UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN
UFR DES SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION – LICENCE 2 - STATISTIQUES ET PROBABILITES / Année Universitaire 2021-2022
UE 2. ECUE 3. ECHANTILLONNAGE T D - 2heures
TD 7- ESTIMATION PAR INTERVALLE DE CONFIANCE CORRIGES

Exercice 1 – Dans une usine on veut estimer le temps moyen nécessaire pour compléter une tâche. On a mesuré les temps nécessaires pour compléter cette tâche 150 fois et on a obtenu un temps moyen de 85 minutes et un écart-type de 10 minutes.

a) Donner un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 98% pour le temps moyen nécessaire à la machine pour accomplir cette tâche.
b) Si le temps moyen a été estimé entre 83 et 87 minutes, quel est le niveau de confiance associé à cet intervalle ?
c) Combien de fois doit-on mesurer les temps pour que l'intervalle de confiance spécifie le temps moyen à 1 minute près et ceci 19 fois sur 20 ?

SOLUTION

a) Intervalle de confiance avec un niveau de 98%

$$m \in \left]\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

$Avec\ u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}326$ $\qquad m \in]83{,}1008; 86{,}8992[$

Le temps nécessaire à la machine pour accomplir la tâche est compris entre 83,1008 (83 mn 6 sec) et 86,8992 (86 mn 54 sec) à 98% de niveau de confiance.

b) Niveau de confiance associé à un intervalle de temps nécessaire compris entre 83 et 87 mn
Amplitude : $l = 87 - 83 = 4\ mn$

$$l = borne\sup - borne\inf = \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{l\ .\ \sqrt{n}}{2\ \sigma} = 2{,}45$$

$Lecture\ Z - table: u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}45 \ \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}9858$

$OU\ Lecture\ Table\ de\ la\ loi\ normale: 1 - \alpha = 2\,\pi(2{,}45) - 1 = 2 \times 0{,}9929 - 1 = 0{,}9858$

c) Le nombre d'enregistrement nécessaire pour un intervalle de confiance de 1mn à 95% de niveau de confiance (19 fois sur 20)

$$l = 2.\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = 2.\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{l}$$

$$n = \left(2.\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{l}\right)^2 = 1.537\ fois$$

Exercice 2 - Dans cette partie, on suppose que m et σ sont inconnus.
On relève dans le tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet :

Masse (en g)	72,20	72,24	72,26	72,30	72,36	72,39	72,42	72,48	72,50	72,54

Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.
1°) Calculer la moyenne et l'écart –type de cet échantillon
2°) En déduire les estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart-typa σ de X
3°) Dans la suite, on admet que la variable aléatoire qui à tout échantillon de 10 pesées associe la moyenne $\overline{X}$ de ces pesées suit une loi normale. En prenant pour écart-type la valeur estimée en 2°) donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.
4°) L'écart-type de l'appareil de pesée, mesuré à partir de nombreuses études antérieures, est en réalité, pour un objet ayant environ cette masse, de 0,08. Dans cette question on prend donc σ =0,08. Donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.

SOLUTION

	Xi	Xi²
	72,2	5212,84
	72,24	5218,6176
	72,26	5221,5076
	72,3	5227,29
	72,36	5235,9696
	72,39	5240,3121
	72,42	5244,6564
	72,48	5253,3504
	72,5	5256,25
	72,54	5262,0516
Total	723,69	52372,8453

1) Moyenne

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 72{,}369$$

Ecart-type

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{52\,372{,}8453}{10} - 72{,}369^2 = 0{,}012369 \qquad \Rightarrow s = \sqrt{V(X)} = 0{,}11$$

2) Estimations ponctuelles

$$\hat{m} = \bar{X} = 72{,}369$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \times s = 0,12$$

3) Intervalle de confiance pour la moyenne m $\alpha = 0,05$

$$m \in \left]\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

$Avec\ u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,262$ $\quad$ $m \in]72,30; 72,44[$

Au niveau de confiance de 95%, le poids moyen de l'ensemble des objets est compris entre 72,30g et 72,44g.

4) $\sigma = 0,08 : ecart - type\ de\ la\ population$

$$m \in \left]72,369 - 1,96 \times \frac{0,08}{\sqrt{10}} \ ; \ 72,369 + 1,96 \times \frac{0,08}{\sqrt{10}}\right[$$

$$m \in]72,32; 72,42[$$

En réalité, le poids moyen de l'ensemble des objets est compris entre 72,32g et 72,42g à 95% de niveau de confiance.

<u>Exercice 3</u> – Dans un échantillon aléatoire de 200 composantes électriques fabriquées avec un certain procédé, 15 composantes se sont avérées défectueuses.

a) Soit p la proportion de composantes fabriquées avec ce procédé qui sont défectueuses. Construire un intervalle de confiance pour p ayant un niveau de confiance de 90%.
b) Combien de composantes doit on échantillonner pour estimer la proportion de composantes défectueuses à 3% près et ceci 18 fois sur 20 ?

SOLUTION

n=200 $\quad$ D=15

D : « composante défectueuse »

a) Proportion des composantes défectueuses

$$f = \frac{15}{200} = 0,075 \qquad niveau\ de\ confiance : 90\%$$

$$p \in \left]f - u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right[$$

$Avec\ \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64$ $\quad$ $p \in]0,0445; 0,1055[$

b) Notons que : $proportion = marge\ d'erreur = u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$

Donc $amplitude = 2 \times proportion$

$$l = 2 \times 0{,}03 = 0{,}06 \qquad \textit{avec niveau de confiance } \frac{18}{20} = 90\%$$

$$l = borne\ \sup - borne\ \inf = 2.\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 2.u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sqrt{f(1-f)}}{l}$$

$$\Rightarrow\ n = \left(2.u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sqrt{f(1-f)}}{l}\right)^2 = 207{,}32 \qquad Soit\ 208\ composantes$$

<u>Exercice 4</u> - On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. Pour un échantillon de 100 lots de 5 kilogrammes de mélange analysés, on a obtenu les résultats suivants, où x_i représente la masse du produit exprimée en grammes et n_i l'effectif correspondant :

x_i	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160
n_i	1	5	6	21	32	22	7	4	1	1

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.
2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type.
3. On admet que la variable aléatoire X, qui, à un lot de 5 kilogrammes de mélange, associe la masse, exprimée en gramme, du produit dosé, suit une loi normale de moyenne m =150 et d'écart-type σ=3. Un lot de 5 kilogrammes de mélange est dit de qualité « extra » s'il contient entre 147 grammes et 155 grammes de produit. Calculer $P(147 \leq X \leq 155)$. En déduire le pourcentage de qualité extra dans le produit.

SOLUTION

n=100

x_i	n_i	ni.xi	ni.xi²
142	1	142	20164
144	5	720	103680
146	6	876	127896
148	21	3108	459984
150	32	4800	720000
152	22	3344	508288
154	7	1078	166012
156	4	624	97344
158	1	158	24964

160	1	160	25600
Total	100	15010	2253932

1) Moyenne

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = 150{,}10g$$

Variance

$$V(X) = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{2253932}{100} - 150{,}10^2 = 9{,}31$$

Ecart-type

$$s = \sqrt{V(X)} = 3{,}051$$

2) Estimations ponctuelles

$$\hat{m} = \bar{x} = 150{,}10$$
$$\hat{\sigma} = s = 3{,}051 \qquad car\ n > 30$$

3) $X \to N(150, 3)$
Qualité extra ➔ $X \in [147; 155]$

$$P(147 \leq X \leq 155) = P(X \leq 155) - P(X < 147) = P(Z \leq 1{,}67) - P(Z < -1)$$
$$= \pi(1{,}67) + \pi(1) - 1 = 0{,}7938$$

On a 79,38% de produits qui sont de qualité « extra ».