UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN/ UFR SEG/ L2 - FIP2
Année Académique 2019 -2020
UE 2 – ECUE 1 : ESTMATIONS
TD 7 – INTERVALLE DE CONFIANCE

Exercice 1 – Voulant évaluer rapidement les résultats obtenus par ses 200 élèves-ingénieurs lors d'un partiel, un professeur décide de corriger quelques copies tirées au hasard. Il admet par ailleurs que les notes de ses élèves suivent une loi normale de variance 4.

a) Le professeur corrige un échantillon de 7 copies et trouve une moyenne de 11. Quelle est l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne des 200 copies ?
b) Combien de copies le professeur doit-il corriger s'il veut situer la moyenne générale de ses élèves dans un intervalle d'amplitude 2, avec un risque de 5% ?
c) En trouvant une moyenne égale à 11, combien de copies le professeur devrait il corriger pour pouvoir dire, avec un $\underbrace{\textit{risque de } 1\%}_{\alpha=1\%=0,01}$, que la moyenne de tous les élèves est supérieure à 10 ?

Exercice 2 - Dans cette partie, on suppose que m et σ sont inconnus.
On a relevé dans le tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet :

Masse (en g)	72,20	72,24	72,26	72,30	72,36	72,39	72,42	72,48	72,50	72,54

Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.
1°) Calculer la moyenne et l'écart –type de cet échantillon
2°) En déduire les estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart-typa σ de la population.
3°) Dans la suite, on admet que la variable aléatoire qui à tout échantillon de 10 pesées associe la moyenne $\overline{X}$ de ces pesées suit une loi normale. En prenant pour écart-type la valeur estimée en 2°) donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.
4°) L'écart-type de l'appareil de pesée, mesuré à partir de nombreuses études antérieures, est en réalité, pour un objet ayant environ cette masse, de 0,08 g. Dans cette question on prend donc σ =0,08. Donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.

Exercice 3 – Lors d'un sondage précédant des élections, 500 personnes ont été interrogées. Bien que ce ne soit pas en pratique, on suppose pour simplifier les calculs que les 500 personnes représentent un échantillon indépendant et identiquement distribué de la population.
Sur les 500 personnes, 150 ont répondu vouloir voter pour le candidat C_1 et 140 pour le candidat C_2.

1. Donner une estimation ponctuelle des intentions de votes, sous forme de pourcentage.
2. Donner un intervalle de confiance à 95% pour les intentions des votes de chacun des deux.

Exercice 4 - le gouvernement d'un pays démocratique souhaite connaître la proportion p d'électeurs en accord avec un nouveau texte de loi (« le mariage pour tous » par exemple). Pour cela il organise un sondage sur un échantillon aléatoire (X_1, X_2, . . .X_n), et sur 100 personnes interrogées, 80 pensent voter oui.

1. Proposer un estimateur sans biais de p.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 95%.

Exercice 5 - En admettant que l'ensemble des notes à une épreuve d'examen est normalement distribué, déterminer :

a) au niveau de confiance de 95%, l'intervalle de confiance de la note moyenne des candidats, sachant que sur un échantillon aléatoire de 45 candidats on a obtenu une note moyenne de 7,5 avec une variance de 0,64.
b) L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 99%, de la note moyenne des candidats, sachant que sur un échantillon aléatoire de 25 candidats on a obtenu une note moyenne de 7,5 avec une variance de 0,66.

Exercice 6 - Une entreprise produit des ampoules électriques. Le responsable de la fabrication souhaite contrôler périodiquement la qualité des ampoules d'un certain type. Pour cela il prélève chaque mois un lot de 150 ampoules parmi les 3000 qui sont produites et les fait fonctionner de façon continue. Les durées de vie des 150 ampoules ont été mesurées en heures; et le tableau suivant présente les résultats observés.

Classes	Effectifs
[500 , 550[	10
[550 , 600[	30
[600 , 650[	35
[650 , 700[	45
[700 , 750[	25
[750 , 800[	5

1°) Dans cette question, on veut estimer la durée moyenne de vie des 3000 ampoules. Proposer un estimateur pour ce paramètre et indiquer ses propriétés. En déduire une estimation de la moyenne m.
2°) À partir des résultats observés et en utilisant l'estimateur précédent, construire un intervalle de confiance de 98% pour la moyenne m des durées de vie des 3000 ampoules.

UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN/ UFR SEG/ L2 - FIP2
Année Académique 2019 -2020
UE 2 – ECUE 1 : ESTMATIONS
TD 7 – INTERVALLE DE CONFIANCE

CORRIGE

Exercice 1 – Voulant évaluer rapidement les résultats obtenus par ses 200 élèves-ingénieurs lors d'un partiel, un professeur décide de corriger quelques copies tirées au hasard. Il admet par ailleurs que les notes de ses élèves suivent une loi normale variance 4.

1. Le professeur corrige un échantillon de 7 copies et trouve une moyenne de 11. Quelle est l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne des 200 copies ?
2. Combien de copies le professeur doit-il corriger s'il veut situer la moyenne générale de ses élèves dans un intervalle d'amplitude 2, avec un risque de 5% ?
3. En trouvant une moyenne égale à 11, combien de copies le professeur devrait il corriger pour pouvoir dire, avec un risque de 1%, que la moyenne de tous les élèves est supérieure à10 ?

Solution –

N=200 ; X est la note sur la copie. X suit une loi normale N(m ; $\sqrt{4}$).

1°) n=7<30 ; $\bar{x} = 11$; $\sigma = \sqrt{4} = 2$; $\underbrace{1-\alpha}_{niveau\ de\ confiance} = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{lue\ dans\ la\ table\ 2\ de\ la\ loi\ \mathcal{N}(0;1)} = 1{,}96$

L'intervalle de confiance pour m est de la forme :

$$m \in \left]\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[\ ou\ m \in \left]\bar{x} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{x} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

$$m \in \left]11 - 1{,}96\frac{2}{\sqrt{7}}\,;11 + 1{,}96\frac{2}{\sqrt{7}}\right[$$

et en définitive : $m \in]9{,}518\,; 12{,}482\ [$

Conclusion : au niveau de confiance de 95%, la note moyenne de l'ensemble des 200 copies est comprise entre 9,52 et 12,48.

Remarque : $\frac{n}{N}$=taux de sondage=$\frac{7}{200}$=0,035<0,05, l'échantillon est donc considéré comme indépendant (ou non exhaustif).

2°) Le nombre de copies est donné par la formule de calcul de taille d'un échantillon :

$$n = \left(\frac{2u_{1-\alpha/2}\sigma}{l}\right)^2$$

$l = 2;\ \sigma = 2;\ \alpha = 0{,}05 \rightarrow \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{lue\ dans\ la\ table\ 2\ de\ la\ loi\ \mathcal{N}(0;1)} = 1{,}96$

$\Rightarrow n = \left(\frac{2u_{1-\alpha/2}\sigma}{l}\right)^2 = \left(\frac{2\times1{,}96\times2}{2}\right)^2 = 15{,}37$; soit 16 copies au moins.

3°) Il s'agit de calculer : $P(m > 10) = 1 - \alpha$, avec α=seuil de confiance ou risque=0,01

$$\bar{X} \backsim \mathcal{N}\left(m;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) et\ U = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim \mathcal{N}(0;1)$$

$$P(m > 10) = 1 - P(m \leq 10)$$

$$P(m > 10) = 1 - \pi\left(\frac{\bar{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$m = 11; \bar{x} = 10; \sigma = 2;\ \Rightarrow \pi\left(\frac{10-11}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) = \pi\left(-0{,}5\sqrt{n}\right)$$

$$\Rightarrow P(m > 10) = 1 - \pi\left(-0{,}5\sqrt{n}\right)$$

On sait que, $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow P(m > 10) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

$$\begin{cases} P(m>10)=0{,}99 \\ P(m>10)=1-\pi(-0{,}5\sqrt{n}) \end{cases} \Rightarrow 1-\pi(-0{,}5\sqrt{n})=0{,}99$$

$$1-\pi(-0{,}5\sqrt{n})=0{,}99$$

$$\Rightarrow \pi(-0{,}5\sqrt{n})=0{,}01$$

on pose $t=-0{,}5\sqrt{n} \Rightarrow \pi(t)=0{,}01$

$$or\ \pi(t)=0{,}01<0{,}5 \Rightarrow t<0 \text{ et } \frac{p}{2}=0{,}01 \Rightarrow p=0{,}02 \Rightarrow t=-\underbrace{2{,}3263}_{\substack{valeur\ lue \\ dans\ la\ table\ 2 \\ de\ la\ loi\ \mathcal{N}(0;1) \\ pour\ \alpha=0{,}02}}$$

$$t=-0{,}5\sqrt{n}$$

$$-2{,}3263=-0{,}5\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow n=\left(\frac{2{,}3263}{0{,}5}\right)^2=21{,}65 \text{ soit 22 copies.}$$

<u>Exercice 2</u> - Dans cette partie, on suppose que m et σ sont inconnus.
On a relevé dans le tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet :

Masse (en g)	72,20	72,24	72,26	72,30	72,36	72,39	72,42	72,48	72,50	72,54

Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.
1°) Calculer la moyenne et l'écart –type de cet échantillon
2°) En déduire les estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart-typa σ de la variable X
3°) Dans la suite, on admet que la variable aléatoire qui à tout échantillon de 10 pesées associe la moyenne $\overline{X}$ de ces pesées suit une loi normale. En prenant pour écart-type la valeur estimée en 2°) donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.
4°) L'écart-type de l'appareil de pesée, mesuré à partir de nombreuses études antérieures, est en réalité, pour un objet ayant environ cette masse, de 0,08. Dans cette question on prend donc σ =0,08. Donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.

Solution - Exercice 2 - 1°) moyenne et écart-type de l'échantillon : n=10

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{72{,}20+72{,}24+\cdots+72{,}54}{10}=72{,}37$$

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=72{,}37;\ s=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2}=0{,}11$$

2°) estimations ponctuelles :

$$\hat{m}=\bar{x}=72{,}37\ ;\ n=10<30 \Rightarrow \hat{\sigma}=s'=\sqrt{\frac{n}{n-1}}s=\sqrt{\frac{10}{9}}\times 0{,}11=0{,}12$$

$$\text{Rappel : } \begin{cases} n\leq 30 \Rightarrow \hat{\sigma}=s'=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n-1}-\bar{X}^2}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}s \\ n>30 \Rightarrow \hat{\sigma}=s=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{X}^2}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}s' \end{cases}$$

3°) Intervalle de confiance pour la moyenne m : α = 0,05

$$n=10<30\ et\ \begin{cases} \sigma\ inconnu \\ \hat{\sigma}=s' \end{cases} \text{ et } \bar{X} \leadsto \mathcal{N}\left(m;\frac{s'}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow T=\frac{\bar{X}-m}{\frac{s'}{\sqrt{n}}} \leadsto T_{n-1}$$

$$T_{n-1}: loi\ de\ Student\ \text{à}\ (n-1)\ dégrés\ de\ liberté$$

L'intervalle est de la forme :

$$m \in \left]\bar{x} - t_{(n-1);1-\alpha/2} \times \frac{s'}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{(n-1);1-\alpha/2} \times \frac{s'}{\sqrt{n}}\right[$$

Application numérique :

$n = 10; s' = 0{,}12; \alpha$=5%=0,05 $\Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2};(10-1)} = \underbrace{t_{1-\frac{\alpha}{2};(9)}}_{\substack{valeur\ lue \\ dans\ la\ table\ de\ Student \\ pour\ n=9\ et\ \alpha=0{,}05}} = 2{,}262$

$$m \in \left]\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};(9)} \frac{s'}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};(9)} \frac{s'}{\sqrt{n}}\right[$$

Calcul :

$$\text{soit } m \in \left]72{,}37 - 2{,}262 \frac{0{,}12}{\sqrt{10}} ; 72{,}37 + 2{,}262 \frac{0{,}12}{\sqrt{10}}\right[$$

On obtient : $m \in]72{,}30; 72{,}44[$

au niveau de confiance de 95%, le poids moyen de l'ensemble des objets est compris entre 72,30 g et 72,44g.

4°) La formule avec σ =0,08 :

$$n = 10 < 30\ et\ \begin{cases} \sigma\ connu \\ \sigma = 0{,}08 \end{cases} \text{et } \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow U = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$$

$$\Rightarrow m \in \left]\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Application numérique : n=10; $\bar{x} = 72{,}37$; $\sigma = 0{,}08$; α=5%=0,05

$$\Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2};} = 1{,}96$$

$$\text{soit } m \in \left]72{,}37 - 1{,}96 \frac{0{,}08}{\sqrt{10}} ; 72{,}37 + 1{,}96 \frac{0{,}08}{\sqrt{10}}\right[$$

On obtient : $m \in]72{,}32; 72{,}42[$

A 95% de niveau de confiance, le poids moyen est compris entre 72,32 g et 72,42g.

Exercice 3 – Lors d'un sondage précédant des élections, 500 personnes ont été interrogées. Bien que ce ne soit pas en pratique, on suppose pour simplifier les calculs que les 500 personnes représentent un échantillon indépendant et identiquement distribué de la population.

Sur les 500 personnes, 150 ont répondu vouloir voter pour le candidat C_1 et 140 pour le candidat C_2.

3. Donner une estimation ponctuelle des intentions de votes, sous forme de pourcentage.
4. Donner un intervalle de confiance à 95% pour les intentions des votes de chacun des deux.

***Solution* – n=500 ; k_1=150 ; k_2=140**

1- Estimation ponctuelle des votes

L'estimateur d'une proportion est la variable $\hat{p} = F = \frac{K}{n}$ (fréquence d'échantillon) ; lorsque n=500>30, F suit une loi $N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$; et on obtient :

$$\hat{p} = f = \frac{k}{n} \Rightarrow \hat{p}_1 = f_1 = \frac{k_1}{n} = \frac{150}{500} = 0{,}3 \text{ ; soit } 30\% \text{ pour } C_1;$$

$$\text{et } \hat{p}_2 = f_2 = \frac{k_2}{n} = \frac{140}{500} = 0{,}28 \text{ ; soit } 28\% \text{ pour } C_2.$$

2- Intervalles de confiance à 95% ; ils sont de la forme suivante :

$$p_i \in \left]f_i - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; f_i + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right[$$

$$1\text{-}\alpha=0{,}95 \Rightarrow \alpha=0{,}05 \Rightarrow u_{1-\alpha/2} = 1{,}96$$

Pour le candidat C_1

$$p_1 \in \left]0{,}3 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{500}} \; ; 0{,}3 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{500}}\right[\text{ avec } p_1 \in]0{,}2598;0{,}3402[$$

Conclusion : Ainsi au niveau de confiance de 95%, les chances de C_1 sont comprises entre 25,98% et 34,02 %.

Pour le candidat C_2

$$p_2 \in \left]0{,}28 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{500}} \; ; 0{,}28 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{500}}\right[\text{ avec } p_2 \in]0{,}2406;0{,}3194[$$

Conclusion : Ainsi au niveau de confiance de 95%, les chances de C_2 sont comprises entre 24,06% et 31,94%.

Exercice 4 - le gouvernement d'un pays démocratique souhaite connaître la proportion p d'électeurs en accord avec un nouveau texte de loi (« le mariage pour tous » par exemple). Pour cela il organise un sondage sur un échantillon aléatoire (X_1, X_2, . . .X_n), et sur 100 personnes interrogées, 80 pensent voter oui.

1. Proposer un estimateur sans biais de p.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 95%.

***Solution* – Soit X la variable aléatoire définie par :**

$X = \begin{cases} 1 \text{ si la personne est favorable} \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$; X suit une loi de Bernoulli. B(1 ; p).

1) Un estimateur de p est la fréquence d'échantillon $\hat{p} = F = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{K}{n}$

F est sans biais ; en effet $E(\hat{p}) = E(F) = E\left(\frac{K}{n}\right) = \frac{1}{n}E(K) = \frac{1}{n} \times np = p$

2) Intervalle de confiance pour p

n = 100>30, et k=80 ; 1-α = 0,95

$$p \in \left]f - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; f + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right[$$

$$f = \frac{k}{n} = \frac{80}{100} = 0{,}8 \text{ ; } \quad 1\text{-}\alpha=0{,}95 \Rightarrow \alpha=0{,}05 \Rightarrow u_{1-\alpha/2} = 1{,}96$$

$$p \in \left]0{,}8 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8(0{,}2)}{100}} \; ; 0{,}8 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8(0{,}2)}{100}}\right[\quad \text{soit p} \in]0{,}7216;\ 0{,}8784[$$

Conclusion : Au niveau de confiance de 95%, le pourcentage des personnes favorables au nouveau texte est compris entre 72,16% et 87,84%.

<u>Exercice 5</u> - En admettant que l'ensemble des notes à une épreuve d'examen est normalement distribué, déterminer :

a) au niveau de confiance de 95%, l'intervalle de confiance de la note moyenne des candidats, sachant que sur un échantillon aléatoire de 45 candidats on a obtenu une note moyenne de 7,5 avec une variance de 0,64.
b) L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 99%, de la note moyenne des candidats, sachant que sur un échantillon aléatoire de 25 candidats on a obtenu une note moyenne de 7,5 avec une variance de 0,66.

Solution - Exercice 5

a) L'intervalle de confiance de la note moyenne des candidats est de la forme générale :

$$\Rightarrow m \in \left]\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Données :
$X = notes \sim \mathcal{N}(m;\ \sigma)$; $\bar{x} = 7{,}5$; $n = 45 > 30, s^2 = 0{,}64 \Rightarrow s = 0{,}8$
$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;$

Estimation ponctuelle de m et σ :
$\hat{m} = \bar{x} = 7{,}5$ et $pour\ n = 45 > 30 \rightarrow \hat{\sigma} = s = 0{,}8$
L'intervalle de confiance devient : $m \in \left]\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
Calcul : $\Rightarrow m \in \left]7{,}5 - 1{,}96\frac{0{,}8}{\sqrt{45}}; 7{,}5 + 1{,}96\frac{0{,}8}{\sqrt{45}}\right[$ $\Rightarrow m \in]7{,}27; 7{,}73[$

Conclusion : Au niveau de confiance de 95%, la note moyenne des candidats est comprise entre 7,27 et 7,73.

b) L'intervalle de confiance de la note moyenne des candidats est de la forme générale

$$\Rightarrow m \in \left]\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Données : $X = notes \sim \mathcal{N}(m;\ \sigma)$; $n = 25 < 30$; $\bar{x} = 7{,}5$; $s^2 = 0{,}66 \Rightarrow s = 0{,}81$
Estimation ponctuelle de m et σ :

$\hat{m} = \bar{x} = 7{,}5$ et $pour$ n=25<30$\Rightarrow \hat{\sigma} = s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s = \sqrt{\frac{25}{24}} \times 0{,}81 = 0{,}83 \Rightarrow s' = 0{,}83$

Formule de l'intervalle :
n=25<30 $\Rightarrow s' = 0{,}83 \Rightarrow X = notes \sim \mathcal{N}(m;\ s')\ et\ T = \frac{\bar{X}-m}{\frac{S'}{\sqrt{n}}} \sim T_{n-1}$

$avec$ T_{n-1}: loi de Student à (n-1) dégrés de liberté

L'intervalle de confiance devient :

$$m \in \left]\bar{x} - t_{(n-1);1-\alpha/2} \times \frac{s'}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{(n-1);1-\alpha/2} \times \frac{s'}{\sqrt{n}}\right[$$

Calcul :
$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01\ et\ (n-1) = 25 - 1 = 24 \Rightarrow t_{(24);1-\alpha/2} = \underbrace{2{,}797}_{\substack{valeur\ lue \\ dans\ la\ table \\ de\ Student\ pour \\ n=24\ et\ \alpha=0{,}05}}$

$$\Rightarrow m \in \left]7{,}5 - 2{,}797\frac{0{,}83}{\sqrt{25}}; 7{,}5 + 2{,}797\frac{0{,}83}{\sqrt{25}}\right[$$

$$\Rightarrow m \in]7{,}036; 7{,}964[$$

Conclusion : Au niveau de confiance de 95%, la note moyenne des candidats est comprise entre 7,036 et 7,964.

Corrigé Exercice 6

UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN/ UFR SEG/ L2 - FIP2
Année Académique 2019 -2020
UE 2 – ECUE 1 : ESTMATIONS
TD 7 – INTERVALLE DE CONFIANCE

1. Un estimateur de la durée de vie moyenne (m) de la population des 3.000 ampoules est la moyenne d'échantillon : $\widehat{m} = \bar{X} = \frac{\sum n_i X_i}{n}$

Propriétés de $\widehat{m} = \bar{X}$

$X \sim (m\,;\,\sigma)$ et $(X_1,\ X_2, \dots X_n)$ $\underbrace{iid}_{\substack{iid:\, independamment \\ et\ identiquement\ distribuées}}$ selon X avec

$$\begin{cases} E(X_i) = E(X) = m \\ V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \end{cases}$$

a) $\bar{X}\ est\ sans\ biais\ si\ E(\widehat{m}) = m,$ avec $\widehat{m} = \bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$E(\widehat{m}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times nE(X) = \frac{1}{n} \times n \times m = m$$

$E(\widehat{m}) = E(\bar{X}) = m,\ donc\ \bar{X}\ est\ un\ estimateur\ sans\ biais\ de\ m.$

b) Montrons que $\bar{X}$ est convergent en calculant $\lim\limits_{n\to\infty} V(\widehat{m}) = 0$

$$V(\widehat{m}) = V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{n}\right) \underbrace{=}_{V(aX+b)=a^2V(X)} \left(\frac{1}{n}\right)^2 V\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{i=n} V(X_i) =$$

$$\frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{1}{n} \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} V(\widehat{m}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \ \Rightarrow \bar{X}$ est donc un estimateur convergent de m.

2. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.

Formules et tableau de calcul

Classes $[x_i; x_{i+1}[$		n_i effectifs	c_i Centres de classe $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
500	550	10	525	5250	2756250
550	600	30	575	17250	9918750
600	650	35	625	21875	13671875
650	700	45	675	30375	20503125
700	750	25	725	18125	13140625
750	800	5	775	3875	3003125
total		150		96750	62993750

La moyenne d'échantillon : $\bar{X} = \frac{\sum n_i c_i}{n} = \frac{96750}{150} = 645$

La durée de vie moyenne des ampoules électriques de l'échantillon est : 645 heures.

La variance d'échantillon :

$$s^2 = \frac{\sum n_i (c_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum n_i c_i^2}{n} - (\bar{X})^2 = s^2 = \frac{62993750}{150} - (645)^2 = 3933{,}3333$$

L'écart-type d'échantillon : $\sqrt{s^2} = s = 62{,}7163\ heures$

3. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la population.

Estimation ponctuelle de la moyenne de la population : $\widehat{m} = \bar{x} = 645\ heures$

La durée de vie moyenne des 3000 ampoules fabriquées est de 645 heures.

Estimation ponctuelle de l'écart-type de la population :

$n = 100 > 30, \hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{\sum n_i(c_i - \bar{X})^2}{n}} = 62{,}7163\ heures$

Remarque : cas où n = 12<30, $\hat{\sigma} = s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \times s = \sqrt{\frac{12}{11}} \times 62{,}7163 = 65{,}5050\ \neq s$

En résumé : si n < 30, $\hat{\sigma} = s' \neq s$

Exercice 6 - On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. Pour un échantillon de 100 lots de 5 kilogrammes de mélange analysés, on a obtenu les résultats suivants, où x_i représente la masse du produit exprimée en grammes et n_i l'effectif correspondant :

x_i	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160
n_i	1	5	6	21	32	22	7	4	1	1

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.
2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type.
3. On admet que la variable aléatoire X, qui, à un lot de 5 kilogrammes de mélange, associe la masse, exprimée en gramme, du produit dosé, suit une loi normale de moyenne m =150 et d'écart-type σ=3. Un lot de 5 kilogrammes de mélange est dit de qualité « extra » s'il contient entre 147 grammes et 155 grammes de produit. Calculer $P(147 \leq X \leq 155)$. En déduire le pourcentage de qualité extra dans le produit.

Corrigé

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.

Formules et tableau de calcul

La moyenne

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{15010}{100} = 150{,}10\ g$$

La variance

$$s^2 = \frac{\sum n_i(x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - (\bar{X})^2$$
$$= \frac{2253932}{100} - (150{,}1)^2$$
$$= 9{,}31$$

L'écart-type

$$s = \sqrt{s^2} = 3{,}051\ g$$

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
142	1	142	20164
144	5	720	103680
146	6	876	127896
148	21	3108	459984
150	32	4800	720000
152	22	3344	508288
154	7	1078	166012
156	4	624	97344
158	1	158	24964
160	1	160	25600
Total	100	15010	2253932

2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la population.

Estimation ponctuelle de la moyenne de la population : $\hat{m} = \bar{x} = 150{,}10\ g$

Estimation ponctuelle de l'écart-type de la population : $n = 100 > 30, \hat{\sigma} = s = 3{,}051g$

3. Sachant que $X \leadsto N(150; 3)$, calculons $P(147 \leq X \leq 155)$

$P(147 \leq X \leq 155) = P(X \leq 155) - P(X < 147)$

$P(147 \leq X \leq 155) = \Pi\left(\frac{155-150}{3}\right) - \Pi\left(\frac{147-150}{3}\right)$

$P(147 \leq X \leq 155) = \Pi(1{,}67) - \Pi(-1)$

$P(147 \leq X \leq 155) = \Pi(1{,}67) + \Pi(1) - 1$

$P(147 \leq X \leq 155) = 0{,}9525 + 0{,}8413 - 1 = 0{,}7938$. Soit 79,38% de qualité extra dans le produit.