UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN
UFR DES SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION – LICENCE 2 -
STATISTIQUES ET PROBABILITES / Année Universitaire 2021-2022
UE 1. ECUE 2. Statistique mathématique T D - 2h00 min TD 4-LOIS DISCRETES ET CONTINUES

Exercice 1 –On modélise la durée de vie d'un appareil, en années, par une loi exponentielle de paramètre α=1/2.

a) Exprimer la fonction densité de probabilité de la loi et la fonction de répartition
b) Quelle est la durée de vie moyenne ?
c) Calculer la probabilité que l'appareil dure :
   - Plus de 6 mois
   - Mois de trois mois
   - Entre 3 et 6 mois
d) On constate, un an après sa mise en service, qu'un appareil fonctionne. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 6 mois ?
e) Quelle est la probabilité que la durée de vie appartienne à l'intervalle : [E(X)-α ; E(X)+α]
f) Pendant combien de temps, 50% des disques durs fonctionnent-ils sans défaillance ?

SOLUTION

a) Soit X la durée de vie de l'appareil. X suit une loi exponentielle de paramètre α =2. On a :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Et la fonction de répartition est : $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

b) Durée moyenne de vie : on calcule l'espérance mathématique de X. E(X) = 2. Soit 2 ans de durée de vie moyenne

c) Calculs :
   - Probabilité que l'appareil fonctionne plus de 6 mois, soit 0,5 an ; $P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \leq 0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 1 + e^{-\frac{0{,}5}{2}} = 0{,}7788$.

   77,88 des appareils ont une durée de vie supérieure à 6 mois.-
   - Probabilité que l'appareil fonctionne moins de 3 mois, soit 0,25 an

   $P(X < 0{,}25) = P(X \leq 0{,}25) = F(0{,}25) = 1 - e^{-\frac{0{,}25}{2}} = 1 - 0{,}8825 = 0{,}1175$

   11,75 % des appareils fonctionnent mois de 3 mois.

   Probabilité que l'appareil fonctionne entre 3 mois et 6 mois

$$P(0{,}25 < X < 0{,}5) = P(X < 0{,}5) - F(0{,}25) = F(0{,}5) - F(0{,}25)$$
$$= (1 - e^{-\frac{0{,}5}{2}}) - (1 - e^{-\frac{0{,}125}{2}}) =$$
$$= e^{-\frac{0{,}125}{2}} - e^{-\frac{0{,}5}{2}} = 0{,}8825 - 0{,}7788 = 0{,}1037$$

   10,37% des appareils fonctionnent entre 3 et 6 mois. Probabilité qu'il fonctionne encore 6 mois sachant qu'il a déjà fonctionné 1 an.

$$P(X \geq 1{,}5 / X \geq 1) = \frac{P(X \geq 1{,}5 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 1{,}5)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - F(1{,}5)}{1 - F(1)} = \frac{e^{-\frac{1{,}5}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{0{,}5}{2}} = 0{,}7788$$

77,88% des appareils ayant fonctionné 1 an peuvent fonctionner encore 6 mois.

Exercice 2 – 1° On suppose que X suit une loi normale centrée réduite.

a) Déterminer P(X<0,3) ; P(X<-1,1) ; P(X>0,4) ; P(X>-0,7) ; P(-0,2<X<1,1) ; P(0,8<X<1,4)
b) Trouver λ tels que : P(X<λ)=0,3 ;P(X<λ)=0,8 ; P(X>λ)=0,1 ; P(X>λ)=0,6 ;P(-λ<X<λ)=0,8

2°) X suit une loi N (5 ; 3).

a) Déterminer P(X<6) ; P(X>7) ; P(1<X<4) ; P(7<X<9) ;
b) Trouver λ tels que : P(X<5-λ)=0,3 ; P(X<λ)=0,8 ; P(X>5+λ)=0,1 ; P(5-λ<X<5+λ)=0,8

SOLUTION

Lecture de la table de la LOI NORAMALE CENTREE REDUITE

1) X suit une loi N (0 ; 1)
   a. P(X<0,3)= **0,6179** ; **P(X<-1,1)= 0,1357** ; **P(X>0,4)= 0,3446** ; P(X>-0,7)=0,7580 ; **P(-0,2<X<1,1)=0,4436** ; **P(0,8<X<1,4)=0,1311**

   b. P(X<λ)=0,3 d'où **λ=-0,5244 ;** P(X<λ)=0,8 d'où **λ= 0,8418 ;** P(X>λ)=0,1 d'où **λ= 1,2817 ;** P(-λ<X<λ)=0,8 d'où **λ**=1,2817

2) X suit une loi N (5 ; 3)
   a. P(X<6)=0,5438 ; P(X>7) = 0 ,4129; P(1<X<4)=0,1262 ; P(7<X<9) =0,0829
   b. P(X<5-λ)=0,3 d'où λ =4,7197 ; P(X<λ)=0,8 d'où λ =12,5762 ; P(X>5+λ)=0,1 d'où λ =11,5344 ; P(5-λ<X<5+λ)=0,8 d'où λ =11,5353

Exercice 3

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières d'une certaine race peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart type $\sigma = 400$.

1) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.

2) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5800 et 6100 litres de lait par an.

3) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6100 litres par an.

4) On sélectionne un échantillon aléatoire de 10 vaches laitières. Soit la variable aléatoire Y telle que : Y="nombres de vaches produisant moins de 5800 litres par an".

   a. Indiquer la loi de probabilité de Y.
   b. Calculer la probabilité que deux de ces 10 vaches laitières produisent moins de 5800 litres par an ?

Solution

1) La probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.

X = La production laitière annuelle en litres (en litres). $X \backsim \mathcal{N}(\mu = 6000;\ \sigma = 400)$: X suit la loi normale de moyenne $\mu = 6000$ euros et d'écart-type :$\sigma = 400$ euros.

Changement de variable : $X \backsim \mathcal{N}(m;\ \sigma) \Rightarrow U = \frac{X-m}{\sigma} \backsim \mathcal{N}(0;1) \Rightarrow P(X \leq x) = \prod\left(\frac{x-6000}{400}\right)$

$P(X \leq 5800) = P(X \leq 5800) = \prod\left(\frac{5800-6000}{400}\right) = \prod(-0{,}5) = 1 - \prod(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$. Soit 30,85% de chances qu'une vache de cette race produise moins de 5800 litres par an.

2) La probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5800 et 6100 litres de lait par an.

$P(5800 \leq X \leq 6100) = \prod\left(\frac{6100-6000}{400}\right) - \prod\left(\frac{5800-6000}{400}\right) = \prod(0{,}25) - \prod(-0{,}5)$

$P(5800 \leq X \leq 6100) = \prod(0{,}25) - [1 - \prod(0{,}5)] = \prod(0{,}25) + \prod(0{,}5) - 1$

$P(5800 \leq X \leq 6100) = 0{,}5987 + 0{,}6915 - 1 = 0{,}2902$

Soit 29,02% de chances d'avoir une vache produisant entre 5800 et 6100 litres de lait par an.

3) La probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6100 litres par an.

$P(X > 6100) = 1 - P(X \leq 6100) = 1 - \prod\left(\frac{6100-6000}{400}\right) = 1 - \prod(0{,}25) = 1 - 0{,}5987$
$P(X > 6250) = 0{,}4013$
Soit 40,13% de chances qu'une vache produise plus de 6100 litres par an.

4) A. la loi de probabilité de Y

✓ Y="nombres de vaches produisant moins de 5800 litres par an" suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3085 = P(Succès)$. Soit $Y \leadsto \mathcal{B}(n = 10;\ p = 0{,}3085)$ avec :

$Y(\Omega) = \{0; 1; 2;\ \ldots;\ 10\}$ et $P(Y = y) = C_n^y p^y q^{n-y}$
Pour $n = 10;\ p = 0{,}3085;\ q = 1 - p = 1 - 0{,}3085 = 0{,}6915$
$\Rightarrow P(Y = y) = C_{10}^y (0{,}3085)^y (0{,}6915)^{10-y}$

B. La probabilité d'avoir deux vaches produisant moins de 5800 litres par an
$P(Y = 2) = C_{10}^2 (0{,}3085)^2 (0{,}6915)^8 = 0{,}2239$

Soit 22,39% de chances d'avoir deux vaches produisant chacune moins de 5800 litres par an.