FORMES QUADRATIQUES

Forme bilinéaire

Exemple:

$$Cov(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = E\left\{\left[X - E(x)\right]\left[Y - E(Y)\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

On montre que $Cov(\alpha X + \beta Y, \gamma Z + \delta W)$
$$= \alpha\gamma Cov(X,Z) + \alpha\delta Cov(X,W) + \beta\gamma Cov(Y,Z) + \beta\delta Cov(Y,W)$$

En fait,
$$Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$$
$$Cov(\alpha X, Y) = \alpha Cov(\mathrm{X}, Y)$$
D'où Cov est linéaire à gauche.

De même,
$$Cov(X,\mathrm{Y}+Z) = Cov(X,\mathrm{Y}) + Cov(Y,Z)$$
$$Cov(X,\alpha Y) = \alpha Cov(\mathrm{X},Y)$$
D'où Cov est linéaire à droite.

Cov est un opérateur bilinéaire.

Exemples: Forme quadratique

1. $q(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2 = q(x)$ *où* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Il y a des termes rectangulaires ($5x_1x_2$) et des termes carrés ($3x_1^2$ et x_2^2). Géométriquement, c'est la somme des aires de carrés et de rectangles.

2.

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_1x_2 - 3x_1x_3 + 8x_2x_3 + 6x_2^2 - x_3^2 = q(x)$$

$$avec \ \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ecriture matricielle :

$$q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$$

Remarque :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'x = x_1^2 + x_2^2$$

Donc,

$$q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$$

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'Ax$$

$$avec \ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$On \ pouvait \ aussi \ avoir \ A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Autre exemple :

$$q(x) = x_1^2 - 5x_1x_2 - 3x_1x_3 + 8x_2x_3 + 6x_2^2 - x_3^2$$

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 & -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 & -4x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(x_1 - 2x_2 + x_3) + x_2(-3x_1 + 6x_2 + 4x_3) + x_3(-4x_1 + 4x_2 - x_3)$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$$

$$= x_1^2 - 5x_1x_2 - 3x_1x_3 + 8x_2x_3 + 6x_2^2 - x_3^2$$

$$q(x) = x'Ax$$

$$avec\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Forme quadratique définie et semi-définie positive

Exemples :

$$q_1(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 > 0 \quad \forall x \in R^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

q_1 *est définie positive.*

$$q_2(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 \geq 0$$

$Si\ x_1 = -2x_2,\ alors\ q_2(x) = 0$

$$\forall x \in R^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} tel\ que\ q_2(x) = 0$$

q_2 *est semi − définie positive.*

La matrice de la forme quadratique sera dite définie positive ou semi-définie positive si elle est associée à une forme quadratique qui est elle-même définie positive ou semi-définie positive, respectivement.

Forme quadratique définie et semi-définie positive

Une forme quadratique *q* (ou toute matrice associée) sera dite définie négative (ou semi-définie négative) si son opposée (-*q*) est définie positive (ou semi-définie positive) respectivement.

Fonctions à plusieurs variables

$$f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 12x_1x_2^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 6x_2 + 12x_2^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1 + 36x_1x_2^2$$

Différentielle totale exacte :

On pose $f\left(x_1, x_2\right) = k =$ constante (une courbe de niveau), ex: la courbe d'indifférence.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = dk$$

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad car \;\; k = cst$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \text{pente de la courbe de niveau f}$$

Si $f = U$ (une fonction d'utilité), alors

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = TMS_{1et2}$$

Rappel :

$$y = f\left(x\right)$$

$$dy = df\left(x\right) = f'\left(x\right)dx$$

D'où la notation

$$\frac{dy}{dx} = f'\left(x\right)$$

En économie,

$$y = f\left(x\right)$$

$\Delta y = y_2 - y_1$ Si la variation est infinitésimale, on aura $\Delta y \simeq dy$

$\Delta x = x_2 - x_1$ Si la variation est infinitésimale, on aura $\Delta x \simeq dx$

$$pente = \frac{dy}{dx} = f'\left(x\right) \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}$$