Université Ouaga3S

Année académique 2017 – 2018
Faculté des Sciences et Technologie
LMI3 – Licence ST, Mathématique, Informatique.

Probabilité : Examen final

Durée : 02 h 30

Prof : Ibrahim ZANGRÉ

⋆⋆⋆

- *Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
- *On accordera la plus grande attention à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Si un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il(elle) le signalera sur sa copie et poursuivre la composition en expliquant les raisons de ses initiatives.*
- *Documents ou calculatrices interdit(e)s.* ***Présentation de la copie : 02 pts.***

⋆⋆⋆

Exercice 1 : Cours (1 + 1.5 + 1.5 = 04 pts)

1.1 Donner la définition et les propriétés de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

1.2 Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$. Définir la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B/A)$. Que conclure si A et B sont indépendants ?

1.3 Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner les conditions pour que F soit la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X. En supposant ces conditions vérifiées, donner la loi de X en supposant qu'il s'agit d'une variable discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

⋆⋆⋆

Exercice 2 : Savoir faire (2 + 3 + 3 = 08 pts)

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2.1 Déterminer la loi de $U = \ln(X)$.

2.2 On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la loi de $V = \min(X, a)$.

2.3 On fixe $b \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la loi de $W = \max(X, b)$.

⋆⋆⋆

Exercice 3 : Loi de Pareto (1 + 1.5 + 1.5 + 2 = 06 pts)

Soient a et b deux réels strictements positifs et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3.1 Montrer qu'il existe une variable aléatoire X de densité f.

3.2 Sous quelles conditions X admet-elle une espérance ? La calculer dans ce cas.

3.3 Sous quelles conditions X admet-elle une variance ? La calculer dans ce cas.

3.4 On pose $a = b = 1$. Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition F_X de X.

P.S : Cette loi porte le nom de l'économiste italien Vilfredo Pareto qui proposa dès 1895 un modèle théorique sur la répartition inégale des richesses. On utilise cette loi pour expliquer le principe général (empirique) des 20/80 selon lequel 20% des efforts sont à la base de 80% des résultats. Ce principe s'observe dans plusieurs domaines comme l'économie, le management, le marketing, les inégalités sociales, ...

⋆

FIN

⋆⋆⋆

Ouaga3S

Année académique 2017 – 2018
Faculté des Sciences et Technologie
LMI3 – Licence ST, Mathématique, Informatique.

Probabilité : Devoir sur table

Durée : 02 heures

Prof : Ibrahim ZANGRÉ

⋆⋆⋆

- *Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
- *On accordera la plus grande attention à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Si un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il(elle) le signalera sur sa copie et poursuivre la composition en expliquant les raisons de ses initiatives.*
- *Documents ou calculatrices interdit(e)s.*

⋆⋆⋆

Exercice 1 (Cours : (1+1+1+1) = 04 pts)

1.1 Donner la définition d'une tribu sur Ω, où Ω est un ensemble non vide.

1.2 Donner la définition d'une mesure positive sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$.

1.3 Écrire deux exemples de loi discrète et deux exemples de loi absolument continue.

1.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner les conditions pour que f soit la densité d'une certaine variable aléatoire X. En supposant ces conditions vérifiées, écrire la fonction de répartition de X.

⋆⋆⋆

Exercice 2 (Savoir faire : (1+1) + (1+1) + (1.5+1.5) + (2+2)= 11 pts)

2.1 Considérons la mesure discrète sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $\mu_1 = \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_3$. Calculer $\mu_1([0, 3/2])$, puis montrer que μ_1 est une probabilité.

2.2 Considérons la mesure discrète sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par $\mu_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}\delta_n$.

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\mu_2(\{1, 2, \cdots, k\})$ puis $\mu_2(\mathbb{N})$.

2.3 Considérons la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par $\mu_3 = \mathbb{1}_{[0,1]}\lambda_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\delta_{1/\sqrt{n}}$, où $\mathbb{1}_{[0,1]}\lambda_1$ est la mesure de densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1. Calculer $\mu_3([1/2, 2])$, puis $\mu_3(\mathbb{R})$.

2.4 Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi des variables $Y = [X]$ et $Z = X^2$. (La notation $[\cdot]$ désigne la partie entière).

⋆⋆⋆

Exercice 3 (Simulation stochastique : (1 + 1.5 + 2.5) = 05 pts)

Soit U une variable de loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

3.1 Calculer la fonction de répartition F_X de X.

3.2 Calculer la fonction réciproque F_X^{-1} de F_X.

3.3 Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = F_X^{-1}(U)$.

3.4 **[Bonus 01 pt]** En déduire une méthode pour simuler la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

⋆

FIN

⋆⋆⋆

Faculté des Sciences et Technologie
Année universitaire 2018 – 2019
LMI3 – Licence ST, Mathématique, Informatique.

UEF MTH1602 – **Probabilité : examen**

Durée : 03 heures

Prof : Ibrahim ZANGRÉ

⋆⋆⋆

- *Les 04 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
- *On accordera la plus grande attention à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Si un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il(elle) le signalera sur sa copie et poursuivre la composition en expliquant les raisons de ses initiatives.*
- *Documents ou calculatrices interdit(e)s.* ***Présentation de la copie : 01 pt.***

⋆⋆⋆

Exercice 1 **($1 + 1 + 1 + 1 = 04$ pts)**

1.1 Donner la définition d'une tribu sur Ω, où Ω est un ensemble non vide.

1.2 Donner la définition d'une mesure positive sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$.

1.3 Écrire deux exemples de loi discrète et deux exemples de loi absolument continue.

1.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner les conditions pour que f soit la densité d'une certaine variable aléatoire X. En supposant ces conditions vérifiées, écrire la fonction de répartition de X.

⋆⋆⋆

Exercice 2 **($1 + 1 + (1 + 1) = 04$ pts)**

2.1 Considérons la mesure discrète sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par $\mu_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}\delta_n$.
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\mu_1(\{1, 2, \cdots, k\})$ puis $\mu_1(\mathbb{N})$.

2.2 Considérons la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par $\mu_2 = \mathbb{1}_{[0,1]}\lambda_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\delta_{1/\sqrt{n}}$, où $\mathbb{1}_{[0,1]}\lambda_1$ est la mesure de densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1. Calculer $\mu_2([1/2, 2])$, puis $\mu_2(\mathbb{R})$.

2.3 Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la loi des variables $Y = [X]$ et $Z = X^2$. (La notation $[\cdot]$ désigne la partie entière).

⋆⋆⋆

Exercice 3 **($1 + 1.5 + 1.5 = 04$ pts)**
Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

3.1 Déterminer la loi de $U = \ln(X)$.

3.2 On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la loi de $V = \min(X, a)$.

3.3 On fixe $b \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la loi de $W = \max(X, b)$.

$\star\star\star$

Exercice 4 **: Un problème de tige brisée ($(1+1) + 1 + 1 + 1 + 2 = 07$ pts)**
Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z = \frac{1-X}{X}.$$

4.1 Calculer la fonction de répartition de Z. Représenter-la graphiquement.

4.2 La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, la calculer.

4.3 Pour quelles valeurs du réel a, la variable aléatoire Z^a est-elle intégrable ?

4.4 Expliquer sans calcul pourquoi Z et $1/Z$ ont même loi.

4.5 On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. On notera Y la longueur du morceau gauche. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

$\star$
$\mathscr{FIN}$
$\star\star\star$

Faculté des Sciences et Technologie
Année universitaire 2018 – 2019
LMI3 – Licence ST, Mathématique, Informatique.

UEF MTH1602 – Probabilité : examen

Durée : 03 heures

Prof : Ibrahim ZANGRÉ

⋆⋆⋆

- *Les 04 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
- *On accordera la plus grande attention à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Si un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il(elle) le signalera sur sa copie et poursuivre la composition en expliquant les raisons de ses initiatives.*
- *Documents ou calculatrices interdit(e)s.* ***Présentation de la copie : 01 pt.***

⋆⋆⋆

Exercice 1 **(1 + 1 + 1 + 1 = 04 pts)**

1.1 Donner la définition d'une tribu sur Ω, où Ω est un ensemble non vide.

1.2 Donner la définition d'une mesure positive sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$.

1.3 Écrire deux exemples de loi discrète et deux exemples de loi absolument continue.

1.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner les conditions pour que f soit la densité d'une certaine variable aléatoire X. En supposant ces conditions vérifiées, écrire la fonction de répartition de X.

⋆⋆⋆

Exercice 2 **(1 + 1 + (1 + 1) = 04 pts)**

2.1 Considérons la mesure discrète sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par $\mu_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}\delta_n$.
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\mu_1(\{1, 2, \cdots, k\})$ puis $\mu_1(\mathbb{N})$.

2.2 Considérons la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par $\mu_2 = \mathbb{1}_{[0,1]}\lambda_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\delta_{1/\sqrt{n}}$, où $\mathbb{1}_{[0,1]}\lambda_1$ est la mesure de densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1. Calculer $\mu_2([1/2, 2])$, puis $\mu_2(\mathbb{R})$.

2.3 Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la loi des variables $Y = [X]$ et $Z = X^2$. (La notation $[\cdot]$ désigne la partie entière).

⋆⋆⋆

Exercice 3 (**1 + 1.5 + 1.5 = 04 pts**)

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

3.1 Déterminer la loi de $U = \ln(X)$.

3.2 On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la loi de $V = \min(X, a)$.

3.3 On fixe $b \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la loi de $W = \max(X, b)$.

⋆⋆⋆

Exercice 4 : **Un problème de tige brisée ((1+1) + 1 + 1 + 1 + 2 = 07 pts)**

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. On pose

$$Z = \frac{1 - X}{X}.$$

4.1 Calculer la fonction de répartition de Z. Représenter-la graphiquement.

4.2 La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, la calculer.

4.3 Pour quelles valeurs du réel a, la variable aléatoire Z^a est-elle intégrable ?

4.4 Expliquer sans calcul pourquoi Z et $1/Z$ ont même loi.

4.5 On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$. On notera Y la longueur du morceau gauche. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

⋆

FIN

⋆⋆⋆