UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN/ UFR SEG/ FIP2
Année Académique 2019 -2020
UE 1 – ECUE 1 : STATISTIQUES MATHEMATIQUES
TD 1

EXERCICES

Exercice 1–Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste .de combien de façons différentes peut-elle s'habiller ? *Réponse : 60 façon . Justifier*

Exercice 2 – Un questionnaire à choix multiples (QCM), autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ? *Réponse :* 4^{15} *; Expliquer*

Exercice 3 – A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sur. . .) *Réponse : 4896 ; Justifier*

Exercice 4- a) Combien y a t-il de mots de deux lettres? b) Combien y a t-il de mots de 2 lettres formés d'une consonne et d'une voyelle?
Solution : a) $N = 26^2 = 676$ mots; b) $N = 6 \times 20 \times 2 = 240$ mots

Exercice 5 - Dans un pays imaginaire, un numéro de téléphone comporte 5 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 5, il indique la région. Les autres chiffres sont libres. Combien de numéros de téléphone différents peut-on former dans ce pays?
Réponse : $N = 1 \times 5 \times 10^3 = 5000$;

Exercice 6 – dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.
1) Quel est le nombre de choix possibles ?
2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?
3) Quel est le nombre de choix possibles si l'on impose deux garçons ?

Réponse : 496 ; 247 ; 171

Exercice 7 - Parmi les 1000 étudiants d'une université, 720 suivent des cours d'anglais ; 500 des cours d'allemand ; 250 des cours d'espagnol. De plus parmi ceux qui font l'anglais 340 suivent aussi des cours d'allemand et 140 des cours d'espagnol. Parmi ceux qui font de l'espagnol, 130 font aussi de l'allemand. Enfin 40 apprennent les 3 langues. Indiquer le nombre d'étudiants n'apprenant que :
a)L'anglais *(réponse : 280) ; b)* L'allemand *(réponse : 70) ; c)*L'espagnol *(réponse : 20) d)* Aucune des trois langues *(réponse 100)*

Exercice 8 - Anagrammes. Combien y-a-t-il d'anagrammes de M A T H S ? P A T R I C E ?
Réponse :5! = 120 ; 7! = 5040

Exercice 9 - Une entreprise fabrique 4 types de pièces numérotées. On dispose d'un stock de :
- 8 pièces de type A vendues 8 00 F l'unité
- 7 pièces de type B vendues 6 00 F l'unité
- 6 pièces de type C vendues 5 00 F l'unité
- 5 pièces de type D vendues 4 00 F l'unité

Le service des ventes se propose de faire des lots de pièces. De combien de manières distinctes peut - on constituer :
a) 1 lot de 4 pièces ayant au moins une pièce de type A?
b) 1 lot de 4 pièces ayant au moins une pièce de type A et au moins une pièce de type B ?
c) 1 lot de 4 pièces ayant au moins une pièce de type A et au moins une pièce de type B et au moins une pièce de type C ?
d) 1 lot de 3 pièces dont le prix est égal à 1 800F ?
e) 1 lot de 3 pièces dont le prix soit inférieur à 1400F ?

Exercice 10

a) Montrer que : a) $\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n$; b) $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$

Contents

UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN/ UFR SEG/ FIP2
Année Académique 2019 -2020
UE 1 – ECUE 1 : STATISTIQUES MATHEMATIQUES

TD 1

CORRIGE INDICATIF

Résumé de quelques formules en statistique mathématique

	$n > p$		$n = p$	
Répétition / Ordre	Sans répétition (ou tirage sans remise) ; (ou tirage indépendant) ;	Avec répétition (ou tirage avec remise) ; (ou tirage non indépendant) ;	Sans répétition (ou tirage sans remise) (ou tirage indépendant)	Avec répétition (ou tirage avec remise) ; (ou tirage non indépendant) ;
Ordre Exemple : ✓ Code pin = 4 chiffres dans un ordre précis ; ✓ Numéro téléphone : ordre précis de 8 chiffres ; ✓ Nom : « FATIM » ordre précis des 5 lettres ;	Arrangement sans répétition (de p pris parmi n) $\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$ Exos : 3, 5	Arrangement avec répétition (de p pris parmi n) $\boldsymbol{n^p}$ Exos : 2, 4, 5	Permutation de n éléments sans répétition $\boldsymbol{n!}$ Exos : 8	Permutation de n éléments avec répétition $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$ avec $n = n_1 + n_1 + \cdots + n_k$ Exos : 8
Sans Ordre Exemple : 1 glace de 4 parfums : l'ordre des 4 parfums n'est pas exigé ;	Choix sans répétition ; Combinaison sans répétition Tirage ou choix simultané $\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$ NB : $\boldsymbol{C_n^p = \binom{n}{p}}$ Exos: 1, 6, 9, 10	Choix avec répétition ; Combinaison avec répétition $\boldsymbol{C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}}$ NB : $\boldsymbol{C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p}}$		

Exercice 1 - corrigé

Réponse $N = C_4^1 \times C_5^1 \times C_3^1 = 4 \times 5 \times 3 = 60$ *façons de s'habiller.*

Explication

Différent (distinct) = sans répétition

« S'habiller » = « choisir une jupe parmi 4 » et « choisir un chemisier parmi 5 » et « choisir une veste parmi 3 »

Le nombre de façons différentes de s'habiller (N) = « au nombre de façons de choisir sans répétition une jupe parmi 4 : C_4^1 » $\underbrace{et}_{\times}$ « au nombre de façons de choisir sans répétition un chemisier parmi 5 : C_5^1 » $\underbrace{et}_{\times}$ « au nombre de façons de choisir sans répétition une veste parmi 3 : C_3^1 »

$$\begin{cases} en\ dénombrement: \\ \quad "et" \Leftrightarrow \times \\ \quad "ou" \Leftrightarrow + \end{cases} \Rightarrow N = C_4^1 \underbrace{\times}_{et \Leftrightarrow \times} C_5^1 \underbrace{\times}_{et \Leftrightarrow \times} C_3^1 = \cdots \quad façons\ de\ s'habiller.$$

Exercice 2 – corrigé : questionnaire à choix multiple (QCM)

$$\left(\underbrace{Question\ 1}_{4\ reponses\ possibles}\right) \underbrace{et}_{\times} \left(\underbrace{Question\ 2}_{4\ reponses\ possibles}\right) \underbrace{et}_{\times} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underbrace{et}_{\times} \left(\underbrace{Question\ 15}_{4\ reponses\ possibles}\right)$$

$$N = \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times \ldots \times 4}_{15\ fois} = 4^{15} \quad réponses\ possibles$$

Exercice 3- corrigé

Réponse $N = A_{18}^3 = 4896$ *distributions possibles.*

Explication

La distribution de médailles est la suivante : « or au 1er arrivé » et « argent au 2e arrivé » et «bronze au 3e arrivé ». Une médaille ne peut être attribuée à deux personnes à la fois, il n'y a donc pas de répétition.

Ici clairement l'ordre d'arrivée des athlètes est important : c'est la condition d'attribution des médailles. Il s'agit donc d'un tiercé gagnant dans l'ordre. On a affaire à un arrangement sans répétition.

La distribution des médailles est donc un arrangement sans répétition de 3 athlètes parmi 18.

Le nombre de distributions possibles des 3 médailles est égale au nombre d'arrangement sans répétition de 3 parmi 18, soit $N = A_{18}^3 = 4896$ *distributions possibles.*

Exercice 4- corrigé

a) Réponse - nombre de mots de deux lettres : $N = 26^2 = 276$ *mots de 2 lettres.*

Explication - Exemple : prenons 2 lettres : E et T.

$$\begin{cases} \underbrace{E}_{1ere\ position} \quad \underbrace{et}_{\times} \quad \underbrace{T}_{2e\ position} \quad \Rightarrow mot = ET \\ \underbrace{T}_{1ere\ position} \quad \underbrace{et}_{\times} \quad \underbrace{E}_{2e\ position} \quad \Rightarrow mot = TE \end{cases}$$

Si on change la position des lettres, le mot change ; on passe de « ET » à « TE ». Il est clair que l'ordre des lettres est important. On a affaire à un arrangement avec répétition. Une lettre peut se répéter 2 fois : EE ou TT ou BB.

Un mot de 2 lettres = un arrangement avec répétition de 2 lettres pris dans un ensemble de 26 lettres de l'alphabet français. Le nombre de mots de 2 lettres = au nombre d'arrangements avec répétition de 2 lettres parmi 26. Soit $N = 26^2 \; mots \; de \; 2 \; lettres$.
Autre méthode :

$$\underbrace{1ere \; position}_{26 \; possibilités} \; \underbrace{et}_{\times} \; \underbrace{2e \; position}_{26 \; possibilités}$$
$$N = 26 \times 26 = 26^2 \; mots \; de \; 2 \; lettres.$$

b) Nombre de mots composés d'une voyelle et d'une consonne
L'alphabet français est composé de 6 voyelles et 20 consonnes, soit au total 26 lettres.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1ere \; position: \\ 1voyelle \end{matrix}}_{6 \; possibilités} \underbrace{et}_{\times} \underbrace{\begin{matrix} 2e \; position: \\ 1consonne \end{matrix}}_{20 \; possibilités} \right) \underbrace{ou}_{+} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1ere \; position: \\ 1consonne \end{matrix}}_{20 \; possibilités} \underbrace{et}_{\times} \underbrace{\begin{matrix} 2e \; position: \\ 1voyelle \end{matrix}}_{6 \; possibilités} \right)$$

$$N = (6 \times 20) + (20 \times 6) = 2 \times (6 \times 20)$$
ou
$$N = (A_6^1 \times A_{20}^1) + (A_{20}^1 \times A_6^1) = 2 \times (6 \times 20)$$
$$N = 240 \;\; \text{mots formés d'1 voyelle et d'1consonne.}$$

Exercice 5- corrigé

Attention :

- ✓ Quand on précise « différents » ou « distincts », il n'y a pas de répétition de chiffres.
- ✓ Quand on ne précise pas « différents » ou « distincts », il y a répétition de chiffres.

Numéro de 5 chiffres commençant par 0 :

$$\underbrace{0 = 1er \; chiffre}_{1 \; possibilité} \; \underbrace{et}_{\times} \; \underbrace{2e \; chiffre}_{\substack{5 \; possibilités \\ de \; 1 \; à \; 5}} \; \underbrace{et}_{\times} \; \underbrace{3e \; chiffre}_{\substack{10 \; possibilités \\ de \; 0 \; à \; 9}} \; \underbrace{et}_{\times} \; \underbrace{4e \; chiffre}_{\substack{10 \; possibilités \\ de \; 0 \; à \; 9}} \; \underbrace{et}_{\times} \; \underbrace{5e \; chiffre}_{\substack{10 \; possibilités \\ de \; 0 \; à \; 9}}$$

$$N = A_1^1 \times A_5^1 \times 10^3 = 3600 \; numéros \; de \; téléphone \; différents.$$

Exercice 6- corrigé

Election de 2 délégués : une personne ne peut être élue aux 2 postes : pas de répétition.

1) Elire 2 délégués parmi 32 élèves, revient à choisir sans répétition 2 élèves parmi 32.

Le nombre de choix possibles = au nombres de combinaisons sans répétition de 2 pris dans 32 ; soit $N = C_{32}^2 = 496 \; choix \; possibles$.

2) Nombre de choix possibles de 2 délégués composé d'un garçon et d'une fille.

Nombre de choix possibles de 2 délégués comprenant 1 garçon et 1 fille est égale au nombre de façons de choisir « un garçon parmi 19 » et « une fille parmi 13 »

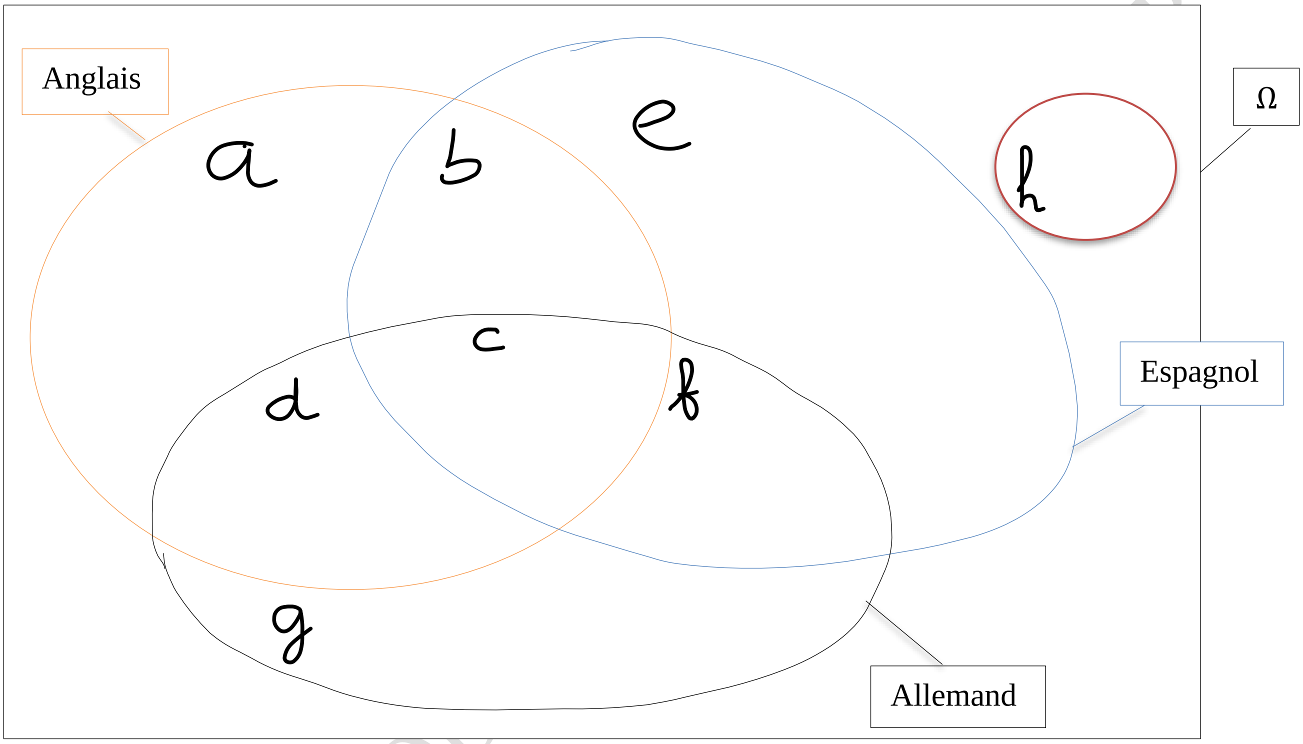
$$\underbrace{choisir \; un \; garçon \; parmi \; 19}_{C_{19}^1} \; \underbrace{et}_{\times} \; \underbrace{une \; fille \; parmi \; 13}_{C_{13}^1}$$
$$N = C_{19}^1 \times C_{13}^1 = 247 \; façons \; de \; choisir \; 2 \; délégués.$$

3) Nombre de choix possibles de 2 délégués qui sont 2 garçons : c'est un choix ou tirage simultané, il n'y a pas de répétition d'une même personne. On a donc une combinaison de 2 garçons choisis simultanément parmi les 19 garçons.

$N = \underbrace{choisir\ 2\ garçons\ parmi\ 19}_{C_{19}^{2}} = N = C_{19}^{2} = 171$ choix possibles.

Exercice 7- corrigé

On sait que (voir diagramme de Venn et formules du cardinal):



Évènements

Soient :	$A \cap E$: Anglais et Espagnol $\longrightarrow card(A \cap E) = 140$
Anglais = A $\longrightarrow$ CardA = 720	$A \cap G$: Anglais et Allemand $\longrightarrow card(A \cap G) = 340$
Espagnol = E $\longrightarrow$ CardE = 250	$E \cap G$: Espagnol et Allemand $\longrightarrow card(E \cap G) = 130$
Allemand = G $\longrightarrow$ CardG = 500	$A \cap E \cap G$: Anglais et Espagnol et Allemand $\longrightarrow card(A \cap E \cap G) = 40$

D'après le diagramme de Venn ci-dessus, on pose les hypothèses suivantes :
Ω = ensemble des étudiants de l'université. ⇒ $Card\Omega$ = 1000 étudiants dans l'université.
a = nombre d'étudiants qui étudient l'anglais seulement ;
g = nombre d'étudiants qui étudient l'allemand seulement ;
e = nombre d'étudiants qui étudient l'espagnol seulement ;
h = nombre d'étudiants qui n'étudient aucune des trois langues ;
c = nombre d'étudiants qui étudient simultanément les 3 langues = 40 ;
b + c = nombre d'étudiants qui étudient l'anglais et l'espagnol = 140 ;
c + d = nombre d'étudiants qui étudient l'anglais et l'allemand = 340 ;
c + f = nombre d'étudiants qui étudient l'espagnol et l'allemand = 130;

$a + b + c + d$ = nombre d'étudiants de l'anglais = 720 ;
$b + c + e + f$ = nombre d'étudiants de l'espagnol = 250 ;
$c + d + f + g$ = nombre d'étudiants de l'allemand = 500 ;
$a + b + c + d + e + f + g + h = nombre\ total\ d'étudiants\ dans\ l'université = 1000$;

$$a + b + c + d + e + f + g + h = Card\Omega = 1000$$

La diagramme de Venn nous permet d'obtenir le système de 8 équations à 8 inconnues (a, b, c, d, e, f, g, h)

$$\begin{cases} a + b + c + d + e + f + g + h = 1000 \\ a + b + c + d = 720 \\ d + c + f + g = 500 \\ b + c + e + f = 250 \\ b + c = 140 \\ d + c = 340 \\ c + f = 130 \\ c = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = 1000 - 280 - 100 - 40 - 300 - 20 - 90 - 70 = 100 \\ a = 720 - 100 - 40 - 300 = 280 \\ g = 500 - 300 - 40 - 90 = 70 \\ e = 250 - b - c - f = 250 - 100 - 40 - 90 = 20 \\ b = 140 - c = 140 - 40 = 100 \\ d = 340 - c = 340 - 40 = 300 \\ f = 130 - c = 130 - 40 = 90 \\ c = 40 \end{cases}$$

Solution : a = Anglais uniquement = 280 ; g = l'Allemand uniquement = 70 ;
e=l'Espagnol uniquement = 20;
h = Aucune des trois langues = 100.

Exercice 8- corrigé

Une anagramme est un mot obtenu par la permutation d'un ensemble fini de lettres.
Le nombre d'anagrammes possible est égal au nombre de permutations possibles des lettres d'un mot.

1) Le nombre d'anagrammes de MATHS = nombre de permutations possibles des 5 lettres du mot MATHS : $N = 5! = 120\ anagrammes\ possibles.$
2) Le nombre d'anagrammes de PATRICE = nombre de permutations possibles des 7 lettres du mot PATRICE : $N = 7! = 5040\ \ anagrammes\ possibles.$
3) Le nombre d'anagrammes de STATISTIQUE = nombre de permutations possibles des 11 lettres du mot STATISTIQUE avec répétition des lettres S, T, I :
Nombre de permutations avec répétitions

$$STATISTIQUE \begin{cases} S\ est\ repétée\ 2\ fois \\ T\ est\ repétée\ 3\ fois \\ A\ est\ repétée\ 1\ fois \\ I\ est\ repétée\ 2\ fois \\ Q\ est\ repétée\ 1\ fois \\ U\ est\ repétée\ 1\ fois \\ E\ est\ repétée\ 1\ fois \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = \dfrac{11!}{2!\,3!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!} = \cdots anagrammes \\ avec\ 2+3+1+2+1+1+1 = 11 \end{cases}$$

$$N = \frac{11!}{2!\,3!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 1663200\ anagrammes$$

Exercice 9- corrigé

8 pièces de type A vendues 8 00 F l'unité
7 pièces de type B vendues 6 00 F l'unité
6 pièces de type C vendues 5 00 F l'unité
5 pièces de type D vendues 4 00 F l'unité

Au total 26 pièces

a) Le nombre de manières distinctes de lots de 4 pièces ayant au moins une pièce A :
Réponse : $N = C_{26}^{4} - C_{18}^{4} = 11890$ lots distincts de 4 pièces ayant au moins une pièce A.

Explication - NB : Manières « distinctes » = sans répétition de lot.
Evènements :

- ✓ A : « les lots distincts de 4 pièces ayant au moins une pièce A » $\Longrightarrow$ le nombre de lots distincts de 4 pièces ayant au moins une pièce A : $cardA$.
- ✓ $\bar{A}$: « les lots distincts de 4 pièces sans aucune pièce A » $\Longrightarrow$ le nombre de lots distincts de 4 pièces sans aucune pièce A : $card\bar{A}$.
- ✓ Ω : « les lots distincts de 4 pièces» $\Longrightarrow$ le nombre de lots distincts de 4 pièces : $card\Omega$.

Rappel de formules sur les cardinaux:

$$\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} card(A \cap \bar{A}) = card\emptyset = 0 & (1) \\ card(A \cup \bar{A}) = cardA + card\bar{A} = card\Omega & (2) \\ \Longrightarrow cardA = card\Omega - card\bar{A} & (3) \end{cases}$$

D'après la relation (3) ci-dessus, on a :

$$cardA = card\Omega - card\bar{A}$$

Il nous suffit de calculer $card\Omega$ et $card\bar{A}$ pour résoudre la question a)

- ✓ $card\Omega$ = nombre de lots distincts de 4 pièces choisis parmi 26 = combinaisons sans répétition de 4 pièces choisis parmi 26 = $card\Omega = C_{26}^{4}$= 14950.
  NB : l'ordre des 4 pièces n'a aucune importance d'où le choix de combinaisons au lieu d'arrangements.
- ✓ $card\bar{A}$ = nombre de lots distincts de 4 pièces choisis parmi les 18 pièces ne contenant pas A = combinaisons sans répétition de 4 pièces choisis parmi 18 (26 pièces moins les 8 pièces A) = $card\bar{A} = C_{26-8}^{4} = C_{18}^{4}$ = 3060.

- ✓ Et donc $\Longrightarrow card\text{A}$ = nombre de lots distincts de 4 pièces ayant au moins une pièce A : $N = card\text{A} = card\Omega - card\bar{A} = C_{26}^{4} - C_{18}^{4}$ = 14950 – 3060 = 11890 lots distincts de 4 pièces ayant au moins une pièce A.

Autre méthode

Nombre de lots distincts de 4 pièces contenant au moins une pièce A est égal à :

Nombre de lots distincts de 4 pièces contenant 1 pièce A : $C_8^1 \times C_{26-8}^{4-1} = C_8^1 \times C_{18}^3 = 6528$

$$+$$

Nombre de lots distincts de 4 pièces contenant 2 pièce A : $C_8^2 \times C_{26-8}^{4-2} = C_8^2 \times C_{18}^2 = 4284$

$$+$$

Nombre de lots distincts de 4 pièces contenant 3 pièce A : $C_8^3 \times C_{26-8}^{4-3} = C_8^3 \times C_{18}^1 = 1008$

$$+$$

Nombre de lots distincts de 4 pièces contenant 4 pièce A : $C_8^4 \times C_{26-8}^{4-4} = C_8^4 \times C_{18}^0 = 70$

$$N = 6528 + 4284 + 1008 + 70 = 11890$$

b) 1 lot de 4 pièces ayant au moins une pièce de type A et au moins une pièce de type B ?

Réponse : $N = card(A \cap B) = C_{26}^4 - [C_{18}^4 + C_{19}^4 - C_{11}^4] = 14950 - 6606 = 8344$ lots de 4 pièces ayant au moins 1 pièce A et au moins 1 pièce B.

Explication

Evènements :

- ✓ Ω : « les lots distincts de 4 pièces» $\Longrightarrow card\Omega$.
- ✓ A : « les lots distincts de 4 pièces ayant au moins une pièce A » $\Longrightarrow card\text{A}$.
- ✓ $\bar{A}$: « les lots distincts de 4 pièces n'ayant aucune pièce A » $\Longrightarrow card\bar{A}$.
- ✓ B : « les lots distincts de 4 pièces ayant au moins une pièce B » $\Longrightarrow card\text{B}$.
- ✓ $\bar{B}$: « les lots distincts de 4 pièces n'ayant aucune pièce B » $\Longrightarrow card\bar{B}$.

$A \cap B$: Lot avec $\underbrace{au\ moins\ une\ pièce\ de\ type\ A}_{A}\ \underbrace{et}_{\cap}\ \underbrace{au\ moins\ une\ pièce\ de\ type\ B}_{B}$

$\Rightarrow card(A \cap B)$ = nombre de lots de 4 pièces distinctes ayant au moins 1 pièce A et au moins 1 pièce B.

On sait que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, (voir CM de statistique mathématique L2).

$\bar{A} \cup \bar{B}$: Lot sans $\underbrace{aucune\ pièce\ de\ type\ A}_{\bar{A}}\ \underbrace{ou}_{\cup}\ sans\ \underbrace{aucune\ pièce\ de\ type\ B}_{\bar{B}}$

$\Rightarrow card(\overline{A \cap B}) = card(\bar{A} \cup \bar{B})$ = nombre de lots de 4 pièces sans aucune pièce A ou sans aucune pièce B.

$$\begin{cases} \text{Rappel formule (voir CM cours statistique mathématique)} \\ (A \cap B) \cap (\overline{A \cap B}) = \emptyset \\ (A \cap B) \cup (\overline{A \cap B}) = \Omega \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} card[(A\cap B)\cap(\overline{A\cap B})] = card\emptyset = 0 & (1) \\ card[(A\cap B)\cup \overline{A\cap B}] = card\Omega & (2) \\ (1)\ et\ (2) \Rightarrow card(A\cap B) + card(\overline{A\cap B}) = card\Omega & (3) \\ (3) \quad\quad \Rightarrow card(A\cap B) = card\Omega - card(\overline{A\cap B}) & (4) \\ \overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B} \Rightarrow card(A\cap B) = card\Omega - card(\bar{A}\cup\bar{B}) & (5) \\ \Rightarrow card(A\cap B) = card\Omega - [card\bar{A} + card\bar{B} - card(\bar{A}\cap\bar{B})] & (6) \end{cases}$$

$\Rightarrow card(A\cap B)$ = nombre de lots de 4 pièces ayant au moins 1 pièce A et au moins 1 pièce B.

$$\Leftrightarrow card(A\cap B) = card\Omega - [card\bar{A} + card\bar{B} - card(\bar{A}\cap\bar{B})] \quad (6)$$

$card(\Omega)$ = nombre de lots de 4 pièces : C_{26}^4
$(\bar{A})$ = nombre de lots de 4 pièces sans aucune pièce pièce A : $C_{26-8}^4 = C_{18}^4$
$card(\bar{B})$ = nombre de lots de 4 pièces sans aucune pièce pièce B : $C_{26-7}^4 = C_{19}^4$
$card(\bar{A}\cap\bar{B})$ = nombre de lots de 4 pièces sans aucune pièce A et sans aucune pièce B : $C_{26-(8+7)}^4 = C_{11}^4$
$\Rightarrow card(A\cap B)$ = nombre de lots de 4 pièces ayant au moins 1 pièce A et au moins 1 pièce B.

$$\Leftrightarrow card(A\cap B) = card\Omega - [card\bar{A} + card\bar{B} - card(\bar{A}\cap\bar{B})] \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow card(A\cap B) = C_{26}^4 - \left[C_{18}^4 + C_{26-7}^4 - C_{26-(8+7)}^4\right]$$

$N = card(A\cap B) = C_{26}^4 - [C_{18}^4 + C_{19}^4 - C_{11}^4] = 14950 - 6606 = 8344$ lots de 4 pièces ayant au moins 1 pièce A et au moins 1 pièce B.

c) Un lot de 4 pièces ayant au-moins une pièce A, au-moins une pièce B et au-moins une pièce C ?

Réponse

Evènements :

- ✓ Ω : « les lots de 4 pièces » $\Longrightarrow card\Omega$.
- ✓ A : « les lots de 4 pièces ayant au moins une pièce A » $\Longrightarrow card$A.
- ✓ $\bar{A}$: « les lots de 4 pièces n'ayant aucune pièce A » $\Longrightarrow card\bar{A}$.
- ✓ B : « les lots de 4 pièces ayant au moins une pièce B » $\Longrightarrow card$B.
- ✓ $\bar{B}$: « les lots de 4 pièces n'ayant aucune pièce B » $\Longrightarrow card\bar{B}$.
- ✓ C : « les lots de 4 pièces ayant au moins une pièce C » $\Longrightarrow card$C.
- ✓ $\bar{C}$: « les lots de 4 pièces n'ayant aucune pièce C » $\Longrightarrow card\bar{C}$.

On montre que :

$$card(A\cap B\cap C) = card\Omega - card(\overline{A\cap B\cap C})$$
$$card(A\cap B\cap C) = card\Omega - card(\overline{A\cap B\cap C})$$
$$card(A\cap B\cap C) = card\Omega - card(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})$$

Or

$$card(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}) = card\bar{A} + card\bar{B} + card\bar{C} - card(\bar{A}\cap\bar{B}) - card(\bar{A}\cap\bar{C}) - card(\bar{B}\cap\bar{C}) + card(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$$

$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$: lots de 4 pièces n'ayant aucune pièce A ou n'ayant aucune pièce B ou n'ayant aucune pièce C.

$\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$: lots de 4 pièces n'ayant aucune pièce A et n'ayant aucune pièce B et n'ayant aucune pièce C. $\Rightarrow card(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = C_{26-8-7-6}^4$

$\bar{A} \cap \bar{B}$: lots de 4 pièces n'ayant aucune pièce A et n'ayant aucune pièce B. $\Rightarrow card(\bar{A} \cap \bar{B}) = C_{26-8-7}^{4}$
$\bar{A} \cap \bar{C}$: lots de 4 pièces n'ayant aucune pièce A et n'ayant aucune pièce C. $\Rightarrow card(\bar{A} \cap \bar{C}) = C_{26-8-6}^{4}$
$\bar{B} \cap \bar{C}$: lots de 4 pièces n'ayant aucune pièce B et n'ayant aucune pièce C. $\Rightarrow card(\bar{B} \cap \bar{C}) = C_{26-7-6}^{4}$
$\bar{A}$: lots de 4 pièces distinctes n'ayant aucune pièce A. $\Rightarrow card(\bar{A}) = C_{26-8}^{4}$
$\bar{B}$: lots de 4 pièces distinctes n'ayant aucune pièce B. $\Rightarrow card(\bar{B}) = C_{26-7}^{4}$
$\bar{C}$: lots de 4 pièces distinctes n'ayant aucune pièce C. $\Rightarrow card(\bar{C}) = C_{26-6}^{4}$
D'où :

$$card(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = C_{26-8}^{4} + C_{26-7}^{4} + C_{26-6}^{4} - C_{26-8-7}^{4} - C_{26-8-6}^{4} - C_{26-7-6}^{4} + C_{26-8-7-6}^{4}$$

$$card(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = C_{18}^{4} + C_{19}^{4} + C_{20}^{4} - C_{11}^{4} - C_{12}^{4} - C_{13}^{4} + C_{5}^{4} = 3060 + 3876 + 4845 - 330 - 495 - 715 + 5 = 10246$$

$$card(\overline{A \cap B \cap C}) = card(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

$\Rightarrow N = card(A \cap B \cap C) = card\Omega - card(\overline{A \cap B \cap C}) = 14950 - 10246 = 4704$ lots de 4 pièces ayant au moins une pièce A et ayant au moins une pièce B et ayant au moins une pièce C.

Autre méthode ?

1pièce A et 1pièce B et 1pièce C et 1 pièce D : $n_1 = C_8^1 \times C_7^1 \times C_6^1 \times C_5^1$

ou

2pièces A et 1pièce B et 1pièce C : $n_2 = C_8^2 \times C_7^1 \times C_6^1$

ou

1pièce A et 2pièces B et 1pièce C : $n_3 = C_8^1 \times C_7^2 \times C_6^1$

ou

1pièce A et 1pièce B et 2pièces C: $n_4 = C_8^1 \times C_7^1 \times C_6^2$

Soit au total : …

d) 1 lot de 3 pièces dont le prix est égal à 1 800F ?

Faire un lot de 3 pièces dont le prix est égal à 1 800F revient à :

- ✓ Choisir 1 pièce A parmi 8 et 1 pièce B parmi 7 et 1 pièce D parmi 5 ;

Soit $N_1 = C_8^1 \times C_7^1 \times C_5^1 =$ lot de 3 pièces dont le prix est égal à 1800 F.

ou

- ✓ Choisir 2 pièces C parmi 6 et 1 pièce A parmi 8 ;

Soit $N_2 = C_6^2 \times C_8^1 =$ lot de 3 pièces dont le prix est égal à 1800 F.

ou

- ✓ Choisir 3 pièces B parmi 7 ;

Soit $N_3 = C_7^3 =$ lot de 3 pièces dont le prix est égal à 1800 F.

Au total on obtient $N = N_1 + N_2 + N_3 = (C_8^1 \times C_7^1 \times C_5^1) + (C_6^2 \times C_8^1) + C_7^3 = 435$ lots de trois pièces dont le prix est égal à 1800 F.

e) 1 lot de 3 pièces dont le prix soit inférieur à 1400F ?

Faire un lot de 3 pièces distinctes dont le prix soit inférieur à 1400F revient à :

- ✓ Choisir 3 pièces D parmi 5 ; $N_1 = C_5^3$

Soit $N_1 = C_5^3 = 10$ lots de 3 pièces distinctes dont le prix est inférieur à 1400 F.

ou

- ✓ Choisir 2 pièces D parmi 5 et 1 pièce C parmi 6 ;

Soit $N_2 = C_5^2 \times C_6^1 = 60$ lots de 3 pièces distinctes dont le prix est inférieur à 1400 F.

Ou

- ✓ Choisir 2 pièces D parmi 5 et 1 pièce B parmi 7 ;

Soit $N_3 = C_5^2 \times C_7^1 = 70$ lots de 3 pièces distinctes dont le prix est inférieur à 1400 F.

Ou

- ✓ Choisir 2 pièces C parmi 6 et 1 pièce D parmi 5 ;

Soit $N_4 = C_6^2 \times C_5^1 = 75$ lots de 3 pièces distinctes dont le prix est inférieur à 1400 F.

Au total on obtient $N = 75 + 70 + 60 + 10 = 215$ lots de trois pièces distinctes dont le prix est inférieur à 1400 F.

Exercice 10- corrigé

Rappel :

Formule du Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \, a^{n-p} b^p \qquad (1)$$

Formule du triangle de Pascal : pour obtenir les coefficients du binôme de Newton

Formule : $\quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p \quad (2)$

Coefficients du binôme de Newton

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$$(1\,;1) \Rightarrow (a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(1;\ 2;\ 1) \Rightarrow (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(1;\ 3;\ 3;\ 1) \Rightarrow (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(1;\ 4;\ 6;\ 4; 1) \Rightarrow (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

a) Montrer que

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p = 2^n$$

La formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \, a^{n-p} b^p$$

$$\Rightarrow pour\ a = b = 1, on\ a\text{:}\ (1+1)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \, 1^{n-p} 1^p \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (1+1)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \, 1^{n-p} 1^p \Rightarrow 2^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p = 2^n$$

a) Montrer que

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k-1)!}$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k}\right]$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left[\frac{k+(n-k)}{k(n-k)}\right]$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left[\frac{n}{k(n-k)}\right]$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)(n-k-1)!}$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$

Autre expression

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$