

TD 3- (Axiomes des probabilités ; Théorème de bayes et Lois discrètes) CORRIGES

Exercice 1 - Dans une population, 7% des individus sont contaminés par un virus. On dispose d'un test de dépistage qui présente les propriétés suivantes : Parmi les individus contaminés, le test est positif à 99%. Parmi les individus non contaminés le test est tout de même positif à 3% (il y a donc des risques de mauvais diagnostic).

Les questions sont alors les suivantes :

- Quelle est la probabilité que le test appliqué à un individu pris au hasard soit positif ?
- Sachant, pour un individu donné, que le test est positif, quelle est probabilité que cet individu soit contaminé ?
- Calculer la probabilité qu'une personne soit réellement non contaminée sachant que son test est négatif.

- $P(P) = 0,0972$
- $P(C/P) = 0,7130$
- $P(\bar{C}/\bar{P}) = 0,9992$

Exercice 2 -On jette deux dés réguliers à quatre faces et on fait la somme X des points obtenus.

- Donner la loi de la variable aléatoire X obtenue.
- Quelle est sa moyenne? Sa variance ?
- Calculer : $P(X < 5)$; $P(X \leq 5)$; $P(3 \leq X < 5)$.
- Quelle est sa fonction de répartition ? Construire son graphe.

Solution –

Tableaux des calculs

Valeurs de X : $X = a + b$; a = le 1^{er} dé et b= le 2^d dé

a \ b	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$X \in \{ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \}$

a) Loi de X

x_i	2	3	4	5	6	7	8	total
p_i	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	1
$x_i p_i$	2/16	6/16	12/16	20/16	18/16	14/16	8/16	80/16=5
$x_i^2 p_i$	4/16	18/16	48/16	100/16	108/16	98/16	64/16	440/16=27,5

b) $E(X) = 5$; $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 27,5 - 25 = 2,5$

c) Calculs :

$$P(X < 5) = \frac{1+2+3}{16} = \frac{6}{16}; \quad P(X \leq 5) = \frac{1+2+3+4}{16} = \frac{10}{16}$$

$$P(3 \leq X < 5) = \frac{2+3}{16} = \frac{5}{16}$$

d) Fonction de répartition : $F(x) = P(X < x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 1/16 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 3/16 & \text{si } 3 < x \leq 4 \\ 6/16 & \text{si } 4 < x \leq 5 \\ 10/16 & \text{si } 5 < x \leq 6 \\ 13/16 & \text{si } 6 < x \leq 7 \\ 15/16 & \text{si } 7 < x \leq 8 \\ 1 & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

Exercice 3 – une variable aléatoire a pour densité de probabilité la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0; 1] \end{cases}$$

- 1) Vérifier que f est une densité de probabilité.
- 2) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
- 3) En utilisant cette fonction de répartition, évaluer les probabilités :

$$P(X \leq \frac{1}{2}) ; P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}) ; P(X \geq \frac{1}{6})$$

4°) Calculer l'espérance mathématique de X. pouvait-on s'y attendre?

5°) Calculer la variance de X.

Exercice 4 - Soit G la fonction de répartition d'une v. a. X :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{m} & \text{si } 0 \leq x < m \\ 1 - e^{-\frac{x}{m}} & \text{si } x \geq m \end{cases}, \text{ où } m \text{ est une constante positive}$$

1°) Calculer $P(X < m)$ et $P(X > m)$.

2°) Déterminer la fonction d.d.p. f de X. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et la médiane de X.

Exercice 5 - Une machine fabrique des pièces qui sont défectueuses 5 fois sur 100. Quelle est la probabilité que, dans un lot de 10 pièces prises au hasard et numérotées de 1 à 10, on ait :

- a) exactement deux pièces défectueuses ;
- b) les pièces n° 1 et 2 défectueuses et les autres en bon état
- c) au moins deux pièces défectueuses.

Solution - Soit X le nombre de pièces défectueuses dans le lot.

$$X \in \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \}$$

Pour une pièce donnée de deux choses l'une : ou elle est défectueuse; ou elle ne l'est pas. On a affaire à une épreuve de Bernoulli, où le Succès est "la pièce est défectueuse". $P(\text{Succès}) = 5/100 = 0,05$. L'état des pièces est indépendante l'une à l'autre. X suit une loi Binomiale $B(n=10; p=0,05)$.

a) A= "obtenir exactement 2 pièces défectueuses" $\Leftrightarrow X=2$

$$P(X=2) = C_{10}^2 (0,05)^2 (0,95)^8 = 0,0746$$

b) B= "les pièces N°1 & 2 sont défectueuses et les autres en bon état..

$$P(B) = 0,05^2 \times 0,95^8 = 0,0017$$

c) C= « au moins deux pièces défectueuses. »

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$= 1 - [0,95^{10} + 10 * 0,05 * 0,95^9] = 1 - 0,9139 = 0,0861$$