

UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN

UFR DES SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION – LICENCE 2 -
STATISTIQUES ET PROBABILITES / Année Universitaire 2021-2022

UE 2. ECUE 3. ECHANTILLONNAGE T D - 2heures

TD 7- ESTIMATION PAR INTERVALLE DE CONFIANCE **CORRIGES**

Exercice 1 – Dans une usine on veut estimer le temps moyen nécessaire pour compléter une tâche. On a mesuré les temps nécessaires pour compléter cette tâche 150 fois et on a obtenu un temps moyen de 85 minutes et un écart-type de 10 minutes.

- Donner un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 98% pour le temps moyen nécessaire à la machine pour accomplir cette tâche.
- Si le temps moyen a été estimé entre 83 et 87 minutes, quel est le niveau de confiance associé à cet intervalle ?
- Combien de fois doit-on mesurer les temps pour que l'intervalle de confiance spécifie le temps moyen à 1 minute près et ceci 19 fois sur 20 ?

SOLUTION

- Intervalle de confiance avec un niveau de 98%

$\hat{\sigma} = s'$ et $n=150 > 30$, application du théorème central limite et $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(m; \frac{s'}{\sqrt{n}}\right)$

$\rightarrow U = \frac{\bar{X}-m}{\frac{s'}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$ et l'intervalle sera $m \in \left] \bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s'}{\sqrt{n}}\right); \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s'}{\sqrt{n}}\right) \right[$

Données

$$\bar{x} = 85 \text{ mn}; s = 10 \text{ mn} \Rightarrow s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \times s = \sqrt{\frac{150}{149}} \times 10 = 10,0335; 1 - \alpha = 0,98 \text{ soit } \alpha = 0,02.$$

Pour $\alpha = 0,02$, on obtient $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,3263$;

$$\text{Ainsi : } m \in \left] 85 - 2,3263 \left(\frac{10,0335}{\sqrt{150}} \right); 85 + 2,3263 \left(\frac{10,0335}{\sqrt{150}} \right) \right[\text{ soit } m \in]83,0942; 86,9058[$$

Au niveau de confiance de 98%, le temps moyen est compris entre 83,0942 et 86,9058 minutes.

- Niveau de confiance associé à un intervalle de temps moyen compris entre 83 et 87 mn
Sachant que $X \sim N(85; 10)$

$$P(83 \leq m \leq 87) = P(-87 \leq -m \leq -83)$$

$$P(83 \leq m \leq 87) = P(\bar{X} - 87 \leq \bar{X} - m \leq \bar{X} - 83)$$

$$P(83 \leq m \leq 87) = P\left(\frac{\bar{X}-87}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X}-83}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$P(83 \leq m \leq 87) = \pi\left(\frac{\bar{X}-83}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) - \pi\left(\frac{\bar{X}-87}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)$$

Application numérique : $s' = 10,0335$; $n = 150$; $\bar{x} = 85$;

$$P(83 \leq m \leq 87) = \pi\left(\frac{85-83}{\frac{10,0335}{\sqrt{150}}}\right) - \pi\left(\frac{85-87}{\frac{10,0335}{\sqrt{150}}}\right) = \pi\left(\frac{85-83}{\frac{10,0335}{\sqrt{150}}}\right) - \pi\left(\frac{85-87}{\frac{10,0335}{\sqrt{150}}}\right)$$

$$P(83 \leq m \leq 87) = \pi(2,44) - \pi(-2,44) = \pi(2,44) - [1 - \pi(2,44)]$$

$$P(83 \leq m \leq 87) = 2\pi(2,44) - 1 = 2(0,9927) - 1 = 0,9854$$

$$P(83 \leq m \leq 87) = 0,9854 \text{ soit un niveau de confiance de } 98,54\%.$$

- Taille de l'échantillon des mesures du temps

Données : à 1 minute près = marge d'erreur 1 mn; soit $\varepsilon = 1$

19 fois sur 20 : $\frac{19}{20} = 0,95$. Le niveau de confiance est donc $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$.

Calcul de la taille de l'échantillon :

$$n \geq \left(\frac{u_{1-\alpha/2} \times \sigma}{\varepsilon} \right)^2 = \left(\frac{1,96 \times 10,0335}{1} \right)^2 = 386,7. \text{ soit un échantillon de 387 mesures du temps.}$$

Exercice 2 - Dans cette partie, on suppose que m et σ sont inconnus.

On relève dans le tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet :

Masse (en g)	72,20	72,24	72,26	72,30	72,36	72,39	72,42	72,48	72,50	72,54
-----------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

1°) Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon

2°) En déduire les estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart-type σ de X

3°) Dans la suite, on admet que la variable aléatoire qui à tout échantillon de 10 pesées associe la moyenne $\bar{X}$ de ces pesées suit une loi normale. En prenant pour écart-type la valeur estimée en 2°) donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m .

4°) L'écart-type de l'appareil de pesée, mesuré à partir de nombreuses études antérieures, est en réalité, pour un objet ayant environ cette masse, de 0,08. Dans cette question on prend donc $\sigma = 0,08$. Donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m .

Réponse - Exercice 3

1°) Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon

X : variable aléatoire, X = masse (ou poids) en g ; et x_i : les différentes valeurs de X .

Moyenne de l'échantillon : $\bar{x}$ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{723,6907}{10} = 72,36907 = 72,37$ <i>voir le tableau de calcul</i> Variance de l'échantillon : s^2 $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \left[\frac{\sum x_i^2}{n} \right] - \bar{x}^2$ $s^2 = \left[\frac{52372,845}{10} \right] - (72,36907)^2 = 0,01237$ Écart-type d'échantillon : $s = \sqrt{0,01237} = 0,111 \approx 0,11$	Tableau de calcul <table> <tr> <th>x_i</th><th>x_i^2</th></tr> <tr><td>72,200</td><td>5212,840</td></tr> <tr><td>72,240</td><td>5218,618</td></tr> <tr><td>72,260</td><td>5221,508</td></tr> <tr><td>72,300</td><td>5227,290</td></tr> <tr><td>72,360</td><td>5235,970</td></tr> <tr><td>72,390</td><td>5240,312</td></tr> <tr><td>72,420</td><td>5244,656</td></tr> <tr><td>72,480</td><td>5253,350</td></tr> <tr><td>72,500</td><td>5256,250</td></tr> <tr><td>72,540</td><td>5262,052</td></tr> <tr> <td>Total</td><td> $\sum x_i = 723,6907$ $\sum x_i^2 = 52372,845$ </td></tr> </table>	x_i	x_i^2	72,200	5212,840	72,240	5218,618	72,260	5221,508	72,300	5227,290	72,360	5235,970	72,390	5240,312	72,420	5244,656	72,480	5253,350	72,500	5256,250	72,540	5262,052	Total	$\sum x_i = 723,6907$ $\sum x_i^2 = 52372,845$
x_i	x_i^2																								
72,200	5212,840																								
72,240	5218,618																								
72,260	5221,508																								
72,300	5227,290																								
72,360	5235,970																								
72,390	5240,312																								
72,420	5244,656																								
72,480	5253,350																								
72,500	5256,250																								
72,540	5262,052																								
Total	$\sum x_i = 723,6907$ $\sum x_i^2 = 52372,845$																								

2°) En déduire les estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart-type σ de la population.

Estimation ponctuelle de la moyenne d'échantillon m: $\hat{m} = \bar{x}$ $\hat{m} = \bar{x} = 72,37$	Estimation ponctuelle de l'écart-type de la population σ: $\hat{\sigma} = s'$ $s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \times s = \sqrt{\frac{10}{9}} \times 0,111 = 0,117 \approx 0,12$
---	--

3°) Intervalle de confiance pour la moyenne m : $\alpha = 0,05$

$$m \in \left[\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \times \frac{\hat{\sigma} = s'}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \times \frac{\hat{\sigma} = s'}{\sqrt{n}} \right]$$

$$n = 10 < 30 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ inconnu} \\ \hat{\sigma} = s' \end{array} \right. \text{ et } \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(m; \frac{s'}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s'}{\sqrt{n}}} \sim T_{n-1}$$

T_{n-1} : loi de Student à $(n - 1)$ degrés de liberté

L'intervalle est de la forme : $m \in \left[\bar{x} - t_{(n-1); 1-\alpha/2} \times \frac{s'}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{(n-1); 1-\alpha/2} \times \frac{s'}{\sqrt{n}} \right]$

Application numérique : $\bar{x} = 72,37$; $s' = 0,12$;

$\alpha=5\%=0,05$ et $n=10 \Rightarrow t_{(n-1); 1-\alpha/2} = t_{(9); 1-\alpha/2} = \underbrace{2,262}_{\substack{\text{valeur lue} \\ \text{dans la table de Student} \\ \text{pour } n=9 \text{ et } \alpha=0,05}}$

Calcul :

soit $m \in \left[72,37 - 2,262 \frac{0,12}{\sqrt{10}}; 72,37 + 2,262 \frac{0,12}{\sqrt{10}} \right]$ On obtient : $m \in [72,30; 72,44]$

Au niveau de confiance de 95%, le poids moyen est compris entre 72,30 g et 72,44g.

4°) Intervalle de confiance avec $\sigma = 0,08$:

$n = 10 < 30$ et $\left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ connu} \\ \sigma = 0,08 \end{array} \right.$ et $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow U = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$

d'où $m \in \left[\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

Application numérique : $n=10$; $\bar{x} = 72,37$; $\sigma = 0,08$; $\alpha=5\%=0,05 \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

soit $m \in \left[72,37 - 1,96 \frac{0,08}{\sqrt{10}}; 72,37 + 1,96 \frac{0,08}{\sqrt{10}} \right]$ On obtient : $m \in [72,32; 72,42]$

A 95% de niveau de confiance, le poids moyen est compris entre 72,32 g et 72,42g.

Exercice 3 – Dans un échantillon aléatoire de 200 composantes électriques fabriquées avec un certain procédé, 15 composantes se sont avérées défectueuses.

- Soit p la proportion de composantes fabriquées avec ce procédé qui sont défectueuses. Construire un intervalle de confiance pour p ayant un niveau de confiance de 90%.
- Combien de composantes doit on échantillonner pour estimer la proportion de composantes défectueuses à 3% près et ceci 18 fois sur 20 ?

SOLUTION

a) Intervalle de confiance pour p

$p \in \left[f - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}; f + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$

Données : $n=200$; succès : « composante défectueuse » ; $k=15$.

$f = \frac{k}{n} = \frac{15}{200} = 0,075$; $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,10 \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,6449$;

Application numérique :

$\Rightarrow p \in \left[0,075 - 1,96 \sqrt{\frac{0,075(0,925)}{200}}; 0,075 + 1,96 \sqrt{\frac{0,075(0,925)}{200}} \right]$
soit $p \in [0,0385; 0,1115]$

Conclusion : au niveau de confiance de 95%, la proportion de composantes défectueuses est comprise entre 3,85% et 11,15%.

a) Taille de l'échantillon pour estimer la proportion de composantes défectueuses à 3% près
 $\varepsilon=3\%=0,03$

et ceci 18 fois sur 20 ?

$1 - \alpha = \frac{18}{20} = 0,90$
 $n \geq \left(\frac{u_{1-\alpha/2} \sqrt{f(1-f)}}{\varepsilon} \right)^2$

marge d'erreur $\varepsilon = 0,03$; $f = 0,075$; $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,10 \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,6449$

$$n \geq \left(\frac{1,6449 \sqrt{0,075(0,925)}}{0,03} \right)^2 = 208,56 \text{ soit un échantillon de } 209 \text{ composantes.}$$

Exercice 4 - On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. Pour un échantillon de 100 lots de 5 kilogrammes de mélange analysés, on a obtenu les résultats suivants, où x_i représente la masse du produit exprimée en grammes et n_i l'effectif correspondant :

x_i	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160
n_i	1	5	6	21	32	22	7	4	1	1

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.
2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type.
3. On admet que la variable aléatoire X , qui, à un lot de 5 kilogrammes de mélange, associe la masse, exprimée en gramme, du produit dosé, suit une loi normale de moyenne $m = 150$ et d'écart-type $\sigma = 3$. Un lot de 5 kilogrammes de mélange est dit de qualité « extra » s'il contient entre 147 grammes et 155 grammes de produit. Calculer $P(147 \leq X \leq 155)$. En déduire le pourcentage de qualité extra dans le produit.

Corrigé

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.

Formules et tableau de calcul

La moyenne

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{15010}{100} = 150,10 \text{ g}$$

La variance d'échantillon

$$s^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - (\bar{X})^2$$

$$= \frac{2253932}{100} - (150,1)^2$$

$$= 9,31$$

L'écart-type

$$s = \sqrt{s^2} = 3,051 \text{ g}$$

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
142	1	142	20164
144	5	720	103680
146	6	876	127896
148	21	3108	459984
150	32	4800	720000
152	22	3344	508288
154	7	1078	166012
156	4	624	97344
158	1	158	24964
160	1	160	25600
Total	100	15010	2253932

2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la population.

Estimation ponctuelle de la moyenne de la population : $\hat{m} = \bar{x} = 150,10 \text{ g}$

Estimation ponctuelle de l'écart-type de la population : $\hat{\sigma} = s' = g$

$$\hat{\sigma} = s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \times s = \sqrt{\frac{100}{99}} \times 3,051 = 3,06637$$

3. Sachant que $X \sim N(150; 3)$, calculons $P(147 \leq X \leq 155)$

$$X \sim N(150; 3) \text{ on a: } T = \frac{X - 150}{3} \sim N(0; 1)$$

$$P(147 \leq X \leq 155) = P(X \leq 155) - P(X < 147)$$

$$P(147 \leq X \leq 155) = \Pi\left(\frac{155-150}{3}\right) - \Pi\left(\frac{147-150}{3}\right)$$

$$P(147 \leq X \leq 155) = \Pi(1,67) - \Pi(-1)$$

$$P(147 \leq X \leq 155) = \Pi(1,67) + \Pi(1) - 1$$

$$P(147 \leq X \leq 155) = 0,9525 + 0,8413 - 1 = 0,7938.$$

Soit 79,38% de qualité extra dans le produit.

