UNIVERSITE FHB DE COCODY-ABIDJAN
UFR DES SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION – LICENCE 2 -
STATISTIQUES ET PROBABILITES / Année Universitaire 2021-2022
UE 1. ECUE 2. Statistique mathématique T D - 2heures
TD 5-LOIS NORMALES CORRIGES

Exercice 1 - Les notes obtenues par les étudiants dans un concours se répartissent approximativement normalement avec une moyenne égale à 68 et une variance égale à 100. Les examinateurs du concours veulent donner la mention « Très Bien » aux 5% des étudiants ayant obtenu les meilleures notes. Déterminer la note minimum nécessaire pour obtenir cette mention.

SOLUTION

X : « les notes obtenues dans un concours »

$$X \to N(68,10)$$
$$P(X \geq x) = 0{,}05$$
$$P\left(\frac{X-68}{10} \geq \frac{x-68}{10}\right) = 0{,}05$$
$$P\left(Z \geq \frac{x-68}{10}\right) = 0{,}05$$
$$1 - P\left(Z < \frac{x-68}{10}\right) = 0{,}05$$
$$P\left(Z < \frac{x-68}{10}\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

$0{,}9495 < 0{,}95 < 0{,}9505$

$1{,}64 < \frac{x-68}{10} < 1{,}65 \qquad \Rightarrow x = 84{,}45$

Exercice 2 – Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :

- 56% ont un taux inférieur à 165 cg ;
- 34% ont un taux compris entre 165cg et 180cg ;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quel est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10 000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ? On admet que le taux suit une loi normale dont on déterminera les paramètres m et σ.

SOLUTION

X : « le taux de cholestérol »

Nombre de personnes ayant droit au soin : $n_S = P(X > 182) \times N$

- $P(X > 182) = 1 - P(X \leq 182) = 1 - P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{182-m}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{182-m}{\sigma}\right)$

On sait que :

— $P(X < 165) = 0{,}56$

$P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{165-m}{\sigma}\right) = 0{,}56$

$P\left(Z < \frac{165-m}{\sigma}\right) = 0{,}56$

$0{,}5596 < 0{,}56 < 0{,}5636$

$0{,}15 < \frac{165-m}{\sigma} < 0{,}16 \qquad \Rightarrow 165 - m = 0{,}151.\sigma \quad (1)$

— $P(X > 180) = 0{,}10$

$1 - P(X \leq 180) = 0{,}1$

$P(X \leq 180) = 0{,}9$

$P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{180-m}{\sigma}\right) = 0{,}9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{180-m}{\sigma}\right) = 0{,}9$

$0{,}8997 < 0{,}9 < 0{,}9015$

$1{,}28 < \frac{180-m}{\sigma} < 1{,}29 \qquad \Rightarrow 180 - m = 1{,}2817.\sigma \quad (2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 165 - m = 0{,}151.\sigma & (1) \\ 180 - m = 1{,}2817.\sigma & (2) \end{cases}$$

$$\frac{165 - m}{0{,}151} = \frac{180 - m}{1{,}2817} \Rightarrow \quad m = 162{,}9968 \; et \; \sigma = 13{,}2662$$

Revenons aux personnes nécessitant un soin

$$P(X > 182) = 1 - P\left(Z \leq \frac{182 - m}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{182 - 162{,}9968}{13{,}2662}\right) = 1 - P(Z \leq 1{,}4325)$$
$$= 1 - \pi(1{,}43) = 1 - 0{,}9236 = 0{,}0764$$

Nombre de personnes ayant droit au soin :

$$n_S = P(X > 182) \times N = 0{,}0764 \times 10000 = 764 \; personnes$$

Exercice 3 - Un candidat passant un examen est ajourné si sa note est inférieure à 8; passe un oral si sa note est comprise entre 8 et 12, est admis si sa note est supérieure à 12. On suppose que les notes suivent une loi normale de paramètres μ et σ.; et on suppose que μ = 9 et σ = 3.

a) Calculer la probabilité pour qu'un candidat soit ajourné

b) Calculer la probabilité pour qu'un candidat passe l'oral;

c) Calculer la probabilité pour qu'un candidat soit admis sans oral

d) On considère un échantillon aléatoire de 4 candidats. Quelle est la probabilité que deux de ces candidats soient ajournés ?

SOLUTION

X : « la note obtenue à l'examen » $X \to N(9{,}3)$

$Si \; X < 8 \to Ajourné$

$Si \; 8 \leq X \leq 12 \to Oral$

$Si \; X > 12 \to Admis$

a) Probabilité d'être ajourné

$$P(X < 8) = P\left(\frac{X - 9}{3} < \frac{8 - 9}{3}\right) = P\left(Z < \frac{-1}{3}\right) = 1 - P(Z < 0{,}33) = 1 - \pi(0{,}33) = 1 - 0{,}6293$$
$$= 0{,}3707$$

b) Probabilité de passer à l'oral

$$P(8 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X < 8) = P\left(Z \leq \frac{12 - 9}{3}\right) - P\left(Z \leq \frac{8 - 9}{3}\right)$$
$$= P(Z \leq 1) - P(Z < -0{,}33) = \pi(1) - \big(1 - \pi(0{,}33)\big) = 0{,}8413 + 0{,}6293 - 1$$
$$= 0{,}4706$$

c) Probabilité d'être admis sans oral

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - P\left(Z \leq \frac{12 - 9}{3}\right) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \pi(1) = 1 - 0{,}8413$$
$$= 0{,}1587$$

d) $n = 4$ $\quad \begin{cases} soit \; ajourné \\ soit \; pas \; ajourné \end{cases}$

$$Y : \text{"Nombre de personnes ajournées"} \to \mathcal{B}(n, p)$$
$$avec \; p = P(X < 8) = 0{,}3707 \qquad donc \; q = 1 - p = 0{,}6293$$

Soit D : « 2 des 4 candidats sont ajournés »

$$P(D) = P(Y = 2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = 0{,}3265$$