UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN
UFR DES SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION – LICENCE 2 -
STATISTIQUES ET PROBABILITES / Année Universitaire 2021-2022
UE 1. ECUE 2. Statistique mathématique T D - 2h00 min TD 4-LOIS DISCRETES ET CONTINUES

Exercice 1 –On modélise la durée de vie d'un appareil, en années, par une loi exponentielle de paramètre α = 2.

a) Exprimer la fonction de densité de probabilité de la loi et la fonction de répartition
b) Quelle est la durée de vie moyenne ?
c) Calculer la probabilité que l'appareil dure :
   - Plus de 6 mois
   - Mois de trois mois
   - Entre 3 et 6 mois
d) On constate, un an après sa mise en service, qu'un appareil fonctionne. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 6 mois ?
e) Quelle est la probabilité que la durée de vie appartienne à l'intervalle : [E(X)-α ; E(X)+α]
f) Pendant combien de temps, 50% des disques durs fonctionnent-ils sans défaillance ?

SOLUTION

a) Soit X la durée de vie de l'appareil. X suit une loi exponentielle de paramètre α =2. On a :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Et la fonction de répartition est : $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) Durée moyenne de vie : on calcule l'espérance mathématique de X. E(X) = α= 2. Soit une durée de vie moyenne de 2 ans.

c) Calculs :
   - Probabilité que l'appareil fonctionne plus de 6 mois, soit $\frac{6}{12} = 0{,}5$ an ;

$$P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \leq 0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{0{,}5}{2}}\right) = e^{-\frac{0{,}5}{2}} = 0{,}7788.$$

77,88% de chances que les appareils fonctionnent plus de 6 mois

   - Probabilité que l'appareil fonctionne moins de 3 mois, soit $\frac{3}{12} = 0{,}25$ an

$$P(X < 0{,}25) = F(0{,}25) = 1 - e^{-\frac{0{,}25}{2}} = 1 - 0{,}8825 = 0{,}1175$$

11,75 % de chances que les appareils fonctionnent moins de 3 mois.

Probabilité que l'appareil fonctionne entre 3 mois et 6 mois

$$P(0{,}25 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = (1 - e^{-\frac{0{,}5}{2}}) - (1 - e^{-\frac{0{,}25}{2}})$$

$$P(0{,}25 < X < 0{,}5) = e^{-\frac{0{,}25}{2}} - e^{-\frac{0{,}5}{2}} = 0{,}8825 - 0{,}7788 = 0{,}1037$$

10,37% de chances que les appareils fonctionnent entre 3 et 6 mois.

Probabilité qu'il fonctionne encore 6 mois (0,5 an) sachant qu'il a déjà fonctionné 1 an.

$$P\big((X > 1 + 0{,}5)/X > 1\big) = P(X > 1{,}5/X > 1) = \frac{P(X > 1{,}5 \cap X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 1{,}5)}{P(X > 1)}$$

$$P\big((X > 1 + 0{,}5)/X > 1\big) = \frac{1 - P(X \leq 1{,}5)}{1 - P(X \leq 1)} = \frac{1 - F(1{,}5)}{1 - F(1)} = \frac{e^{-\frac{1{,}5}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1{,}5}{2}} \times e^{+\frac{1}{2}} = e^{\frac{-0{,}5}{2}} = 0{,}7788$$

77,88% de chances que les appareils ayant fonctionné 1 an puissent fonctionner encore 6 mois.

Remarque : Propriété de « non vieillissement » ou « loi sans usure » de la loi exponentielle

Probabilité qu'un appareil fonctionne encore s ans sachant qu'il a déjà fonctionné t ans.

$$P\big((X > t + s)/X > t\big) = \frac{P(X > t + s \cap X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\frac{t+s}{\alpha}}}{e^{-\frac{t}{\alpha}}} = e^{-\frac{t+s}{\alpha}} \times e^{+\frac{t}{\alpha}}$$

$$P\big((X > t + s)/X > t\big) = e^{\frac{-t-s+t}{\alpha}} = e^{-\frac{s}{\alpha}} = P(X > s)$$
$$P\big((X > t + s)/X > t\big) = P(X > s)$$

$$\underbrace{P\big((X > 1{,}5)/X > 1\big)}_{\substack{prob\ qu'il\ ait\ fonctionné \\ plus\ d'1an\ et\ demi}} = \underbrace{P(X > 0{,}5)}_{\substack{prob\ qu'il\ ait\ fonctionné \\ seulement\ 6mois\ après \\ sa\ mise\ en\ service}}$$

<u>Exercice 2</u> – 1° On suppose que X suit une loi normale centrée réduite.

a) Déterminer P(X<0,3) ; P(X<-1,1) ; P(X>0,4) ; P(X>-0,7) ; P(-0,2<X<1,1) ; P(0,8<X<1,4)

b) Trouver λ tels que : P(X<λ)=0,3 ;P(X<λ)=0,8 ; P(X>λ)=0,1 ; P(X>λ)=0,6 ;P(-λ<X<λ)=0,8

2°) X suit une loi N (5 ; 3).

a) Déterminer P(X<6) ; P(X>7) ; P(1<X<4) ; P(7<X<9) ;

b) Trouver λ tels que : P(X<5-λ)=0,3 ; P(X<λ)=0,8 ; P(X>5+λ)=0,1 ; P(5-λ<X<5+λ)=0,8

Solution

<table>
<tr>
<td>On dit X suit la loi normale centré réduite de paramètres (0 et 1),

on écrit : $\begin{cases} X \sim \mathcal{N}(0;1) \\ avec\ E(X) = 0\ (loi\ centrée) \\ et\ V(X) = 1 \Rightarrow\ \sigma(x) = 1\ (loi\ réduite) \end{cases}$

$P(X \leq x) = \underbrace{\pi(x)}_{\substack{table\ 1 \\ de\ \mathcal{N}(0;1)}}$

Exemple : $P(X < 0{,}3) = \pi(0{,}3) =$
On décompose 0,3 comme suite :
$0{,}30 = 0{,}3 + 0{,}00\ \ soit\ \underbrace{0{,}3}_{ligne}\ et\ \underbrace{0{,}00}_{colonne}$

Dans la table 1 de la loi $\mathcal{N}(0;1)$, on cherche la probabilité correspondant à $\pi(0{,}3)$ par l'intersection de la ligne "0,3" et de la colonne "0,00", on obtient la probabilité 0,6179. ainsi : $\pi(0{,}3) = 0{,}6179$. soit $P(X < 0{,}3) = \pi(0{,}3) = 0{,}6179$</td>
<td>On dit X suit la loi normale de paramètres (m et σ), on écrit :
$\begin{cases} X \sim \mathcal{N}(m;\sigma) \\ avec\ E(X) = m \\ et\ V(X) = \sigma^2 \Rightarrow\ \sigma(x) = \sigma \end{cases}$
Changement de variable
Posons $\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{X-m}}{\boldsymbol{\sigma}}$
$X \sim \mathcal{N}(m\,;\sigma)\ \ \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{changement \\ de\ variable}}\ \ \boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{X-m}}{\boldsymbol{\sigma}} \sim \boldsymbol{\mathcal{N}(0;1)}$
$P(X \leq x) = \underbrace{\pi\left(\frac{\boldsymbol{x-m}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)}_{\substack{table\ 1 \\ de\ \mathcal{N}(0;1)}}$
Si X suit une loi N(5 ; 3). On pose $T = \frac{\boldsymbol{x-5}}{\boldsymbol{3}}\ \ \Rightarrow P(X \leq x) = \underbrace{\pi\left(\frac{\boldsymbol{x-5}}{\boldsymbol{3}}\right)}_{\substack{table\ 1 \\ de\ \mathcal{N}(0;1)}}$

$P(X < 6) = \underbrace{\pi\left(\frac{\boldsymbol{6-5}}{\boldsymbol{3}}\right)}_{\substack{table\ 1 \\ de\ \mathcal{N}(0;1)}} = \underbrace{\pi(0{,}33) = 0{,}6293}_{0{,}33 =\ \underbrace{0{,}3}_{ligne}\ +\ \underbrace{0{,}03}_{colonne}}$</td>
</tr>
</table>

1° On suppose que X suit une loi normale centrée réduite. X suit une loi N(0 ; 1).

a) Déterminer P(X<0,3) ; P(X<-1,1) ; P(X>0,4) ; P(X>-0,7) ; P(-0,2<X<1,1) ; P(0,8<X<1,4)

Calcul de la probabilité de X : Si $X \sim \mathcal{N}(0\,;1) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \underbrace{\pi(x)}_{\substack{table\ 1 \\ de\ \mathcal{N}(0;1)}}$

$P(X < 0{,}3) = \pi(0{,}30) = 0{,}6179$ 1,10 = $\underbrace{1{,}1}_{ligne\ "1{,}1"} + \underbrace{0{,}00}_{colonne\ "0{,}00"}$

Rappel : $\pi(-x) = 1 - \pi(x)$; $P(X \leq -1{,}1) = \pi(-1{,}1) = 1 - \pi(1{,}10) = 1 - 0{,}8643 = 0{,}1357$

$P(X > 0{,}4) = 1 - P(X \leq 0{,}4) = 1 - \pi(0{,}40) = 1 - 0{,}6554$

$P(X > -0{,}7) = 1 - P(X \leq -0{,}7) = 1 - \pi(-0{,}7) = 1 - [1 - \pi(0{,}7)] = \pi(0{,}7) = 0{,}7580$

Rappel : $P(a < X < b) = \pi(b) - \pi(a)$; $P(-0{,}2 < X < 1{,}1) = \pi(1{,}1) - \pi(-0{,}2) = \pi(1{,}1) - [1 - \pi(0{,}2)] = \pi(1{,}1) + \pi(0{,}2) - 1$

$P(-0{,}2 < X < 1{,}1) = 0{,}8643 + 0{,}5793 - 1 = 0{,}4436$

$P(0{,}8 < X < 1{,}4) = \pi(1{,}40) - \pi(0{,}80) = 0{,}9192 - 0{,}7881 = 0{,}1311$

b) X suit une loi N(0 ; 1) : Trouver λ tels que : P(X<λ)=0,3 ;P(X<λ)=0,8 ; P(X>λ)=0,1 ; P(X>λ)=0,6 ; P(-λ<X<λ)=0,8

Méthode 1 avec les fractiles de la table2 de la loi $\mathcal{N}(0;1)$	Méthode 2 par interpolation linéaire avec les valeurs de la table 1 de la loi $\mathcal{N}(0;1)$
Si $\boldsymbol{\pi(\lambda)=\alpha<0,5}$ avec $\boldsymbol{\alpha}$ connue mais $\boldsymbol{\lambda}$ inconnue Si $\alpha<0{,}5 \Rightarrow \begin{cases}\lambda<0\\ \frac{p}{2}=\alpha\end{cases} \Rightarrow posons\ \ p=2\alpha$, on cherche la valeur de « λ » dans la table 2 de $\mathcal{N}(0;1)$ pour 2α. Et on obtient $\lambda=-\cdots$ Exemple : $P(X<\lambda)=0{,}3 \Leftrightarrow \pi(\lambda)=0{,}3<0{,}5\ et\ \lambda<0$ Posons $p=2\times0{,}3=0{,}6\ \ pour\ 0{,}6 \rightarrow$ la table 2 de $\mathcal{N}(0;1)$ donne 0,5244. $\lambda<0 \Rightarrow \lambda=-0{,}5244$	**Si $\boldsymbol{\pi(\lambda)=\alpha<0,5 \Rightarrow \lambda<0}$** a) Calcul de $(1-\alpha)$ b) On encadre $(1-\alpha)$ par $\alpha_1\ et\ \alpha_2$ dans la table1 : $\alpha_1<(1-\alpha)<\alpha_2$. c) On détermine les valeurs $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ correspondantes de $\alpha_1\ et\ \alpha_2$ dans la table1. d) On encadre λ par les valeurs $\lambda_1\ et\ \lambda_2$, on obtient : $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$. e) On calcule λ $\begin{cases}\lambda_1<\lambda<\lambda_2\\ \alpha_1<(1-\alpha)<\alpha_2\end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{(1-\alpha)-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} \Rightarrow \lambda=\lambda_1+\left[\frac{(1-\alpha)-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right](\lambda_2-\lambda_1)$ $\boldsymbol{\lambda<0} \Rightarrow \lambda=-\left(\lambda_1+\left[\frac{(1-\alpha)-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right](\lambda_2-\lambda_1)\right)$ Exemple $P(X<\lambda)=0{,}3 \Leftrightarrow \pi(\lambda)=0{,}3<0{,}5\ et\ \lambda<0$ $1-\alpha=1-0{,}3=0{,}7$ On encadre 0,7 dans la table 1 par $\alpha_1=0{,}6985<0{,}7<\alpha_2=0{,}7019$ Les valeurs $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ correspondantes de $\alpha_1\ et\ \alpha_2$ dans la table1 sont : $\lambda_1=0{,}52<\lambda<\lambda_2=0{,}53$ Calcul de λ par interpolation linéaire : $\begin{cases}\underbrace{\lambda_1}_{0{,}52}<\lambda<\underbrace{\lambda_2}_{0{,}53}\\ \underbrace{\alpha_1}_{0{,}6985}<\underbrace{(1-\alpha)}_{0{,}7}<\underbrace{\alpha_2}_{0{,}7019}\end{cases} \Rightarrow \lambda=-\left(\lambda_1+\left[\frac{(1-\alpha)-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right](\lambda_2-\lambda_1)\right)$ $\lambda=-\left(0{,}52+\left[\frac{0{,}7-0{,}6985}{0{,}7019-0{,}6985}\right](0{,}53-0{,}52)\right)=-(0{,}52+0{,}004412)$ $\lambda=-0{,}524412$

Méthode 1 avec les fractiles de la table2 de la loi $\mathcal{N}(0;1)$	Méthode 2 par interpolation linéaire avec les valeurs de la table 1 de la loi $\mathcal{N}(0;1)$
Si $\pi(\lambda)=\alpha>0,5$ avec α connue mais λ inconnue Si $\alpha>0{,}5 \Rightarrow \begin{cases}\lambda>0\\ \frac{p}{2}=1-\alpha\end{cases} \Rightarrow posons\ \ p=2(1-\alpha)$, on cherche la valeur de « λ » dans la table 2 de $\mathcal{N}(0;1)$ pour $2(1-\alpha)$. Et on obtient $\lambda=+\cdots$ Exemple : $P(X<\lambda)=0{,}8 \Leftrightarrow \pi(t)=0{,}8>0{,}5$ posons $p=2\times(1-0{,}8)=0{,}4\ \ pour\ 0{,}4 \rightarrow$ la table 2 de $\mathcal{N}(0;1)$ donne $\lambda=0{,}8416$.	**Si $\pi(\lambda)=\alpha>0,5 \Rightarrow \lambda>0$** a) On encadre α par $\alpha_1\ et\ \alpha_2$ dans la table1 : $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$. b) On détermine les valeurs $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ correspondantes de $\alpha_1\ et\ \alpha_2$ dans la table1. c) On encadre λ par les valeurs $\lambda_1\ et\ \lambda_2$, on obtient : $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$. d) On calcule λ $$\lambda=\lambda_1+\left[\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right](\lambda_2-\lambda_1)$$ Exemple $P(X<\lambda)=0{,}8 \Leftrightarrow \pi(\lambda)=0{,}8>0{,}5$ On encadre 0,8 dans la table1 par $\alpha_1=0{,}7995<0{,}8<\alpha_2=0{,}8023$ Les valeurs $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ correspondantes de $\alpha_1\ et\ \alpha_2$ dans la table1 sont : $\lambda_1=0{,}84<\lambda<\lambda_2=0{,}85$ Calcul de λ par interpolation linéaire : $\begin{cases}\underbrace{\lambda_1}_{0,84}<\lambda<\underbrace{\lambda_2}_{0,85}\\ \underbrace{\alpha_1}_{0,7995}<\underbrace{\alpha}_{0,8}<\underbrace{\alpha_2}_{0,8023}\end{cases} \Rightarrow \lambda=\lambda_1+\left[\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right](\lambda_2-\lambda_1)$ $\lambda=0{,}84+\left[\frac{0{,}8-0{,}7995}{0{,}8023-0{,}7995}\right](0{,}85-0{,}84)=0{,}84+0{,}001786$ $\lambda=0{,}841786$

b) X suit une loi N(0 ; 1) : Trouver λ tels que : P(X<λ)=0,3 ;P(X<λ)=0,8 ; P(X>λ)=0,1 ; P(X>λ)=0,6 ; P(-λ<X<λ)=0,8

cas où $\alpha < 0{,}5$

(1) Si $X \leadsto \mathcal{N}(0\,;1), P(X < \lambda) = 0{,}3 \Leftrightarrow \pi(\lambda) = 0{,}3 < 0{,}5$ avec $\lambda < 0$;

Posons $p = 2 \times 0{,}3 = 0{,}6$ $pour$ $0{,}6 \to$ la table 2 de $\mathcal{N}(0; 1)$ donne $0{,}5244$.

Or $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -0{,}5244$.

(2) Si $X \leadsto \mathcal{N}(0\,;1), P(X > \lambda) = 0{,}6 \Leftrightarrow P(X > \lambda) = 1 - P(X \leq \lambda) = 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - \pi(\lambda) = 0{,}6$.

$\Rightarrow \pi(\lambda) = 0{,}4 < 0{,}5$ avec $\lambda < 0$. Posons $p = 2 \times 0{,}4 = 0{,}8$ $pour$ $0{,}8 \to$ la table 2 de $\mathcal{N}(0; 1)$ donne $0{,}2533$. Or $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -0{,}2533$.

cas où $\alpha > 0{,}5$

(3) Si $X \leadsto \mathcal{N}(0\,;1), P(X < \lambda) = 0{,}8 \Leftrightarrow \pi(\lambda) = 0{,}8 > 0{,}5$ avec $\lambda > 0$.

posons $p = 2 \times (1 - 0{,}8) = 0{,}4$ $pour$ $0{,}4 \to$ la table 2 de $\mathcal{N}(0; 1)$ donne $\lambda = 0{,}8416$.

(4) Si $X \leadsto \mathcal{N}(0\,;1), P(X > \lambda) = 0{,}1$; or $P(X > \lambda) = 1 - P(X \leq \lambda) = 0{,}1 \Leftrightarrow 1 - \pi(\lambda) = 0{,}1$;

$\Rightarrow \pi(\lambda) = 0{,}9 > 0{,}5 \to \lambda > 0$

posons $p = 2 \times (1 - 0{,}9) = 0{,}2$ $pour$ $0{,}2 \to$ la table 2 de $\mathcal{N}(0; 1)$ donne $\lambda = 1{,}2816$.

(5) Si $X \leadsto \mathcal{N}(0\,;1)$,

$$P\left(\underbrace{-\lambda}_{\substack{borne\\inférieure}} < X < \underbrace{\lambda}_{\substack{borne\\supérieure}}\right) = 0{,}8 \Leftrightarrow \pi\left(\underbrace{\lambda}_{\substack{borne\\supérieure}}\right) - \pi\left(\underbrace{-\lambda}_{\substack{borne\\supérieure}}\right) = 0{,}8$$

$$\pi(\lambda) - \underbrace{\pi(-\lambda)}_{1-\pi(\lambda)} = 0{,}8$$

$$\pi(\lambda) - [1 - \pi(\lambda)] = 0{,}8$$

$$2\pi(\lambda) - 1 = 0{,}8$$

$$2\pi(\lambda) = 1{,}8$$

$$\pi(\lambda) = 0{,}9 > 0{,}5$$

Posons $p = 2 \times (1 - 0{,}9) = 0{,}2$ $pour$ $0{,}2 \to$ la table 2 de $\mathcal{N}(0; 1)$ donne $\lambda = 1{,}2816$.

2°) X suit une loi N(5 ; 3).

a) Déterminer P(X<6) ; P(X>7) ; P(1<X<4) ; P(7<X<9) ;

Procédure pour résoudre cette question :

$$\text{Si } X \leadsto \mathcal{N}(m\,;\sigma) \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{changement\\de\ variable}} \boldsymbol{T = \frac{X-m}{\sigma} \leadsto \mathcal{N}(0;1)}$$

Calcul de la probabilité de X

Si $X \leadsto \mathcal{N}(m\,;\sigma) \Rightarrow T = \frac{X-m}{\sigma} \leadsto \mathcal{N}(0; 1) \Rightarrow P(X \leq x) = \pi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, voir la table de $\mathcal{N}(0; 1)$

$$\text{Si } X \leadsto \mathcal{N}(0\,;1) \Rightarrow P(X \leq x) = \pi(x)$$

$$\text{Si } X \leadsto \mathcal{N}(5; 3) \Rightarrow T = \frac{X-5}{3} \leadsto \mathcal{N}(0; 1) \Rightarrow P(X \leq x) = \pi\left(\frac{x-5}{3}\right)$$

$$P(X < 6) = \pi\left(\frac{6-5}{3}\right) = \pi(0{,}33) = 0{,}6293$$

$$rappel: \quad P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \pi\left(\frac{7-5}{3}\right) = 1 - \pi(0{,}66) = 1 - 0{,}7454 = 0{,}2546$$

$$P(5 < X < 9) = P(X < 9) - P(X \leq 5) = \pi\left(\frac{9-5}{3}\right) - \pi\left(\frac{5-5}{3}\right)$$

$$P(5 < X < 9) = \pi(1{,}33) - \pi(0{,}00) = \pi(1{,}33) - 0{,}5 = 0{,}9082 - 0{,}5 = 0{,}4082$$

Autre méthode :

$$P\Big(\underbrace{a}_{\substack{borne\\inférieure}} < X < \underbrace{b}_{\substack{borne\\supérieure}}\Big) = F(b) - F(a) = \pi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \pi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$P\Big(\underbrace{5}_{\substack{borne\\inférieure}} < X < \underbrace{9}_{\substack{borne\\supérieure}}\Big) = 0{,}8 \Leftrightarrow \pi\left(\frac{9-5}{3}\right) - \pi\left(\frac{5-5}{3}\right) = 0{,}8$$

$$\pi(1{,}33) - \pi(0) = 0{,}8 \Rightarrow 0{,}9082 - 0{,}5 = 0{,}4082$$

2°) X suit une loi N(5 ; 3).

b) Trouver λ tels que : P(X<5-λ)=0,3 ; P(X<λ)=0,8 ; P(X>5+λ)=0,1 ; P(5-λ<X<5+λ)=0,8

- $\boldsymbol{P(X < 5 - \lambda) = 0,3}$ **on cherche $\boldsymbol{\lambda}$**

$P(X < 5 - \lambda) = 0{,}3 \Leftrightarrow \pi\left[\frac{(5-\lambda)-5}{3}\right] = 0{,}3$

$\underbrace{\pi\left(\frac{-\lambda}{3}\right)}_{1-\pi\left(\frac{\lambda}{3}\right)} = 0{,}3 \Leftrightarrow 1 - \pi\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 0{,}3 \Rightarrow \pi\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 0{,}7 > \mathbf{0,5}$ avec $\frac{\lambda}{3} > 0$.

Posons $p = 2 \times (1 - 0{,}7) = 0{,}6$ $pour$ $0{,}6 \rightarrow$ la table 2 de $\mathcal{N}(0; 1)$ donne $\frac{\lambda}{3} = 0{,}5244$.

Et $\lambda = 1{,}5732$

- $\boldsymbol{P(X < \lambda) = 0,8}$ **on cherche $\boldsymbol{\lambda}$**

$P(X < \lambda) = 0{,}8 \Leftrightarrow \pi\left(\frac{\lambda-5}{3}\right) = 0{,}8 > \mathbf{0,5}$ avec $\frac{\lambda-5}{3} > 0$

Posons $p = 2 \times (1 - 0{,}8) = 0{,}4$ $pour$ $0{,}4 \rightarrow$ la table 2 de $\mathcal{N}(0; 1)$ donne $\frac{\lambda-5}{3} = 0{,}8416$.

Et $\lambda = (3 \times 0{,}8416) + 5 = 7{,}5248$

- $\boldsymbol{P(X < 5 + \lambda) = 0,1}$ **on cherche $\boldsymbol{\lambda}$**

$P(X < 5 + \lambda) = 0{,}1 \Leftrightarrow \pi\left[\frac{(5+\lambda)-5}{3}\right] = 0{,}1 \Rightarrow \pi\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 0{,}1 < \mathbf{0,5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{3} < 0 \\ et \\ p = 2 \times 0{,}1 = 0{,}2 \end{cases} \quad pour\ 0{,}2 \rightarrow \text{la table 2 de } \mathcal{N}(0; 1) \text{ donne } 1{,}2816$$

$\frac{\lambda}{3} < 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{3} = -1{,}2816$. Et $\lambda = 3 \times (-1{,}2816) = -3{,}8448$

- $\boldsymbol{P(5 - \lambda < X < 5 + \lambda) = 0,8}$ **on cherche $\boldsymbol{\lambda}$**

$P\Big(\underbrace{5-\lambda}_{borne\ inf} < X < \underbrace{5+\lambda}_{borne\ sup}\Big) = 0{,}8 \Leftrightarrow \pi\left[\frac{(5+\lambda)-5}{3}\right] - \pi\left[\frac{(5-\lambda)-5}{3}\right] = 0{,}8 \Rightarrow \pi\left(\frac{\lambda}{3}\right) - \pi\left(-\frac{\lambda}{3}\right) = 0{,}8 \Rightarrow$

$\pi\left(\frac{\lambda}{3}\right) - \left[1 - \pi\left(\frac{\lambda}{3}\right)\right] = 0{,}8 \Rightarrow 2\pi\left(\frac{\lambda}{3}\right) - 1 = 0{,}8$

$\Rightarrow \pi\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 0{,}9 > 0{,}5$ avec $\frac{\lambda}{3} > 0$

posons $p = 2 \times (1 - 0{,}9) = 0{,}2$ $pour$ $0{,}2 \rightarrow$ la table 2 de $\mathcal{N}(0; 1)$ donne $\frac{\lambda}{3} = 1{,}2816$

Et $\lambda = 3{,}8448$

- $\boldsymbol{P(X > 5 + \lambda) = 0,1} \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 5 + \lambda) = 0{,}1$ **on cherche $\boldsymbol{\lambda}$**

$\Leftrightarrow 1 - \pi\left[\frac{(5+\lambda)-5}{3}\right] = 0{,}1 \Rightarrow \pi\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 0{,}9 > \mathbf{0,5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{3} > 0 \\ et \\ p = 2 \times (1 - 0{,}9) = 0{,}2 \end{cases} \quad pour\ 0{,}2 \rightarrow \text{la table 2 de } \mathcal{N}(0; 1) \text{ donne } \frac{\lambda}{3} = 1{,}2816.$$

Et $\lambda = 3 \times (1{,}2816) = 3{,}8448$

Exercice 3

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières d'une certaine race peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart type $\sigma = 400$.

1) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.

2) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5800 et 6100 litres de lait par an.

3) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6100 litres par an.

4) On sélectionne un échantillon aléatoire de 10 vaches laitières. Soit la variable aléatoire Y telle que : Y="nombres de vaches produisant moins de 5800 litres par an".

a. Indiquer la loi de probabilité de Y.
b. Calculer la probabilité que deux de ces 10 vaches laitières produisent moins de 5800 litres par an ?

Solution

1) La probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.

X = La production laitière annuelle en litres (en litres). $X \leadsto \mathcal{N}(\mu = 6000;\ \sigma = 400)$: X suit la loi normale de moyenne $\mu = 6000$ euros et d'écart-type :$\sigma = 400$ euros.

Changement de variable : $X \leadsto \mathcal{N}(m;\ \sigma) \Rightarrow U = \frac{X-m}{\sigma} \leadsto \mathcal{N}(0; 1) \Rightarrow P(X \leq x) = \prod\left(\frac{x-6000}{400}\right)$

$P(X \leq 5800) = P(X \leq 5800) = \prod\left(\frac{5800-6000}{400}\right) = \prod(-0{,}5) = 1 - \prod(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$. Soit 30,85% de chances qu'une vache de cette race produise moins de 5800 litres par an.

2) La probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5800 et 6100 litres de lait par an.

$P(5800 \leq X \leq 6100) = \prod\left(\frac{6100-6000}{400}\right) - \prod\left(\frac{5800-6000}{400}\right) = \prod(0{,}25) - \prod(-0{,}5)$

$P(5800 \leq X \leq 6100) = \prod(0{,}25) - [1 - \prod(0{,}5)] = \prod(0{,}25) + \prod(0{,}5) - 1$

$P(5800 \leq X \leq 6100) = 0{,}5987 + 0{,}6915 - 1 = 0{,}2902$

Soit 29,02% de chances d'avoir une vache produisant entre 5800 et 6100 litres de lait par an.

3) La probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6100 litres par an.

$P(X > 6100) = 1 - P(X \leq 6100) = 1 - \prod\left(\frac{6100-6000}{400}\right) = 1 - \prod(0{,}25) = 1 - 0{,}5987$

$P(X > 6250) = 0{,}4013$

Soit 40,13% de chances qu'une vache produise plus de 6100 litres par an.

4) A. la loi de probabilité de Y

✓ Y="nombres de vaches produisant moins de 5800 litres par an" suit la loi binomiale de paramètres $n = 10\ et\ p = 0{,}3085 = P(Succès)$. Soit $Y \leadsto \mathcal{B}(n = 10;\ p = 0{,}3085)$ avec :

$Y(\Omega) = \{0; 1; 2;\ \ldots;\ 10\}$ et $P(Y = y) = C_n^y p^y q^{n-y}$

Pour $n = 10;\ p = 0{,}3085;\ q = 1 - p = 1 - 0{,}3085 = 0{,}6915$

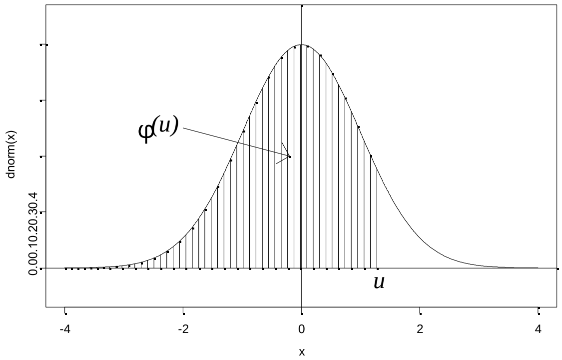
$\Rightarrow P(Y = y) = C_{10}^y (0{,}3085)^y (0{,}6915)^{10-y}$

B. La probabilité d'avoir deux vaches produisant moins de 5800 litres par an $P(Y = 2) = C_{10}^2 (0{,}3085)^2 (0{,}6915)^8 = 0{,}2239$

Soit 22,39% de chances d'avoir deux vaches produisant chacune moins de 5800 litres par an.

TABLE 1 DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

U étant une variable aléatoire de loi *N*(0,1), la table donne la valeur de $\Phi(u) = P(U \leq u)$.



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

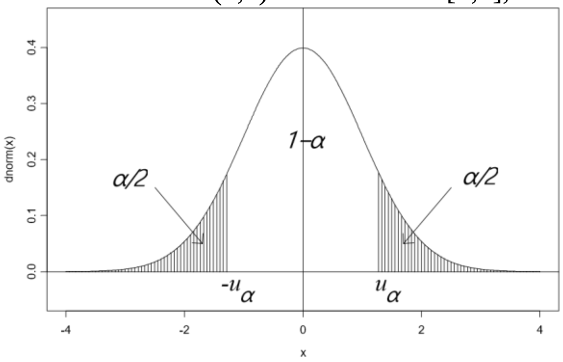
Grandes valeurs de u

u	3,0	3,5	4,0	4,5
$\pi(u)$	0,9987	0,99977	0,999968	0,999997

TABLE 2 DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Table des fractiles (ou quantiles)

U étant une variable aléatoire de loi *N*(0,1)et α un réel de [0,1], la table donne la valeur



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	$+\infty$	2.5758	2.3263	2.1701	2.0537	1.9600	1.8808	1.8119	1.7507	1.6954
0.1	1.6449	1.5982	1.5548	1.5141	1.4758	1.4395	1.4051	1.3722	1.3408	1.3106
0.2	1.2816	1.2536	1.2265	1.2004	1.1750	1.1503	1.1264	1.1031	1.0803	1.0581
0.3	1.0364	1.0152	0.9945	0.9741	0.9542	0.9346	0.9154	0.8965	0.8779	0.8596
0.4	0.8416	0.8239	0.8064	0.7892	0.7722	0.7554	0.7388	0.7225	0.7063	0.6903
0.5	0.6745	0.6588	0.6433	0.6280	0.6128	0.5978	0.5828	0.5681	0.5534	0.5388
0.6	0.5244	0.5101	0.4959	0.4817	0.4677	0.4538	0.4399	0.4261	0.4125	0.3989
0.7	0.3853	0.3719	0.3585	0.3451	0.3319	0.3186	0.3055	0.2924	0.2793	0.2663
0.8	0.2533	0.2404	0.2275	0.2147	0.2019	0.1891	0.1764	0.1637	0.1510	0.1383
0.9	0.1257	0.1130	0.1004	0.0878	0.0753	0.0627	0.0502	0.0376	0.0251	0.0125

Petites valeurs de α

α	0.002	0.001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
u_α	3.0902	3.2905	3.8906	4.4171	4.8916	5.3267	5.7307	6.1094

$$\text{Pour } p<\frac{1}{2},\quad \Phi^{-1}(p)=-u_{2p}$$

$$\text{Pour } p\geq\frac{1}{2},\quad \Phi^{-1}(p)=u_{2(1-p)}$$