Fomesoutra.com
ça soutra !

TD DE MATHEMATIQUES L2 UCUE 3

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et

u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n = 0$.

1. Montrer que u n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Exercice 2

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Expliquer sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 4

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.

2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de R^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale.

4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 5:

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(A-I)^2$. Montrer que $A^n = nA + (1-n)I$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient $P(X) = (X-1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q. En remarquant que $P(A) = 0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q, retrouver A^n.

4. (a) Montrer que l'image de $\mathbb{R}^3$ par l'endomorphisme u est un sous-espace vectoriel de dimension 1, on notera ε_2 une base.

(b) Déterminer un vecteur ε_3 tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Déterminer un vecteur propre ε_1 de u non colinéaire à ε_2.

(c) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de u dans cette base, ainsi que les matrices de passage.

(d) Retrouver A_n.