Université Ouaga3S
Tel: 65 52 36 36/72 91 14 54
Site web: www.univ-ouaga3s.org
Année Académique: 2019-2020

FST
LMI3
Septembre 2020

MODULE: Mesure et Intégration

Session de remplacement

Durée: *3 heures*

⋆⋆⋆

Préliminaires

- *Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
- *On accordera la plus grande attention à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

Exercice 1 ♣ ***Questions de cours*** ♣ ***4 points*** ♣

1. *Donner la définition d'une fonction mesurable, (1 point)*
2. *Soit X un ensemble non vide.*
   (a) *Donner la définition d'une mesure positive μ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. (1 point)*
   (b) *Décrire $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est une suite croissante de partie. (2 points)*

⋆⋆⋆

Exercice 2 ♣ ***Savoir faire*** ♣ ***8 points*** ♣
Les deux questions sont indépendantes.

1. *Soit l'espace mesurable $(X, \mathcal{T})$.*
   (a) *Soient $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, n mesures définies sur une même tribu $\mathcal{T}$ d'un ensemble X. Soient également $a_1, a_2, .., a_n$ n réels positifs. On définit alors une application ν de $\mathcal{T}$. dans $[0, +\infty]$ en posant, pour tout $T \in \mathcal{T}$*
   $$\nu(T) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k (T)$$
   Cette application ν est-elle une mesure sur la tribu $\mathcal{T}$? (2 points)
   (b) *soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{T})$*

   Si f est une fonction mesurable positive à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$,montrer que
   $$\int_X f d(\mu_1 + \mu_2) = \int_X f d\mu_1 + \int_X f d\mu_2 \quad \text{(3points)}$$
   Que dire pour une fonction mesurable de signe quelconque? (2 points)

2. *On considère une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de fonctions réelles définies sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = \frac{2^{n+1}x}{1+2^n n x^2}$

   (a) *Calculer* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *(1 points)*

   (b) *Calculer et comparer* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ *et* $\int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$ *(0.5 point +0.5 point)*

⋆⋆⋆

Exercice 3 ♣ ***Approfondissement*** ♣ ***8 points*** ♣

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace de mesure.*

On rappelle qu'une partie N *de* X *est* μ*-négligeable s'il existe au moins un* $B \in \mathcal{B}$ *tel que* $N \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$. *Notons* $\mathcal{N}_\mu$ *l'ensemble des* μ*-négligeables.*

1. *Vérifier que* $\varnothing \in \mathcal{N}_\mu$.*(2 points)*

2. *Montrer que* $\mathcal{N}_\mu$ *est héréditaire, c'est-à-dire*

$$B, B' \in \mathcal{P}(X),\ B' \subset B, B \in \mathcal{N}_\mu \Longrightarrow B' \subset \mathcal{N}_\mu \quad (3points)$$

3. *Montrer que* $\mathcal{N}_\mu$ *est stable pour la réunion dénombrable.(3 points)*

⋆⋆⋆

FIN

⋆⋆⋆

Le succès se trouve au bout de l'effort!!!

Université Ouaga3S
Tel: 65 52 36 36/72 91 14 54
Site web: www.univ-ouaga3s.org
Année Académique: 2020-2021

FST
LMI3
Mars 2021

Enseignant: Pr. NAKOULIMA

MODULE: Mesure et Intégration.

Examen de fin de cours

Durée: *3 heures*

⋆⋆⋆

Préliminaires

- *Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.*
- *On accordera la plus grande attention à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

Exercice 1 ***(Questions d'assimilation du cours) (4 points).***

1. *Définir les notions suivantes: mesure, application mesurable, espace mesuré complet.*
2. *Énoncer précisément sans démonstrations le théorème de dérivation sous le signe intégral d'une intégrale dépendant d'un paramètre, en supposant que la dépendance par rapport au paramètre est C^1.*

⋆⋆⋆

Exercice 2 ***(Savoir-Faire) (8 points).***
Les trois questions sont indépendantes.

1. *Soit $\mathcal{A}$ une classe de parties de Ω telle que $\Omega \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ soit stable par passage au complémentaire, $\mathcal{A}$ soit stable par intersection finie et $\mathcal{A}$ soit stable par réunion croissante. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.*
2. *Montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que, pour tout $a \in \mathbb{R}_\star^+$:*

$$\int_0^a x^{-\frac{1}{2}} e^{2x} dx \leq \frac{3}{2} a^{\frac{1}{6}} e^{2a}.$$

3. *Pour tout $x \geq 0$, on pose $f(x) = \int_{[0,1]} \frac{\exp\left(-x\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2} d\lambda(t)$.*
   (a) *Montrer que f est bien définie; calculer $f(0)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.*
   (b) *Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, calculer f' en fonction d'une intégrale et donner un équivalent de f' au voisinage de l'infini (on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).*

$\star\star\star$

Exercice 3 *(Approfondissement) (8 points).*
Les deux questions sont indépendantes.

1. *Soit* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *un espace mesurable. On appelle mesure de comptage sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *la mesure* μ *définie sur* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *par* $\mu(A) = card(A)$ *si* A *est fini, et* $\mu(A) = +\infty$ *sinon.*

   Soit $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$ *muni de* $\nu = \mu \otimes \mu$ *produit des mesures de comptage sur* $\mathbb{N}$. *On définit* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ *par*

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & si \quad m = n \\ -1 & si \quad m = n+1 \\ 0 & si \quad sinon \end{cases}$$

   (a) *Calculer* $\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(m)\, d\mu(n)$ *et* $\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(n)\, d\mu(m)$.

   (b) *Qu'en déduisez-vous?*

   (c) *Retrouver ce résultat directement.*

2. *Montrer que ni l'inclusion* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *ni celle* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *ne sont vraies.* λ *désigne la mesure de Lebesgue* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$\star\star\star$

$\mathcal{FIN}$

$\star\star\star$

Université Ouaga-3S

Année 2022/2023

MI3/S5 : Mesure et intégration

Examen de fin de cours

Durée : 3 heures

Le sujet se compose de trois (3) exercices indépendants. Le barème détaillé se trouve à la fin du sujet.

Exerice 1 [10 points]

1°) Donner la définition d'une σ-algèbre (ou tribu) $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble non vide Ω.

2°) Soit $\mathcal{A}$ une classe de parties de Ω telle que

i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

ii) $\mathcal{A}$ est stable pour le passage au complémentaire.

iii) $\mathcal{A}$ est stable pour l'intersection finie.

iv) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω.

3°) Soit E un ensemble non vide. On pose

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(E) : B \text{ est dénombrale ou} B^c = E \setminus B \text{ est dénombrable}\}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre de parties de E.

4°) Soit X un ensemble non vide et soit $Y \subset X$. On pose

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : A \subset Y \text{ ou } A^c = X \setminus A \subset Y\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Exercice 2 [4 points]

1°) Pour $0 < M < \infty$, considérons la fonction $\varphi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$t \in \mathbb{R},\ \varphi_M(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad |t| \leq M \\ M & \text{si} \quad t > M \\ -M & \text{si} \quad t < -M \end{cases}$$

Esquisser la courbe représentative de φ_M et dire si φ_M est continue.

2°) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. On considère f une application mesurable de X dans $\mathbb{R}$ et on pose

$$x \in X, \ f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq M \\ M & \text{si} \quad f(x) > M \\ -M & \text{si} \quad f(x) < -M \end{cases}$$

Exprimer f_M en fonction de φ_M et f et en déduire que f_M est mesurable.

Exercice 3 [6 points]

1°) Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure.

a) Quand dit-on que μ est une mesure finie ? une mesure σ-finie ?

b) On se fixe $A \in \mathcal{F}$ et on pose

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \in A \\ 2 & \quad \textit{sinon} \end{cases} .$$

Montrer que f est mesurable et calculer $\int_X f\, d\mu$. [Indication : écrire f comme fonction étagée sous forme canonique.]

2°) On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesue restreinte à la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -4 \leq x < -3 \\ 5 & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Calculer et comparer les intégrales $\int_{-4}^{4} f(x)\, dx$ et $\int_{[-4,4]} f\, d\lambda$.

Barême

Exercice 1 = 10 points : 1°) = 1, 2°) = 3, 3°) = 3, 4°) = 3;

Exercice 2 = 4 points :1°) = 1, 2°) = 3

Exercice 3 = 6 points : 1°) = 4 = 2 + 2, 2°) = 2.