$ est colinéaire à $\vec{j}$, $\vec{i_1}$ dans le plan de la plaque et z_1 perpendiculaire à ce plan.

La position de la plaque est définie par la donnée des deux paramètres :

$$y = \overline{OO_1} \qquad \text{et} \qquad \theta = (\vec{i}, \vec{i_1}) = (\vec{k}, \vec{k_1}).$$

La plaque est soumise à son poids et à des forces extérieures données dont la résultante et le moment ont respectivement pour expression :

$$\vec{F} = -\frac{3mg}{2}\cos\theta\ \vec{i} - \frac{3mg}{2a}\, y\ \vec{j}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = -\frac{3mg}{2}\, y \sin\theta\ \vec{i} + 2mga\sin\theta\ \vec{j}$$

1°) Pour tout mouvement cinématiquement possible de la plaque par rapport à R, calculer :

a) la vitesse et l'accélération du centre d'inertie de la plaque dans le repère R.

b) les composantes dans R :
- *de la résultante cinétique,*
- *de la résultante dynamique,*
- *du moment cinétique en O_1,*
- *du moment dynamique en O_1.*

2°) a) Effectuer un bilan détaillé des forces extérieures agissant sur la plaque.

b) Calculer les moments de toutes ces forces au point O.

3°) En appliquant les théorèmes généraux, écrire deux équations différentielles, l'une relative au paramètre y, l'autre au paramètre θ, qui permettraient de déterminer le mouvement de la plaque connaissant les conditions initiales.

4°) Intégrer les équations déterminées en 3°), de façon à obtenir la solution de l'un des paramètres du mouvement et une intégrale première de l'autre.

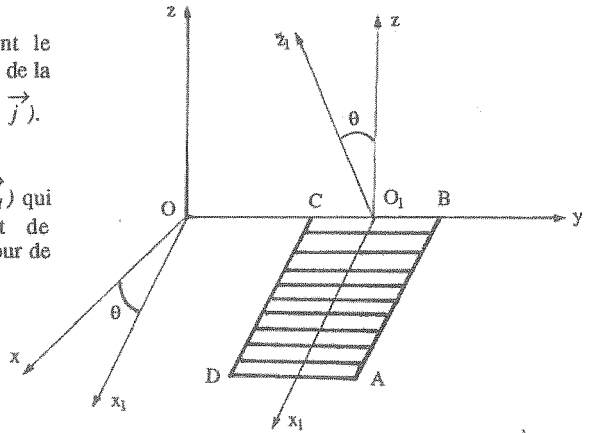
Agadir, PC2, Janvier 1987.

1°) Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère fixe supposé galiléen avec $(O, \vec{k})$ définissant la verticale ascendante.

Le nombre de degré de liberté de la plaque dans son mouvement par rapport à R est égal à deux ; il s'agit en effet des paramètres :

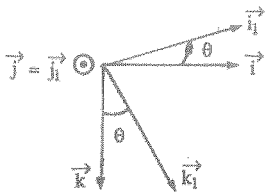
◆ $y = \overline{OO_1}$ définissant le mouvement de translation de la plaque le long de l'axe $(O, \vec{j})$.

◆ $\theta = (\vec{i}, \vec{i_1}) = (\vec{k}, \vec{k_1})$ qui définit le mouvement de rotation de la plaque autour de $(O, \vec{j})$.



La liaison entre la plaque et un bâti B lié à R est donc une **liaison verrou** d'axe $(O, \vec{j})$.

Soit $R_1(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ le repère lié à la plaque. Ce dernier est tel que $\vec{j_1}$ est colinéaire à $\vec{j}$, $\vec{i_1}$ dans le plan de la plaque et $\vec{k_1}$ perpendiculaire à ce plan. On en déduit alors :



◆ $\vec{i_1} = \cos\theta\, \vec{i} - \sin\theta\, \vec{k}$

◆ $\vec{k_1} = \cos\theta\, \vec{k} + \sin\theta\, \vec{i}$

◆ $\vec{\Omega}(P/R) = \vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\theta}\, \vec{j}$.

D'autre part, la formule de dérivation composée donne :

◆ $\left(\frac{d\vec{i_1}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{i_1}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{i_1} = \dot{\theta}\, \vec{j_1} \wedge \vec{i_1} = -\dot{\theta}\, \vec{k_1}$

◆ $\left(\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{k_1} = \dot{\theta}\, \vec{j_1} \wedge \vec{k_1} = -\dot{\theta}\, \vec{i_1}$

La **position du centre d'inertie** G de la plaque (P) est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1G} = y\, \vec{j_1} + a\, \vec{i_1}$$

Il en résulte que le vecteur vitesse de G donné par ses composantes dans la base de R est :

$$\boxed{\vec{V}(G/R) = -a\, \dot{\theta} \sin\theta\, \vec{i} + \dot{y}\, \vec{j} - a\, \dot{\theta} \cos\theta\, \vec{k}}$$

Le vecteur accélération de G exprimé dans la même base est, quant à lui, égal à :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G/R) = (-a\,\ddot{\theta}\,sin\theta - a\,\dot{\theta}^2\,cos\theta)\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + (a\,\dot{\theta}^2\,sin\theta - a\,\ddot{\theta}\,cos\theta)\,\vec{k}}$$

b) Les torseurs cinétique et dynamique ont respectivement pour éléments de réduction au point O_1 :

b.1) La résultante cinétique $\vec{R_C} = m\,\vec{V}(G/R)$

$$\boxed{\vec{R_C} = m\,[-a\,\dot{\theta}\,sin\theta\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} - a\,\dot{\theta}\,cos\theta\,\vec{k}\,]}$$

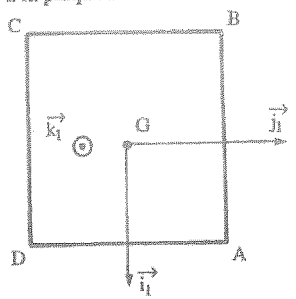
b.2) Le moment cinétique en O_1 :

$$\vec{\sigma}(O_1, P/R) = \vec{\sigma}(G, P/R) + m\,\overrightarrow{O_1G} \wedge \vec{V}(G/R)$$

et ce à partir du théorème de Kœnig relatif au moment cinétique, avec

$$\vec{\sigma}(G, P/R) = J(G, P)\,\vec{\Omega}(P/R)$$

$J(G,P)$ étant la matrice centrale d'inertie donnée par ses éléments dans la base du repère lié à la plaque P.



$J(G, P)$ est dans ce cas une matrice diagonale de la forme :

$$J(G,P) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})}$$

et ce car $(G, \vec{i_1})$ et $(G, \vec{j_1})$ sont des axes de symétrie matérielle donc principaux d'inertie.

Comme il s'agit d'un solide plan contenu dans $(G, \vec{i_1}, \vec{j_1})$, on a en plus $C = A + B$.

où $\quad A = \iint y^2\,dm \qquad dm = \sigma\,dx\,dy \qquad (m = 4\sigma ab)$

et $\quad B = \iint x^2\,dm \qquad -a \le x \le +a \quad$ et $\quad -b \le y \le +b$

Soit encore $\quad A = \sigma\left[\int_{-b}^{+b} y^2\,dy\right]\left[\int_{-a}^{+a} dx\right] = \dfrac{mb^2}{3}$

$$B = \sigma\left[\int_{-b}^{+b} dy\right]\left[\int_{-a}^{+a} x^2\,dx\right] = \frac{ma^2}{3}$$

Le moment cinétique $\vec{\sigma}(O_1, P/R)$ est donc :

$$\vec{\sigma}(O_1, P/R) = \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + m(a\vec{i}_1) \wedge (\dot{y}\vec{j}_1 - a\dot{\theta}\vec{k}_1)$$

Soit encore lorsqu'on projette dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\boxed{\vec{\sigma}(O_1, P/R) = m a \dot{y} \sin\theta \vec{i} + \frac{4ma^2}{3} \dot{\theta}\vec{j} + m a \dot{y} \cos\theta \vec{k}}$$

b.3) La résultante dynamique : $\vec{Rd} = m \vec{\Gamma}(G/R)$

$$\boxed{\vec{Rd} = -m a (\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta} \sin\theta) \vec{i} + m \ddot{y} \vec{j} + m a (\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta} \cos\theta) \vec{k}}$$

b.4) Le moment dynamique en O_1 :

Puisque O_1 est un point mobile différent de G, le moment dynamique $\vec{\delta}(O_1, P/R)$ est obtenu à partir de l'une des deux formules suivantes :

b.4.1) Formule de distribution des moments pour un torseur :

$$\vec{\delta}(O_1, P/R) = \vec{\delta}(G, P/R) + m \overrightarrow{O_1G} \wedge \vec{\gamma}(G/R)$$

avec $\vec{\delta}(G, P/R) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G, P/R)}{dt}\right|_R$

b.4.2) Relation entre le moment dynamique et la dérivée du moment cinétique en un point O_1 :

$$\vec{\delta}(O_1, P/R) = \frac{d}{dt}[\vec{\sigma}(O_1, P/R)]_{/R} + m\vec{V}(O_1/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

On obtient dans tous les cas :

$$\boxed{\vec{\delta}(O_1, P/R) = m a \ddot{y} \sin\theta \vec{i} + \frac{4}{3} m a^2 \ddot{\theta} \vec{j} + m a \ddot{y} \cos\theta \vec{k}}$$

2°) a) La plaque P est soumise aux actions extérieures suivantes :

a.1) L'effet de la pesanteur schématisé par le glisseur :

$$[\mathcal{P}] = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{P} = -m g \vec{k} \\ \vec{m}_G(\mathcal{P}) = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \end{cases}$$

a.2) Les forces données représentées par le torseur :

$$[\mathcal{T}] = \begin{cases} \vec{R_2} = \vec{F} = -\frac{3\,m\,g}{2}\cos\theta\,\vec{i} - \frac{3\,m\,g}{2\,a}\,y\,\vec{j} \\ \vec{m_O}(\mathcal{T}) = \frac{-3\,m\,g}{2}\,y\sin\theta\,\vec{i} + 2\,m\,g\,a\sin\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

a.3) Les forces de liaison (extérieures non données) exercées par le bâti (B) sur P dont le torseur en O_1 est :

$$[\mathcal{L}] = \begin{cases} \vec{R_3} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k} \\ \vec{m_{O_1}}(\mathcal{L}) = L\,\vec{i} + M\,\vec{j} + N\,\vec{k} \end{cases}$$

Remarquons au passage que puisque cette liaison est **de nature verrou parfaite** d'axe $(O, \vec{j})$ on a : $\vec{R_3}\,.\,\vec{j} = \vec{m_{O_1}}(\mathcal{L}).\vec{j} = \vec{0}$

ce qui implique que $Y = M = 0$.

b) Le moment résultant de toutes les forces extérieures agissant sur P est donné par :

$$\vec{m_0} = \vec{m_O}(\mathcal{P}) + \vec{m_0}(\mathcal{F}) + \vec{m_0}(\mathcal{L})$$

avec :

- $\vec{m_O}(\mathcal{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = (a\cos\theta\,\vec{i} + y\,\vec{j} - a\sin\theta\,\vec{k}) \wedge -mg\,\vec{k}$

$$\vec{m_O}(\mathcal{P}) = -mgy\,\vec{i} + mga\cos\theta\,\vec{j}$$

- $\vec{m_0}(\mathcal{F}) = -\frac{3mg}{2}\,y\sin\theta\,\vec{i} + 2mga\sin\theta\,\vec{j}$

- $\vec{m_0}(\mathcal{L}) = \vec{m_{O_1}}(\mathcal{L}) + \overrightarrow{OO_1} \wedge \vec{R_3}$

$$\vec{m_0}(\mathcal{L}) = L\,\vec{i} + N\,\vec{k} + y\,\vec{j} \wedge (X\,\vec{i} + Z)\,\vec{k}$$

$$\vec{m_0}(\mathcal{L}) = (L + yZ)\,\vec{i} + (N - yX)\,\vec{k}$$

3°) Les éléments de réduction du torseur des forces de liaison au point O n'ont pas de composante suivant $\vec{j}$; il est donc suffisant **de projeter les théorèmes de la résultante dynamique et du moment cinétique en O** sur cette direction pour obtenir les deux équations différentielles qui décrivent le mouvement de P (équations différentielles en y et θ ne contenant pas d'inconnues de liaison).

On a donc à partir du théorème de la résultante dynamique :

$$m\,\ddot{y} = -\frac{3mg}{2a}\,y$$

ou encore $\boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0}$ (1)

Avec : $\omega^2 = \frac{3g}{2a}$

et à partir du théorème du moment cinétique :

$$\boxed{\frac{4}{3} ma^2 \ddot{\theta} = mga(\cos\theta + 2\sin\theta)} \quad (2)$$

4°) L'équation (1) est une équation différentielle du second ordre classique dont la solution est de la forme : $y = C \sin(\omega t + \varphi)$

Avec C et φ des constantes d'intégration. (Le mouvement de O_1 est donc un mouvement rectiligne sinusoïdal).

D'autre part en multipliant l'équation (2) par $\dot{\theta}$ et en intégrant par rapport à t, on obtient l'intégrale première du mouvement suivante :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 - \omega^2 (\sin\theta - 2\cos\theta) = H}$$

où H est une constante.

17 - Mouvement d'un disque en liaison verrou autour d'un axe mobile et soumis à une force de rappel.

Une barre OA ($\|OA\| = a$, de masse négligeable) d'axe Oz_2 tourne autour de l'axe $\vec{z_0}$. Chaque point M de la barre est repéré dans son mouvement de rotation par l'angle ψ. La liaison de la barre au point O est une liaison sphérique parfaite. Durant son mouvement de rotation autour de $\vec{z_0}$, la barre s'écarte de son axe d'un angle θ. Un ressort de rappel est fixé en A et en I ($\|OI\| = \|OA\| = a$). Ce ressort de masse négligeable a une longueur initiale l_0, une raideur k. Un disque de rayon R et de masse m tourne autour de la barre (angle φ), son centre de masse G se déplace sur la barre OA et est repéré par sa position $\overrightarrow{OG} = \rho \vec{z_2}$. La liaison entre le disque et la barre est une liaison verrou parfaite.

1°) a) Déterminer le nombre de degré de liberté du système.

b) Ecrire le torseur $A_B^E(O)$ des actions mécaniques entre la barre et le bâti fixe au point O.

c) Ecrire le torseur des actions mécaniques $A_D^B(G)$ entre le disque et la barre au point G.

2°) ETUDE DU DISQUE SEUL.

a) Ecrire la loi fondamentale de la dynamique au centre de masse G du disque.

En projetant l'expression obtenue sur l'axe $\vec{Oz_2}$, trouver une équation scalaire reliant les paramètres ρ, θ, ψ.

b) Ecrire le théorème du moment cinétique en G. En projetant l'expression obtenue sur l'axe $\overrightarrow{Oz_2}$, trouver une seconde équation scalaire reliant φ, ψ, θ.

3°) Etude du système Σ (barre + disque).

a) La force de rappel du ressort s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = k\,(\|\overrightarrow{AI}\| - l_0)\,\frac{\overrightarrow{AI}}{\|\overrightarrow{AI}\|}$$

Expliciter $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\frac{\theta}{2}$ et en déduire l'expression de $\vec{F}$.

b) Ecrire le théorème du moment cinétique du système Σ en O. Pour ceci, calculer le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}\,(O, \Sigma/R_0) \text{ et } \frac{d\vec{\sigma}\,(O, \Sigma/R_0)}{dt}/R_0$$

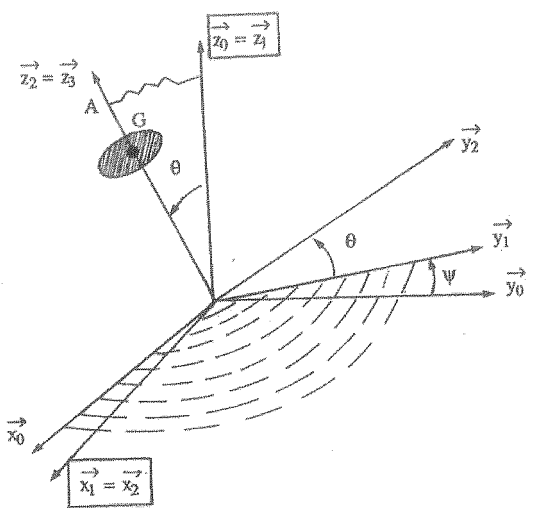
en notant que $\vec{\sigma}\,(O, \Sigma/R_0) = \vec{\sigma}\,(O, D/R_0)$ (moment cinétique du disque).

c) Projeter le théorème du moment cinétique sur les axes $\vec{x}_2$, $\vec{z}_2$ et $\vec{z}_0$ (on remarquera que $\sin\theta$. $\vec{x}_2 = \vec{z}_0 \wedge \vec{z}_2$).

En déduire deux équations du mouvement reliant ρ, ψ, θ.

Extrait, Marrakech, MP2, 87-88

Soit $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe supposé galiléen avec $(O, \vec{z}_0)$ définissant la verticale ascendante et $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$ un repère mobile déduit de R_0 par une rotation autour de l'axe fixe $\vec{z}_0$. (On pose : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$).

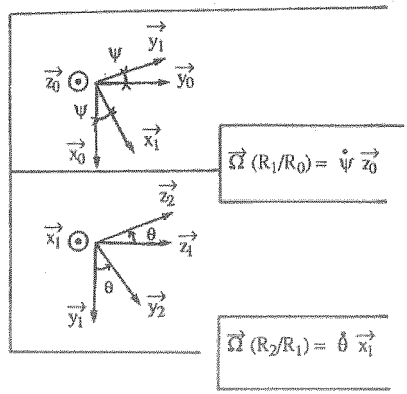


1°) a) On appelle $R_2 = (O, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ le repère lié à la barre ($\overrightarrow{OA} = a\,\vec{z_2}$) et $R_3 = (G, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3} = \vec{z_2})$ celui lié au disque ($\vec{z_3}$ constamment confondu avec l'axe de D).

R_2 se déduit de R_0 par :

◆ Une première rotation autour de $\vec{z_0}$ d'angle ψ (donnant R_1).

◆ Une seconde rotation autour de $\vec{x_1}$ d'angle θ.



D'autre part la position de R_3 dans R_2 est déterminée par la connaissance des paramètres :

◆ ρ : qui permet de définir la position de G sur B.

◆ φ : la rotation propre du disque D autour de son axe.

Il en résulte que le nombre de degré de liberté du système Σ dans son mouvement par rapport à R_0 est égal à 4.

b) Soit $A^F_B(O) = \begin{cases} \vec{R_1} \\ \vec{m_1}(O) \end{cases}$ le torseur des actions de liaison en O.

Cette liaison étant sphérique parfaite, on démontre que :

$$\boxed{\vec{m_1}(O) = \vec{0}} \qquad (1)\ \text{(cf cours)}$$

c) de la même manière, si on appelle $A^B_D(G) = \begin{cases} \vec{R_2} \\ \vec{m_2}(G) \end{cases}$ le torseur des actions de liaison entre le disque et la barre donné par ses éléments de réduction en G.

On a : $$\boxed{\vec{R_2}.\vec{z_2} = \vec{m_2}(G).\vec{z_2} = 0} \qquad (2)$$

et ce car la liaison (barre - disque) est une liaison verrou parfaite.
En effet, la puissance des efforts de liaison doit être nulle dans ce cas. L'expression de cette

puissance est : $\mathcal{P}(B \leftrightarrow D) = A^B_D(G).C(G, D/B)$

où $C(G, D/B)$ est le torseur cinématique en G du disque D considéré en mouvement par rapport à la barre B.

$$C(G, D/B) = \begin{cases} \vec{\Omega}(D/B) \\ \vec{V}(G/B) = \dfrac{d}{dt}(\rho \vec{z_2})/R_2 = \dot{\rho} \vec{z_2} \end{cases}$$

$\mathcal{P}(B \leftrightarrow D) = 0 \quad \forall \dot{\varphi}$ et $\forall \dot{\rho}$ permet de dégager directement le résultat (2).

2°) Etude du disque seul.

a) La relation fondamentale de la dynamique appliquée au centre de masse G s'écrit :

$$\boxed{m \vec{\Gamma}(G/R_0) = \Sigma \vec{F}ext = \vec{R_2} + \vec{P}} \qquad (3)$$

où $\vec{P} = -m g \vec{z_0}$ est le poids du disque.

En projetant la relation (3) sur $\vec{z_2}$ et en considérant (2), on obtient :

$$m \frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}/R_0 . \vec{z_2} = -m g \vec{z_0} . \vec{z_2} = -m g \cos\theta$$

ou encore : $$m \frac{d}{dt}(\vec{V}(G/R_0).\vec{z_2}) - \vec{V}(G/R_0) . \frac{d\vec{z_2}}{dt}/R_0 = -mg\cos\theta$$

Avec $$\vec{V}(G/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/R_0 = \dot{\rho} \vec{z_2} + \rho \frac{d\vec{z_2}}{dt}/R_0$$

et $$\frac{d\vec{z_2}}{dt}/R_0 = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{z_2} = (\dot{\theta}\vec{x_1} + \dot{\psi}\vec{z_0}) \wedge \vec{z_2} = -\dot{\theta} \vec{y_2} + \dot{\psi} \sin\theta \vec{x_2}$$

On a en définitive : $$\boxed{\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) + m g \cos\theta = 0} \qquad (4)$$

b) Pour ce qui concerne le théorème du moment cinétique en G, on a :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(G, D/R_0))/R_0 = \vec{m_2}(G)} \qquad (5)$$

Avec $\vec{\sigma}(G, D/R_0) = J(G, D) \vec{\Omega}(D/R_0)$

où $$J(G,D) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} (\vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3}) \\ ou \\ (\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}) \end{matrix}$$

est la matrice centrale d'inertie exprimée relativement à l'une des deux bases $(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ ou $(\vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$. (Le choix entre celles-ci étant arbitraire car il s'agit d'un solide de révolution d'axe $\vec{z_2} = \vec{z_3}$).

et $$\boxed{\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{x_2} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{y_2} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z_2}}$$

est le vecteur rotation instantanée du disque en mouvement par rapport à R_0.

Il en résulte :

$$\boxed{\vec{\sigma}(G, D/R_0) = \frac{mR^2}{4}(\dot{\theta}\,\vec{x_2} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{y_2}) + \frac{mR^2}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z_2}} \qquad (6)$$

La projection de (5) sur $\vec{z_2}$ donne en tenant compte de (2) et de (6), la deuxième équation scalaire suivante : $$\boxed{\frac{mR^2}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = K_1} \qquad (7)$$

où K_1 est une constante d'intégration. (7) est en plus une intégrale première du mouvement.

3°) a) On a $$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} = a(\vec{z_0} - \vec{z_2})$$

Soit $$\| \overrightarrow{AI} \| = a\sqrt{2(1-\cos\theta)} = a\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

La force de rappel $\vec{F}$ a donc pour expression (pour θ petit différent de zéro) :

$$\boxed{\vec{F} = k\left(a - \frac{l_0}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)(\vec{z_0} - \vec{z_2})} \qquad (8)$$

b) Le moment cinétique en O du système Σ en mouvement par rapport à R_0 est :

$$\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0) = \vec{\sigma}(O, D/R_0) + \vec{\sigma}(O, B/R_0))$$

or $$\vec{\sigma}(O, B/R_0) = \vec{0}$$ (car la barre est de masse négligeable)

et $$\vec{\sigma}(O, D/R_0) = \vec{\sigma}(G, D/R_0) + m\,\overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

On trouve alors :

$$\boxed{\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0) = \left(\frac{mR^2}{4} + m\rho^2\right)(\dot{\theta}\,\vec{x_2} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{y_2}) + \frac{mR^2}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z_2}} \qquad (9)$$

D'autre part le théorème du moment cinétique appliqué en O au système Σ s'écrit :

$$\frac{d\,\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)}{dt}/R_0 = \vec{m_1}(O) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

$$\frac{d\,\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)}{dt}/R_0 = \left[(mg\rho - a^2k)\sin\theta + al_0k\cos\frac{\theta}{2}\right]\vec{x_2}$$

On obtient alors :

◆ **En projetant sur $\vec{x_2}$:**

$$\left(\frac{mR^2}{4} + m\rho^2\right)\ddot{\theta} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\theta} - \left(\frac{mR^2}{4} + m\rho^2\right)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{mR^2}{2}\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)$$
$$= (mg\rho - a^2k)\sin\theta + al_0k\cos\frac{\theta}{2} \qquad (10)$$

◆ **En projetant sur $\vec{z_2}$:**

$$\frac{mR^2}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = K_1 \qquad \text{(constante)} \qquad (11)$$

◆ **En projetant sur $\vec{z_0}$:**

$$\left(\frac{mR^2}{4} + m\rho^2\right)\dot{\psi}\sin^2\theta + \frac{mR^2}{2}\cos\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = K_2 \text{ (constante)} \qquad (12)$$

L'équation (11) a déjà été trouvée (cf 2.b)) si on s'en sert pour simplifier (10) et (12) celles-ci deviennent respectivement :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{mR^2}{4} + m\rho^2\right)\dot{\theta}\right) - \left(\frac{mR^2}{4} + m\rho^2\right)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + K_1\dot{\psi}\sin\theta = (mg\rho - a^2k)\sin\theta + al_0k\cos\frac{\theta}{2}} \qquad (13)$$

$$\boxed{\left(\frac{mR^2}{4} + m\rho^2\right)\dot{\psi}\sin^2\theta + K_1\cos\theta = K_2} \qquad (14)$$

On obtient ainsi deux équations scalaires du mouvement qui relient entre eux les paramètres ρ, ψ, θ et leur dérivée.

18 - Mouvement d'une sphère en liaison verrou autour d'un axe mobile.

Soit R_0 (O, x_0, y_0, z_0) un repère galiléen orthonormé direct par rapport auquel on se propose d'étudier le mouvement d'un système Σ constitué :
- d'une tige (T) rectiligne Oz, de section et de masse négligeables qui peut tourner librement autour de son extrémité O qui est fixe,
- d'une sphère pleine (S) homogène de masse M de rayon a et de centre G.

(S) est traversée suivant son axe Gz par la tige (T). Il peut glisser suivant la tige et tourner autour d'elle.

On néglige tous les frottements (c'est-à-dire les différents contacts considérés comme nuls) et on suppose que la liaison en O est parfaite.

Les paramètres de mouvement de Σ dans le repère R_0 sont les trois angles d'Euler habituels (ψ, θ, φ) et $\overrightarrow{OG} = \rho(t)\ \vec{z}$. *(On prendra Oz_0 verticale ascendante).*

1°) Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de G par rapport à R_0.

2°) Dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$, déterminer : $\vec{\Omega}(\Sigma/R_0)$ et $J(O, \Sigma)$.

3°) Déterminer le moment cinétique du système par rapport à R_0 en O.

4°) Déterminer $\vec{\delta}(O, \Sigma/R_0)$.

5°) Ecrire les équations du mouvement à partir des théorèmes généraux, montrer qu'il existe deux intégrales premières du mouvement.

6°) Déterminer l'énergie cinétique du système par rapport à R_0.

7°) Donner l'énergie potentielle du système. En déduire une troisième intégrale première du mouvement.

8°) Montrer que les éléments de réduction en G du torseur des forces de liaison sont :

$$\vec{R} = X\vec{u} + Y\vec{w} \ ; \ \vec{m}(G, \mathcal{T}_2) = L\vec{u} + N\vec{w}$$

9°) Appliquer le théorème de la résultante dynamique à S.
Dans le cas particulier où l'axe (Oz) reste confondu avec (Oz_0), déterminer $\rho(t)$. On donne : $\rho(0) = 0$ *et* $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$.

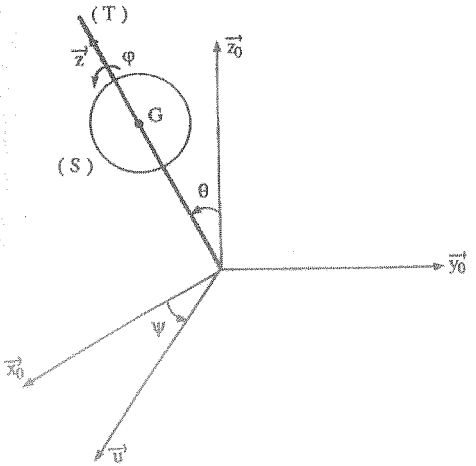
Casablanca, PC2, Janvier 1988

Soit $R_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère galiléen orthonormé direct. Le mouvement du système Σ par rapport à R_0 dépend des paramètres :

- ψ et θ qui déterminent la position de l'axe Oz (donc de la tige) dans l'espace.
- ρ qui définit la position du centre d'inertie de la sphère sur la tige : $\overrightarrow{OG} = \rho\vec{z}$.

◆ φ qui représente la rotation de la sphère autour de la tige.

On en déduit que le nombre de degré de liberté du système Σ dans son mouvement par rapport à R_0 est égal à 4.



On rappelle que les angles d'Euler sont :

◆ $\psi = (\vec{x_0}, \vec{u}) = (\vec{y_0}, \vec{v})$ mesuré autour de $\vec{z_0}$

◆ $\theta = (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{z_0}, \vec{z})$ mesuré autour de $\vec{u}$

◆ $\varphi = (\vec{u}, \vec{x}) = (\vec{w}, \vec{y})$ mesuré autour de $\vec{z}$

On a alors :

◆ $\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u}$

◆ $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z}$

1°) Détermination des vecteurs vitesse et accélération de G par rapport à R_0.

On a par définition : $$\vec{V}(G/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}/R_0 = \dot{\rho}\,\vec{z} + \rho\frac{d\vec{z}}{dt}/R_0$$

La formule de dérivation d'un vecteur dans deux repères différents donne :

$$\frac{d\vec{z}}{dt}/R_0 = \frac{d\vec{z}}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{z}$$

Avec $R_1 = (O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ le repère lié à la tige (T)

$$\vec{V}(G/R_0) = \dot{\rho}\,\vec{z} + \rho(\dot{\psi}\,\vec{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{u}) \wedge \vec{z}$$

Soit encore : $$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = \rho\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u} - \rho\,\dot{\theta}\,\vec{w} + \dot{\rho}\,\vec{z}}$$

◆ $\vec{\Gamma}(G/R_0) = \frac{d}{dt}[\vec{V}(G/R_0)]/R_0$

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \overbrace{(\rho\,\dot{\psi}\sin\theta)}\,\vec{u} + \rho\,\dot{\psi}\sin\theta\frac{d\vec{u}}{dt}/R_0 - \overbrace{\rho\dot{\theta}}\,\vec{w} + \rho\,\dot{\theta}\frac{d\vec{w}}{dt}/R_0 + \ddot{\rho}\,\vec{z} + \dot{\rho}\frac{d\vec{z}}{dt}/R_0$$

Avec : $\dfrac{d\vec{u}}{dt}/R_0 = \dot{\psi}\,\vec{v}$ et $\dfrac{d\vec{w}}{dt}/R_0 = -\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{u} + \dot{\theta}\,\vec{z}$

On trouve :

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{bmatrix} \rho\ddot{\psi}\sin\theta + 2\rho\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{\rho}\dot{\psi}\sin\theta \\ -\rho\ddot{\theta} - 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\psi}^2\sin^2\theta \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

2°) Le système Σ se réduit en réalité à la sphère (S) car on suppose que la tige (T) a une masse négligeable. Il en résulte que :

$$\vec{\Omega}(\Sigma/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z}$$

Remarque : La notion de vecteur rotation d'un système Σ n'est pas définie lorsque (Σ) est constitué de deux ou plusieurs solides ayant des mouvements propres les uns par rapport aux autres.

$$J(O, \Sigma) = J(O, S) = J(G, S) + J(O, G\{M\})$$

et ce par application du **théorème de Kœnig** relatif à l'opérateur d'inertie. $(J(G, S)$ étant la matrice centrale d'inertie de la sphère $S)$.

On obtient :

$$J(O, \Sigma) = \begin{bmatrix} M\left(\rho^2 + \frac{2R^2}{5}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\rho^2 + \frac{2R^2}{5}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2MR^2}{5} \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

3°) Calcul du moment cinétique $\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)$.

Le point O n'étant pas lié à S (car la distance $\|\overrightarrow{OG}\|$ varie) on doit par conséquent écrire :

$$\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0) = \vec{\sigma}(O, S/R_0) = \vec{\sigma}(G, S/R_0) + M\,\overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

On obtient :

$$\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0) = \begin{bmatrix} \left(\frac{2MR^2}{5} + M\rho^2\right)\dot{\theta} \\ \left(\frac{2MR^2}{5} + M\rho^2\right)\dot{\psi}\sin\theta \\ \frac{2MR^2}{5}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

4°) **Calcul du moment dynamique** $\vec{\delta}(O, \Sigma/R_0)$.

O étant un point fixe, on a : $\vec{\delta}(O, \Sigma/R_0) = \dfrac{d\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)}{dt}/R_0$

Soit encore : $\dfrac{d\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)}{dt}/R_0 = \dfrac{d\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)$

On obtient en définitive :

$$\vec{\delta}(O, \Sigma/R_0) = \begin{cases} \left(\frac{2MR^2}{5} + M\rho^2\right)\ddot{\theta} + 2M\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \frac{2MR^2}{5}\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta \\ \quad - M\rho^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ \left(\frac{2MR^2}{5} + M\rho^2\right)(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) + 2M\rho\dot{\rho}\dot{\psi}\sin\theta \\ \quad - \frac{2MR^2}{5}\dot{\theta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \\ \frac{2MR^2}{5}(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) \end{cases} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$$

5°) Pour appliquer les théorèmes généraux au système Σ il faut d'abord faire le bilan des forces qui s'exercent sur ce dernier, celles-ci sont :

- le poids de la sphère : $\vec{P} = -Mg\,\vec{z_0}$
- l'effet de la liaison en O représenté par le torseur :

$$\mathcal{T}_l = \begin{cases} \vec{R_l} \text{ (force inconnue)} \\ \vec{m_l}(O) = \vec{0} \text{ (car il s'agit d'une liaison sphérique parfaite)} \end{cases}$$

Le théorème du moment dynamique appliqué en O nous permet alors de dégager les trois équations différentielles suivantes :

- **projection sur** $\vec{u}$:

$$\left(\frac{2MR^2}{5} + M\rho^2\right)\ddot{\theta} + 2M\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \frac{2MR^2}{5}\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta - M\rho^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta = +Mg\rho\sin\theta \quad (1)$$

- **projection sur** $\vec{w}$:

$$\left(\frac{2MR^2}{5} + M\rho^2\right)(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) + 2M\rho\dot{\rho}\dot{\psi}\sin\theta - \frac{2MR^2}{5}\dot{\theta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = 0 \quad (2)$$

◆ **projection sur** $\vec{z}$: $$\frac{2MR^2}{5}\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=0 \qquad (3)$$

Le moment résultant étant porté par $\vec{u}$ (1) **et le solide considéré étant de révolution**, on en déduit automatiquement les deux intégrales premières du mouvement suivantes :

◆$\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)\,.\,\vec{z_0}=K_1$

ou encore : $$\left(\frac{2MR^2}{5}+M\rho^2\right)\dot{\psi}\sin^2\theta+\frac{2MR^2}{5}\cos\theta(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=K_1 \qquad (4)$$

◆ $\vec{\sigma}(O, \Sigma/R_0)\,.\,\vec{z}=K_2$

ou encore : $$\frac{2MR^2}{5}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=K_2 \qquad (5)$$

qui n'est rien d'autre que la forme intégrée de l'équation (3).

Remarque : Toutes les équations déduites de l'application du théorème de **la résultante dynamique** à Σ contiennent des inconnues de liaison (composantes arbitraires de $\vec{R_1}$). On n'a donc pas d'équations de mouvement supplémentaires à partir de ce théorème.

6°) **L'énergie cinétique du système** Σ en mouvement par rapport à R_0 est donnée par :

$$2Ec(\Sigma/R_0)=2Ec(S/R_0)=\vec{\Omega}(S/R_0).J(G,S)\,\vec{\Omega}(S/R_0)+M\,[\vec{V}(G/R_0)]^2$$

ou encore :

$$\boxed{2Ec(S/R_0)=M\dot{\rho}^2+\left(\frac{MR^2}{5}+M\rho^2\right)\left(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta\right)+\frac{MR^2}{5}\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)^2}$$

7°) Soit $\mathcal{T}_2=\begin{cases}\vec{R}\\ \vec{m}(G)\end{cases}$ le torseur des forces de liaison entre (T) et (S) donné par ses éléments de réduction en G.

La liaison tige-sphère étant parfaite, la puissance développée par $\mathcal{T}_2$ (qui n'est rien d'autre que la puissance d'inter-effort) est nulle. Il en est de même pour les forces de liaison en O.

Le théorème de l'énergie cinétique dont l'énoncé général est $\frac{dEc}{dt}=\mathcal{P}\text{ext}+\mathcal{P}\text{int}$ se réduit alors à l'écriture suivante : $$\frac{dEc}{dt}=\mathcal{P}(\vec{P})=-Mg\,\vec{z_0}.\vec{V}(G/R_0) \qquad (6)$$

L'énergie potentielle du système est donc : $Ep=mg\,\vec{z_0}.\vec{OG}$ + constante

ou encore $$\boxed{Ep=mg\rho\cos\theta+\text{constante}}$$

Ce résultat est obtenu directement en identifiant le second membre de (6) avec $-\frac{dEp}{dt}$ et en intégrant par rapport à t.

L'expression de l'intégrale première de l'énergie cinétique est donc immédiate ; elle est donnée par : $Ec + Ep = K_3$ ou encore :

$$\boxed{M\dot{\rho}^2 + \left(\frac{MR^2}{5} + M\rho^2\right)\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{MR^2}{5}\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)^2 + 2Mg\rho\cos\theta = K_3} \qquad (7)$$

8°) Comme on l'a mentionné plus haut, dire que la liaison tige-sphère est une liaison parfaite, c'est affirmer que la puissance des inter-efforts est nulle ; or celle-ci est par définition donnée par :

$\mathcal{P}(T\leftrightarrow S)$ = le produit du torseur des actions de (T) sur (S) par le torseur cinématique de (S) par rapport à (T) et ce pour tout instant t.

Pour notre cas, la liaison tige-sphère est une liaison verrou et la puissance des inter-efforts est égale à :

$$\mathcal{P}(T\leftrightarrow S) = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(G) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/T) = \dot{\varphi}\,\vec{z} \\ \vec{V}(G \in S/T) = \dot{\rho}\,\vec{z} \end{Bmatrix}$$

Soit encore : $$\boxed{\mathcal{P}(T\leftrightarrow S) = \dot{\rho}\,(\vec{R}.\vec{z}) + \dot{\varphi}\,(\vec{m}(G).\vec{z})}$$

et comme la liaison est parfaite, on a : $\mathcal{P}(T\leftrightarrow S) = 0 \qquad \forall\ \dot{\rho}$ et $\forall\ \dot{\varphi}$

ce qui entraîne $\vec{R}.\vec{z} = 0$ et $\vec{m}(G).\vec{z} = 0$ ou encore :

$$\boxed{\vec{R} = X\vec{u} + Y\vec{w}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{m}(G) = L\vec{u} + N\vec{w}}$$

Avec X, Y, L et M des inconnues supplémentaires à déterminer.

9°) Si le système à étudier est réduit à S, $\mathcal{T}_2$ doit être considéré comme un torseur de forces extérieures et le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$M\vec{\Gamma}(G/R_0) = -Mg\,\vec{z_0} + \vec{R}$$

Soit en projetant respectivement sur $\vec{u}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ les équations.

$$M\left(\rho\ddot{\psi}\sin\theta + 2\rho\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{\rho}\dot{\psi}\sin\theta\right) = X \qquad (8)$$

$$M\left(-\rho\ddot{\theta} - 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = -Mg\sin\theta + Y \qquad (9)$$

$$M\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\psi}^2\sin^2\theta\right) = -Mg\cos\theta \qquad (10)$$

Si on suppose en plus que l'axe Oz reste confondu avec Oz_0 c'est-à-dire que θ reste constant au cours du temps (égal à zéro), on obtient (à partir de l'équation (10)) : $\ddot{\rho} = -g$

Soit en intégrant deux fois : $\rho = -g\,\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$

C_1 et C_2 étant des constantes d'intégration.

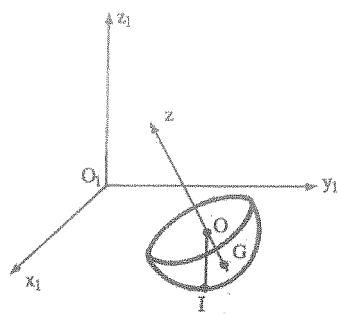
En utilisant les conditions initiales : $\rho(O) = 0$ et $\dot{\rho}(O) = \dot{\rho}_0$

on a en définitive : $\boxed{\rho(t) = -\frac{g\,t^2}{2} + \dot{\rho}_0\, t}$

Le mouvement de G sur l'axe verticale Oz_0 est un mouvement rectiligne uniformément varié.

19 - Mouvement d'une demi-sphère en contact ponctuel avec un plan fixe.

On considère une demi-sphère pleine, de rayon a, homogène, de masse m, on appelle O le centre du cercle de base ; G est le centre de masse de ce solide S (on admettra que $|OG| = \frac{3a}{8}$). A ce solide est lié un repère R (G, x, y, z) orthonormé direct de telle sorte que $G\vec{z}$ soit porté par $\overrightarrow{GO}$ et soit de même sens. (voir figure).



Cette demi-sphère est en contact tangentiel en I avec le plan $O_1x_1y_1$ d'un repère terrestre orthonormé direct R_1 (O_1, x_1, y_1, z_1) que l'on assimile à un repère galiléen pour le problème étudié. Le solide S est situé dans la région $O_1z_1 \geq 0$, le point O restant à la côte a dans R_1.

La position de S est définie par les coordonnées (X, Y, Z) de G dans R_1 et par les angles d'Euler ψ, θ, φ déterminés par la succession des repères orthonormés directs suivants :

$$R_1'(G; x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{\psi} R_2(G; u, v, z_1) \xrightarrow{\theta} R_3(G; u, w, z) \xrightarrow{\varphi} R(G; x, y, z)$$

R_1' a ses axes respectivement parallèles à ceux de R_1 et de même sens.

Le plan $O_1x_1y_1$ exerce en I sur la demi-sphère une force $\vec{R}$. Les frottements au point I sont supposés nuls.

L'accélération de la pesanteur est $-g.\vec{z_1}$

1°) Exprimer la condition géométrique de contact $[Z = a\,(1 - \frac{3}{8}\cos\theta)]$.

2°) Déterminer le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}\,(S/R_1)$ *de S dans son mouvement par rapport à* R_1 *[repère de projection de* R_2 *et* R_3*].*

3°) Ecrire la matrice d'inertie de S en O (M^S_{Oxyz})*, puis en G* (M^S_{Gxyz})*. On posera dans la suite*

$$M^S_{Gxyz} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{uwz}$$

4°) Calculer le moment cinétique de S en G : $\vec{\sigma}(G, S/R_1)$*(repères de projection* R_3 *et* R_2*).*
Calculer l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à R_1 *:* $T(S/R_1)$.

5°) Ecrire le théorème du centre de masse. En déduire $\ddot{X}$ *et* $\ddot{Y}$.
Calculer les moments des forces extérieures s'exerçant sur S. En déduire δ_{Gx} *et* δ_{Gz1}.
Que peut-on dire alors de σ_{Gx} *et de* σ_{Gz1} *? (Justifier votre réponse).*
Ecrire 2 intégrales premières du mouvement de S.

6°) Trouver une 3ème intégrale première par application du théorème de l'énergie cinétique.
Montrer que l'étude se ramène à celle d'un mouvement de type :

$$\dot{\theta}^{\,2}.g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)\ ,\ g(\theta) > 0 \quad \forall\,\theta.$$

Fès, PC2, MP2, 86-87

S est un solide en mouvement par rapport à $R_1 = (O_1; \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, sa position est d'une façon générale définie par les coordonnées (X, Y, Z) de G dans R_1 et par les angles d'Euler habituels (ψ, θ, φ). L'existence d'une ou de plusieurs liaisons permet d'établir des relations entre ces paramètres et par conséquent de définir le nombre de degré de liberté.

1°) Dans le cas présent S est une demi-sphère qui reste en contact tangentiel en I avec le plan $O_1x_1y_1$, ceci se traduit par :

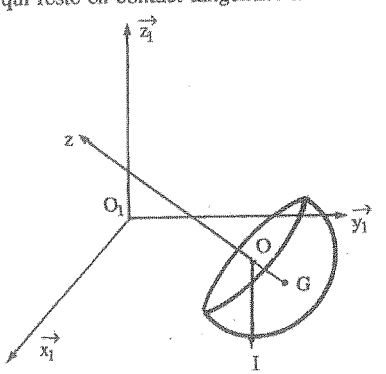
$$\overrightarrow{O_1I}\ .\ \vec{z_1} = 0$$

ou encore : $\quad Z = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{IO})\ .\ \vec{z_1}$

et comme en plus on impose : $\overrightarrow{OI} = a\vec{z_1}$, on obtient la relation :

$$\boxed{Z = a\,(1 - \frac{3}{8}\cos\theta)}$$

et le nombre de degré de liberté est égal à 5.



2°) **Le vecteur rotation instantanée de S par rapport à R_1** est donné par :

$$\vec{\Omega}(S/R_1) = \vec{\Omega}(R/R_1) = \vec{\Omega}(R/R_3) + \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1') + \vec{\Omega}(R_1'/R_1)$$

avec : $\vec{\Omega}(R/R_3) = \dot{\varphi}\,\vec{z}$ (rotation positive autour de $\vec{z}$ d'angle φ)

$\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \dot{\theta}\,\vec{u}$ (rotation positive autour de $\vec{u}$ d'angle θ)

$\vec{\Omega}(R_2/R_1') = \dot{\psi}\,\vec{z_1}$ (rotation positive autour de $\vec{z_1}$ d'angle ψ)

$\vec{\Omega}(R_1'/R_1) = \vec{0}$ (translation)

Il en résulte que : $\boxed{\vec{\Omega}(S/R_1) = \dot{\varphi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\vec{z_1}}$

3°) S est un solide de révolution d'axe $O\vec{z}$, la matrice d'inertie en O exprimée dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est donc de la forme :

$$M^{S}_{Oxyz} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

elle présente ce qu'on appelle une symétrie de révolution. **Cette matrice reste inchangée lorsqu'on l'exprime dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ et ce car le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ $(\equiv (O, \vec{u}, \vec{w}))$ est un plan propre d'inertie.**

On a donc $M^{S}_{Oxyz} = M^{S}_{Ouwz}$

Les éléments de cette matrice étant donnés par :

$$A_1 = \iiint_S (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m = \iiint_S (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m$$

$$C_1 = \iiint_S (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m$$

Avec $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}v = \rho\, r^2 \sin\beta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha.$

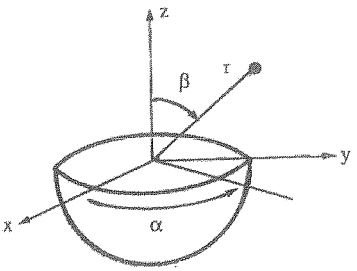
où ρ est la densité volumique de masse et (r, α, β) les coordonnées sphériques d'une particule quelconque de S. On a alors :

$x = r\,sin\beta\,cos\alpha$

$y = r\,sin\beta\,sin\alpha$

$z = r\,cos\beta$

Avec $0 \le r \le a$; $0 \le \alpha \le 2\pi$ et $\frac{\pi}{2} \le \beta \le \pi$



Pour déterminer A_1 et C_1 , il suffit de calculer les deux intégrales suivantes :

$$J_1 = \iiint_S z^2\,dm \qquad J_2 = \iiint_S r^2\,dm$$

En effet, on a par définition : $A_1 = \frac{J_1 + J_2}{2}$ et $C_1 = J_2 - J_1$

On obtient $J_1 = \frac{ma^2}{5}$ $J_2 = \frac{3ma^2}{5}$ $A_1 = \frac{2ma^2}{5}$ $C_1 = \frac{2ma^2}{5}$

Pour écrire la matrice centrale d'inertie M^S_{Guwz}, on applique le théorème de Kœnig ; ce dernier nous permet d'avoir :

$$M^S_{Ouwz} = M^S_{Guwz} + M^{G(m)}_{Ouwz}$$

où $M^{G(m)}_{Ouwz}$ est la matrice d'inertie du solide S' réduit au centre d'inertie G de S et affecté de la masse totale de ce dernier et ce dans le repère $Ouwz$, on a alors :

$$M^{G(m)}_{Ouwz} = \begin{bmatrix} \frac{9ma^2}{64} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9ma^2}{64} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit par une simple différence :

$$M^S_{Guwz} = \begin{bmatrix} \frac{83ma^2}{320} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{83ma^2}{320} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{5} \end{bmatrix}$$

On posera par la suite :

$$M^S_{Guwz} = J(G,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{uwz}$$

4°) a) **Le moment cinétique en** G du solide S en mouvement par rapport à R_1 est obtenu à partir de la relation :

$$\boxed{\vec{\sigma}(G, S/R_1) = J(G, S)\ \vec{\Omega}(S/R_1)}$$

La matrice d'inertie $J(G, S)$ et le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R_1)$ étant exprimés dans la même base (ici la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$), on a :

$$\boxed{\vec{\sigma}(G, S/R_1) = A\,\dot{\theta}\,\vec{u} + A\,\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + C\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z}}$$

D'autre part, on obtient facilement l'expression de l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à R_1 à partir de la relation :

$$\boxed{2T(S/R_1) = \vec{\Omega}(S/R_1).J(G, S)\ \vec{\Omega}(S/R_1) + m\,[\vec{V}(G/R_1)]^2}$$

Il suffit pour ce faire de calculer le vecteur $\vec{V}(G/R_1) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1G}}{\mathrm{d}t}\right/_{R_1}$

On obtient : $\vec{V}(G/R_1) = \dot{x}\,\vec{x_1} + \dot{y}\,\vec{y_1} + \dfrac{3a}{8}\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z_1}$

Soit en définitive :

$$\boxed{2T(S/R_1) = A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{9a^2}{64}\,\dot{\theta}^2\sin^2\theta)}$$

5°) **Les efforts extérieurs** exercés sur le solide S peuvent être représentés par :

◆ Le torseur $\mathcal{P}$ dû à l'effet de la pesanteur de résultante $\vec{P} = -mg.\vec{z_1}$ et de moment nul en G.

◆ Le torseur $\mathcal{L}$ dû à l'effet de la liaison de contact entre le plan $O_1x_1y_1$ (supposé matérialisé) et le solide S. $\mathcal{L}$ a pour résultante le vecteur $\vec{R} = R\,\vec{z_1}$ (avec R inconnue positive) car on suppose les frottements nuls, et pour moment en I le vecteur nul.

Dans ces conditions, le théorème du centre de masse $m\,\vec{\gamma}(G/R_1) = \vec{P} + \vec{R} = (R - mg)\,\vec{z_1}$, nous permet de dégager les deux intégrales premières suivantes :

$$\boxed{\vec{V}(G/R_1).\vec{x_1} = \dot{X} = C_1} \qquad (1)$$

$$\boxed{\vec{V}(G/R_1).\vec{y_1} = \dot{Y} = C_2} \qquad (2)$$

Avec C_1 et C_2 des constantes d'intégration.

D'autre part le théorème du moment dynamique (appliqué en G) donne :

$$\vec{\delta}(G, S/R_1) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G, S/R_1)\right]/R_1 = \vec{m}_G(\mathcal{P}) + \vec{m}_G(\mathcal{L})$$

Avec $\vec{m}_G(\mathcal{P}) = \vec{0}$ et $\vec{m}_G(\mathcal{L}) = \vec{GI} \wedge \vec{R}$

On trouve $$\boxed{\vec{\delta}(G, S/R_1) = -\frac{3a}{8} R \sin\theta \, \vec{u}}$$

Ceci implique que $$\delta_{G_z} = \vec{\delta}(G, S/R_1) \cdot \vec{z} = 0$$

et $$\delta_{G_{z_1}} = \vec{\delta}(G, S/R_1) \cdot \vec{z_1} = 0$$

or $$\delta_{G_z} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G, S/R_1)\right]/R_1 \cdot \vec{z}$$

ou encore $$\delta_{G_z} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G, S/R_1)\right] \cdot \vec{z}\,] - \vec{\sigma}(G, S/R_1) \cdot \frac{d\vec{z}}{dt}\Big/R_1$$

avec $$\vec{\sigma}(G, S/R_1) \cdot \frac{d\vec{z}}{dt}\Big/R_1 = 0$$

(Propriété d'un solide de révolution d'axe $(G, \vec{z})$)

donc : $$\boxed{\sigma_{G_z} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = C_3} \qquad (3)$$

de même que $$\delta_{G_{z_1}} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G, S/R_1)\right]/R_1 \cdot \vec{z_1}$$

$$\delta_{G_{z_1}} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G, S/R_1)\right] \cdot \vec{z_1}\,] - \vec{\sigma}(G, S/R_1) \cdot \frac{d\vec{z_1}}{dt}\Big/R_1 = 0$$

$\vec{z_1}$ étant fixe dans R_1, il en résulte que :

$$\boxed{\sigma_{G_{z_1}} = A\dot{\psi}\sin^2\theta + C\cos\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = C_4} \qquad (4)$$

C_3 et C_4 sont des constantes d'intégration et (I_3) et (I_4) des intégrales premières du mouvement.

6°) Comme le contact entre le solide (S) et le plan $O_1x_1y_1$ a lieu sans frottement, la puissance des efforts de liaison est nulle et par conséquent on est en mesure d'écrire l'intégrale prmière de l'énergie cinétique (le poids dérive toujours d'un potentiel), en effet :

$$P(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P}.\overrightarrow{V}(G/R_1) = -mg\ \overrightarrow{z_1}.\ \frac{d\overrightarrow{O_1G_1}}{dt}_{/R_1}$$

ou encore $$P(\overrightarrow{P}) = \frac{d}{dt}\left[-mg\ \overrightarrow{z_1}.\overrightarrow{O_1G_1}\right] = -\frac{dEp}{dt}$$

ceci donne : $$Ep = (mg\ \overrightarrow{z_1}).(-\frac{3a}{8}\overrightarrow{z}) + \text{constante}$$

Soit $$\boxed{Ep = -\frac{3a}{8}\ mg\cos\theta + \text{constante}}$$

L'intégrale première de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\boxed{A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{9a^2}{64}\dot{\theta}^2\sin^2\theta) - \frac{3a}{8}mg\cos\theta + C_5} \qquad (5)$$

En prenant en considération les relations (1), (2) et (3), (5) devient :

$$\left[A + \frac{9ma^2}{64}\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2 = C_5 + \frac{3a}{8}\ mg\cos\theta - m\left(C_1^2 + C_2^2\right) - \frac{C_3^2}{C} - A\ \dot{\psi}^2\sin^2\theta \qquad (6)$$

D'autre part, (4) nous permet d'écrire :

$$A\ \dot{\psi} = \frac{C_4 - C_3\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

et (6) devient :

$$\left[A + \frac{9ma^2}{64}\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2 = C_5 + \frac{3a}{8}\ mg\cos\theta - m\left(C_1^2 + C_2^2\right) - \frac{C_3^2}{C} - \frac{(C_4 - C_3\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}$$

Ce qui permet d'écrire sous la forme :

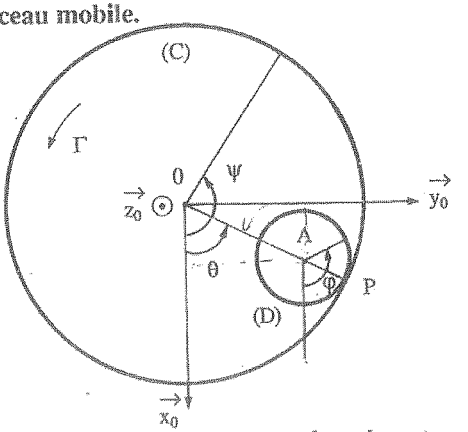
$$g(\theta)\ .\ \dot{\theta}^2 = f(\sin\theta, \cos\theta) \qquad (7)$$

Avec $$g(\theta) = \left(A + \frac{9ma^2}{64}\sin^2\theta\right) > 0 \qquad \forall\ \theta$$

Remarque : On rencontre très souvent des problèmes de ce type dont la résolution des équations du mouvement se ramène à la résolution d'une équation du type (7), on parle dans ce cas de **mouvement à paramètre principal** (θ).

20 - Mouvement d'un disque en contact ponctuel avec l'intérieur d'un cerceau mobile.

Le système matériel [(C), (D)] mobile dans le plan fixe (Ox, Oy), (Ox vertical descendant) comporte un cerceau rigide, homogène (C), de centre O fixe et un disque circulaire matériel, rigide et homogène de masse m, de centre A.
Le cerceau (C) peut tourner sans frottement autour de O. Le disque (D) demeure au contact et à l'intérieur du cerceau (C), (voir figure).



Le frottement de contact en P entre (C) et (D) est suffisant pour assurer le roulement sans glissement de (C) sur (D), mais on néglige le couple de résistance au roulement.
On pose OA = a , AP = b (a et b constantes données, avec a > b).

1°) a) Déterminer la matrice d'inertie $[J_C(O)]$ du cerceau au centre O.
b) Déterminer la matrice d'inertie $[J_D(A)]$ du disque au centre A.

2°) On définit le mouvement du système [(C), (D)] par les paramètres ψ, θ et φ (voir figure).
ψ : angle d'un rayon matériel de (C) avec Ox.
θ : angle de OP avec Ox.
φ : angle d'un rayon matériel de (D) avec Ox.
Ecrire la condition de liaison entre les dérivées premières :

$\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$ *traduisant l'absence de glissement en P de (D) sur (C).*

3°) On désignera par I le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe Oz_0 normal à son plan et par J le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Az_0, parallèle à Oz_0 passant par le centre d'inertie A.
Exprimer, en fonction des paramètres $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$,

a) le moment cinétique de (D) par rapport à Az_0.

b) le moment cinétique de (D) par rapport à Oz_0.

c) le moment cinétique du système [(C), (D)] par rapport à Oz_0.

4°) En plus des forces de liaison, le système est soumis aux poids de ses divers éléments (accélération de la pesanteur g) et à un couple d'axe Oz_0 d'intensité Γ appliqué à (C). Former les équations différentielles du mouvement du système [(C), (D)].

5°) On suppose Γ, tel que, quel que soit le temps t, $\psi = 0$, former l'équation différentielle du second ordre définissant $\theta(t)$.

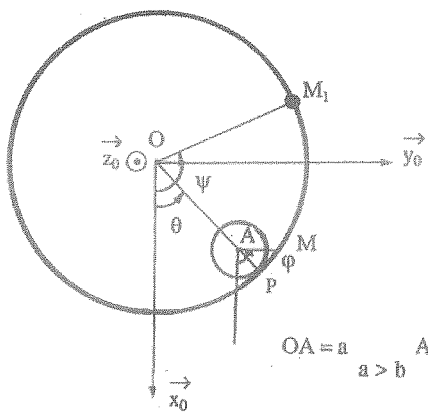
6°) Retrouver la même équation à partir de l'énergie totale du système.

7°) Les mouvements correspondant à de faibles valeurs de θ sont-ils possibles ?

8°) Donner la valeur de Γ en fonction de θ. En déduire sa valeur lorsque θ est faible.

Agadir, PC2, Janvier 1986.

Soit $R_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère orthonormé direct supposé galiléen avec l'axe $(O, \vec{x_0})$ définissant la verticale descendante $(\vec{g} = g\vec{x_0})$. Le nombre de degré de liberté du système $\Sigma = [(C), (D)]$ dans son mouvement par rapport à R_0 est égal à trois. Il s'agit en effet des paramètres :



◆ $\psi = (\widehat{Ox_0}, \widehat{OM_1})$ avec M_1 un point quelconque du cerceau (C). ψ est la rotation propre de (C) autour de (O, z_0).

◆ $\theta = (\widehat{Ox_0}, \widehat{OA})$ est l'angle qui permet de suivre le point A dans son mouvement.

◆ $\varphi = (\widehat{Ax}, \widehat{AM})$ avec M un point quelconque lié à (D) (différent de A), c'est la rotation propre de (D) autour de $(A, \vec{z_0})$.

On appelle $R_1 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z_0})$ avec $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OM_1}}{\|\overrightarrow{OM_1}\|}$ et $\vec{j} = \vec{z_0} \wedge \vec{i}$ le repère lié au cerceau, $R = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z_0})$ avec $\vec{x} = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$ et $\vec{y} = \vec{z_0} \wedge \vec{x}$ le repère lié au disque et

$R_2 = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$ avec $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$ et $\vec{v} = (\vec{z_0} \wedge \vec{u})$ un repère intermédiaire.

Les vecteurs rotation instantanée du cerceau (C) et du disque (D) sont donc respectivement donnés par :

$$\boxed{\vec{\Omega}(C/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z_0}}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\,\vec{z_0}}$$

1°) Le cerceau (C) et le disque (D) sont tous les deux des **solides de révolution** d'axe respectif $(O, \vec{z_0})$ et $(A, \vec{z_0})$. Il en résulte que les matrices d'inertie relativement à R_1 pour (C) et à R pour (D) sont de la forme :

$$[J_C(O)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{z_0})}$$

$$[J_D(A)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z_0})}$$

(C) et (D) étant tous les deux des **solides plans** (contenus dans le plan perpendiculaire à $\vec{z_0}$), on a en plus :

◆ $$\boxed{C_1 = 2A_1 = \int_{M \in D} (a+b)^2 \, dm = M\,(a+b)^2}$$

avec M : masse du cerceau.

◆ $$C_2 = 2A_2 = \iint_{M \in D} r^2 \, dm$$

avec $dm = \sigma\, r\, dr\, d\theta$ (σ : densité surfacique de masse)

$0 \le r \le b$ et $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\boxed{C_2 = 2A_2 = \sigma \left[\int_0^b r^3 \, dr\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] = m\,\frac{b^2}{2}}$$

2°) Par définition, **la vitesse de glissement** de (D) sur (C) est :

$$\vec{V}_g((D)/(C)) = \vec{V}(P/(C)) - \vec{V}(P/(D)),$$

or en considérant le repère R_0, on a : (à partir de la décomposition des mouvements)

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/(C)) + \vec{V}(P \in C/R_0) \qquad (1)$$

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/(D)) + \vec{V}(P \in D/R_0) \qquad (2)$$

La différence [(1) – (2)] permet alors d'écrire :

$$\vec{V}_g((D)/(C)) = \vec{V}(P \in D/R_0) - \vec{V}(P \in C/R_0)$$

D'autre part, **la formule de distribution des vitesses pour les points d'un même solide**, appliquée respectivement à *(D)* et à *(C)* donne :

◆ $$\vec{V}(P \in C/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(C/R_0) \wedge \overrightarrow{OP}$$

avec $\vec{V}(A/R_0) = \dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}_{/R_0} = a\,\dot{\theta}\,\vec{v}$

Soit : $$\boxed{\vec{V}(P \in D/R_0) = a\,\dot{\theta}\,\vec{v} + \dot{\varphi}\,\vec{z_0} \wedge b\,\vec{u} = (a\,\dot{\theta} + b\dot{\varphi})\,\vec{v}} \qquad (3)$$

◆ $$\vec{V}(P \in C/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(C/R_0) \wedge \overrightarrow{OP}$$

avec $\vec{V}(O/R_0) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OP} = (a + b)\,\vec{u}$

On obtient alors :

$$\boxed{\vec{V}(P \in C/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z_0} \wedge (a + b)\,\vec{u} = (a + b)\,\dot{\psi}\,\vec{v}} \qquad (4)$$

La vitesse de glissement est alors obtenue à partir de la différence [(3) – (4)].

$$\boxed{\vec{V}_g((D)/(C)) = [a\,\dot{\theta} + b\,\dot{\varphi} - (a + b)\,\dot{\psi}]\,\vec{v}} \qquad (5)$$

Ce vecteur est porté par la tangente commune en P à *(D)* et *(C)* ; ce qui vérifie l'une des propriétés fondamentales de cette vitesse. D'autre part, l'absence de glissement est traduite par $\vec{V}_g((D)/(C)) = \vec{0}$ soit encore : $\boxed{a\,\dot{\theta} + b\,\dot{\varphi} - (a + b)\,\dot{\psi} = 0}$ (6)

C'est une condition de liaison cinématique semi-holonome (car intégrable) qui permet moyennant la donnée de la constante d'intégration de déterminer l'un des trois paramètres de position en fonction des deux autres ; c'est-à-dire de réduire le nombre de degré de liberté à 2.

3°) Détermination des moments cinétiques :

a) Le moment cinétique du disque *D* par rapport à l'axe $\Delta_1 = (A, \vec{z_0})$ est par définition égal à :

$$\boxed{\sigma_{\Delta 1}(D/R_0) = \vec{\sigma}(A, D/R_0) \cdot \vec{z_0}} \qquad (7)$$

or $$\vec{\sigma}(A, D) = [J_D(A)]\,\vec{\Omega}(D/R_0) = J\,\dot{\varphi}\,\vec{z_0}$$

Avec $J = C_2 = \dfrac{mb^2}{2}$

Donc $$\boxed{\sigma_{\Delta 1}(D/R_0) = J\,\dot{\varphi}\,\vec{z_0} \cdot \vec{z_0} = J\,\dot{\varphi}} \qquad (8)$$

b) Le moment cinétique de D par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{z_0})$ a pour expression :

$$\sigma_\Delta(D/R_0) = \sigma_{\Delta 1}(D/R_0) + \left(\overrightarrow{OA} \wedge m\,\vec{V}(A/R_0)\right) . \vec{z_0}$$

ou encore :

$$\boxed{\sigma_\Delta(D/R_0) = \sigma_{\Delta 1}(D/R_0) + \sigma_\Delta(A\ \{m\}/R_0)} \qquad (9)$$

La relation (9) est obtenue par une simple application du théorème de Kœnig relatif au moment cinétique, on obtient alors :

$$\boxed{\sigma_\Delta(D/R_0) = J\,\dot{\varphi} + m\,a^2\,\dot{\theta}} \qquad (10)$$

c) Le moment cinétique du système $[(C), (D)]$ par rapport à l'axe Δ est par définition égal à la somme des moments cinétiques par rapport au même axe des solides (C) et (D), c'est-à-dire :

$$\boxed{\sigma_\Delta[(C), (D)]/R_0) = \sigma_\Delta(C/R_0) + \sigma_\Delta(D/R_0)} \qquad (11)$$

Avec

$$\sigma_\Delta(C/R_0) = \vec{\sigma}(O, C/R_0) . \vec{z_0} = \left[\left[J_0(C)\right] \vec{\Omega}(C/R_0)\right] . \vec{z_0}$$

$$\sigma_\Delta(C/R_0) = I\,\dot{\psi}\,\vec{z_0} . \vec{z_0} = I\,\dot{\psi}$$

$$I = C_1 = M\,(a^2 + b^2)$$

Il vient en définitive :

$$\boxed{\sigma_\Delta[(C), (D)]/R_0) = I\,\dot{\psi} + J\,\dot{\varphi} + m\,a^2\,\dot{\theta}} \qquad (12)$$

4°) En plus des effets dus à la pesanteur et du couple $\Gamma\vec{z_0}$ exercé sur (C), le système Σ est soumis aux forces de liaison en O représentées par le torseur :

$$\mathcal{T}(O \to C) = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(O) \end{Bmatrix}$$

où $\vec{R}$ est une inconnue du problème et le moment est tel que : $\vec{m}(O)\ \vec{z_0} = 0$ et ce car la liaison en O est de nature rotoïde parfaite.

Puisque Δ est un axe fixe, on obtient à partir du théorème du moment cinétique en O appliqué au système Σ :

$$\frac{d\sigma_\Delta(\Sigma/R_0)}{dt} = \vec{m}(O) . \vec{z_0} + \left(\overrightarrow{OA} \wedge m\,g\,\vec{x_0}\right) . \vec{z_0} + \Gamma\vec{z_0} . \vec{z_0}$$

ou encore :

$$\boxed{I\,\ddot{\psi} + J\,\ddot{\varphi} + m\,a^2\,\ddot{\theta} = -\,m\,g\,a\,\sin\theta + \Gamma} \qquad (13)$$

D'autre part si on **applique le théorème du moment dynamique en I au disque seul**, on obtient :

$$\boxed{\vec{\delta}(I, D/R_0) = \overrightarrow{IA} \wedge m\, g\, \vec{x_0} + \vec{m}_{CD}(I)} \qquad (14)$$

où $\vec{\delta}(I, D/R_0) = \vec{\delta}(A, D/R_0) + m\, \vec{\gamma}(A/R_0) \wedge \overrightarrow{AI}$

$$\vec{\delta}(I, D/R_0) = J\, \ddot{\varphi}\, \vec{z_0} - m\, a\, b\, \ddot{\theta}\, \vec{z_0}$$

et $\vec{m}_{CD}(I)$ est le **moment en I du torseur des actions de liaison exercées par C sur D** (qui sont des actions extérieures dans ce cas).

or $\vec{m}_{CD}(I) = \vec{m}_N + \vec{m}_T$ avec $\begin{cases} \vec{m}_N : \text{composante normale suivant } \vec{u} \\ \vec{m}_T : \text{composante tangentielle} \end{cases}$

Par hypothèse, on néglige le couple de résistance au roulement donc $\vec{m}_T = \vec{0}$. On en déduit alors une deuxième équation du mouvement en projetant (14) sur $\vec{z_0}$:

$$\boxed{J\, \ddot{\varphi} - m\, a\, b\, \ddot{\theta} = m\, g\, b\, \sin\theta} \qquad (15)$$

5°) A partir des équations (13) et (15), on obtient :

$$\boxed{\Gamma = mg\,(a+b)\,\sin\theta + ma\,(a+b)\,\ddot{\theta} + I\,\ddot{\psi}} \qquad (16)$$

Si on suppose que Γ est tel que $\psi = 0$ pour tout t, c'est-à-dire : $\dot{\psi} = \ddot{\psi} = 0$, on a :

à partir de (6) $\dot{\varphi} = -\frac{a}{b}\,\dot{\theta}$ soit $\ddot{\varphi} = -\frac{a}{b}\,\ddot{\theta}$

à partir de (16) $\Gamma = mg\,(a+b)\,\sin\theta + ma\,(a+b)\,\ddot{\theta}$

En injectant ces expressions dans (13), il vient : l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2g}{3a}\,\sin\theta = 0} \qquad (17)$$

6°) Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système $\Sigma = (C + D)$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{dEc(\Sigma/R_0)}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}}$$

où $\mathcal{P}_{ext} = mg\,\vec{x_0} \cdot \vec{V}(A/R_0) + \Gamma\,\vec{z_0} \cdot \dot{\psi}\,\vec{z_0}$

et $\mathcal{P}_{int} = (\mathcal{T}_{CD/I})_I \cdot \mathcal{V}(D/C)_I = 0$ (car on a un roulement sans glissement).

$\mathcal{T}_{CD}$ étant le torseur des actions exercées par C sur D et $\mathcal{V}(D/C)$ le torseur cinématique de D en mouvement par rapport à C.

D'autre part, l'énergie cinétique du système Σ est :

$$\boxed{\begin{aligned} Ec(\Sigma/R_0) &= Ec(C/R_0) + Ec(D/R_0) \\ Ec(\Sigma/R_0) &= \frac{1}{2} I \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta} \end{aligned}}$$

On a alors : $$I \dot{\psi} \ddot{\psi} + J \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + m a^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = \Gamma \dot{\psi} - m g a \dot{\theta} \sin\theta$$

En utilisant les hypothèses de la question précédente et l'équation (6), on obtient :

$$\frac{1}{2} mb^2 \left(\frac{a^2}{b^2}\right) \dot{\theta} \ddot{\theta} + m a^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = - m g a \dot{\theta} \sin\theta$$

Soit encore : $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2g}{3a} \sin\theta = 0}$$

qui est identique à l'équation (17).

7°) Lorsque θ est faible, on a $\sin\theta \approx \theta$ et l'équation (17) devient : $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$

Avec $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3a}}$. On a donc des mouvements oscillatoires autour de la position correspondant à $\theta = 0$. (Si les conditions initiales sont telles que $\theta = 0$ pour $t = 0$).

8°) En utilisant (16), on obtient (avec $\psi = 0 \quad \forall t$) :

$$\Gamma = m g (a + b) \sin\theta + m a (a + b) \ddot{\theta}$$

Soit encore (en prenant en considération l'équation (17) :

$$\boxed{\Gamma = \frac{m g}{3} (a + b) \sin\theta}$$

et si on suppose en plus que θ est petit, il vient :

$$\boxed{\Gamma = \frac{m g}{3} (a + b) \theta}$$

Rappel de Cours

Mécanique Quantique

ch I. - Introduction à la mécanique quantique.
ch II. - Equation de Schrödinger.
ch III. - Espace des fonctions d'onde d'une particule.
Notation de Dirac.
ch IV. - Equations aux valeurs propres - Observables - E.C.O.C.
ch V. - Les postulats de la mécanique quantique.
ch VI. - Problèmes à une dimension - Oscillateur harmonique.
ch VII. - Notions sur le moment cinétique.

Chapitre I – INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

A la fin du 19ème siècle, la physique classique reposait sur deux types de disciplines fondamentales qui décrivent les lois auxquelles obéissent les ondes et les particules : la mécanique rationnelle et la théorie électromagnétique de Maxwell.
Mais le début du 20ème siècle allait être marqué par des échecs et des bouleversements profonds en physique, qui aboutirent à l'introduction de **la mécanique relativiste et de la mécanique quantique**. Elles mettent en question la physique classique sur plusieurs points. Un exemple typique est celui de l'instabilité de l'atome : la mécanique rationnelle impose à l'électron de décrire une ellipse selon les lois de Képler, cette ellipse ne reste pas immuable et ses dimensions diminuent car l'atome perd de l'énergie d'une façon continue, ce qui impose une catastrophe : l'électron finit par tomber sur le noyau.
D'autres phénomènes seraient intéressants à citer, nous limitons notre étude au problème du rayonnement qui a permis de dégager et de rendre plausible la théorie quantique.

A – CARACTERE CORPUSCULAIRE DU RAYONNEMENT : LE PHOTON

1. La théorie de Planck.

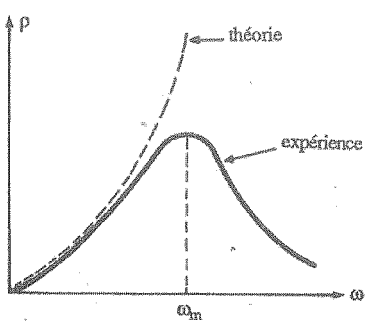
Considérons une cavité imperméable à la chaleur et au rayonnement, creusée dans une matière à une température T et parcourue par une onde électromagnétique en tout sens. Rayleigh et Jeans ont montré que la densité d'énergie qui caractérise ce rayonnement en chaque point est : $\rho_\omega(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$ (1)

et que l'énergie cinétique moyenne est : $\overline{E} = kT$.

L'énergie totale contenue dans un volume V d'un cm^3 est :

$$\rho = \int_o^\infty d\omega \, \rho_\omega(\omega, T) \qquad (2)$$

Expérimentalement, on observe la courbe ci–contre, la théorie précédente n'explique alors que le début de la courbe. La décroissance en exponentielle aux fréquences élevées restait alors inexpliquable.



On voit aussi que (1) est inacceptable physiquement car l'intégrale (2) diverge : la cavité contiendrait donc une énergie infinie ! c'est la catastrophe de "l'ultra–violet", ce qui amena Planck à formuler son **hypothèse des quanta**.

Il suppose que chaque atome formant les parois de la cavité est un oscillateur harmonique de fréquence λ tel que l'énergie de l'atome est : $E_n = n\,h\,\upsilon$ (n entier).
Les valeurs de l'énergie sont donc discrètes.

Planck montrait alors que la densité d'énergie est :

$$\rho_\omega(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega / kT} - 1} \qquad (3)$$

où $h = 2\pi\hbar$ constante de Plank

$h = 6{,}62\ 10^{-34}$ joule × seconde

On remarque que (3) est en excellent accord avec l'expérience :

pour $\hbar\omega << kT$ $\quad \overline{E} \approx kT$

pour $\hbar\omega >> kT$ $\quad \overline{E} \approx \hbar\omega\, e^{-\hbar\omega / kT}$

En conclusion, les lois du rayonnement sont devenues expliquables par la théorie de Planck.

2- L'effet photoélectrique.

Einstein postula que la lumière est constituée d'un jet de photons d'énergie $h\nu$, ce qui lui a permis d'interpréter les lois fondamentales de l'effet photoélectrique.

Le photon a été mis en évidence en 1924 en tant que corpuscule individualisé par l'effet compton : c'est le résultat d'un choc entre un photon de l'onde incidente et un électron du métal, choc au cours duquel le photon est annihilé. Une fraction seulement de l'énergie du photon est transmise à l'électron. L'énergie du photon est $E = h\nu$, sa vitesse est c et son impulsion est $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$.

B – CORPUSCULES MATERIELLES ET ONDES DE MATIERE : L'ELECTRON

1. L'onde associée de De Broglie.

De Broglie a imaginé que l'électron pouvait se comporter parfois comme une onde. Il a supposé que les résultats qui existent entre les aspects corpusculaires et ondulatoires du photon l'étaient aussi pour l'électron.

Ainsi, à un électron de quantité de mouvement $\vec{p}$ et d'énergie E, on associe une onde de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω telle que : $E = \hbar\omega$ et $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (4)

Pour un électron, $\vec{p} = m\vec{v}$, d'où en identifiant avec (4), on obtient la longueur d'onde associée à de De Broglie : $\lambda = \frac{h}{mv}$

Par analogie avec la lumière, l'électron se comporte comme une onde dont la forme est : $\psi = A\, e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$ avec $k = 2\pi / \lambda$

Cette fonction sert à déterminer à tout instant la probabilité de présence ρ de l'électron dans un volume $d^3\vec{r}$ centré autour du point $\vec{r_o}$:

$$\rho = |\psi(\vec{r_0}, t)|^2 \, d^3\vec{r}$$

Comme la probabilité de trouver la particule partout est égale à l'unité, la condition de normalisation s'écrit :

$$\iiint |\psi(\vec{r}, t)|^2 \, d^3\vec{r} = 1$$

Ainsi, les fonctions d'ondes doivent être de carré sommable (c'est-à-dire bornées).

2 – Notion de vitesse de groupe.

Si on réalise un paquet d'onde se propageant de long de Ox de forme :

$$\varphi = \int A_k \, e^{i(\omega t - kx)} \, dk$$

La vitesse de propagation des ondes participant au paquet s'écrit : $V_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ et porte le nom de **vitesse de phase.**

Par contre pour un milieu dispersif (la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dépend de sa fréquence), la vitesse du paquet d'onde, (qui porte le nom de **vitesse de groupe**, est : $V_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

Elle doit s'identifier avec la vitesse de la particule. En effet, l'énergie de la particule est : $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = \dfrac{p^2}{2m} + V(x)$

On en déduit : $V_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{dE}{dp} = \dfrac{p}{m}$ = vitesse de la particule

or $E = \hbar\omega$ et $p = \hbar k$: $\dfrac{dE}{dp} = \dfrac{d\omega}{dk}$ = vitesse du goupe du paquet

En particulier, si le milieu est le vide, V_φ est indépendant de k et égale à la vitesse de la lumière c.

Chapitre II - EQUATION DE SCHRÖDINGER

Nous admettons que l'équation d'évolution à laquelle obéit la fonction $\psi(\vec{r}, t)$, appelée **équation de Schrödinger** s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\,\psi(\vec{r}, t) \quad (5)$$

où Δ est le laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

V est le terme d'énergie potentielle qui provient des forces appliquées à la particule de masse m : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, V$.

Notons que l'équation de Schrödinger est du **1er ordre par rapport au temps ; cette condition est nécessaire pour que l'état du corpuscule à un instant t_0 détermine son état à un instant t ultérieur.**

1- Cas particulier: Particule libre dans un problème à une dimension

La particule n'est donc soumise à aucune force et l'énergie potentielle V est nulle.

L'équation (5) devient donc : $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

Cette équation admet une solution de type : $\psi(x, t) = A\, e^{i(kx - \omega t)}$.

avec A une constante. On en déduit la condition liant ω et k :

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad \text{soit} \quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

L'énergie de la particule libre est purement cinétique. On voit que cette onde ne peut pas décrire un état physique car elle n'est pas de carré sommable ($|\psi(x, t)|^2 = |A|^2$) : **une onde plane de ce type représente une particule dont la probabilité de présence est uniforme dans tout l'espace.**

Pour résoudre cette difficulté, on se sert du principe de superposition qui indique que toute combinaison linéaire d'onde planes est encore solution de l'équation (5). Ainsi, la solution générale de l'équation de Schrödinger se met sous la forme :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{-i(kx - \omega t)}\, dk$$

avec $|g(k)|^2\, dk$ représente la probabilité de trouver le vecteur d'onde $\vec{k}$ compris entre $\vec{k}$ et $\vec{k} + \vec{dk}$ et $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

2- Relation d'incertitude d'Heisenberg.

◆ Supposons que à l'instant $t = 0$, l'état du système soit décrit par :

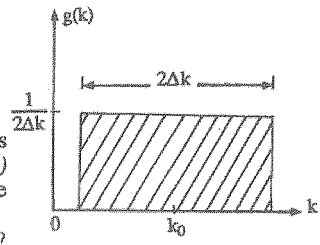
$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\, e^{ikx}\, dk$$

On voit que $g(k)$ est simplement la transformée de Fourier de $\psi(x, 0)$:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, 0)\, e^{-ikx}\, dx$$

Pour fixer les idées, considérons par exemple le paquet d'ondes défini par :

$$\begin{cases} g(k) = \dfrac{1}{2\Delta k} & \text{si } k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k \\ g(k) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



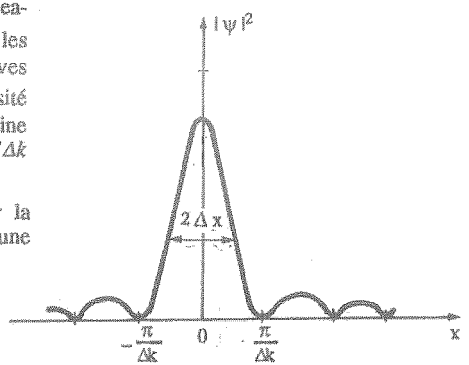
Si on mesure la vitesse de la particule, nous devons la trouver entre $-\Delta k$ et Δk (là ou $g(k)$ n'est pas nulle). Donc $k = k_0$ avec une incertitude Δk.
Si on mesure la position x, que trouve-t-on ?

Nous avons : $\psi(x, 0) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \dfrac{e^{ikx}}{2\Delta k}\, dk$

on trouve aisément : $\psi(x, 0) = e^{ik_0 x}\ \dfrac{\sin(x\Delta k)}{x\Delta k}$

La probabilité de trouver la particule au point x est donc : $|\psi|^2 = \dfrac{\sin^2(x\Delta k)}{(x\Delta k)^2}$

$|\psi|^2$ prend des valeurs négligeables pour $|x\Delta k| > \pi$, donc les valeurs de x qui sont effectives sont telles que $|x\Delta k| < \pi$ la densité de probabilité présente une certaine largeur Δx de l'ordre de $\pi/\Delta k$ (figure ci contre)



Il est alors possible de fixer la position de la particule avec une incertitude Δx inférieure à :

$$\Delta x \approx \frac{\pi}{\Delta k}\ .$$

On définit Δp par : $\Delta p = \hbar \Delta k$

A partir de (6) on obtient $\Delta x \ . \ \Delta k \geq 1$

Soit $$\boxed{\Delta x\ \Delta p \geq \hbar} \qquad (7)$$

Il est donc impossible de définir à un instant donné à la fois la position et l'impulsion de la particule avec précision. La relation (7) est applée : **relation d'incertitude d'Heisenberg.**
A remarquer qu'on ne connait rien de tel en mécanique classique qui prévoit qu'on peut mesurer x et p simultanément avec précision.

3 – Particule dans un potentiel scalaire indépendant du temps.

La particule est plongée dans un potentiel indépendant du temps $\left(\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0\right)$. La fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ doit vérifier l'équation de Schrödinger (5) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\ \psi(\vec{r}, t)$$

Les opérateurs différentiels par rapport au temps et l'espace étant indépendants, on peut chercher donc des solutions de la forme : $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\chi(t)$ (8)

En reportant (8) dans l'équation (5), on obtient : $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ (9)

avec $$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\, \varphi(\vec{r}) = E\, \varphi(\vec{r})} \quad (10)$$

◆ Une fonction d'onde de la forme (9) est appelée **solution stationnaire** de l'équation de Schrödinger : elle conduit à une densité de probabilité $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\varphi(\vec{r})|^2$ indépendante du temps.

◆ Dans le premier membre de l'équation (10) apparaissent les termes $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ qui redonne l'énergie cinétique et $V(\vec{r})$ qui redonne l'énergie potentielle. Ainsi dans le second membre de (10) apparait la constante E qui a les dimensions de l'énergie totale de la particule.

◆ L'équation (10) peut s'écrire autrement : $H\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$ (11)

où H est l'opérateur différentiel : $H = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$

L'équation (11) est appelée **équation aux valeurs propres** de l'opérateur linéaire H ou encore **équation aux états stationnaires d'énergie.**
En général, cette équation n'admet de solutions que pour certaines valeurs de l'énergie (qu'on note E_n) et pour chaque valeur E_n correspond la fonction propre $\varphi_n(\vec{r})$. Cette dernière fonction doit satisfaire quelques conditions :

– Elle doit être de carré sommable.

– A chaque saut fini du protentiel $V(\vec{r})$, la fonction $\varphi(\vec{r})$ et sa dérivée $\varphi'(\vec{r})$ doivent être continues (conditions de continuités).

4– Superposition des états stationnaires.

Les états stationnaires de la particule ont pour fonction d'onde :

$$\psi_n(\vec{r}, t) = \varphi_n(\vec{r})\ e^{-i E_n t / \hbar} \quad (12)\ (E_n = \hbar\omega_n)$$

Toute combinaison linéaire de (12) est solution de l'équation de Schroïnger (5).

Soit : $$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n C_n \varphi_n(\vec{r})\, e^{-i E_n t / \hbar} \quad (13)$$

où les C_n sont des coefficients complexes quelconques.

A l'instant $t = 0$, (13) devient : $\psi(\vec{r}, 0) = \sum_n C_n \varphi_n(\vec{r})$ (14)

Pour obtenir l'état du système à un instant t ultérieur, il suffit de multiplier chaque C_n par le facteur $e^{-i E_n t / \hbar}$ correspondant (nous supposons connu $\psi(\vec{r}, 0)$)

Chapitre III – ESPACE DES FONCTIONS D'ONDE D'UNE PARTICULE. NOTATION DE DIRAC.

Nous sommes amenés à étudier l'ensemble des fonctions de carré sommable (L^2), c'est-à-dire des fonctions pour lesquelles $\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 \, d^3\vec{r}$ converge.

L'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions d'onde, constitué par les fonctions suffisamment régulières de L^2 ($\mathcal{F}$ est un sous–espace de L^2) satisfait à toutes les propriétés d'un espace vectoriel.

1 - PRODUIT SCALAIRE.

◆ On définit le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{F}$ par :

$$(\varphi, \psi) = \int d^3\vec{r} \; \varphi^*(\vec{r}) \; \psi(\vec{r})$$

Il s'écrit dans la notation de Dirac par le produit Bra–Ket : $< \varphi \mid \psi >$

◆ **Propriétés :** $< \varphi \mid \psi > = < \psi \mid \varphi >^*$

$$< \varphi \mid \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 > = \lambda_1 < \varphi \mid \psi_1 > + \lambda_2 < \varphi \mid \psi_2 >$$

$$< \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \mid \psi > = \lambda_1^* < \varphi_1 \mid \psi > + \lambda_2^* < \varphi_2 \mid \psi_2 >$$

Si $< \varphi \mid \psi > = 0$ alors φ et ψ sont orthogonales

$$< \psi \mid \psi > = \int d^3\vec{r} \mid \psi \mid^2 \geq 0$$

2 - OPÉRATEURS LINÉAIRES.

Un opérateur A est dit linéaire si à $|\psi>$ il fait correspondre un ket $|\psi'>$ tel que : $|\psi'> = A\,|\psi>$.

La correspondance étant linéaire : $A \mid \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 > = \lambda_1 A \mid \psi_1 > + \lambda_2 A \mid \psi_2 >$

On définit de même les opérateurs linéaires agissant sur les fonctions $\psi(x, y, z)$.

Exemples : – Opérateur parité : $\pi \psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z)$

– Opérateur position : $X \psi(x, y, z) = x \psi(x, y, z)$

– Opérateur impulsion : $P_x \psi(x, y, z) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x, y, z)$

◆ **Produits d'opérateurs** : Le produit de deux opérateurs A et B est défiiii par :

$$(AB) \mid \psi > = A [B \mid \psi >]$$

En général, $AB \neq BA$

On appelle commutateur de A et B l'opérateur noté $[A, B]$: $[A, B] = AB - BA$

Exemples : $[X, P_x] = i\hbar \ 1$

Propriétés :

$[P_x, P_y] = 0$

$[A, B] = -[B, A]$

$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$

$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

$[A, B]^+ = [B^+, A^+]$

3 - BASES ORTHONORMÉES DISCRETES DANS $(|u_i(\vec{r})>)$.

L'ensemble $\{|u_i(\vec{r})>\}$ est orthonormé si : $< u_i \mid u_j > = \int d^3\vec{r}\ u_i^*(\vec{r})\, u_j(\vec{r}) = \delta_{ij}$

avec δ_{ij} : symbole de Kronecker.

Cet ensemble constitue une base si tout ket $|\psi>$ appartenant à L^2 peut se développer d'une façon et d'une seule sur les $\{|u_i>\}$: $|\psi> = \sum_i C_i |u_i>$

On en déduit : $C_i = < u_i |\psi> = \int d^3r\ u_i^*(\vec{r})\ \psi(\vec{r})$

En particulier, on obtient : $< \psi \mid \psi > = \sum_i \mid C_i \mid^2$

◆ **Relation de fermeture** :

Cette relation exprime que l'ensemble $\{|u_i>\}$ constitue une base :

$$\sum_i \mid u_i> < u_i \mid = 1$$

◆ **Etude de quelques exemples d'opérateurs linéaires** :

- **Projecteur P_ψ sur un ket $|\psi>$** :

P_ψ est défini par : $P_\psi = |\psi> <\psi|$

$$P_\psi^2 = P_\psi P_\psi = |\psi> <\psi| \psi> <\psi| = P_\psi$$

– **Opérateur adjoint** : A et A^+ sont dits adjoints l'un de l'autre si les matrices qui les représentent dans une représentation donnée sont adjointes l'une de l'autre :

$$< u_i \mid A^+ \mid u_j > = < u_j \mid A \mid u_i >^*$$

On peut vérifier aisément : $(A^+)^+ = A$

$(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$

$(AB)^+ = B^+ A^+$

L'opérateur A est dit hermitique si $A = A^+$ ou encore $A_{ij} = A_{ji}^*$

Chapitre IV - EQUATIONS AUX VALEURS PROPRES - OBSERVABLES - E. C. O. C.

1- EQUATIONS AUX VALEURS PROPRES.

On dit que $|\psi_n>$ est vecteur propre de A avec la valeur propre a_n si : $A\,|\psi_n> = a_n\,|\psi_n>$

Pour le cas d'une particule dans un problème à une dimension, l'équation aux valeurs propres est : $H\,|\varphi> = E\,|\varphi>$ avec : $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

On dit que E est l'énergie propre de H associée au vecteur propre $|\varphi>$.

2 - OBSERVABLES.

Si l'opérateur A est hermitique $(A = A^+)$ alors :
- Les valeurs propres d'un tel opérateur sont réelles.
- Deux vecteurs propres associés à A pour des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

Par définition, l'opérateur hermitique A est une observable si un système orthonormé de vecteurs propres de A forme une base dans l'espace des états c'est-à-dire qu'on a :

$$\sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i><\psi_n^i| = 1$$

où g_n est le degré de dégénérescence.

L'opérateur A peut être donné par :

$$A = \sum_n a_n P_n \quad \text{avec } P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i><\psi_n^i| \quad \text{(projecteur sur le sous espace } E_n\text{)}$$

3 - ENSEMBLES D'OBSERVABLES QUI COMMUTENT.

Nous nous limitons à l'énoncé des théorèmes importants suivants :

Théorème 1 : Si deux observables A et B commutent, on peut alors former une base orthonormée de l'espace des états constituée par les vecteurs propres communs à A et B.

Théorème 2 : Si deux observables A et B commutent, tout sous–espace propre de A est globalement invariant sous l'action de B.

Théorème 3 : Si deux observables A et B commutent, l'élément de matrice de B : $< \psi_1 \mid B \mid \psi_2 >$ est nul.

4 - ENSEMBLES COMPLETS D'OBSERVABLES QUI COMMUTENT (E.C.O.C.)

Si A est une observable et si aucune des valeurs propres de A n'est dégénérée, alors la donnée de la valeur propre détermine d'une façon unique le vecteur propre correspondant. On dit que A forme, à elle seule, un E.C.O.C.

Si au contraire, A possède certaines valeurs propres dégénérées, la donnée de la valeur propre ne suffit plus toujours à déterminer de façon unique un vecteur propre. Dans ce cas A ne constitue plus un E.C.O.C.

Prenons donc une autre observable B qui commute avec A. L'ensemble $\{A, B\}$ forme un E.C.O.C. si à chacun des couples possibles de valeurs propres (a_n, b_p) il correspond un seul vecteur propre de la base.

Chapitre V - LES POSTULATS DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

1er POSTULAT : DESCRIPTION DE L'ÉTAT D'UN SYSTEME :

L'état d'un système physique à l'instant t_0 est défini par le ket $\mid \psi(\vec{r}, t_0) >$

2ème POSTULAT : DESCRIPTION DES GRANDEURS PHYSIQUES :

A toute grandeur physique $\mathscr{A}$ mesurable, est associée un opérateur A linéaire hermitique agissant dans l'espace des états $\mathscr{E}$. A est appelé observable.

3ème POSTULAT SUR LA MESURE :

Une mesure de $\mathscr{A}$ ne peut donner que l'une des valeurs propres (réelles car A est une observable) de l'observable A.

4ème POSTULAT:

Lors de la mesure de l'observable A sur un système qui se trouve dans l'état $\mid \psi >$ **normé** à un instant t déterminé, la probabilité $\mathscr{P}_{a_n}$ de trouver la valeur propre a_n de A correspondant est :

$$\mathscr{P}_{a_n} = \sum_{i=1}^{g_n} \mid < u_n^i \mid \psi > \mid^2 \qquad \text{avec} \mid \psi > = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} C_n^i \mid u_n^i >$$

g_n est le degré de dégénérescence de a_n et $\{ \mid u_n^i > \}$ $(i = 1, 2 .... g_n)$: un système orthonormé de vecteurs formant une base dans le sous-espace propre de $\mathscr{E}_n$ associé à la valeur a_n de A .

Soit $\mathcal{P}_{a_n} = \sum_{i=1}^{g_n} | C_n^i |^2$

Si en particulier, les valeurs propres de A ne sont pas dégénérées alors :

$$\mathcal{P}_{a_n} = | < u_n | \psi > |^2 = | C_n |^2$$

Remarque: La probabilité totale est égale à l'unité :

$$\sum_n \mathcal{P}_{a_n} = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |C_n^i|^2 = < \psi | \psi > = 1$$

Conséquences : Les probabilités que l'on prédit, pour une mesure de $\mathcal{A}$, à partir de $| \psi >$ ou $| \psi' >$ tel que $| \psi' > = \alpha e^{i\theta} | \psi >$ sont les mêmes. Ce qui revient à dire qu'un facteur de phase globale n'affecte pas les prédictions physiques.

5ème POSTULAT :

Si la mesure de $\mathcal{A}$ sur le système dans l'état $| \psi >$ donne comme résultat a_n, alors l'état du système immédiatement après la mesure est la projection normée : $\frac{P_n | \psi >}{\sqrt{< \psi | P_n | \psi >}}$ de $| \psi >$ avec P_n le projecteur sur le sous–espace propre associé à a_n

6ème POSTULAT : ÉVOLUTION DES SYSTEMES DANS LE TEMPS

L'évolution dans le temps du ket $| \psi(t) >$ est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i \hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) > = H(t) | \psi(t) >$$

avec $H(t)$: l'hamiltonien du système asssocié à l'énergie propre du système.

Conséquence pour les systèmes conservatifs :

i) Connaissant l'état du système à un instant t_0 ($| \psi(t_0) >$), l'état du système à un instant t ultérieur est : $| \psi(t) > = \sum_n C_n(t_0) \, e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} | u_n >$

avec E_n la valeur propre associée à l'état $| u_n >$ et $C_n(t_0) = < u_n | \psi(t_0) >$

ii) Si $| \psi(t_0) >$ est lui même état propre de H, le passage de $| \psi(t_0) >$ à $| \psi(t) >$ ne fait intervenir qu'un seul facteur de phase $e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} | \psi(t_0) >$

Ces deux états sont physiquement indiscernables puisqu'ils ne différent que par un facteur de phase global : les états propres de H sont pour cette raison appelés **états stationnaires.**

1 . Valeur moyenne d'une observable A dans un état donné

Si l'état $| \psi >$ est normé, la valeur moyenne de A dans cet état notée $< A >_\psi$ est donnée par la formule : $< A >_\psi = < \psi | A | \psi >$

En particulier, la position (moyenne) d'une particule est :

$$< X > = < \psi \mid X \mid \psi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi \, dx$$

celle de la quantité de mouvement : $< P_x > = < \psi \mid P_x \mid \psi >$

dans la représentation $\{\mid x >\}$: $< P_x > = \int dx \ \psi^* (x) \ \frac{\hbar}{i} \ \frac{d}{dx} \psi (x)$

dans la représentation $\{\mid P_x >\}$: $< P_x > = \int dp \ \overline{\psi^*} (p) \ P_x \ \overline{\psi} (p)$

avec $\overline{\psi} (p)$ la transformée de Fourier de $\psi (x)$.

2. Ecart quadratique moyen.

Par définition, l'écart quadratique moyen ΔA est donnée par :

$$\Delta A = \sqrt{(< A > - < A >)^2}$$

ou encore $\Delta A = \sqrt{< A^2 > - < A >^2}$

3. Théorème d'Ehrenfest : évolution de la valeur moyenne d'une observable.

En utilisant l'équation de Schrödinger et la définition de la valeur moyenne de A, il est facile de montrer que : $\boxed{\frac{d}{dt} < A > = \frac{1}{i\hbar} < [A, H (t)] > + < \frac{\partial A}{\partial t} >}$ (15)

Si nous appliquons cette formule aux observables X et P_x dans le cas d'une particule plongée dans un potentiel $V(X)$ à une dimension : $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} < X > = \frac{1}{m} < P_x > & (16) \\ \frac{d}{dt} < P_x > = - < \frac{\partial V}{\partial x} > & (17) \end{cases}$$

La relation (17) est l'expression correspondante à la loi fondamentale de la dynamique pour une particule soumise à une force dérivant de $V(X)$. Le théorème d'Ehrenfest constitue donc la correspondance entre l'équation de Schrödinger et la mécanique classique.

4. Constante du mouvement.

Une observable A est dite constante du mouvement si on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 & (A \text{ ne dépend pas explicitement du temps}) \\ [A, H] = 0 & (A \text{ commute avec } H) \end{cases}$$

En reportant ces deux égalités dans la relation (15), on obtient : $\frac{d}{dt} < A >_\psi = 0$

La valeur moyenne de A dans l'état $\mid \psi >$ n'évolue pas au cours du temps, d'où l'appellation : **constante du mouvement.**

Chapitre VI – PROBLEMES À UNE DIMENSION – OSCILLATEUR HARMONIQUE.

Nous ne traitons pas dans ce paragraphe les cas des différents potentiels (carré, marche de potentiel, puits de potentiel infini....). Ces exemples sont suffisamment traités dans la partie exercices et problèmes. Nous étudions ici en détail le cas de l'oscillateur harmonique.

1 – RÉSULTATS CLASSIQUES

L'oscillateur harmonique linéaire est un point matériel de masse m, soumis à une force de rappel : $F = -m\,\omega^2 x$. L'équation du mouvement s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. La solution générale d'une telle équation : $x = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$

L'énergie potentielle s'obtient en écrivant : $F = \frac{-\partial V}{\partial x}$ soit $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

L'énergie totale de l'oscillateur à un instant t quelconque est donnée par :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 X_0^2$$

2. ETUDE QUANTIQUE

La particule étant plongée dans un potentiel parabolique $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$, il faut s'attendre à ce que la théorie quantique n'autorise qu'un spectre d'énergie discret.

Ainsi l'équation de Schrödinger s'écrit : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi_n = E_n \psi_n$

Posons : $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ et $\varepsilon_n = \frac{E_n}{\hbar\omega}$

On obtient : $\frac{d^2\psi_n}{dy^2} - y^2 \psi_n = -2\varepsilon_n \psi_n$

En utilisant les opérateurs : $\hat{A}^+ = \frac{\partial}{\partial y} - y$ et $\hat{A}^- = \frac{\partial}{\partial y} + y$

En appliquant $\hat{A}^+$ puis $\hat{A}^-$ à une fonction ψ_n, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)\psi_n = \frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2} - y^2\psi_n - \psi_n$$

Compte tenu de l'équation (17), il vient donc : $\hat{A}^- \hat{A}^+ \psi_n = (-2\varepsilon_n - 1)\psi_n$ (18)

Si maintenant, on fait agir $\hat{A}^+$ puis $\hat{A}^-$, on obtient aisément :

$$\hat{A}^+\hat{A}^-\psi_n = (-2\,\varepsilon_n + 1)\psi_n \qquad (19)$$

Remarquons que si ψ_n est solution, alors la fonction $\hat{A}^+\psi_n$ l'est également. En effet, on fait agir à gauche, l'opérateur $\hat{A}^+$ sur les deux membres de l'égalité (18) :

$$\hat{A}^+\hat{A}^-\hat{A}^+\psi_n = (-2\varepsilon_n - 1)\,\hat{A}^+\psi_n$$

ou $$\hat{A}^+\hat{A}^-(\hat{A}^+\psi_n) = (-2\varepsilon_n - 1)(\hat{A}^+\psi_n)$$

ou $$\hat{A}^+\hat{A}^-(\hat{A}^+\psi_n) = \Big(-2(\varepsilon_n + 1) - 1\Big)(\hat{A}^+\psi_n)$$

soit $$\hat{A}^+\hat{A}^-\psi_{n'} = (-2\,\varepsilon_{n'} - 1)\psi_{n'} \qquad (20)$$

avec $\psi_{n'} = \hat{A}^+\psi_n$

L'équation (20) est identique à (19) et $\psi_{n'}$ est solution de l'équation de Schrödinger pour l'énergie : $$E_{n'} = (\varepsilon_n + 1)\hbar\omega = E_n + \hbar\omega \qquad (21)$$

On voit que par action de $\hat{A}^+$, on construit une solution $\psi_{n'}$ d'énergie $E_n + \hbar\omega$ à partir de ψ_n d'énergie E_n.
Il est alors facile de constituer tous les états à partir de la connaissance de l'état fondamental (de plus basse énergie).
En effet, l'équation (19) est vérifiée pour une fonction ψ_0 telle que : $\hat{A}^-\psi_0 = 0$

en lui associant la valeur $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire une énergie égale à $\frac{\hbar\omega}{2}$

Il vient donc d'après (21) : $E_1 = \hbar\omega + E_0$

$$E_2 = \hbar\omega + E_1 = 2\hbar\omega + E_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$E_n = \hbar\omega + E_{n-1} = n\hbar\omega + E_0$$

Soit alors : $$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n \text{ entier} \geq 0)} \qquad (22)$$

Remarque : L'état de repos se révèle impossible puisque le niveau d'énergie le plus bas est $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, en bon accord avec le principe d'incertitude d'Heisenberg.

Il reste à construire les fonctions propres et les normer ; en effet, nous avons :

$$\hat{A}^-\psi_0 = 0 \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)\psi_0 = 0$$

Soit $\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -y\,dy$

Il vient donc : $\psi_0 = A_0 \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)$

soit en remplaçant par l'expression de y : $\psi_0(x) = A_0 \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}\right)$

Si ψ_0 est fonction propre normée associée au niveau E_0, $\hat{A}^+ \psi_0$ est fonction propre associée au niveau E_1.

Soit : $\psi_1 = \hat{A}^+ \psi_0 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right) \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)$

On obtient facilement : $\psi_1 = A_1 \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}\right)$ avec $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

On trouve alors ψ_2 par l'action de $\hat{A}^+$ sur ψ_1, ψ_3 par $\hat{A}^+ \psi_2 \ldots\ldots$, ψ_n par $\hat{A}^+ \psi_{n-1}$

Les constantes A_0, A_1, ... s'obtiennent en écrivant les conditions de normalisations telles que : $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2\,dx = 1$

Les fonctions d'onde s'écrivent alors :

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{avec } E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\psi_1 = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} x \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{avec } E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

$$\psi_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} (4x^2 - 2) \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{avec } E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

etc ...

Il existe d'autres méthodes pour traiter l'oscillateur harmonique. Nous laissons au lecteur l'occasion de les voir dans la partie exercices et problèmes.

Chapitre VII – NOTIONS SUR LE MOMENT CINÉTIQUE

En mécanique classique, le moment cinétique d'une particule par rapport à l'origine est défini par : $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

ou encore $\sigma_z = xp_y - yp_x$ (cyclique)

qui s'exprime en remplaçant $\vec{r}$ et $\vec{p}$ par les opérateurs respectives :

$$(\sigma_z)_{op} = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \text{(cyclique)}$$

ou encore $\vec{\sigma}_{op} = \frac{\hbar}{i}\ \vec{R} \wedge \vec{V}$

Le moment cinétique a donc la dimension de $\hbar$.

On définit alors un opérateur sans dimension par : $\vec{\hbar l} = \vec{R} \wedge \vec{p}$

tel que : $[l_x, l_y] = l_z$

Le moment cinétique orbital total d'un système à n particule s'écrit : $L = \sum_{i=1}^{n} l^{(i)}$

Nous obtenons : $[L_x, L_y] = L_z$

Une particule possède en général un moment cinétique intrinsèque ou **spin**. Il traduit une rotation de la particule sur elle–même. Le moment cinétique de spin est noté (en unité $\hbar$) $\vec{S} = \sum_i \vec{s^{(i)}}$.

Le moment cinétique total du système est donc : $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Nous examinons le cas très important des particules de spin $\frac{1}{2}$.

Introduisons donc l'opérateur σ sans dimension : $\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

Les matrices représentatives, dans la base $\{|+>, |->\}$ appelées "matrice de Pauli" s'écrivent :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de σ_x, σ_y et σ_z sont: ± 1 et donc celles de S_x, S_y et S_z sont: $\pm \frac{\hbar}{2}$

Il est facile de trouver les vecteurs prorpes de S_x , S_y

- $|\pm>_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+> \pm |->\right]$
- $|\pm>_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+> \pm i|->\right]$

Propriétés : les trois opérateurs σ_x, σ_y et σ_z sont hermitiques ou auto–adjoints car les éléments de matrice sont tels que : $a_{ij} = a^*_{ji}$

- $Det(\sigma_i) = -1$ ($i = x,y$ ou z)
- $Tr(\sigma_i) = 0$
- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$ (I : matrice unité
- $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0$
  $\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z$

ainsi que les équations qui se déduisent par permutation circulaire de x, y et z.

Exercices et Problèmes

Mécanique Quantique

1 - Paquet d'onde.

I – On considère une particule libre de masse m, d'énergie E dont l'état peut être décrit par la fonction $\psi(x, t)$.

1) Soit la fonction d'onde $\psi(x, t) = A\, e^{i(kx - \omega t)}$

a) Donner la relation qui existe entre ω et k pour que $\psi(x, t)$ soit solution de l'équation de Schrödinger. En déduire la valeur de l'énergie E en fonction de ω .

b) Calculer la densité de probabilité $|\psi(x, t)|^2$ de la particule. L'état du système peut-il être décrit par $\psi(x, t)$ ainsi définie ?

2°) On propose la fonction $\psi(x, t)$ définie par

$$\psi(x, t) = c \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{ikx}\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}k$$

où $g(k)$ est une fonction du vecteur d'onde $\vec{k}$.

a) Justifier (sans faire de calculs) pourquoi $\psi(x, t)$ est solution de l'équation de Schrödinger. $\psi(x, t)$ représente-t-elle un état physique ?

b) A $t = 0$ l'état du système est représenté par $\psi(x, 0)$.
– Pour quelle valeur de c, $g(k)$ serait la transformée de Fourier de la fonction $\psi(x, 0)$?
– Quelle condition doit satisfaire $g(k)$ pour que $\psi(x, 0)$ soit normalisable ?

Extrait, Casa I, PC 2, Juin 1986.

1°) a) On considère une particule libre (dont l'énergie potentielle est nulle ou constante).

L'équation de Schrödinger s'écrit : $$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \psi(x, t) \qquad (1)$$

Soit $\psi(x, t) = A\, e^{i(kx - \omega t)}$ solution de cette équation différentielle. Il vient alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\,\omega\,\psi \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 \psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2 \psi$$

L'équation (1) devient donc : $$\hbar\,\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

k et ω sont donc liés par la relation : $$\omega = \frac{\hbar\, k^2}{2m}$$

L'énergie E est alors : $$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

b) Calculons la densité de probabilité : $|\psi(x,t)|^2 = \psi^* \psi = |A|^2$

On voit que la probabilité de présence est uniforme dans tout l'espace. Un telle onde n'est pas de carré sommable, en toute rigeur, elle ne peut donc représenter un état physique pour la particule.

2°) a) Le principe de superposition indique que toute combinaison linéaire d'ondes planes vérifiant $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ sera ainsi solution de l'équation (1). Une telle superposition s'écrit :

$$\psi(x,t) = c \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\ e^{i(kx - \omega t)}\ dk$$

Donc $\psi(x,t)$ représente un état physique ; elle peut parfaitement être de carré sommable.

b) à l'instant $t = 0$, l'état du système est représenté par $\psi(x,0) = c \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\ e^{ikx}\ dk$.

On voit que $g(k)$ est tout simplement la transformée de Fourier de $\psi(x,0)$ à condition que c soit égale à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Il vient alors : $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,0)\ e^{-ikx}\ dx$

2 - Paquet d'onde - Relation d'incertitude.

1- Donner, en justifiant, la forme générale de la fonction d'onde de cette microparticule.

2- Supposons que la fonction d'onde de cette microparticule est donnée à l'instant $t = 0$ par :

$$\psi(x,0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|p|/p_0}\ e^{ipx/\hbar}\ dp$$

où p_0 est une constante positive et N une constante destinée à normer la fonction $\psi(x,0)$.

a) Quelle est la transformée de Fourier $\varphi(p)$ de $\psi(x,0)$? Donner l'interprétation physique de $\psi(x,0)$ et $\varphi(p)$.

b) Calculer $\psi(x,0)$ et donner l'allure de $|\psi(x,0)|^2$ et $|\varphi(p)|^2$.

c) Supposons que $|\psi(x,0)|^2$ et $|\varphi(p)|^2$ ne prennent respectivement des valeurs appréciables que dans des intervalles Δx et Δp. Que peut-on dire du produit $\Delta x \Delta p$? Donner la signification physique de Δx, Δp et $\Delta x \Delta p$.

d) Quelle est la probabilité $\mathcal{P}(p_1, 0)$ pour qu'une mesure de l'impulsion effectuée à l'instant $t = 0$, donne un résultat compris entre $-p_1$ et $+p_1$? Etudier sommairement la fonction $\mathcal{P}(p_1, 0)$.

e) Donner la fonction d'onde $\psi(x, t)$ de cette microparticule à l'instant t. Que devient la probabilité ci-dessus $\mathcal{P}(p_1, t)$ si la mesure est effectuée à l'instant t ? Interprétation.

Extrait , CASA I, MP 2, Mai 1986.

1°) D'après l'hypothèse de DE BROGLIE : à chaque microparticule, d'énergie E et d'impulsion $\vec{p}$ on associé une onde plane : $\psi_k(x, t) = A\, e^{\,i(kx - \omega t)}$ où $E = \hbar\omega$ et $p = \hbar k$.

Pour la microparticule, il peut exister plusieurs états possibles et donc d'après le principe de superposition, l'état le plus général est une combinaison linéaire de tous les états probables

Soit : $$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{\,i(kx - \omega t)}\, dk$$

Chaque onde plane est affectée d'un poids $g(k)$. Physiquement $|g(k)|^2 \cdot dk$ représente la probabilité de trouver le nombre d'onde k compris entre k et $k + dk$.

2°) La fonction d'onde de cette microparticule est supposée à l'instant $t = 0$ exprimée par :

$$\psi(x, 0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\,-|p|/p_o}\, e^{\,ipx/\hbar}\, dp \qquad (1)$$

a) La fonction d'onde à l'instant $t = 0$ est de la forme :

$$\psi(x, 0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\,ipx/\hbar}\, \varphi(p)\, dp \qquad (2)$$

où $\varphi(p)$ représente la transformée de Fourier de $\psi(x, 0)$. En identifiant (1) avec (2), nous avons : $$\varphi(p) = N\, e^{\,-|p|/p_o}$$

◆ $|\psi(x, 0)|^2$: représente la probabilité de trouver la microparticule au point x à l'instant $t = 0$

◆ $|\varphi(p)|^2$: représente la probabilité de trouver la microparticule avec une impulsion p à l'instant $t = 0$.

b) Calculons la fonction d'onde à $t = 0$:

$$\psi(x, 0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\,-|p|/p_o}\, e^{\,ipx/\hbar}\, dp$$

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{\,p/p_o}\, e^{\,ipx/\hbar}\, dp + \int_{0}^{+\infty} e^{\,-p/p_o}\, e^{\,ipx/\hbar}\, dp \right]$$

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{\,p(1/p_o + ix/\hbar)} \right] dp + \int_{0}^{\infty} e^{\,-p(1/p_o - ix/\hbar)}\, dp$$

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \left[\frac{e^{\,p(1/p_o + ix/\hbar)}}{1/p_o + ix/\hbar} \right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{\,-p(1/p_o + ix/\hbar)}}{1/p_o - ix/\hbar} \right]_{0}^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{1}{1/p_o + ix/\hbar} + \frac{1}{1/p_o - ix/\hbar} \right)$$

Soit

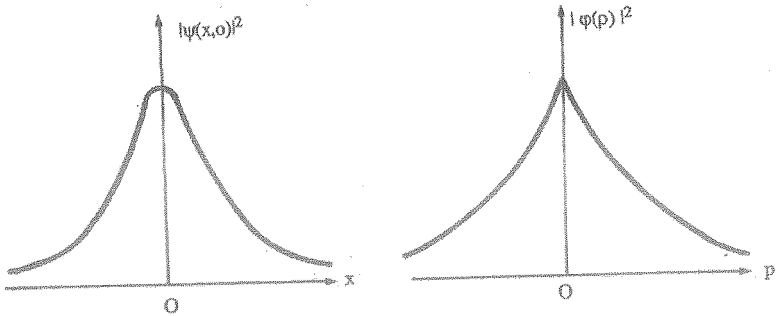
$$\boxed{\psi(x, 0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{2/p_o}{x^2/\hbar^2 + 1/p_o^2}}$$

On en déduit :

$$|\psi(x, 0)|^2 = \frac{N^2}{2\pi\hbar} \left(\frac{2/p_o}{x^2/\hbar^2 + 1/p_o^2} \right)^2$$

Nous remarquons que lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$, $|\psi(x, 0)|^2 \longrightarrow 0$ et que cette fonction présente un maximum en $x = 0$.

Les fonctions $|\psi(x, 0)|^2$ *et* $|\varphi(p)|^2$ sont représentées par les courbes ci-dessous :



c) ◆ $\Delta x\ \Delta p$: ce produit est borné inférieurement et la valeur de cette borne dépend de la définition précise de Δx et de Δp.

◆ $\psi(x)$ est une courbe de Gauss, de largeur Δx : c'est l'intervalle dans lequel on peut trouver la microparticule lors d'une mesure de sa position à $t = 0$ et centrée au point $x = 0$.

◆ Lors d'une mesure de l'impulsion de la microparticule, on ne peut trouver des valeurs que dans l'intervalle Δp (centrée sur $p = 0$).

◆ Le produit $\Delta x\ \Delta p$ est constant. Lors d'une mesure de la coordonnée x de la particule avec une incertitude sur le résultat de mesure Δx, on lui communique alors une impulsion p de l'ordre de $\hbar/\Delta p$ mais dont il est impossible de connaître à la fois, avec précision, la position et l'impulsion d'une microparticule. Ainsi lorsqu'on essaye de localiser la microparticule dans l'intervalle Δx, on augmente l'incertitude sur son impulsion. Cette impossibilité est fondamentale et constitue **le principe d'incertitude de Heinsenberg.**

d) La probabilité $\mathcal{P}(p_1, 0)$ est définie par :

$$\mathcal{P}(p_1, 0) = \int_{-p_1}^{+p_1} |\varphi(p)|^2 \, dp$$

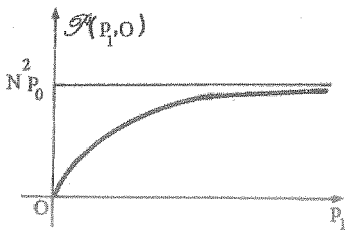
$$= N^2 \int_{-p_1}^{+p_1} e^{-2|p|/p_o} \, dp$$

$$= N^2 \left[\int_{-p_1}^{0} e^{2p/p_o} \, dp + \int_{0}^{p_1} e^{-2p/p_o} \, dp \right]$$

Soit : $\boxed{\mathcal{P}(p_1, 0) = N^2 \, p_o \, (1 - e^{-2p_1/p_o})}$

La dérivée $\frac{d\mathcal{P}}{dp_1} = 2N^2 \, e^{-2p_1/p_o}$ est toujours positive.

La fonction $\mathcal{P}(p_1, 0)$ est représentée par la courbe ci-dessous :



e) A l'instant t, la fonction d'onde de cette microparticule est définie par :

$$\psi(x, t) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|p|/p_o} \, e^{i(px/\hbar - \omega t)} \, dp$$

avec $\varphi(p) = N \, e^{-|p|/p_o} \, e^{-i\omega t}$

Soit alors $|\varphi(p)|_t^2 = N^2 \, e^{-2|p|/p_o} = |\varphi(p)|_{t=0}^2$

Donc $\boxed{\mathcal{P}(p_1, t) = \mathcal{P}(p_1, 0)}$

Nous remarquons que la probabilité $\mathcal{P}$ est indépendante du temps : résultat qui est trivial puisque la microparticule se trouve dans le potentiel nul (elle est libre).

3 - Opérateur densité - Description par vecteur d'état et par opérateur densité - Propriétés - Populations et cohérences.

On considère dans l'espace des états $\mathcal{E}$, une base orthonormée $\{|u_n>\}$

Un vecteur d'état $|\psi(t)>$ peut s'écrire sous la forme :

$$|\psi(t)> = \sum_n C_n(t) \, . \, |u_n>$$

1°) Déterminer la relation que doivent vérifier les coefficients, $C_n(t)$ pour que $|\psi(t)>$ soit normé à l'unité (ce que l'on supposera par la suite).

2°) On définit l'opérateur $\rho(t) = |\psi(t)><\psi(t)|$

ρ_{ij} (t) représente ses éléments de matrice dans la représentation $\{|u_n>\}$

a) Montrer que $\rho(t)$ est hermitique

b) Montrer que $\rho(t)$ est idempotant, soit $\rho^2(t) = \rho(t)$

3°) Calculer la trace de $\rho(t)$, soit Tr $\rho(t)$, dans la représentation $\{|u_n>\}$ *(On rappelle que la trace est la somme des éléments de la diagonale principale).*

4°) Démontrer que la trace d'un produit de matrice est invariante par permutation circulaire, soit : Tr A.B.C = Tr B.C.A = Tr C.A.B

Pour cela, commencer par un produit de matrice ; et indroduire la relation de fermeture $\sum_n |u_n><u_n| = \mathbb{1}$ *entre les 2 matrices :*

5°) Le système étant dans l'état $|\psi(t)>$. *Déterminer l'expression de la valeur moyenne d'une observable A en fonction de $\rho(t)$ et A.*
Pour cela, partir de Tr ρA = Tr $\rho^2 A$ et utiliser le résultat du § 4.

6°) En utilisant l'équation de Schrödinger (l'équation d'évolution) déterminer l'équation d'évolution de $\rho(t)$, soit $\frac{d}{dt}\rho(t)$. *(Pour cela, dériver $\rho(t)$ comme un produit).*

7°) Les valeurs propres de A étant notées a_n calculer en fonction de $\rho(t)$ et $P_n = |u_n><u_n|$ *la probabilité de trouver comme résultat de mésure de A, l'une des valeurs propres a_n. Pour cela, utiliser la propriété*

$$P_{a_n} = <\psi(t)\,|\,P_n\,|\psi(t)> = <P_n>$$

8°) Dans le cas où les $|u_n>$ *sont les états stationnaires de H.*
a) montrer que l'on a :

$$i\hbar\,\frac{d}{dt}\rho_{n,m}(t) = (E_n - E_m)\,.\,\rho_{n,m}(t) \qquad \text{et} \qquad i\hbar\,\frac{d}{dt}\rho_{n,m}(t) = 0$$

b) Calculer alors $\rho_{n,m}(t)$

Extrait, Marrakech, PC 2 – MP 2, 1985

1°) Soit $|\psi(t)>$ un vecteur d'état : $|\psi(t)> = \sum_n C_n(t)\,|u_n>$ où les $\{|u_n>\}$ forment une base orthonormée de l'espace des états.

$|\psi(t)>$ est normé : $\qquad <\psi(t)|\psi(t)> = \sum_n |C_n(t)|^2 = 1$

2°) On définit l'opérateur densité : $\qquad \rho(t) = |\psi(t)><\psi(t)|$

L'opérateur $\rho(t)$ est représenté, dans la base $\{|u_n>\}$, par la matrice densité, dont les

éléments sont : $\rho_{ij}(t) = \langle u_i | \rho(t) | u_j \rangle = \langle u_i | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | u_j \rangle$

Soit $\rho_{ij}(t) = C_i(t)\ C_j^*(t)$ (1)

a) $\rho^+(t) = \rho(t)$: l'opérateur densité est donc hermitique.

b) $\rho^2(t) = \rho(t)\ \rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \rho(t)$

3°) La relation $\sum_n C_n^*(t)\, C_n(t) = 1$, indique que la somme des éléments diagonaux (1) de la matrice densité est égale à 1.

En effet : $1 = \sum_n C_n^*(t)\, C_n(t) = \sum_n \rho_{nn}(t) = Tr\ \rho(t)$ (2)

4°) $Tr(ABC) = \sum_n \langle u_n | A(BC) | u_n \rangle = \sum_{n,m} \langle u_n | A | u_m \rangle \langle u_m | BC | u_n \rangle$

$$= \sum_{n,m,p} \langle u_n | A | u_m \rangle \langle u_m | B | u_p \rangle \langle u_p | C | u_n \rangle$$

$$= \sum_p \langle u_p | C \underbrace{\sum_n | u_n \rangle \langle u_n |}_{1} A \underbrace{\sum_m | u_m \rangle \langle u_m |}_{1} B | u_p \rangle$$

$$= \sum_p \langle u_p | CAB | u_p \rangle = Tr(CAB)$$

$$= \sum_m \langle u_m | B \underbrace{\sum_p | u_p \rangle \langle u_p |}_{1} C \underbrace{\sum_n | u_n \rangle \langle u_n |}_{1} A | u_m \rangle$$

$$= \sum_m \langle u_m | BCA | u_m \rangle = Tr\ (BCA)$$

Donc : $\boxed{Tr\ ABC = Tr\ CAB = Tr\ BCA}$

5°) Si A est une observable , on a :

$$Tr\ \rho A = Tr\ \rho^2 A = Tr\ A\rho^2 = Tr\ \rho A\ \rho$$

$$Tr\,\rho A = Tr\,|\,\psi(t)\rangle\langle\psi(t)\,|\,A\,|\,\psi(t)\rangle\langle\psi(t)\,|$$

$$= \langle A\rangle_t\ Tr\,|\,\psi(t)\rangle\langle\psi(t)\,| = \langle A\rangle_t\ Tr\,\rho(t)$$

Soit d'après (2) : $\boxed{Tr\,\rho\,A = \langle A\rangle_t}$ (3)

6°) L'évolution dans le temps de l'opérateur $\rho(t)$ se déduit de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\,\psi(t)\rangle = H(t)\ \ |\,\psi(t)\rangle \qquad (4)$$

Le conjugué de cette équation s'écrit : $-i\hbar\,\frac{d}{dt}\langle\psi(t)\,| = \langle\psi(t)\,|\,H(t)$ (H étant hermitique) (5)

Calculons $\frac{d}{dt}\rho(t)$: $\frac{d}{dt}\,\rho(t) = (\frac{d}{dt}\,|\,\psi(t)\rangle)\langle\psi(t)\,| + |\,\psi(t)\rangle\,\frac{d}{dt}\langle\psi(t)\,|$

Compte tenu de (4) et (5), on obtient : $\frac{d}{dt}\,\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}\,H(t)\,\rho(t) - \frac{1}{i\hbar}\,\rho(t)\,H(t)$

Soit : $\boxed{\frac{d}{dt}\,\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}\,[H(t)\ ,\ \rho(t)\ ]}$ (6)

7°) Calculons la probabilité $\mathcal{P}(a_n)$ pour qu'une mesure de l'observable A donne le résultat a_n. Soit : $\mathcal{P}(a_n) = \langle\psi(t)\,|\,\mathcal{P}_n\,|\,\psi(t)\rangle = \langle P_n\rangle$

en utilisant (3) : $\langle P_n\rangle = Tr\ \rho(t)\ P_n$

soit alors : $\boxed{\mathcal{P}(a_n) = Tr\,(\rho(t)\,P_n) = Tr\,(P_n\,\rho(t))}$ (7)

8°) a) Si les $|\,u_n\rangle$ sont les états stationnaires de l'hamiltonien H, on a :

$$H\,|\,u_n\rangle = E_n\,|\,u_n\rangle$$

A partir de (6), on obtient : $i\hbar\,\frac{d}{dt}\,\rho(t) = [H\ ,\ \rho(t)]$

Les éléments de matrice des deux membres de l'égalité nous exige :

d'une part, $\langle u_n\,|\,i\hbar\,\frac{d}{dt}\,\rho(t)\,|\,u_m\rangle = i\hbar\langle u_n\,|\,\dot{\rho}(t)\,|u_m\rangle = i\hbar\,\frac{d}{dt}\,\rho_{nm}(t)$

D'autre part, $\langle u_n\,|\,[H\ ,\ \rho(t)\ ]\,|\,u_m\rangle = \langle u_n\,|\,H\ \rho(t)\ |\,u_m\rangle - \langle u_n\,|\,\rho(t)\ H\ |\,u_m\rangle$

$$= E_n\langle u_n\,|\,\rho(t)\ |\,u_m\rangle - E_m\langle u_n\,|\,\rho(t)\ |\,u_m\rangle$$

$$= (E_n - E_m)\,\rho_{nm}(t)$$

Il vient alors d'après (6) : $\boxed{i\hbar\,\frac{d}{dt}\,\rho_{nm}(t) = (E_n - E_m)\,\rho_{nm}(t)}$ (8)

Les termes diagonaux (n = m) : $i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{nm}(t) = 0$ (9)

b) On en déduit : $\rho_{nm}(t) =$ constante

$$\rho_{nm}(t) = \rho_{nm}(t) \overset{0}{} e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar}$$

Remarque : On dit donc que les populations ρ_{nm} sont constantes, et les cohérences ρ oscillent aux fréquences de Bohr ($\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$) du système.

Compléments :

9°) Supposons que H(t) puisse s'écrire sous la forme $H(t) = H_0 + H_1(t)$.

On pose: $\hat{\rho}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \rho(t) e^{-iH_0 t/\hbar}$

$$\hat{H}_1(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H_1(t) e^{-iH_0 t/\hbar}$$

Donner l'équation d'évolution de $\hat{\rho}(t)$

10°) Supposons maintenant qu'il s'agit d'un système conservatif ayant pour hamiltonien $H = H_0$ ($H_1(t) = 0$) et soit A une observable attachée au système. A l'instant t = 0, la mesure de l'observable A donne la valeur propre a que l'on suppose non dégénérée.
Montrer que l'état du système à l'instant t est un état propre de l'observable A_H avec la valeur propre a : $A_H = e^{-iHt/\hbar} A \; e^{iHt/\hbar}$

Extrait, CASA I, MP II, Juin 1986.

9°) L'évolution dans le temps de l'opérateur $\hat{\rho}(t)$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \frac{i}{\hbar} H_0 \hat{\rho}(t) + e^{-iH_0 t/\hbar} \frac{d}{dt} \rho(t) e^{iH_0 t/\hbar} - \frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} \rho(t) H_0 e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$= \frac{i}{\hbar} H_0 \hat{\rho}(t) + e^{iH_0 t/\hbar} \left(\frac{1}{ih} [H, \rho] \right) e^{-iH_0 t/\hbar} - \frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} \rho(t) H_0 e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$= \frac{i}{\hbar} H_0 \hat{\rho}(t) - \frac{i}{\hbar} \left\{ e^{iH_0 t/\hbar} (H_0 \rho - \rho H_0 + H_1 \rho - \rho H_1) e^{-iH_0 t/\hbar} \right\}$$

$$- \frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} \rho(t) H_0 e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$= - \frac{i}{\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} (H_1 \rho - \rho H_1) e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \left(e^{iH_0 t/\hbar} H_1 \rho e^{-iH_0 t/\hbar} - e^{iH_0 t/\hbar} \rho H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} \right)$$

Introduisons entre H_1 et ρ d'une part et entre ρ et H_1 d'autre part l'unité :

$$1 = e^{-iH_0 t/\hbar} e^{iH_0 t/\hbar}$$

Il vient alors : $$\boxed{\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_I , \hat{\rho}(t)]}$$

10°) Supposons qu'il s'agit d'un système conservatif où $H = H_0$

Soit A une observable attachée à ce système. La mesure de A à $t = 0$ donne la valeur $+ a$ (non dégénérée), donc : $$A \mid \varphi > = a \mid \varphi >$$

L'état du sytème immédiatement après la mesure est : $$\mid \varphi > = \sum_n C_n(o) \mid u_n >$$

A l'instant $t > 0$, l'état du système est : $$\mid \psi(t) > = \sum_n C_n(o)\, e^{-i E_n t / \hbar} \mid u_n >$$

Si $A_H = e^{-iHt/\hbar} A\, e^{iHt/\hbar}$, alors on a $A_H \mid \psi(t) > = a \mid \psi(t) >$!

$$A_H \mid \psi(t) > = e^{-iHt/\hbar} A\, e^{iHt/\hbar} \mid \psi(t) >$$

$$= e^{-iHt/\hbar} A \sum_n C_n(o)\, e^{-iE_n t/\hbar}\, e^{iHt/\hbar} \mid u_n >$$

$$= e^{-iHt/\hbar} A \sum_n C_n(o)\, e^{-iE_n t/\hbar}\, e^{iHt/\hbar} \mid u_n >$$

$$= e^{-iHt/\hbar} A \sum_n C_n(o) \mid u_n >$$

$$= e^{-iHt/\hbar} A \mid \varphi > = e^{-iHt/\hbar}\, a \mid \varphi >$$

$$= a\, e^{-iHt/\hbar} \mid \varphi > = a \sum_n C_n(o)\, e^{iHt/\hbar} \mid u_n >$$

$$= a \sum_n C_n(o)\, e^{iE_n t/\hbar} \mid u_n > = a \mid \psi(t) >$$

Soit : $$\boxed{A_H \mid \psi(t) > = a \mid \psi(t) >}$$

✗ 4 - Opérateur d'évolution.

I) Soit A une observable agissant dans l'espace des états $\mathscr{E}_x$ à n dimensions. Et soit $(\mid \varphi_k >)$ la base orthonormée propre de A $(A \mid \varphi_k > = a_k \mid \varphi_k >,\ k = 1, 2, \ldots, n)$. On définit l'opérateur linéaire

$U(k, l)$ par $U(k, l) = |\varphi_k >< \varphi_l|$.

1°) Calculer l'adjoint $U^+(k, l)$ de $U(k, l)$.

2°) Evaluer le commutateur $[A, U(k, l)]$ et en déduire $[A, U(k, l)]$.

3°) On appelle trace de l'opérateur linéaire B et l'on note Tr {B} la somme des éléments diagonaux de la matrice le représentant ; soit $Tr\{B\} = \sum_{k=1}^{n} B_{kk} = \sum_{k=1}^{n} <\varphi_k |B|\varphi_k>$ dans la base $\{|\varphi_k>\}$.

Calculer la trace Tr $\{U(k, l)\}$ de $U(k, l)$.

4°) Démontrer la relation : $B = \sum_{k,l} B_{kl} U(k, l)$. Pour celà on écrira $B = \mathbb{I} B \mathbb{I}$.

5°) Montrer que : $B_{kl} = Tr\{BU^+(k, l)\}$.

Extrait , FES, MP 2 – PC 2, Janvier 1988.

II) Dans la description de Schrödinger les états d'un système quantique évoluent avec le temps conformément à la loi :

$$|\psi(t)> = U(t, t_o)\ |\psi(t_o)>. \qquad \text{avec} \quad U(t_o, t_o) = \mathbb{I}$$

$U(t, t_0)$ est un opérateur d'évolution.

1°) Montrer que l'opérateur $U(t, t_o)$ satisfait à l'équation :

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = HU \quad (1) \quad (H \text{ étant l'Hamiltonien du système}).$$

En déduire que $U^+ = U^{-1}$ en utilisant (1) si H est hermitique.

2°) Donner l'expression de l'opérateur $U(t, t_o)$ si H ne dépend pas du temps.

3°) Donner l'expression de l'opérateur $U(t + dt, t)$.

Extrait, CASA I, PC 2, Mai 1988.

I) 1°) L'opérateur linéaire $U(k, l)$ est défini par : $U(k, l) = |\varphi_k >< \varphi_l|$

Calculons son adjoint :

$$<\psi_1|\, U^+(k, l)\, |\psi_2> = <\psi_2|\, U(k, l)\, |\psi_1>^* = <\psi_2|\, \varphi_k><\varphi_l|\, \psi_1>^*$$

$$= <\varphi_k|\psi_2><\psi_1|\, \varphi_l> = <\psi_1|\, \varphi_l><\varphi_k|\, \psi_2>$$

$$= <\psi_1|\, U(l, k)\, |\psi_2>$$

Soit donc : $\boxed{U^+(k, l) = U(l, k)}$

2°) Appliquons le commutateur $[A, U(k, l)]$ sur un état quelconque $|\psi>$:

$$[A, U(k, l)]\,|\psi> = \left(A\,,U(k, l) - U(k, l)A\right)\,|\psi>$$

$$= A\,|\varphi_k><\varphi_l|\psi> - |\varphi_k><\varphi_l|A\,|\psi>$$

$$= a_k\,|\varphi_k><\varphi_l|\psi> - |\varphi_k><\varphi_l|a_l^*|\psi>$$

$$= (a_k - a_l)\,|\varphi_k><\varphi_l|\psi>$$

car A est une observable, donc hermitique et ses valeurs propres sont réelles. Soit alors :

$$[A, U(k, l)] = (a_k - a_l)\,U(k, l)$$

On en déduit $[A, U(k, k)] = 0$

3°) Calculons la trace de $U(k, l)$: $Tr\,[U(k, l)] = \sum_{m=1}^{n} <\varphi_m|\,U(k, l)\,|\varphi_m>$

$$= \sum_{m=1}^{n} <\varphi_m|\varphi_k><\varphi_l|\varphi_m> = \sum_{m=1}^{n} \delta_{mk}\ \delta_{lm}$$

Soit : $Tr\,U(k, l) = \delta_{lk}$ (δ étant le symbole de Kronecker)

4°) Démontrons : $B = \sum_{k,l} B_{kl}\ U(k, l)$

écrivons B : $B = \mathbb{1}\,B\,\mathbb{1}$

$$= \sum_{k,l} |\varphi_k><\varphi_k|\,B\,|\varphi_l><\varphi_l|$$

$$= \sum_{k,l} |\varphi_k>\,B_{kl}\,<\varphi_l|$$ (B_{kl} est l'élément de matrice de B)

soit $\boxed{B = \sum_{k,l} B_{kl}\ U(k, l)}$

5°) Calculons : $Tr\,(BU^+(k, l)) = \sum_{s=1}^{n} <\varphi_s|\,BU^+(k, l)\,|\varphi_s>$

$$= \sum_{s=1}^{n} <\varphi_s|\,B\,|\varphi_l><\varphi_k|\varphi_s>$$

$$Tr\ \{BU^+(k,l)\} = \sum_{s=1}^{n} B_{sl}\,\delta_{ks}$$

Soit: $$\boxed{Tr\ BU^+(k,l) = B_{kl}}$$

II 1°) ◆ On définit l'opérateur d'évolution $U(t, t_o)$ qui permet de déterminer l'état $|\psi(t)>$ à partir de $|\psi(t_o)>$ par : $$|\psi(t)> = U(t, t_0)\ |\psi(t_0)> \qquad (1)$$

Nous allons chercher à montrer que : $$i\hbar \frac{dU}{dt} = HU$$

L'équation de Schrödinger s'écrit : $$i\hbar \frac{d|\psi>}{dt} = H\ |\psi>$$

ou encore $$i\hbar \frac{d}{dt}\ |\psi> = i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_o)\ \ |\psi(t_0)> = H\,U(t, t_0)\ \ |\psi(t_0)>$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$[\, i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0)\,]\ |\psi(t_0)> = [H \bullet U(t, t_0)\,]\ |\psi(t_0)> \ \forall\ |\psi(t_0)>$$

Soit : $$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = HU(t, t_0) \qquad (2)$$

◆ Montrons que $U^+ = U^{-1}$: $$i\hbar \frac{dU}{dt} = HU \qquad (3)$$

le conjugué de cette équation s'écrit : $$-i\hbar \frac{dU^+}{dt} = U^+H \qquad (4)$$

Multiplions à gauche les deux membres de l'égalité (3) par U^+ et ceux de (4) par U à droite.

$$i\hbar\, U^+ \frac{dU}{dt} = U^+HU$$

$$-i\hbar \frac{dU^+}{dt} U = U^+HU$$

En faisant la différence de ces deux dernières équations, nous obtenons :

$$i\hbar \left(U^+ \frac{dU}{dt} + \frac{d\,U^+}{dt} U \right) = 0$$

Il vient alors : $$\frac{d}{dt}(U^+U) = 0$$

soit $$U^+U = Cte = U^+(t_0, t_0)\ U(t_0, t_0)$$

Comme le *ket* $|\psi(t_0)>$ est quelconque, il ressort de (1) que : $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$

donc $$U^+(t, t_0)\ U(t, t_0) = \mathbb{1}$$

soit $\boxed{U^+(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)}$

L'opérateur U est donc unitaire.

2°) L'équation (2) peut s'écrire : $\dfrac{dU(t, t_0)}{U(t, t_0)} = \dfrac{H}{i\hbar}\, dt$

soit en intégrant (H étant indépendant du temps) : $U(t, t_0) = e^{-iHt/\hbar}$

3°) Expression de $U(t + dt, t)$

Calculons l'opérateur d'évolution entre deux instants infiniment voisins. Pour cela, écrivons l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$d|\psi(t)\rangle = |\psi(t + dt)\rangle - |\psi(t)\rangle$$
$$= -\frac{i}{\hbar} H\ |\psi(t)\rangle\ dt$$

Il vient alors : $|\psi(t + dt)\rangle = \left(1 - \dfrac{i}{\hbar} H\, dt\right)|\psi(t)\rangle$

on obtient donc : $\boxed{U(t + dt, t) = 1 - \dfrac{i}{\hbar} H\, dt}$

X 5 - Etalement d'un paquet d'ondes libres.

Soient X et P les opérateurs de position et d'impulsion d'une microparticule libre.

1°) Montrer en appliquant le théorème d'Ehrenfest (microparticule libre) que $< X >$ est une fonction linéaire du temps, la valeur moyenne $< P >$ restant constante. Que peut-on dire de $< P^2 >$?

2°) Ecrire les équations d'évolution des valeurs moyennes $< X^2 >$ et $< XP + PX >$. Intégrer ces équations.

3°) En déduire qu'avec un choix convenable de l'origine des temps, l'écart quadratique moyen ΔX est donné par :

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{m^2} (\Delta P)_0^2\, t^2 + (\Delta X)_0^2$$

où $(\Delta X)_0$ et $(\Delta P)_0$ sont les écarts quadratiques moyens à l'instant initial. Comment varie en fonction du temps la largeur du paquet d'onde ΔX. Donner l'interprétation physique.

Rappel : On définit l'écart quadratique moyen ΔA d'un opérateur A, par :

$$\Delta A = \sqrt{(A - < A >)^2} = \sqrt{< A^2 > - < A >^2}\ .$$

4°) Supposons maintenant que la microparticule subit l'action d'un potentiel $V(x) = -ax$ où a est une constante. Comment évolue les valeurs

moyennes de la position X et de l'impulsion P de cette microparticule ? Comparer avec le mouvement classique.
Peut-on généraliser ce résultat à un potentiel quelconque ? Pourquoi ?

Extrait CASA I, MP 2, Mai 1986.

1°) Pour une observable A qui ne dépend pas explicitement du temps, le théorème d'Ehrenfest montre que : $\frac{d< A >}{dt} = \frac{1}{i\hbar} < [A, H] >$

L'hamiltonien du système est : $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$ ← ici $V(X) = 0$ (particule libre)

Appliquons le théorème d'Ehrenfest aux observables X et P: $\frac{d< X >}{dt} = \frac{1}{i\hbar} < [X, H] >$

or $[X, H] = \left[X, \frac{P^2}{2m} + V(X)\right] = \frac{1}{2m}[X, P^2] + [X, V(X)] = \frac{iP\hbar}{m}$ ($[X, V(X)] = 0$)

soit $$\boxed{\frac{d< X >}{dt} = \frac{< P >}{m}} \quad (1)$$

◆ Si $A = P$ on a : $\frac{d< P >}{dt} = \frac{1}{i\hbar} < [P, H] >$

or $[P, H] = \left[P, \frac{P^2}{2m}\right] + [P, V(X)] \overset{*}{=} -i\hbar \frac{\partial V}{\partial X}$ ($[P, \frac{P^2}{2m}] = 0$)

soit $$\frac{d< P >}{dt} = - < \frac{\partial V}{\partial X} > \quad (2)$$

dans notre cas $V = 0$, il vient alors : $$\boxed{\frac{d< P >}{dt} = 0} \quad (3)$$

Remarque : $\frac{d< P >}{dt} = - < \frac{\partial V}{\partial X} >$, soit $< F > = \frac{d< P >}{dt}$

Cette relation représente la loi fondamentale de la dynamique.

L'équation (3) montre que : $$\boxed{< P > = < P >_0 = Cte} \quad (4)$$

la relation (1) devient : $\frac{d< X >}{dt} = \frac{< P >_0}{m} = Cte$

---

* Voir démonstration au complément de ce problème

Soit en intégrant : $$\boxed{< X > = \frac{< P >_0}{m} t + < X >_0} \qquad (5)$$

◆ Si maintenant $A = P^2$, le théorème d'Ehrenfest s'écrit : $\frac{d< P^2 >}{dt} = \frac{1}{i\hbar} < [P^2, H] >$

avec $H = \frac{P^2}{2m}$; on a : $[P^2, H] = 0$

On en déduit : $\frac{d< P^2 >}{dt} = 0$

soit $< P^2 > = < P^2 >_0$

L'observable P^2 n'évolue pas au cours du temps.

2°) ◆ Par un raisonnement analogue, nous avons : $\frac{d< X^2 >}{dt} = \frac{1}{i\hbar} < [X^2, H] >$

or $$[X^2, H] = [X^2, \frac{P^2}{2m}] = \frac{1}{2m} \left\{ X [X, P^2] + [X, P^2] X \right\}$$

$$= \frac{1}{2m} 2 i\hbar [XP + PX]$$

Il vient alors : $$\boxed{\frac{d < X^2 >}{dt} = \frac{1}{m} < XP + PX >}$$

◆ Si $A = XP + PX$: $$\frac{d}{dt} < XP + PX > = \frac{1}{i\hbar} < [XP + PX, H] >$$

or $$[XP + PX, H] = [XP, H] + [PX, H]$$

$$= X[P, H] + [X, H] P + P[X, H] + [P, H] X$$

avec $H = \frac{P^2}{2m}$

Il n'apparait dans la solution plus que les deux commutateurs :

$$[X, H] = + i\hbar \frac{P}{m} \qquad et \qquad [P, H] = 0$$

On en déduit : $$\frac{d}{dt} < XP + PX > = \frac{2}{m} < P^2 >$$

comme $< p^2 >$ n'évolue pas au cours du temps, on a alors :

$$\boxed{\frac{d}{dt} < XP + PX > = \frac{2}{m} < P^2 >_0}$$

Nous obtenons donc un système de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} < X^2 > = \frac{1}{m} < XP + PX > & (6) \\ \frac{d}{dt} < XP + PX > = \frac{2}{m} < P^2 >_0 & (7) \end{cases}$$

Intégrons l'équation (7): $$\boxed{< XP + PX > = \frac{2}{m} < P^2 >_0 t + < XP + PX >_0} \quad (8)$$

Introduisons cette égalité dans l'équation (6) :

$$\frac{d}{dt} < X^2 > = \frac{2}{m^2} < P^2 >_0 t + \frac{1}{m} < XP + PX >_0$$

Soit en intégrant :

$$\boxed{< X^2 > = \frac{1}{m^2} < P^2 >_0 t^2 + \frac{1}{m} < XP + PX >_0 t + < X^2 >_0} \quad (9)$$

3°) On définit l'écart quadratique moyen ΔA d'un opérateur A, par :

$$\Delta A = \sqrt{< A^2 > - < A >^2}$$

Donc pour $A = X$, on a : $(\Delta X)^2 = < X^2 > - < X >^2$

En tenant compte des relations (5) et (9), nous aurons :

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{m^2} < P^2 >_0 t^2 + \frac{1}{m} < XP + PX >_0 t + < X^2 >_0 - \left(\frac{< P >_0}{m} t + < X >_0 \right)^2$$

$$= \frac{1}{m^2} (< P^2 >_0 - < P >_0^2) t^2 + < X^2 >_0 - < X >_0^2 + \frac{1}{m} < XP + PX >_0 t - \frac{2}{m} < X >_0 < P >_0 t$$

Si de plus on choisit à $t = 0$: $< XP + PX >_0 = 0$ et $< X >_0 = 0$

On a donc : $$\boxed{(\Delta X)^2 = \frac{1}{m^2} (\Delta P)_0^2 t^2 + (\Delta X)_0^2}$$

Si t augmente, **la largeur du paquet d'onde ΔX augmente, ce qui correspond à l'étalement du paquet.**

4°) Supposons maintenant que la microparticule subit l'action d'un potentiel $V(X) = -ax$. Le système d'équations d'évolution des valeurs moyennes de X et P devient (en tenant compte des équations (1) et (2))

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} < X > = \frac{< P >}{m} \\ \frac{d}{dt} < P > = - < \frac{\partial V}{\partial X} > = + a \end{cases}$$

Soit en intégrant : $< P > = at + < P >_0$

$$< X > = \frac{a}{2m} t^2 + \frac{< P >_0}{m} t + < X >_0$$

En mécanique classique : $P = mV$, $V = \frac{dx}{dt}$, $F = \frac{dP}{dt} = m\gamma$, les valeurs moyennes $< X >$ et $< P >$ évoluent donc comme pour une particule classique dans le pontentiel $V(X) = -aX$.

Remarque : Ce résultat ne peut être généralisée à un potentiel quelconque car en général :

$$< \frac{dV(X)}{dX} > \neq \left(\frac{dV(X)}{dX}\right)_{x = < X >}$$

Compléments : 1°) Montrer que $\frac{d}{dt} < A > = \frac{1}{i\hbar} < [A, H] >$ ***pour une observable A qui ne dépend pas explicitement du temps ;***

2°) Démontrer que $[A, B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s [A, B] B^{n-s-1}$ **et calculer** $[X, P^n]$ **;** $[P, X^n]$ **et plus généralement** $[P, F(X)]$ *et* $[X, G(P)]$

1°) On définit la valeur moyenne de A dans l'état ψ par :

$$< A > = \int \psi^* A \hat{\psi} \, dx$$

$$\frac{d}{dt} < A > = \frac{d}{dt} \int \psi^* A \frac{d\psi}{dt} dx = \int \frac{d\psi^*}{dt} A \psi \, dx + \int \psi^* A \frac{d\psi}{dt} dx$$

or $\quad H\psi = i\hbar \frac{d\psi}{dt} \quad$ et $\quad \psi^* H = -i\hbar \frac{d\psi^*}{dt}$

Il vient alors :

$$\frac{d}{dt} < A > = -\frac{1}{i\hbar} \int \psi^* HA \psi \, dx + \frac{1}{i\hbar} \int \psi^* AH \psi \, dx$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \int \psi^* (AH - HA) \psi \, dx$$

D'où en faisant intervenir $[A, H] = (AH - HA)$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} < A > = \frac{1}{i\hbar} < [A, H] >}$$ **Théorème d'Ehrenfest**

2°) ◆ Pour $n = 1$, $[A, B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s [A, B] B^{n-s-1}$ est vérifié. Supposons que cette relation est vraie pour $n-1$ soit $\quad [A, B^{n-1}] = \sum_{s=0}^{n-2} B^s [A, B] B^{n-s-2}$

Montrons que c'est vraie aussi pour n :

$$[A, B^n] = [A, BB^{n-1}] = B[A, B^{n-1}] + [A, B] B^{n-1}$$

$$= B \sum_{s=0}^{n-2} B^s [A, B] B^{n-s-2} + [A, B] B^{n-1}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2} B^{s+1} [A, B] B^{n-s-2} + B^0 [A, B] B^{n-1}$$

$$= \sum_{s=-1}^{n-2} B^{s+1} [A, B] B^{n-s-2}$$

(avec $B^0 [A, B] B^{n-1}$ correspondant à $s = -1$)

Posons $s' = s+1$: $$[A, B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s [A, B] B^{n-s-1}$$

Soit pour $s'=s$, on trouve sans peine que : $$\boxed{[A, B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s [A, B] B^{n-s-1}}$$

◆ **Si $A = X$ et $B = P$**

a) $$[X, P^n] = \sum_{s=0}^{n-1} P^s [X, P] P^{n-s-1}$$

Soit avec $[X, P] = i\hbar$

$$[X, P^n] = \sum_{s=0}^{n-1} i\hbar P^s P^{n-s-1} = i\hbar \sum_{s=0}^{n-1} P^{n-1} = i\hbar\, n\, P^{n-1} \qquad (10)$$

b) $$[P, X^n] = \sum_{s=0}^{n-1} X^s (-i\hbar) X^{n-s-1} = -i\hbar\, n\, X^{n-1} \qquad (11)$$

Déterminons l'action de $[P, F(X)]$ sur une fonction $\psi(x,y,z)$ arbitraire :

$$[P, F(X)]\psi = PF(X)\,\psi - F(X)P\,\psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(F(X)\,\psi) - F(X)\left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = -i\hbar \frac{\partial F(X)}{\partial x}\psi$$

Par définition, $F(X)\,\psi = F(x)\,\psi$, d'où $$[P, F(X)] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial X}$$

(11) correspond à $F(X) = X^n$

Par un raisonnement analogue, on peut montrer aisément en développant la fonction G(P) en série de puissance de P : $$\boxed{[X, G(P)] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial P}}$$

Nous remarquons que si $G = P^n$, la relation (10) est vérifiée.

✕6 - Point de vue (ou représentation) d'Heisenberg.

On étudie un système quantique dont le ket d'état à l'instant t est $|\psi(t)\rangle$ et une grandeur physique de ce système, pouvant dépendre explicitement du temps, dont l'opérateur associé est $A(t)$ (par exemple, pour un "quanton" l'opérateur $X + vt\,\mathbb{1}$)

1°) Rappeler l'expression de la valeur moyenne $\langle A \rangle_t$ de la grandeur physique à l'instant t.

2°) Rappeler l'expression du ket d'état à l'instant t en fonction du ket d'état initial $|\psi(t_o)\rangle$ et de l'opérateur U d'évolution du système.

3°) Montrez qu'il existe – et trouvez en l'expression en fonction de A et U – un opérateur unique $A_{H,t_o}(t)$ – dit opérateur associé à la grandeur

physique, en représentation du Heisenberg –, tel que sa valeur moyenne dans l'état initial $|\psi(t_o)>$ soit toujours égale à $< A >_t$.

4°) Le système a pour "q – hamiltonien" H(t). Rappeler l'équation de Schrödinger pour l'évolution de $|\psi(t)>$ adoptant le point de vue de Heisenberg, plutôt que de calculer $< A >_t$ au moyen de la valeur moyenne de A(t) dans l'état $|\psi(t)>$ variable et régi par l'équation de Schrödinger, on va calculer dans l'état fixe $|\psi(t_0)>$ la valeur moyenne de $A_{H,t_0}(t)$.
Il nous reste donc à trouver l'équation d'évolution de l'opérateur $A_{H,t_0}(t)$ correspondant à l'équation d'évolution de Schrödinger pour l'état $|\psi(t)>$. En utilisant l'expression trouvée au 3°), donner l'expression de $A_{H,t_0}(t+\mathrm{d}t)$ au premier ordre en $\mathrm{d}t$, en fonction de $A_{H,t_0}(t)$, $U(t, t_0)$, $\frac{\partial A}{\partial t}$ et du commutateur $[A(t), H(t)]$.

5°) Quelle expression en déduisez vous pour l'opération $i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_{H,t_0}(t)$?

6°) Montrez que l'opérateur $A_{H,t_0}(t)$ obéit finalement à l'équation du mouvement – dite de Heisenberg –

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_{H,t_0}(t) = \left[A_{H,t_0}(t),\ H_{H,t_0}(t) \right] + i\hbar \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{H,t_0}$$

comme Heisenberg,

comme Hamilton ...

7°) On va maintenant appliquer ce charmant formalisme à un quanton dans un environnement que l'on espère bien représenté par le modèle de l'oscillateur harmonique à une dimension, à savoir un hamiltonien.

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$$

En reprenant l'expression trouvée au 5°) exprimez alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_{H,t_0}(t)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{H,t_0}(t)$ en fonction de $X_{H,t_0}(t)$, $P_{H,t_0}(t)$, m et ω.

8°) Quels sont les opérateurs initiaux $X_{H,t_0}(t)$ et $P_{H,t_0}(t)$ en fonction de X et P ? Intégrer ensuite le système d'équation couplées trouvé au 7°) pour avoir les solutions $X_{H,t_0}(t)$ et $P_{H,t_0}(t)$ en fonction de X, P, m, ω et $t - t_0$.

9°) Quelles sont les valeurs moyennes $< X >_t$ et $< P >_t$ en fonction de $< X >_{t_0}$, $< P >_{t_0}$, m, ω et $t - t_0$?

1°) On définit la valeur moyenne de A dans l'état $|\psi(t)>$ par :

$$< A >_t = <\psi(t)|\, A\, |\psi(t)> \qquad (1)$$

2°) Le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t s'exprime en fonction de $|\psi(t_0)\rangle$ par la relation :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)\ |\psi(t_0)\rangle \qquad (2)$$

où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution (cf.exercice 4)

3°) Par hypothèse, nous avons : $\langle A_{H,t_0}\rangle_{t_0} = \langle A\rangle_t$ (2')

C'est à dire $\langle\psi(t_0)|A_{H,t_0}|\psi(t_0)\rangle = \langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle$

Soit en utilisant (2) : $\langle\psi(t_0)|A_{H,t_0}|\psi(t_0)\rangle = \langle\psi(t)|U^+(t, t_0)AU(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$

Cette égalité est vraie quelque soit l'état $|\psi(t_0)\rangle$. Donc :

$$\boxed{A_{H,t_0} = U^+(t, t_0)\ A(t)\ U(t, t_0)} \qquad (3)$$

4°) ◆ L'équation de Schrödinger s'écrit : $i\hbar\dfrac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)\ |\psi(t)\rangle$

◆ Calculons l'opérateur A_{H,t_0} entre deux instants infiniments voisins en écrivant la définition de la dérivée : $\dfrac{d}{dt}A_{H,t_0}(t) = \dfrac{A_{H,t_0}(t+dt) - A_{H,t_0}(t)}{dt}$

Donc $A_{H,t_0}(t+dt) = A_{H,t_0}(t) + \dfrac{d}{dt}A_{H,t_0}(t)\,dt$

$$= A_{H,t_0}(t) + \frac{d}{dt}(U^+AU)\,dt \qquad (4)$$

Pour calculer cette expression, on utilise les propriétés des opérateurs d'évolution établies dans l'exercice 4 . Soit : $i\hbar\dfrac{dU}{dt} = HU \ ; \ -i\hbar\dfrac{dU^+}{dt} = U^+H$ (5)

Calculons : $\dfrac{d}{dt}(U^+AU) = \left(\dfrac{dU^+}{dt}\right)AU + U^+\left(\dfrac{dA}{dt}\right)U + U^+A\dfrac{dU}{dt}$

Soit en tenant compte des relations (5) :

$$\frac{d}{dt}(U^+AU) = \frac{-1}{i\hbar}U^+HAU + \frac{1}{i\hbar}U^+AHU + U^+\frac{dA}{dt}U$$

$$= \frac{1}{i\hbar}(U^+(AH - HA)U) + U^+\frac{dA}{dt}U$$

En utilisant le fait que $[A, H] = AH - HA$, on a :

$$\frac{d}{dt}(U^+AU) = U^+\frac{dA}{dt}U + \frac{1}{i\hbar}U^+[A, H]U$$

La relation (4) devient alors :

$$\boxed{A_{H,t_0}(t + dt) = A_{H,t_0}(t) + \left[U^+\frac{dA}{dt}U + \frac{1}{i\hbar}U^+[A, H]U\,dt\right]} \qquad (6)$$

5°) On en déduit :

$$\frac{dA_{H,t_0}}{dt} = \frac{A_{H,t_0}(t + dt) - A_{H,t_0}(t)}{dt} = U^+ \frac{dA}{dt} U + \frac{1}{i\hbar} U^+ [A, H] U$$

Il vient alors :

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} A_{H,t_0}(t) = i\hbar U^+ \frac{dA}{dt} U^+ + U^+ [A, H] U} \quad (7)$$

6°) Dans le deuxième terme du second membre de l'expression (7), insérons entre A et H le produit UU^+ qui est égal à l'opérateur identité (cf exercice 4)

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_{H,t_0}(t) = i\hbar U^+ \frac{dA}{dt} U + (U^+ A U U^+ H U - U^+ H U U^+ A U)$$

D'après la définition [3], nous trouvons :

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_{H,t_0}(t) = i\hbar U^+ \frac{dA}{dt} U + \left(A_{H,t_0} H_{H,t_0} - H_{H,t_0} A_{H,t_0} \right)$$

finalement :

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} A_{H,t_0}(t) = \left[A_{H,t_0}(t) , H_{H,t_0}(t) \right] + i\hbar \left(\frac{dA(t)}{dt} \right)_{H,t_0}} \quad (8)$$

7°) Lorsque le système est représenté par le modèle de l'oscillateur harmonique à une dimension, l'hamiltonien est donnée par : $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$

En reprenant l'expression (7) et en l'appliquant à $A = X$ et $A = P$, nous obtenons en utilisant le fait que les observables X et P ne dépendent pas explicitement du temps :

$$i\hbar \frac{dX_{H,t_0}(t)}{dt} = U^+ \left[X , \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 \right] U = \frac{U^+}{2m} [X , P^2] U$$

Il n'apparait dans la solution plus que le calcul du commutateur : $[X , P^2] = 2i\hbar P$

On en déduit :

$$i\hbar \frac{dX_{H,t_0}(t)}{dt} = \frac{2}{2m} i\hbar (U^+ P U) = \frac{i\hbar}{m} P_{H,t_0}(t)$$

soit

$$\boxed{\frac{dX_{H,t_0}(t)}{dt} = \frac{1}{m} P_{H,t_0}(t)} \quad (9)$$

Par un raisonnement analogue, on obtient aisément :

$$\boxed{\frac{dP_{H,t_0}(t)}{dt} = - m \omega^2 X_{H,t_0}(t)} \quad (10)$$

8°) Nous désirons calculer les opérateurs initiaux $X_{H,t_0}(t)$ et $P_{H,t_0}(t)$. En effet, d'après la définition (3),

$$X_{H,t_0}(t) = U^+(t_0, t_0)\ X\ U(t_0, t_0) = X$$

$$P_{H,t_0}(t) = U^+(t_0, t_0)\ P\ U(t_0, t_0) = P$$

car $U^+(t_0, t_0) = U(t_0, t_0) = 1$ (cf exercice 4)

◆ Le système d'équations couplées est donné par (9) et (10)

$$\begin{cases} \dfrac{dX_{H,t_0}(t)}{dt} = \dfrac{1}{m} P_{H,t_0}(t) & (9) \\ \dfrac{dP_{H,t_0}(t)}{dt} = -m\omega^2 X_{H,t_0}(t) & (10) \end{cases}$$

En dérivant les équations (9) et (10), on obtient :

$$* \quad \frac{dX_{H,t_0}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\frac{dP_{H,t_0}(t)}{dt} = -\omega^2 X_{H,t_0}(t)$$ d'après la relation (10)

La solution d'une telle équation différentielle du second ordre est de la forme :

$$X_{H,t_0}(t) = C_1 \cos \omega(t-t_0) + C_2 \sin \omega(t-t_0) \qquad (11)$$

On en déduit $P_{H,t_0}(t)$ à partir de (9) : $P_{H,t_0}(t) = m\dfrac{dX_{H,t_0}(t)}{dt}$

$$P_{H,t_0}(t) = m\omega\left(-C_1 \sin \omega(t-t_0) + C_2 \cos \omega(t-t_0)\right) \qquad (12)$$

En tenant compte des conditions initiales à $t = t_0$,,

$$X_{H,t_0}(t) = C_1 = X \quad ; \quad P_{H,t_0}(t) = m\omega C_2 = P$$

Soit : $C_1 = X$ et $C_2 = \dfrac{P}{m\omega}$

finalement (11) et (12) deviennent :

$$X_{H,t_0}(t) = X \cos \omega(t-t_0) + \frac{P}{m\omega} \sin \omega(t-t_0) \qquad (13)$$

$$P_{H,t_0}(t) = P \cos \omega(t-t_0) - m\omega X \sin \omega(t-t_0) \qquad (14)$$

9°) Calculons les moyennes de $X_{H,t_0}(t)$ et $P_{H,t_0}(t)$ lesquelles d'après la définition (2') nous donne : $< X_{H,t_0}(t) >_t = < X >_{t_0}$ et $< P_{H,t_0}(t) >_t = < P >_{t_0}$

D'après (13) et (14), nous obtenons :

$$< X >_{t_0} = < X >_t \cos \omega(t-t_0) + \frac{< P >_t}{m\omega} \sin \omega(t-t_0) \qquad (15)$$

$$< P >_{t_0} = < P >_t \cos \omega(t-t_0) - m\omega < X >_{t_0} \sin \omega(t-t_0) \qquad (16)$$

En multiplant (15) par $\sin \omega(t-t_0)$ et (16) par $\dfrac{1}{m\omega} \cos \omega(t-t_0)$ et en ajoutant les équations obtenus membre à membre, on obtient :

$$< P >_t = < X >_{t_0} m\omega \sin \omega(t-t_0) + < P >_{t_0} \cos \omega(t-t_0) \qquad (17)$$

En repportant (17) dans (15), on a :

$$< X >_{t_0} = < X >_t \cos\omega(t-t_0) + < X >_{t_0} \sin^2\omega(t-t_0) + \frac{< P >_{t_0}}{m\,\omega} \cos\omega(t-t_0)\sin\omega(t-t_0)$$

soit $$< X >_{t_0} \cos^2\omega(t-t_0) = \left(< X >_t + \frac{< P >_{t_0}}{m\omega} \sin\omega(t-t_0) \right) \cos\omega(t-t_0)$$

D'où finalement $$< X >_t = < X >_{t_0} \cos\omega(t-t_0) - \frac{< X >_{t_0}}{m\omega} \sin\omega(t-t_0) \qquad (18)$$

En résumé :

$$< X >_t = < X >_{t_0} \cos\omega(t-t_0) - \frac{< P >_{t_0}}{m\omega} \sin\omega(t-t_0)$$
$$< P >_t = m\omega < X >_{t_0} \sin\omega(t-t_0) + < P >_{t_0} \cos\omega(t-t_0)$$

Remarque : Les équations (9) et (10) généralisent le théorème d'Ehrenfest. Elles sont semblables à celles qui nous donnent l'évolution des grandeurs classiques x et p. Le seul avantage dans cette représentation de Heisenberg est de conduire à des équations qui rappellent d'une certaine manière celles de la mécanique classique.

7 - Inégalité de Heisenberg.

1°) Soit $|\psi>$ le ket d'état d'un système quantique, A et B deux opérateurs hermitiques.

Montrer que la condition nécessaire pour que $|\varphi> \stackrel{df}{=} (A + i\lambda B)\,|\psi>$ ait une norme carrée non négative $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ est que les valeurs moyennes dans l'état $|\psi>$ satisfassent :

$$< A^2 >_\psi \,.\, < B^2 >_\psi \geq \frac{1}{4} < \frac{[A,B]}{i} >_\psi^2 .$$

A propos... $< \frac{[A,B]}{i} >_\psi$ est-il un nombre réel ? pourquoi ?

2°) On a (ou on devrait avoir) coutume d'appeler "dispersion quantique" de la grandeur physique d'opérateur associé A; dans l'état $|\psi>$, la quantité $(\Delta A)_\psi$ non négative telle que :

$$(\Delta A)_\psi^2 \stackrel{df}{=} < (A - < A >_\psi \mathbb{1}) >_\psi^2 .$$

Montrer que : $(\Delta A)_\psi\,(\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2} \left| < \frac{[A,B]}{i} >_\psi \right|$ (inégalité de Heisenberg, théorème qui n'a plus rien à voir avec un principe) (pour cela il pourra être utile de considérer les opérateurs $\hat{A}_\psi \stackrel{df}{=} A - < A >_\psi \mathbb{1}$, $\hat{B}_\psi \stackrel{df}{=} \ldots\ldots$). Qu'en est-il pour le produit $(\Delta X)_\psi\,(\Delta P)_\psi$ dans le cas d'un quanton à une dimension dans l'état $|\psi>$?

3°) On va maintenant se placer du point de vue de Heisenberg problème

précédent. Montrer que $(\Delta A)_t^2 = (A_{H,t_0}(t))_{t_0}^2$

4°) Montrer que $(\Delta A)_{t_1}\,(\Delta B)_{t_2} \geq \frac{1}{2}\left| < \frac{[A_{H,t_0}(t_1),\ B_{H,t_0}(t_2)]}{i} >_{t_0} \right|$.

5°) Appliquer cette inégalité au produit $(\Delta X)_{t_0}\,(\Delta P)_t$ ***dans le cas de l'oscillateur harmonique, à l'aide des solutions trouvées au problème précédent 8°). Quelle est la borne inférieure de*** $(\Delta X)_{t_0}(\Delta P)_t$ ***lorsque*** $t = t_0 + \pi / 2\omega$ ***?***

1°) Considérons le ket : $|\varphi> = (A + i\lambda B)\ |\psi>$

où λ est un réel quelconque ; quel que soit λ, le carré de la norme $<\varphi|\varphi>$ est positif, ce qui s'écrit :

$$<\varphi|\varphi> = <\psi|\,(A - i\lambda B)(A + i\lambda B)\ |\psi>$$

$$= <\psi|\,A^2\,|\psi> + i\lambda <\psi|\,[A,B]\,|\psi> + \lambda^2 <\psi|\,B^2\,|\psi>$$

$$= \lambda^2 <B^2>_\psi - \lambda <\frac{[A,B]}{i}>_\psi + <A^2>_\psi \geq 0$$

Le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est donc négatif ou nul . Soit :

$$\Delta = <\frac{[A,B]}{i}>_\psi^2 - 4 <A^2>_\psi <B^2>_\psi \leq 0$$

Nous avons donc :

$$\boxed{<A^2>_\psi <B^2>_\psi \geq \frac{1}{4} <\frac{[A,B]}{i}>_\psi^2} \qquad (1)$$

◆ Les opérateurs A et B sont supposés hermitiques, donc $[A, B]$ est antihermitique ; il vient alors que $\frac{[A,B]}{i}$ est hermitique. De plus la valeur moyenne d'un opérateur D hermitique quelconque $<\psi|\,D\,|\psi>$ est réelle quel que soit $|\psi>$.

On en déduit que $<\frac{[A,B]}{i}>_\psi$ est un nombre réel.

2°) Considérons les opérateurs : $\hat{A}_\psi = A - <A>_\psi \mathbb{1}$ et $\hat{B}_\psi = B - <B>_\psi \mathbb{1}$

L'inégalité (1) est vérifiée quels que soient A et B hermitiques, ce qui est le cas pour $\hat{A}_\psi$ et $\hat{B}_\psi$. Donc d'après (1), nous obtenons : $<\hat{A}^2>_\psi <\hat{B}^2>_\psi \geq \frac{1}{4} <\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{i}>_\psi^2$ (3)

En se reportant à la définition de l'écart quadratique moyen et en utilisant (2), nous avons :

$$(\Delta A)_\psi = \sqrt{<\hat{A}^2>_\psi} \qquad \text{et} \qquad (\Delta B)_\psi = \sqrt{<\hat{B}^2>_\psi}$$

L'inégalité (3) s'écrit alors : $(\Delta A)_\psi^2\,(\Delta B)_\psi^2 \geq \frac{1}{4} <\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{i}>_\psi^2$

remarquons que $[\hat{A}, \hat{B}] = [A, B]$ (évident) et donc :

$$(\Delta A)_\psi \ (\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2} \left| < \frac{[A, B]}{i} >_\psi \right| \qquad (4)$$

◆ Pour le cas d'un qanton à une dimension dans l'état $|\psi>$:

$$(\Delta X)_\psi \ (\Delta P)_\psi \geq \frac{1}{2} \left| < \frac{[X, P]}{i} >_\psi \right| = \frac{1}{2}\hbar$$

Remarque : Si deux observables sont conjuguées, il existe une limite inférieure précise au produit $\Delta X \ \Delta P$. Cette borne inférieure est atteinte pour l'état fondamental.

3°) On cherche à montrer que $(\Delta A)_t^2 = (\Delta A_{H,t_0}(t))_{t_0}^2$

Par définition $(\Delta A)_t^2 = < (A - < A >_t \mathbb{1})^2 >_t = < A^2 >_t - < A >_t^2$

D'après l'exercice 6 on a : $< A >_t = < X_{H,t_0}(t) >_{t_0}$

Montrons que $< A^2 >_t = < A_{H,t_0}^2(t) >_{t_0}$; en effet :

$$\begin{aligned} <\psi | A^2 | \psi> &= <\psi(t_0) | U^+ A_t^2 U | \psi(t_0)> \\ &= <\psi(t_0) | U^+ A_t U U^+ A_t U | \psi(t_0)> \\ &= <\psi(t_0) | A_{H,t_0}^2(t) | \psi(t_0)> \\ &= < A_{H,t_0}^2(t) >_{t_0} \end{aligned}$$

Il vient alors : $$(\Delta A)_t^2 = < A_{H,t_0}^2 >_t - < A_{H,t_0} >^2 = (\Delta A_{H,t_0})_{t_0}^2 \qquad (5)$$

4°) En considérant (5), on a : $(\Delta A)_{t_1}^2 = \Delta \ A_{H,t_o})_{t_0}^2$

Soit d'après (4) : $$(\Delta A)_{t_1}^2 \ (\Delta B)_{t_2}^2 \geq \frac{1}{4} \left[< \frac{[A_{H,t_0}(t_1) \ , B_{H,t_0}(t_2)]}{i} >_{t_0} \right]^2$$

donc : $$(\Delta A)_{t_1} (\Delta B)_{t_2} \geq \frac{1}{2} \left| < \frac{[A_{H,t_0}(t_1) \ , B_{H,t_0}(t_2)]}{i} >_{t_0} \right| \qquad (6)$$

5°) Appliquons cette dernière expression à X et P :

$$(\Delta A)_{t_0} \ (\Delta P)_t \geq \frac{1}{2} \left| < \frac{[X_{H,t_0}(t_0) \ , P_{H,t_0}(t_1)]}{i} >_{t_0} \right| \qquad (7)$$

or d'après l'exercice 6, on a : $X_{H,t_0}(t_0) = X$

et $$P_{H,t_0}(t) = P \cos \omega(t - t_0) - m \omega X \sin \omega(t - t_0)$$

Soit $\left[X_{H,t_0}(t)\ ,\ P_{H,t_0}(t)\right] = [X\ ,\ P\cos\omega(t-t_0)] = i\hbar\cos\omega(t-t_0)$

L'expression (7) devient alors : $\boxed{(\Delta A)_{t_0}(\Delta P)_t \geq \frac{1}{2}\hbar \left|\cos\omega(t-t_0)\right|}$

Lorsque $t = t_0 + \frac{\pi}{2\omega}$, $\cos\omega(t-t_0) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

d'où $(\Delta A)_{t_0}\ (\Delta P)_t \geq 0$

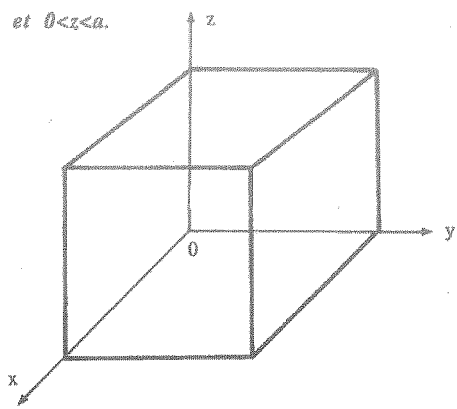
La borne inférieure de $(\Delta A)_{t_0}\ (\Delta P)_t$ est donc nulle.

8 – Particule confinée dans une boîte cubique.

I / On veut étudier une particule quantique de masse : m, confinée dans une portion cubique de l'espace. Dans cette portion règne un potentiel nul et en dehors, le potentiel est infini.

$V(x) = 0$, pour : $0<x<a$, $0<y<a$ et $0<z<a$.

$V(x) = \infty$, ailleurs.



1°) Quelle est la probabilité de trouver la particule dans la région où le potentiel est infini ?

2°) Les fonctions d'ondes solutions de l'équation aux énergies sont de la forme : $\psi(x, y, z) = A_n(x).B_l(y).C_m(z)$ avec : n, l, m entiers "non nul".

L'hamiltonien est alors : $H = H_x + H_y + H_z$ et l'énergie est : $E_{nlm} = E_n + E_l + E_m$.

Donner les fonctions propres et les valeurs propres de l'Hamiltonien H.

3°) Normaliser la fonction d'onde $\psi(x, y, z)$.

4°) Etudier la multiplicité (la dégénérescence) des 3 premiers niveaux d'énergie.

N.B : On donnera un tableau de la forme :

n	l	m	n^2	l^2	m^2	E_{nlm}	*multiplicité*

5°) Calculer le commutateur $[x, p^2]$

Peut-on alors mesurer la position et l'énergie simultanément ?

Extrait, El Jadida , PC2, Janvier 1987.

1°) La particule est confinée dans l'enceinte, la probabilité de trouver la particule en dehors de la boite cubique est donc nulle.

2°) Il s'agit de résoudre l'équation aux valeurs propres :

$$H\psi(x, y, z) = E_{n,l,m}\,\psi(x, y, z) \qquad (1)$$

avec $$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (V(x, y, z) = 0)$$

On cherche les solutions particulières de la forme : $\psi(x, y, z) = A(x)\ B(y)\ C(z)$

L'équation de Schrödinger (1) devient : $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\frac{2mE_{n,l,m}}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi$

$$B(y)\,C(z)\,\frac{d^2A}{dx^2} + A(x)\,C(z)\,\frac{d^2B}{dy^2} + A(x)\,B(y)\,\frac{d^2C}{dz^2} = -k^2A(x)B(y)C(z)$$

Divisons les deux membres par $A.B.C$, on obtient :

$$\frac{1}{A}\frac{d^2A}{dx^2} = -\left(\frac{1}{B}\frac{d^2B}{dy^2} + \frac{1}{C}\frac{d^2C}{dz^2} + k^2\right)$$

fonction de x seul — fonction de y et z

Chacun des membres est donc constant et vaut : $\frac{1}{A}\frac{d^2}{dx^2} = -k_x^2$ (2)

On a également : $\frac{1}{B}\frac{d^2B}{dy^2} = -\left(\frac{1}{C}\frac{d^2C}{dz^2} + k^2 - k_x^2\right) = -k_z^2$ (3)

et $\frac{1}{C}\frac{d^2C}{dz^2} = -k_z^2$ (4)

avec $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$

Les solutions de (2), (3), (4) : $A(x) = A_1 \sin(k_x x + \varphi_1)$

$B(y) = A_2 \sin(k_y y + \varphi_2)$

$C(z) = A_3 \sin(k_z z + \varphi_3)$

et donc $\psi(x, y, z)$ s'écrit : $\psi(x, y, z) = A \sin(k_x x + \varphi_1) \sin(k_y y + \varphi_2) \sin(k_z z + \varphi_3)$

Or la fonction d'onde est identiquement nulle à l'extérieur de la boite et en particulier pour $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; et pour $x = a$; $y = a$ et $z = a$.

Ces conditions nous exige : $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$

et
$$\begin{cases} \sin k_x a = 0 & \rightarrow \quad k_x = n\pi/a \\ \sin k_y a = 0 & \rightarrow \quad k_y = l\pi/a \\ \sin k_z a = 0 & \rightarrow \quad k_z = m\pi/a \end{cases}$$

La fonction d'onde $\psi(x,y,z)$ s'écrit donc :

$$\boxed{\psi(x, y, z) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{a}\right)}$$

Les valeurs possibles de l'énergie sont : $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ avec $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

soit : $\boxed{E_{n,l,m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}(n^2 + l^2 + m^2)}$ ou n, l, m sont des entiers positifs.

L'énergie de la particule est donc quantifiée et dépend des nombres quantiques n, l et m.

3°) La condition de normalisation de la fonction d'onde s'écrit :

$$\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y, z)|^2 \, dx \, dy \, dz = 1$$

soit alors : $$A^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^a \sin^2\left(\frac{l\pi y}{a}\right) dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi z}{a}\right) dz = 1$$

Chaque intégrale vaut $\frac{a}{2}$. Il vient alors : $A^2 \frac{a^3}{8} = 1$ soit $\boxed{A = \sqrt{\frac{8}{a^3}}}$

4°) A une même valeur propre E correspond plusieurs fonctions propres différentes. Dans une telle situation, on dit que la valeur propre est dégénérée, le degré de dégénérescence étant égal au nombre de fonctions propres indépendantes correspondant à cette même valeur propre.

La multiplication des trois premiers niveaux d'énergie est représentée dans le tableau ci-après.

On pose : $E_1 = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

n	l	m	n^2	l^2	m^2	E_{nlm}	multiplicité
1	1	1	1	1	1	E_1	niveau fondamental 1 fois dégénéré
1	1	2	1	1	4	$2E_1$	$2^{ème}$ niveau d'énergie
1	2	1	1	4	1	$2E_1$	3 fois dégénéré
2	1	1	4	1	1	$2E_1$	
1	2	2	1	4	4	$3E_1$	$3^{ème}$ niveau d'énergie
2	1	2	4	1	4	$3E_1$	3 fois dégénéré
2	2	1	4	4	1	$3E_1$	

5°) **Commutateur** $[X, P^2]$:

$$[X,P^2] = P\,[X,P] + [X,P]P = 2i\hbar P$$

L'énergie de la particule étant $\frac{P^2}{2m}$, ne commutant pas avec la position X. Donc, on ne peut pas mesurer simultanément l'énergie et la position de la particule.

9 - Puits carré de potentiel : Etats liés et non liés.

On considère le puits de potentiel défini par :

$V(x) = 0$ *pour* $|x| > a$

$V(x) = -V_0$ *pour* $|x| < a$; $V_0 > 0$

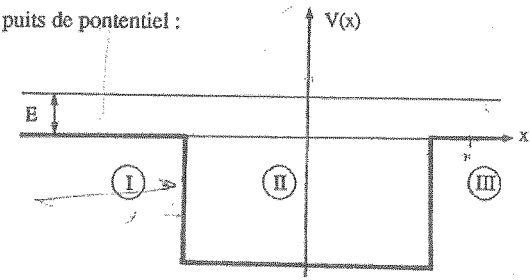
1°) Discuter la nature du spectre d'énergie d'une microparticule dans ce potentiel.

2°) Calculer les fonctions d'onde associées aux états stationnaires d'une microparticule de masse m, d'énergie $E > 0$, arrivant de la région $x = -\infty$. (dans la région $x > a$, on cherchera la solution dont le comportement est celui d'une onde qui a pour amplitude γ et qui se propage dans la région des x positifs. Les conditions de continuité en $x = a$ et $x = -a$ suffisent alors à déterminer les amplitudes des différentes solutions en fonction de γ).

3°) Calculer les cœfficients de transmission et de réflexion. (toujours dans le cas $E > 0$).

Extrait, casablanca I, MP2, Janvier 1987.

1°) Représentation graphique du puits de pontentiel :



◆ Si $-V_0 < E < 0$; Les états sont liés et le spectre d'énergie est discret

◆ Si $E > 0$; Les états sont non liés et le spectre d'énergie est continue .

* Notre étude se limite **au cas où $E>0$.** Dans ce cas, on distingue trois régions *I*, *II* et *III*.

Ecrivons l'équation aux états stationnaires d'énergie dans chacune de ces trois régions :

région I : $$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0 \qquad (1)$$

La solution de l'équation (1) s'écrit : $\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$ avec : $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

région II : $$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)\psi_2 = 0 \qquad (2)$$

solution : $\psi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx}$ avec : $q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)$

région III : Le raisonnement est analogue à (1) et admet comme solution :

$$\psi_3(x) = \gamma e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$$

$A_1 e^{ikx}$ représente l'onde incidente, $B_1 e^{-ikx}$ l'onde réfléchie par le saut fini de potentiel. γe^{ikx} est l'onde transmise qui s'éloigne vers l'infini, $B_3 e^{-ikx}$ est l'onde de retour de l'infini. Ainsi par hypothèse, on aura $B_3 = 0$. En résumé, nous donnons les fonctions d'onde sous les formes suivantes pour alléger les écritures et par commodité des calculs qui suivent :

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik(x+a)} + B_1 e^{ik(x+a)} \qquad x < -a$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik(x-a)} + B_2 e^{-ik(x-a)} \qquad -a \le x \le a$$

$$\psi_3(x) = \gamma e^{ik(x-a)} \qquad x > a$$

Ecrivons les conditions de raccordement de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = -a$ et $x = +a$:

$$x = -a \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 e^{-2iqa} + B_2 e^{2iqa} \\ ik(A_1 - B_1) = iq\,(A_2 e^{-2iqa} - B_2 e^{2iqa}) \end{cases} \qquad (4) \qquad x = a \begin{cases} A_2 + B_2 = \gamma \\ iq\,(A_2 - B_2) = ik\gamma \end{cases} \qquad (5)$$

La résolution des équations (4) et (5) nous permettent d'écrire :

$$2A_2 = \gamma\left(1 + \frac{k}{q}\right) \quad ; \quad 2B_2 = \gamma\left(1 - \frac{k}{q}\right) \qquad (6)$$

$$\begin{cases} 2A_1 = A_2\left(1 + \frac{q}{k}\right)e^{-2iqa} + B_2\left(1 - \frac{q}{k}\right)e^{2iqa} & (7) \\ 2B_1 = A_2\left(1 - \frac{q}{k}\right)e^{-2iqa} + B_2\left(1 + \frac{q}{k}\right)e^{2iqa} & (8) \end{cases}$$

Remplaçons A_2 et B_2 par leur valeurs respectives dans (7) et (8) :

$$2A_1 = \frac{\gamma}{2}\left[\left(1 + \frac{q}{k}\right)\left(1 + \frac{k}{q}\right)e^{-2iqa} + \left(1 - \frac{q}{k}\right)\left(1 - \frac{k}{q}\right)e^{2iqa}\right]$$

$$2B_1 = \frac{\gamma}{2}\left[\left(1 - \frac{q}{k}\right)\left(1 + \frac{k}{q}\right)e^{-2iqa} + \left(1 + \frac{q}{k}\right)\left(1 - \frac{k}{q}\right)e^{2iqa}\right]$$

ou encore $$A_1 = \frac{\gamma}{4}\left[\frac{(k+q)^2}{qk}e^{-2iqa} - \frac{(q-k)^2}{qk}e^{2iqa}\right] \qquad (9)$$

$$B_1 = \frac{\gamma}{4}\frac{k^2 - q^2}{qk}\left(e^{-2iqa} - e^{2iqa}\right) = -\frac{\gamma}{2}i\frac{k^2 - q^2}{kq}\sin 2qa \qquad (10)$$

3°) ◆ **Le cœfficient de transmission** est défini par : $T = \frac{j_t}{j_i} = \frac{|\psi_t|^2}{|\psi_i|^2} = \frac{|\gamma|^2}{|A_1|^2}$

Compte tenu de (9), on obtient : $$\frac{1}{T} = \frac{(q+k)^4 + (q-k)^4 - 2(q^2 - k^2)^2\cos 4qa}{16q^2k^2}$$

Or $$(q+k)^4 + (q-k)^4 = 2[(q^2 - k^2)^2 + 8k^2q^2]$$

Il vient alors : $$\frac{1}{T} = \frac{2(q^2 - k^2)(1 - \cos 4qa) + 16k^2q^2}{16k^2q^2}$$

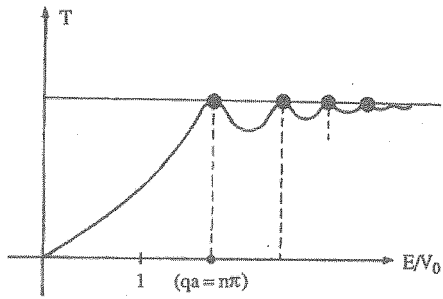
ou encore $$\boxed{\frac{1}{T} = \frac{1 + (q^2 - k^2)^2\sin^2 2qa}{4k^2q^2}}$$

◆ **Le cœfficient de réflexion :** $R = \frac{j_r}{j_i} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$

Compte tenu de (9) et (10), nous avons : $$\boxed{R = \frac{|B_1|^2}{|\gamma|^2}T = \frac{1}{4}\frac{(k^2 - q^2)^2\sin^2 2qa}{k^2q^2}T}$$

Remarque : i) On vérifie aisément que $R + T = 1$: donc la particule est soit réfléchie, soit transmise. Contrairement à la mécanique classique où les prévisions donnent une probabilité nulle à la particule de revenir en arrière (c'est-à-dire d'être réfléchie). Nous savons qu'en mécanique quantique, les calculs montrent que la particule incidente a une probabilité non nulle d'être réfléchie.

ii) Pour $E > 0$, les résultats peuvent se présenter graphiquement. Si $E = V_0$, le cœfficient de transmission $T < 1$, c'est-à-dire, il y a une réflexion partielle. On obtient $T = 1$ que pour certaines valeurs de E/V_0 qui correspondent à $R = 0$. Les calculs montrent que $R = 0$ pour $qa = n\pi$: Ce phénomène est ondulatoire et le système similaire est **l'interféromètre Perot–Fabry.**



Complément : Etudier le cas où $-V_0 < E < 0$ pour le cas du puits étudié dans l'exercice précédent.

Il s'agit maintenant des états liés. Le raisonnement est analogue et la solution des équations de Schrödinger nous imposent :

$$x \le -a \; : \qquad \psi_1(x) = A\, e^{\rho(x+a)} + B e^{-\rho(x+a)} \qquad \text{avec} \quad \rho^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$-a \le x \le +a \; : \qquad \psi_2(x) = C\, e^{iqx} + D\, e^{-iqx} \qquad \text{avec} \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)$$

$$x \ge a \; : \qquad \psi_3(x) = E\, e^{\rho(x-a)} + F e^{-\rho(x-a)}$$

Comme $\psi(x)$ doit être bornée dans les régions *I* et *III*, il faut donc imposer : B = 0 et $E = 0$

Les conditions de raccordement en $x = -a$ et $x = +a$ donnent :

$$x = -a \begin{cases} A = C\, e^{-iqa} + D e^{iqa} \\ \rho A = iq(C e^{-iqa} - D e^{iqa}) \end{cases} \qquad x = a \begin{cases} C e^{iqa} + D e^{-iqa} = F \\ iq\left(C e^{iqa} - D e^{-iqa}\right) = -\rho F \end{cases}$$

Soit alors :

$$C = e^{iqa}\,\frac{q - i\rho}{2q}A \quad ; \quad D = e^{-iqa}\,\frac{q + i\rho}{q}A \qquad (11)$$

$$F = 2Ce^{iqa}\,\frac{iq}{iq - \rho} = 2e^{2iqa}\,\frac{iq + \rho}{iq - \rho}A \qquad (12)$$

et

$$F = 2De^{-iqa}\,\frac{iq}{iq + \rho} = 2e^{-2iqa}\,\frac{iq - \rho}{iq + \rho}A \qquad (13)$$

L'égalité (12) et (13) nous exige :

$$e^{4iqa} = \left(\frac{iq - \rho}{iq + \rho}\right)^2 \qquad (14)$$

Comme ρ et q dépendent de E, l'équation (14) ne peut être satisfaite que pour certaines valeurs de E : **c'est la quantification de l'énergie.** Deux cas sont possibles :

a) si $\dfrac{\rho - iq}{\rho + iq} = -e^{2iqa}$ (15)

Soit : $\rho(1 + e^{2iqa}) = -iq(e^{2iqa} - 1)$

$$\frac{\rho}{q} = -i\,\frac{e^{iqa}}{e^{iqa}}\,\frac{e^{iqa} - e^{-iqa}}{e^{iqa} + e^{-iqa}} = -i\,\frac{2i\sin qa}{2\cos qa}$$

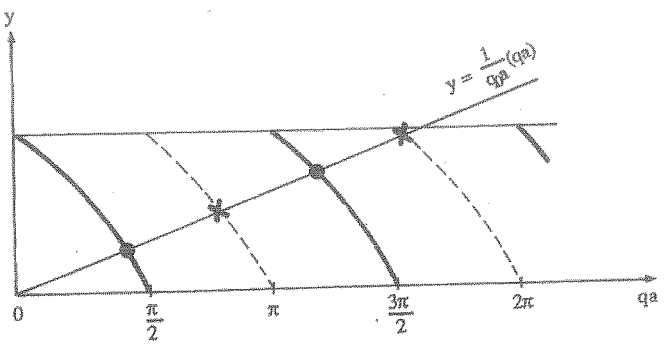
Soit : $\boxed{\dfrac{\rho}{q} = tg(qa)}$

Posons : $q_0 = \sqrt{\dfrac{2m V_0}{\hbar^2}} = \sqrt{\rho^2 + q^2}$

On obtient alors : $\dfrac{1}{\cos^2 qa} = 1 + tg^2 qa = 1 + \dfrac{\rho^2}{q^2} = \left(\dfrac{q_0}{q}\right)^2$

L'équation (15) est donc équivalente au système : $\begin{cases} |\cos qa| = \dfrac{q}{q_0} \\ tg(qa) > 0 \end{cases}$

Le résolution graphique de ce système nous donne les énergies quantifiées des états liés. Ces niveaux d'énergie sont déterminés dans le plan (y, qa) par l'intersection d'une droite $\left(y = \dfrac{1}{q_0 a}(qa)\right)$ de pente $1/q_0 a$ avec des arcs d'une fonction sinusoïdale (en traits gras) : $|\cos qa|$ avec la condition $tg(qa) > 0$.



Nous obtenons donc un certain nombre de niveaux d'énergie dont les fonctions d'onde sont paires : Il est facile de vérifier que $\psi(-x) = \psi(x)$ (en repportant (15) dans (11) et (12), on obtient $F = A$ et $C = D$)

b) Si $\dfrac{\rho - iq}{\rho + iq} = e^{2iqa}$

Un raisonnement analogue nous conduit à : $\begin{cases} |\sin(qa)| = \dfrac{q}{q_0} \\ tg(qa) < 0 \end{cases}$

Les niveaux d'énergie sont obtenus par l'intersection de la même droite et des arcs (en pointillés). Les fonctions d'onde sont dans ce cas impaires.

10 - Puits infini (centré en $x = 0$).

On considère le potentiel $V(x)$ définit par la fonction :

$V(x) = 0$ *pour* $|x| \leq \dfrac{L}{2}$

$V(x) = +\infty$ *pour* $|x| > \dfrac{L}{2}$

1°) Représentez la courbe $V(x)$.

2°) a) Ecrire l'énergie totale E de la particule.

b) En appliquant le principe de correspondance, donner l'hamiltonien (indépendant du temps) de la particule. Ecrire l'équation de Schrödinger.

3°) Déterminez la forme générale (exprimée par des exponentielles) des fonctions d'onde $\psi(x)$ solutions de l'équation aux valeurs propres. On posera : $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

4°) a) Ecrire les conditions aux limites (que l'on justifiera rapidement).

b) En déduire une condition sur k.

c) Déterminer l'énergie totale de la particule, montrer qu'elle est quantifiée.

5°) Déterminer les fonctions d'onde $\psi_n(x)$:

a) Sous forme d'exponentielles, puis sous forme trigonométrique. Montrer alors que ces fonctions $\psi_n(x)$ sont de parité (ou symétrique) bien définie. [ne pas confondre parité de n et parité de $\psi_n(x)$].

b) Normer ces fonctions et montrer (en le justifiant) qu'on peut les prendre réelles.

c) Reproduire et compléter le tableau suivant. (on précisera dans la 4ème colonne si $\varphi_n(x)$ est symétrique : S, ou anti-symétrique : A.S)

n	E_n	$\psi_n(x)$	symétrique
1			
2			
3			
4			

d) Représenter les courbes $\psi_n(x)$ puis $|\psi_n(x)|^2$ pour n = 1,2,3,4. Que représente $|\psi_n(x)|^2$?

e) Donner, en le justifiant, le degré de dégénérescence de E_n

f) Avec : $< x \mid \psi_n > = \psi_n(x)$

Vérifier que : $< \psi_i \mid \psi_j > = \delta_{i,j}$ $\quad i,j = 1,2,3,4.$

[Il est utile de considérer l'intervalle d'intégration et la parité des fonctions à intégrer pour limiter la longueur des calculs].

6°) L'état décrivant la particule à l'instant $t = 0$ est :

$$|\phi(0) > = C_1 |\psi_1 > + C_2 |\psi_2 > + C_3 |\psi_3 > + C_4 |\psi_4 >$$

a) Quelle est la probabilité, lorsqu'on mesure l'énergie de la particule de trouver une valeur inférieure à $\frac{3\pi^2\hbar^2}{mL^2}$?

b) Application numérique : $C_1 = C_2 = \frac{C_3}{2} = \frac{C_4}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

7°) On montre que la probabilité pour un système quantique, d'effectuer une transition entre 2 états décrits par les fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2, sous l'action d'un rayonnement électromagnétique (polarisé suivant x'x) est proportionnelle au carré du moment de transition μ_x soit :

$$P(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \sim |\mu_{x\,1\rightarrow 2}|^2 \quad \text{avec} \quad \mu_{x\,1\rightarrow 2} = < \psi_1 \mid X \mid \psi_2 >$$

a) Déterminer la matrice représentative de l'opérateur position x dans la base $\{|\psi_i>\}$ i = 1,2,3,4. [voir remarque § 7f)]

b) Montrer alors que de telles transitions entre $|\psi_m >$ et $|\psi_n >$ ne sont permises (possibles) que si les nombres m, n obéissent à une loi simple (règle de sélection) que l'on précisera. (Les autres transitions sont dites interdites).

8°) Calculer dans l'état : $|\psi_n >$ $(n = 1,2,3,4)$.

a) $\langle X \rangle$ *et* $\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$

b) $\langle P_x \rangle$ *et* ΔP_x

c) $\Delta X \cdot \Delta P_x$. Conclusion ?

9°) Peut-on mesurer simultanément la position et l'énergie ? (Justifiez votre réponse par un calcul).

10°) Peut-on mesurer simultanément P_x et E ?

Formulaire

$$\int_0^{L/2} \sin^2 n\frac{\pi}{L}x.dx = \int_0^{L/2} \cos^2 n\frac{\pi}{L}x.\,dx = \frac{1}{4}L$$

$$\int_0^{L/2} \sin m\frac{\pi}{L}x \cdot \sin n\frac{\pi}{L}x \cdot dx = \frac{L}{2\pi}\left[\frac{\sin(m-n)\frac{\pi}{2}}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\frac{\pi}{2}}{m+n}\right]$$

$$\int_0^{L/2} \cos m\frac{\pi}{L}x \cdot \cos n\frac{\pi}{L}x \cdot dx = \frac{L}{2\pi}\left[\frac{\sin(m+n)\frac{\pi}{2}}{m+n} - \frac{\sin(m-n)\frac{\pi}{2}}{m-n}\right]$$

$$\int_0^{L/2} x \sin p\frac{\pi}{L}x \cdot \cos q\frac{\pi}{L}x \cdot dx = \frac{L^2}{2\pi^2}\left[\frac{\sin(p+q)\frac{\pi}{2}}{(p+q)^2} + \frac{\sin(p-q)\frac{\pi}{2}}{(p-q)^2}\right]$$

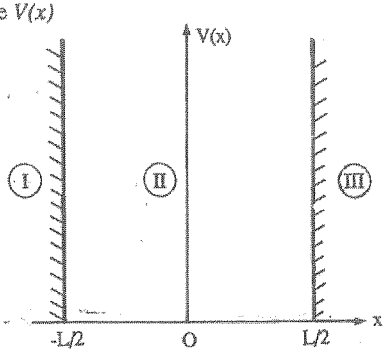
$$- \frac{L^2}{4\pi}\left[\frac{\cos(p+q)\frac{\pi}{2}}{p+q} + \frac{\cos(p-q)\frac{\pi}{2}}{p-q}\right]$$

$$\int_0^{L/2} x^2 \sin^2 n\frac{\pi}{L}x \cdot \frac{\pi}{L}x \cdot dx = \frac{L^3}{8}\cdot\left(\frac{1}{6} - \frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\int_0^{L/2} x^2 \cos^2 n\frac{\pi}{L}x \cdot dx = \frac{L^3}{8}\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2}\right)$$

Extrait, Marrakech, MP2 – PC2, 1984.

1°) Représentation de $V(x)$



2°) a) L'énergie totale de la particule est donnée par : $E = \frac{P^2}{2m} + V(x)$

b) A l'inpulsion P est associé l'opérateur $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, donc à P^2 est associé l'opérateur $-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Au potentiel $V(x)$ est associé $V(X)$. Il vient alors, l'hamiltonien du système indépendant du temps : $H = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(X)$.

L'équation de Schrödinger s'écrit donc : $\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(X)\right]\psi = E\psi$

ou encore : $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(X))\,\psi = 0$ (1)

3°) Cette équation a des solutions quel que soit $E > 0$. La particule est confinée dans la région II. Le potentiel est nul dans cette région et égale à $+\infty$ dans les région I et III : C'est une barrière impénétrable. Nous avons donc $\psi = 0$ dans les régions I et III.

Dans la région II, le potentiel est nul et l'équation (1) devient : $\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$

la solution d'une telle équation : $\psi_{II} = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}$ avec $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

4°) a) La continuité de la fonction d'onde en $x = -L/2$ et $x = L/2$ exige que l'on ait :

$$A\,e^{-ikL/2} + B\,e^{ikL/2} = 0 \quad ; \quad A\,e^{ikl/2} + B\,e^{-ikL/2} = 0$$

b) De ces deux relations on tire :

$A = -B$ (2) soit $\sin\frac{kL}{2} = 0 \longrightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$ n pair > 0

ou $A = B$ (3) soit $\cos\frac{kL}{2} = 0 \longrightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$ n impair > 0

c) En définitive, (2) et (3) exigent : $k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{2m\,E_n}{\hbar^2}$

Soit $\boxed{E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m\,L^2}\,n^2}$ n entier > 0

5°) a) ◆ Cas où $A = -B$ (2) on a : $\psi_n(x) = A\left(e^{ik_nx} - e^{-ik_nx}\right) = 2\,i\,A\,\sin k_nx$

Soit $\boxed{\psi_n(x) = 2\,i\,A\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$ avec n pair > 0

On voit que cette fonction est **impaire (antisymétrique).**

◆ Cas où $A = B$ (3) $\psi_n(x) = A\left(e^{ik_nx} + e^{-ik_nx}\right) = 2A\cos k_nx$

Soit $\boxed{\psi_n(x) = 2A\cos\frac{n\pi x}{L}}$ avec n impair > 0

Cette fonction est **paire (symétrique).**

En résumé, nous avons : $\psi = 0$ pour $x \leq \frac{-L}{2}$ et $x \geq \frac{L}{2}$

$$\psi_{II} = \begin{cases} \psi_n(x) = A' \sin \frac{n\pi x}{L} & n \text{ pair} > 0 \quad (4) \\ \psi_n(x) = A'' \cos \frac{n\pi x}{L} & n \text{ impair} > 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2 \qquad n \text{ entier} > 0$$

Remarque : i) Si nous effectuons une translation de l'origine des coordonnées : $x = x' - \frac{L}{2}$ les deux formes de $\psi_n(x)$ se ramènent à la forme unique : $\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{L}$ $n = 1,2\ldots$

ii) On retrouve les niveaux d'énergie en écrivant que l'onde de De Broglie est stationnaire :

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{h}{2mv}$$

$$L^2 = \frac{n^2 h^2}{4m^2 v^2} = \frac{n^2 h^2}{8mE} \qquad (E = \frac{1}{2} mv^2)$$

d'où $$E = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \qquad n = 1,2,\ldots$$

b) La condition de normalisation, soit ici $\int |\psi_n(x)|^2 \, dx = 1$, donne immédiatement :

$$|A'|^2 \int_{-L/2}^{L/2} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \, dx = 2|A'|^2 \int_0^{L/2} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \, dx = 2 |A'|^2 \frac{L}{4} = 1$$

On a donc : $$|A'|^2 = \frac{2}{L}$$

En choisissant A' réel et positif (si $A' \in \mathbb{C}$), la fonction ne va différer que d'un facteur de phase près, d'où : $$A' = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Par un raisonnement analogue, la condition de normalisation appliquée à l'égalité (5) nous exige : $$A'' = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Il vient alors :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n \text{ pair} > 0$$

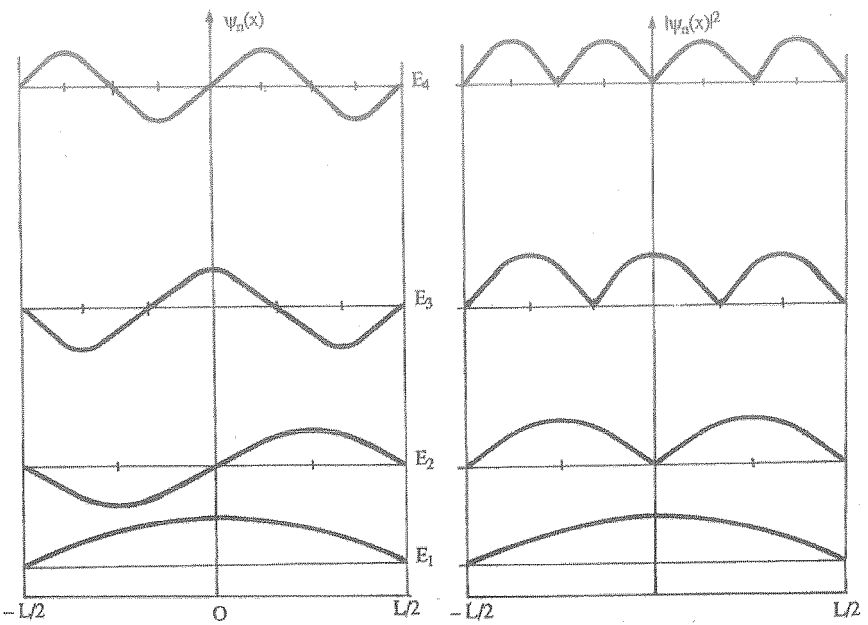
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} \qquad n \text{ impair} > 0$$

c) A partir des résultats précédents, nous pouvons complèter le tableau ci dessous. On pose

à cet effet : $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

n	E_n	$\psi_n(x)$	symétrie
1	E_1	$\sqrt{\frac{2}{L}} cos \frac{\pi x}{L}$	S
2	$4E_1$	$\sqrt{\frac{2}{L}} sin \frac{2\pi x}{L}$	$A.S$
3	$9E_1$	$\sqrt{\frac{2}{L}} cos \frac{3\pi x}{L}$	S
4	$16E_1$	$\sqrt{\frac{2}{L}} sin \frac{4\pi x}{L}$	$A.S$

d) Représentons graphiquement les fonctions d'onde $\psi_n(x)$ et $|\psi_n(x)|^2$ qui représentent la densité de probabilité des quatre premiers états.



e) A chaque valeur propre E_n correspond une seule fonction d'onde :
On dit que les valeurs E_n sont des valeurs propres simples, leur degré de dégénérescence est égale à un.

f) Vérifions que $< \psi_i | \psi_j > = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$

nous avons montré que $< \psi_i | \psi_j > = 1$ (condition de normalisation).

◆ **i , j sont paires :**

$$< \psi_i | \psi_j > = \int_{-L/2}^{L/2} \psi_i^* \, \psi_j \, dx = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \sin \frac{i\pi x}{L} \sin j \frac{\pi x}{L} \, dx$$

$$= \frac{4}{L} \int_0^{L/2} \sin \frac{i\pi x}{L} \sin j \frac{\pi x}{L} \, dx \quad \text{(La fonction à intégrer étant paire)}$$

En utilisant le formulaire joint, on obtient :

$$< \psi_i | \psi_j > = \frac{\sin (i - j)\, \pi/2}{(i - j)\, \pi/2} - \frac{\sin (i - j)\, \pi/2}{(i + j)\, \pi/2}$$

$i \neq j$ et $i - j = 2n \ (n \in \mathbb{Z})$; les deux termes sont nuls et par suite : $< \psi_i | \psi_j > = 0$

◆ **i , j sont impaires :**

$$< \psi_i | \psi_j > = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi x}{L} \, dx$$

$$= \frac{4}{L} \int_0^{L/2} \cos \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi x}{L} \, dx \quad \text{(la fonction à intégrer étant paire)}$$

$$= \frac{\sin (i + j)\, \pi/2}{(i + j)\, \pi/2} + \frac{\sin (i - j)\, \pi/2}{(i - j)\, \pi/2}$$

i étant différent de j tel que : $i - j$ et $i + j$ sont toujours paires, d'où : $< \psi_i | \psi_j > = 0$

◆ **Si i est paire, j est impaire :**

$$< \psi_i | \psi_j > = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi x}{L} \, dx$$

$$= 0 \quad \text{(car la fonction à intégrer est une fonction impaire)}$$

6°) L'état décrivant la particule à l'instant $t = 0$ est :

$$|\phi(0)> = C_1 |\psi_1> + C_2 |\psi_2> + C_3 |\psi_3> + C_4 |\psi_4>$$

a) Lorsqu'on mesure l'énergie de la particule à $t = 0$, les résultats de mesure sont les valeurs propres E_n $(n = 1, 2, 3, 4)$.

L'énergie $E = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{mL^2}$ correspond à $E_2 < E < E_3$. Donc la probabilité de trouver une valeur inférieure à $\frac{3\pi^2 \hbar^2}{mL^2}$ est : $\mathcal{P} = |<\psi_1 \ |\phi(0)>|^2 + |<\psi_2 |\phi(0)>|^2$

$$\boxed{\mathcal{P} = |C_1|^2 + |C_2|^2}$$

b) A. N : $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ soit $\mathcal{P} = \frac{1}{5}$

7°) La matrice représentative de l'opérateur position X dans la base $\{|\psi_i>\}$ $i = 1,2,3,4$ est donnée par ses éléments de matrices : $X_{ij} = <\psi_i | X | \psi_j>$

Si $i = j$, X_{ij} sont nuls car la fonction à intégrer est impaire.

Si $i \neq j$ avec (i, j) soient toutes les deux paires, soient toutes les deux impaires : dans ce cas la fonction à intégrer est $x \sin px \sin qx$ ou $x \cos px \cos qx$. Ces fonctions sont impaires et donc les X_{ij} sont nuls.

Si $i \neq j$ (l'un est paire et l'autre impaire, la matrice est symétrique) :

$$X_{ij} = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x \sin i\frac{\pi x}{L} \cos j\frac{\pi x}{L}\,dx = \frac{4}{L}\int_{0}^{L/2} x \sin i\frac{\pi x}{L} \cos j\frac{\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{4}{L}\left\{\frac{L^2}{2\pi^2}\left[\frac{\sin(i+j)\pi/2}{(i+j)^2} + \frac{\sin(i-j)\pi/2}{(i-j)^2}\right] - \frac{L^2}{4\pi}\left[\frac{\cos(i+j)\pi/2}{(i+j)^2} + \frac{\cos(i-j)\pi/2}{(i-j)^2}\right]\right\}$$

Nous obtenons donc :

i	j	$(i+j)\,\pi/2$	$(i-j)\,\pi/2$	$\sin(i+j)\,\pi/2$	$\sin(i-j)\frac{\pi}{2}$	X_{ij}
2	1	$3\pi/2$	$\pi/2$	-1	1	$16L/9\pi^2$
2	3	$5\pi/2$	$-\pi/2$	1	-1	$-48L/25\pi^2$
4	1	$5\pi/2$	$3\pi/2$	1	-1	$-32L/225\pi^2$
4	3	$7\pi/2$	$\pi/2$	1	1	$96L/49\pi^2$

Il est facile de remarquer que cette matrice est symétrique : $(X_{ij} = X_{ji})$.
La matrice représentative de X s'écrit donc :

$$X = \frac{L}{\pi^2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{16}{9} & 0 & \frac{-32}{225} \\ \frac{16}{9} & 0 & \frac{-48}{25} & 0 \\ 0 & \frac{-48}{25} & 0 & \frac{96}{49} \\ \frac{-32}{225} & 0 & \frac{96}{49} & 0 \end{pmatrix}$$

b) De telles transitions entre $|\psi_m>$ et $|\psi_n>$ ne sont permises que si les nombres m et n obéissent à la règle de sélection : $m = n \pm 1$.

8°) a) Les éléments diagonaux de X sont tous nuls, donc la valeur moyenne de X, quel que soit l'état ψ_i , est nulle : $< X >_i = < \psi_i | X | \psi_i > = 0$

b) Calculons la valeur moyenne de X^2 dans l'état ψ_i. Pour celà on a besoin seulement des éléments diagonaux de la matrice représentative de X^2.

La matrice X est de la forme : $X = \frac{L}{\pi^2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ b & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$

et par suite : $X^2 = \frac{L^2}{\pi^4}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & & & \\ & a^2+b^2 & & \\ & & c^2+d^2 & \\ & & & b^2+d^2 \end{pmatrix}$

Il vient alors :

$$< X^2 >_1 = \frac{L^2}{\pi^4}(a^2+b^2) = \frac{L^2}{\pi^4}\left[\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{32}{225}\right)^2\right] = 3{,}2L^2/\pi^4$$

$$< X^2 >_2 = \frac{L^2}{\pi^4}(a^2+c^2) = \frac{L^2}{\pi^4}\left[\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\right)^2\right] = 6{,}8\ L^2/\pi^4$$

$$< X^2 >_3 = \frac{L^2}{\pi^4}(c^2+d^2) = \frac{L^2}{\pi^4}\left[\left(\frac{48}{25}\right)^2 + \left(\frac{96}{49}\right)^2\right] = 7{,}5\ L^2/\pi^4$$

$$< X^2 >_4 = \frac{L^2}{\pi^4}(d^2+b^2) = \frac{L^2}{\pi^4}\left[\left(\frac{96}{49}\right)^2 + \left(\frac{32}{225}\right)^2\right] = 3{,}9\ L^2/\pi^4$$

On en déduit : $\Delta X = \sqrt{< X^2 >}$

soit : $\Delta X_1 \approx 1{,}8\ L/\pi^2$; $\Delta X_2 \approx 2{,}6\ L/\pi^2$

$\Delta X_3 \approx 2{,}7\ L/\pi^2$; $\Delta X_4 \approx 2\ L/\pi^2$

b) ◆ A l'impulsion P_x est associé l'opérateur $\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, il vient donc :

$$< P_x >_n = \int \psi_n^* \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\psi_n)\,\mathrm{d}x$$

Les fonctions à intégrer sont de type $\sin x \cos x$ (fonction impaire), donc les intégrales sont nulles. Soit : $< P_x >_n = 0$

◆ $< P_x^2 >_n = 2m < \frac{P_x^2}{2m} >_n = 2m\,E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{L^2}n^2$

On en déduit : $\Delta P_x = \sqrt{< P_x^2 >}$

$$\boxed{\Delta P_x = \frac{\hbar\pi n}{L}}$$

c) Compte tenu des résultats obtenus de ΔX et ΔP_x, on obtient :

$$(\Delta X \,.\, \Delta P_x)_1 = 1{,}8\ \frac{\hbar}{\pi} \approx 0{,}57\ h$$

$$(\Delta X \,.\, \Delta P_x)_2 = 5{,}2\ \frac{\hbar}{\pi} \approx 1{,}66\ h$$

$$(\Delta X \,.\, \Delta P_x)_3 = 8{,}1\ \frac{\hbar}{\pi} \approx 2{,}58\ \hbar$$

$$(\Delta X \,.\, \Delta P_x)_4 = 7{,}84\ \frac{\hbar}{\pi} \approx 2{,}5\ \hbar$$

9°) L'énergie de la particule étant $E_n = \frac{P_x^2}{2m}$ et sa position est X.

Le commutateur $\left[X,\ \frac{P_x^2}{2m}\right] \neq 0$: il n'est donc pas possible de mesurer l'énergie et la position de la particule simultanément.

10°) Par contre le commutateur $\left[P_x,\ \frac{P_x^2}{2m}\right] = 0$, il est alors possible de mesurer l'impulsion et l'énergie de la particule simultanément.

11 - Marches de potentiel - Coefficients de réflexion.

Dans un problème à une dimension, on considère une particule de masse m soumise à la marche de potentiel : $V(x) = \begin{cases} -V_1, & x < x_0 \\ +V_2, & x > x_0 \end{cases}$

où V_1 et V_2 sont des énergies potentielles constantes positives, x_0 étant une valeur positive de la position de cette particule.

A / On se donne un état stationnaire de cette particule d'énergie propre $\varepsilon > V_2$ décrit par la fonction d'onde $\varphi(x) = \langle x \mid \varphi \rangle$.

1°) x et P étant les observables respectivement associées à la position et à l'impulsion d'une telle particule.
a) Ecrire son Hamiltonien H.
b) Cette particule est-elle conservative ? Pourquoi ?
c) Déduire de l'équation aux valeurs propres de l'observable H l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

2°) La particule se déplaçant dans le sens de croissance de x, écrire et résoudre cette équation dans chacune des régions de l'espace I et II respectivement définis par $x < x_0$ et $x > x_0$.

3°) En identifiant chacun des termes de la solution et en écrivant les conditions de raccordement au point de discontinuité du potentiel, évaluer les amplitudes des différentes ondes planes monochromatiques associées à cette particule en fonction de l'amplitude de l'onde incidente. Présenter le résultat sous la forme : $\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_I(x), & x < x_0 \\ \varphi_{II}(x), & x > x_0 \end{cases}$

4°) Calculer les cœfficients de réflexion R et de transmission T ainsi que leur somme. Conclure.

B / On s'intéresse maintenant à un état stationnaire de cette particule d'énergie propre positive $E<V_2$ décrit la fonction d'onde $\phi(x) = < x \mid \phi >$

1°) Ecrire et résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les deux régions de l'espace I et II.

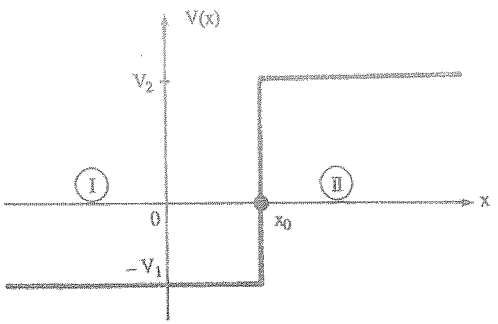
2°) Calculer les différentes constantes d'intégration en fonction de l'amplitude de l'onde incidente, la particule se déplaçant toujours dans le sens positif. Présenter la solution sous la forme :

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_I(x) & , \quad x < x_0 \\ \phi_{II}(x) & , \quad x > x_0 \end{cases}$$

3°) Calculer le cœfficient de réflexion R et en déduire celui de transmission T. Conclure .

Extrait, Fès, MP2 – PC2, Janvier 1988.

I / Marches de potentiel



A / Cas où $\varepsilon > V_2$; réflexion partielle.

1°) a) La particule m est placée dans un potentiel $V(x)$ constant dans certaines régions l'hamiltonien du système est : $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$

b) Les observables X et P sont des constantes du mouvements (indépendantes du temps). Ainsi H est indépendant du temps : **propriétés générales des systèmes conservatifs.**

c) En représentation $\{|x>\}$, l'équation aux valeurs propres de H : $H\varphi = E\varphi$ s'écrit :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi = E\varphi$$

ou encore $$\boxed{\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\,\varphi(x) = 0} \qquad (1)$$

équation aux états stationnaires d'énergie

2°) Ecrivons l'équation aux états stationnaires d'énergie dans chacune des régions I et II :

◆ Pour $x < x_0$, l'équation (1) devient : $\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon + V_1)\,\varphi_1(x) = 0$ (2)

Comme $\varepsilon > V_1 > 0$, il s'ensuit que $\varepsilon + V_1 > 0$

Posons alors : $\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon + V_1)}$

L'équation (2) admet des solutions de types : $\varphi_1(x) = A\,e^{i\alpha(x - x_0)} + B\,e^{-i\alpha(x - x_0)}$ (3)

où A et B sont des constantes complexes.

◆ Pour $x > x_0$; l'équation (1) s'écrit : $\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon - V_2)\,\varphi_2(x) = 0$ (4)

Comme $\varepsilon > V_2$ alors $\varepsilon - V_2 > 0$

L'équation (4) admet des solutions auxquelles nous donnerons les formes suivantes, pour alléger les écritures (surtout, lors des conditions de raccordement) :

$$\varphi_2(x) = C\,e^{i\beta(x - x_0)} + D\,e^{-i\beta(x - x_0)} \qquad (5)$$

avec $\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon - V_2)}$

3°) ◆ $D\,e^{-i\beta(x-x_0)}$ est l'onde de retour de l'infini. Ainsi on a $D = 0$ et il y a donc deux inconnues B et C (A étant l'amplitude de l'onde incidente).

◆ Ecrivons les conditions de raccordement de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = x_0$; ce qui nous fournit du fait des expressions (3) et (5) (D = 0) les deux relations :

$$\begin{cases} A + B = C & (6) \\ i\alpha(A - B) = i\beta C & (7) \end{cases}$$

De (6) et (7) , on tire : $2A = C\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$ $\qquad 2B = C\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$

Soit $C = \frac{2A}{1 + \beta/\alpha}$ (8) et $B = A\,\frac{1 - \beta/\alpha}{1 + \beta/\alpha}$ (9)

Les expressions de $\varphi(x)$ sont alors :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = A\left[e^{i\alpha(x - x_0)} + \frac{1 - \beta/\alpha}{1 + \beta/\alpha}\right] e^{-i\alpha(x - x_0)} & x < x_0 \\ \varphi_2(x) = \frac{2A}{1 + \beta/\alpha}\; e^{i\beta(x - x_0)} & x > x_0 \end{cases}$$

4°) Les cœfficients de transmission T et de réflexion R sont définis grâce à la notion de courants de probabilité par : $T = \frac{\beta}{\alpha}\frac{|C|^2}{|A|^2}$ et $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$

Il vient alors : $T = \frac{\beta}{\alpha}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{4}{(1+\beta/\alpha)^2}$

soit $\boxed{T = \frac{4\beta\alpha}{(\alpha+\beta)^2}}$

Compte tenu de (9), on a : $R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{1-\beta/\alpha}{1+\beta/\alpha}\right)^2$

soit alors $\boxed{R = \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}}$

On vérifie aisément que $R + T = 1$: $R + T = \frac{4\beta\alpha + (\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2} = 1$

Conclusion : Comme R et T sont supérieures à zéro ; la particule est donc soit transmise, soit réfléchie contrairement à la mécanique classique où la particule incidente a une probabilité nulle de revenir en arrière.

B / Cas où $\varepsilon < V_2$; réflexion totale.

1°) Dans la région *(I)*, on a comme en § A :

$$\phi_1(x) = A\, e^{i\alpha(x-x_0)} + B\, e^{-i\alpha(x-x_0)} \qquad \text{avec } \alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon + V_1)$$

région II : $$\frac{d^2\phi_2(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - \varepsilon)\,\phi_2(x) = 0$$

La solution est : $\phi_2(x) = C\, e^{-q(x-x_0)} + D\, e^{q(x-x_0)}$ avec $q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - \varepsilon)$

2°) Une fonction d'onde doit être de carré sommable, il faut donc choisir $D = 0$ sinon, ϕ_2 ne pourrait pas représenter un état physique. Ainsi : $\phi_2(x) = C\, e^{-q(x-x_0)}$

Les conditions de raccordement en $x = x_0$ donnent : $A + B = C$ et $i\alpha(A - B) = -qC$

On tire : $C = \frac{2A}{1 + iq/\alpha}$ et $B = A\,\frac{1 - iq/\alpha}{1 + iq/\alpha}$

La solution se présente donc sous la forme :

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = A\left[e^{i\alpha(x-x_0)} + \dfrac{\alpha - iq}{\alpha + iq}\, e^{-i\alpha(x-x_0)}\right] & x < x_0 \\ \phi_2(x) = \dfrac{2A\alpha}{\alpha + iq}\, e^{-q(x-x_0)} & x > x_0 \end{cases}$$

3°) Le cœfficient de réflexion R vaut alors : $R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left|\frac{\alpha - iq}{\alpha + iq}\right|^2 = 1$

Conclusion : On voit que $R = 1$ (réflexion totale), comme en mécanique classique où la particule est toujours réfléchie. Cependant dans la région II la fonction d'onde n'est pas nulle (onde évanescente $e^{-q(x-x_0)}$). Ainsi la probabilité de présence de la particule pour $x > x_0$ n'est pas nulle qui, classiquement, lui serait interdite ; mais le courant associé par contre est nul. Ce fait ne se rencontre pas en mécanique classique, c'est un fait purement quantique : ce phénomène a donné naissance à l'effet Tunnel.

12 - Potentiel en escalier : Etats liés.

Considérons une particule de masse m se déplaçant dans le potentiel définie par :

$V(x) = +\infty$ $\quad x<0$

$V(x) = -4V_0$ $\quad 0<x<a$

$V(x) = -V_0$ $\quad a<x<3a$

$V(x) = 0$ $\quad x>3a$

où a et V_0 sont des réels positifs.

- Donner l'allure du puits de potentiel.

- A quelle condition existe-t-il un niveau d'énergie $e = -V_0$. Illustrer votre réponse par une résolution graphique.

Extrait, Casablanca I, PC2, Mai 1985.

L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit : $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x) = 0$

On cherche à trouver une condition pour que E soit égale à $-V_0$. L'équation (1) devient :

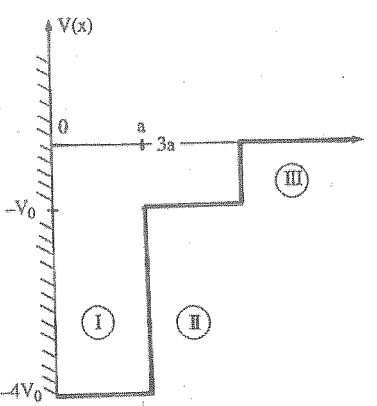
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(-V_0 - V(x))\psi(x) = 0$$

Région I : $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(3V_0)\ \psi(x) = 0$

Cette équation admet comme solution :

$$\psi_I(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} \qquad (1)$$

avec $k^2 = \frac{6mV_0}{\hbar^2}$



Région II : $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = 0$

Solution : $\psi_2(x) = C\,x + D$ qu'on peut écrire par commodité du calcul :

$$\psi_2(x) = C'(x - a) + D \qquad (2)$$

région III : $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(x) = 0$

solution : $\psi_3(x) = E\,e^{-\alpha x} + F\,e^{+\alpha x}$ avec $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}V_0$

La fonction doit être bornée (de carré sommable), on choisit alors $F = 0$.
Soit : $\psi_3(x) = E\,e^{-\alpha x}$

et par commodité de calcul : $\psi_3(x) = E'e^{-\alpha(x-3a)}$ (3)

Pour $x < 0$, $V(x) = +\infty$ donc $\psi(x)$ dans cette région est nulle. Les conditions de raccordement en $x = 0$ nous impliquée : $0 = A + B \quad \Rightarrow \quad A = -B$

soit $\psi_1(x) = A' \sin kx$

En résumé et tenant compte de : $k^2 = 3\alpha^2$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A' \sin\left(\sqrt{3}\,\alpha x\right) && 0 < x < a \\ \psi_2(x) &= C'(x - a) + D && a < x < 3a \qquad (4) \\ \psi_3(x) &= E'e^{-\alpha(x-3a)} && x > 3a \end{aligned}$$

Les conditions de raccordement de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = a$ et $x = 3a$ nous permet d'écrire :

$$x = a \begin{cases} A' \sin\sqrt{3}\,\alpha\, a = D & (5) \\ \sqrt{3}\,\alpha A' \cos\sqrt{3}\,\alpha\, a = C & (6) \end{cases} \qquad x = 3a \begin{cases} 2aC' + D = E' & (7) \\ C' = -\alpha E' & (8) \end{cases}$$

$\frac{(5)}{(6)}$ et $\frac{(7)}{(8)}$ nous donnent : $\frac{1}{\sqrt{3}\,\alpha}\,.\,tg\sqrt{3}\,\alpha a = \frac{D}{C'}$ (9) $\qquad 2a + \frac{D}{C'} = \frac{-1}{\alpha}$ (10)

remplaçons $\frac{D}{C'}$ (9) par sa valeur dans (10) : $2a + \frac{1}{\sqrt{3}\alpha}\,tg\sqrt{3}\,\alpha a = \frac{-1}{\alpha}$

soit $tg\left(\sqrt{3}\,\alpha a\right) = -\sqrt{3} - 2\left(a\sqrt{3}\,\alpha\right)$

posons $X = a\sqrt{3}\,\alpha$: $\boxed{tgX = -2X - \sqrt{3}}$ (11)

Le niveau d'énergie $E = -V_0$ existe si l'équation (11) est vérifiée. Les solutions de cette équation sont les points d'intersection de la fonction tgX avec la droite d'équation, $y = -2X - \sqrt{3}$. (figure ci-après)

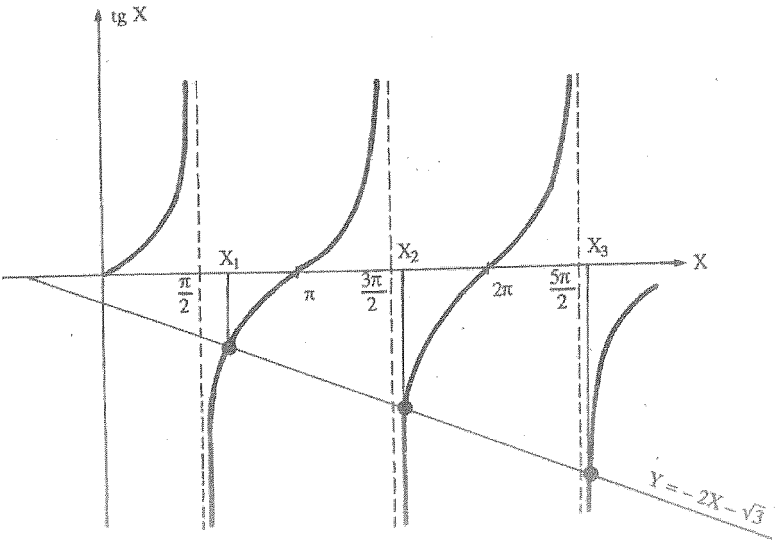


figure : Résolution graphique de l'équation (11), donnant les valeurs de $\left(X = a\sqrt{3}\ \alpha\right)$, pour lesquelles on obtient un état lié d'énergie $E = -V_0$ dans un puits de potentiel en marche. Dans le cas présenté sur la figure, il existe 3 solutions (X_1, X_2 ou X_3).

13 – Etude très simplifiée du Deuton : potentiel.

On considère le potentiel défini par la fonction V(x) :

$V(x) = +\infty$ *pour* $x < 0$

$V(x) \ -V_0 < 0$ *pour* $0 < x < 0$ *(région I)*

$V(x) = 0$ *pour* $a < x$ *(région II)*

1) Représenter la courbe V(x).
On étudie seulement les états liés pour lesquels l'énergie totale E est telle que : $-V_0 < E < 0$.

2) a) Déterminer l'équation de Schrödinger du système.
b) Déterminer la forme générale de la fonction d'onde ψ(x), définie par parties (régions I, II), sous forme d'exponentielles. On posera :

$$\rho = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar} \quad ; \quad k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

Garder tous les cœfficients sans en donner l'interprétation.

Introduction de la quantification.

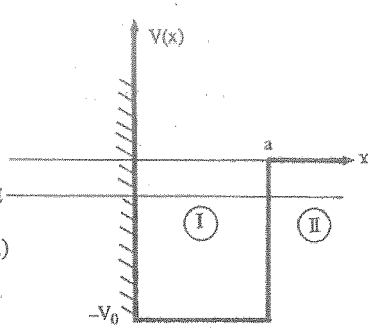
3) a) Ecrire les conditions de continuité en $x = 0$ et en $x = a$.
b) En fonction du cœfficient de $e^{i\rho x}$, calculer le cœfficient de e^{kx}, et celui de e^{-kx}.
c) Ecrire la condition limite (que l'on justifiera) sous forme d'une équation : (ε_1) : $tg(\rho.a) = F(\rho, k)$.
d) Ecrire alors (les cœfficients étant interprétés) la fonction d'onde non normée de la particule.
e) Dans $\psi_{II}(x)$ mettre sin (ρa) en facteur, faire apparaître $tg(\rho a)$ que l'on remplacera par sa valeur trouvée en § c.
f) Ecrire la fonction définitive non normée $\psi(x)$.

On veut résoudre l'équation (ε_1) du § 3c. On pose $\rho_0^2 = \rho^2 + k^2$

4) a) Calculer ρ_0.
b) Exprimer $|\sin(\rho a)|$ en fonction de ρ et ρ_0.
c) Avec l'expression de $|\sin(\rho a)|$ et en tenant compte du signe de $tg(\rho a)$, donner une interprétation graphique des solutions de (ε_1). Ecrire une relation : $E_1 = F(\rho_1, m, V_0)$ avec ρ_1 solution graphique.

Extrait, Marrakech, MP 2 - PC 2, Mai 1986.

1°) **Représentation de la courbe $V(x)$:**



2°) a) On examine le cas où $-V_0 < E < 0$

L'équation de Schrödinger du système s'écrit :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0 \qquad (1)$$

b) ◆ Dans la région I, l'équation de Schrödinger s'écrit : $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)\psi = 0$

La solution est : $\psi_1 = A e^{i\rho x} + B e^{-i\rho x}$ (2) avec $\rho^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)$

◆ Dans la région II, l'équation [1] s'écrit : $\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{-2mE}{\hbar^2}\right)\psi = 0$

La solution est : $\psi_2 = C e^{kx} + D e^{-kx}$ (3) avec $k^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$

3°) a) Ecrivons les conditions de raccordement de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = 0$ et $x = a$:

Pour $x = 0$ $\quad A + B = 0$ (4)

Pour $x = a$ $\quad \begin{cases} A\, e^{i\rho a} + B\, e^{-i\rho a} = C\, e^{ka} + D\, e^{-kq} & (5) \\ i\rho(A\, e^{i\rho a} - B\, e^{-i\rho a}) = k(C\, e^{ka} - D\, e^{-ka}) & 6) \end{cases}$

b) L'équation (4) fournie $A = -B$

Les équations (5) et (6) deviennent : $2iA \sin \rho a = C\, e^{ka} + D\, e^{-ka}$

$$i\rho(2A \cos \rho a) = k(C\, e^{ka} - D\, e^{-ka})$$

ou encore : $\begin{cases} 2iA \sin \rho a = C\, e^{ka} + D\, e^{-ka} & (7) \\ 2iA \dfrac{\rho}{k} \cos \rho a = C\, e^{ka} - D\, e^{-ka} & 8) \end{cases}$

On tire des relations (7) et (8) : $C = 2iA\left(\sin \rho a + \dfrac{\rho}{k} \cos \rho a\right) e^{-ka}$

$$D = 2ia\left(\sin \rho a - \frac{\rho}{k} \cos \rho a\right) e^{ka} \qquad (9)$$

c) $\psi(x)$ doit être bornée dans la région II. Il faut donc que $C = 0$. C'est à dire :

$$\sin \rho a + \frac{\rho}{k} \cos \rho a = 0 \qquad (10)$$

soit $\boxed{tg\, \rho a = -\dfrac{\rho}{k}}$ (11)

d) a) Compte tenu de (4) et [9], nous avons :

$$\psi_1 = 2iA \sin \rho x \qquad 0 < x < a$$

$$\psi_2 = 2iA\left(\sin \rho a - \frac{\rho}{k} \cos \rho a\right) e^{-k(x-a)} \qquad x > a$$

e) Compte tenu de [10] : $\sin \rho a = -\dfrac{\rho}{k} \cos \rho a$. Ainsi : $\psi_2 = 4iA \sin \rho a\; e^{-k(x-a)}$

f) En définitive, nous avons : $\psi_1(x) = 2iA \sin \rho a \qquad 0 < x < a$

$$\psi_2(x) = 4iA \sin \rho a\; e^{-k(x-a)} \qquad x > a$$

4°) a) Posons : $\rho_0^2 = \rho^2 + k^2 = \dfrac{2m V_0}{\hbar^2}$

b) Exprimons : $|\sin(\rho a)|$ en fonction de ρ et ρ_0

L'équation (11) nous permet d'écrire : $\cot g\, \rho a = -\dfrac{k}{\rho}$

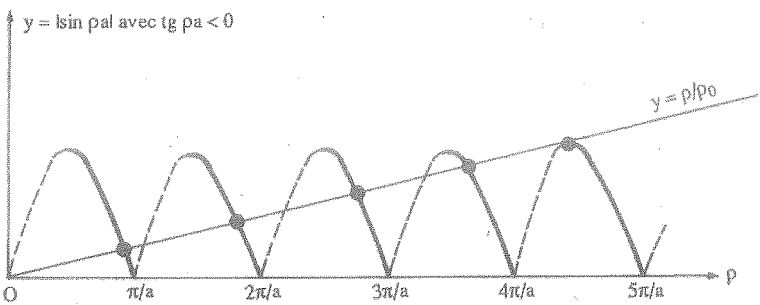
d'autre part : $$\frac{1}{\sin^2 \rho a} = 1 + \cot g^2 \rho a = 1 + \frac{k^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2 + k^2}{\rho^2} = \frac{\rho_0^2}{\rho^2}$$

Soit $$\boxed{| \sin \rho a | = \frac{\rho}{\rho_0}}$$

c) L'équation (11) permet d'écrire : $tg\ \rho a < 0$

L'équation (11) est donc équivalent au système : $$\begin{cases} | \sin \rho a | = \dfrac{\rho}{\rho_0} \\ tg\ \rho a < 0 \end{cases}$$

Les niveaux d'énergie sont alors déterminés par l'intersection d'une droite, de pente $1 / \rho_0$, avec des arcs de sinusoïdes. Nous obtenons donc un certain nombre de niveaux d'énergie (figure ci–dessous)



Résolution graphique des solutions de l'équation (11), donnant les énergies des états liés. (en gras sont les arcs $|\sin \rho a|$ répondant à la condition $tg\ \rho a < 0$)

A partir de l'égalité $\rho^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)$, on tire : $$\boxed{E_i = \frac{\hbar^2 \rho_i^2}{2m} - V_0}$$

Remarque : Ce résultat peut être obtenu différemment à partir de l'équation (11) . Soit :

$$\rho a\ \cot g\ \rho a = -ka \qquad (12)$$

de plus $$(\rho a)^2 + (ka)^2 = (\rho_0 a)^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2 = cte$$

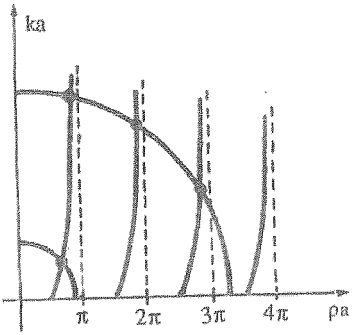
C'est l'équation d'un cercle de rayon : $$R = \rho_0 a = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}\ a$$

L'équation (12) exige qu'il y a des asymptotes pour $\rho a = n\pi$ (n entier).
Dans le plan repéré par des axes ρa et ka, cette équation est celle d'un cercle. Nous étudions alors les intersections de ce cercle avec les courbes d'équations $\rho a\ \cot g\ \rho a = -ka$ et ce dans le premier quadrant. Ces intersections sont en nombre fini.

Supposons a donné. Si V_0 décroit, le rayon du cercle décroit et le nombre d'états liés décroit.

Si $R = \sqrt{2mV_0}\ \frac{a}{\hbar} < \frac{\pi}{2}$, il n'y a aucun état lié.

Si $\frac{\pi}{2} < R = \sqrt{2mV_0}\ \frac{a}{\hbar} < \pi$, il n'y a qu'un seul état lié.



14 -- Etats liés d'une particule dans un puits en fonction delta.

On considère une particule dans un problème à une dimension dans un potentiel de la forme

$$V(x) = -\alpha\,\delta(x) \begin{cases} \alpha : \text{constante positive} \\ \delta(x) : \text{"Fonction" de Dirac} \end{cases}$$

On suppose que l'énergie E de la particule est négative (état lié), dans ce cas la fonction d'onde s'écrit :

$x < 0 \qquad \psi(x) = A\,e^{qx} + B\,e^{-qx}$

$x > 0 \qquad \psi(x) = C\,e^{qx} + D\,e^{-qx}$

où q est une constante qui dépend de E et m.

1°) La dérivée première $(\psi'(x))$ de la fonction $\psi(x)$ présente une discontinuité en $x = 0$ $\Delta\psi'(0) \neq 0$. On donne :

$$\Delta\psi'(0) = \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\,\psi(0)$$

En utilisant la continuité de $\psi(x)$. Donner la matrice M définie par :

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

2°) a) Sachant que $\psi(x)$ représente un état physique, donner les expressions normalisées de $\psi(x)$. En déduire la valeur de l'énergie E.
b) Représenter graphiquement ces fonctions en précisant leur portée l en fonction de q. En déduire leur largeur Δx (Δx : extension spatiale de $\psi(x)$).

3°) a) Calculer la transformée de Fournier $\varphi(p)$ de la fonction $\psi(x)$.
b) Calculer $|\varphi(p)|^2$, que représente ce terme ?

c) Pour quelle valeur p_o de l'impulsion, $|\varphi(p)|^2$ est maximale ?
d) On définit Δp (dispersion de l'impulsion de la particule dans son état lié) par $\Delta p = p - p_o$ où p vérifie la relation $|\varphi(p)|^2 = \frac{|\varphi(p_o)|^2}{2}$
Calculer Δp.
e) Evaluer le produit $\Delta x \cdot \Delta p$. Conclure.

Extrait, Casablanca I, PC 2, Juin 1986

Considérons une particule dans un potentiel $V(x)$: $V(x) = -\alpha\delta(x)$

On s'intéresse au cas des états liés ($E < 0$). Dans ce cas la fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(x) = A e^{qx} + B e^{-qx} \qquad x < 0$$

$$\psi(x) = C e^{qx} + D e^{-qx} \qquad x > 0$$

où q est une constante : $q^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ (à partir de l'équation de Schrödinger)

1°) Ecrivons les conditions de continuité de la fonction d'onde en $x = 0$:

$$A + B = C + D \qquad (1)$$

La dérivée première de la fonction $\psi(x)$ présente une discontinuité en $x = 0$:

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0) \qquad (2)^*$$

or

$$\psi'(0^+) = \left[q(C e^{qx} - D e^{-qx})\right]_{x=0} = q(C - D)$$

$$\psi'(0^-) = \left[q(A e^{qx} - B e^{-qx})\right]_{x=0} = q(A - B)$$

L'équation (2) devient alors : $q((C - D) - (A - B)) = \frac{-2m\alpha}{\hbar^2}(A + B)$ (3)

On obtient alors un système :

$$\begin{cases} C + D = A + B \\ C - D = \frac{-2m\alpha}{q\hbar^2}(A + B) + (A - B) \end{cases}$$

posons : $k = \frac{-m\alpha}{q\hbar^2}$

Le système d'équations nous permet d'avoir :

$$\begin{cases} C = A(1 + k) + kB \\ D = -kA + B(1 - k) \end{cases} \qquad (4)$$

* voir démonstration pb 15.

qu'on peut écrire sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & k \\ -k & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

2°) a) ◆ $\psi(x)$ représente un état physique, donc elle doit être bornée, il faut alors choisir $B = 0$ et $C = 0$.

Le système (4) devient : $\begin{cases} 0 = A(1+k) & (5) \\ D = -kA & (6) \end{cases}$

L'équation (5) nous donne : $k = -1$ soit $\frac{m\alpha}{q\hbar^2} = 1$ et donc $A = D$.

Les fonctions d'onde correspondantes sont donc : $\psi(x) = A\, e^{qx} \quad x < 0$ (7-a)

$\psi(x) = A\, e^{-qx} \quad x > 0$ (7-b)

La condition de normalisation $\int |\psi(x)|^2 \, dx = 1$ nous exige :

$$|A|^2 \left[\int_{-\infty}^{0} e^{2qx} \, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2qx} \, dx \right] = 1$$

Soit $A = \sqrt{q}$ (on choisit A réel > 0)

Les équations (7) deviennent : $\boxed{\psi(x) = q^{1/2} e^{-q|x|} \text{ pour tout } x}$

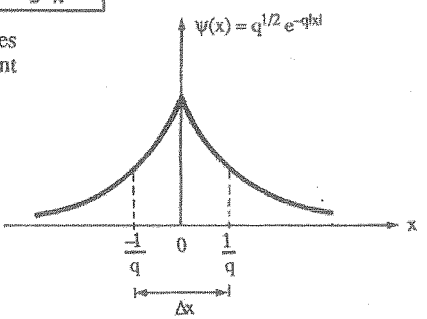
◆ Nous avons : $k = -1$, soit $\frac{m\alpha}{q\hbar^2} = 1$

or $q^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$

Il vient donc $1 = \frac{m^2\alpha^2}{q^2\hbar^2} = -\frac{m^2\alpha^2}{2mE\hbar^2} = \frac{-m\alpha^2}{2mE\hbar^2}$

Soit $\boxed{E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}}$

b) Ces fonctions d'onde sont représentées sur la figure ci-contre (leur portée étant $|l| = \frac{1}{q}$).



L'extension spatiale de $\psi(x)$ est donc : $\Delta x = \frac{2}{q} = \frac{2\hbar}{\sqrt{-2mE}}$

3°) a) La transformée de Fourier $\varphi(\rho)$ de la fonction $\psi(x)$ est donnée par :

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\ e^{-ipx/\hbar}\ dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, q^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x(q - ip/\hbar)}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(q + ip/\hbar)}\ dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, q^{1/2} \left(\frac{1}{q - ip/\hbar} + \frac{1}{q + ip/\hbar} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, q^{1/2}\, \frac{2q}{q^2 + p^2/\hbar^2}$$

Soit

$$\boxed{\varphi(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{(\hbar q)^{3/2}}{\hbar^2 q^2 + p^2}}$$

b) $|\varphi(p)|^2$ représente la probabilité de trouver la particule avec une impulsion p à l'instant $t = 0$. Sa valeur est : $|\varphi(p)|^2 = \frac{2}{\pi}\ \frac{(\hbar q)^3}{(\hbar^2 q^2 + p^2)^2}$

c) Elle présente un maximum pour $p_o = 0$. En ce point, la valeur de $|\varphi(p_o)|^2$ est égale à :

$$\frac{2}{\pi\hbar q} = \frac{2}{\pi\sqrt{-2mE}}$$

d) Nous cherchons à trouver pour quelle valeur de p on a : $|\varphi(p)|^2 = \frac{|\varphi(p_o)|^2}{2}$

Soit : $\frac{2}{\pi}\ \frac{(\hbar q)^3}{(\hbar^2 q^2 + p^2)^2} = \frac{2}{\pi}\ \frac{1}{\hbar q}$

Il vient donc : $2(\hbar q)^2 = p^2$ ou $p^2 = 0$ (inacceptable physiquement)

d'où $\boxed{p = 2\hbar q = 2\sqrt{-2mE}}$

On définit Δp par : $\Delta p = p - p_o = 2\hbar q$

e) Le produit $\Delta x\ \Delta p$ vaut donc : $\Delta x\ \Delta p = \frac{2}{q} \cdot 2\hbar q = 4\hbar$

Comme d'après la relation de Heisenberg, $\Delta x\ \Delta p \geq \hbar/2$, on voit que cette valeur est supérieure à la borne inférieure.

Complément : Retrouver l'expression de $\psi(x)$ et l'énergie E de l'état lié à l'aide du théorème du Viriel.

Le théorème du Viriel nous permet d'écrire :

$$2< E_c > = < x \frac{\partial V}{\partial x} > = -\alpha \int x \mid \psi(x) \mid^2 \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) \, dx$$

Pour une fonction continuement dérivable au point $x = 0$, la dérivée de $\delta(x)$ est définie par :

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial x} \delta(x) \right) f(x) \, dx = \left[- \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right]_{x=0}$$

En utilisant la condition de normalisation $\mid A \mid^2 = q$, on a alors :

$$2< E_c > = -\alpha \left[- \frac{\partial}{\partial x} (xq) \right]_{x=0} = \alpha q$$

D'autre part la valeur moyenne de l'énergie potentielle est donnée par :

$$< V > = -\alpha \int \mid \psi(x) \mid^2 \delta(x) \, dx = -\alpha \mid A \mid^2 = -\alpha q$$

Il vient alors : $E = < E_c > + < V > = \frac{\alpha q}{2} - \alpha q = \frac{-\alpha q}{2}$ avec $q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

donc : $E = \frac{-\hbar^2 q^2}{2m} = \frac{-\alpha q}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{-\hbar^2 q}{m}$ et donc $q = \frac{-m\alpha}{\hbar^2}$

d'où $\boxed{E = \frac{-\alpha q}{2} = \frac{m\alpha}{2\hbar^2}}$

15 - Calcul du coefficient de transmission dans le cas d'une particule dans un puits en fonction delta.

On considère un "puits delta" centré sur le point a correspondant au potentiel singulier : $V(x) = -\eta \, \delta(x - a)$ $(\eta > 0)$
où $\delta(x - a)$ représente la distribution de Dirac.

1°) Déterminer les conditions satisfaites par la fonction d'onde $\psi(x)$ représentant un état stationnaire d'énergie E associée à ce puits.

2°) Montrer qu'il existe un état lié dont on déterminera l'énergie et la fonction d'onde correspondantes.

3°) Dans le cas où $E > 0$, calculer le cœfficient de transmission $T(E)$ en fonction de l'énergie. Donner sa représentation graphique.

Extrait, Rabat, PC 2, Juin 1985.

1°) L'équation de Schrödinger indépendante du temps qui détermine les états stationnaires de la particule dans le potentiel $-\eta \, \delta(x - a)$ s'écrit :

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - \left(\eta\,\delta(x-a) + E\right)\psi(x) = 0 \qquad (1)$$

$\psi(x)$ est continu pour $x = a$, mais $\psi'(x)$ est discontinue en ce point. En intégrant l'équation (1) entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$ $(\varepsilon \to 0\,;\ \varepsilon > 0)$ on obtient :

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\psi'(a+\varepsilon) - \psi'(a-\varepsilon)\right] - \eta\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(x-a)\,\psi(x)\,dx - E\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\psi(x)\,dx = 0$$

or $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\psi(x)\,dx = 0 \quad \text{car } \psi(x) \text{ est continue en } x = a$$

et $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(x-a)\,\psi(x)\,dx = \psi(a)$$

Il vient alors : $$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\psi'(a+\varepsilon) - \psi'(a-\varepsilon)\right] - \eta\,\psi(a) = 0$$

Soit $$\psi'(a+\varepsilon) - \psi'(a-\varepsilon) = \frac{-2m\eta}{\hbar^2}\psi(a)$$

Posons : $\frac{-2m\eta}{\hbar^2} = \gamma$: $$\boxed{\psi'(a+\varepsilon) - \psi'(a-\varepsilon) = -\gamma\psi(a)} \qquad (2)$$

2°) **Etat lié : $E < 0$**

Le potentiel est nul presque partout. Pour $x \neq a$, l'équation (1) s'écrit :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{-2m\,E}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

La fonction d'onde de l'état lié peut donc s'écrire :

$$\psi(x) = A\,e^{q(x-a)} + B\,e^{-q(x-a)} \qquad \text{pour } x < a$$

$$\psi(x) = C\,e^{q(x-a)} + D\,e^{-q(x-a)} \qquad \text{pour } x > a$$

avec $q^2 = \frac{-2m\,E}{\hbar^2}$

Comme $\psi(x)$ doit être bornée dans les deux régions, il faut que : $B = 0$ et $C = 0$

Soit $$\begin{cases}\psi(x) = A\,e^{q(x-a)} & x < a\\ \psi(x) = D\,e^{-q(x-a)} & x > a\end{cases}$$

Les conditions de raccordement en $x = -a$ donnent alors : $A = D$ (3)

L'équation (2) s'écrit alors : $-qD - qA = -\gamma A$ (4)

Compte tenu de (3), on a : $\gamma = 2q$ avec $\gamma = \frac{-2m\eta}{\hbar^2}$ et $q = \frac{-2mE}{\hbar^2}$

Soit $$\left(\frac{-2m\eta}{\hbar^2}\right)^2 = 4\left(\frac{-2mE}{\hbar^2}\right)$$

ou encore $$\boxed{E = -\frac{m\eta^2}{2\hbar^2}}$$

La fonction d'onde correspondante est donc : $\boxed{\psi(x) = A\, e^{-|q|(x-a)}}$ pour tout x

3°) Cas où $E > 0$: cœfficient de transmission.

Dans les deux régions que fait apparaître le puits, l'équation (1) s'écrit : $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$

Les fonctions d'ondes correspondantes s'écrivent par commodité de calcul :

$$\begin{cases} \psi(x) = A\, e^{ik(x-a)} + B\, e^{-ik(x-a)} & x < a \\ \psi(x) = C\, e^{ik(x-a)} + D\, e^{-ik(x-a)} & x > a \end{cases}$$

avec $$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Prenons $D = 0$ (particule incidente venant de $x = -\infty$)

On exprime la continuité de $\psi(x)$ en $x = a$ et on exprime (2) ; on a d'une part : $A + B = C$

et d'autre part : $$ik\,C - ik\,(A - B) = -\gamma C$$

Soit : $$\begin{cases} A + B = C \\ A - B = C\left(1 + \frac{\gamma}{ik}\right) \end{cases}$$

D'où l'on déduit que : $$A = C\left(1 + \frac{\gamma}{2ik}\right) \quad \text{et} \quad B = \frac{-\gamma}{2ik}C$$

Le cœfficient de transmission T est donné par :

$$T = \frac{|\psi_t|^2}{|\psi_i|^2} = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\left|1 + \frac{\gamma}{2ik}\right|^2} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{4k^2}}$$

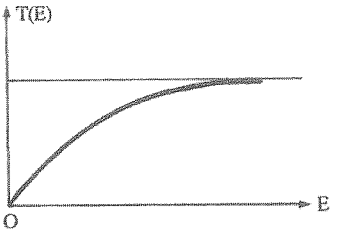
soit $$T = \frac{4k^2}{4k^2 + \gamma^2}$$

En tenant compte des valeurs de k^2 et γ^2, on obtient :

$$T = \frac{4\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)}{4\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right) + \frac{4m^2\eta^2}{\hbar^2}} = \frac{1}{1 + \frac{m\eta^2}{2\hbar^2 E}}$$

ou encore $$T = \frac{E}{E + \frac{m\,\eta^2}{2\hbar^2}}$$

La dérivée $\frac{dT}{dE} = \frac{\frac{m\gamma^2}{2\hbar^2}}{\left(E + \frac{m\,\eta^2}{2\hbar^2}\right)^2}$ est toujours positive ; donc $T(E)$ tend vers la valeur limite $T = 1$ (figure ci-contre)



16 - Etude de la vibration de la molécule HCl.

Dans la molécule d'acide chlorhydrique HCl l'atome Cl est assez lourd peut être supposé fixe. L'atome H de masse m est maintenu à une distance moyenne a de l'atome Cl par un potentiel $V(x) = k\,(x - a)^2 / 2$ *où x est la distance algébrique de H à Cl et k est la constante de force réelle. On s'intéresse aux mouvements de vibration de la molécule dans lesquels x varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

1°) Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps qui décrit les états stationnaires de vibration, représentés par les fonctions d'onde $\psi(x)$.

2°) La fonction d'onde de l'état fondamental est de la forme :

$$\psi_0(x) = A_0\, e^{-\alpha^2 (x-a)^2 / 2} \qquad A_0 \text{ et } \alpha \text{ réels et positifs.}$$

En vérifiant qu'elle est bien fonction propre de l'équation de 1°) déduire α *et la valeur propre correspondante* E_0, *de l'énergie en fonction de* $\hbar$, m *et* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3°) La fonction d'onde du 1er état excité est de la forme :

$\psi_1(x) = A_1(x - a)\, e^{-\beta^2 (x-a)^2 / 2}$ A_1 *et* β *réels et positifs.*

Déduire β *et* E_1 *valeur propre de l'énergie.*

4°) Normaliser $\psi_0(x)$ *et* $\psi_1(x)$. *On donnera les valeurs de* A_0 *et* A_1 *en fonction de* α.

5°) Vérifier que la valeur moyenne $< x >$, *de x est bien égale à a dans chacun des états représentés par* $\psi_0(x)$ *et* $\psi_1(x)$.

6°) On définit l'incertitude Δx *sur la distance de H à Cl par :*

$$\Delta x = \sqrt{< \psi | (x - a)^2 | \psi >}$$

Calculer Δx_0 ***dans l'état*** $\psi_0(x)$ ***et*** Δx_1 ***dans l'état*** $\psi_1(x)$. ***Comparer*** Δx_0 ***et*** Δx_1.

Donner une interprétation physique du résultat.

On utilisera les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} y^{2n} e^{-\alpha^2 y^2} dy = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^{n+1} \alpha^{2n+1}} \sqrt{\pi}$$

Extrait, Fes, PC 2, Mai 1985.

1°) L'équation de Schrödinger indépendante du temps qui détermine les états stationnaires de l'atome d'Hydrogène dans le potentiel $\frac{1}{2} k (x-a)^2$ s'écrit :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar} \left(\frac{1}{2} k (x-a)^2 - E \right) \psi = 0 \qquad (1)$$

2°) Cette équation admet par hypothèse, une solution de la forme :

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-\alpha^2 (x-a)^2 / 2}$$

On en déduit : $$\frac{d\psi_0}{dx} = \psi_0 \left(- \alpha^2 (x-a) \right)$$

et $$\frac{d^2\psi_0}{dx^2} = \alpha^2 \psi_0(x) \left[\alpha^2 (x-a)^2 - 1 \right]$$

L'équation (1) étant vérifié pour $\psi = \psi_0$, elle s'écrit alors :

$$\psi_0(x) \left[\alpha^2 [(x-a)^2 - 1] \alpha^2 + \frac{2m E}{\hbar^2} - \frac{m k}{\hbar^2} (x-a)^2 \right] = 0$$

Soit après groupement des termes semblables :

$$\psi_0(x) \left\{ \left[(x-a)^2 \left(\alpha^4 - \frac{m k}{\hbar^2} \right) \right] + \left[\frac{2m E_0}{\hbar^2} - \alpha^2 \right] \right\}$$

Le polynôme en $(x-a)$ est identiquement nul lorsque ses cœfficients sont tous nuls. Soit :

$$\alpha^4 - \frac{m k}{\hbar^2} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{2m E_0}{\hbar^2} - \alpha^2 = 0 \qquad (3)$$

L'équation (2) de degré 4 en α $(\alpha > 0)$, admet la solution

$$\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{m \omega}{\hbar}}}$$

L'équation (3) : $\frac{2m E_0}{\hbar^2} = \alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$, soit : $\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}$

3°) La fonction d'onde du 1er état excité est par hypothèse :

$$\psi_1(x) = A_1 (x-a)\, e^{-(x-a)^2 \beta^2/2} \left[1 - \beta^2 (x-a)^2\right]$$

et $$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = \beta^2 \psi_1(x) \left[-3 + \beta^2 (x-a)^2\right]$$

L'équation (1) est vérifiée pour $\psi = \psi_1$, elle devient après groupement des termes semblables :

$$\psi_1(x) \left[(x-a)^2 \left(\beta^4 - \frac{m k}{\hbar^2}\right) + \left(\frac{2m E_1}{\hbar^2} - 3\beta^2\right)\right] = 0$$

Le polynôme en $(x-a)$ est nul si tous les cœfficients de ce polynôme sont nuls . Soit :

$$\beta^4 - \frac{m k}{\hbar^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = \alpha \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\frac{2m E_1}{\hbar^2} - 3\beta^2 = 0 \quad \rightarrow \quad E_1 = \frac{3\beta^2 \hbar^2}{2m} = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

4°) Ecrivons la condition de normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$

◆ Pour $\psi = \psi_0$ on a : $|A_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 (x-a)^2} \, dx = 1$

On fait le changement de variable : $t = x - a$

$$|A_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} \, dt = |A_0|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} = 1$$

ainsi on a : $$\boxed{|A_0|^2 = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}}$$

◆ Pour $\psi = \psi_1$ on a : $|A_1|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \, e^{-\alpha^2 (x-a)^2} \, dx = 1$

$$2|A_1|^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\alpha^2 t^2} \, dt = 1$$

or : $$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\alpha^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2 \alpha^3}$$

donc $\boxed{|A_1|^2 = \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}}$

5°) Calculons la valeur moyenne de la coordonnée x dans l'état $\psi(x)$:

◆ $< X >_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^* \; x \; \psi_0 \; dx = |A_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \, e^{-\alpha^2 (x-a)^2} \; dx$

On pose $x - a = t$:

$$< x >_{\psi_0} = |A_0|^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t \, e^{-\alpha^2 t^2} \; dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} \; dt \right]$$

$$= |A_0|^2 \left[\underbrace{\left(- \frac{e^{-\alpha^2 t^2}}{2\alpha^2} \right)_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + a \; \frac{1}{|A_0|^2} \right]$$

soit $\boxed{< x >_{\psi_0} = a}$

◆ $< x >_{\psi_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, |\psi_1(x)|^2 \; dx = |A_1|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \, (x-a)^2 \, e^{-\alpha^2 (x-a)^2} \; dx$

$$= |A_1|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (t + a) \, t^2 \, e^{-\alpha^2 t^2} \; dt$$

$$= |A_1|^2 \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \, e^{-\beta^2 t^2} \; dt}_{=0 \text{ car } t^3 e^{-\beta^2 t^2} \text{ est une fonction impaire}} + a \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, e^{-\beta^2 t^2} \; dt \right] = |A_1|^2 \, a \, \frac{1}{|A_1|^2}$$

soit : $\boxed{< x >_{\psi_1} = a}$

6°) Par définition, l'incertitude Δx sur la distance de H à Cl est : $\Delta x = \sqrt{< \psi \, | (x-a)^2 \, | \, \psi >}$

◆ Calculons Δx_0 :

$$(\Delta x_0)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \, |\psi_0(x)|^2 \, dx = |A_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \, e^{-\alpha^2 (x-a)^2} \, dx$$

$$= 2 |A_0|^2 \int_0^{+\infty} t^2 \, e^{-\alpha^2 t^2} \; dt$$

En utilisant : $\int_0^{+\infty} t^2 \, e^{-\alpha^2 t^2} \; dt = \sqrt{\pi} / 2^2 \alpha^3$;

on a : $(\Delta x_0)^2 = 2 |A_0|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2} \qquad \left(|A_0|^2 = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)$

soit : $\boxed{\Delta x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega}}}$ $\qquad \left(\alpha = \sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}\right)$

◆ Calculons Δx_1 :

$$(\Delta x_1)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \mid \psi_1 \mid^2 dx = \mid A_1 \mid^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^4 e^{-\alpha^2 (x-a)^2} dx$$

$$= 2 \mid A_1 \mid^2 \int_0^{+\infty} t^4 e^{-\alpha^2 t^2} dt$$

En utilisant l'intégrale : $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-\alpha^2 t^2} dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{2^3 \alpha^5}$;

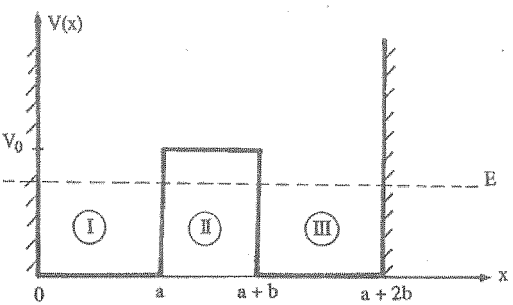
on a : $(\Delta x_1)^2 = 2 \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{2^3 \alpha^5} = \frac{3}{2\alpha^2}$

soit : $\boxed{\Delta x_1 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\hbar}{m\omega}}}$

L'écart entre Δx_1 et Δx_0 est important, car l'influence des états excités devient non négligeable.

17 - Particule dans un double puits de potentiel.

Dans un problème à une dimension, on considère une particule de masse m confinée dans la région de l'espace définie par $0 \leq x \leq 2a + b$ sous l'effet de potentiel carré symétrique donné par la figure ci-contre.



On se propose de chercher la fonction d'onde :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_I(x) & , \quad 0 \leq x \leq a \\ \varphi_{II}(x) & , \quad 0 \leq x \leq a + b \\ \varphi_{III}(x) & , \quad a + b \leq x \leq 2a + b \end{cases}$$

décrivant cette particule dans un état stationnaire d'énergie propre positive $E < V_0$.

1°) Ecrire et résoudre dans les trois régions I, II, III de l'espace l'équation

de Schrödinger indépendante de temps.

2°) Montrer, à partir de la continuité de la fonction d'onde stationnaire $\varphi(x)$ aux points $x = 0$ et $x = 2a + b$, que $\varphi_I(x)$ et $\varphi_{III}(x)$ peuvent s'écrire :

$$\varphi_I(x) = A \sin kx$$

$$\varphi_{III}(x) = D \sin k\,[x - (2a + b)],$$

où A et D sont des nombres d'intégration de k est tel que: $k^2 = 2mE / \hbar^2$

3°) D'après les conditions de raccordement aux points $x = a$ et $x = a + b$, établir deux relations différentes entre les amplitudes A et D.
En déduire l'équation de quantification des niveaux d'énergie sous la forme

$$\left(\frac{q}{k} tg\ ka + 1\right) e^{qb} = \pm\left(\frac{q}{k} tg\ ka - 1\right)$$

où q est un paramètre réel positif : $q^2 = 2m\,(V_0 - E) / \hbar^2$

4°) Dans le cas où $qb >> 1$, déterminer à l'ordre zéro en k/q les niveaux d'énergie quantifiée de cette particule.

Extrait, Fès, MP 2, Juin 1988.

1°) ◆ Si $x \leq 0$ ou $x \geq 2a + b$, la particule ne pouvant par se trouver dans cette intervalle, la fonction d'onde $\varphi(x)$ est alors nulle.

◆ Si $0 \leq x \leq a$ ou $a + b \leq x \leq 2a + b$, le potentiel $V(x)$ est nul et la fonction d'onde $\varphi(x)$ de la particule d'énergie E, vérifie l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m\,E\,\varphi}{\hbar^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0 \qquad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2m\,E}{\hbar^2}$$

Les solutions de cette équation sont donc sinusoïdales. Nous donnerons à ces solutions les formes suivantes, pour alléger les écritures :

$$\varphi_I(x) = A \sin(kx + \varphi)$$

$$\varphi_{III}(x) = D \sin\left[k(x - (2a + b)) + \varphi'\right]$$

◆ Si $a \leq x \leq a + b$, le potentiel $V(x)$ est égale à V_0 et la fonction d'onde $\varphi(x)$ de la particule d'énergie $0 < E < V_0$ vérifie : $\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\,\varphi = 0$

ou $$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - q^2\varphi = 0 \qquad \text{avec} \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

Pour tenir compte des propriétés de symétrie du puits, nous donnons à la solution de cette équation la forme suivante : $\varphi_{II}(x) = B\,e^{q[x-(a+(b/2))]} + C\,e^{-q[x-(a+(b/2))]}$

2°) Les conditions de continuité de la fonction d'onde aux frontières du puits ($x = 0$ et $x = 2a + b$) s'écrivent :

$$\varphi_I(0) = 0 \quad \text{soit} \quad A \sin \varphi = 0 \quad , \quad \text{donc} \quad \varphi = 0$$

$$\varphi_{III}(2a + b) = 0 \quad \text{soit} \quad D \sin \varphi' = 0 \quad , \quad \text{donc} \quad \varphi' = 0$$

Les fonctions φ_I , φ_{II} , φ_{III} peuvent donc s'écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_I(x) &= A \sin kx \\ \varphi_{II}(x) &= B\, e^{\,q\,[x-(a+(b/2))]} + C\, e^{\,-q\,[x-(a+(b/2))]} \\ \varphi_{III}(x) &= D \sin k\,[(x-(2a+b)] \end{aligned}}$$

3°) Les équations de continuité des fonctions d'onde $\varphi(x)$ et de leur dérivée $\frac{d\varphi}{dx} = \varphi'(x)$ s'écrit :

en $x = a$

$$\begin{cases} \varphi_I(a) = \varphi_{II}(a) \quad \text{soit } A \sin ka = Be^{-qb/2} + Ce^{qb/2} \\ \varphi'_I(a) = \varphi'_{II}(a) \quad \text{soit } kA \cos ka = q\left[Be^{-qb/2} - Ce^{qb/2}\right] \end{cases} \tag{1}$$

en $x = a+b$

$$\begin{cases} \varphi_{II}(a+b) = \varphi_{III}(a+b) \text{ soit } Be^{qb/2} + Ce^{-qb/2} = -D \sin ka \\ \varphi'_{II}(a+b) = \varphi'_{III}(a+b) \text{ soit } q\left[Be^{qb/2} - Ce^{-qb/2}\right] = kD \cos ka \end{cases} \tag{2}$$

Des équations (1) et (2) , on tire :

$$\frac{q}{k} \operatorname{tg} ka = \frac{Be^{-qb/2} + Ce^{qb/2}}{Be^{-qb/2} - Ce^{qb/2}} \quad (3) \qquad \frac{q}{k} \operatorname{tg} ka = -\frac{Be^{qb/2} + Ce^{-qb/2}}{Be^{qb/2} - Ce^{-qb/2}} \quad (4)$$

L'égalité de ces deux relations nous donne :

$$\left(Be^{qb/2} - Ce^{-qb/2}\right)\left(Be^{-qb/2} + Ce^{qb/2}\right) = -\left(Be^{-qb/2} - Ce^{qb/2}\right)\left(Be^{qb/2} + Ce^{-qb/2}\right)$$

$$B^2 - C^2 + BC\left[e^{qb} - e^{-qb}\right] = -\left(B^2 - C^2 - BC\left[e^{+qb} - e^{-qb}\right]\right)$$

soit

$$B^2 - C^2 = -B^2 + C^2$$

$$B^2 = C^2$$

Il vient alors

$$\boxed{B = \pm C} \tag{5}$$

Introduisons ces égalités dans (1) et (2) :

◆ Si $B = C$

$$A \sin ka = B\left(e^{-qb/2} + e^{qb/2}\right) \tag{1'}$$

$$-D \sin ka = B\left(e^{qb/2} + e^{-qb/2}\right) \tag{2'}$$

D'où

$$\boxed{A = -D}$$

◆ Si $B = -C$, il est facile de montrer par un raisonnement analogue que :

$$\boxed{A = +D}$$

En tenant compte de l'égalité (5), les équations (3) et (4) deviennent confondues.

Soit donc :

Si $(B = C\ ,\ A = -D)$:
$$\frac{q}{k}\, tg\, ka = \frac{e^{-qb/2} + e^{qb/2}}{e^{-qb/2} - e^{qb/2}} = -\coth\frac{qb}{2} \qquad (6)$$

ou encore :
$$\frac{q}{k}\, tg\, ka = \frac{1 + e^{qb}}{1 - e^{qb}}$$

$$\left(\frac{q}{k} tg\, ka - 1\right) - e^{qb}\left(\frac{q}{k} tg\, ka + 1\right) = 0$$

donc :
$$\boxed{\left(\frac{q}{k} tg\, ka + 1\right) e^{qb} = \left(\frac{q}{k} tg\, ka - 1\right)} \qquad (7)$$

Si $(B = -C\ ,\ A = D)$:
$$\frac{q}{k} tg\, ka = \frac{e^{-qb/2} - e^{qb/2}}{e^{-qb/2} + e^{qb/2}} = -th\frac{qb}{2} \qquad (8)$$

ou encore par un raisonnement analogue, on obtient :
$$\left(\frac{q}{k} tg\, ka + 1\right) e^{qb} = -\left(\frac{q}{k} tg\, ka - 1\right) \qquad (9)$$

En résumé, nous avons :

$$\begin{cases} \varphi_I(x) = A \sin kx \\ \varphi_{II}(x) = \begin{cases} 2B\, ch\, q\left(x - (a + \frac{b}{2})\right) & \text{solution symétrique} \\ 2B\, sh\, q\left(x - (a + \frac{b}{2})\right) & \text{solution antisymétrique} \end{cases} \\ \varphi_{III}(x) = \pm A \sin k\,[x - (2a + b)] \end{cases}$$

Les équations transcendantes (6), (7), (8), (9) s'écrivent :

$$\frac{q}{k} tg\, ka = -\coth\frac{qb}{2} \quad \text{pour solution symétrique} \qquad (6)$$

$$\frac{q}{k} tg\, ka = -th\frac{qb}{2} \quad \text{pour solution antisymétrique} \qquad (8)$$

ou encore
$$\left(\frac{q}{k} tg\, ka + 1\right) e^{qb} = \pm\left(\frac{q}{k} tg\, ka - 1\right) \qquad (7) \text{ et } (9)$$

4°) Nous reprenons les équations (7) et (9) que nous écrivons sous la forme :

$$tg\, ka = \frac{k}{q}\,\frac{1 + e^{qb}}{1 - e^{qb}} = \frac{k}{q}\,\frac{e^{-qb} + 1}{e^{-qb} - 1} \qquad (10)$$

et
$$tg\, ka = \frac{k}{q}\,\frac{1 - e^{qb}}{1 + e^{qb}} = \frac{k}{q}\,\frac{e^{-qb} - 1}{e^{-qb} + 1} \qquad (11)$$

Si qb est très grand, e^{-qb} est petit devant l'unité ; $\quad \frac{1}{e^{-qb} \mp 1} \approx 1 \pm e^{-qb}$

(10) devient : $$tg\ ka = -\frac{k}{q}(1+e^{-qb})(1+e^{-qb})$$

$$\approx -\frac{k}{q}(1+2e^{-qb}) \qquad \text{au second ordre}$$

(11) devient : $$tg\ ka = \frac{k}{q}(e^{-qb}-1)(1-e^{-qb})$$

$$\approx -\frac{k}{q}(1-2e^{-qb}) \qquad \text{au second ordre}$$

Si de plus on néglige e^{-qb} devant l'unité, les deux types de solution précédentes deviennent confondus.

$$\boxed{tg\ ka = -\frac{k}{q}}$$

qu'on peut écrire aussi : $$tg\ ka = -\frac{kb}{qb}$$

Si $q \to \infty$, on obtient alors $tg\ ka = 0$ avec $k^2 = \frac{2m\,E}{\hbar^2}$

Les solutions d'une telle équation : $ka = n\pi$ ou $k^2 a^2 = n^2 \pi^2$

soit alors : $$\frac{2m\,E_n}{\hbar^2}a^2 = n^2\pi^2$$

d'où $$\boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\,a^2}\,n^2}$$

Remarque : Ce résultat était **prévisible**, car lorsque $q \to \infty$, $V_0 \to \infty$ et le double puits de potentiel devient donc un puits simple de potentiel infini.

Les énergies pour un tel puits (cf exercice 18) sont : $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\,a^2}\,n^2$

Complément : Résoudre graphiquement les équations obtenues en 3°) en se plaçant dans le cas où $E << V_0$.

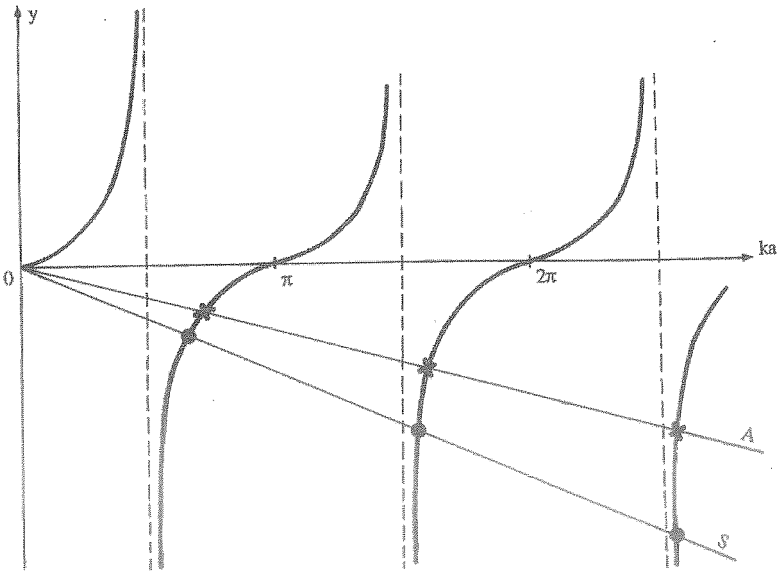
Dans ce cas, $q >> k$ et donc $q = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$

Nous pouvons alors écrire : $$tg\ ka \approx -ka\left(\frac{1 \pm 2e^{-qb}}{q\,a}\right)$$

Le signe + correspond à φ_s (solution symétrique), le signe – à φ_A (solution antisymétrique). Cette équation permet de calculer les valeurs quantifiées de ka. Ces valeurs sont obtenues graphiquement aux points d'abscisses des intersections des arcs successifs de $y = tg\ ka$ avec deux droites d'équations :

$$y = \begin{cases} -ka & \lambda_A \\ -ka & \lambda_S \end{cases} \qquad \text{(figure ci-dessous)}$$

λ_A et λ_S sont deux constantes, petites par rapport à 1 $(q>>k)$, voisines et telles que $\lambda_A < \lambda_S$.



18 –Particule dans un puits de potentiel infini -Etude physique - Evolution de la fonction d'onde et de la forme du paquet d'ondes - Mesures de l'énergie.

Notation : $|\psi(x, t)>$ désigne l'état quantique d'un système physique à l'instant t, $\psi(x, t)$ est la fonction d'onde correspondante à cet état.
On considère une particule de masse m, soumise au potentiel $V(x)$.
L'hamiltonien de cette particule s'écrit : $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$.

1°) L'évolution de cette particule est régie par l'équation de Schrödinger, écrire cette équation dans les deux représentations $\{| x >\}$ et $\{| p >\}$?

2°) La particule se trouve placée dans un puits de potentiel infini de largeur a :

$V(x) = 0$ *si* $0 \leq x \leq a$

$V(x) = +\infty$ *ailleurs.*

Déterminer les états stationnaires de la particule et les valeurs propres qui leur correspondent lorsque $0 \leq x \leq a$.

3°) A l'instant $t = 0$, la particule a pour fonction d'onde :

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right\} \quad si \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\psi(x,0) = 0 \qquad ailleurs$$

a) Vérifier que cette fonction d'onde est normée ?
b) On mesure à cet instant l'énergie de la particule, quelles valeurs trouve-t-on et avec quelles probabilités ?
c) Quelle est la probabilité de trouver une valeur de l'énergie supérieure à $\frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$ *?*

4°) Calculer $\psi(x, t)$ *et démontrer que la densité de probabilité de présence de la particule, dépend de la fréquence de Bohr* $\frac{\omega_{21}}{2\pi}$ *dont on précisera l'expression en fonction de m , a et* $\hbar$.

5°) Calculer la valeur moyenne de l'observable X :

$$< X >(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (x, t)\ x\ \psi(x, t)\ \mathrm{d}x$$

Conclusion.

N.B : Pour éviter trop de calcul on peut poser, par raison de symétrie, $X' = x - a/2$.

On donne :

$$\int_0^{\alpha} (z - a/2) \sin^2\left(\frac{n\pi z}{\alpha}\right) \mathrm{d}z = 0$$

et

$$\int_0^{\alpha} z \sin\left(\frac{\pi z}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{2\pi z}{\alpha}\right) \mathrm{d}z = -\frac{16\ \alpha^2}{18\ \pi^2}$$

Extrait, Tétouan, MP-PC 2, Juin 1986.

1°) Considérons une particule de masse m, plongée dans un potentiel $V(X)$. L'hamiltonien de cette particule s'écrit : $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$

Rappelons l'équation de Schrödinger dans les deux représentations $\{|x>\}$ et $\{|p>\}$

◆ Représentation $\{|x>\}$: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t)$

◆ Représentation $\{|p>\}$: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \overline{\psi}(p, t) = \frac{p^2}{2m} \overline{\psi}(p, t) + (2\pi\hbar)^{-1/2} \int \mathrm{d}p' \overline{V}(p-p') \overline{\psi}(p', t)$

avec $\overline{\psi}(p, t)$ et $\overline{V}(p)$ sont les transformées de Fourier respectives de $\psi(x, t)$ et $V(x)$.

2°) Dans l'intervale $0 < x < a$, l'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad (1)$$

Cette équation admet comme solution : $\psi = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}$ (2)

avec $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Les conditions aux limites de la fonction d'onde au point $x = 0$ et $x = a$ exigent que :

$$\psi(0) = \psi(a) = 0$$

soit $\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,e^{ika} + B\,e^{-ika} = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} A = -B \\ 2iA \sin ka = 0 \end{cases}$

La solution (2) s'écrit alors : $\psi(x) = A\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = 2iA \sin kx$

avec la condition : $\sin ka = 0$ soit alors : $ka = n\pi$

n étant un nombre entier positif, car si $n = 0$, $\psi \equiv 0$.

On en déduit les valeurs quantifiées de l'énergie : $\boxed{E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2}$ $n = 1, 2, \ldots$

L'énergie de la particule ne peut prendre que des valeurs discrètes définies par l'équation (1), avec $n = 1, 2, \ldots$. Il y a donc quantification des états d'énergie de la particule.

La fonction propre correspondante : $\psi_n(x) = K \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right)$

La constante K se détermine par la condition de normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\,\psi_n(x)\,dx = 1$

En choisisant K réel et positif ; on a :

$$\int_0^a K^2 \sin^2\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{K^2}{2}\int_0^a\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{a}\right)dx = \frac{K^2}{2}\left[a - \frac{a}{2n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{a}x\right)_0^a\right]$$

$$= \frac{K^2}{2}a = 1$$

D'où : $K = \sqrt{\frac{2}{a}}$

et

$$\boxed{\begin{array}{ll} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) & 0 < x < a \\ \psi_n(x) = 0 & \text{ailleurs} \end{array}}$$

3°) A l'instant $t = 0$, la particule a pour fonction d'onde :

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right] \qquad 0 \le x \le a$$

a) Calculons :

$$\int_0^a |\psi(x,0)|^2 \, dx = \frac{1}{a}\left[\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a} dx + \int_0^a \sin^2\frac{2\pi x}{a} dx + \int_0^a 2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a} dx\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 0\right] = 1$$

Nous vérifions bien que cette fonction d'onde est normée.

b) $\psi(x, 0)$ est une combinaison linéaire des états $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$:

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right)$$

Les valeurs des énergies qu'on peut trouver lors de la mesure de l'énergie à $t = 0$ sont donc soit E_1, soit E_2.

◆ La probabilité $\mathcal{P}(E_1)$ du résultat E_1 que peut donner la mesure de l'observable H à $t = 0$ est donc : $\mathcal{P}(E_1) = |\langle \psi_1 | \psi(x,0)\rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

◆ Par un raisonnement analogue on a : $\mathcal{P}(E_2) = |\langle \psi_2 | \psi(x,0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

c) La valeur de l'énergie $E_2 = \frac{2^2\pi^2\hbar^2}{2m a^2}$ correspond à $n = 2$.

La probabilité de trouver une valeur de l'énergie supérieur à E_2 ($n = 3, 4\ldots$) est alors :

$$\mathcal{P}(E > E_2) = 1 - [P(E_1) + P(E_2)]$$

Soit $\boxed{\mathcal{P}(E > E_2) = 0}$

4°) ◆ $|\psi(x,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\sin\frac{\pi x}{a} + \sin\frac{2\pi x}{a}\right\}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} + \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right)$$

Appliquons la formule $|\psi(x,t)\rangle = \sum_n C_n(0)\, e^{iE_n t/\hbar} |\psi_n\rangle$

Nous obtenons immédiatement : $|\psi(x,t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-iE_1 t/\hbar}|\psi_1 + e^{-iE_2 t/\hbar}|\psi_2\rangle\right]$

avec $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m a^2}$ et $E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m a^2}$

ou encore en supposant un facteur de phase global de $|\psi(x,t)>$:

$$|\psi(x,t)> \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\psi_1> + e^{-i\left(\frac{-\pi^2\hbar}{2ma^2}+\frac{4\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)}|\psi_2>\right]$$

Soit $$|\psi(x,t)> \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\psi_1> + e^{-i\omega_{21}t}|\psi_2>\right]$$

avec $$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{3\pi^2\hbar}{2m\,a^2} \qquad (*)$$

ou $$\nu_{21} = \frac{\omega_{21}}{2\pi} = \frac{3}{4}\frac{\pi\hbar}{m\,a^2}$$

◆ La forme du paquet d'onde est donnée par la densité de probabilité :

$$|\psi(x,t)|^2 = <\psi(x,t)|\psi(x,t)>$$
$$= \left[<\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1| + <\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_{21}t}\psi_2|\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1> + e^{-i\omega_{21}t}|\psi_2>\right]$$
$$= \frac{1}{2}\psi_1^2(x) + \frac{1}{2}\psi_1^2(x) + \frac{1}{2}\psi_1\psi_2\left[e^{i\omega_{21}t} + e^{-i\omega_{21}t}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\psi_1^2(x) + \frac{1}{2}\psi_1^2(x) + \psi_1\psi_2\cos\omega_{21}t$$

On voit que les variations dans le temps de la densité de probabilité sont dues au terme d'interférence en $\psi_1\psi_2$. Une seule fréquence de Bohr apparait : $\upsilon_{21} = \frac{E_2 - E_1}{2\pi\hbar} = \frac{3}{4}\frac{\pi\hbar}{m\,a^2}$

5°) Valeur moyenne de l'observable X.

Calculons la valeur moyenne $<X>_t$ de la position de la particule à l'instant t :

$$<X>_t = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)\,x\,\psi(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}x\,|\psi(x,t)|^2\,dx$$

Pour éviter trop de calculs, il est commode de poser : $X' = X - a/2$ car, par symétrie, les éléments de matrice diagonaux de X' sont nuls. En effet :

$$<\psi_1|X'|\psi_1> \propto \int_0^a\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx = 0$$

$$<\psi_2|X'|\psi_2> \propto \int_0^a\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin^2\frac{2\pi x}{a}\,dx = 0$$

Il nous reste à calculer alors :

$$<\psi_1|X'|\psi_2> = <\psi_1|X|\psi_2> - \frac{a}{2}<\psi_1|\psi_2> = \frac{2}{a}\int_0^a x\,\sin\frac{\pi x}{a}\,\sin\frac{2\pi x}{a}\,dx$$

$$< \psi_1 \mid X' \mid \psi_2 > = \frac{2}{a}\left(-\frac{16a^2}{18\pi^2}\right) = \frac{-16a}{19\pi^2}$$

On a alors : $$< X' >_t = \int_0^a x' \ \psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \cos \omega_{21} t \ \mathrm{d}x$$

$$= \cos \omega_{21} t < \psi_1 \mid X' \mid \psi_2 > = \frac{-16a}{9\pi^2} \cos \omega_{21} t$$

Donc $$< X >_t = < X' >_t + \frac{a}{2}$$

$$\boxed{< X >_t = \frac{a}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \cos \omega_{21} t}$$

Remarque : ◆ $< X >_t$ représente le mouvement de centre du paquet d'onde.

◆ La valeur moyenne de l'énergie de la particule dans l'état $\mid \psi(x, t) >$ s'obtient par :

$$< H >_t = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{5}{2}E_1$$

ainsi que : $$< H^2 >_t = \frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 = \frac{17}{2}E_1^2$$

Ce qui donne : $$\Delta H = \sqrt{< H^2 > - < H >^2} = \frac{3}{2}E_1$$

On voit que $< H >$, $< H^2 >$ et ΔH sont indépendants du temps, ce qui est évident car H est une constante du mouvement.

◆ Le paquet d'onde évolue de manière appréciable au bout d'un temps de l'ordre de :

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_{21}}$$ (à cause du terme $\cos \omega_{21} t$)

Soit alors : $$\Delta H \ \Delta t \approx \frac{3}{2} E_1 \frac{1}{\omega_{21}}$$

Compte tenu de (*), on a : $$\omega_{21} = \frac{3E_1}{\hbar}$$

Soit $$\Delta H \ \Delta t \approx \frac{3}{2} E_1 \frac{\hbar}{3E_1} = \frac{\hbar}{2}$$

Nous retrouvons donc la relation d'incertitude temps–énergie.

Complément : Tracer les courbes correspondantes aux variations des fonctions $\psi_1^2(x)$, $\psi_2^2(x)$ et $\psi_1(x) \ \psi_2(x)$.

La densité de probabilité : $\mid \psi(x, t) \mid^2 = \frac{1}{2} \psi_1^2(x) + \frac{1}{2} \psi_2^2(x) + \psi_1(x) \psi_2(x) \cos \omega_{21} t$

avec $\psi_1^2(x) = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a}$; $\psi_2^2(x) = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a}$; $\psi_1(x) \ \psi_2(x) = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a}$

Les courbes correspondantes aux variations des fonctions ψ_1^2 , ψ_2^2 et $\psi_1\psi_2$ sont tracées sur les figures *a*, *b* et *c*.

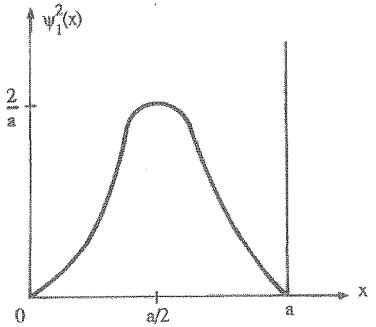


figure a : Densité de probabilité de présence pour le niveau fondamental ($n = 1$).

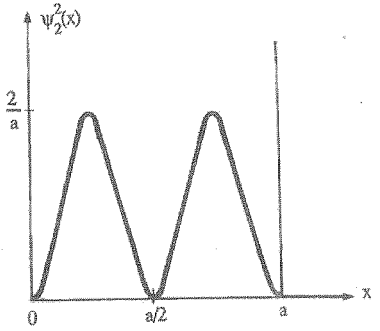


figure b : densité de probabilité de présence pour le 1er niveau excité.

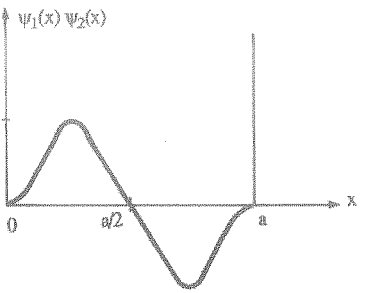


figure c : Terme d'interférence responsable de l'évolution de la forme du paquet d'ondes.

19 – Postulats de la mécanique quantique appliqués à une particule confinée dans un puits de potentiel infini.

1) Trouver les états propres et les valeurs propres d'une particule dans un puits de potentiel $V(x) = 0$ pour $0 < x < a$ et $V(x) = \infty$ à l'extérieur.

2) La particule dans le puits précédent se trouve dans l'état $f(x) = (a - x)x$ pour $0<x<a$ et $\phi(x) = 0$ à l'extérieur. Trouver la probabilité pour qu'un résultat de mesure donne la valeur E_n à l'instant t. (Attention toutes les fonctions d'onde doivent être normées !).
Calculer numériquement en particulier les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4 correspondant à E_1, E_2, E_3 et E_4 : Conclure.

3) Exprimer l'énergie moyenne de la particule en fonction de E_1, E_2 ... et P_1, P_2 ... sachant que $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

Rappel :

$$\int_0^x (Ax'^2 + Bx' + C) \sin x' \, dx' = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cos x + (\lambda x + \mu) \sin x.$$

$\alpha, \beta, \lambda, \gamma, \mu$ doivent être calculés en fonction de A, B, C.

Extrait, Rabat, MP 2, Mai 1985.

1°) Rappelons les résultats obtenus (cf exercice ...) $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n \pi x}{a}\right)$

$$E_n = \frac{\hbar \pi^2}{2m a^2} n^2 \qquad (n \text{ entier} > 0)$$

2°) La particule se trouve dans l'état : $\phi(x) = A\, x(a-x)$.

La relation de normalisation nous impose : $|A|^2 \int_0^a x^2 (a-x)^2 \, dx = 1$

En choisissant A réel et positif, on obtient : $A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$

donc $$\boxed{\phi(x) = \sqrt{\frac{30}{a^5}}\, x(a-x)}$$

Les cœfficients C_n sont déterminés par la connaissance de $\psi(x, 0)$: $\psi(x, 0) = \sum_n C_n \phi_n(x)$

Compte tenu de : $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n^* \phi_m \, dx = \delta n m$ (δ : symbole de Kronecher)

On a donc : $C_n = \int_0^a \phi_n^* \psi(x, 0) \, dx$ (1)

dans notre cas, $\psi(x, 0) = \phi(x) = \sqrt{\frac{30}{a^5}}\, x(a-x)$

La valeur C_n est, dans ce cas (1) :

$$C_n = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n \pi x}{a} \sqrt{\frac{30}{a^5}}\, x(x-a) \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{60}{a^6}} \int_0^a x \sin\left(\frac{n \pi x}{a}\right) x(a-x) \, dx$$

$$C_n = \sqrt{\frac{60}{a^6}} \left[a \int_0^a x \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) dx - \int_0^a x^2 . \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{60}{a^6}} (a\ I_1 - I_2)$$

avec $I_1 = \int_0^a x \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) dx$ et $I_2 = \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) dx$

Ces deux intégrales se calculent aisément par la méthode d'intégration par parties, soit :

$$I_1 = \frac{-a}{n\,\pi}\left(x \cos\frac{n\,\pi\,x}{a}\right)_0^a + \frac{a}{n\,\pi}\int_0^a \cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) dx = \frac{-a^2}{n\,\pi}(-1)^n$$

$$I_2 = \frac{-a^3}{n\,\pi}(-1)^n + \frac{2a}{n\,\pi}\int_0^a x \cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) dx$$

$$= -(-1)^n \frac{a^3}{n\,\pi} + \frac{2a^3}{(n\,\pi)^3}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Il vient alors : $$C_n = \frac{\sqrt{60}}{a^3} \frac{2a^3}{(n\,\pi)^3}\left[1 - (-1)^n\right]$$

ou encore $$\boxed{C_n = \frac{4\sqrt{15}}{(n\,\pi)^3}\left[1 - (-1)^n\right]} \qquad (2)$$

L'état $\psi(x, 0)$ est donc égal à :

$$\boxed{\psi(x,0) = \sum_n C_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\sqrt{15}}{(n\,\pi)^3}\left[1 - (-1)^n\right] \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\,\pi\,x}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{30}{a^5}}\, x(a - x) \qquad 0 \le x \le a \qquad (3)$$

Ce développement est celui d'une série de Fourier.

Comme il y a conservation au cours du temps :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t)\, \psi(x, t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, 0)\, \psi(x, 0)\, dx = 1$$

donc $$\sum_n |C_n|^2 = 1$$

soit d'après (2) : $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \times 15}{\pi^6} \frac{[1 - (-1)^n]^2}{n^6} = 1$$

d'où $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]^2}{n^6} = \frac{\pi^6}{240}$$

* Si n est pair $(n = 2n')$: $$[1 - (-1)^n]^2 = 0$$

* Si n est impair $(n = 2n' + 1)$: $[1 - (-1)^n]^2 = 4$

d'où $$\frac{\pi^6}{240} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n' + 1)^6} \qquad (n' = p)$$

soit $$\frac{\pi^6}{960} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p + 1)^6}$$

ou encore $$\boxed{1 = \frac{960}{\pi^6} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p + 1)^6} = |C_p|^2}$$

$$1 = \frac{960}{\pi^6}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots\ldots\right) \qquad (4)$$

$$= |C_1|^2 + |C_3|^2 + |C_5|^2 \ldots\ldots \qquad (5)$$

Or $|C_n|^2$ représente la probabilité P_n d'avoir le système dans l'état ϕ_n.

En identifiant (4) et (5), on obtient : $P_1 = |C_1|^2 = \frac{960}{\pi^6} \leftrightarrow E_1$

$P_2 = |C_2|^2 = 0 \leftrightarrow E_2$

$P_3 = |C_3|^2 = \frac{960}{\pi^6} \cdot \frac{1}{3^6} \leftrightarrow E_3$

$P_4 = |C_4|^2 = 0 \leftrightarrow E_4$

3°) ◆ L'énergie moyenne de la particule à l'instant t est :

$$\langle H \rangle_t = \langle \psi(x, t) | H | \psi(x, t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} E_n |C_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n P_n$$

◆ L'énergie moyenne dans l'état ϕ est : $\langle H \rangle_\phi = \langle \phi(x) | H | \phi(x) \rangle$

Soit d'après (3) : $\langle H \rangle_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} E_n |C_n|^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot \frac{240}{\pi^6} \frac{[1 - (-1)^n]^2}{n^6}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} E_{2p+1} \frac{240}{\pi^6} \frac{4}{(2p + 1)^6}$$

$$= \frac{960}{\pi^6} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p + 1)^6} E_{2p+1}$$

$$= \frac{960}{\pi^6}\left(\frac{E_1}{1^6} + \frac{E_3}{3^6} + \frac{E_5}{5^6} + \ldots\ldots \frac{E_{2p+1}}{(2p + 1)^6} + \ldots\right)$$

Or $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2 = n^2 E_1$

Donc : $$< H >_\phi = \frac{960}{\pi^6} E_1 \left(1 + \frac{3^2}{3^6} + \frac{5^2}{5^6} + \ldots \frac{(2p+1)^2}{(2P+1)^6} + \ldots\ldots \right)$$

$$= \frac{960}{\pi^6} E_1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

En utilisant : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, on obtient :

$$\boxed{< H >_\phi = \frac{960}{\pi^6} E_1 \frac{\pi^4}{96} = \frac{10}{\pi^2} E_1 \approx E_1}$$

20 – Etats d'un système de deux particules - E.C.O.C. - Postulats de la mécanique quantique.

On considère 2 particules de masse M n'interagissant pas entre elles et soumises à un potentiel. $V(x) = \frac{1}{2} M \omega^2 x^2$

L'Hamiltonien du système est donné par $H = H_1 + H_2$, H_1 *et* H_2 *étant respectivement les hamiltoniens de la particule 1 et de la particule 2.*

1°) A quelle grandeur physique est associé l'opérateur hamiltonien ? Donner les expressions de H_1 *et* H_2.

2°) On appelle $|\varphi_n>$ *l'état propre de* H_1, *correspondant à la valeur propre* E_n, *dans l'espace des états* $\mathscr{E}_1$, $|\varphi_p>$ *l'état propre de* H_2 *correspondant à la valeur propre* E_p *dans l'espace des états* $\mathscr{E}_2$. *L'état propre de H est défini par le Ket* $|\varphi_n> \otimes |\varphi_p>$ *appartenant à l'espace* $\mathscr{E} = E_1 \otimes \mathscr{E}_2$ *appelé produit tensoriel de* $\mathscr{E}_1$ *et* $\mathscr{E}_2$.

Les actions de H_1 *et* H_2 *sur* $|\varphi_{n,p}>$ *sont telles que :*

$H_1 |\varphi_{n,p}> = E_n | \varphi_{n,p}>$ *où* $E_n = (n + 1/2) \hbar \omega$ *et* $H_2 |\varphi_{n,p}> = E_p | \varphi_{n,p}>$

où $E_p = (p + 1/2) \hbar \omega$, *n et p sont des entiers naturels.*
Ecrire l'équation aux valeurs propres de H.

3°) Quel est le degré de dégénérescence des niveaux d'énergie suivants :

$\hbar \omega$, $2\hbar \omega$, $3\hbar \omega$. *Ecrire les kets propres* $|\varphi_{n,p}>$ *correspondants à ces 3 niveaux d'énergie.*

4°) Lesquels des ensembles suivants forment un E.C.O.C :
$\{H_1\}$ *dans* $\mathscr{E}_1$ *?,* $\{H_2\}$ *dans* $\mathscr{E}_2$*?,* $\{H_1\}$ *et* $\{H_2\}$ *dans* $\mathscr{E}$ *?,* $\{H_1, H_2\}$ *dans* $\mathscr{E}$ *?,*

$\{H\}$ dans $\mathscr{E}$? et $\{H_1, H\}$ dans $\mathscr{E}$?
Justifier votre réponse dans chaque cas.

5) L'état du système à l'instant $t = 0$ est décrit par le ket :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left(|\varphi_{0,0}\rangle + |\varphi_{0,1}\rangle + |\varphi_{1,0}\rangle + |\varphi_{1,1}\rangle\right).$$

a) Quels résultats peut-on trouver quand on mesure l'énergie du système à l'instant $t = 0$? Avec quelles probabilités ?
b) Même question pour l'énergie de la particule 1.

6°) La mesure de l'énergie à $t = 0$ a donné le résultat $2\hbar\omega$.
a) Quelle est l'influence de la mesure ? En déduire l'état du système à l'instant t quelconque.
b) Calculer à l'instant t la valeur moyenne de l'énergie de la particule 1.

Agadir, PC 2, Mai 1987.

1°) La grandeur physique à laquelle est associé l'Hamiltonien est l'énergie.

L'Hamiltonien du système s'écrit : $H = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}m\omega^2 X_i^2 + \frac{1}{2m}P_i^2\right)$

2°) L'état propre de H est défini par le ket $|\varphi_{n,p}\rangle = |\varphi_n\rangle \otimes |\varphi_p\rangle$. L'équation aux valeurs propres de H s'écrit donc : $H|\varphi_{n,p}\rangle = E|\varphi_{n,p}\rangle$

$$(H_1 + H_2)|\varphi_{n,p}\rangle = (E_n + E_p)|\varphi_{n,p}\rangle$$

Les états stationnaires du système global sont des produits tensoriels de la forme :

$$|\varphi_n\rangle \otimes |\varphi_p\rangle$$

leurs énergies étant : $E_{np} = E_n + E_p = (n + p + 1)\hbar\omega$

3°)◆ n et p sont des entiers, le niveau fondamental est donc obtenu lorsque $n = 0$ et $p = 0$.

L'énergie correspondante est : $E_{00} = \hbar\omega$

Ce niveau n'est donc pas dégénéré.

◆ Le premier niveau excité est obtenu soit pour $n = 1$ et $p = 0$, soit pour $n = 0$ et $p = 1$:

$$E_{01} = E_{10} = 2\hbar\omega$$

Ce niveau est deux fois dégénéré puisque à ce même niveau correspond deux états différents qui sont indépendants : $|\varphi_{1,0}\rangle$ et $|\varphi_{0,1}\rangle$.

◆ Le second niveau excité correspond à $n = 2$ et $p = 0$, ou $n = 0$ et $p = 2$, ou $n = 1$ et $p = 1$:

$$E_{20} = E_{02} = E_{11} = 3\hbar\omega$$

Ce niveau est donc trois fois dégénéré.

◆ Les kets propres $|\varphi_{n,p}\rangle$ correspondants à ces trois niveaux d'énergie sont :

$$\{ |\varphi_{0,0}\rangle \} \; ; \; \{ |\varphi_{0,1}\rangle \text{ et } |\varphi_{1,0}\rangle \} \; ; \; \{ |\varphi_{2,0}\rangle, |\varphi_{0,2}\rangle \text{ et } |\varphi_{1,1}\rangle \}$$

4°) D'après les propriétés de l'oscillateur harmonique à une dimension, E_n est non dégénéré dans $\mathscr{E}_1$, et E_p dans $\mathscr{E}_2$; par conséquent $\{H_1\}$ constitue à lui seul un E.C.O.C dans $\mathscr{E}_1$ et $\{H_2\}$ constitue également un E.C.O.C dans $\mathscr{E}_2$.

$\{H_1\}$ ne constitue pas à lui seul un E.C.O.C dans $\mathscr{E}$ car les valeurs propres correspondants à $H_1\left(E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega\right)$ sont associées à une infinité de vecteurs propres $|\varphi_{n,p}\rangle$ (n étant fixé, p peut prendre n'importe quelle valeur). Le raisonnement est analogue pour $\{H_2\}$ dans $\mathscr{E}$.

Nous avons vu à la troisième question qu'à un couple (n, p) correspond plusieurs vecteurs propres $|\varphi_{n,p}\rangle$ de $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$, donc $\{H_1 + H_2 = H\}$ ne constitue pas un E.C.O.C dans $\mathscr{E}$. Par contre, l'ensemble des deux hamiltoniens H_1 et H_2 constitue, lui un E.C.O.C. En effet, il n'y a pas deux vecteurs $|\varphi_{n,p}\rangle$ qui aient les mêmes valeurs propres, à la fois pour H_1 et H_2. C'est pourquoi, le système de vecteurs propres communs à H_1 et H_2 est unique (à des facteurs de phases près).

$\{H_1, H_2\}$ forme lui aussi un E.C.O.C dans $\mathscr{E}$. En effet, les valeurs propres de H_1 et H sont respectivement $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ et $(n + p + 1)\hbar\omega$. Pour tout n, il existe plusieurs vecteurs $|\varphi_{n,p}\rangle$, mais le vecteur propre associé à H exige que l'on fixe de même p : il n'y a pas donc deux vecteurs propres $|\varphi_{n,p}\rangle$ qui aient les mêmes vecteurs propres à la fois à H_1 et H.

5°) L'état du système à $t = 0$ est décrit par le ket :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[|\varphi_{0,0}\rangle + |\varphi_{0,1}\rangle + |\varphi_{1,0}\rangle + |\varphi_{1,1}\rangle\right]$$

a) Les résultats de mesure de l'énergie sont les valeurs propres des vecteurs $|\varphi_i\rangle$ constituant $|\psi(0)\rangle$. Soit alors, $\hbar\omega$, $2\hbar\omega$ et $3\hbar\omega$. La probabilité $\mathscr{P}_{a_{n,p}}$ d'obtenir comme résultat la valeur propre $a_{n,p}$ de l'observable H correspondante est :

$$\mathscr{P}_{a_{n,p}} = \sum_{i}^{g_i} |\langle \varphi^{i}_{n,p} | \varphi(0)\rangle|^2$$

où g_n, est le degré de dégénérescence de $a_{n,p}$ et $|\varphi^{i}_{n,p}\rangle$ un système orthonormé de vecteurs formant une base dans le sous–espace propre $\mathscr{E}_n$ associé à la valeur propre $a_{n,p}$ de H.

Soit :

$$\mathscr{P}_{\hbar\omega} = |\langle \varphi_{0,0} | \psi(0)\rangle|^2 = 1/4$$

$$\mathscr{P}_{2\hbar\omega} = |\langle \varphi_{0,1} | \psi(0)\rangle|^2 + |\langle \varphi_{1,0} | \psi(0)\rangle|^2 = 1/2$$

$$\mathscr{P}_{3\hbar\omega} = |\langle \varphi_{1,1} | \psi(0)\rangle|^2 = 1/4$$

Remarquons que : $\mathscr{P}_{\hbar\omega} + \mathscr{P}_{2\hbar\omega} + \mathscr{P}_{3\hbar\omega} = 1$

b) Energie de la particule 1 :

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

et $$H_1 \mid \psi(0) > = \frac{1}{2}\left(E_0 \mid \varphi_{0,0} > + E_0 \mid \varphi_{0,1} > + E_1 \mid \varphi_{1,0} > + E_1 \mid \varphi_{1,1} >\right)$$

Les seules valeurs possibles sont donc $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ et $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ avec les probabilités respectives :

$$\mathcal{P}_{E_0} = \mid < \varphi_{0,0} \mid \psi(0) > \mid^2 + \mid < \varphi_{0,1} \mid \psi(0) > \mid^2 = 1/2$$

$$\mathcal{P}_{E_1} = \mid < \varphi_{1,0} \mid \psi(0) > \mid^2 + \mid < \varphi_{1,1} \mid \psi(0) > \mid^2 = 1/2$$

6°) La mesure de l'énergie totale à $t = 0$ a donné le résultat $2\hbar\omega = E_{0,1} = E_{1,0}$. L'état du système juste après la mesure est la projection normée $\frac{P_n \mid \psi(0) >}{\sqrt{< \psi(0) \mid P_n \mid \psi(0) >}}$

de $\mid \psi(0) >$ sur le sous espace propre associé à $2\hbar\omega$.

Soit donc : $$P_n = \mid \varphi_{0,1} >< \varphi_{0,1} \mid + \mid \varphi_{1,0} >< \varphi_{1,0} \mid$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} P_n \mid \psi(0) > = \frac{1}{2}\left[\mid \varphi_{0,1} > + \mid \varphi_{1,0} >\right] \\ < \psi(0) \mid P_n \mid \varphi(0) > = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où l'état du système est : $$\mid \phi(0) > = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mid \varphi_{0,1} > + \mid \varphi_{1,0} >\right].$$

On voit que la mesure de l'énergie a **perturbé l'état du système.**

L'état du système à un instant t quelconque est donné par :

$$\mid \phi(t) > = \sum C_{np}(0)\, e^{-iE_{np}t/\hbar} \mid \varphi_{n,p} >$$

Soit $$\mid \phi(t) > = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-iE_{0,1}t/\hbar} \mid \varphi_{0,1} > + e^{-iE_{1,0}t/\hbar} \mid \varphi_{1,0} >\right]$$

Comme $E_{01} = E_{10} = 2\hbar\omega$, alors : $$\boxed{\mid \phi(t) > = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2i\omega t}\left[\mid \varphi_{0,1} > + \mid \varphi_{1,0} >\right]}$$

Remarque : $\mid \phi(0) >$ et $\mid \phi(t) >$ ne différent donc l'un de l'autre que par le facteur de phase global $e^{-2i\omega t}$. Ces deux états sont **physiquement indiscernables** : toutes les propriétés physiques d'un système physique qui se trouve dans un état propre de H ne **varient pas au cours du temps.** Ces états propres sont appelés pour cette **raison états stationnaires.**

b) La valeur moyenne de l'énergie de la particule 1 est donnée par :

Compte tenu de la remarque précédente : $< H_1 >_t = < H_1 >_0$

Soit $< H_1 >_0 = < \phi(0) \mid H_1 \mid \phi(0) >$

$$= \frac{1}{2}\left[< \varphi_{0,1} \mid H_1 \mid \varphi_{0,1} > + < \varphi_{1,0} \mid H_1 \mid \varphi_{1,0} > + < \varphi_{0,1} \mid H_1 \mid \varphi_{1,0} > + < \varphi_{1,0} \mid H_1 \mid \varphi_{0,1} > \right]$$

$$= \frac{1}{2}\,[2\hbar\omega + 2\hbar\omega]$$

Donc $\boxed{< H_1 >_0 = 2\hbar\omega}$

21 – Postulats de la mécanique quantique - Ensembles complets d'observables qui commutent : E.C.O.C.

On considère que l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{ \mid u_i > \}$ $i = 1, 2, 3$. L'Hamiltonien H et deux observables A et B sont représentées par les matrices :

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad , B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ω_0, a et b sont des constantes réelles positives. A l'instant $t = 0$ le système physique est décrit par :

$$\mid \psi(0) > \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \mid u_1 > \; + \; \frac{1}{2} \mid u_2 > - \frac{i}{2} \mid u_3 >$$

1°) a) On mesure à l'instant initial l'énergie du système, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
b) Calculer dans l'état $\mid \psi(0) >$, $< H >$ et ΔH.

2°) a) Au lieu de mesurer H à l'instant $t = 0$, on mesure A. Quels sont les résultats possibles et leurs probabilités ? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?
b) H et A forment-elles un E.C.O.C ?

3°) Calculer $\mid \psi(t) >$ à l'instant t.

4°) Calculer les valeurs moyennes $< A >_t$ et $< B >_t$ de A et B à l'instant t.

5°) Quels résultats obtient-t-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A ? Même question pour l'observable B, avec quelles probabilités ? Retrouver $< B >_t$ en utilisant les probabilités.

Extrait, Casablanca I, PC 2, Mai 1988.

1°) a) L'hamiltonien H est diagonal dans la base $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>\}$

Les résultats possibles de l'énergie sur une mesure de l'énergie sont les valeurs propres de H qui sont : $\hbar\omega_0$ (valeur propre simple) et $2\hbar\omega_0$ (valeur propre double).

La probabilité qu'une mesure de H donne $\hbar\omega_0$ est $\mathcal{P}_1$: $\mathcal{P}_1 = |<u_1|\psi(0)>|^2 = \frac{1}{2}$

La probabilité qu'une mesure de H donne $2\hbar\omega_0$ est $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{P}_2 = |<u_2|\psi(0)>|^2 + |<u_3|\psi(0)>|^2 = \frac{1}{2}$$

b) ◆ La valeur moyenne de l'énergie est donnée par : $<H>_0 = <\psi(0)|H|\psi(0)>$

Comme H est diagonal, il n'y a que les termes diagonaux qui ne sont pas nuls. Il vient alors :

$$<H>_0 = \sum_{i=1}^{3} |c_i|^2 <u_i|H|u_i> = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 + \frac{1}{4}\left(2\hbar\omega_0 + 2\hbar\omega_0\right)$$

$$<H>_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$$

◆ L'écart quadratique moyen est défini par : $\Delta H = \sqrt{<H^2> - <H>^2}$

Avec $<H^2> = <\psi(0)|H^2|\psi(0)> = \frac{1}{2}\hbar^2\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(4\hbar^2\omega_0^2 + 4\hbar^2\omega_0^2\right)$

$$<H^2> = \frac{5}{2}\hbar^2\omega_0^2$$

On en déduit : $\Delta H^2 = \frac{5}{2}\hbar^2\omega_0^2 - \frac{9}{4}\hbar^2\omega_0^2 = \frac{\hbar^2\omega_0^2}{4}$

Soit : $\Delta H = \frac{\hbar\omega_0}{2}$

2°) a) La matrice représentative de A dans la base $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>\}$ s'écrit :

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la sous-matrice non diagonale sont $\lambda_\pm$ telles que : $\lambda^2 - a^2 = 0$

Soit : $\lambda_\pm = \pm a$

et les vecteurs propres correspondants s'écrivent aisément :

$$|\varphi_+> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2> + |u_3>\right] \quad \leftrightarrow \quad \text{(valeur propre } +a\text{)}$$

$$\cdot\ |\varphi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_2\rangle - |u_3\rangle\right] \quad \leftrightarrow \quad \text{(valeur propre } -a\text{)}$$

$$\cdot\ |\varphi_0\rangle = |u_1\rangle \quad \leftrightarrow \quad \text{(valeur propre } +a\text{)}$$

Les résultats possibles lors de la mesure de A à $t = 0$ sont $+a$ et $-a$ avec les probabilités $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_{-a}$ telles que : $\mathcal{P}_{-a} = |\langle \varphi_- | \psi(0)\rangle|^2$ et $\mathcal{P}_a = 1 - \mathcal{P}_{-a}$

Notons que l'état $|\psi(0)\rangle$ peut s'écrire en fonction des $|\varphi_i\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_0\rangle + i\,|\varphi_-\rangle\right) \qquad (1)$$

Il vient alors : $\mathcal{P}_{-a} = |\langle \varphi_- | \psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{P}_a = 1 - \mathcal{P}_{-a} = \frac{1}{2}$$

◆ Si la mesure de A a donné $(+a)$, l'état du système immédiatement après la mesure est le ket normé $|\phi_a\rangle = \dfrac{P_n\,|\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(0)|P_n|\psi(0)\rangle}}$

où P_n est le projecteur défini dans le sous espace associé à la valeur propre $(+a)$ engendré par $|\varphi_0\rangle$ et $|\varphi_+\rangle$. Soit : $P_n = |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| + |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+|$

$$P_n\,|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\varphi_0\rangle \quad \text{et} \quad \langle\psi(0)|P_n|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}$$

D'où $|\phi_a\rangle = |\varphi_0\rangle$ à un facteur de phase près.

◆ Si la mesure de A a donné $(-a)$, l'état du système juste après la mesure est :

$$|\phi_{-a}\rangle = \frac{P_n\,|\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(0)|P_n|\psi(0)\rangle}} \qquad \text{avec } P_n = |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|$$

Donc $P_n\,|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\,|\varphi_-\rangle$ et $\sqrt{\langle \psi(0)|P_n|\psi(0)\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Il vient alors : $|\phi_{-a}\rangle = i\,|\varphi_-\rangle$ Ou encore $|\phi_{-a}\rangle = |\varphi_-\rangle$ à un facteur de phase près.

b) Les vecteurs propres communs à H et A sont donnés par :

	valeur propre de H	valeur propre de A
$\|\varphi_0\rangle = \|u_1\rangle$	$\hbar\omega_0$	a
$\|\varphi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\|u_2\rangle + \|u_3\rangle\right]$	$2\hbar\omega_0$	a
$\|\varphi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\|u_2\rangle - \|u_3\rangle\right]$	$2\hbar\omega_0$	$-a$

On voit sur le tableau que H a une valeur propre dégénérée deux fois ($2\hbar\omega_0$) et B a elle aussi une valeur dégénérée deux fois (a). Donc, aucun des ensembles $\{(H)\}$ ou $\{(A)\}$ ne constitue à, lui seul, un E.C.O.C. Par contre, l'ensemble des deux observables $\{(H, A)\}$ constitue, lui, un E.C.O.C car il n'a y pas deux vecteurs $|\varphi_i>$ qui aient les mêmes valeurs propres, à la fois pour H et A.

3°) L'état du système à un instant t ultérieur est donné par :

$$|\psi(t)> = \sum_n \underbrace{C_n(0)}\, e^{-iE_n t/\hbar} \; |\varphi_n>$$

En utilisant le tableau ci–dessus et l'expression de $|\psi(0)>$ (1), on obtient :

$$|\psi(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\omega_0 t} \; |\varphi_0> + \underbrace{i}\, e^{-2i\omega_0 t} \; |\varphi_->\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\omega_0 t} \; |\varphi_0> + e^{-i\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)} \; |\varphi_->\right]$$

Qu'on peut écrire autrement en supprimant un facteur de phase global ($e^{-i\omega_0 t}$) :

$$\boxed{|\psi(t)> = \alpha \; \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\varphi_0> + e^{-i\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)} \; |\varphi_->\right]} \qquad (2)$$

4°) ◆ La valeur moyenne de A est définie par :

$$<A>_t = <\psi(t)\,|\,A\,|\,\psi(t)>$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(<\varphi_0| + e^{i\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)} <\varphi_-|\right) \; A \left(|\varphi_0> + e^{-i\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)} \; |\varphi_->\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[<\varphi_0\,|\,A\,|\,\varphi_0> \; + \; <\varphi_-\,|\,A\,|\,\varphi_->\right]$$

($<\varphi_0|A|\varphi_0> = a$, $<\varphi_-|A|\varphi_-> = -a$)

Soit alors : $\boxed{<A>_t = 0}$

◆ Il est facile de remarquer que B est H ne commutent pas et donc B n'est pas **une constante du mouvement** : le résultat de $<B>_t$ va dépendre automatiquement du temps.

Ecrivons : $|\psi(t)>$ en fonction des $|u_i>$:

$$|\psi(t)> = \sum_n C_n(0) \; e^{-iE_n t/\hbar} \; |u_n>$$

$$= \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{\sqrt{2}} \; |u_1> + \frac{i}{2}\, e^{-2i\omega_0 t} \; |u_2> - \frac{i}{2}\, e^{-2i\omega_0 t} \; |u_3>$$

Ou encore $|\psi(t)> \alpha \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|u_1> + \frac{i}{2}(|u_2> - |u_3>) = \sum_n C_n(t)\,|u_n>$

avec $C_1(t) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|u_1>$; $C_2(t) = \frac{i}{2}$; $C_3(t) = \frac{-i}{2}$

La valeur moyenne de B à l'instant t est :

$$<B>_t = <\psi(t)\,|B|\,\psi(t)> = \sum_{i,j} C_i C_j^* <u_j\,|B|\,u_i>$$

Avec $<u_j\,|B|\,u_i> = B_{ji}$ les éléments de matrice de B dans la base des $|u_i>$. Les seuls non nuls sont :

$$<u_1\,|B|\,u_2> = <u_2\,|B|\,u_1> = <u_3\,|B|\,u_3> = b$$

Il vient donc :

$$<B>_t = C_2 C_1^* B_{12} + C_1 C_2^* B_{21} + C_3 C_3^* B_{33}$$

Compte tenu des définitions des C_i, on obtient :

$$<B>_t = b\left\{\frac{i}{2}\frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}\left(\frac{-i}{2}\right) + \left(\frac{-i}{2}\right)\left(\frac{i}{2}\right)\right\}$$

$$<B>_t = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}\right) + \frac{1}{4}\right]$$

$$\boxed{<B>_t = b\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\omega_0 t\right)}$$

La valeur moyenne de B oscille alors entre $b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $b\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

5°) ◆ Les résultats de mesure de A à $t > 0$ sont (a) ou $(-a)$ avec les probabilités respectives $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_{-a}$ telles que :

$$* \mathcal{P}_a = |<\varphi_0\,|\psi(t)>|^2 + |<\varphi_+|\psi(t)>|^2 = 1/2$$

$$* \mathcal{P}_{-a} = |<\varphi_-\,|\psi(t)>|^2 = 1/2$$

◆ Les résultats possibles lors de la mesure de B sont les valeurs propres de B. Pour celà, la diagonalisation de la sous–matrice de B donne b et $-b$ comme valeurs propres. Les vecteurs propres correspondants s'écrivent aisément :

$$|\varphi_+'> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1> + |u_2>\right] \quad \leftrightarrow \quad b$$

$$|\varphi_-'> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u_1> - |u_2>\right] \quad \leftrightarrow \quad -b$$

$$|\varphi_0'> = \left[|u_3>\right] \quad \leftrightarrow \quad b$$

La probabilité de trouver la valeur $(-b)$ est : $\mathcal{P}_{-b} = |<\varphi_-'\,|\psi(t)>|^2$

En utilisant (3), on obtient :

$$\mathcal{P}_{-b} = \left| < \varphi_- | \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}} | u_1 > + < \varphi_- | \frac{i}{2} | u_2 > + < \varphi_- | \frac{-i}{2} u_3 > \right|^2$$

$$= \left| \frac{e^{i\omega_0 t}}{2} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{4} \cos \omega_0 t - i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \omega_0 t \right) \Big|^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[\cos^2 \omega_0 t + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \omega_0 t \right)^2 \right]$$

Soit :

$$\boxed{\mathcal{P}_{-b} = \frac{3}{8} - \frac{\sin \omega_0 t}{2\sqrt{2}}}$$

Nous avons : $\mathcal{P}_{+b} + \mathcal{P}_{-b} = 1$, on en déduit $\mathcal{P}_b$:

$$\boxed{\mathcal{P}_b = \frac{5}{8} - \frac{\sin \omega_0 t}{2\sqrt{2}}}$$

◆ En utilisant la relation : $< B >_t = \sum_n b_n \mathcal{P}_{b_n}$

On obtient : $< B >_t = b \left(\frac{5}{8} + \frac{\sin \omega_0 t}{2\sqrt{2}} \right) - b \left(\frac{3}{8} + \frac{\sin \omega_0 t}{2\sqrt{2}} \right)$

$$\boxed{< B >_t = b \left(\frac{1}{4} + \frac{\sin \omega_0 t}{2\sqrt{2}} \right)}$$

c.q.f.d

22 – Postulats de la mécanique quantique - Mesures simultanées.

On considère un système conservatif à trois niveaux décrit par l'hamiltonien H_0 ; les trois états de base du système sont représentés par les trois vecteurs $|\varphi_1>$, $|\varphi_2>$, $|\varphi_3>$ états propres de H_0 avec la même valeur propre E_0.

$$H_0 |\varphi_1> = E_0 |\varphi_1> \; ; \; H_0 |\varphi_2> = E_0 |\varphi_2> \; ; \; H_0 |\varphi_3> = E_0 |\varphi_3>$$

Le couplage entre les différents états précédents est décrit par un hamiltonien V dont les seuls éléments de matrice non nuls sont :

$$< \varphi_1 | V | \varphi_3 > = < \varphi_3 | V | \varphi_1 > = < \varphi_1 | V | \varphi_2 > = < \varphi_2 | V | \varphi_1 > = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

où λ est une constante réelle telle que $0 < \lambda < E_0$

1°) Ecrire la matrice représentant l'hamiltonien total $H = H_0 + V$ dans la base $\{|\varphi_1\rangle , |\varphi_2\rangle , |\varphi_3\rangle\}$.

2°) a) Déterminer, en fonction de E_0 et de λ, les valeurs propres ε_-, ε_0, ε_+ de l'Hamiltonien total H (remarquer que $0 < \varepsilon_- < \varepsilon_0 < \varepsilon_+$)
b) Déterminer les kets propres correspondants aux valeurs propres que l'on notera respectivement $|\psi_-\rangle$, $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_+\rangle$ et que l'on exprimera dans la base $\{|\varphi_1\rangle , |\varphi_2\rangle , |\varphi_3\rangle\}$.

3°) Le système est à l'instant $t = 0$ dans l'état $|\mathscr{E}(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$,
a) Déterminer l'état du système à un instant t ultérieur que l'on notera $|\mathscr{E}(t)\rangle$. Le système a-t-il évolué ?
b) Calculer la valeur moyenne de H dans l'état $|\mathscr{E}(t)\rangle$.
Retrouver la définition classique d'un système conservatif.

4°) Soit l'observable A dont la matrice dans la base $\{|\psi_-\rangle, |\psi_0\rangle, |\psi_+\rangle\}$ est :

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +a \end{pmatrix}$$

Si on mesure simultanément les observables A et H à l'instant t.
- L'état du système étant $|\mathscr{E}(t)\rangle$, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

5°) On considère l'observable B dont la matrice dans la base $\{|\psi_-\rangle, |\psi_0\rangle, |\psi_+\rangle\}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si l'état du système à l'instant $t = 0$ est :

$$|\mathscr{E}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_-\rangle + \frac{1}{2} |\psi_0\rangle + \frac{1}{2} |\psi_+\rangle ,$$

et si on mesure l'observable B, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Doit-on s'attendre à ce résultat ?
b) Déterminer l'état $|\mathscr{E}'(t)\rangle$ du système à un instant t ultérieur. Le système a-t-il évolué ?
c) Quels résultats obtiendra-t-on si l'on remesure à l'instant t l'observable B et avec quelle probabilité ?
Retrouver le résultat de la question a).

Méknès, PC 2, Mai 1987.

1°) Sur la base $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle$, la matrice représentant $H = H_0 + V$ s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & E_0 & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & 0 & E_0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } 0 < \lambda < E_0$$

2°) a) Les valeurs propres cherchées sont racines de :

$$Dét \begin{vmatrix} E_0 - \alpha & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & E_0 - \alpha & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & 0 & E_0 - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$(E_0 - \alpha)\left[(E_0 - \alpha)^2 - \lambda^2\right] = 0$$

Soit $\varepsilon_0 = E_0 \; ; \; \varepsilon_- = E_0 - \lambda \; ; \; \varepsilon_+ = E_0 + \lambda$

On voit que : $0 < \varepsilon_- < \varepsilon_0 < \varepsilon_+$

b) Les kets propres correspondants aux valeurs propres ε_- , ε_0 , ε_+ sont notés respectivement $|\psi_->$, $|\psi_0>$ et $|\psi_+>$

◆ On fait agir le ket $|\psi_-> = x|\varphi_1> + y|\varphi_2> + z|\varphi_3>$ sur la matrice représentant l'Hamiltonien H :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & E_0 & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & 0 & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (E_0 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E_0 x + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(y + z) = (E_0 - \lambda)x \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} x + E_0 y = (E_0 - \lambda)y \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} x + E_0 z = (E_0 - \lambda)z \end{cases}$$

On en déduit : $x = -\sqrt{2}\, z = -\sqrt{2}\, y$

Soit $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $z = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

Le ket $|\psi_- > = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_1 > - \frac{1}{2}\left(|\varphi_2 > + |\varphi_3 >\right)$ correspond donc à la valeur $(E_0 - \lambda)$.

◆ On fait agir de nouveau le ket $|\psi_+ >$ sur H : $H |\psi_+ > = (E_0 + \lambda) |\psi_+ >$

On en déduit facilement : $x = \sqrt{2}\, z = \sqrt{2}\, y$

Soit $|\psi_+ > = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_1 > + \frac{1}{2}\left(|\varphi_2 > + |\varphi_3 >\right)$

◆ Par un raisonnement analogue on obtient : $|\psi_0 > = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_2 > - |\varphi_3 >\right)$

En résumé, on a :

(1) $|\psi_- > = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_1 > - \frac{1}{2}\left[|\varphi_2 > + |\varphi_3 >\right] \rightarrow \varepsilon_- = E_0 - \lambda$

(2) $|\psi_0 > = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\varphi_2 > - |\varphi_3 >\right] \rightarrow \varepsilon_0 = E_0$

(3) $|\psi_+ > = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_1 > + \frac{1}{2}\left[|\varphi_2 > + |\varphi_3 >\right] \rightarrow \varepsilon_+ = E_0 + \lambda$

3°) a) Le système est à l'instant $t = 0$ dans l'état $|\mathscr{E}(0) > = |\varphi_1 >$.

Exprimons d'abord $|\varphi_1 >$ dans la base $|\psi_- >, |\psi_0 >, |\psi_+ >$

$$|\mathscr{E}(0) > = |\varphi_1 > = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\psi_- > + |\psi_+ >\right] \quad (4)$$

A un instant $t > 0$, le système sera décrit par le vecteur $|\mathscr{E}(t) >$:

$$|\mathscr{E}(t) > = \sum_{n=1}^{2} C_n(0)\, e^{-iE_n t/\hbar} |\psi_n >$$

Soit : $|\mathscr{E}(t) > = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(E_0 - \lambda)t/\hbar} |\psi_- > + e^{-i(E_0 + \lambda)t/\hbar} |\psi_+ >\right)$

$$\boxed{|\mathscr{E}(t) > = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-iE_0 t/\hbar}\left[e^{i\lambda t/\hbar} |\psi_- > + e^{-i\lambda t/\hbar} |\psi_+ >\right]}$$

ou encore à un facteur de phase global près :

$$|\mathscr{E}(t) > \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\psi_- > + e^{-2i\lambda t/\hbar} |\psi_+ >\right] \quad (6)$$

La présence du couplage (V) introduit donc un terme $e^{-2i\lambda t/\hbar}$ entre le cœfficient affecté au ket $|\psi_+>$: **le système a donc évolué au cours du temps.**

b) Par défintion, la valeur moyenne de H dans l'état $|\mathscr{E}(t)>$ normé est :

$$<H>_t = <\mathscr{E}(t)|H|\mathscr{E}(t)>$$

D'après (6) : $$H|\mathscr{E}(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(E_0-\lambda)|\psi_->+(E_0+\lambda)\,e^{-2i\lambda t/\hbar}|\psi_+>\right]$$

Or $$<\mathscr{E}(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[<\psi_-| + e^{2i\lambda t/\hbar}<\psi_+|\right]$$

Il vient alors : $$<H>_t = \frac{1}{2}\left[(E_0-\lambda)+(E_0+\lambda)\right]$$

$$\boxed{<H>_t = E_0}$$

4°) Soit l'observable A dont la matrice dans la base $\{|\psi_->, |\psi_0>, |\psi_+>\}$ est :

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

On voit aisément que $HA = AH$: donc il est possible de mesurer simultanément A et H.

Les vecteurs propres communs à H et A sont donnés par :

	valeur propre de H	valeur propre de A
$\|\psi_->$	$\varepsilon_- = E_0-\lambda$	$-a$
$\|\psi_0>$	$\varepsilon_0 = E_0$	0
$\|\psi_+>$	$\varepsilon_+ = E_0+\lambda$	a

Les résultats de mesure de H et A simultanément à l'instant t donnent les couples suivants ; $(\varepsilon_-, -a)$; (ε_+, a). Les probabilités correspondantes sont :

$$\mathscr{P}_{(\varepsilon_-,-a)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathscr{P}_{(\varepsilon_+,-a)} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-2i\lambda t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

5°) Considérons l'observable B dont la matrice dans la base $\{|\psi_->, |\psi_0>, |\psi_+>\}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

...opres sont : b, b et $-b$. Cherchons les vecteurs propres associés à B :

...est facile de remarquer que $B\,|\,\psi_->\,=b\,|\,\psi_->$; donc b est une valeur propre associée au vecteur $|\,\psi_->$

■ Nous avons d'après (4) : $B\,|\,\psi_0>\,=b\,|\,\psi_+>$ et $B\,|\,\psi_->\,=b\,|\,\psi_0>$

On en déduit : $B\,[\,|\,\psi_0>+\,|\,\psi_->\,]\,=B\,[\,|\,\psi_0>+\,|\,\psi_+>\,]$

Donc b est une valeur propre associée au vecteur propre $|\,\psi_0>\,+\,|\,\psi_+>$, que si on le norme à l'unité, devient $|\,\phi_1>\,=\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|\,\psi_0>\,+\,|\,\psi_+>\,]$

■ Le ket $|\,\phi_2>$ associé à la valeur propre $(-b)$ se déduit facilement du fait que :

Soit : $<\phi_2\,|\,\phi_2>\,=1 \quad ; \quad <\phi_2\,|\,\phi_1>\,=0 \quad$ et $\quad <\phi_2\,|\,\psi_->\,=0$

On peut vérifier aisément que : $B\,|\,\phi_2>\,=-b\,|\,\phi_2>$. $\quad |\,\phi_2>\,=\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|\,\psi_0>\,-\,|\,\psi_+>\,]$

En résumé, nous avons: $B\,|\,\psi_->\,=-b\,|\,\psi_->\,;\; B\,|\,\phi_1>\,=b\,|\,\phi_1>\,;\; B\,|\,\phi_2>\,=-b\,|\,\phi_2>$

Avec $|\,\phi_{1,2}>\,=\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|\,\psi_0>\,\pm\,|\,\psi_+>\,]$

a) L'état du système à l'instant $t=0$ est : $|\,\mathscr{E}(0)>\,=\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,\psi_->\,+\,\frac{1}{2}\,|\,\psi_0>\,+\,\frac{1}{2}\,|\,\psi_+>$

qu'on peut écrire en fonction des vecteurs propres associés à B : $|\,\mathscr{E}(0)>\,=\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|\,\psi_->\,+\,|\,\phi_1>\,]$

n mesure l'observable B, la seule valeur possible qu'on peut trouver est b (valeur propre érée deux fois associée à $|\,\psi_->$ et $|\,\phi_1>$) avec la probabilité $\mathscr{P}$:

$\mathscr{P}\,=\,|<\psi_-\,|\,\mathscr{E}(0)>|^2\,+\,|<\phi_1\,|\,\mathscr{E}(0)>|^2\,=1$

est évident car la mesure de B ne peut donner que la valeur b à coup sûr, donc babilité égale à 1.

ème $|\,\mathscr{E}(t)>$ à un instant $t>0$ est obtenu en utilisant la formule générale:

$(0)\;\; e^{-iE_n\,t\,/\,\hbar}\,|\,\psi_n>$

$$\hbar\left[e^{-i\lambda t\,/\,\hbar}\,|\,\psi_->\,+\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,\psi_0>\,+\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i\lambda t\,/\,\hbar}\,|\,\psi_+>\right]$$

$$\cdot\,/\,\hbar\,|\,\psi_->\,+\,\frac{1}{2}\,e^{-iE_0\,t\,/\,\hbar}\,|\,\psi_0>\,+\,\frac{1}{2}\,e^{-i\,(E_0\,+\,\lambda)\,t\,/\,\hbar}\,|\,\psi_+>$$

$|\mathscr{E}'(t)>$ et $|\mathscr{E}'(0)>$ diffèrent l'un de l'autre par des termes $e^{\pm i\lambda t/\hbar}$ affectés aux cœfficients de $|\psi_->$ et $|\psi_+>$. **Le système a donc évolué.**

c) Si l'on mesure à l'instant t l'observable B, on trouve b ou $-b$ avec les probabilités $\mathscr{P}(b)$ et $\mathscr{P}(-b)$ telle que : $\mathscr{P}(b) = |<\psi_-|\mathscr{E}'(t)>|^2 + |<\phi_1|\mathscr{E}'(t)>|^2$

D'une part : $|<\psi_-|\mathscr{E}'(t)>|^2 = \frac{1}{2}$

D'autre part : $|<\phi_1|\mathscr{E}'(t)>|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 <\psi_0|\mathscr{E}'(t)> + <\psi_+|\mathscr{E}'(t)>|$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}(1 + e^{-i\lambda t/\hbar})\right|^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(1 + \cos\frac{\lambda t}{\hbar}\right)^2 + \sin^2\frac{\lambda t}{\hbar}\right] = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\lambda t}{2\hbar}$$

Soit alors : $\boxed{\mathscr{P}(b) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\frac{\lambda t}{2\hbar}\right)}$

$$P(-b) = |<\phi_2|\mathscr{E}'(t)>|^2 = \frac{1}{2}|<\psi_0|\mathscr{E}'(t)> - <\psi_+|\mathscr{E}'(t)>|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}(1 + e^{-i\lambda t/\hbar})\right|^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(1 - \cos\frac{\lambda t}{\hbar}\right)^2 + \sin^2\frac{\lambda t}{\hbar}\right] = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\lambda t}{2\hbar}$$

Soit donc $\boxed{\mathscr{P}(-b) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\lambda t}{2\hbar}}$

On vérifie aisément que la probabilité pour que la mesure de B donne indifféremment b ou $-b$ est égale à 1 : $\mathscr{P}(b) + \mathscr{P}(-b) = 1$

Si $t = 0$: $\cos^2\frac{\lambda t}{2\hbar} = 1$ et $\sin^2\frac{\lambda t}{2\hbar} = 0$

Il vient donc $\mathscr{P}(b)_{t=0} = 1$ et $\mathscr{P}(-b)_{t=0} = 0$ résultats que nous avons trouvés à la question 5°)a).

23 - Mise en évidence de la fréquence de Bohr - Observable dépendant du temps.

On considère un système quantique conservatif à trois niveaux ayant pour hamiltonien H_0. Soient $|u_1>$, $|u_2>$ et $|u_3>$ les états propres normés de H_0 d'énergie respective E_1, E_2 et E_3. On suppose $E_1 < E_2 < E_3$.

1°) L'état du système à l'instant t = 0 est donné par

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle$$

a) On mesure à cet instant l'énergie du système. Quelles est la probabilité de trouver la valeur E_3 ? Dans quels états peut-on trouver le système lors de cette mesure et avec quelles probabilités ?

b) Calculer la valeur moyenne $\langle H_0 \rangle_{t=0}$ dans l'état $\psi(0)$ >.

c) Déterminer, à partir de $|\psi(0)\rangle$, l'état $|\psi(t)\rangle$ du système à l'instant t. L'état $|\psi(0)\rangle$ est-il stationnaire ?

d) Pouvez-vous prévoir sans calcul la valeur moyenne $\langle H_0 \rangle_t$ à l'instant t?

2°) On considère l'observable D attachée à ce système et représentée dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ par la matrice dont les seuls éléments non nuls sont : $\langle u_1 | D | u_2 \rangle = \langle u_2 | D | u_1 \rangle = d$

a) Cette observable est-elle une constante du mouvement ?

b) Calculer à l'aide de l'état $|\psi(t)\rangle$ déterminé à la première question la valeur moyenne de D à l'instant t. Donner le résultat en fonction de

$$\omega_{12} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}.$$

En déduire la fréquence susceptible d'être émise ou absorbée par le système (fréquence de Bohr).

3°) On suppose maintenant quele système est décrit par l'Hamiltonien $H(t) = H_0 + H_1(t)$ où $H_1(t)$ est une observable dépendant au temps.

a) Ecrire l'équation de Schrödinger qui d'écrit l'évolution dans le temps de l'état $|\psi(t)\rangle$ de ce système.

b) On pose $|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0t/\hbar} |\varphi(t)\rangle$; quelle est l'équation d'évolution dans le temps de l'état $|\varphi(t)\rangle$?

c) L'observable $H_1(t)$ est représentée dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ par une matrice dont les seuls éléments non nuls sont :

$\langle u_3 | H_1(t) | u_2 \rangle = \langle u_2 | H_1(t) | u_3 \rangle = \omega_1 \sin t$ *où ω_1 est une constante réelle.*

Par ailleurs, la décomposition de $|\varphi(t)\rangle$ surla base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ s'écrit : $|\varphi(t)\rangle = \alpha_1(t) |u_1\rangle + \alpha_2(t) |u_2\rangle + \alpha_3(t) |u_3\rangle$.

Déterminer à l'aide de l'équaiton trouvée au 3°) b), le système d'équations différentielles satisfaites par $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ et $\alpha_3(t)$.

On posera $\frac{(E_3 - E_2)}{\hbar} = \omega_{32}$

On rappelle que si $A |u\rangle = a |u\rangle$, alors : $e^A |u\rangle = e^a |u\rangle$

4°) On suppose que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\alpha_3(0) = 0$ et on propose d'intéger le système d'équations précédent. Pour cela, on admettra que l'on peut négliser dans ces équations les termes en :

$e^{\pm i(\omega + \omega_{32})}$ *où* $\omega_{32} = (E_3 - E_2)/\hbar$ *et que* $\omega = \omega_{32}$

Montrer alors que :

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \alpha_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\omega_1 t}{2\hbar},\ \text{et}\ \alpha_3(t) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\omega_1 t}{2\hbar}\ .$$

En déduire $|\psi(t)>$ *; cet état est-il normé ?*

Extrait, Agadir, PC 2, Mai 1986.

1°) La matrice représentant H_0 est diagonale, elle s'écrit dans la base $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>\}$ par :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & & \\ & E_2 & \\ & & E_3 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le système soit dans l'état :

$$|\psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1> + |u_2>)$$

a) ◆ $|u_3>$ est le vecteur propre de H_0 correspondant à la valeur propre E_3 (non dégénéré). La probabilité de trouver E_3 lorsqu'on mesure H_0 sur le système dans l'état $|\psi(0)>$ vaut :

$$\mathcal{P}(E_3) = |<u_3|\psi(0)>|^2 = 0$$

◆ Le système peut se trouver à $t = 0$ dans l'état $|u_1>$ ou $|u_2>$. Les probabilités correspondantes sont :

$$\mathcal{P}(E_1) = |<u_1|\psi(0)>|^2 = \frac{1}{2}\ ;\quad \mathcal{P}(E_2) = |<u_2|\psi(0)>|^2 = \frac{1}{2}$$

b) La valeur moyenne $<H_0>_0$ dans l'état $|\psi(0)>$ s'écrit : $<H_0>_0 = <\psi(0)|H_0|\psi(0)>$

soit $$\boxed{<H_0>_0 = E_1 + E_2}$$

c) Le vecteur d'état $|\psi(t)>$ à l'instant t est obtenu en utilisant la formule générale :

$$|\psi(t)> = \sum_n C_n(0)\ e^{-iE_n t/\hbar}\ |u_n>$$

soit :

$$|\psi(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-iE_1 t/\hbar}|u_1> + e^{-iE_2 t/\hbar}|u_2>\right]$$

$$|\psi(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_1 t/\hbar}\left[|u_1> + e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar}|u_2>\right]$$

ou encore, en suppriment un facteur de phase global $e^{-iE_1 t/\hbar}$ de $|\psi(t)>$:

$$|\psi(t)> \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|u_1> + e^{-i\omega_{21}t}\,|u_2>\right] \quad (*)$$

avec $\omega_{21} = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$

L'état $|\psi(t)>$ introduit un terme $e^{-i\omega_{21}t}$ comme cœfficient du ket $|u_2>$ (différent de celui affecté à $|u_1>$). L'état du système a donc évolué.

d) Appliquons le théorème d'Ehrenfest à l'observable H_0 :

$$\frac{d}{dt}<H_0> = \frac{1}{i\hbar}<[H_0, H_0]> + <\frac{\partial H_0}{\partial t}>$$

H_0 ne dépend pas du temps, donc $\dfrac{\partial H_0}{\partial t} = 0$. Donc : $\dfrac{d}{dt}<H_0> = 0$

On en déduit $<H_0>_t$ est une constante. Soit : $\boxed{<H_0>_t = <H_0>_0 = (E_1 + E_2)}$

2°) La matrice représentatrice de l'observable D s'écrit dans la base $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>\}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Nous pouvons vérifier aisément que D ne commutte pas avec H_0, donc D n'est pas une constante du mouvement.

b) La valeur moyenne de D dans l'état $|\psi(t)>$ (équation (*)) s'obtient par :

$$<D>_t = <\psi(t)\,|D|\,\psi(t)>$$

$$= \frac{1}{2}\left[<u_1| + e^{i\omega_{21}t}<u_2|\right] D \left[|u_1> + e^{-i\omega_{21}t}|u_2>\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[<u_1|D|u_1> + <u_2|D|u_2> + <u_1|D|u_2>e^{-i\omega_{21}t} + <u_2|D|u_1>e^{i\omega_{21}t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + 0 + d(e^{-i\omega_{21}t} + e^{i\omega_{21}t})\right]$$

soit : $\boxed{<D>_t = d\cos(\omega_{21}t)}$ avec $\omega_{21} = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$

On en déduit la valeur de la fréquence de Bohr : $\upsilon_{21} = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$

3°) On suppose maintenant que le système est décrit par l'Hamiltonien $H(t) = H_0 + H_1(t)$

a) L'évolution de $|\psi(t)>$ en présence de $H_1(t)$ est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)> = (H_0 + H_1(t)) |\psi(t)> \quad (1)$$

b) Soit : $$|\psi(t)> = e^{-iH_0 t/\hbar} |\varphi(t)> \quad (2)$$

Calculons : $$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)> = i\hbar \frac{d}{dt} \left[e^{-iH_0 t/\hbar} |\varphi(t)> \right]$$

$$= i\hbar \left[\left(\frac{-iH_0}{\hbar} \right) e^{-iH_0 t/\hbar} |\varphi(t)> + e^{-iH_0 t/\hbar} \frac{d}{dt} |\varphi(t)> \right]$$

$$= H_0 e^{-iH_0 t/\hbar} |\varphi(t)> + i\hbar e^{-iH_0 t/\hbar} \frac{d}{dt} |\varphi(t)>$$

Calculons : $$[H_0 + H_1(t)] |\psi(t)> = H_0 e^{-iH_0 t/\hbar} |\varphi(t)> + H_1(t) e^{-iH_0 t/\hbar} |\varphi(t)>$$

On en déduit d'après (1) :

$$\boxed{i\hbar e^{-iH_0 t/\hbar} \frac{d}{dt} |\varphi(t)> = H_1(t) e^{-iH_0 t/\hbar} |\varphi(t)>} \quad (3)$$

c) $H_1(t)$ est représenté dans la base $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>\}$ par la matrice :

$$H_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \sin \omega t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Par ailleurs la décomposition de $|\varphi(t)>$ sur la même base s'écrit :

$$|\varphi(t)> = \alpha_1(t) |u_1> + \alpha_2(t) |u_2> + \alpha_3(t) |u_3> \quad (5)$$

En utilisant (3), (4), et (5), nous pouvons écrire l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$i\hbar e^{-iH_0 t/\hbar} \left[\frac{d}{dt} \alpha_1(t) |u_1> + \frac{d}{dt} \alpha_2(t) |u_2> + \frac{d}{dt} \alpha_3(t) |u_3> \right]$$

$$= H_1(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \left(\alpha_1(t) |u_1> + \alpha_2(t) |u_2> + \alpha_3(t) |u_3> \right) \quad (6)$$

Projetons l'équation (6) sur les vecteurs d'états $|u_1>$, $|u_2>$ et $|u_3>$, nous obtenons :

$$\begin{cases} i\hbar\, e^{-iE_1 t/\hbar}\, \dfrac{d\alpha_1(t)}{dt} = 0 & (7) \\ i\hbar\, e^{-iE_2 t/\hbar}\, \dfrac{d\alpha_2(t)}{dt} = \alpha_3(t)\, e^{-iE_3 t/\hbar}\, \omega_1 \sin \omega t & (8) \\ i\hbar\, e^{-iE_3 t/\hbar}\, \dfrac{d\alpha_3(t)}{dt} = \alpha_2(t)\, e^{-iE_2 t/\hbar}\, \omega_1 \sin \omega t & (9) \end{cases}$$

4°) ◆ L'équation (7) permet de trouver : $\alpha_1(t) = cte = \alpha_1(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (9)

◆ Les équations (8) et (9) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} i\hbar\, \dfrac{d\alpha_2(t)}{dt} = \alpha_3(t)\, \omega_1 \sin \omega t\, e^{-i(E_3 - E_2)t/\hbar} \\ i\hbar\, \dfrac{d\alpha_3(t)}{dt} = \alpha_2(t)\, \omega_1 \sin \omega t\, e^{i(E_3 - E_2)t/\hbar} \end{cases}$$

Soit avec $\omega_{32} = \dfrac{E_3 - E_2}{\hbar} = \omega$

$$\begin{cases} i\hbar\, \dfrac{d\alpha_2(t)}{dt} = \alpha_3(t)\, \omega_1 \sin \omega t\, e^{-i\omega_{32} t} \\ i\hbar\, \dfrac{d\alpha_3(t)}{dt} = \alpha_2(t)\, \omega_1 \sin \omega t\, e^{+i\omega_{32} t} \end{cases}$$

Or $\sin \omega t = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$; ces équations deviennent :

$$\begin{cases} i\hbar\, \dfrac{d\alpha_2(t)}{dt} = \dfrac{\alpha_3(t)\, \omega_1}{2i} \left[e^{i(\omega - \omega_{32})t} - e^{-i(\omega + \omega_{32})t} \right] \\ i\hbar\, \dfrac{d\alpha_3(t)}{dt} = \dfrac{\alpha_2(t)\, \omega_1}{2i} \left[e^{i(\omega + \omega_{32})t} - e^{-i(\omega - \omega_{32})t} \right] \end{cases}$$

On admettra que l'on peut négliger dans ces équations les termes en $e^{\pm i(\omega + \omega_{32})}$ et que $\omega = \omega_{32}$. Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_2(t)}{dt} = -\dfrac{\alpha_3(t)}{2\hbar}\, \omega_1 & (10) \\ \dfrac{d\alpha_3(t)}{dt} = +\dfrac{\alpha_2(t)}{2\hbar}\, \omega_1 & (11) \end{cases}$$

Dérivons (10) par rapport au temps : $\dfrac{d^2\alpha_2(t)}{dt^2} = -\dfrac{\omega_1}{2\hbar} \dfrac{d\alpha_3(t)}{dt} = -\dfrac{\omega_1^2}{4\hbar^2}\, \alpha_2(t)$

ou encore : $\dfrac{d^2\alpha_2(t)}{dt^2} + \dfrac{\omega_1^2}{4\hbar^2}\, \alpha_2(t) = 0$

La solution d'une telle équation est : $\alpha_2(t) = A \sin \frac{\omega_1 t}{2\hbar} + B \cos \frac{\omega_1 t}{2\hbar}$ (12)

or à $t = 0$ $\alpha_2(0) = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dérivons (12) par rapport à t et utilisons l'équation (10) :

$$\frac{d\alpha_2(t)}{dt} = \frac{\omega_1}{2\hbar}\left[A \cos \frac{\omega_1 t}{2\hbar} - B \sin \frac{\omega_1 t}{2\hbar}\right] = -\alpha_3(t)\frac{\omega_1}{2\hbar}$$

On en déduit : $\alpha_3(t) = A \cos \frac{\omega_1 b}{2\hbar} - B \sin \frac{\omega_1 t}{2\hbar}$ (13)

Or à $t = 0$ $\alpha_3(0) = 0 = A$

Les expressions (9), (12) et (13) deviennent alors en tenant compte des valeurs de A et B :

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \alpha_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\omega_1 t}{2\hbar} \quad ; \quad \alpha_3(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\omega_1 t}{2\hbar}$$

On en déduit l'état $|\psi(t)>$:

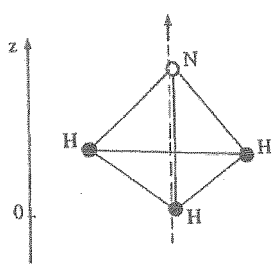
$$|\psi(t)> = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1> + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\omega_1 t}{2\hbar}|u_2> - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\omega_1 t}{2\hbar}|u_3>$$

Il est facile de montrer que $|\psi(t)>$ est normé :

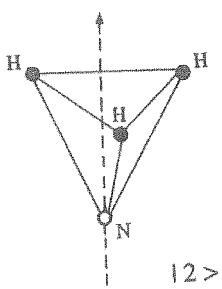
$$<\psi(t)|\psi(t)> = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos^2 \frac{\omega_1 t}{2\hbar} + \sin^2 \frac{\omega_1 t}{2\hbar}\right) = 1$$

24 - Etude de la molécule d'ammoniac NH_3 (système à deux niveaux) - Influence d'un champ électrique.

La molécule d'ammoniac NH_3 à la forme d'une pyramide à base triangulaire :



$|1>$



$|2>$

l'atome d'azote se trouve dans l'une des deux positions symétriques par

rapport au plan des atomes d'hydrogène, la molécule NH_3 possède un moment dipolaire électrique permanent pouvant prendre les valeurs :

$$\delta_z = \pm d$$

1°) Nous supposerons que les états de base nécessaires pour la description de la molécule NH_3 sont :

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et que dans cette base son hamiltonien est :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & -w \\ -w & E_0 \end{pmatrix} \quad ' E_0, w \text{ constante } \in \mathbb{R}^+$$

Déterminer l'énergie des états stationnaires de NH_3 et exprimer ceux-ci dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

2°) Expliquer pourquoi dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, l'observable D_z associée à la mesure du moment dipolaire δ_z de la molécule est :

$$D_z = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

3°) On suppose maintenant que la molécule est placée dans un champ électrique statique $\vec{\varepsilon}(z)$ parallèle à oz. On rappelle que classiquement l'énergie d'interaction d'un dipole électrique $\vec{\delta}$ dans un champ électrique $\vec{\varepsilon}$ est : $u = -\vec{\delta} \cdot \vec{\varepsilon}$

Construire dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ l'hamiltonien de la molécule NH_3 dans le champ $\vec{\varepsilon}$ en supposant que celui-ci est la somme du hamiltonien H_0 et d'un terme d'interaction obtenu en remplaçant le moment dipolaire par l'observable convenable dans l'expression classique de l'énergie

4°) Déterminer l'énergie des nouveaux états stationnaires de la molécule dans le champ $\vec{\varepsilon}$.

5°) On suppose maintenant que le champ $\vec{\varepsilon}(z)$ est faible ($\varepsilon d << w$) mais $\mathscr{E}^2$ présente un gradient dans la direction z.
Montrer que des molécules NH_3 dans des états stationnaires différents sont soumises à des forces opposées que l'on déterminera.

Tétouan, PC2, Juin 1984.

1°) Si l'on veut trouver les valeurs propres des états stationnaires de NH_3, il faut alors diagonaliser l'opérateur hamiltonien total H_0, dont la matrice s'écrit : $H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & -w \\ -w & E_0 \end{pmatrix}$.

Un calcul élémentaire donne les valeurs propres de H_0 : $dét\ |H_0 - \lambda I| = 0$

soit $$(E_0 - \lambda)^2 - w^2 = 0$$

$E_0 - w$ correspond au ket propre $|\varphi_1>$; $E_0 + w$ correspond au ket propre $|\varphi_2>$

avec $$|\varphi_1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1> - |2>\right] \quad \text{et} \quad |\varphi_2> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1> + |2>\right]$$

2°) Sous l'effet du couplage la molécule d'ammoniac s'inverse de manière périodique. Donc, le moment dipolaire électrique de la molécule dans les états $|1>$ et $|2>$, prend deux valeurs opposées notées +d et –d. L'observable D_z associée à la mesure du moment dipolaire δ_z de la molécule est représentée dans la base $\{|1>, |2>\}$ par une matrice diagonale dont les valeurs propres sont +d et –d :

$$D_z = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

3°) Lorsque la molécule de NH_3 est placée dans un champ électrique statique $\vec{\varepsilon}$ parallèle à Oz, l'énergie d'intersection avec ce champ s'écrit : $U = -\varepsilon D$

Ce terme de l'hamiltonien est représenté dans la base $\{|1>, |2>\}$ par la matrice :

$$U(\varepsilon) = -d\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons donc la matrice représentative, dans la base $\{|1>, |2>\}$, l'opérateur hamiltonien total de la molécule $H_0 + U(\varepsilon)$:

$$H = H_0 + U(\varepsilon) = \begin{pmatrix} E_0 - d\varepsilon & -w \\ w & E_0 + d\varepsilon \end{pmatrix}$$

4°) Cette matrice peut être facilement diagonalisée ; ses énergies propres E_+ et E_- et ses vecteurs propres $|\psi_+>$ et $|\psi_->$ sont donnés par : $dét\,(H - \lambda I) = 0$

$$(E_0 - d\varepsilon - \lambda)(E_0 + d\varepsilon - \lambda) - w^2 = 0$$

$$(E_0 - \lambda)^2 - (d^2\varepsilon^2 + w^2) = 0$$

soit :

$$E_+ = E_0 + \sqrt{w^2 + d^2\varepsilon^2}$$

$$E_- = E_0 - \sqrt{w^2 + d^2\varepsilon^2}$$

Le ket normé le plus général est de la forme : $|\psi> = \alpha|1> + \beta|2>$

avec $$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad (1)$$

Compte tenu de (1), il existe forcément un angle θ tel que : $|\alpha| = \cos\frac{\theta}{2}$, $|\beta| = \sin\frac{\theta}{2}$

Donc les états $|\psi_+>$ et $|\psi_->$ sont donnés par :

$$|\psi_+> = \cos\frac{\theta}{2}|1> - \sin\frac{\theta}{2}|2> \quad ; \quad |\psi_->= \sin\frac{\theta}{2}|1> + \cos\frac{\theta}{2}|2>$$

où l'on a posé : $\quad tg\,\theta = \frac{-w}{d\varepsilon} \qquad 0 \le \theta \le \pi$

5°) En champ faible ($\varepsilon d << w$), on peut développer E_+ et E_- en puissances de $\left(\frac{\varepsilon d}{w}\right)$:

$$E_\pm = E_0 \pm w\sqrt{1 + \left(\frac{d\varepsilon}{w}\right)^2}$$

$$= E_0 \pm w\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varepsilon}{w}\right)^2 + \ldots\ldots\right)$$

soit

$$E_- = E_0 - w - \frac{1}{2}\frac{d^2\varepsilon^2}{w} + \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$E_+ = E_0 + w + \frac{1}{2}\frac{d^2\varepsilon^2}{w} + \ldots\ldots$$

Supposons que les molécules d'ammoniac qui se déplacent dans une région où $\vec{\varepsilon}(t)$ est faible, mais présente un fort gradient dans la direction Oz de l'axe des molécules :

$$\frac{d}{dz}(\varepsilon^2) = \lambda$$

D'après (2), les molècules qui snt dans l'état $|\psi_->$ sont soumises à une force paralléle à Oz

qui vaut : $\quad F_- = -\left(\frac{dE_-}{dz}\right) = -\left(\frac{-1}{2}\frac{d^2}{w}\frac{d(\varepsilon^2)}{dz}\right)$

$$\boxed{F_- = \frac{1}{2}\frac{d^2\lambda}{w}}$$

D'après (3) et par un raisonnement analogue : $\quad F_+ = -\left(\frac{dE_+}{dz}\right)$

$$\boxed{F_+ \frac{-1}{2}\frac{d^2\lambda}{w} = -F_-}$$

Cette égalité montre que les molécules de NH_3 qui sont dans l'état $|\psi_+>$ sont soumises à uen force opposée.

Remarque : Ce résultat est à la base de la méthode qui sert, dans le **MASER à ammoniac** à lier les molécules et sélectionner celles qui sont dans l'état d'énergie la plus grande. En effet, on utilise un dispositif où règne un fort gradient de champs électrique ; les

molécules traversent cette région et suivent selon le cas de leur état $|\psi_-\rangle$ ou $|\psi_+\rangle$ des trajections différentes. Par un diaphragme convenable, on peut isoler l'un quelconque des deux états.

25 – Oscillateur harmonique chargé placé dans un champ électrique uniforme - Equation aux valeurs propres de H en représentation $\{|x\rangle\}$

On considère un oscillateur harmonique a une dimension constitué par une microparticule de masse m, soumise à une force de rappel $F = -kx$ $(k>0)$.

1°) Ecrire l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien de cet oscillateur dans la représentation $\{|x\rangle\}$, puis dans la représentation $\{|p\rangle\}$.

2°) Soit $\varphi_n(x)$ les fonctions propres relatives aux états stationnaires de cette microparticule. Rappeler l'expression de la valeur E_n des niveaux d'énergie correspondante.

3°) On suppose maintenant que cette microparticule porte une charge q et soumise, en plus de la force $F = -kx$, à un champ électrique uniforme $\vec{\varepsilon}$ parallèle à l'axe Ox. Ecrire l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien de ce nouveau système dans la représentation $\{|x\rangle\}$.

4°) Déterminer les états stationnaires et les niveaux d'énergie de ce système respectivement en fonction de $\varphi_n(x)$ et de E_n. Quelle remarque peut-on faire sur l'ensemble de ces niveaux d'énergie.

Extrait, Casablanca I, MP2, Juin 1986.

1°) Pour une particule plongée dans un potentiel scalaire $V(X)$, l'opérateur hamiltonien H s'écrit :

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)$$

◆ Nous cherchons à écrire cette équation en représentation $\{|x\rangle\}$, c'est-à-dire en faisant intervenir la fonction d'onde $\psi(x, t)$ définie par : $\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle$

L'équation de Schrödinger : $$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \qquad (1)$$

En projettant cette équation sur $|x\rangle$, nous obtenons :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2m} \langle x|P^2|\psi(t)\rangle + \langle x|V(X)|\psi(t)\rangle$$

Les équations qui interviennent dans cette relation peuvent être exprimées en fonction de

$\psi(x, t)$; en effet, nous avons : $\dfrac{\partial}{\partial t} < x \mid \psi(t) > = \dfrac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$

$$< x \mid V(X) \mid \psi(t) > = V(x)\, \psi(x, t)$$

L'élément de matrice $< x \mid P^2 \mid \psi(t) >$ peut être calculé en utilisant le fait qu'en représentation $\{ \mid x > \}$, P agit comme $\dfrac{\hbar}{i} \nabla = \dfrac{\hbar}{i} \dfrac{\partial}{\partial x}$

$$< x \mid P^2 \mid \psi(t) > = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = -\hbar^2 \Delta \psi(x, t)$$

L'équation aux valeurs propres devient alors :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(X) \right] \psi(x, t)}$$

◆ En représentation $\{ \mid p > \}$, la fonction d'onde est représentée par : $\overline{\psi}(p, t) = < p \mid \psi(t) >$

En projetant (1) sur le ket $\mid p >$, nous obtenons :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} < p \mid \psi(t) > = \frac{1}{2m} < p \mid P^2 \mid \psi(t) > + < p \mid V(X) \mid \psi(x, t) >$$

Or $\dfrac{\partial}{\partial t} < p \mid \psi(t) > = \dfrac{\partial}{\partial t} \overline{\psi}(p, t)$ et $< p \mid P^2 \mid \psi(t) > = p^2 \overline{\psi}(p, t)$

Calculons la quantité : $< p \mid V(X) \mid \psi(t) > = \int dp' < p \mid V(X) \mid p' >< p' \mid \psi(t) >$

Or $< p \mid V(X) \mid p' > = (2\pi\hbar)^{-1/2} \overline{V}(p - p')$

avec $\overline{V}(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dx\ e^{-ipx/\hbar} V(x)$

Il vient alors : $< p \mid V(X) \mid \psi(t) > = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dp' \overline{V}(p - p')\, \overline{\psi}(p', t)$

L'équation de Schrödinger en représentation $\{ \mid p > \}$ s'écrit donc :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \overline{\psi}(p, t) = \frac{p^2}{2m} \overline{\psi}(p, t) + (2\pi\hbar)^{-1/2} \int dp' \overline{V}(p - p')\, \overline{\psi}(p', t)}$$

où $\overline{\psi}(p, t)$ et $\overline{V}(p)$ sont les transformées de Fourier respectives de $\psi(x, t)$ et $V(x)$.

2°) En représentation $\{|x>\}$, l'équation (2) aux valeurs propres s'écrit :

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\varphi_n(x) = E_n\,\varphi_n(x) \qquad (3)$$

La résolution de cette équation nous donne les valeurs d'énergie acceptables que nous rappelons : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega$ où n est un nombre entier positif.

3°) Supposons de plus que cette particule porte une charge q et qu'elle est plongée dans un champ électrique uniforme $\vec{\varepsilon}$ parallèle à l'axe Ox. L'énergie potentielle classique d'une particule placée dans un champ uniforme vaut : $W = -q\,\varepsilon\,x$.

Pour obtenir en mécanique quantique l'opérateur $H'(\varepsilon)$ en présence du champ ε, il faut donc ajouter à l'énergie potentielle $\frac{1}{2}m^2\omega^2X^2$ de l'oscillateur harmonique le terme $W(\varepsilon) = -q\,\varepsilon X$

Ce qui donne : $$H' = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2 - q\,\varepsilon\,X \qquad (4)$$

Soit $|\varphi'>$ un vecteur propre de H' ; $H'|\varphi'> = E'|\varphi'>$

En utilisant (4), on peut écrire cette équation en représentation $\{|x>\}$:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - q\,\varepsilon\,x\right]\varphi'(x) = E'\varphi'(x) \qquad (5)$$

Dans le premier membre de (5), groupons dans un carré les termes en x^2 et en x :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - \frac{q\varepsilon}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}\right]\varphi'(x) = E'\varphi'(x) \qquad (6)$$

Remplaçons la variable x par une nouvelle variable u, telle que : $u = x - \frac{q\,\varepsilon}{m\omega^2}$

φ' est alors une fonction de u et l'équation (6) devient :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{2}m\omega^2u^2\right]\varphi'(u) = \left(E' + \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}\right)\varphi'(u) = E''\varphi'(u) \qquad (7)$$

L'équation (7) est la même que celle qui permet d'obtenir les états stationnaires de l'oscillateur harmonique en l'absence du champ électrique (3). Nous savons que les valeurs acceptables de E'' sont données par : $E''_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega$ (8)

où n est un nombre entier positif ou nul.

On déduit d'après (7) et (8), les énergies E' des états stationnaires de l'oscillateur

harmonique : $$E_n'' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = E_n' + \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}$$

soit : $$\boxed{E_n'' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}} \qquad (9)$$

Remarque : i) Le spectre de l'oscillateur harmonique est donc décalé "en bloc" de la quantité $\frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}$.

◆ Les fonctions propres $\varphi_n'(x)$ associées aux valeurs propres (7) s'obtiennent toutes à partir des $\varphi_n(x)$, par une même translation.

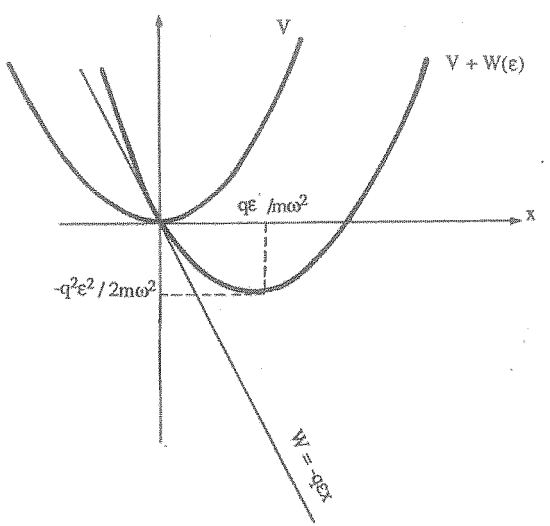
En effet, la solution de (7) correspondant à une valeur donnée de n est $\varphi_n'(u)$:

$$\boxed{\varphi_n'(u) = \varphi_n\left(x - \frac{q\varepsilon}{m\omega}\right)}$$

ii) La translation provient du fait que le champ électrique exerce une force sur la particule.

Complément : Représenter V, W(ε) et V+W(ε)

La présence du champ électrique uniforme ε a pour effet de déplacer la parabole représentant V de l'oscillateur harmonique.



26 – Propriétés des états $|\alpha>$ (états propres de l'opérateur d'annihilation a) - Valeurs possibles de l'énergie.

Soit H l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de pulsation ω. Soient $|\varphi_n>$ et E_n les états propres et valeurs propres de H : $H\,|\varphi_n> = E_n\,|\varphi_n>$
Considérons l'opérateur d'annihilation a dont les états propres $|\alpha>$ et les valeurs propres α, sont définis par : $a\,|\alpha> = \alpha\,|\alpha>$
avec $|\alpha> = \sum_n C_n(\alpha)\,|\varphi_n>$ où $C_0(\alpha)$ est réel positif et $<\alpha\,|\alpha> = 1$

1°) L'opérateur a est-il une observable ?

2°) Montrer que $C_{n+1}(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\,C_n(\alpha)$.

En déduire $C_n(\alpha)$ en fonction de $C_0(\alpha)$, et calculer $C_n(\alpha)$ en fonction de n et α (utiliser le fait que $\sum_n \dfrac{x^n}{n!} = e^x$).

3°) A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)> = |\alpha>$
On mesure l'énergie à cet instant. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Exprimer ces probabilités en fonction de n et α.

4°) Calculer la valeur moyenne de H dans l'état $|\alpha>$.

5°) Calculer l'état du système à l'instant t, ainsi que $< H >(t)$.

Extrait, Casablanca I, MP2, Janvier 1987.

1°) Rappelons tout d'abord quelques définitions.
On définit les observables $\hat{X}$ et $\hat{P}$ sans dimension par :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,X \qquad \text{et} \qquad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\,P$$

La relation de commutation s'écrit : $[\hat{X}\,,\,\hat{P}] = i$

L'hamiltonien s'écrit alors : $H = \dfrac{P^2}{2m} + \dfrac{1}{2}\,m\omega^2X^2 = \dfrac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right)$

Nous posons : $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right)$ et $a^+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)$

$\hat{X}$ et $\hat{P}$ sont hermitiques, a et a^+ ne le sont pas à cause du facteur i mais sont adjoints l'un de l'autre. Donc a n'est pas une observable.

2°) ◆ On a $a\,|\alpha> = \alpha\,|\alpha>$ (1)

Or $$a \mid \alpha > = \sum_n C_n(\alpha)\, a \mid \varphi_n > = \sum_n C_n(\alpha) \sqrt{n} \mid \varphi_{n-1} >$$

En reportant cette égalité dans (1), et avec $\mid \alpha > = \sum_n C_{n-1}(\alpha) \mid \varphi_{n-1} >$, obtenons :

$$\sum_n C_n(\alpha) \sqrt{n} \mid \varphi_{n-1} > = \alpha \mid \alpha > = \alpha \sum_n C_{n-1}(\alpha) \mid \varphi_{n-1} >$$

soit $C_{n-1}(\alpha) = \dfrac{C_n(\alpha)\sqrt{n}}{\alpha}$ ou encore $\boxed{\dfrac{\alpha\, C_n(\alpha)}{\sqrt{n+1}} = C_{n+1}(\alpha)}$

◆ Cette relation nous permet d'obtenir par récurrence tous les cœfficients $C_n(\alpha)$ en fonction de $C_0(\alpha)$:

$$C_1(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1}} C_0(\alpha)$$

$$C_2(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} C_1(\alpha)$$

$$\vdots$$

$$C_n(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1}(\alpha)$$

soit $$C_n(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-2}} \ldots\ldots \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sqrt{1}} C_0(\alpha)$$

$$\boxed{C_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0(\alpha)} \qquad (2)$$

◆ Ecrivons la condition de normalisation du ket $\mid \alpha >$: $< \alpha \mid \alpha > = \sum_n \mid C_n(\alpha) \mid^2 = 1$

remplaçons $C_n(\alpha)$ par sa valeur obtenue en (2) :

$$\sum_n \frac{\mid \alpha \mid^{2n}}{n!} \mid C_0(\alpha) \mid^2 = \mid C_0(\alpha) \mid^2 \sum_n \frac{\mid \alpha \mid^{2n}}{n!} = 1$$

Utilisons le fait que $\sum_n \dfrac{\mid \alpha \mid^n}{n!} = e^x$: $$\mid C_0(\alpha) \mid^2 e^{\mid \alpha \mid^2 n} = 1$$

avec la convention prise où $C_0(\alpha)$ est réel positif : $$C_0(\alpha) = e^{-\mid \alpha \mid^2 / 2}$$

L'expression (2) devient alors : $$\boxed{C_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\mid \alpha \mid^2 / 2}}$$

et finalement : $$\mid \alpha > = e^{-\mid \alpha \mid^2 / 2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid \varphi_n >$$

3°) A l'instant $t = 0$, le système se trouve dans l'état

$$|\psi(0)> = |\alpha> = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n> \qquad (3)$$

On voit que dans $|\alpha>$ figure $|\varphi_n>$ qui sont états propres de l'oscillateur harmonique avec valeurs propres $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

Donc, une mesure de l'énergie peut donner le résultat $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ avec la probabilité $\mathcal{P}(E_n)$:

$$\mathcal{P}(E_n) = |<\varphi_n|\alpha>|^2 = |C_n(\alpha)|^2$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P}(E_n) = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2/2}} \qquad (4)$$

4°) Pour calculer la valeur moyenne $<H>_\alpha$ de l'énergie, on utilise :

$$<H>_\alpha = <\alpha|H|\alpha> = <\varphi_n|\sum_n C_n^* H \sum_n C_n |\varphi_n> = \sum_n E_n |C_n(\alpha)|^2$$
$$= \sum_n E_n \mathcal{P}_n(E_n)$$

soit

$$<H>_\alpha = \sum_n \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2/2}$$
$$= \hbar\omega \left(\sum_n n\mathcal{P}_n(E_n) + \frac{1}{2}\sum_n \mathcal{P}_n(E_n)\right)$$

Remarquons que la distribution des probabilités $\mathcal{P}_n(E_n)$ est une distribution de Poisson.

Il vient alors : $\sum_n \mathcal{P}_n = 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n\mathcal{P}_n = \left(0 + \sum_{n=1}^{\infty} n\mathcal{P}_n\right)$

On pose $|\alpha|^2 = \lambda$ et $e^{-|\alpha|^2/2} = A$

en utilisant l'expression (4), on obtient : $\sum_n n\mathcal{P}_n = \sum_{n=1} \frac{n|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2/2}}{n!}$

$$\sum n\mathcal{P}_n = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = A \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n'+1}}{n'!} = A\lambda \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n'}}{n'!}$$
$$= \lambda \sum_{n'=0}^{\infty} \mathcal{P}_{n'} = \lambda = |\alpha|^2$$

L'expression (4) devient donc : $\boxed{<H>_\alpha = \hbar\omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)}$ (6)

Remarque : Ce résultat peut être obtenu autrement en remarquant que :

$$\text{i)}\quad a\,|\,\alpha>\;=\;\alpha\,|\,\alpha>\;\rightarrow\;<\alpha|\,a^{+}\;=\;\alpha^{*}<\alpha|$$

d'où $$<\alpha|\,a^{+}a\,|\,\alpha>\;=\;|\,\alpha|^{2}$$

$$\text{ii)}\quad H\;=\;\hbar\,\omega\left(a^{+}a\;+\;\frac{1}{2}\right)$$

ainsi $$<H>_{\alpha}\;=\;\hbar\,\omega\left(|\,\alpha\,|^{2}\;+\;\frac{1}{2}\right)$$

5°) L'état du système à un instant $t > 0$ est donnée par :

$$|\,\psi(t)>\;=\;\sum_{n}\,C_{n}(\alpha)\;e^{-iE_{n}t\,/\,\hbar}\,|\,\varphi_{n}>$$

soit $$|\,\psi(t)>\;=\;\sum_{n}\,\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}}\;e^{-|\,\alpha\,|^{2}\,/\,2}\;e^{-iE_{n}t\,/\,\hbar}\,|\,\varphi_{n}>$$

en utilisant le fait que $E_{n}\;=\;\left(n\;+\;\frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega$, on obtient :

$$\boxed{|\,\psi\,(t)>\;=\;e^{\,-i\,\omega t/2}\;e^{-|\,\alpha\,|^{2}\,/\,2}\;\sum_{n}\,\frac{\alpha^{\,n}\,e^{\,-in\,\omega t}}{\sqrt{n!}}\;|\,\varphi_{n}>}$$

Si on compare ce résultat à l'état $|\,\psi\,(0)>$ (3), il apparaît que pour passer de $|\,\psi\,(0)>$ à $|\,\psi\,(t)>$, il suffit de changer α en $\alpha\,e^{\,-i\omega t}$, et de multiplier le ket obtenu par $e^{\,-i\,\omega t/2}$ (facteur de phase global sans conséquences physiques). Il vient alors :

$$\boxed{|\,\psi(t)>\;=\;e^{\,-i\omega t/2}\;|\,\alpha\,e^{\,-i\omega\,t}>} \qquad (7)$$

On voit donc qu'un état quasi classique reste toujours vecteur propre de a au cours du temps, avec une valeur propre $\alpha\,e^{\,-i\omega t}$.

Rappelons que $$<X>_{\alpha}\;=\;<\alpha|\,X\,|\,\alpha>\;=\;\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\;Re\,(\alpha)$$

$$<P>_{\alpha}\;=\;<\alpha|\,P\,|\,\alpha>\;=\;\sqrt{2m\hbar\omega}\;Im\,(\alpha)$$

En utilisant (7) et en changeant dans ces dernières expressions α par $\alpha\,e^{\,-i\omega t}$, on obtient aisément :

$$<X>_{t}\;=\;\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\;Re\,(\alpha\,e^{\,-i\omega t})$$

$$<P>_{t}\;=\;\sqrt{2m\hbar\omega}\;Im\,(\alpha\,e^{\,-i\omega t})$$

L'énergie moyenne est donc indépendante du temps. En effet :

$$\boxed{< H >_t = \hbar\omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)}$$

27 - Oscillateur harmonique à une dimension - Fonction d'onde associée à l'état fondamental - Mesures de l'énergie.

Les parties A et B sont indépendantes.

A / 1°) Soit $|\varphi_k>$ l'un quelconque des états stationnaires normés de cette particule d'énergie propre E_k, trouver l'équation différentielle satisfaite par la fonction d'onde $\varphi_k(x) = < x |\varphi_k >$.

2°) Montrer que $\varphi_0(x) = N \exp\left[-(m\omega/2\hbar)x^2\right]$, N étant une constante de normalisation, est une solution de cette équation ; en déduire la valeur de l'énergie propre correspondante E_0.

3°) Donner une détermination réelle de la constante N.

4°) Calculer les valeurs moyennes de la position $<X>_0$ et de l'impulsion $<P>_0$ de l'oscillateur harmonique dans l'état fondamental décrit par la fonction d'onde $\varphi_0(x)$. Calculer de même les valeurs moyennes $<X^2>_0$ et $<P^2>_0$.

5°) En déduire les écarts quadratiques moyens de la position $(\Delta X)_0 = \left(<X^2>_0 - <X>_0^2\right)^{1/2}$ et de l'impulsion $(\Delta P)_0 = \left(<P^2>_0 - <P>_0^2\right)^{1/2}$ dans l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Les interpréter physiquement. Le principe d'incertitude de Heisenberg est-il satisfait par l'oscillateur harmonique dans l'état fondamental ?
On donne les intégrales d'Euler :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}\, dx = (\pi/\beta)^{1/2} \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-\beta x^2}\, dx = (1/2\ \beta) I_0,$$

où β est une constante réelle positive.

B/ Dans le cas général, on montre que les énergies propres de l'oscillateur harmonique unidimensionnel correspondantes aux états stationnaires orthonormés $|\varphi_k>$ sont données par $E_k = (k + 1/2)\hbar\omega$, $k \in \mathbb{N}$

1°) Ces niveaux d'énergie sont-ils dégénérés ? Pourquoi ?

2°) A l'instant t_0 , l'oscillateur considéré est dans l'état

$$|\psi(t_0)> = (1/\sqrt{2})\ |\varphi_0> + (1/2)\left[|\varphi_1> - |\varphi_2>\right]$$

Lors d'une mesure de l'énergie de cette particule à l'instant t_0, est-il possible de trouver la valeur $\hbar\omega$? Pourquoi ? Est-il possible de trouver

la valeur $7\hbar\omega/2$? Pourquoi ?

3°) Quelle est la probabilité $\mathcal{P}(t_0, 3\hbar\omega/2)$ de trouver la valeur $3\hbar\omega/2$ comme résultat de mesure de l'énergie à l'instant t_0 ?

4°) Aucune mesure n'étant effectuée entre les instants t_0 et t, évaluer l'état $|\varphi(t)>$ du système à l'instant t.

5°) Calculer la probabilité $\mathcal{P}(t, 3\hbar\omega/2)$ de trouver la valeur $3\hbar\omega/2$ lors de la mesure de l'énergie à l'instant t. Conclure. Donner une interprétation physique à ce résultat.

Extrait, Fès, MP2 - PC2, Mai 1987

I 1°) L'énergie totale d'une particule de masse m soumise au potentiel $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

En mécanique quantique, les grandeurs x et p sont remplacées respectivement par les observables X et P qui vérifient : $[X, P] = i\hbar$.

On obtient alors aisément l'opérateur hamiltonien du système : $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$

2°) H étant indépendant du temps : système conservatif.

I- A 1°) L'étude quantique de l'oscillateur harmonique se ramène à la résolution de l'équation aux valeurs propres : $H|\varphi> = E|\varphi>$

qui s'écrit en représentation $\{|x>\}$:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right] \varphi_k(x) = E_k \varphi_k(x) \qquad (1)$$

2°) On a à résoudre une équation différentielle du second ordre ; sa solution générale est :

$$\varphi_0(x) = N e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$ N étant une constante de normalisation

Posons $\lambda = \frac{m\omega}{2\hbar}$, il vient alors $\varphi_0(x) = N e^{-\lambda x^2}$

$$\frac{d\varphi_0(x)}{dx} = -2\lambda x N e^{-\lambda x^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\varphi_0(x)}{dx^2} = \left(-2\lambda + 4\lambda^2 x^2\right)\varphi_0(x)$$

L'équation (1) devient : $$\left[\frac{2\hbar^2\lambda}{2m}(1 - 2\lambda x^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right] \varphi_0(x) = E_0 \varphi_0(x)$$

$$x^2\left(\frac{1}{2} m\omega^2 - \frac{4\lambda^2\hbar^2}{2m}\right) + \left(\frac{\hbar^2\lambda}{m} - E_0\right) = 0$$

$$\left.\right\} = 0$$

Le terme constant est son identification à zéro exige : $E_0 = \frac{\hbar^2 \lambda}{m} = \frac{\hbar^2}{m} \frac{m\omega}{2\hbar}$

soit : $\boxed{E_0 = \frac{\hbar\,\omega}{2}}$

3°) La condition de normalisation, soit ici $\int |\varphi_0(x)|^2 \, dx = 1$ nous permet d'écrire (on choisit N réel positif) : $N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\lambda x^2} \, dx = 1$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$

donc $N^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} = 1 \quad \Rightarrow \quad N^2 = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \qquad \left(\lambda = \frac{m\omega}{2\hbar}\right)$

soit $N = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

et donc la fonction d'onde du fondamental est : $\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2 / 2\hbar}$

4°) ◆ La valeur moyenne de la position est, pour un état $\varphi_0(x)$,

$$< x >_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0^*(x)\, x\, \varphi_0(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi_0^2(x)\, dx = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-2\lambda x^2} \, dx$$

la fonction à intégrer étant une fonction impaire et l'intégration étant sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, on a : $< x >_0 = 0$ (2)

◆ La valeur moyenne $< x^2 >_0$ est : $< x^2 >_0 = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-2\lambda x^2} \, dx$

en utilisant $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-\beta x^2} \, dx = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, on obtient :

$$< x^2 >_0 = N^2 \frac{1}{4\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} = \frac{1}{4\lambda} \qquad \left(N^2 = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\right)$$

soit : $\boxed{< x^2 >_0 = \frac{\hbar}{2m\omega}}$ (3)

◆ La valeur moyenne de l'impulsion p est, par définition

$$< P > = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \varphi_0(x)\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) \left[-i\hbar \left(-2\lambda x\, \varphi_0(x)\right)\right] dx$$

$$< P > = \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\hbar\,\lambda x\,\varphi_0^2(x)\,dx$$

donc $< P > = 0$ (4) pour les mêmes raisons que (2).

◆ D'autre part, $< P^2 >_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0^*(x)\left(-\hbar^2\,\frac{d^2}{dx^2}\varphi_0(x)\right)dx$

$$= 2\hbar^2\lambda\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0^2(x)\,dx - 2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,\varphi_0^2(x)\,dx\right]$$

$$= 2\hbar^2\lambda\left[1 - 2\lambda\ < x^2 >_0\right]$$

Compte tenu de la valeur de λ, on obtient aisément : $\boxed{< P^2 >_0 = \frac{\hbar m\omega}{2}}$

5°) L'équart quadratique moyen de la position à pour expression :

$$(\Delta X_0) = \sqrt{< X^2 >_0 - < X >_0^2}$$

soit d'après (2) et (3) : $\boxed{\Delta x_0 = \sqrt{\hbar / 2m\omega}}$

On définit également d'après (4) et (5), l'équart quadratique moyen de l'impulsion par :

$$\Delta p_0 = \sqrt{\hbar m\omega / 2}$$

De (6) et (7), il résulte : $\Delta x_0\,\Delta p_0 = \frac{\hbar}{2}$

Comme d'après la relation de Heinsenberg, $\Delta x\ \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ on voit que la borne inférieure $\frac{\hbar}{2}$ est atteinte dans le cas de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

B–1°) Les énergies propres de l'oscillateur harmonique sont données par :

$E_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ avec $k \in IN$. E_k est non dégénéré : à tout valeur de k correspond un vecteur $|\varphi_k>$, unique.

2°) A l'instant t_0, l'oscillateur considéré est dans l'état :

$$|\psi(t_0)> = \frac{i}{\sqrt{2}}|\varphi_0> + \frac{1}{2}|\varphi_1> - \frac{1}{2}|\varphi_2>$$

◆ Aucune valeur propre ne peut être égale à $\hbar\omega$, donc lors d'une mesure de l'énergie, il n'est pas possible de trouver la valeur $\hbar\omega$.

◆ Par contre la valeur $E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega$ est une valeur possible qui correspond à l'état propre $|\varphi_3>$. On voit que dans l'état $|\psi(t_0)>$, $|\varphi_3>$ est affecté d'un cœfficient nul. Il n'est donc pas possible de trouver cette valeur lors de la mesure de l'énergie à l'instant t_0

3°) $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$ valeur propre correspondante à l'état propre $|\varphi_1>$. Il vient alors :

$$\mathcal{P}(E_1) = |<\varphi_1|\psi(t_0)>|^2 = \frac{1}{4}$$

4°) L'état du système à un instant $t > t_0$ est exprimée par :

$$|\psi(t)> = \sum_{k=0}^{2} C_k\, e^{-iE_k(t-t_0)/\hbar}\,|\varphi_k>$$

soit :

$$|\psi(t)> = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) e^{-i\omega(t-t_0)/2}\,|\varphi_0> + \frac{1}{2}\, e^{-3i\omega(t-t_0)/2}\,|\varphi_1> + \frac{1}{2}\, e^{-5i\omega(t-t_0)/2}\,|\varphi_2>$$

5°) $\mathcal{P}\left(t, \frac{3\hbar\omega}{2}\right) = \mathcal{P}(t, E_1) = |<\varphi_1|\psi(t)>|^2$

soit

$$\mathcal{P}\left(t, \frac{3\hbar\omega}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Nous retrouvons la même valeur que celle obtenue à $t = t_0$. Ce résultat est évident car H est **une constante du mouvement.**

28 – Opérateurs a et a^+ - Valeurs possibles de l'énergie.

Dans tout le problème X et P représentent respectivement les observables position et impulsion.
L'hamiltonien d'une particule en mouvement oscillatoire unidimensionnel s'écrit : $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$, où m et ω désignent respectivement la masse et la pulsation.
Soient a et a^+ deux opérateurs adjoints l'un de l'autre, agissant sur les états stationnaires $|\phi_n>$ du système telles que :

$a\,|\phi_n> = \sqrt{n}\;|\phi_{n-1}>$; $a^+\,|\phi_n> = \sqrt{n+1}\;|\phi_{n+1}>$; $[a, a^+] \neq 0$

1°) $\{|\phi_n>\}$ est une base orthonormée et complète. Généraliser les

relations qu'elle doit vérifier.

2°) Calculer les éléments de matrice : $\langle \phi_{n'} | a | \phi_n \rangle$, $\langle \phi_{n'} | a^+ | \phi_n \rangle$, $\langle \phi_{n'} | a a^+ | \phi_n \rangle$, $\langle \phi_{n'} | a^+ a | \phi_n \rangle$, $\langle \phi_{n'} | a^2 | \phi_n \rangle$ *et* $\langle \phi_{n'} | a^{+2} | \phi_n \rangle$

3°) On pose $X = \left(\frac{\hbar}{m \omega} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (a^+ + a)$ *et* $P = (m \hbar \omega)^{1/2} \frac{i}{\sqrt{2}} (a^+ - a)$

Démontrer que les valeurs moyennes des 2 observables dans un état stationnaire $|\phi_n\rangle$ *, sont nulles ?*

En déduire : – Les états quadratiques moyens $(\Delta X)^2$ *et* $(\Delta P)^2$

– Les valeurs moyennes des deux énergies cinétique et potentielle ? Le produit $\Delta X \cdot \Delta P$ *est-il conforme à la relation d'incertitude d'Heisenberg ?*

4°) Démontrer que l'hamiltonien du système s'écrit : $H = \frac{\hbar \omega}{2} (aa^+ + a^+a)$ *ayant pour valeurs propres, associées aux états stationnaires,*

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \qquad \text{avec} \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

5°) A l'instant $t = 0$*, l'état du système est donné par :*

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} |\phi_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\phi_1\rangle + \frac{1}{2} |\phi_2\rangle$$

a) On mesure à cet instant l'énergie du système, quelles valeurs trouve-t-on et avec quelles probabilités ?

b) Quelle est la probabilité $\mathcal{P}(t)$*, pour qu'à l'instant* $t > 0$*, une mesure de l'énergie donne un résultat supérieur à* $2\hbar\omega$ *?*

c) Calculer les valeurs moyennes de X et P à l'instant t et montrer que leur évolution dans le temps vérifie le théorème d'Ehrenfest ?

Rappel de formules : $[X, F(P)] = i\hbar \frac{dF(P)}{dP}$; $[P, G(X)] = i\hbar \frac{dG(X)}{dX}$

Ecart quadratique moyen d'une observable A: $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$

Extrait, Tétouan, PC 2–MP 2, Janvier 1987.

1°) ◆ H étant hermitique, les kets $|\phi_n\rangle$ correspondant à des valeurs de n différentes sont orthogonaux ; comme chacun d'eux est normé, ils vérifient alors la relation d'orthonormalisation : $\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$

◆ H est une observable : l'ensemble des $|\phi_n\rangle$ constitue donc une base dans $\mathcal{E}_x$, ce qui s'exprime par la relation de fermeture : $\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = 1$

◆ Nous avons $a^+ \mid \phi_{n-1} > = \sqrt{n} \mid \phi_n >$

soit $\mid \phi_n > = \frac{1}{\sqrt{2}} a^+ \mid \phi_{n-1} > = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} (a^+)^2 \mid \phi_{n-2} > = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} (a^+)^n \mid \phi_0 >$

soit $$\boxed{\mid \phi_n > = \frac{1}{\sqrt{n\,!}} (a^+)^n \mid \phi_0 >}$$

2°) Nous avons : $a \mid \phi_n > = \sqrt{n} \mid \phi_{n-1} >$ et $a^+ \mid \phi_n > = \sqrt{n+1} \mid \phi_{n+1} >$

Les équations adjointes sont : $< \phi_n \mid a^+ = \sqrt{n} < \phi_{n-1} \mid$ et $< \phi_n \mid a = \sqrt{n+1} < \phi_{n+1} \mid$

Les éléments de matrice des opérateurs a, a^+, aa^+, a^+a, a^2 et $(a^+)^2$ en représentation $\left\{ \mid \phi_n > \right\}$

sont : $< \phi_{n'} \mid a \mid \phi_n > = < \phi_{n'} \mid \sqrt{n} \mid \phi_{n-1} > = \sqrt{n}\, \delta_{n'(n-1)}$ (1)

$< \phi_{n'} \mid a^+ \mid \phi_n > = < \phi_{n'} \mid \sqrt{n+1} \mid \phi_{n+1} > = \sqrt{n+1}\, \delta_{n'(n-1)}$ (2)

$<\phi_{n'} \mid aa^+ \mid \phi_n> = <\phi_{n'} \mid a\sqrt{n+1} \mid \phi_{n+1}> = \sqrt{n+1}\, <\phi_{n'} \mid \sqrt{n+1} \mid \phi_n> = (n+1)\, \delta_{n'n}$ (3)

$< \phi_{n'} \mid aa^+ \mid \phi_n> = < \phi_{n'} \mid a^+\sqrt{n} \mid \phi_{n-1} > = \sqrt{n} < \phi_{n'} \mid \sqrt{n} \mid \phi_n > = n\delta_{n'n}$ (4)

$<\phi_{n'} \mid a^2 \mid \phi_n> = <\phi_{n'} \mid a\sqrt{n} \mid \phi_{n-1}> = \sqrt{n} <\phi_{n'} \mid \sqrt{n-1} \mid \phi_{n-2}> = \sqrt{n(n-1)}\, \delta_{n'(n-2)}$ (5)

$< \phi_{n'} \mid (a^+)^2 \mid \phi_n> = < \phi_{n'} \mid a^+\sqrt{n+1} \mid \phi_{n+1} > = \sqrt{n+1} < \phi_{n'} \mid \sqrt{n+2} \mid \phi_{n+2} >$

$= \sqrt{(n+1)(n+2)}\, \delta_{n'(n+2)}$ (6)

3°) ◆ Posons $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^+ + a)$ et $P = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\, i(a^+ - a)$

Nous avons :

$$X \mid \phi_n > = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^+ + a) \mid \phi_n > = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\sqrt{n+1} \mid \phi_{n+1} > + \sqrt{n} \mid \phi_{n-1} > \right]$$

$$P \mid \phi_n > = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^+ - a) \mid \phi_n > = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left[\sqrt{n+1} \mid \phi_{n+1} > - \sqrt{n} \mid \phi_{n-1} > \right]$$

Les éléments de matrice des opérateurs X et P sont donc :

$$< \phi_{n'} \mid X \mid \phi_n > = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\sqrt{n+1}\ \delta_{n'\,n+1} + \sqrt{n}\, \delta_{n'(n-1)} \right] \quad (7)$$

$$< \phi_{n'} \mid P \mid \phi_n > = i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left[\sqrt{n+1}\ \delta_{n'\,n+1} - \sqrt{n}\, \delta_{n'(n-1)} \right] \quad (8)$$

Pour $n = n'$, nous voyons que les valeurs moyennes des deux observables X et P sont nulles.

◆ Pour obtenir les écarts quadratiques moyens $(\Delta X)^2$ et $(\Delta P)^2$, il nous faut calculer les valeurs moyennes de X^2 et P^2 :

$$X^2 = \frac{\hbar}{2\,m\,\omega}\,(a^+ + a)(a^+ + a) = \frac{\hbar}{2\,m\,\omega}\,(a^{+2} + aa^+ + a^+a + a^2) \qquad (9\text{–a})$$

$$P^2 = \frac{m\,\hbar\,\omega}{2}\,(a^+ - a)(a - a^+) = -\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}\,(a^{+2} - aa^+ - a^+a + a^2) \qquad (9\text{–b})$$

Les termes en a^2 et a^{+2} ne contribuent pas aux éléments diagonaux (d'après (5) et (6)). Par contre d'après (3) et (4), on a : $< \phi_n \,|a^+a + aa^+|\, \phi_n > = (2n + 1)$

Il vient alors : $\Delta X^2 = < \phi_n \,|\, X^2 \,|\, \phi_n > - \left(< \phi_n \,|\, X \,|\, \phi_n > \right)^2 = < \phi_n \,|\, X^2 \,|\, \phi_n >$

$$= \frac{\hbar}{2\,m\,\omega}\,(2n + 1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\,\omega} \qquad (10)$$

$$\Delta P^2 = < \phi_n \,|\, P^2 \,|\, \phi_n > - \left(< \phi_n \,|\, P \,|\, \phi_n > \right)^2 = < \phi_n \,|\, P^2 \,|\, \phi_n >$$

$$= \frac{m\,\hbar\,\omega}{2}\,(2n + 1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) m\,\hbar\,\omega \qquad (11)$$

◆ On en déduit le produit $\Delta X \,.\, \Delta P$: $\Delta X \,.\, \Delta P = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$

Nous trouvons qu'il est supérieur ou égal à $\frac{\hbar}{2}$. La borne inférieure est atteinte pour l'état fondamental, c'est-à-dire pour $n = 0$ (cf exercice 27).

4°) L'hamiltonien du système s'écrit : $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 X^2$

en utilisant les expressions de P^2 et de X^2 (9)

$$P^2 = \frac{-\,m\,\hbar\,\omega}{2}\,(a^{+2} - aa^+ - a^+a + a^2) \qquad X^2 = \frac{\hbar}{2\,m\,\omega}\,(a^{+2} + aa^+ + a^+a + a^2)$$

D'où $$H = \frac{-\,\hbar\,\omega}{4}\,(a^{+2} - aa^+ - a^+a + a^2) + \frac{\hbar\,\omega}{4}\,(a^{+2} + aa^+ + a^+a + a^2)$$

$$\boxed{H = \frac{\hbar\,\omega}{2}\,(aa^+ + a^+a)}$$

On en déduit les valeurs propres, associées aux états stationnaires :

$$E_n = < H > = < \phi_n \mid H \mid \phi_n > = \frac{\hbar\,\omega}{2} < \phi_n \mid (aa^+ + a^+ a) \mid \phi_n > = \frac{\hbar\,\omega}{2}(2n+1)$$

soit $$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)} \qquad \text{avec } n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

Remarque : Ce résultat peut être obtenu à partir des résultats (10) et (11) en calculant $E_n = < E_c > + < E_p >$. En effet :

$$< E_c > = \frac{1}{2m} < P^2 > = \frac{\hbar\,\omega}{4}(2n+1) \quad \text{et} \quad < E_p > = \frac{1}{2} m\omega^2 < X^2 > = \frac{\hbar\,\omega}{4}(2n+1)$$

On en déduit : $$E_n = \hbar\,\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Les énergies cinétique et potentielle moyennes sont donc égales.

5°) A l'instant $t = 0$, l'oscillateur harmonique est dans l'état :

$$\mid \psi(0) > = \frac{1}{2} \mid \phi_0 > + \frac{1}{\sqrt{2}} \mid \phi_1 > + \frac{1}{2} \mid \phi_2 >$$

a) Remarquons d'abord que $\mid \psi(0) >$ est normé. La mesure de l'énergie du système à l'instant $t = 0$ peut donner comme valeurs, celles correspondantes aux états $\mid \phi_0 >$, $\mid \phi_1 >$ ou $\mid \phi_2 >$; soit : $$E_0 = \frac{\hbar\,\omega}{2}, \qquad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\,\omega, \qquad E_2 = \frac{5}{2}\hbar\,\omega.$$

Les postulats de la mécanique quantique nous permettent d'obtenir les probabilités $\mathcal{P}(E_k)$ des différentes valeurs E_k ; en effet :

$$\mathcal{P}(E_0) = \mid < \phi_0 \mid \psi(0) > \mid^2 = \frac{1}{4} \quad ; \qquad \mathcal{P}(E_1) = \mid < \phi_1 \mid \psi(0) > \mid^2 = \frac{1}{2}$$

et $$\mathcal{P}(E_2) = \mid < \phi_2 \mid \psi(0) > \mid^2 = \frac{1}{4}$$

b) L'état $\mid \psi(t) >$ à l'instant $t > 0$ est donné par :

$$\mid \psi(t) > = \sum_{n=0}^{2} C_n(0)\, e^{-iE_n t/\hbar} \mid \phi_n > = \sum_{n=0}^{2} C_n(0)\, e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t} \mid \phi_n >$$

avec $$C_0(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad C_2(0) = \frac{1}{2}$$

Soit à l'instant $t > 0$, une mesure de l'énergie donne un résultat supérieur à $2\,\hbar\,\omega$ (c'est-à-dire $\frac{5}{2}\hbar\,\omega$ qui correspond à $n = 2$).

La probabilité de se trouver donc dans l'état $\mid \phi_2 >$ s'écrit :

$$P(t) = |\langle \phi_2 | \psi(t) \rangle|^2 = |C_2(t)|^2 = |C_2(0)|^2$$

soit : $\boxed{P(t) = \frac{1}{4}}$

c) La valeur moyenne d'une grandeur physique quelconque A est donnée en fonction du temps par : $\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{n'=0} \sum_{n=0} C^*_{n'}(0) \langle \phi_{n'} | A | \phi_n \rangle C_n(0) \; e^{i(E_{n'}-E_n)t/\hbar}$

$$= \sum_{n'=0} \sum_{n=0} C^*_n(0) C_n(0) A_{n'n} \; e^{i(n'-n)\omega t}$$

avec $A_{n'n} = \langle \phi_{n'} | A | \phi_n \rangle$ et n', n sont des entiers.

◆ Appliquons ce résultat aux observables X et P.

D'après l'égalité (7), les seuls éléments de matrice $X_{n'n}$ et $P_{n'n}$ non nuls de X et P sont tels que $n' = n \pm 1$. Par conséquent, les valeurs moyennes de X et P comprennent uniquement des termes en $e^{\pm i\omega t}$.

Ecrivons alors les matrices correspondantes à $A = X$ et $A = P$ dans la base $\{ |\phi_0\rangle , |\phi_1\rangle \text{ et } |\phi_2\rangle \}$. Soit d'après (7) et (8) :

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La valeur moyenne de X est donc :

$$\langle X \rangle_t = C_0(0) C_1(0) [X_{01} e^{-i\omega t} + X_{10} e^{i\omega t}] + C_1(0) C_2(0) [X_{12} e^{-i\omega t} + X_{21} e^{i\omega t}]$$

soit d'après les valeurs de C_0, C_1, C_2 et A_{01}, A_{10}, A_{12} et A_{21}

$$\langle X \rangle_t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{2} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(1 + \sqrt{2}\right) \cos\omega t \qquad (12)$$

Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$\langle P \rangle_t = C_0(0) C_1(0) [P_{01} e^{-i\omega t} + P_{10} e^{i\omega t}] + C_1(0) C_2(0) [P_{12} e^{-i\omega t} + P_{21} e^{i\omega t}]$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) + \sqrt{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right]$$

$$\langle P \rangle_t = -\frac{\sqrt{m\hbar\omega}}{2} \left(1 + \sqrt{2}\right) \sin\omega t \qquad (13)$$

◆ Appliquons le théorème d'Ehrenfest aux observables X et P :

$$\frac{d}{dt} < X > = \frac{1}{i\hbar} [X, H] = \frac{< P >}{m} \qquad (14)$$

$$\frac{d}{dt} < P > = \frac{1}{i\hbar} [P, H] = -m\,\omega^2 < X > \qquad (15)$$

D'après (12), nous avons : $\frac{d}{dt} < X > = \frac{-\omega}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega}} \left(1 + \sqrt{2}\right) \sin \omega t$

$$= \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{\hbar\,\omega}{m}} \left(1 + \sqrt{2}\right) \sin \omega t = \frac{< P >}{m}$$

Donc l'équation (14) est vérifiée.

D'après (13) : $\frac{d}{dt} < P > = -\omega \frac{\sqrt{m\,\hbar\,\omega}}{2} \left(1 + \sqrt{2}\right) \cos \omega t$

$$= -m\,\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}} \left(1 + \sqrt{2}\right) \cos \omega t = -m\,\omega^2 < X >$$

L'équation (15) est donc vérifiée.

29 – Les matrices de Pauli.

Considérons les trois matrices de Pauli σ_x, σ_y et σ_z qui, dans la base des vecteurs propres normés $|+>_z$ et $|->_z$ de σ_z avec les valeurs propres respectives +1 et –1, s'écrivent :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et considérons les trois observables $S_x = (\hbar/2)\ \sigma_x$; $S_y = (\hbar/2)\,\sigma_y$ et $S_z = (\hbar/2)\,\sigma_z$.

Pour la terminologie, les observables S_x, S_y et S_z représentent trois grandeurs physiques mesurables attachées à l'électron appelées composantes du moment cinétique de spin de l'électron. Ces matrices agissent dans un espace à deux dimensions appelé des états de spin de l'électron et noté $\mathcal{E}_s$.

1°) Quelles sont les valeurs et vecteurs propres de S_z ?

2°) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres normés notés $(|+>_x, |->_x)$ et $(|+>_y, |->_x)$ de σ_x et σ_y respectivement.

En déduire les valeurs et états propres de S_x et S_y.

3°) Montrer que σ_x, σ_y et σ_z obéissent aux relations de commutation :

$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\,\sigma_z$; $[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\,\sigma_x$ *et* $[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\,\sigma_y$.

En déduire les commutateurs $[S_x, S_y]$, $[S_y, S_z]$ *et* $[S_z, S_x]$.

4°) Soit S^2 l'observable associée au carré du moment cinétique de spin de l'électron définie par : $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$, évaluer le commutateur $[S^2, S_z]$. Que peut-on déduire ? S^2 et S_z représentent-elles des grandeurs physiques compatibles ?

5°) Evaluer l'action de S^2 sur les états $|+>_z$ et $|->_z$. Conclure.

6°) S^2 et S_z forment-elles un ensemble complet d'observables qui commutent ? Que peut-on conclure ?

7°) On mesure l'observable S^2, l'électron étant dans l'état de spin décrit par le vecteur $|\psi> = \alpha\,|+>_z + \beta\,|->_z$, $(\alpha, \beta) \in C^2$ de l'espace $\mathcal{E}_s$, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

8°) La mesure de S^2 n'étant pas effectuée, une mesure de S_x donne la valeur $\hbar/2$, quel est l'état de spin de l'électron immédiatement après la mesure ? Quelles valeurs peut-on alors trouver lors d'une mesure de S_y et avec quelles probabilités ?

Extrait, Fès, MP 2-PC 2, Juin 1986.

1°) σ_z est une matrice hermitique, diagonalisable. Ces valeurs propres sont donc : ± 1. Les vecteurs propres de σ_z sont $|+>$ et $|->$. Ces mêmes vecteurs propres sont les mêmes que ceux de S_z, par contre ses valeurs propres sont $\pm\,\hbar/2$.

2°) σ_x et σ_y ont toutes la même équation caractéristique : $\lambda^2 - 1 = 0$

Les valeurs propres de σ_x et σ_y sont donc : $\lambda = \pm 1$.

Donc les valeurs propres de S_x et S_y sont $\pm\,\hbar/2$. Cherchons les vecteurs propres de σ_x qui sont aussi ceux de S_x

En représentative $|+>_x = c_1|+>_z + c_2|->_z$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

On choisit : $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pour que $|+>_x$ soit normé

Il vient alors : $|+>_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(|+>_z + |->_z)$

Il est facile de montrer par une raisonnement analogue que : $|- >_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+ >_z - |- >_z\right)$

ou en remarquant que $< + | - >_x = 0$.

Pour σ_y , on fait agir le vecteur colonne $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ pour trouver $+1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$-ic_2 = c_1 \qquad \text{et} \qquad ic_1 = c_2$$

De plus $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Il vient alors : $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}$

Soit : $$|+>_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+>_z + i|->_z\right)$$

Le ket $|->_y$ doit être normé et orthogonal à $|+>_y$, il vient :

$$|->_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+>_z + -i|->_z\right)$$

En résumé :

$$S_{x,y,z}\,|\pm>_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2}\,|\pm>_{x,y,z}$$

avec

$$|\pm>_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+>_z \pm |->_z\right)$$

$$|\pm>_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+>_z \pm i|->_z\right)$$

3°) D'après la définition des matrices σ_x , σ_y , σ_z il est facile de vérifier les égalités suivantes : $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$ (1 : matrice unité 2×2) (1)

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z \qquad (2)$$

ainsi que les équations qui se déduisent par permutation circulaire de x, y et z .

De (2) on tire : $[\sigma_x, \sigma_y] = \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z = 2\,i\,\sigma_z$

ainsi que les égalités obtenues par permutation circulaire.

Soit : $[\sigma_y , \sigma_z] = 2i\sigma_x$; $[\sigma_z , \sigma_x] = 2i\sigma_y$

On en déduit : $$[S_x , S_y] = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 [\sigma_x , \sigma_y] = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 2i\sigma_Z = i\hbar\, S_z$$

$$[S_x , S_y] = i\hbar\, S_x \quad ; \quad [S_z , S_x] = i\hbar\, S_y$$

4°) **Commutateur** $[S^2 , S_z]$:

$$[S^2 , S_z] = [S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 , S_z] = [S_x^2 , S_z] + [S_y^2 , S_z] + [S_z^2 , S_z]$$

or $$[S_x^2 , S_z] = S_x [S_x , S_z] + [S_x , S_z] S_x = -i\hbar [S_x S_y + S_y S_x]$$

$$[S_y^2 , S_z] = S_y [S_y , S_z] + [S_y , S_z] S_y = i\hbar [S_y S_x + S_x S_y]$$

$$[S_z^2 , S_z] = 0$$

d'où : $$\boxed{[S^2 , S_z] = 0}$$

On voit que S^2 et S_z commutent. Ils ont donc des fonctions propres communes et, plus précisément, ils ont une base propre complète commune qui est celle de S_z ($|+>_z$ et $|->_z$)

5°) On voit que le carré de chaque matrice de Pauli est la matrice unité :

Donc : $$S^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) = \frac{3\hbar^2}{4} I$$

ou encore $$S^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $$S^2 |+>_z = \frac{3\hbar^2}{4} |+>_z \; ; \qquad S^2 |->_z = \frac{3\hbar^2}{4} |->_z$$

On conclut que : $$S^2 |\pm> = \hbar^2 S(S+1) |\pm> \qquad S \text{ étant un demi-entier} = \frac{1}{2}$$

6°) S^2 et S_z commutent et forment une base propre complète. Donc l'ensemble $\{S^2 , S_z\}$ constitue un ensemble complet d'observables qui commutent (E.C.O.C). Par conséquent le résultat de la mesure par les différentes observables S^2 ou S_z est suffisant pour déterminer l'état du système après la mesure.

7°) L'électron se trouve dans l'état de spin décrit par le vecteur : $|\psi> = \alpha |+>_z + \beta |->_z$

Les valeurs propres de S^2 sont $\frac{3\hbar^2}{4}$ (valeur deux fois dégénérée) et les vecteurs propres de S^2 sont $|+>_z$ et $|->_z$. Donc, la mesure de S^2 donne à coup sûr $\frac{3\hbar^2}{4}$ avec la probabilité : $$\mathcal{P}\left(E = \frac{3\hbar^2}{4}\right) = |{}_z<+|\psi>|^2 + |{}_z<-|\psi>|^2$$

Soit : $$\mathcal{P}\left(E = \frac{3\hbar^2}{4}\right) = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

$|\psi>$ doit être normé, donc $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Il vient alors : $\mathcal{P}(E = \frac{3\hbar^2}{4}) = 1$

8°) ◆ Remarquons d'abord que les valeurs propres de S_x et S_y sont $\pm \hbar / 2$. Pour S_x , on a obtenu :

$$|\pm>_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+>_z \pm |->_z \right) \qquad (1)$$

et pour S_y , on a obtenu : $$|\pm>_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+>_z \pm i\,|->_z \right) \qquad (2)$$

◆ La mesure de S_x donnant la valeur $\frac{\hbar}{2}$ montre que l'état de la particule est $|+>_x$. L'état de spin de l'électron immédiatement après la mesure est le ket normé :

$$|\phi> = \frac{P_n |\psi>}{\sqrt{<\psi | P_n | \psi>}} \qquad (3)$$

où P_n est le projecteur défini dans le sous-espace associé à la valeur propre $+\frac{\hbar}{2}$ engendré par $|+>_x$. Soit alors : $$P_n = |+>_x\,{}_x<+| \qquad (4)$$

Exprimons l'état $|\psi>$ en fonction de $|+>_x$ et $|->_x$:

Les relations (1) nous donnent : $$|+>_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+>_x + |->_x \right)$$

$$|->_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+>_x - |->_x \right)$$

donc : $$|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\alpha + \beta)\,|+>_x + (\alpha - \beta)\,|->_x \right) \qquad (5)$$

On déduit d'après (4) et (5) : $$\begin{cases} P_n |\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta)\,|+>_x \\ <\psi | P_n | \psi> = \frac{1}{2} (\alpha^* + \beta^*)(\alpha + \beta)\,<+|+>_x \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} |\alpha + \beta|^2$$

L'état de spin de l'électron immédiatement après la mesure est d'après (3) :

$$|\phi> = \frac{(\alpha + \beta)}{|\alpha + \beta|} |+>_x$$

$$\boxed{|\phi> = |+>_z}$$ à un facteur de phase près

◆ La probabilité qu'une mesure de la variable S_y donne, dans l'état $|\psi>$, un résultat égal à $\pm \frac{\hbar}{2}$ est égale à la probabilité qu'a l'état $|\psi>$ d'être identique à $|\pm>_y$. Soit :

$$\mathcal{P}\left(S_y = \frac{\hbar}{2}\right) = |{}_y< + |\psi>|^2 \qquad \mathcal{P}\left(S_y = -\frac{\hbar}{2}\right) = |{}_y< - |\psi>|^2$$

Compte tenu de (2) et, on tire :

$$\mathcal{P}\left(S_y = \frac{\hbar}{2}\right) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}_z< + | - i\,{}_z< - |\right)\left(\alpha\,|+>_z + \beta\,|->_z\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}|\alpha - i\beta|^2 = \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}\left(S_y = \frac{-\hbar}{2}\right) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left({}_z< + | + i\,{}_z< - |\right)\left(\alpha\,|+>_z + \beta\,|->_z\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}|\alpha + i\beta|^2 = \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) = \frac{1}{2}$$

Remarquons que la probabilité de la mesure de S_y donne indifféremment $\frac{\hbar}{2}$ ou $\frac{-\hbar}{2}$ est bien égale à 1 :

$$\mathcal{P}\left(S_y = \frac{\hbar}{2}\right) + \mathcal{P}\left(S_y = \frac{-\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2\right] = 1$$

30 – Illustration des postulats sur le cas d'un spin 1/2 - Préparation de l'état le plus général - Evolution du spin 1/2 dans un champ magnétique uniforme.

I – On considère une particule de spin $s = \frac{1}{2}$ ***; et soit la direction de vecteur unitaire*** $\vec{u}$ ***d'angles polaires*** θ ***et*** φ.

1°) Rappeler les matrices représentants S_x, S_y ***et*** S_z ***dans la base des états propres de*** S_z ***qu'on notera*** $|+>$ ***et*** $|->$.

2°) Trouver la composante S_u ***du spin de la particule, le long de la direction*** $\vec{u}$, ***et donner la matrice qui représente*** S_u ***dans la base des états***

propres de S_z.
3°) Donner les 2 états propres de S_u qu'on notera $|+>_u$ et $|->_u$.

II – Soit la même particule de spin $s = \frac{1}{2}$; on considère dans $\mathscr{E}_s$, l'espace des états de spin de cette particule, la base formée par les états propres de S_z.
1°) Quel est sur cette base l'état de spin (normé) $|\psi>$ le plus général de la particule dans l'espace $\mathscr{E}_s$?

2°) Montrer que cet état peut s'écrire à une constante de normé 1 près :

$$|\psi> = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+> + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |->$$

3°) Montrer (en utilisant les résultat de I) que $\forall|\psi> \in \mathscr{E}_s$, il existe un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $|\psi>$ soit colinéaire avec un état propre de S_u.

III – La particule considérée dans I et II de spin $\frac{1}{2}$ est plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ et l'on choisit l'axe Oz suivant $\vec{B}_0$. L'énergie potentielle du moment magnétique $\vec{M} = \gamma\vec{S}$ de cette particule est $\omega = -\vec{M} \cdot \vec{B_0} = -\gamma B_0 S_z$ (γ rapport gyromagnétique, B_0 module du champ magnétique) et l'observable hamiltonien correspondante est $H = \omega_0 S_z$ où $\omega_0 = -\gamma B_0$

1°) Trouver les vecteurs propres de H et les niveaux d'énergie.

2°) On suppose qu'à l'instant $t = 0$ l'état de spin de la particule est donné par l'expression trouvée en II 2° :

$$|\psi(0)> = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+> + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |->$$

donner l'état de spin $|\psi(t)>$ à un instant $t > 0$.

3°) En comparant l'expression de $|\psi(t)>$ à l'un des états propres de S_u calculé dans I.3°, montrer que l'angle entre $\vec{u}(t)$ et Oz (direction de $\vec{B_0}$) reste constant et que le vecteur unitaire $\vec{u}(t)$ tourne autour de Oz à la vitesse angulaire ω_0 (précession de larmor).

4°) Calculer les probabilités d'obtenir $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$ dans une mesure de S_z, dans l'état $|\psi(t)>$.

5°) Calculer les valeurs moyennes: $<\psi(t)|S_z|\psi(t)>$, $<\psi(t)|S_x|\psi(t)>$ et $<\psi(t)|S_y|\psi(t)>$ et que pouvez-vous conclure ?

Rabat, Juin 1980.

I– 1°) Considérons une particule de spin $s = \frac{1}{2}$. Rappelons les matrices représentants S_x, S_y et S_z dans la base des états propres de S_z $\{ |+>, |->\}$:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2°) La composante S_u du spin le long du vecteur unitaire $\vec{u}$, caractérisé par les angles polaires θ et φ s'écrit :

$$S_u = \vec{S} \cdot \vec{u} = S_x u_x + S_y u_y + S_z u_z$$

$$= S_x \sin\theta\cos\varphi + S_y \sin\theta\cos\varphi + S_z \cos\theta$$

En utilisant les définitions de S_x, S_y et S_z, on trouve la matrice qui représente l'observable correspondante S_u dans la base $\{ |+>, |->\}$:

$$S_u = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (1)$$

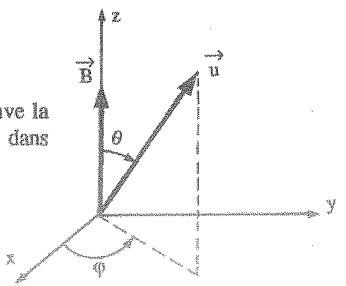


figure 1

3°) ◆ **Valeurs propres de S_u**

L'équation caractéristique de la matrice (1) :

$$Det\,[(S_u) - \lambda I] = -\left(\frac{\hbar^2}{4}\cos^2\theta - \lambda^2\right) - \frac{\hbar^2}{4}\sin^2\theta = 0$$

donne immédiatement les valeurs propres E_+ et E_- de (S_u) : $E_+ = \frac{\hbar}{2}$ et $E_- = -\frac{\hbar}{2}$

On remarque qu'elles sont bien réelles (propriété d'une matrice hermitique).

Remarque : On voit que S_u a les mêmes valeurs propres $+\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$ que S_z, S_x et S_y. Ce résultat est très important physiquement ; on peut en fait tourner en bloc l'appareil de Stern et Gerlach de façon que l'axe défini par le champ magnétique soit parallèle à O_x, O_y ou $\vec{u}$. Les phénomènes observés sur la plaque de l'appareil doivent être inchangés par de telles rotations. La mesure de S_x, S_y ou S_u ne peut donc donner que l'un des deux résultats $+\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$.

◆ **Vecteurs propres normés de S_u**

Soient α et β les composantes de $|+>_u$ ou $|+>$ et $|->$. Elles doivent vérifier :

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire : $(\cos\theta - 1)\alpha + \sin\theta\, e^{-i\varphi}\beta = 0$

C'est-à-dire : $(-2\sin^2\frac{\theta}{2})\,\alpha + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi}\beta = 0$

ou encore : $(-\sin\frac{\theta}{2})\,\alpha + \cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi}\beta = 0$ (2)

Soit d'après (2) : $\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi}\beta$

Le vecteur propre $|+>_u$ s'écrit donc : $|+>_u = \beta\left[\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi}\,|+> + 1\,|->\right]$

$$= \frac{\beta}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi}\,|+> + \sin\frac{\theta}{2}\,|->\right]$$

Le vecteur $|+>_u$ doit être normé, donc : $\beta = \sin\frac{\theta}{2}$

Le vecteur propre normé $|+>_u$ peut donc s'écrire :

$$\boxed{|+>_u = \cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}\,|+> + \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}\,|->} \quad (3)$$

Le vecteur propre normé $|->_u$ doit être orthogonale à $|+>_u$:

Soit : $|->_u = \alpha'\,|-> + \beta'\,|->$

Il vient alors : $<+\,|->_u = \alpha'\cos\frac{\theta}{2}\,e^{+i\varphi/2} + \beta'\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2} = 0$

Soit : $\alpha' = -\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}$ et $\beta' = \cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}$

Donc : $|->_u = -\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}\,|+> + \cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}\,|->$

On vérifie bien que $|->_u$ est normé.

II 1°) Le ket normé le plus général de l'espace des états de spin de cette particule est de la

forme : $|\psi> = \alpha|+> + \beta|->$

2°) Cet état est normé : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Compte tenu de cette relation, il existe forcément un angle θ telle que :

$$|\alpha| = \cos\frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad |\beta| = \sin\frac{\theta}{2}$$

Si de plus, nous imposons : $0 \leq \theta \leq \pi$

L'équation $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = tg\frac{\theta}{2}$ détermine θ de façon unique.

Nous savons d'autre part, que les phases de α et β n'interviendront dans les probabilités que par leur différence. Soit alors : $\varphi = Arg\,\beta - Arg\alpha$; $\chi = Arg\,\beta + Arg\alpha$

On a alors : $Arg\beta = \frac{\chi+\varphi}{2}$ et $Arg\alpha = \frac{\chi-\varphi}{2}$

Le ket $|\psi>$ s'écrit alors : $|\psi> = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(\chi-\varphi)}{2}}|+> + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i(\chi+\varphi)}{2}}|->$

$$|\psi> = e^{\frac{i\chi}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{-i\varphi}{2}}|+> + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}|->\right] \qquad (4)$$

3°) Si on rapproche l'expression (3) trouvée en I.3°), on voit que $|\psi>$ (4) ne diffère du ket $|+>_u$ correspondant au vecteur unitaire $\vec{u}$ que par un terme de phase $e^{i\chi/2}$ qui n'a pas de signification physique : donc il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que $|\psi>$ soit colinéaire au ket $|+>_u$.

III 1°) L'hamiltonien H qui décrit l'évolution du spin de la particule dans le champ $\vec{B_0}$ est :

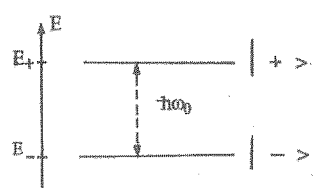
$$H = -\gamma B_0 S_z = \omega_0 S_z$$

Comme S_z est un opérateur qui ne dépend pas du temps, la résolution de l'équation de Schrödinger se ramène à celle de l'équation aux valeurs propres de H qui sont ceux de S_z :

$$H|+> = \frac{\hbar\omega_0}{2}|+> \; ; \; H = |-> = -\frac{\hbar\omega_0}{2}|->$$

Remarque : On a alors deux niveaux d'énergie. Leur séparation $\hbar\omega_0$ est proportionnelle au champ magnétique $\hbar\gamma B_0$; ils définissent une fréquence de Bohr unique :

$$\upsilon_{+-} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{E_+ - E_-}{2\pi\hbar} = \frac{E_+ - E_-}{h}$$



2°) A l'instant $t = 0$, le spin est décrit par l'état :

$$|\psi(0)> = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{-i\varphi}{2}}\, |+> + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}\, |->$$

L'état $|\psi(t)>$ à un instant $t > 0$ est donc : $|\psi(t)> = \sum_n C_n(0)\, e^{-iE_n t/\hbar}\, |\varphi_n>$

$$|\psi(t)> = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{-i\varphi}{2}}\, e^{-itE_+/\hbar}\, |+> + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{-i\varphi}{2}}\, e^{-itE_-/\hbar}\, |+>$$

En considèrant les valeurs de E_+ et E_-, nous obtenons :

$$|\psi(t)> = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2}\, |+> + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i(\varphi+\omega_0 t)/2}\, |->$$

Remarque : La présence du champ magnétique $\vec{B_0}$ introduit donc un déphasage proportionnel au temps entre les cœfficients affectés aux kets $|+>$ et $|->$.

3°) En comparant l'expression de $|\psi(t)>$ à l'état propre de $S_u\,|+>_u$ calculé dans I 3°). On voit que (figure 1) $\theta(t) = \theta$ angles entre $\vec{u}$ et $\vec{B_0}$ reste constant

$\varphi(t) = \varphi + \omega_0 t$ angles $\vec{u}(t)$ tourne autour de Oz à la vitesse angulaire ω_0 (proportionnelle au champ $\vec{B_0}$ qui porte le nom de "précession de Larmor"

4°) L'après l'expression de l'hamiltonien, l'obervable S_z est une constante du mouvement.

Les probabilités d'obtenir $+\frac{\hbar}{2}$ ou $-\frac{\hbar}{2}$ dans une mesure de S_z sont indépendantes du temps : le module de $e^{\pm i(\varphi+\omega_0 t)} = 1$

$$\mathcal{P}\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = |<+|\psi(t)>|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\mathcal{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |<-|\psi(t)>|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

5°) ◆ La valeur moyenne de S_z est également indépendante du temps pour la même raison que 4°) : $<\psi(t)|\,S_z\,|\psi(t)> = <S_z>_0$ (S_z commute avec H)

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$$

◆ La valeur moyenne de S_x dans l'état $|\psi(t)>$ nous donne : $<S_x>_t = <\psi(t)|\,S_x\,|\psi(t)>$

$$< S_x >_t = < \psi(t) \mid S_x \cos\frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2} \mid + > + < \psi(t) \mid S_x \sin\frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\omega_0 t)/2} \mid - >$$

Or $$S_x \mid + > = \frac{\hbar}{2} \mid - > \quad \text{et} \quad S_x \mid - > = \frac{\hbar}{2} \mid + >$$

Donc $$< S_x >_t = \frac{\hbar}{2} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2} < \psi(t) \mid - > + \frac{\hbar}{2} \sin\frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\omega_0 t)/2} < \psi(t) \mid + >$$

En tenant compte de : $$< \psi(t) \mid = \cos\frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\omega_0 t)/2} < + \mid + \sin\frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2} < - \mid$$

Il vient alors : $$< S_x >_t = \frac{\hbar}{2} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \left[e^{-i(\varphi+\omega_0 t)} + e^{i(\varphi+\omega_0 t)} \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Soit : $$\boxed{< S_x >_t = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

On trouve aisément par un raisonnement analogue :

$$\boxed{< S_y >_t = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Conclusion :

i) S_x et S_y ne commutent pas avec H, donc S_x et S_y ne sont pas des constantes du mouvement. C'est pour celà que les expressions de $< S_x >_t$ et $< S_y >_t$ dépendent du temps.

ii) Dans les expressions de $< S_x >_t$ et $< S_y >_t$, on retrouve la fréquence de Bohr unique $\frac{\omega_0}{2\pi}$ du système.

iii) Les valeurs moyennes de S_x, S_y et S_z se comportent comme le feraient les composantes d'un moment cinétique classique de module $\frac{\hbar}{2}$ qui serait animé du mouvement de précession de Larmor.

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfez en toute confiance