$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable.

Réponse :

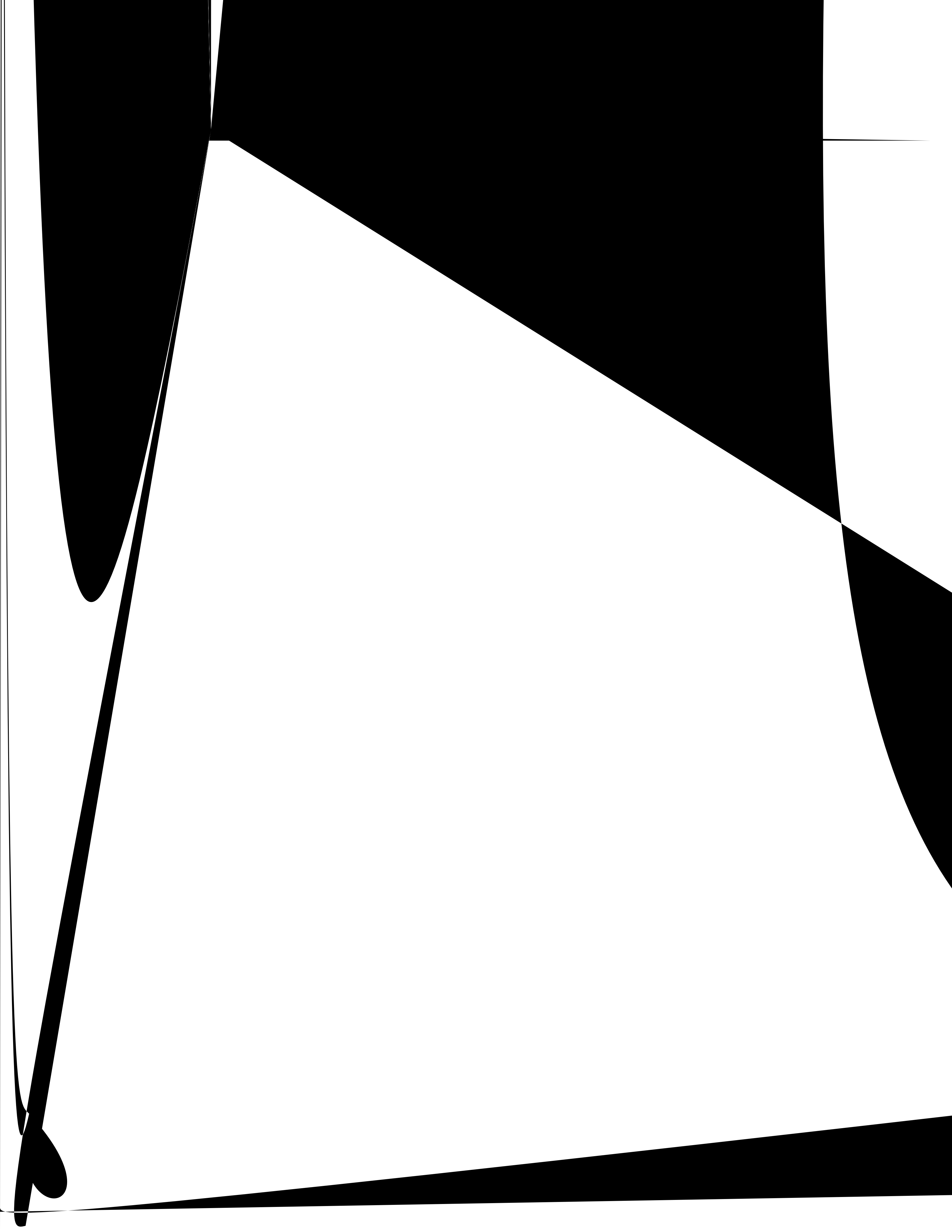
Déterminons les valeurs propres de A.

Polynôme caractéristique est :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

C_3



Suggestion : -2 et $+1$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

D'où $P_A(\lambda) = (5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$

Les valeurs propres λ sont les racines (ou les zéros) de $P_A(\lambda)$.

$P_A(\lambda) = 0$ ssi $\lambda = 5$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$

Nous avons 3 valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$.

<u>Remarque</u> : $P_A(\lambda) = -(\lambda - 5)^1(\lambda-2)^1(\lambda+1)^1$

simple simple simple

A est une matrice carrée d'ordre 3 et elle possède $\boxed{3}$ valeurs propres distinctes.

Donc A est DIAGONALISABLE.

Question suivante : Déterminer des vecteurs propres.

Soit $E_{\lambda_1} = E_5$ le sous-espace vectoriel associé à λ_1.

(On veut caractériser les vecteurs de ce sous-espace vectoriel).

Soit $v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{v \in E_{\lambda_1} \text{ ssi } f(v) = \lambda_1 v}$

où f est l'endomorphisme associé à A.

$v \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow Av = \lambda_1 v$

$\Leftrightarrow (A - \lambda_1 I_3) v = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4-\lambda_1 & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda_1 & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1 = 5$

$$\text{vep}_{\lambda_1} \iff \begin{pmatrix} -4-5 & -6 & 0 \\ 3 & 5-5 & 0 \\ 3 & 6 & 5-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -9x - 6y = 0 & (1) \\ 3x = 0 & (2) \\ 3x + 6y = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v \in E_{\lambda_1}$ ssi $\exists\, z \in \mathbb{R},\ v = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_1$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3,\ \exists\, z \in \mathbb{R},\ v = z v_1 \right\}$$

E_{λ_1} est la droite vectorielle de direction $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On suggère $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 5$ à retenir.

Notons que l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_1 est $k_1 = 1$

car $\lambda_1 = 5$ est une racine simple. $\left(P_A(\lambda) = \underline{(5-\lambda)^{1}}(\dots)\right)$

k_1 = ordre de multiplicité.

En plus $E_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^2, v = z v_1, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{v_1\} \Rightarrow \dim E_{\lambda_1} = 1$.

card (base) = 1.

Constat: $\boxed{\dim E_{\lambda_1} = k_1}$

Sous-espace vectoriel : $E_{\lambda_2} = E_2$

Soit $v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$v \in E_{\lambda_2}$ ssi $f(v) = \lambda_2 v$

ssi $Av = \lambda_2 v$, $\lambda_2 = 2$

ssi $(A - 2I_3)v = 0$

ssi $\begin{pmatrix} -4-2 & -6 & 0 \\ 3 & 5-2 & 0 \\ 3 & 6 & 5-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ssi $\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

rang = 2

$A - 2I_3$

ssi $\begin{cases} -6x-6y=0 & (4) \\ 3x+3y=0 & (5) \\ 3x+6y+3z=0 & (6) \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x+y=0 & (4') \\ x+2y+z=0 & (5') \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y=-x \\ x+2(-x)+z=0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y=-x \\ z=x \end{cases}$

ssi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

v_2

$v \in E_{\lambda_2}$ ssi $\exists x \in \mathbb{R}, v = x v_2$

où $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $E_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^3, \exists x \in \mathbb{R}, v = x v_2 \}$

E_{λ_2} est la droite vectorielle de vecteur directeur v_2.

Une base de E_{λ_2} sera $\{v_2\}$. D'où $\underline{\dim E_{\lambda_2} = 1}$.

Par ailleurs, l'ordre de multiplicité de λ_2 est $k_2 = 1$ puisque λ_2 est une valeur propre simple (racine simple du polynôme caractéristique).

On constate que

$$\boxed{\dim E_{\lambda_2} = k_2}$$

Remarque : Ordre (A) − rang $(A - \lambda I)$ $= \dim E_\lambda$

Autre formule :

$$\boxed{\dim E_\lambda = \text{Card}(\text{base de } E_\lambda)}$$