TD 2. Axiomes des probabilités ; Dénombrements CORRIGES

Exercice 1 - a. Démontrer que $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

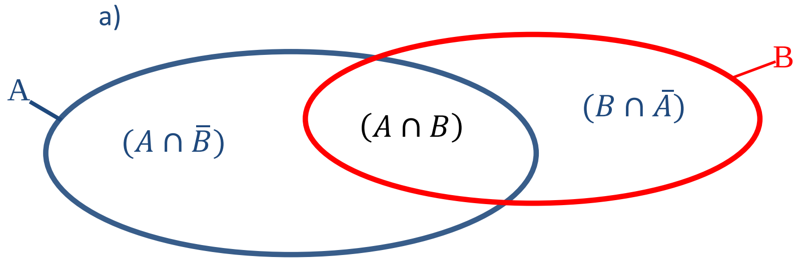
b. On donne les 3 événements A, B et C et tels que :

$$P(A) = \frac{3}{8}\ , P(B) = \frac{1}{2}\ , P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Calculer $P(A \cup B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(A/B)$ et $P(B/A)$

*Solution

a)



$$(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) = A \cup B \quad (1)$$

$$et\ (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset \quad (2)$$

$$de\ (1)\ et\ (2)\ on\ tire \Longrightarrow P(A \cup B) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})]$$

$$soit\quad P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) \quad (3)$$

On sait que : $\begin{cases} P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)\ (4) \\ \qquad et \\ P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)\ (5) \end{cases}$

On remplace (4) et (5) dans (3) $P(A \cup B)$ et on obtient :

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A \cap \bar{B})}_{P(A)-P(A\cap B)} + P(A \cap B) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{P(B)-P(A\cap B)} \quad (3)$$

$$Soit\quad P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ce qui donne : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) $P(A \cup B) = \frac{5}{8}; P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{8}; P(^A/_B) = \frac{1}{2}; P(^B/_A) = \frac{2}{3}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Exercice 2 - a. Démontrer la première loi de distribution : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b. Etablir que pour deux ensembles A et B quelconques : $(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = A$

a) Nous avons $A \cap (B \cup C) = \{x | x \in A\ et\ x \in (B \cup C)\}$

$$=\{x | x \in A\ et\ x \in B\ ou\ x \in C\}$$

$$=\{x | (x \in A\ et\ x \in B)\ ou\ (x \in A\ et\ x \in C)\}$$

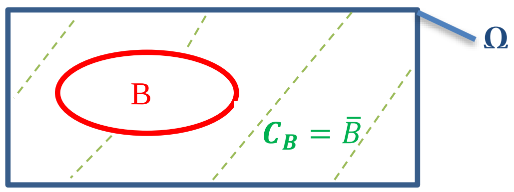
$$=\{x | x \in (A \cap B\ )\ ou\ x \in (A \cap C)\}$$

$$=\{x | x \in (A \cap B\ ) \cup (A \cap C)\}$$

$$d'où\ \ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

b) **Méthode 1.** Montrer que $(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = A$

Dans la question précédente (a), on a montré que $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$



C_B: complémentaire de B dans Ω

$B \cup C_B = \Omega \Leftrightarrow B \cup \bar{B} = \Omega$

Posons que $C = C_B$. On obtient :

$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = A \cap (B \cup C_B)$

$or\ B \cup C_B = \Omega$

$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C_B) = A \cap \Omega$

$or\ A \cap \Omega = \mathrm{A}$

$donc\ (A \cap B) \cup (A \cap C_B) = A$

Méthode 2 : Montrer que $(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = A$

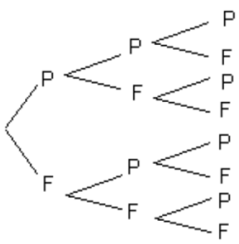
On sait que $A = \{x | x \in A\}$

$$et\ (A \cap B) \cup (A \cap C_B) = \{x | x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in (A \cap C_B)\}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = \{x | (x \in A\ et\ x \in B)\ ou\ (x \in A\ et\ x \in C_B)\}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = \{x | x \in A\ et\ x \in B\ ou\ x \in A\ et\ x \in C_B\}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = \{x | x \in A\ et\ x \in B\ ou\ \ x \in C_B\}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = \{x | x \in A\ et\ x \in (B \cup C_B)\}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = \{x | x \in A\ et\ x \in \Omega\}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = \{x | x \in (A \cap \Omega)\}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = \{x | x \in A\}$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C_B) = A$$

<u>Exercice 3</u> - Considérer l'expérience qui consiste à lancer trois (3) fois une pièce de monnaie.

a. Construire le diagramme arborescent de l'expérience
b. Enumérer les résultats possibles de l'expérience (ensemble des résultats possibles) ;

a)



b) Ensemble des résultats possibles :

$\Omega = \{(P, P, P); (P, P, F); (P, F, P); (P, F, F); (F, P, P), (F, P, F), (F, F, P); (F, F, F)\}$

<u>Exercice 4</u> - On doit ranger sur une étagère 4 ouvrages de mathématiques différents, 6 ouvrages différents de physique et 2 livres de chimie différents. Combien y-a-t-il de rangements différents si :

a. Les ouvrages doivent être rangés par spécialité ?
b. Seuls les ouvrages de mathématiques doivent être rangés ensemble ?

⁎Solution

a. Les ouvrages doivent être rangés par spécialité

Les livres de Mathématiques peuvent être rangés ensemble : $N_M = P_4^4 = 4!$ façons différentes ; les livres de Physique $N_P = P_6^6 = 6!$ et les livres de Chimie : $N_C = P_2^2 = 2!$ et les trois groupes de $N_G = P_3^3 = 3!$ façons différentes.

Au total, le nombre de rangements est $N = 4! \times 6! \times 2! \times 3! = 207\ 360$

b. Seuls les ouvrages de mathématiques doivent être rangés ensemble

⁎Solution

Considérons les ouvrages de Mathématiques comme un seul gros livre. Nous avons, alors, 9 livres qui peuvent être rangés de $P_9^9 = 9!$ façons différentes où les livres de Maths sont tous ensemble.

Mais, ceux-ci peuvent être eux-mêmes ordonnés entre eux de $N_M = P_4^4 = 4!$. Par conséquent :

Le nombre de rangements est $N = 9! \times 4! = 8\ 709\ 120$.

Exercice 5 - En supposant que les répétitions de lettres ou de chiffres sur la même plaque sont exclues, combien de numéros d'immatriculations commençant par 2 lettres et se terminant par 5 chiffres peut-on former ?

Réponse	a) 5 040	b) 27 852 000	c) 19 656 000	d) 21	e) Autre préciser

Nombre de numéros d'immatriculations sans répétition de lettres et de chiffres = nombre d'arrangements sans répétition. $N = A_{26}^2 \times A_{10}^5 = 19656000$ numéros. Réponse c.

Exercice 6- 20 chevaux participant à une course. On appelle tiercé, les 3 chevaux gagnants. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?

Réponse	a) 6	b) 6840	c) 1140	d) 3^{20}	e) Autre à préciser

Nombre de tiercés dans l'ordre = nombre d'arrangements sans répétition. $N = A_{20}^3 = 6840$ tiercés dans l'ordre. Réponse b.

Exercice 7 - Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Réponse	a) 160	b) 460	c) 142	d) 430	e) Autre préciser

Nombre de femmes célibataires non syndiquées : $card(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$

Evènements et cardinaux:

Ω=ensemble des employés de l'entreprise (univers) et $card\Omega = N_\Omega = 800$;

H=homme et cardH= $N_{\mathrm{H}} = 300$; $\overline{H}$= femme

S= syndiqué et cardS= $N_{\mathrm{S}} = 352$; $\overline{S}$= non syndiqué

M= marié et cardM= $N_{\mathrm{M}} = 424$; $\overline{M}$= célibataire

$H \cap S$=homme syndiqué et card$(H \cap S)$= $N_{\mathrm{H\cap S}} = 188$;

$H \cap M$=homme marié et card$(H \cap M)$= $N_{\mathrm{H\cap M}} = 166$;

$M \cap S$=marié syndiqué et card$(M \cap S)$= $N_{\mathrm{M\cap S}} = 208$;

$H \cap M \cap S$=homme marié syndiqué et card$(H \cap M \cap S)$ = $N_{\mathrm{H\cap M\cap S}} = 144$;

$\overline{H \cup M \cup S} = \overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}$=femme célibataire non syndiquée et

On cherche card$(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$= $N_{\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S}}$ = nombre de femmes célibataires non syndiquées

On sait que : $\Omega = (H \cup M \cup S) \cup (\underbrace{\overline{H \cup M \cup S}}_{\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S}})$ soit $\Omega = (H \cup M \cup S) \cup (\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$

$\Rightarrow card\Omega = card(H \cup M \cup S) + card(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$ **(1)**

Le nombre de femmes célibataires non syndiquées est $card(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S})$

de **(1)** *on tire* $card(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = card\Omega - card(H \cup M \cup S)$

Or

$card(H \cup M \cup S) = cardH + cardM + cardS - card(H \cap M) - card(H \cap S) - card(M \cap S) + card(H \cap M \cap S)$

$card(H \cup M \cup S) = 300 + 424 + 352 - 166 - 188 - 208 + 144 = 658$

On obtient : $card(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}) = card\Omega - card(H \cup M \cup S)$ = 800-658 =142 femmes célibataires non syndiquées. Réponse c.