

Travaux Dirigés de Probabilités

Exercice 1 Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probablisable et $P_i (i \in \mathbb{N})$ une suite de probabilité définie sur (Ω, \mathcal{F}) . On considère une suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réels positifs tels que $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$ et

on définit, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i P_i(A)$.

1. Montrer que P est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .
2. Montrons que si φ est une application P -intégrable, alors φ est P_i -intégrable pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\int_{\Omega} \varphi dP = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \int_{\Omega} \varphi dP_i.$$

3. On suppose que $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ et que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i > 0$ et $P_i = 2^{i+1} \mathbb{1}_{[2^{-i-1}, 2^{-i}[} \lambda^{(1)}$ où $\lambda^{(1)}$ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Montrer que l'application mesurable positive $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{-1} \mathbb{1}_{[2^{-i-1}, 2^{-i}[}$ est P_i -intégrable pour tout $i \in \mathbb{N}$, mais n'est pas P -intégrable.

Exercice 2 Montrer qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d est discrète si, et seulement si, il existe une partie dénombrable D de \mathbb{R}^d telle que $P(X \in D) = 1$. Montrer que dans ce cas la loi du vecteur aléatoire X s'écrit est $P_X = \sum_{x \in D} P(X = x) \delta_x$.

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probablisé (Ω, \mathcal{F}, P) et indépendantes: X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} dont la loi est donnée par $P(X = k) = p_k$, $k \in \mathbb{N}$, et Y est de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire XY . Que peut on dire de F ?

Exercice 4

1. Sur un espace probablisé (Ω, \mathcal{F}, P) , on considère X une v.a.r centrée et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$a \leq E[(a - X) \mathbb{1}_{\{X \leq a\}}] \leq (P(X \leq a))^{1/2} \sqrt{\sigma^2 + a^2}.$$

2. En déduire que

$$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

3. Une usine fabrique chaque semaine un nombre aléatoire Y d'objets. On suppose $E(Y) = 100$ et $V(Y) = 400$. Trouver à l'aide de la question précédente un majorant de la probabilité que la production hebdomadaire dépasse 120. Comparer ce résultat avec celui obtenu par application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

Exercice 5 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable convexe. Soit X v.a.r. intégrable telle que $\varphi(X)$ est intégrable. Montrer que $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$.

Exercice 6 Soit (X, Y) un couple indépendant de v.a.r. On suppose que X est uniformément distribuée sur $[0, 1]$ et Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. Calculer la loi de la v.a.r. $Z = X + Y$.

Exercice 7 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ où $n, m \in \mathbb{N}^*$, $0 < p < 1$ sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) .

1. Montrer que la v.a.r $X + Y$ est une v.a.r binomiale de loi $B(n + m, p)$.
2. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = k$ où $k \in \mathbb{N}$ est fixé?

Exercice 8 Soient U et V des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$.

1. Calculer $P(\inf(U, V) \geq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la f.d.r de $\inf(U, V)$.
3. Calculer la densité de $U + V$.
4. Calculer $P(|U - V| \leq 1/10)$.

Exercice 9 Soient U de loi uniforme sur $[0; 1]$ et X de loi exponentielle de paramètre 1 deux variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Calculer $P(\sup(U; X) \leq t)$ dans les 3 cas suivants : $t < 0, t \in [0; 1], t > 1$.
2. Dessiner la fonction de répartition de $\sup(U; X)$.

Exercice 10 Soient A et B deux v.a.r indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Quelle est la probabilité que le polynôme $x^2 - 2Ax + B$ ait:

1. deux racines réelles distinctes.
2. deux racines complexes et non réelles.
3. une racine double.
4. Traiter les questions précédentes en utilisant la loi de la v.a.r $\Delta = A^2 - B$.

Exercice 11 Soit X une v.a à valeurs dans \mathbb{R}^2 de loi $P_X = \sum_{k \geq 1, l \geq 1} \frac{1}{2^{k+l}} \delta_{(k, l)}$ et X_1, X_2 ses composantes dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{k > 1} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k > 2} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

2. Calculer l'espérance et la matrice de dispersion de X .
3. Déterminer la loi de la v.a.r $Y = \sup(X_1, X_2)$.
4. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X_1 + X_2$.

Exercice 12 Soit $(X; Y)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^2$ de densité $(x; y) \mapsto \frac{2}{\pi} \exp(-x(1+y^2)) \mathbb{1}_{\{x \geq 0; y \geq 0\}}$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Calculer la densité de X .
2. Calculer la densité de Y .

Exercice 13

1. Soit X une v.a qui suit une loi normale centrée réduite. On pose $Y = aX + b$. Déterminer la loi de Y .
2. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}$. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Soit U une variable de loi exponentielle de paramètre 1 et soit V une variable uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que U et V sont indépendantes. Alors, si on définit $X = \sqrt{U} \cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{U} \sin(2\pi V)$. Montrer que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 14 Soit $(X; Y)$ variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} de loi de densité

$$f : (x, y) \mapsto \frac{3}{4} \exp(-|x + 2y| - |x - y|).$$

1. Montrer que f est effectivement une densité de probabilité.
2. Calculer la densité de la loi de $(X + 2Y; X - Y)$ puis les densités des lois de X et Y .

Exercice 15 Soit (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^2$ de densité

$$(x, y) \mapsto \frac{\exp(-(xy)^{1/4})}{4\pi(y\sqrt{x} + x\sqrt{y})} \mathbb{1}_{x \geq 0, y \geq 0}.$$

1. Soient $U = (XY)^{1/4}$, $V = \left(\frac{X}{Y}\right)^{1/4}$. Quelle est la densité de (U, V) ?
2. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
3. Donner les densités de U et V .

Exercice 16 Un vecteur aléatoire (X, Y) admet sur \mathbb{R}^2 une loi de densité

$$f(x, y) = xe^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

On pose $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$.

1. Calculer la densité de la loi du vecteur aléatoire (U, V) .
2. En déduire la loi de U et celle de V .
3. Calculer $\text{Cov}(U, V)$.

Exercice 17 Sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , on considère un couple de variable aléatoire (X, Y) à valeur dans \mathbb{R}^2 dont la loi $P_{(X, Y)}$ admet la densité:

$$f(x, y) = \alpha(1 - x^2) \mathbb{1}_{[0, 1]}(x) y e^{-3y} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(y)$$

où α est un réel, par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{(2)}$ sur \mathbb{R}^2 .

1. Déterminer la valeur du réel α .
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .
3. Calculer $P(0 < X \leq 2; Y \geq 1)$.
4. Calculer la matrice de dispersion D de (X, Y) .

Exercice 18 On se place dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Calculer la fonction caractéristique des v.a suivante:

1. X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p .
2. X_2 suit une loi binomiale de paramètres n et p .
3. X_3 suit une loi de Poisson de paramètre p .
4. X_4 suit une loi géométrique de paramètre p .
5. X_5 suit une loi exponentielle de paramètre α .

Exercice 19

1. Trouvons la densité de la v.a. dont la fonction caractéristique est $\varphi(t) = e^{-c|t|}$
2. Soit X une v.a. uniforme sur $]a; a + b[$ de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } a < x < a + b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Calculons sa fonction caractéristique.

3. Soit a un nombre fixé. Soit X une v.a. prenant la valeur a avec $P(X = a) = 1$ et suivant la loi de Dirac au point a . Sa loi de probabilité δ_a est :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

Déterminer sa fonction caractéristique, son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 20 X une variable aléatoire dans \mathbb{R} est dite symétrique si $-X$ a même loi que X .

1. Si X a une densité f , montrer que : X est symétrique si et seulement si $f(x) = f(-x)$ pour presque tout x .
2. Donner un exemple de loi symétrique.
3. Montrer que X est symétrique si et seulement si le nombre $E(e^{iuX})$ est réel $\forall u \in \mathbb{R}$.
4. Soit X variable aléatoire dans \mathbb{R} symétrique. On suppose $P(X = 0) = 0$. On note:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \\ -1 & \text{si } X < 0. \end{cases}$$

Montrer que ε et $|X|$ sont indépendantes.

5. Si Y et Y' sont deux variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes, montrer que $Y - Y'$ est symétrique.

Exercice 21 Soit $(X_n)_n > 0$ une suite de variables aléatoires réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(|X_n|) \leq e^{-n}$.

1. Montrer que $P(|X_n| \geq 1/n) \leq ne^{-n}$.
2. En déduire que $P(\{w : \text{il existe une infinité de } n \text{ tels que } |X_n| \geq 1/n\}) = 0$.

Exercice 22 Soit X et (X_n) une famille de v.ar.

1. Montrer le égalités entre événements

$$\begin{aligned} & \{(X_n) \text{ ne converge pas vers } X\} \\ &= \\ & \bigcup_{\varepsilon \in]0, +\infty[} \limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\} \\ &= \\ & \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \limsup \{|X_n - X| > \frac{1}{p}\}. \end{aligned}$$

2. Montrer que (X_n) converge p.s vers X ssi pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0.$$

2. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_n P(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge alors suite (X_n) converge p.s. vers X .

Exercice 23 Soit (X_n) une suite de v.a.r. de carré intégrable non corrélées. On suppose qu'il existe un réel μ et un réel positif C tels que, pour tout $n \geq 1$, $E[X_n] = \mu$ et $V(X_n) \leq C$. Montrer que la suite

$$\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right)_{n \geq 1}$$

converge vers μ dans L^2 et en probabilité.

Exercice 24 Soit f une application de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} de carré intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$. On considère une suite indépendante (U_n) de v.a.r. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Démontrer directement et sans utiliser la loi des grands nombres que la suite des moyennes empiriques associée à la suite de v.a.r. $(f(U_n))$ converge en probabilité vers l'intégrale $\int_{[0,1]} f d\lambda$ au sens de Lebesgue.

Exercice 25 On note X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$, ce qui signifie que la loi de X a une densité $f(t) = ae^{-at} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ . On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n := \left(1 + \frac{X}{n} \right)^n \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}.$$

Ainsi Y_n est une variable aléatoire positive et l'expression $E(Y_n)$ a toujours un sens comme élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$.

1. Exprimer $E(Y_n)$ comme une intégrale sur $[0, +\infty[$ par rapport à λ .
2. Vérifier l'inégalité

$$\forall x \geq 0, \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq e^x.$$

On rappelle que $\ln(1 + u) \leq u$ pour tout $u \in]-1, +\infty[$.

3. On suppose que $a > 1$. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que $E(Y_n)$ tend vers une limite finie et la calculer en fonction de a .
4. Que peut-on dire de $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n)$ dans le cas $0 < a \leq 1$?

Exercice 26 Montrer que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers les variables réelles X et Y , alors les variables aléatoires réelles X et Y sont égales presque-sûrement.

Exercice 27 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite indépendante et identiquement distribuée de v.a.r. de carré intégrable d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 > 0$. Le but de cet exercice est de proposer une démonstration du théorème-limite central.

1. Quelle-est la fonction caractéristique de la v.a. $(X_1, \dots + X_n)/(\sigma/\sqrt{n})$?
2. Écrire le développement limité (à l'ordre 2) de la fonction caractéristique Φ_{X_1} en 0.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{\frac{X_1, \dots, X_n}{\sigma/\sqrt{n}}}(u)$ et en déduire la convergence en loi de la suite $\left(\frac{X_1, \dots, X_n}{\sigma/\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$.

Exercice 28 A l'aide de la loi forte des grands nombres et en considérant une suite indépendante de v.a.r. $(X_i)_{i \geq 1}$ de même loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) d\lambda^{(n)}(X_1, \dots, X_n)$$

où $\lambda^{(n)}$ est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n et f une application continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .