

Exercices Corrigés  
Corps des nombres complexes

**Exercice 1** –

- 1) Qu'est ce que le conjugué d'un nombre complexe ?
- 2) Déterminer les nombres complexes  $z$  vérifiant :  $(1 + i)z - 1 + i = 0$ .
- 3) Préciser le complexe :

$$z = \frac{1 - i}{2 + i} + \frac{1 - 2i}{1 + i} .$$

**Exercice 2** –

- 1) Déterminer les nombres complexes  $\delta$  tels que :  $\delta^2 = 2 + 2\sqrt{2}i$ .
- 2) Puis, déterminer les nombres complexes  $z$  tels que :  $z^2 + \sqrt{2}z - \frac{\sqrt{2}}{2}i = 0$ .

**Exercice 3** –

- 1) Déterminer les nombres complexes  $\delta$  tels que :  $\delta^2 = 2 - 4i$ .
- 2) Puis, déterminer les nombres complexes  $z$  tels que :  $z^2 + \sqrt{2}z + i = 0$ .

**Exercice 4** – Caractériser la similitude directe :

$$\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad z \longmapsto f(z) = (-1 - \sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i .$$

**Exercice 5** – Caractériser la similitude directe :  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  ,  $z \mapsto f(z) = (3 - 3i)z + 2$ .

**Exercice 6** – (Extrait de l'examen d'octobre 2010)

- 1) Déterminer les nombres complexes  $\delta$  tels que :  $\delta^2 = -2i + 6$ .
- 2) Puis, déterminer les nombres complexes  $z$  tels que :  $z^2 + (1 - i)z - \frac{3}{2} = 0$ .
- 3) En déduire une factorisation de  $z^2 + (1 - i)z - \frac{3}{2}$ .

**Exercice 7** – (Extrait de l'examen d'octobre 2010)

On considère la similitude :

$$f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} : z \mapsto f(z) = -(\sqrt{3} - i)z + i .$$

- 1) Déterminer les points fixes de  $f$ .
- 2) Caractériser la similitude  $f$  (c.a.d. préciser sa décomposition en composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre).

**Correction de l'exercice 1 :**

- 1) Si  $a$  et  $b$  sont des réels, le conjugué du complexe  $a + ib$  est  $a - ib$ . On prendra garde que si

$a$  et  $b$  sont des complexes le conjugué de  $a + ib$  est  $\bar{a} - i\bar{b}$ .

2) L'équation équivaut à :  $(1 + i)z = 1 - i$ . Il en résulte :

$$z = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{2} = \frac{1 - 2i - 1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

3) On trouve :

$$z = \frac{(1 - i)(2 - i)}{5} + \frac{(1 - 2i)(1 - i)}{2} = \frac{1 - 3i}{5} + \frac{-1 - 3i}{2} = \frac{2 - 6i - 5 - 15i}{10} = \frac{-3 - 21i}{10} .$$

### Correction de l'exercice 2 :

1) Comme  $2 + 2\sqrt{2}i \neq 0$ , nous savons que l'équation  $\delta^2 = 2 + 2\sqrt{2}i$  admet deux solutions. Cherchons  $\delta$  sous la forme  $\delta = x + iy$  avec  $x, y$  réels. Comme  $\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ , l'équation  $\delta^2 = 2 + 2\sqrt{2}i$  équivaut à :

$$x^2 - y^2 = 2 \quad \text{et} \quad 2xy = 2\sqrt{2} .$$

D'autre part, on obtient l'égalité entre modules  $|\delta|^2 = |2 + 2\sqrt{2}i|$ . Il en résulte :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} .$$

Ainsi,  $(x, y)$  est solution de :

$$x^2 - y^2 = 2 \quad , \quad x^2 + y^2 = 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad xy > 0 .$$

D'où

$$x^2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \quad , \quad y^2 = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} = \sqrt{3} - 1 \quad , \quad xy > 0 .$$

D'où

$$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}} \quad , \quad y = \pm\sqrt{\sqrt{3} - 1} \quad , \quad xy > 0 .$$

D'où, puisque  $x$  et  $y$  sont de même signe :

$$\delta = \sqrt{1 + \sqrt{3}} + i\sqrt{\sqrt{3} - 1} \quad \text{ou} \quad \delta = -\sqrt{1 + \sqrt{3}} - i\sqrt{\sqrt{3} - 1} .$$

Comme  $2 + 2\sqrt{2}i \neq 0$ , nous savons que l'équation  $\delta^2 = 2 + 2\sqrt{2}i$  admet deux solutions. Les deux valeurs ci-dessus sont donc les deux solutions cherchées.

2) Considérons l'équation du deuxième degré à coefficients complexes :

$$z^2 + \sqrt{2}z - \frac{\sqrt{2}}{2}i = 0 .$$

Les racines de cette équation sont :

$$u_1 = \frac{-\sqrt{2} + \delta}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2} - \delta}{2} ,$$

où  $\delta$  est une solution de  $\delta^2 = (\sqrt{2})^2 - 4(-\frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2 + 2\sqrt{2}i$ . D'après la question précédente, on obtient :

$$u_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{3}} + i\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2}, \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sqrt{3}} - i\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2}.$$

**Remarque sur la rédaction :** Le principe de la rédaction du 1) est d'affirmer qu'il y a deux solutions en s'appuyant sur le cours. On montre ensuite que les solutions cherchées sont solutions de trois équations, que les solutions de ces trois équations sont  $\pm(\sqrt{1 + \sqrt{3}} + i\sqrt{\sqrt{3} - 1})$ .

Ainsi,  $\pm(\sqrt{1 + \sqrt{5}} - i\sqrt{-1 + \sqrt{5}})$  sont les complexes  $\delta$  de carré  $2 + 4i$ .

Pour la rédaction du 2), il faut utiliser le cours en choisissant un complexe dont le carré est  $2 + 2\sqrt{2}i$ . On prendra  $\sqrt{1 + \sqrt{3}} + i\sqrt{\sqrt{3} - 1}$  et on déroule la formule.

### Correction de l'exercice 3 :

1) Comme  $2 + 4i \neq 0$ , nous savons que l'équation  $\delta^2 = 2 - 4i$  admet deux solutions. Cherchons  $\delta$  sous la forme  $\delta = x + iy$  avec  $x, y$  réels. Comme  $\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ , l'équation  $\delta^2 = 2 - 4i$  équivaut à :

$$x^2 - y^2 = 2 \quad \text{et} \quad 2xy = -4.$$

D'autre part, on obtient l'égalité entre modules  $|\delta|^2 = |2 - 4i|$ . Il en résulte :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}.$$

Ainsi,  $(x, y)$  est solution de :

$$x^2 - y^2 = 2, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{20} \quad \text{et} \quad xy < 0.$$

D'où

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}, \quad y^2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = -1 + \sqrt{5}, \quad xy < 0.$$

D'où

$$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{5}}, \quad y = \pm\sqrt{-1 + \sqrt{5}}, \quad xy < 0.$$

D'où, puisque  $x$  et  $y$  sont de signe contraire :

$$\delta = \sqrt{1 + \sqrt{5}} - i\sqrt{-1 + \sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad \delta = -\sqrt{1 + \sqrt{5}} + i\sqrt{-1 + \sqrt{5}}.$$

Comme  $2 - 4i \neq 0$ , nous savons que l'équation  $\delta^2 = 2 + 4i$  admet deux solutions. Les deux valeurs ci-dessus sont donc les deux solutions cherchées.

2) Considérons l'équation du deuxième degré à coefficients complexes :

$$z^2 + \sqrt{2}z + i = 0.$$

Les racines de cette équation sont :

$$u_1 = \frac{-\sqrt{2} + \delta}{2}, \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2} - \delta}{2},$$

où  $\delta$  est une solution de  $\delta^2 = (\sqrt{2})^2 - 4(i) = 2 - 4i$ . D'après la question précédente, on obtient :

$$u_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{5}} - i\sqrt{-1 + \sqrt{5}}}{2}, \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sqrt{5}} + i\sqrt{-1 + \sqrt{5}}}{2}.$$

**Correction de l'exercice 4 :**

Les points fixes de  $f$  sont les complexes  $z$  solutions de l'équation  $f(z) = z$ , soit :

$$z = (-1 - \sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i, \quad \text{soit :}$$

$$z + z + \sqrt{3}iz = 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i, \quad \text{soit :}$$

$$z(2 + \sqrt{3}i) = 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i, \quad \text{soit :}$$

$$z = \frac{2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i}{2 + \sqrt{3}i} = \frac{[2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i](2 - \sqrt{3}i)}{(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)}, \quad \text{soit :}$$

$$z = \frac{7 + 7i}{7} = 1 + i.$$

La similitude  $f$  a un donc un unique point fixe :

$$z_0 = 1 + i.$$

2) Le module de  $a = (-1 - \sqrt{3}i)$  est  $\sqrt{1 + 3} = 2$ . Ainsi le complexe

$$\frac{a}{|a|} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

est de module 1. On remarque que  $-\frac{2\pi}{3}$  a pour cosinus  $\frac{-1}{2}$  et pour sinus  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (visualiser avec un cercle trigonométrique). Il en résulte que l'argument de  $a$  est  $-\frac{2\pi}{3}$ . En résumé,  $a$  est le complexe de module 2 et d'argument  $-\frac{2\pi}{3}$ . Il résulte du cours que si  $M$  est l'affixe du complexe  $z$  et  $M'$  du complexe  $f(z)$ , le point  $M'$  se déduit de  $M$  par la composée de la rotation de centre  $z_0$  d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$  et de l'homothétie de centre  $z_0$  et de rapport 2.

**Correction de l'exercice 5 :**

Les points fixes de  $f$  sont les complexes  $z$  solutions de l'équation  $f(z) = z$ , soit :

$$z = (3 - 3i)z + 2, \quad \text{soit :}$$

$$z - 3z + 3iz = 2, \quad \text{soit :}$$

$$z(-2 + 3i) = 2, \quad \text{soit :}$$

$$z = \frac{2}{-2 + 3i} = \frac{2(-2 - 3i)}{(-2 + 3i)(-2 - 3i)}, \quad \text{soit :}$$

$$z = \frac{-4 - 6i}{13} .$$

La similitude  $f$  a un donc un unique point fixe :

$$z_0 = \frac{-4 - 6i}{13} .$$

2) Le module de  $a = 3 - 3i$  est  $|3 - 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ . Ainsi le complexe

$$\frac{a}{|a|} = \frac{3 - 3i}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

est de module 1. On remarque que  $-\frac{\pi}{4}$  a pour cosinus  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et pour sinus  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Il en résulte que l'argument de  $a$  est  $-\frac{\pi}{4}$ . En résumé,  $a$  est le complexe de module  $3\sqrt{2}$  et d'argument  $-\frac{\pi}{4}$ . Il résulte du cours que si  $M$  est l'affixe du complexe  $z$  et  $M'$  du complexe  $f(z)$ , le point  $M'$  se déduit de  $M$  par la composée de la rotation de centre  $z_0$  d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  et de l'homothétie de centre  $z_0$  et de rapport  $3\sqrt{2}$ .

### Correction de l'exercice 6 :

Nous savons que l'équation  $\delta \in \mathbf{C}$  et  $\delta^2 = -2i + 6$  a deux racines. Cherchons ses racines sous la forme  $\delta = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels. Nous remarquons que :

$$x^2 + y^2 = |\delta|^2 = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} .$$

Ainsi, les réels  $x$  et  $s$  sont solutions du système :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 6 \\ x^2 + y^2 &= 2\sqrt{10} \\ 2xy &= -2 . \end{aligned}$$

Nous trouvons :

$$\delta_1 = \sqrt{3 + \sqrt{10}} - i\sqrt{\sqrt{10} - 3} \quad \text{et} \quad \delta_1 = -\sqrt{3 + \sqrt{10}} + i\sqrt{\sqrt{10} - 3} .$$

2) Le discriminant de l'équation est  $\Delta = (1 - i)^2 - 4(-\frac{3}{2}) = -2i + 6$ . D'après la question précédente le carré de  $\delta_1 = \sqrt{3 + \sqrt{10}} - i\sqrt{\sqrt{10} - 3}$  est égal à  $\Delta$ . Les complexes  $z$  tels que :  $z^2 + (1 - i)z - \frac{3}{2} = 0$  sont donc :

$$z_1 = \frac{i - 1 + \delta_1}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i - 1 - \delta_1}{2} .$$

ou encore :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{10}} - 1 + i(1 - \sqrt{\sqrt{10} - 3})}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3 + \sqrt{10}} - 1 + i(1 + \sqrt{\sqrt{10} - 3})}{2} .$$

3) Pour tout  $z$  complexe :  $z^2 + (1 - i)z - \frac{3}{2} = (z - z_1)(z - z_2)$ .

**Correction de l'exercice 7 :**

L'application  $f$  a un unique point fixe :

$$z_0 = \frac{-1 + i(1 + \sqrt{3})}{5 + 2\sqrt{3}} \quad .$$

Soit  $a = -(\sqrt{3} - i)$  le module de  $a$  est 2, son argument est  $\frac{5\pi}{6}$ . Autrement dit :

$$a = -(\sqrt{3} - i) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} \quad .$$

Il s'en suit que  $f$  correspond à la transformation géométrique du plan obtenue en composant la rotation de centre  $z_0$  et d'angle  $\frac{5\pi}{6}$  avec l'homothétie de centre  $z_0$  et de rapport 2.